KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

# METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Özlem ACAR

MAYIS 2016

**Matematik Anabilim Dalında** Özlem ACAR tarafından hazırlanan METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

| | | |
|---|---|---|
| Başkan | :Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU | ____________________ |
| Üye (Danışman) | :Doç. Dr. İshak ALTUN | ____________________ |
| Üye | :Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK | ____________________ |
| Üye | :Doç. Dr. Murat OLGUN | ____________________ |
| Üye | :Yrd.Doç.Dr. Osman KEÇİLİOĞLU | ____________________ |

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**ÖZET**

METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

ACAR, Özlem
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Doç. Dr. İshak ALTUN
Mayıs 2016, 78 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle $F-$büzülme kavramı verilerek ilk alt bölümde $F-$büzülme yardımıyla Hausdorff metrik ve $\Delta-$metrikimsi fonksiyonu kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri çalışılmıştır. Bir sonraki alt bölümde graf ile donatılmış metrik uzaylarda yine sırasıyla $F-$büzülme ve hemen hemen büzülme kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri çalışılmıştır.

**Anahtar kelimeler**: Sabit nokta, metrik uzay, küme değerli dönüşüm, $F-$büzülme, yönlendirilmiş graf, hemen hemen büzülme.

## ABSTRACT

SOME FIXED POINT THEOREMS ON METRIC SPACES AND THEIR APPPLICATIONS

ACAR, Özlem
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, Ph. D. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İshak ALTUN
Mayıs 2016, 78 pages

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis.

In the third chapter, firstly we give concepts related to $F-$contraction and then in subsection some fixed point theorems are studied with Hausdorff metric and $\Delta-$distance with the aid of $F-$contraction. In another subsection of this chapter, some fixed point theorems with $F-$contraction and almost contraction on a metric space endowed with a graph are studied.

**Key Words**: Fixed point, metric space, multivalued maps, $F-$contraction, directed graph, almost contraction.

***Oğlum Yağız' a...***

**TEŞEKKÜR**

İlk olarak doktora tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, doktora çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN'a teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam boyunca, öneri, bilgi ve tecrübeleri ile doktora tezimin gelişmesine yardımcı olan değerli Tez İzleme Komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU ve Sayın Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim boyunca 2211 Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Doktora çalışmam boyunca her türlü desteği veren eşim Dr. Tuncer ACAR'a ve sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| B(X) | X' in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı |
| C(X) | X' in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı |
| CB(X) | X' in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfı |
| \|E\| | Bir grafın büyüklüğü |
| E(G) | Elemanları kenarlar olan kenar kümesi |
| F(T) | T' nin sabit noktalarının kümesi |
| G=(V(G),E(G)) | X kümesi üzerinde bir graf |
| K(X) | X' in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı |
| P(Y) | *Y*' nin boş olmayan alt kümelerinin sınıfı |
| T(A) | *A*' nın *T* küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsü |
| \|V\| | Bir grafın mertebesi |
| V(G) | Elemanları köşeler olan köşegen kümesi |
| Λ | X×X kartezyen çarpım kümesinin köşegeni |

# 1.GİRİŞ

Sabit nokta teori nonlineer analizin en güçlü ve etkin araçlarından biri olup, matematiğin birçok dalında özellikle diferensiyel denklemlere, integral denklemlere, kısmi diferensiyel denklemlere birçok uygulaması olmakla birlikte, diğer ilgili alanların varlık teorisinde çok kullanılmaktadır. Yine sabit nokta teori, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu kadar özdeğer problemlerde de çok verimli uygulamalara sahiptir. Sabit nokta teorinin en iyi bilinen sonucu ve teorinin başlangıcı olarak kabul edilen teorem Banach tarafından 1922 yılında aşağıdaki biçimde verilmiştir:

"$(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), k \in [0,1)$$

olacak biçimde bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $T$ bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir."

Her büzülme dönüşümü süreklidir. Doğal olarak, büzülme şartını sağlayan fakat sürekli olmayan bir dönüşümün varlığı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun ilk çözüm metodu 1968 yılında Kannan tarafından büzülme şartı $k \in [0, (1/2))$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

ile değiştirilerek verilmiştir. Takiben Chatterjea $k \in [0, (1/2))$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq k[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

büzülme şartı ile yeni bir sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Bu üç bağımsız şart kullanılarak, bazı araştırmacılar çeşitli genelleştirmeler yapmışlardır. Zamfirescu 1972 yılında Banach, Kannan ve Chatterjea tipli büzülmeleri birleştirerek aşağıdaki teoremi vermiştir:

"$(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $a \in [0,1), b, c \in [0, (1/2))$ olmak üzere öyle $a, b, c$ reel sayıları vardır ki aşağıdakilerden en az biri sağlanır ise $T$ bir tek sabit noktaya sahiptir.

- $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$,
- $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$,
- $d(Tx, Ty) \leq k[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$."

Yukarıda bahsedilen büzülmelerde eşitsizliklerin sağ tarafındaki katsayı veya katsayılar toplamı 1'den küçüktür. Fakat şimdi, vereceğimiz büzülmede bu katsayının veya katsayılar toplamının 1 veya 1'den büyük olabileceğini göreceğiz. Bu büzülme 2003 yılında Vasile Berinde tarafından her $x, y \in X$ için $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

ile tanımlanmış ve hemen hemen büzülme adı verilmiştir.

Daha sonra Berinde her Banach, Kannan, Chatterjea ve Zamfirescu dönüşümlerinin birer hemen hemen büzülme dönüşümü olduğunu göstermiştir.

1983 yılında I. A. Rus kıyaslama fonksiyonu kullanarak Banach Büzülme Prensibinin bir başka genelleştirmesini vermiştir. Bu genelleştirmeye göre $\phi, \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir kıyaslama fonksiyonu ve her $x, y \in X$ için $T$ dönüşümü

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y))$$

şartını sağlamak üzere, tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

2004 yılında Berinde, $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton artan, her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\lim_{n\to\infty} \phi^{\mathrm{n}}(t) = 0$ şartlarını sağlayan kıyaslama fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki genelleştirilmiş sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

"$(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$, $c$ −kıyaslama fonksiyonu ile bir hemen hemen büzülme dönüşümü olsun. Yani $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir kıyaslama fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) + Ld(x, Ty)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ var olsun. Bu durumda T bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir."

Banach Büzülme Prensibinin en dikkat çekici genelleştirmesi 2012 yılında Wardowski tarafından $F$ −büzülme kavramı tanımlanarak verilmiştir. Bu genelleştirmede Wardowski, tam metrik uzaylarda $F$ −büzülme dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir.

Diğer taraftan 1969 yılında Nadler Banach Büzülme Prensibini küme değerli dönüşümler için Hausdorff metriğini kullanarak tam metrik uzaylar üzerinde çalışmış ve bu tip büzülme dönüşümlerinin sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuçtan esinlenerek özellikle son yıllarda, küme değerli büzülmeler ile birçok sabit nokta teoremi verilmiştir. Elde edilen bu teoremlerin ışığında S. Reich tarafından aşağıdaki problem formülize edilmiştir.

"$(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$, her $x, y \in X, x \neq y$ ve $\alpha: (0, \infty) \to [0,1)$

$$\limsup_{s \to t^+} \alpha(s) < 1, \forall t \in (0, \infty)$$

olmak üzere

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahip midir? Bu problemin ilk kısmi cevabı Reich tarafından verilmiş, daha sonra ise ikinci cevap

$\alpha: (0, \infty) \to [0,1), \limsup_{s \to t^+} \alpha(s) < 1, \forall t \in [0, \infty)$

şartını sağlaması durumunda Mizoguchi ve Takahashi tarafından verilmiştir. 2007 yılında ise M. Berinde ve V. Berinde küme değerli hemen hemen büzülme kavramını tanımlayarak tam metrik uzaylarda bu tip dönüşümler için sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır.

Sabit nokta teori ve graf teori birleştirilerek Echenique Tarski sabit nokta teoreminin ispatını vermiştir. 2006 yılında ise Espinola and Kirk sabit nokta sonuçlarından bazılarını graf teoriye uygulamışlardır. Yakın zamanda ise J. Jachymski tek değerli dönüşümler için Beg, Butt and Radojevic de küme değerli dönüşümler için graf ile donatılmış metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır.

Tezimizin ilk kısmında küme değerli dönüşümler için Nadler sabit nokta teoreminin genelleştirmelerini Hausdorff metrik ve $\Delta -$metrikimsi fonksiyonunu kullanarak vereceğiz. İkinci kısımda ise graf ile donatılmış metrik uzaylarda $F -$büzülme ve hemen hemen büzülme kavramlarını kullanarak yeni sabit nokta teoremleri ispatlayacağız. Ayrıca vereceğimiz örneklerle grafın büzülme şartı üzerindeki etkisini göstereceğiz.

### 1.1. Kaynak özetleri

Metrik uzay, topolojik uzay ve fonksiyonel analiz ile ilgili temel kavramlar için M. Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" adlı kitabı ile Y. Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitabı kullanılmıştır (1,2). Graf teori ile ilgili temel kavramlar için R. Johnsonbaugh, "Discrete mathematics" adlı kitabından yararlanılmıştır. Sabit nokta teorinin tarihi literatür bilgisi için S. Banach'ın "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales" adlı makalesinden, R. Kannan' nın "Some results on fixed points" adlı makalesinden, S. K. Chatterjea'nın "Fixed point theorems" adlı makalesinden, T. Zamfirescu' nun "Fixed point theorems in metric spaces" adlı makalesinden, V. Berinde' nin "Approximating fixed points of weak ϕ-contractions using the Picard iteration" adlı makalesinden, I.A. Rus'un "Generalized Contractions ile On the approximation of fixed points of weak ϕ-contractive operators” adlı makalelerinden yararlanılmıştır. Küme değerli sabit nokta teori ile ilgili literatür bilgisi için ise D. Wardowski’nin “Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces” adlı makalesinden, S. B. Nadler’ in “Multi-valued contraction mappings” adlı makalesinden, S. Reich’in “Fixed points of contractive functions” ile “Some fixed point problems” adlı makalelerinden, N. Mizoguchi ve W. Takahashi’nin “Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces” adlı makalesinden, M. Berinde ve V. Berinde’nin “On a general class of multi-valued weakly Picard mappings” adlı makalesinden yararlanışmıştır. Ayrıca yine bu bölümde B. Fisher’ın “Common fixed points of mappings and set-valued mappings”, “Fixed points for set-valued mappings on metric spaces” , “Set-valued mappings on metric spaces” ve “Common fixed points of set-valued mappings” adlı makalelerinden yararlanılmıştır.

Yine graf teorinin tarihsel gelişimi ile ilgili F. Echenique’ nin “A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem” adlı makalesinden, R. Espínola ve W.A. Kirk’in “Fixed point theorems in R-trees with applications to graph theory” adlı makalesinden, J. Jachymski’nin “The contraction principle for mappings on a complete metric space with a graph” adlı makalesinden, I. Beg, A.R. Butt ve S. Radojević,’in “The contraction principle for set valued mapping on a metric space with a graph” adlı makalesinden yararlanılmıştır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez boyunca sıkça kullanacağımız bazı temel tanımlar ve topolojik kavramları vereceğiz.

**Tanım 2.1** $X$ boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna bir metrik, $(X, d)$ ikilisine de bir metrik uzay denir.
a) $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
b) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
c) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

**Tanım 2.2** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine $x_0$ merkezli $r$ yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

**Tanım 2.3** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $U$, $X$' in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $U$ kümesine açık küme denir. Eğer $U^c = X \backslash U$ kümesi açık ise $U$ kümesine kapalı küme denir.

**Önerme 2.1** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.
*a)* $(X, d)$ uzayındaki her açık yuvar açık bir kümedir.
*b)* $(X, d)$ uzayındaki her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.

**Tanım 2.4** $X$ boş olmayan bir küme ve $\tau$, $X$' in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $\tau$ sınıfı, aşağıdaki şartları sağlıyor ise $\tau$ sınıfına $X$ üzerinde bir topoloji ve $(X, \tau)$ ikilisine de bir topolojik uzay denir.
$a)$ $\emptyset, X \in \tau$,
$b)$ $\tau$' ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti $\tau$' ya ait,
$c)$ $\tau$' ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi $\tau$' ya aittir.

**Tanım 2.5** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Eğer $\tau$'nun her elemanı $\beta$ nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\beta$'ya $\tau$ topolojisi için bir taban (baz) denir.

**Tanım 2.6** Bir $(X, \tau)$ topolojik uzayında $\tau$'nun elemanlarına açık kümeler denir. $A \subseteq X$ için $A^c = X \backslash A$ kümesi açık ise $A$ kümesine kapalı küme denir. $A$ kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine $A$'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $A$ kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimide ise $A$ kümesinin içi denir ve $A^o$ ile gösterilir. Bir $x \in X$ noktasını içeren her $G$ açık kümesi için $(G \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına $A$'nın bir yığılma noktası denir. $A$'nın tüm yığılma noktalarının kümesi $A'$ ile gösterilir.

**Tanım 2.7** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in G$ olacak şekildeki her $G$ açık kümesi için, $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in G$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir ve bu durum $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ya da kısaca $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.8** $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \tau_2$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \tau_1$ varsa $f$ fonksiyonuna $x \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer $f$ fonksiyonu $X$' in her noktasında sürekli ise $f$'ye bir sürekli fonksiyon denir.

**Tanım 2.9** $(X, \tau_1)$ ve $(Y, \tau_2)$ iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $(X, \tau_1)$ uzayında $x$ noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için $(Y, \tau_2)$ uzayında $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyorsa $f$ fonksiyonuna $x$ noktasında dizisel süreklidir denir. $f$ fonksiyonu $X$'inbn her noktasında dizisel sürekli ise $f$' ye $X$'nde dizisel süreklidir veya kısaca dizisel sürekli denir.

**Uyarı 2.1** Her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir, fakat genelde tersi doğru değildir. Ancak, metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik kavramları birbirine denktir.

**Tanım 2.10** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine $A$ ve $B$ kümeleri arasındaki uzaklık,

$$D(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

değerine $x$ noktasının $A$ kümesine uzaklığı,

$$d(A) = \sup \{d(a, b) : a, b \in A\}$$

değerine $A$ kümesinin çapı denir. Eğer $d(A) < \infty$ ise $A$ kümesine sınırlı küme, $d(A) = \infty$ ise $A$ kümesine sınırsız küme denir.

**Tanım 2.11** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ kümesi } (X, d) \text{ uzayında açık}\}$$

sınıfı $X$ üzerinde bir topolojidir. $X$ üzerindeki bu $\tau_d$ topolojisine metrik topolojisi veya $d$ metriğinin ürettiği topoloji denir. $(X, \tau_d)$ ikilisine de metrik topolojik uzay denir.

**Tanım 2.12** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ terimleri $X$' de olan bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir. $x$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti adı verilir.

**Teorem 2.1** Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir.

**Tanım 2.13** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

**Teorem 2.2** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de yakınsaktır ve aynı noktaya yakınsar.

**Tanım 2.14** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ $X$ de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, $m > n \geq n_0$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizine bir Cauchy dizisi denir. Eğer $(X, d)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

**Teorem 2.3** Bir $(X, d)$ metrik uzayında yakınsak her $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca, her Cauchy dizisi sınırlıdır.

**Önerme 2.2** $(X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ , $X$'de bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 2.15** $(X, d)$ ve $(Y, e)$ metrik uzaylar, $f : (X, d) \to (Y, e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa, diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0, x) < \delta$ olduğunda $e(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $f$ fonksiyonu $x_0$ noktasında süreklidir denir. Eğer $f$ fonksiyonu $X$' in her noktasında sürekli ise $f$' ye bir sürekli fonksiyon denir.

**Tanım 2.16** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A$, $X'$ in bir alt kümesi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$(B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına $A$' nın bir yığılma noktasıdır denir. $A$' nın tüm yığılma noktalarının kümesi $A'$ ile gösterilir. $A \cup A'$ kümesine $A$' nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

**Önerme 2.3** $(X,d)$ metrik uzay ve $A$, $X$' in bir alt kümesi ve $x$, $A$' nın bir yığılma noktası olsun. Bu durumda her bir $B(x,\varepsilon)$ açık yuvarı $A$' nın sonsuz sayıda elemanını içerir.

**Teorem 2.4** $(X,d)$ metrik uzay ve $A$, $X$' in bir alt kümesi olsun. Bu durumda bir $x$ noktası $A$' nın bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ kümesinden $x$ den farklı $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarını seçmek mümkündür.

**Teorem 2.5** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $A$, $X$' in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

**Uyarı 2.2** $(X,\tau)$ topolojik uzayında $x \in \overline{A}$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde $A$ içinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulunmayabilir. Örneğin,

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \backslash U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$ sayılabilir tümleyenler uzayını göz önüne alalım. $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0,1)'$ de 2 noktasına yakınsayan hiçbir dizi yoktur.

**Sonuç 2.1** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $A$ kapalıdır ancak ve ancak $A$' daki yakınsak her dizinin limiti $A$ dadır.

**Teorem 2.6** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $A$, $X$' in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dır.

**Teorem 2.7** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $A$, $X$' in bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $D(x,A) = 0$ dır.

**Sonuç 2.2** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $A$, $X$' in kapalı bir alt kümesi olsun.

$D(x, A) = 0$ dır ancak ve ancak $x \in A$ dır.

**Tanım 2.17** Bir $(X, \tau)$ topolojik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine $A$ kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer, açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1, 2, \cdots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye $A$ kümesinin sonlu bir alt örtüsü denir.

**Tanım 2.18** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $A$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa $A$ kümesine kompakt küme denir. Eğer, $X$ kompakt bir küme ise $(X, \tau)$ topolojik uzayına kompakt topolojik uzay denir.

**Teorem 2.8** Bir $(X, \tau)$ kompakt topolojik uzayının kapalı her alt kümesi de kompaktır.

**Tanım 2.19** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay olsun. $X$' in farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeler varsa $(X, \tau)$ topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.

**Teorem 2.9** Bir $(X, \tau)$ Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır.

**Teorem 2.10** $(X, \tau)$ bir topolojik uzay, $A$, $X$' in boş olmayan kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $f(a) = \sup f(A)$ ve $f(b) = \inf f(A)$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.

**Teorem 2.11** Bir $(X, d)$ metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

**Teorem 2.12** $(X, d)$ metrik uzay ve $A$ ile $B$, $X$' in boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $A$ kompakt ise $D(A, B) = D(p, B)$ olacak şekilde bir $p \in A$ noktası vardır.

**Sonuç 2.3** $(X, d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A$, $X$' in kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(x, a) = D(x, A)$$

olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

## 2.2. Küme Değerli Dönüşümler, Hausdorff Metriği ve $\Delta-$Metrikimsi Fonksiyonu

Bu bölümde küme değerli dönüşüm, küme değerli dönüşümün sabit noktası, üstten ve alttan yarı süreklilik kavramları verilecektir. Ayrıca Hausdorff metriği ve $\Delta-$ metrikimsi fonksiyonu kavramları ve bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.20** $X$ ve $Y$ boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise $T$' ye $X$' den $Y$' ye bir küme değerli (çoğul değerli) dönüşüm denir. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{P}(Y)$, $Y$ nin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfıdır. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ küme değerli dönüşümünün tersi

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow (y, x) \in T^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. $T$, $X$' den $Y$' ye bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. $T$' nin $x$ noktasındaki görüntüsü

$$Tx = \{y \in Y : (x, y) \in T\}$$

kümesidir. Yine $A \subseteq X$ için $T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$ kümesi $A$' nın $T$ küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca,

$$\bigcup_{x \in A} Tx = \{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\}$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} u &\in T(A) = \bigcup_{x\in A} Tx \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için } u \in Tx \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için } (x,u) \in T \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A \text{ için } x \in T^{-1}(u) \\ &\Leftrightarrow T^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow u \in \left\{ y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset \right\} \end{aligned}$$

bulunur. $B \subseteq Y$ için

$$T^{-1}(B) = \bigcup_{y\in B} T^{-1}(y)$$

kümesine $B$' nin $T^{-1}$ altındaki görüntüsü (veya $T$ altındaki ters görüntüsü) denir. Benzer şekilde

$$\bigcup_{y\in B} T^{-1}(y) = \{x \in X : Tx \cap B \neq \emptyset\}$$

olduğu gösterilebilir.

**Tanım 2.21** $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya $T$' nin sabit noktası denir. $T$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani

$$F(T) = \{x \in X : x \in Tx\}$$

dir.

**Örnek 2.1** $X = [0,1]$ olmak üzere $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ [0, 1-x] & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ile anımlansın. O halde

$$T\,(0) = \{1\} \quad , \quad T(\tfrac{3}{4}) = \left[0, \tfrac{1}{4}\right]$$

$$T(\tfrac{1}{2}) = [0,1] \quad , \quad T((\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})) = [0,1]$$

$$T((0, \tfrac{1}{4}) = \{1\} \quad , \quad T((\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4})) = \left[0, \tfrac{1}{2}\right)$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{2} \in T\frac{1}{2} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{2}$, $T$' nin bir sabit noktasıdır.

**Tanım 2.22** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $Y$' deki her kapalı kümenin ters görüntüsü $X$' de kapalı oluyorsa, $T$' ye üstten yarı sürekli, $Y$' deki her açık kümenin ters görüntüsü $X$' de açık ise $T$' ye alttan yarı sürekli dönüşüm denir. Eğer bir küme değerli dönüşüm hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.

**Örnek 2.2** $T : [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{3}{4}\right\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ \left\{\frac{1}{4}\right\} & , \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. Çünkü $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ açık kümesi için $T^{-1}\,(V) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ olup açık değildir. Burada dikkat edelim ki her kapalı kümenin ters görüntüsü de kapalıdır.

**Örnek 2.3** $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \quad x \neq 0 \\ [-1,1] & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. $K$ kapalı kümesi için

$$T^{-1}(K) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \ 0 \in K \\ \\ \{0\} & , \ 0 \notin K \text{ ve } K \cap [-1,1] \neq \emptyset \\ \\ \emptyset & , \ K \cap [-1,1] = \emptyset \end{cases}$$

olduğundan $T$ dönüşümü üstten yarı süreklidir. Ancak $U = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ açığı için $T^{-1}(U) = \{0\}$ olup açık değildir. O halde $T$ dönüşümü alttan yarı sürekli değildir.

**Örnek 2.4** $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} [-1,1] & , \ x \neq 0 \\ \\ \{0\} & , \ x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T$ dönüşümü alttan yarı süreklidir ancak üstten yarı sürekli değildir. Bu dönüşümde bir açık kümenin ters görüntüsü ya $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ya $\mathbb{R}$ ya da $\emptyset$ dur. Dolayısıyla $T$ dönüşümü alttan yarı süreklidir. Ancak, $K = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kapalı kümesi için $T^{-1}(K) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ olup kapalı değildir. O halde $T$ dönüşümü üstten yarı sürekli değildir.

$(X,d)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{K}(X)$, $X$' in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı, $\mathcal{CB}(X)$, $X$' in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfı, $C(X)$, $X$' in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı ve $\mathcal{B}(X)$, $X$' in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq C(X)$ ve $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ olduğu açıktır. $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$\delta(A,B) = \sup_{x \in A} \{D(x,B)\} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y)$$

ve

$$\begin{aligned} H(A,B) &= maks\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \\ &= maks\left\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y), \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} d(x,y)\right\} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

**Örnek 2.5** $X = \mathbb{R}$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $A = [1, 2]$ ve $B = [4, \infty)$ kümeleri için

$$\delta(A, B) = 3,\ \ \delta(B, A) = \infty$$

olduğundan

$$H(A, B) = maks\,\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = \infty$$

bulunur. $\delta$' nin simetrik olmadığı buradan görülebilir. Yani genelde $\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ dır. Ayrıca, $\delta$ ve $H$' ın $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksi yonlar olmadığı da görülmektedir.

**Uyarı 2.1** Eğer $A$ ve $B$ kümeleri $(X, d)$ metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise $\delta(A, B)$, $\delta(B, A)$ ve $H(A, B)$ birer reel sayıdır. O halde $\delta$ ve $H$, $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.

**Örnek 2.6** $X = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $A = [2, 4]$ ve $B = (2, 4)$ kümeleri için

$$\delta(A, B) = \delta(B, A) = 0$$

olduğundan

$$H(A, B) = maks\,\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = 0$$

bulunur. Burada $H(A, B) = 0$ olmasına rağmen $A \neq B$ dir. Yani $H : \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir metrik değildir.

**Teorem 2.13** $(X, d)$ bir metrik uzay, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olsun. Bu durumda

$$H(A, B) = \sup\,\{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\}$$

dir.

**İspat** Her $x \in X$ ve her $b \in B$ için

$$D(x, A) \leq d(x, b) + D(b, A)$$

yazılabilir. $D(b, A) \leq H(A, B)$ olduğundan

$$D(x, A) \leq d(x, b) + H(A, B)$$

olup bu eşitsizlik her $b \in B$ için de geçerlidir. Dolayısıyla

$$D(x, A) \leq D(x, B) + H(A, B)$$

veya

$$D(x, A) - D(x, B) \leq H(A, B)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$D(x, B) - D(x, A) \leq H(A, B)$$

elde edilir. Bu durumda her $x \in X$ için

$$|D(x, B) - D(x, A)| \leq H(A, B)$$

olur ki buradan

$$\sup_{x \in X} |D(x, A) - D(x, B)| \leq H(A, B) \tag{2.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \delta(B, A) &= \sup \{D(b, A) : b \in B\} \\ &= \sup \{D(b, A) - D(b, B) : b \in B\} \\ &\leq \sup \{D(x, A) - D(x, B) : x \in X\} \\ &\leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\delta(A, B) \leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\}$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} H(A, B) &= maks \{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \\ &\leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

bulunur. O halde (2.1) ve (2.2) den istenilen eşitlik elde edilir.

**Uyarı 2.2** $A$ ve $B$, reel sayıların boş kümeden farklı üstten sınırlı iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\sup(A \cup B) = maks\{\sup A, \sup B\}$$

dir. Gerçekten

$$A \subseteq A \cup B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \sup(A \cup B)$$

ve

$$B \subseteq A \cup B \quad \Rightarrow \quad \sup B \leq \sup(A \cup B)$$

olduğundan

$$maks\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B) \tag{2.3}$$

elde edilir. Şimdi $x \in A \cup B$ olsun. Bu durumda $x \in A$ veya $x \in B$ dir. Dolayısıyla $x \leq \sup A$ veya $x \leq \sup B$ dir. Buradan ise

$$x \leq maks\{\sup A, \sup B\}$$

elde edilir. Böylece

$$\sup(A \cup B) \leq maks\{\sup A, \sup B\} \tag{2.4}$$

olur. O halde (2.3) ve (2.4) den istenilen eşitlik elde edilir.

Aşağıdaki önermede $\delta$' nın bazı özellikleri incelenmiştir.

**Önerme 2.4** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

*a)* $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$

*b)* $B \subseteq C \Rightarrow \delta(A, C) \leq \delta(A, B)$

*c)* $\delta(A \cup B, C) = maks\{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$

*d)* $\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$.

**İspat** $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ olsun.

$a)$

$$\begin{aligned}\delta(A,B)=0 &\Leftrightarrow \sup_{x\in A}\{D(x,B)\}=0\\ &\Leftrightarrow \text{her } x\in A \text{ için } D(x,B)=0\\ &\Leftrightarrow \text{her } x\in A \text{ için } x\in \overline{B}\\ &\Leftrightarrow A\subseteq \overline{B}\end{aligned}$$

$b)$ $B\subseteq C$ olsun. Her $x\in X$ için $D(x,C)\le D(x,B)$ dir. Bu durumda her $x\in A$ için de $D(x,C)\le D(x,B)$ eşitsizliği sağlandığından $\delta(A,C)\le\delta(A,B)$ elde edilir.
$c)$ Uyarı 2.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\delta(A\cup B,C) &= \sup_{x\in A\cup B}\{D(x,C)\}\\ &= maks\left\{\sup_{x\in A}\{D(x,C)\},\sup_{x\in B}\{D(x,C)\}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.
$d)$ $a\in A, b\in B$ ve $c\in C$ olsun. Bu durumda

$$d(a,b)\le d(a,c)+d(c,b)$$

olur. Burada $b\in B$ üzerinden infimum alınırsa

$$D(a,B)\le d(a,c)+D(c,B)$$

elde edilir. $D(c,B)\le\delta(C,B)$ olduğundan

$$D(a,B)\le d(a,c)+\delta(C,B)$$

olur. Son eşitsizlikte $c\in C$ üzerinden infimum alınırsa

$$D(a,B)\le D(a,C)+\delta(C,B)$$

olur. Yine $D(a,C)\le\delta(A,C)$ olduğundan

$$D(a,B)\le\delta(A,C)+\delta(C,B)$$

olur. Böylece $a \in A$ üzerinden supremum alınırsa

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

elde edilir.

**Uyarı 2.3** Önerme 2.1 de $B$ kümesi kapalı ise

$$\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq B$$

ifadesinin doğru olduğu aşikardır.

**Önerme 2.5** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda $H$, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir.

**İspat** $H$' ın $\mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X)$ üzerinde tanımınlı bir reel değerli fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca tanımdan

$$H(A,B) = H(B,A)$$

dır. Şimdi $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} H(A,B) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad maks\,\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \delta(A,B) = 0 \text{ ve } \delta(B,A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ ve } B \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \quad A = B \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $a, b, c, d \in [0, \infty)$ için

$$maks\,\{a+b, c+d\} \leq maks\,\{a,c\} + maks\,\{b,d\}$$

özelliğini kullanarak $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$ için

$$\begin{aligned} H(A,B) &= maks\,\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \\ &\leq maks\,\{\delta(A,C) + \delta(C,B), \delta(B,C) + \delta(C,A)\} \\ &\leq maks\,\{\delta(A,C), \delta(C,A)\} + maks\,\{\delta(B,C), \delta(C,B)\} \\ &= H(A,C) + H(C,B) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $H : \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \to \mathbb{R}$ bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Hausdorff metriğinin $d$' ye bağlı olduğu aşağıdaki örnekle gösterilebilir. Ayrıca, eğer $(X, d)$ tam metrik uzay ise $(\mathcal{CB}(X), H)$ ve $(\mathcal{K}(X), H)$ metrik uzayları da tamdır.

**Örnek 2.7** $X = \mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x, y) = |x - y|$ ve

$$d_2(x, y) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x \neq y \\ 0 \quad , \quad x = y \end{cases}$$

metriklerini göz önüne alalım. Bu durumda $A = [0, 1]\,, B = [3, 5]$ kümeleri için $H_1(A, B) = 4$ ve $H_2(A, B) = 1$ olur. Burada dikkat edelim ki her iki küme de $d_1$ ve $d_2$ metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.

**Lemma 2.1** $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

**İspat** $a \in A$ için

$$D(a, B) = \inf \{d(a, y) : y \in B\}$$

olur. İnfimumun tanımından her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a, b) \leq D(a, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Diğer taraftan

$$D(a, B) \leq \delta(A, B) \leq H(A, B)$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

Lemma 2.1 'i aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz.

**Lemma 2.2** $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. Bu durumda her $q > 1$ için

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

**İspat** Eğer $H(A,B) = 0$ ise $A = B$ dir. Bu durumda $b$, $a$ olarak alınırsa her $q > 1$ için

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır. Şimdi $H(A,B) > 0$ olsun. Bu durumda

$$\varepsilon = (q-1)\,H(A,B) > 0$$

olarak seçilirse Lemma 2.1 gereğince her $q > 1$ için

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq H(A,B) + \varepsilon \\ &= H(A,B) + (q-1)\,H(A,B) \\ &= qH(A,B) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

**Önerme 2.6** $(X,d)$ bir metrik uzay olsun. Her $A, B, C, D \in \mathcal{CB}(X)$ için

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq maks\,\{H(A,C), H(B,D)\}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat** Önerme 2.4 dikkate alınırsa

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1) = maks\,\{\delta(A_1,B_1), \delta(A_2,B_1)\}$$

olduğundan

$$\delta(A \cup B, C \cup D) = maks\,\{\delta(A, C \cup D), \delta(B, C \cup D)\}$$

yazabiliriz. Yine

$$B_1 \subseteq A_1 \cup A_2 \Rightarrow \delta(A_1 \cup A_2) \leq \delta(B_1)$$

özelliğinden

$$\begin{aligned}\delta(A \cup B, C \cup D) &= maks\,\{\delta(A, C \cup D), \delta(B, C \cup D)\} \\ &\leq maks\,\{\delta(A, C), \delta(B, D)\} \\ &\leq maks\,\{H(A, C), H(B, D)\}\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\delta(C \cup D, A \cup B) \leq maks\,\{H(A, C), H(B, D)\}$$

olduğunu gösterebiliriz. Böylece $H$ ın tanımı gereği

$$\begin{aligned}H(A \cup B, C \cup D) &= maks\,\{\delta(A \cup B, C \cup D), \delta(C \cup D, A \cup B)\} \\ &\leq maks\,\{H(A, C), H(B, D)\}\end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 2.3** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$D(z, Tz) \leq d(z, x) + D(x, Tz)$$

dir.

**İspat** Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned}D(z, Tz) &= \inf\,\{d(z, y) : y \in Tz\} \\ &\leq \inf\,\{d(z, x) + d(x, y) : y \in Tz\} \\ &= d(z, x) + \inf\,\{d(x, y) : y \in Tz\} \\ &= d(z, x) + D(x, Tz)\end{aligned}$$

elde edilir.

**Lemma 2.4** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$D(z,Tz) \leq D(z,Tx) + H(Tx,Tz)$$

dir.

**İspat** Her $v \in X$ için

$$D(z,Tz) \leq d(z,v) + D(v,Tz)$$

olduğundan her $v \in Tx$ için de

$$D(z,Tz) \leq d(z,v) + D(v,Tz)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$D(v,Tz) \leq H(Tx,Tz)$$

olduğundan her $v \in Tx$ için

$$D(z,Tz) \leq d(z,v) + H(Tx,Tz)$$

olur. $v \in Tx$ üzerinden infimum alınırsa istenilen elde edilir.

**Tanım 2.23** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{B}(X)$, $X$' in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı olsun. $A, B \in \mathcal{B}(X)$ için $\Delta$ metrikimsi fonksiyonu

$$\Delta(A,B) = \sup\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

ile tanımlanır.

Eğer $A = \{a\}$ ise bu durumda $\Delta(A,B) = \Delta(a,B)$ dir. Üstelik $B = \{b\}$ ise

$$\Delta(A,B) = \Delta(a,b) = d(a,b)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta(A,B) &= \sup\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{d(b,a) : a \in A, b \in B\} \\ &= \Delta(B,A) \geq 0 \end{aligned}$$

ve her $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ için

$$\Delta(A,B) \leq \Delta(A,C) + \Delta(C,B)$$

dır.

**Tanım 2.24** $\{A_n\}$, $\mathcal{B}(X)$ üzerinde bir dizi olsun. $\{A_n\}$, $A \subseteq X$ kümesine yakınsaktır ancak ve ancak
*a)* $a \in A$ olması $n \in \mathbb{N}$ için $A_n$ de $a_n \to a$ olacak şekilde bir $\{a_n\}$ dizisinin var ve
*b)* $\varepsilon > 0$ için $\exists m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n > m$ için

$$A_n \subseteq A_\varepsilon = \{x \in X : d(x,a) < \varepsilon, a \in A\}$$

olmasıdır.

**Lemma 2.5** $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, $\mathcal{B}(X)$ üzerinde iki dizi ve $(X,d)$ tam metrik uzay olsun. Eğer $A_n \to A \in \mathcal{B}(X)$ ve $B_n \to B \in \mathcal{B}(X)$ ise $\Delta(A_n, B_n) \to \Delta(A,B)$.

**İspat** $\varepsilon > 0$ olsun. $n > N$ iken

$$\begin{aligned}\Delta(A_n,B_n) &\leq \Delta(A_\varepsilon, B_\varepsilon)\\ &= \sup\left\{d(a^{'},b^{'}) : a^{'} \in A_\varepsilon, b^{'} \in B_\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

olacak biçimde $N$ tamsayısı vardır. Ayrıca her $a^{'} \in A_\varepsilon$ ve $b^{'} \in B_\varepsilon$ için $d(a^{'},a) < \varepsilon$ ve $d(b^{'},b) < \varepsilon$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Böylece

$$d(a^{'},b^{'}) < d(a,b) + 2\varepsilon$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta(A_n,B_n) < \sup\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} + 2\varepsilon = \Delta(A,B) + 2\varepsilon \qquad (2.5)$$

bulunur. Ayrıca $n > N^{'}$ iken her $a \in A, b \in B$ için $a_n \in A_n, b_n \in B_n$ ve

$$d(a,a_n) < \varepsilon, d(b,b_n) < \varepsilon$$

olacak biçimde $N^{'}$ tamsayısı vardır ve

$$d(a,b) \leq d(a_n,b_n) + 2\varepsilon$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \Delta(A,B) &= \sup\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \\ &\leq \sup\{d(a_n,b_n) : a_n \in A_n, b_n \in B_n\} + 2\varepsilon \\ &= \Delta(A_n,B_n) + 2\varepsilon \end{aligned} \tag{2.6}$$

olup (2.5) ve (2.6) den istenilen elde edilir.

**Lemma 2.6** Eğer $\{A_n\}$, $(X,d)$ tam metrik uzayının boş olmayan sınırlı altkümelerinin bir dizisi ve bazı $y \in X$ için $\Delta(A_n, y) \to 0$ ise $A_n \to \{y\}'$dir.

Ayrıca 1981 yılında Fisher $\Delta-$metrikimsi fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

**Teorem 2.14** $(X,d)$ tam metrik uzay ve $T : X \to B(X)$, her $x, y \in X$ için

$$\Delta(Tx,Ty) \leq cmaks \left\{ \begin{array}{c} d(x,y), \Delta(x,Tx), \Delta(y,Ty), \\ \Delta(x,Ty), \Delta(y,Tx) \end{array} \right\}, \qquad 0 \leq c < 1$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca her $A \in B(X)$ için $TA \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Tanım 2.25** $(X,d)$ metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{B}(X)$ olsun. Eğer $\{x_n\} \subset X \to x$ iken $\{Tx_n\} \subset B(X) \to Tx$ ise $T$ dönüşümü $x \in X$ noktasında süreklidir denir.

**Lemma 2.7** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(X)$ e her $x \in X$ için $Tx$ kapalı olacak şekilde üstten yarısürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ve $y_n \in Tx_n$ ise $y_0 \in Tx_0$ dır.

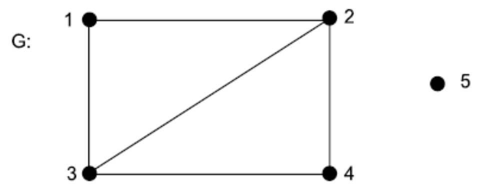
## 2.3. Graf Teori

Bu bölümde graf teori hakkında bazı temel bilgiler verilerek örneklendirmeler yapılacaktır.

**Tanım 2.26** $X$ boş olmayan bir küme ve $\Lambda$, $X \times X$ kartezyen çarpım kümesinin köşegeni olsun. $V(G)$, elemanları köşeler olan köşegen kümesi, $E(G)$ ise kenar kümesi olmak üzere $X$ üzerinde bir graf $G = (V(G), E(G))$ ile tanımlanır. Örneğin, $G = (V(G), E(G))$ olmak üzere

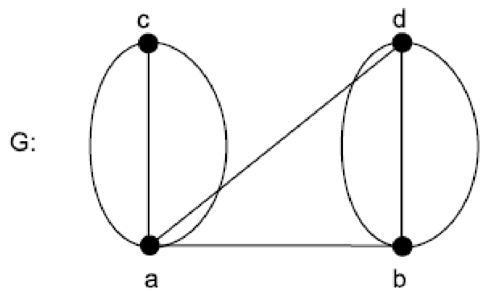
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ve } E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

ile verilen graf



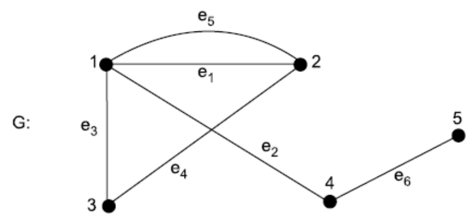

biçimindedir.

$G = (V(G), E(G))$ bir graf olsun. $|V|$, $G$' nin mertebesini $|E|$ ise $G$' nin büyüklüğünü gösterir. $|V|$ , grafdaki köşe sayısı ile $|E|$ ise grafdaki kenar sayısı ile hesaplanır. Örneğin



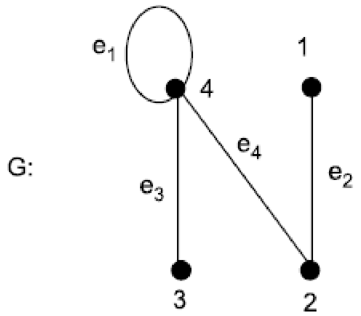

ile verilen grafda $|V| = 4, |E| = 8$ dir.

**Tanım 2.27** Eğer bir köşegen çifti arasında birden fazla kenar var ise, bu kenarlar paralel kenar olarak adlandırılır. Örneğin,



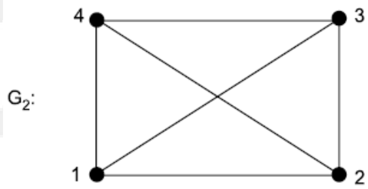
ile verilen grafda $e_1$ ve $e_5$ paralel kenarlardır.

Bir grafda başlangıç ve bitiş köşesi aynı olan kenar loop yani döngü olarak adlandırılır. Örneğin



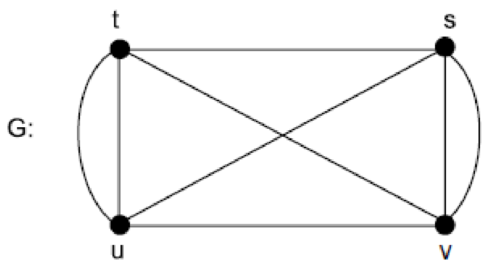

ile verilen grafda $e_1$ kenarı bir loop yani döngüdür.

**Tanım 2.28** $G = (V(G), E(G))$ ile verilen bir grafda eğer hiç paralel kenar veya döngü yoksa, bu grafa basit graf denir. Örneğin,



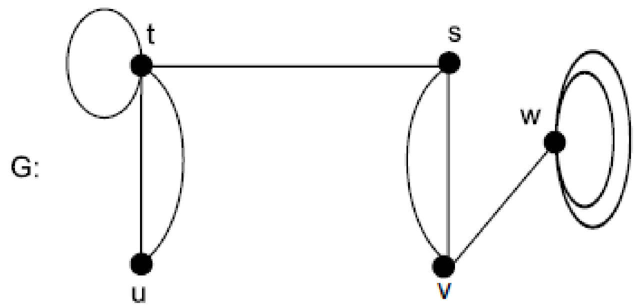

ile verilen $G_2$ bir basit graftır.

**Tanım 2.29** $G = (V(G), E(G))$ ile verilen bir grafda eğer paralel kenar varsa bu grafa çoklu graf denir. Örneğin,




ile verilen graf bir çoklu graftır.

**Tanım 2.30** $G = (V(G), E(G))$ ile verilen bir grafda eğer paralel kenar ve döngü varsa, bu grafa Pseudo graf denir. Örneğin,

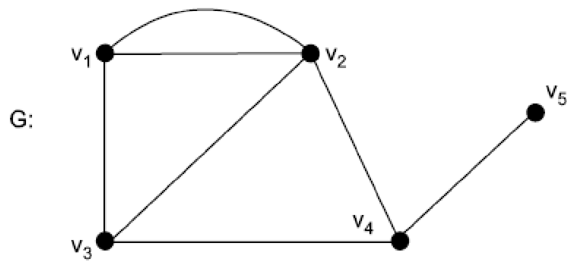



bir Pseudo graftır.

**Tanım 2.31** $G = (V(G), E(G))$ bir graf, $x$ ve $y$ de bu grafda herhangi iki köşegen olsun. $x$ den $y$ ye $k \in \mathbb{N}$ uzunluğunda bir yol

$$x_0 = x, x_k = y \text{ ve } (x_{i-1}, x_i) \in E(G)\ ,\ i \in \{1, 2, ..., k\}$$

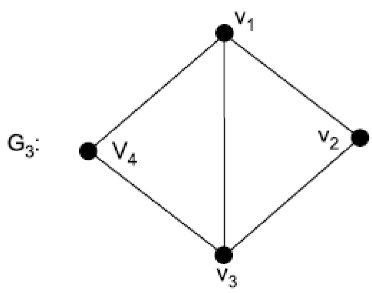
ile oluşturulan köşegenlerin sonlu bir $\{x_n\}$ dizisidir. Örneğin,




ile verilen grafda $v_1v_2v_1v_3v_4v_5$ bir yoldur.

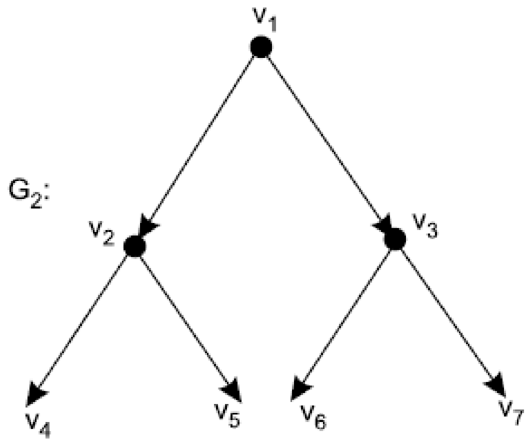
**Tanım 2.32** $G = (V(G), E(G))$ bir graf olsun. Eğer grafdaki her kenar bazı ağırlıklara sahipse bu grafa ağırlıklı graf denir. Genelde bir kenarın ağırlığı iki köşe arasındaki uzaklık ile hesaplanır.

**Tanım 2.33** $G = (V(G), E(G))$ bir yönlendirilmemiş graf olsun. Eğer herhangi iki köşegen arasında bir yol varsa $G$ ye bağlantılıdır denir. Örneğin



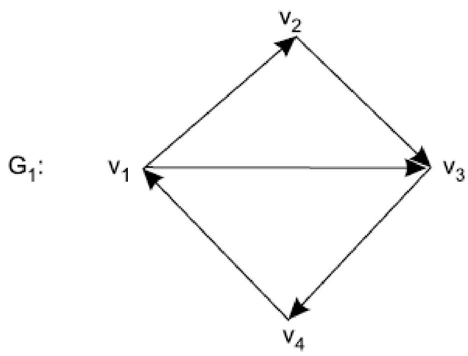
ile verilen graf bağlantılıdır.

**Tanım 2.34** $\tilde{G}$, $G$ den kenarların yönlendirilmesi ihmal edilerek elde edilen bir yönlendirilmemiş graf olsun. Eğer $\tilde{G}$ bağlantılı ise $G$ ye zayıf bağlantılıdır denir. Örneğin,




ile verilen grafda yönlendirmeler ihmal edilirse, $G_2$ zayıf bağlantılıdır.

**Tanım 2.35** $G = (V(G), E(G))$ bir yönlendirilmiş graf olsun. $a$ ve $b$ herhangi iki köşegen olmak üzere eğer $a$ dan $b$ ye ve $b$ den $a$ ya bir yol varsa $G$ ye kuvvetli bağlantılıdır denir. Örneğin,




ile verilen graf kuvvetli bağlantılıdır.

$G^{-1}$ , $G$ den elde edilen bir graf olup

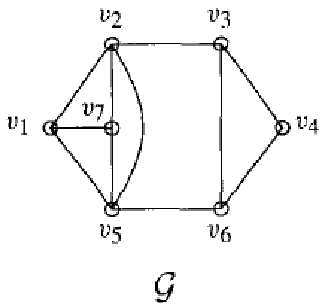
$$E(G^{-1}) = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in E(G)\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımdan yola çıkarak $\tilde{G}$' i kenarları simetrik olan bir yönlendirilmiş graf olarak kabul edebiliriz ve bunu

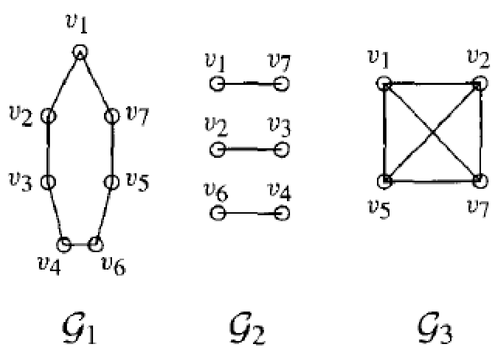
$$E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(G^{-1})$$

ile gösterebiliriz.

**Tanım 2.36** $G$ bir graf olsun. Eğer $V^{'} \subset V(G)$ , $E^{'} \subset E(G)$ ve $(x,y) \in E^{'}, x, y \in V^{'}$ oluyorsa $(E^{'}, V^{'})$ ikilisine alt graf denir.Örneğin




ile verilen graf için




ile verilen $G_1, G_2, G_3$ birer alt grafdır.

**Tanım 2.37** $(X,d)$ bir metrik uzay, $G = (V(G), E(G))$ ,$V(G) = X$ olacak bi çimde bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$(x,y) \in E(G) \text{ iken tüm } u \in Tx \text{ ve } v \in Ty \text{ için } (u,v) \in E(G)$$

oluyorsa $T$ ye graf koruyan özelliğine sahiptir denir.

## 2.4. Hemen Hemen Büzülme ve $F$-Büzülme Dönüşümleri

Bu bölümde öncelikle Berinde tarafından tanımlanan hemen hemen büzülme kavramını verip yapılan sabit nokta teoremlerine değineceğiz. Daha sonra $F$-büzülme kavramını, buna ilişkin bazı örnekleri ve yapılan bazı sabit nokta teoremlerini vereceğiz.

**Tanım 2.38** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \tag{2.7}$$

olacak biçimde $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ varsa $T$' ye hemen hemen büzülme dönüşümü denir.

Metriğin simetri özelliğinden (2.7) eşitsizliğini

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty) \tag{2.8}$$

biçiminde de yazabiliriz. O halde verilen bir $T$ dönüşümünün hemen hemen büzülme olduğunu göstermek için (2.7) ve (2.8) eşitsizliklerinin her ikisinin de sağlandığını göstermeliyiz.

Örneğin; $T : [0, 1] \to [0, 1]$

$$Tx = \begin{cases} \frac{2x}{3} & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ \frac{2x+1}{3} & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ile tanımlanan $T$ dönüşümü $\delta = \frac{2}{3}$ ve $L = 6$ için bir hemen hemen büzülmedir. Ayrıca bu dönüşümün sabit noktaları 0 ve 1' dir.

**Teorem 2.15** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir hemen hemen büzülme olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

olacak biçimde $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ olsun. Bu durumda $T$, $X$' de bir sabit noktaya sahiptir.Hemen hemen büzülmelerde yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi sabit nokta tek olmayabilir. Bu tekliği sağlamak için hemen hemen büzülme şartına benzer bir ek şart ekleyerek tekliği garanti edebiliriz.

**Teorem 2.16** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir hemen hemen büzülme olsun. Ayrıca her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \delta_u d(x,y) + L_u d(x,Tx) \tag{2.9}$$

olacak biçimde $\delta_u \in [0,1)$ ve $L_u \geq 0$ varsa $T$, $X$' de bir tek sabit noktaya sahiptir.

2004 yılında Berinde, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton artan, her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ şartını sağlayan kıyaslama fonksiyonunu kullanarak lineer olmayan yeni tip bir büzülmeyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

**Tanım 2.39** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir kıyaslama fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y)) + Ld(x,Ty)$$

olacak biçimde $L \geq 0$ varsa $T$' ye hemen hemen $\varphi-$büzülme dönüşümü denir.

Açıktır ki, her hemen hemen büzülme hemen hemen $\varphi-$büzülme dönüşümüdür.

**Tanım 2.40** $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton artan ve her $t \in \mathbb{R}^+$ için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ serisinin yakınsak olma şartlarını sağlarsa $\varphi$ ye $c-$kıyaslama fonksiyonu denir.

**Teorem 2.17** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$, $c-$kıyaslama fonksiyonu ile bir hemen hemen büzülme dönüşümü olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y)) + Ld(x,Ty)$$

olacak biçimde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $c-$kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ var olsun. Bu durumda $T$ bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

2007 yılında Pacurar ve Berinde hemen hemen büzülme kavramını küme değerli dönüşümler için tanımlayıp aşağıdaki sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır.

**Tanım 2.41** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \theta d(x,y) + LD(y,Tx) \tag{2.10}$$

olacak biçimde $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ varsa $T$' ye küme değerli hemen hemen büzülme dönüşümü denir.

$T$' nin küme değerli hemen hemen büzülme olduğunu göstermek için (2.10) nin simetriği olan

$$H(Tx,Ty) \leq \theta d(x,y) + LD(x,Ty)$$

eşitsizliğininde sağlandığını gösterilmelidir.

**Teorem 2.18** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ küme değerli hemen hemen büzülme olsun. Bu durumda
(i)$Fix(T) = \{x \in X : x \in Fx\} \neq \emptyset$;
(ii) $x_0 \in X$ için $T$ nin $x_0$ noktasında $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ orbiti vardır öyle ki $T$' nin $u$ sabit noktasına yakınsar ve aşağıdaki eşitsizlikler $h < 1$ için geçerlidir.

$$\begin{aligned} d(x_n,u) &\leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0,x_1), n = 0,1,2,\cdots \\ d(x_n,u) &\leq \frac{h}{1-h} d(x_{n-1},x_n), n = 0,1,2,\cdots \end{aligned}$$

Ayrıca yine Pacurar ve Berinde bu sonucu (2.10) deki $\theta d(x,y)$ terimi yerine, $k : [0,\infty) \to [0,1)$ olmak üzere, $k(d(x,y))d(x,y)$ terimini alarak genişletmişlerdir.

**Teorem 2.19** $(X,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$' e genelleştirilmiş $(\alpha, L)$-hemen hemen büzülme olsun.Yani her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx)$$

olsun. Bu durumda $T$ en az bir sabit noktaya sahiptir. Burada $\alpha : [0, \infty) \to [0, 1)$ her $t \in [0, \infty)$ için, $limsup_{r \to t+} \alpha(r) < 1$ dir.

Sabit nokta teorinin en önemli sonuçlarından biri olan Banach sabit nokta teoreminin birçok genelleştirmesi yapılmıştır. Bunlardan biri de Wardowski tarafından $F$-büzülme dönüşümü kullanılarak verilmiştir. Bu bölümde $F$-büzülme kavramını ve bunun yardımıyla yapılan bazı sabit nokta teoremlerine değineceğiz.Öncelikle küme değerli Lipschitz dönüşümü, küme değerli büzülme dönüşümü kavramlarını hatırlayıp, bu tip dönüşümler için sırası ile Nadler ve Reich tarafından verilen sabit nokta teoremlerini inceleyelim.

**Tanım 2.42** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \tag{2.11}$$

olacak biçimde bir $L > 0$ sabiti varsa $T$ ye küme değerli Lipschitz dönüşümü adı verilir. (2.11) eşitsizliğini sağlayan $L$ sayılarının en küçüğüne $T$ nin Lipschitz sabiti denir ve $k$ ile gösterilir. Eğer $k < 1$ ise $T$ ye küme değerli büzülme dönüşümü, $k = 1$ ise genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

**Teorem 2.20** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $T$, $X$' de bir sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 2.21** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq aD(x, Tx) + bD(y, Ty) + cd(x, y)$$

olacak biçimde $a+b+c < 1$ özelliğine uygun negatif olmayan $a, b$ ve $c$ reel sayıları var olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Banach Büzülme Prensibinin en dikkat çekici genelleştirmesi 2012 yılında Wardowski tarafından $F$-büzülme kavramını tanımlanarak verilmiştir. Bu genelleştirmede

Wardowski, tam metrik uzaylarda $F$-büzülme dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir. Şimdi önce $F$-büzülme kavramını ve buna ilişkin bazı örnekleri verelim. Daha sonra bu büzülme yardımıyla yapılan sabit nokta teoremini inceleyelim.

$F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
$F1$ $F$ kuvvetli artandır. Yani her $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ için $\alpha<\beta$ iken $F(\alpha)<F(\beta)$ dır.
$F2$ Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ dır.
$F3$ $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak biçimde bir $k\in(0,1)$ vardır.
$F4$ $\inf A > 0$ olacak biçimdeki tüm $A\subset(0,\infty)$ kümeleri için $F(\inf A) = \inf F(A)$ dır.
$\mathcal{F}$, $(F1)-(F3)$ şartlarını sağlayan tüm fonksiyonların, $\mathcal{F}^*$ ise $(F1)-(F4)$ şartlarını sağlayan tüm fonksiyonların birer ailesi olsun. Açıktır ki $\mathcal{F}^*\subset\mathcal{F}$ dir.
Eğer

$$F(\alpha)=\begin{cases}\ln\alpha & ,\alpha\le 1\\ 2\alpha & ,\alpha>1\end{cases}$$

ile tanımlarsak, bu durumda $F\in\mathcal{F}\diagdown\mathcal{F}^*$.

**Tanım 2.43** $(X,d)$ bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $F\in\mathcal{F}$ olsun. Eğer $d(Tx,Ty)>0$ özelliğindeki her $x,y\in X$ için

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \le F(d(x,y)) \tag{2.12}$$

olacak biçimde bir $\tau>0$ varsa $T$' ye bir $F$-büzülme adı verilir.

Aşağıda $\mathcal{F}$ ailesine ait bazı örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla literatürde bulunan bazı büzülme dönüşümlerinin bir $F$-büzülme oldukları görülmektedir.

**Örnek 2.8** $F_1:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha)=\ln(\alpha)$ ile tanımlansın. Bu durumda $F_1\in\mathcal{F}^*\subset\mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer $T$ bir $F_1$-büzülme ise $d(Tx,Ty)>0$

özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \tag{2.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $d(Tx, Ty) = 0$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için (2.13) eşitsizliği de sağlanır. Böylece $T$ dönüşümü $L = e^{-\tau}$ sabiti ile birlikte bir Lipschitz dönüşümüdür. $L = e^{-\tau} < 1$ olduğundan $T$ bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla her büzülme bir $F_1$-büzülmedir.

**Örnek 2.9** $F_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_2 \in \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer $T$ bir $F_2$-büzülme ise $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{2.14}$$

eşitsizliği sağlanır.

**Örnek 2.10** $F_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_3(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_3 \in \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer $T$ bir $F_3$-büzülme ise $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{(1 + \tau\sqrt{d(x, y)})^2} d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Örnek 2.11** $F_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_4(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F_4 \in \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer $T$ bir $F_4$-büzülme ise $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx, Ty)(d(Tx, Ty) + 1)}{d(x, y)(d(x, y) + 1)} \leq e^{-\tau}$$

eşitsizliği sağlanır.

**Uyarı 2.4** (F1) ve (2.12) eşitsizliğinden her $F$-büzülme, bir büzülebilir dönüşümdür. Yani, $T$ bir $F$-büzülme ise $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ sağlanır. Bu yüzden her $F$-büzülme dönüşümü süreklidir.

**Uyarı 2.5** $H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $\alpha > 0$ için $H_1(\alpha) \leq H_2(\alpha)$ ve $G = H_2 - H_1$ azalmayan bir dönüşüm ise her $H_1$-büzülme bir $H_2$-büzülmedir. Gerçekten Uyarı 2.4 gereğince $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$$

elde edilir. Bu durumda $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\tau + H_2(d(Tx, Ty)) &\leq \tau + H_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) \\
&\leq H_1(d(x, y)) + G(d(x, y)) \\
&= H_2(d(x, y))
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi 2012 yılında Wardowski tarafından verilen teoremi ifade ve ispat edelim:

**Teorem 2.22** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü $F$-büzülme olsun. Bu durumda $T$' nin bir tek sabit noktası vardır. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi $T$' nin sabit noktasına yakınsar.

**İspat** İlk olarak $T$' nin sabit noktasının var olması halinde tek olması gerektiğini gösterelim. Gerçekten $z$ ile $w$, $T$' nin farklı iki sabit noktası olsun. Bu durumda $d(z, w) = d(Tz, Tw) > 0$ olduğundan (2.12) eşitsizliğinden

$$\tau \leq F(d(z, w)) - F(d(Tz, Tw)) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $T$' nin sabit noktası varsa tektir.
Şimdi $T$' nin bir sabit noktasının var olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $x_0 \in X$ noktasını ele alalım. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_{n+1} = Tx_n$ olacak biçimde $X$' de bir $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım ve $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$ olsun. Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, bu durumda $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi her $n \geq 0$ tamsayı için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \geq 0$ tamsayı için $\gamma_n > 0$ olduğundan (2.12) eşitsizliğinden

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\gamma_0) - n\tau \tag{2.15}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.15) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

elde edilir. Bu yüzden (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

olur. O halde (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0$$

olacak biçimde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (2.15) eşitsizliğinden her $n \geq 0$ tamsayı için

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq -\gamma_n^k n\tau \leq 0 \tag{2.16}$$

olur. (2.16) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k n = 0 \tag{2.17}$$

bulunur. Dolayısıyla (2.17) dan her $n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. O halde $m > n \geq n_1$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $X$ de bir Cauchy dizisi olur. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Son olarak, $T$' nin sürekliliğinden

$$d(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur. Böylece $z = Tz$ olup, ispat tamamlanır.

Örnek 2.8 ve Örnek 2.9 da tanımlı $F_1$ ve $F_2$ dönüşümlerini göz önüne alalım. Bu durumda her $\alpha > 0$ için $F_1(\alpha) < F_2(\alpha)$ ve $F_2 - F_1$ dönüşümü kuvvetli artan olduğundan Uyarı 2.4 gereğince her büzülme dönüşümü (2.14) büzülme şartını sağlar. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

**Örnek 2.12** $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. Bu durumda $(X, d)$ tam metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümü

$$Tx_n = \begin{cases} x_1 & , \quad n = 1 \\ \\ x_{n-1} & , \quad n > 1 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Örnek 2.8 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ için $T$, bir $F_1$-büzülme değildir. Yani $T$ dönüşümü bir büzülme dönüşümü değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{d(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2} - 1}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + n - 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Öte yandan Örnek 2.9 da tanımlanan $F_1(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ için $T$, $\tau = 1$ ile birlikte bir $F_2$-büzülmedir. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow ((m > 2 \wedge n = 1) \vee (m > n > 1))$$

dir.

Durum 1. $m > 2$ ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_1)}{d(x_m, x_1)} e^{d(Tx_m, Tx_1) - d(x_m, x_1)} &= \frac{x_{m-1} - 1}{x_m - 1} e^{x_{m-1} - x_m} \\
&= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} e^{-m} \\
&< e^{-m} \\
&< e^{-1}
\end{aligned}$$

olur.

Durum 2. $m > n > 1$ için

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_n)}{d(x_m, x_n)} e^{d(Tx_m, Tx_n) - d(x_m, x_n)} &= \frac{x_{m-1} - x_{n-1}}{x_m - x_n} e^{x_{m-1} - x_{n-1} - x_m + x_n} \\
&= \frac{m + n - 1}{m + n + 1} e^{n-m} \\
&< e^{n-m} \\
&\leq e^{-1}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi $F$-büzülme dönüşümlerinin küme değerli versiyonunu verelim.

**Tanım 2.44** $(X, d)$ bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{2.18}$$

olacak biçimde bir $\tau > 0$ varsa $T$' ye küme değerli $F$-büzülme denir.

Eğer Örnek 2.8 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ dönüşümü göz önüne alınırsa, her küme değerli büzülme, bir küme değerli $F$-büzülme olur.

**Teorem 2.23** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli $F$-büzülme olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.23' de $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alındığında $T$ bir sabit noktaya sahip midir?

sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı da tam olarak bilinmese de, $F$ üzerine bir şart eklenerek kısmen bir cevap verilmiştir.

**Teorem 2.24** $(X, d)$ tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli $F$-büzülme olsun. Ayrıca $F$ aşağıdaki şartı sağlarsa o zaman $T$ bir sabit noktaya sahiptir.
$F4$ $\inf A > 0$ olacak biçimdeki tüm $A \subset (0, \infty)$ kümeleri için $F(\inf A) = \inf F(A)$ dır.

# 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 3.1. $F$-Büzülmeler için sabit nokta sonuçları

Tezimizin orjinal sonuçlarını içeren bu bölümde genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülme dönüşüm kavramı tanımlanarak, Nadler sabit nokta teoremini de içeren bazı küme değerli sabit nokta teoremlerinin genelleştirmeleri verilecektir. Ayrıca $\Delta$-metrikimsi fonksiyonu yardımıyla Wardovski tekniği kullanılarak yeni genelleştirmeler yapılacaktır.

**Tanım 3.1** $(X, d)$ bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$M(x,y) = maks\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{1}{2}\left[D(x,Ty) + D(y,Tx)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$H(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y)) \tag{3.1}$$

olacak biçimde bir $\tau > 0$ varsa $T$' ye genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülme denir.

Eğer Örnek 2.8' de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ dönüşümü göz önüne alınırsa, bu durumda her genelleştirilmiş küme değerli büzülme, bir genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülmedir.

**Teorem 3.1** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülme olsun. Eğer $T$ veya $F$ sürekli ise $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için $Tx$ boştan farklı olduğundan, $x_1 \in Tx_0$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise $x_1$ $T$' nin sabit noktası olup, ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O halde $Tx_1$ kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$. Diğer taraftan $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ ve (F1) özelliğinden

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

elde ederiz. (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(M(x_0,x_1)) - \tau \\
&= F(maks\left\{\begin{array}{c} d(x_0,x_1), D(x_0,Tx_0), D(x_1,Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0,Tx_1)+D(x_1,Tx_0)\right] \end{array}\right\}) - \tau \\
&\leq F(maks\left\{d(x_0,x_1), \frac{1}{2}D(x_0,Tx_1)\right\}) - \tau \\
&\leq F(maks\left\{d(x_0,x_1), \frac{1}{2}\left[d(x_0,x_1)+D(x_1,Tx_1)\right]\right\}) - \tau \\
&\leq F(maks\left\{d(x_0,x_1), D(x_1,Tx_1)\right\}) - \tau \\
&= F(d(x_0,x_1)) - \tau \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $Tx_1$ kompakt olduğundan

$$d(x_1,x_2) = D(x_1,Tx_1)$$

olacak biçimde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde (3.2) den

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau$$

olur. Bu biçimde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $X$ de $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) - \tau \qquad (3.3)$$

olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz. Eğer $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, $x_{n_0}$ , $T$' nin bir sabit noktası olup ispat tamamlanır. O halde kabul edelim ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin Tx_n$ olsun. $n = 0,1,2,\cdots$ için $a_n = d(x_n,x_{n+1})$ diyelim. Böylece her $n$ için $a_n > 0$ olur. (3.3) eşitsizliğini kullanırsak

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \tau \leq F(a_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(a_0) - n\tau \qquad (3.4)$$

elde ederiz. (3.4) eşitsizliğinden limit alırsak $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olup (F2) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dır. (F3) şartından dolayı $k \in (0,1)$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

(3.4) eşitsizliğinden ,her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.5}$$

olur. Burada $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0 \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) eşitsizliğinden, $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_1$ için $n a_n^k \leq 1$ olup her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.7}$$

dır. $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m, n \in \mathbb{N}$ , $m > n \geq n_1$ olsun. Metriğin üçgen eşitsizliği özelliği ve (3.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$, serisinin yakınsaklığından, $n \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ buluruz. Böylece $\{x_n\}$, $(X, d)$ de bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam olduğundan, $\{x_n\}$, $z \in X$ noktasına yakınsar. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. Eğer $T$ sürekli ise $Tx_n \to Tz$ ve

$$D(x_n, Tz) \leq H(Tx_n, Tz)$$

olup $D(z, Tz) = 0$ ve $z \in Tz$ dir. Şimdi kabul edelim ki, $F$ sürekli olsun. İddia ediyoruz ki, $z \in Tz$ dir. Aksini kabul edelim yani , $z \notin Tz$ olsun. Bu durumda, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\{x_n\}$ nin tüm $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olacak biçimde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olduğudan

$$\begin{aligned} \tau + F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq \tau + F(H(Tx_{n_k}, Tz)) \\ &\leq F(M(x_{n_k}, z)) \\ &\leq F(maks\{d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ &\quad \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})]\}) \end{aligned}$$

olup,$k \to \infty$ için limit alıp, $F$ nin sürekliliğini kullanırsak,

$$\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$$

elde ederiz ki bu bir çelişkidir. O halde $z \in \overline{Tz} = Tz$ olup ispat tamamlanır.

**Örnek 3.1** $X = \left\{ x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. Bu durumda $(X, d)$ tam metrik uzaydır. $T : X \to \mathcal{K}(X)$

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

ile tanımlansın. Böylece $T$, $F(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ ve $\tau = 1$ için bir küme değerli $F$-büzülmedir. Ancak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H(Tx_n, Tx_1)}{M(x_n, x_1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olduğundan $T$ genelleştirilmiş küme değerli büzülme değildir.

Şimdi, $\Delta$-metrikimsi fonksiyonunu kullanarak Wardowski tekniği ile küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremini verelim.

**Tanım 3.2** $(X, d)$ tam metrik uzay ve $T : X \to B(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ için

$$M(x, y) = maks \left\{ d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2} [D(x, Ty) + D(y, Tx)] \right\}$$

olmak üzere

$$\forall x, y \in X, \ \ [\min \{\Delta(Tx, Ty), d(x, y)\} > 0 \Rightarrow \tau + F(\Delta(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y))] \tag{3.8}$$

sağlanıyorsa $T$ ye genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülme denir.

**Teorem 3.2** $(X, d)$ tam metrik uzay ve $T : X \to B(X)$ küme değerli genelleştirilmiş $F$-büzülme olsun. Eğer $F$ sürekli ve her $x \in X$ için $Tx$ kapalı ise $T$, $X$' de bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Her $n \geq 0$ için $\{x_n\} \subset X$ dizisi $x_{n+1} \in Tx_n$ ile tanımlansın. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x_{n_0}, T$' nin bir sabit noktasıdır. Kabul edelim ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) > 0$ ve $\Delta(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$ dir. O halde (3.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\tau + F(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \tau + F(\Delta(Tx_{n-1}, Tx_n)) \\
&\leq F(M(x_{n-1}, x_n)) \\
&= F(maks \left\{ \begin{array}{c} d(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, Tx_{n-1}), D(x_n, Tx_n), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_{n-1}, Tx_n) + D(x_n, DTx_{n-1})\right] \end{array} \right\}) \\
&\leq F(maks\left\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\right\}) \\
&= F(d(x_{n-1}, x_n))
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned}
F(d(x_n, x_{n+1})) &\leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau \\
&\leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - 2\tau \\
&\vdots \\
&\leq F(d(x_0, x_1)) - n\tau
\end{aligned}$$

bulunur. Her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n = d(x_n, x_{n+1})$ olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n > 0$ olduğundan

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \tau \leq F(a_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(a_0) - n\tau \tag{3.9}$$

bulunur. (3.9) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ elde edilir. Bu yüzden (F2) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur. O halde (F3) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak biçimde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.9) eşitsizliğinde her $n \geq 0$ tamsayısı için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.10}$$

olur. (3.10) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.11) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak biçimdeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\
&< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}
\end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi $X$ de bir Cauchy dizisi olur. $X$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Şimdi $F$ sürekli olduğundan, $z \in Tz$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksini kabul edelim. Yani $z \notin Tz$ olsun. Bu durumda $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ altdizisi vardır. Her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\tau + F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq \tau + F(\Delta(Tx_{n_k}, Tz)) \\
&\leq F(M(x_{n_k}, z)) \\
&\leq F\left(\begin{array}{c} maks\{d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})]\} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

yazılır. $k \to \infty$ için limit alıp, $F$ nin sürekliliğini kullanırsak,

$$\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$$

elde ederiz ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $z \in \overline{Tz} = Tz$ elde edilir ki bu $T$' nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

**Örnek 3.2** $X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ve

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ x + y & ; \ x \neq y \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $(X, d)$ tam metrik uzaydır. $T : X \to B(X)$

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & ; \ x = 0 \\ \\ \{0, 1, 2, 3, ..., x-1\} & ; \ x \neq 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. İddia ediyoruz ki, $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ve $\tau = 1$ için $T$ genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülmedir. $\min\{\Delta(Tx, Ty), d(x, y)\} > 0$ olduğundan $x \neq y$ ve $\{x, y\} \cap \{0, 1\}$ kesişimi tek nokta olduğundan, aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

Durum 1. $y = 0$ ve $x > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(Tx, Ty)}{M(x, y)} e^{\delta(Tx,Ty) - M(x,y)} &= \frac{x-1}{x} e^{x-1-x} \\ &= \frac{x-1}{x} e^{-1} < e^{-1} \end{aligned}$$

dır.

Durum 2. $y = 1$ ve $x > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(Tx, Ty)}{M(x, y)} e^{\delta(Tx,Ty) - M(x,y)} &= \frac{x-1}{x} e^{x-1-x} \\ &= \frac{x-1}{x} e^{-1} < e^{-1} \end{aligned}$$

dır.

Durum 3. $x > y > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(Tx, Ty)}{M(x, y)} e^{\delta(Tx,Ty) - M(x,y)} &= \frac{x+y-2}{x+y} e^{x+y-2-x-y} \\ &= \frac{x+y-2}{x+y} e^{-2} < e^{-1} \end{aligned}$$

dır. Böylece $T$ genelleştirilmiş küme değerli $F$-büzülmedir. Teorem 3.2' nin bütün şartları sağlandığından $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan, $y = 0$ ve $x \neq 0$ için $\Delta(Tx, Ty) = x - 1$ ve $M(x, y) = x$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta(Tx, Ty)}{M(x, y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

olup, $\lambda \in [0, 1)$ için

$$\Delta(Tx, Ty) \leq \lambda M(x, y)$$

sağlanmaz.

## 3.2. Graf ile donatılmış metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve sonuçları

Bu bölümde graf ile donatılmış metrik uzaylarda genelleştirilmiş hemen hemen $\varphi-$büzülme kavramını tanımlayıp yeni tipte sabit nokta teoremlerini ispatlayacağız. Daha sonra küme değerli dönüşümler için $F$-$G$-büzülme kavramını tanımlayıp bu tip büzülme yardımı ile yine yeni tipte sabit nokta teoremlerini ve sonuçlarını vereceğiz. Ayrıca örnekler yardımıyla grafın büzülme şartı üzerindeki etkisini göstereceğiz.

Şimdi öncelikle küme değerli dönüşümler için zayıf-graf koruyan özelliğini tanımlayarak, yine küme değerli hemen hemen büzülmeler için bazı sabit nokta teoremlerini verelim.

**Tanım 3.3** $(X, d)$ bir metrik uzay, $G = (V(G), E(G))$, $V(G) = X$ olacak biçimde bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $E(G)$' den alınan $(x, y)$ elemanlarının herbiri için $x \in X$ ve $y \in Tx$ olması tüm $z \in Ty$ için $(y, z) \in E(G)$ olmasını gerektiriyorsa $T$' ye zayıf-graf koruyan özelliğine sahiptir denir.

**Uyarı 3.1** Açıktır ki her graf koruyan dönüşüm zayıf-graf koruyan dönüşümdür. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin, $X = [-1, 1]$' i alışılmış metrikle alalım. $V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X \setminus \Lambda$ olsun. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{-x\} & , \quad x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} & , \quad x = -1 \\ \{1\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahiptir fakat graf koruyan özelliğine sahip değildir. Çünkü $(0,1) \in E(G)$ olup $T0 = \{1\}$ ve $T1 = \{0,1\}$dir. Ancak $(1,1) \notin E(G)$ dir.

**Tanım 3.4** $(X,d)$ bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan $c-$kıyaslama fonksiyonu ve

$$M(x,y) = maks\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{1}{2}\left[D(x,Ty) + D(y,Tx)\right]\right\}$$

olmak üzere $(x,y) \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(M(x,y)) + L\min\{D(x,Ty), D(y,Tx)\} \tag{3.12}$$

olacak biçimde $L \geq 0$ var ise $T$'ye küme değerli hemen hemen $\varphi-$büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 3.3** $(X,d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ üstten yarısürekli ve zayıf graf koruyan dönüşüm olsun. Farz edelim ki aşağıdakiler sağlansın:

(i) Her $(x,y) \in E(G)$ için

$$M(x,y) = maks\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{1}{2}\left[D(x,Ty) + D(y,Tx)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(M(x,y)) + L\min\{D(x,Ty), D(y,Tx)\} \tag{3.13}$$

olacak biçimde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan $c-$kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ var olsun.

(ii)$X_T = \{x \in X : (x,u) \in E(G)$ bazı $u \in Tx\}$boştan farklı olsun.

Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** $x_0 \in X_T$ olsun. Bu durumda $(x_0, x_1) \in E(G)$ olacak biçimde $x_1 \in Tx_0$

vardır. Böylece (i) şartını $x_0$ ve $x_1$ için kullanabiliriz. O halde $q > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D(x_1, Tx_1) &\leq H(Tx_0, Tx_1) \\
&\leq \varphi(M(x_0, x_1)) + L\min\{D(x_0, Tx_1), D(x_1, Tx_0)\} \\
&= \varphi(M(x_0, x_1)) \\
&= \varphi\left(maks\left\{\begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array}\right\}\right) \\
&\leq \varphi(d(x_0, x_1)) \\
&< q\varphi(d(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

dır. Buradan $x_2 \in Tx_1$ vardır öyleki

$$d(x_1, x_2) < q\varphi(d(x_0, x_1))$$

dır. $\varphi$ kesin artan olduğundan

$$0 < \varphi(d(x_1, x_2)) < \varphi(q\varphi(d(x_0, x_1)))$$

yazabiliriz. $q_1 = \frac{\varphi(q\varphi(d(x_0,x_1)))}{\varphi(d(x_1,x_2))}$ alalım. Bu durumda $q_1 > 1$ dır. $(x_0, x_1) \in E(G)$, $x_1 \in Tx_0$ ve $x_2 \in Tx_1$ olduğundan, zayıf graf koruyan özelliği kullanılarak $(x_1, x_2) \in E(G)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
D(x_2, Tx_2) &\leq H(Tx_1, Tx_2) \\
&\leq \varphi(M(x_1, x_2)) + L\min\{D(x_1, Tx_2), D(x_2, Tx_1)\} \\
&= \varphi(M(x_1, x_2)) \\
&\leq \varphi(d(x_1, x_2)) \\
&< q_1\varphi(d(x_1, x_2))
\end{aligned}$$

dır. Böylece $x_3 \in Tx_2$ vardır öyle ki

$$d(x_2, x_3) \leq q_1\varphi(d(x_2, x_1)) = \varphi(q\varphi(d(x_0, x_1)))$$

dır. $\varphi$ kesin artan olduğundan

$$0 < \varphi(d(x_2, x_3)) < \varphi^2(q\varphi(d(x_0, x_1)))$$

elde edilir. $q_2 = \frac{\varphi^2(q\varphi(d(x_0,x_1)))}{\varphi(d(x_2,x_3))}$ alalım. Bu durumda $q_2 > 1$ dır. Bu biçimde devam ederek $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi oluştururuz ki $x_{n+1} \in Tx_n$, $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi^n(q\varphi(d(x_0, x_1)))$$

dır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m > n$ alalım. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(q\varphi(d(x_0, x_1))) \end{aligned}$$

elde ederiz. $\varphi$, $c-$kıyaslama fonksiyonu olduğundan, serinin yakınsaklığından $n \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ dır. Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam olduğundan, $\{x_n\}$ bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ dir. $T$ üstten yarısürekli olduğundan, Lemma 2.7' den $z \in Tz$ elde ederiz.

**Teorem 3.4** $(X, d)$ tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde aşağıdaki özelliği sağlayan yönlendirilmiş graf olsun.

$$\begin{gathered} \text{"Herhangibir } \{x_n\} \in X \text{ için, eğer } x_n \to x \text{ ve } (x_n, x_{n+1}) \in E(G) \text{ ise,} \\ \text{bir } (x_{n_k}) \text{ altdizisi vardır ki } (x_{n_k}, x) \in E(G) \text{ dir."} \end{gathered} \tag{3.14}$$

$T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf graf koruyan özelliğine sahip bir dönüşüm olsun ve aşağıdakiler sağlansın.

(i)Her $(x, y) \in E(G)$ için

$$M(x,y) = maks\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{1}{2}\left[D(x,Ty) + D(y,Tx)\right]\right\}$$

olmak üzere

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(M(x, y)) + L\min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\}$$

olacak biçimde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kesin artan $(c)-$kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ var olsun.

(ii)$X_T$ boştan farklı olsun.

Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Teorem 3.3' ün ispatında olduğu gibi $x_n \to z, z \in X$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. (3.14) özelliğinden $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır öyleki her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_k}, z) \in E(G)$ dir. Şimdi kabul edelim ki $D(z, Tz) > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} D(x_{n_k}, x_{n_k+1}) = 0$, $\lim_{n\to\infty} D(x_{n_k}, z) = 0$ olduğundan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n_k > n_0$ için

$$D(x_{n_k}, x_{n_k+1}) < \frac{1}{3}D(z, Tz) \tag{3.15}$$

dir ve öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n_k > n_1$ için

$$D(x_{n_k}, z) < \frac{1}{3}D(z, Tz) \tag{3.16}$$

yazabiliriz. $n_k > maks\{n_0, n_1\}$ olarak alırsak, (3.15) ve (3.16) den

$$\begin{aligned} D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq H(Tx_{n_k}, Tz) \\ &\leq \varphi(M(x_{n_k}, z)) + L\min\{D(x_{n_k}, Tz), D(z, Tx_{n_k})\} \\ &\leq \varphi\left(maks\left\{\begin{array}{c} d(x_{n_k}, z), D(x_{n_k}, Tx_{n_k}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + D(z, Tx_{n_k})] \end{array}\right\}\right) \\ &\quad + L\min\{D(x_{n_k}, Tz), D(z, x_{n_k+1})\} \\ &< \varphi(D(z, Tz)) + L\min\{D(x_{n_k}, Tz), d(z, x_{n_k+1})\} \end{aligned}$$

olur. $k \to \infty$ için limit alırsak $D(z, Tz) \leq \varphi(D(z, Tz)) < D(z, Tz)$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki teoremlerde $T : X \to K(X)$ olarak alırsak, $\varphi'$ nin kesin artanlığına ihtiyaç duymayacağız.

**Sonuç 3.1** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ üstten yarısürekli ve zayıf graf koruyan dönüşüm olsun. Farz edelim ki aşağıdakiler sağlansın:

(i) Her $(x, y) \in E(G)$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(M(x, y)) + L\min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\}$$

olacak biçimde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $c-$kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ var olsun.
ii)$X_T$ boştan farklı olsun.
Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** $x_0 \in X_T$ olsun. Bu durumda $(x_0, x_1) \in E(G)$ olacak biçimde $x_1 \in Tx_0$ vardır. Böylece (i) şartını $x_0$ ve $x_1$ için kullanabiliriz. O halde $q > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D(x_1, Tx_1) &\leq H(Tx_0, Tx_1) \\
&\leq \varphi(M(x_0, x_1)) + L\min\{D(x_0, Tx_1), D(x_1, Tx_0)\} \\
&= \varphi(M(x_0, x_1)) \\
&= \varphi\left( maks \left\{ \begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array} \right\}\right) \\
&\leq \varphi(d(x_0, x_1)) \\
&< q\varphi(d(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

dır. $Tx_1$ kompakt olduğundan

$$d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$$

olacak biçimde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde buradan

$$d(x_1, x_2)) \leq \varphi(d(x_0, x_1))$$

yazabiliriz. $(x_0, x_1) \in E(G)$, $x_1 \in Tx_0$ ve $x_2 \in Tx_1$ olduğundan, zayıf graf koruyan özelliğinden, $(x_1, x_2) \in E(G)$ yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned}
D(x_2, Tx_2) &\leq H(Tx_1, Tx_2) \\
&\leq \varphi(M(x_1, x_2)) + L\min\{D(x_1, Tx_2), D(x_2, Tx_1)\} \\
&= \varphi(M(x_1, x_2)) \\
&\leq \varphi(d(x_1, x_2))
\end{aligned}$$

dır. $Tx_2$ kompakt olduğundan

$$d(x_2, x_3) = D(x_2, Tx_2)$$

olacak biçimde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Buradan

$$d(x_2, x_3) \leq \varphi(d(x_2, x_1))$$

elde ederiz. Bu biçimde devam ederek $X$ de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturuz ki $x_{n+1} \in Tx_n$, $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ ve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \varphi(d(x_{n-1}, x_n)) \\ &\leq \varphi^2(d(x_{n-2}, x_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \varphi^n(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

olur. İspatın geri kalanı Teorem 3.3 ' ün ispatı gibidir.

**Sonuç 3.2** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) özelliğini sağlayan yönlendirilmiş graf, $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf graf koruyan bir dönüşüm olsun. Farzedelim ki aşağıdakiler sağlansın.
(i)Her $(x, y) \in E(G)$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(M(x, y)) + L \min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\}$$

olacak biçimde $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $c-$kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ var olsun.
(ii)$X_T$ boştan farklı olsun.
Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 3.3** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf graf koruyan ve üstten yarısürekli bir dönüşüm olsun. Ayrıca her $(x, y) \in E(G)$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$$

olacak biçimde bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $c$-kıyaslama fonksiyonu ve $X_T$ de boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 3.4** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) özelliğini sağlayan yönlendirilmiş graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf graf koruyan bir dönüşüm ve her $(x, y) \in E(G)$ için

$$H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$$

olacak biçimde bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $c$-kıyaslama fonksiyonu ve de $X_T$ boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi küme değerli dönüşümler için $F$-$G$-büzülme kavramını tanımlayıp, daha sonra yukarıda da bahsettiğimiz zayıf graf koruyan özelliği kullanılarak yeni sabit nokta teoremleri verelim.

**Tanım 3.5** $(X, d)$ bir metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun.

$$T_G = \{(x, y) \in E(G) : H(Tx, Ty) > 0\}$$

olarak tanımlayalım. $F \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $(x, y) \in T_G$ olacak biçimdeki $x, y \in X$ için

$$M(x, y) = maks\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}[D(x, Ty) + D(y, Tx)]\}$$

olmak üzere

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)) \tag{3.17}$$

olacak biçimde $\tau > 0$ varsa $T'$ ye küme değerli $F$-$G$-büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 3.5** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir küme değerli $F$-$G$-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $T$ üstten yarısürekli ve zayıf-graf koruyan özelliğine sahip olsun. Ayrıca

$$X_T = \{x \in X : (x, u) \in E(G), u \in Tx\}$$

boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Kabul edelim ki $T$ sabit noktaya sahip olmasın. Bu durumda her $x \in X$

için $D(x, Tx) > 0$ dır. $x_0 \in X_T$ olsun. O halde herhangi bir $x_1 \in Tx_0$ için $(x_0, x_1) \in E(G)$ dir. Buradan

$$0 < D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$$

olup $(x_0, x_1) \in T_G$ dir. Böylece $x_0$ ve $x_1$ için (3.8) eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} F(D(x_1, Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(M(x_0, x_1)) - \tau, \\ &= F(maks\left\{ \begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array} \right\}) - \tau \\ &\leq F(maks\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)) - \tau \end{aligned} \tag{3.18}$$

olur, çünkü

$$\begin{aligned} M(x_0, x_1) &= maks\left\{ \begin{array}{c} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array} \right\} \\ &= maks\left\{ d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \frac{1}{2} D(x_0, Tx_1) \right\} \\ &\leq maks\left\{ d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}\left[d(x_0, x_1) + D(x_1, Tx_1)\right] \right\} \\ &\leq maks\left\{ d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), maks\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)\} \right\} \\ &= maks\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)\} \end{aligned}$$

dır. Şimdi eğer $d(x_0, x_1) \leq D(x_1, Tx_1)$ ise (3.18) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(D(x_1, Tx_1)) - \tau$$

olur ki, bu bir çelişkidir. Böylece $D(x_1, Tx_1) < d(x_0, x_1)$ ve (3.18) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau \tag{3.19}$$

dır. $Tx_1$ kompakt olduğundan, $d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$ olacak biçimde $x_2 \in Tx_1$ vardır. (3.19) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \tau$$

yazabiliriz. $(x_0, x_1) \in E(G)$, $x_1 \in Tx_0$ ve $x_2 \in Tx_1$ olduğundan, zayıf-graf koruyan özelliğinden $(x_1, x_2) \in E(G)$ dir. $0 < D(x_2, Tx_2) \leq H(Tx_1, Tx_2)$ olduğundan, $(x_1, x_2) \in T_G$ dir. O halde

$$F(D(x_2, Tx_2)) \leq F(H(Tx_1, Tx_2)) \leq F(M(x_1, x_2)) - \tau \tag{3.20}$$

elde edilir. Aynı düşünce ile

$$M(x_1, x_2) \leq maks\{d(x_1, x_2), D(x_2, Tx_2)\}$$

olur. Böylece (3.20) eşitsizliğinden

$$F(D(x_2, Tx_2)) \leq F(d(x_1, x_2)) - \tau \tag{3.21}$$

olur. $Tx_2$ kompakt olduğundan, $d(x_2, x_3) = D(x_2, Tx_2)$ olacak biçimde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Buradan

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(d(x_2, x_1)) - \tau$$

elde edilir. Bu biçimde devam edilierek $X'$ de her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $(x_n, x_{n+1}) \in T_G$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau \tag{3.22}$$

olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = d(x_n, x_{n+1})$ diyelim. Bu durumda $a_n > 0$ ve (3.22) eşitsizliğinden, $\{a_n\}$ azalandır. Böylece $\lim_{n\to\infty} a_n = \delta$ olacak biçimde $\delta \geq 0$ vardır. Şimdi $\delta > 0$ olsun. (3.22) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} F(a_n) &\leq F(a_{n-1}) - \tau \\ &\leq F(a_{n-2}) - 2\tau \\ &\;\;\vdots \\ &\leq F(a_0) - n\tau \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde ederiz. (3.23) eşitsizliğinden, $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olur. Böylece (F2) özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

elde ederiz. (F3) özelliğinden $k \in (0,1)$ vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

dır. (3.23) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.24}$$

dır. (3.24) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} na_n^k = 0 \tag{3.25}$$

elde ederiz. (3.25) eşitsizliğinden öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $n \geq n_1$ için $na_n^k \leq 1$' dir. Böylece her $n \geq n_1$

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.26}$$

dır. $\{x_n\}$' nin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n \geq n_1$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{N}$ alalım. Metriğin üçgen eşitsizliği özelliğinden ve (3.26) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} a_i \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından, $n \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ dır. Böylece $\{x_n\}$, $(X, d)$' de bir Cauchy dizisidir. $(X, d)$ tam olduğundan, $\{x_n\}$, $z \in X$ noktasına yakınsar. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = z'$dir. $T$ üstten yarısürekli olduğundan, Lemma 2.7 'den $z \in Tz$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Uyarı 3.2.** $F$ üzerine $(F4)$ şartını ekleyerek yukarıdaki teoremi $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ için verebiliriz.

**Teorem 3.6** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$, $F \in \mathcal{F}^*$olmak üzere bir küme değerli $F$-$G$-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $T$ üstten yarısürekli ve zayıf-graf koruyan özelliğine sahip olsun. Ayrıca $X_T$ boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Teorem 3.5 'in ispatındaki gibi başlayalım. (F4) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D(x_1, Tx_1)) &= F(\inf\{d(x_1, y) : y \in Tx_1\}) \\ &= \inf\{F(d(x_1, y) : y \in Tx_1)\} \end{aligned}$$

olup (3.19) eşitsizliğinden

$$\inf\{F(d(x_1, y) : y \in Tx_1)\} < F(d(x_0, x_1)) - \frac{\tau}{2}$$

elde ederiz. Böylece $x_2 \in Tx_1$ vardır öyle ki

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_0, x_1)) - \frac{\tau}{2}$$

olur. İspatın geri kalanı Theorem 3.5 ispatı gibi tamamlanır.

**Uyarı 3.3** Eğer yukarıdaki teoremlerde $T$' nin üstten yarısürekliliği yerine $X$ üzerinde (3.14) şartını kabul edersek, aşağıdaki sonuçları elde ederiz. Ancak bu durumda $F$ nin sürekliliğine ihtiyaç duyabiliriz.

**Teorem 3.7** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) şartını sağlayan yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir küme değerli $F$-$G$-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı olsun. Eğer $F$ sürekli ise $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. Theorem 3.5' de olduğu gibi, $X$ de $z \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. (3.14) şartından, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_k}, z) \in E(G)$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $D(z, Tz) > 0$ olduğundan, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ dır. Böylece her $n_k \geq n_0$ için

$$H(Tx_{n_k}, Tz) > 0$$

olup $(x_{n_k}, z) \in T'_G$ dir. (3.8) eşitsizliği ve (F1) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_{n_k}, Tz)) - \tau \\ &\leq F(M(x_{n_k}, z)) - \tau \\ &\leq F(maks\{d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ &\quad \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})]\}) - \tau \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınıp $F$ nin sürekliliği kullanılırsa, $\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$, olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 3.8** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) şartını sağlayan yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$, $F \in \mathcal{F}^*$olmak üzere bir küme değerli $F$-$G$-büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı olsun. Eğer $F$ sürekli ise $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. Teorem 3.6 'da olduğu gibi, $X$ de $z \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. (3.14) şartından, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_k}, z) \in E(G)$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $D(z, Tz) > 0$ olduğundan, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ dır. Böylece her $n_k \geq n_0$ için

$$H(Tx_{n_k}, Tz) > 0$$

olup $(x_{n_k}, z) \in T'_G$ dir. (3.8) eşitsizliği ve (F1) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_{n_k}, Tz)) - \tau \\ &\leq F(M(x_{n_k}, z)) - \tau \\ &\leq F(maks\{d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ &\quad \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1})]\}) - \tau \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınıp $F$ nin sürekliliği kullanılırsa, $\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$, olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 3.5** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $(x, y) \in T_G$ olacak biçimdeki $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)), \tau > 0 \tag{3.27}$$

ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Ayrıca $T$ üstten yarısürekli ve zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 3.6** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir dönüşümü olsun. Kabul edelim ki $(x, y) \in T_G$ olacak biçimdeki $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)), \tau > 0 \tag{3.28}$$

ve $F \in \mathcal{F}^*$ olsun. Ayrıca $T$ üstten yarısürekli ve zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı olsun. Bu durumda $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Uyarı 3.4** Uyarı 3.3 'de olduğu gibi, Sonuç 3.5 ve Sonuç 3.6 'da $T$ nin üstten yarısürekliliği yerine (3.14) şartını alabiliriz. Ancak bu durumda $F$ in sürekliliğine ihtiyaç duymayacağız.

**Sonuç 3.7** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) şartını sağlayan yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $(x, y) \in T_G$ olacak biçimdeki $x, y \in X$ için (3.27) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $\tau > 0$ ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı ise $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. Teorem 3.8 'de olduğu gibi, $X$'de $z \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. (3.14) şartından, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_k}, z) \in E(G)$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $D(z, Tz) > 0$ olduğundan, öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $n_k \geq n_1$ için, $d(x_{n_k}, z) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ dır. O halde her $n_k \geq maks\{n_0, n_1\}$

için, (3.27) eşitsizliğive (F1) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_{n_k}, Tz)) - \tau \\ &\leq F(d(x_{n_k}, z)) - \tau \\ &\leq F(\frac{D(z, Tz)}{2}) - \tau \end{aligned}$$

dır. Böylece (F1) özelliğinden, her $n_k \geq maks\{n_0, n_1\}$ için

$$D(x_{n_k+1}, Tz) \leq \frac{D(z, Tz)}{2}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa $0 < D(z, Tz) \leq \frac{D(z,Tz)}{2}$, olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Sonuç 3.8** $(X, d)$ bir tam metrik uzay, $G$, $X$ üzerinde (3.14) şartını sağlayan yönlendirilmiş bir graf ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $(x, y) \in T_G$ olacak biçimdeki $x, y \in X$ için (3.27) eşitsizliğini sağlayacak biçimde $\tau > 0$ ve $F \in \mathcal{F}^*$ olsun. Eğer $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahip ve $X_T$ boştan farklı ise $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat** Kabul edelim ki $T$ bir sabit noktaya sahip olmasın. Teorem 3.8' de olduğu gibi, $X$ de $z \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. (3.14) şartından, $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_k}, z) \in E(G)$ dir. $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $D(z, Tz) > 0$ olduğundan, öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki, her $n_k \geq n_1$ için , $d(x_{n_k}, z) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ dır. O halde her $n_k \geq maks\{n_0, n_1\}$ için, (3.27) eşitsizliği ve (F1) özelliğinden

$$\begin{aligned} F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq F(H(Tx_{n_k}, Tz)) - \tau \\ &\leq F(d(x_{n_k}, z)) - \tau \\ &\leq F(\frac{D(z, Tz)}{2}) - \tau \end{aligned}$$

dır. Böylece (F1) özelliğinden, her $n_k \geq maks\{n_0, n_1\}$ için

$$D(x_{n_k+1}, Tz) \leq \frac{D(z, Tz)}{2}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa $0 < D(z, Tz) \leq \frac{D(z,Tz)}{2}$, olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

**Örnek 3.3** $X = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ ve

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \\ x+y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $(X, d)$ tam metrik uzaydır. $V(G) = X$ ve $E(G) = X \times X \diagdown \{(0,1),(1,0)\}$ ile verilen grafı göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$

$$Tx = \begin{cases} \{x\} & , \quad x = 0, x = 1 \\ \\ \{0, 1, 2, \cdots, x-1\} & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

ile tanımlı dönüşümü $\tau_d$ ayrık topoloji olduğundan üstten yarısüreklidir. Üstelik $T$ zayıf-graf koruyan özelliğine sahiptir. Şimdi iddia ediyoruz ki, $\tau = 1$ ve $F(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ için bir küme değerli $F - G-$ büzülmedir. Dikkat edelim ki $T_G = E(G) \diagdown \Delta$ dır. Bu sebeple büzülme şartı için aşağıdaki durumları göz önüne almalıyız.

Durum 1. $y = 0$ ve $x > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx,Ty)}{M(x,y)} e^{H(Tx,Ty)-M(x,y)} &= \frac{x-1}{x} e^{x-1-x} \\ &= \frac{x-1}{x} e^{-1} < e^{-1} \end{aligned}$$

dır.

Durum 2. $y = 1$ ve $x > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx,Ty)}{M(x,y)} e^{H(Tx,Ty)-M(x,y)} &= \frac{x}{x+1} e^{x-x-1} \\ &= \frac{x}{x+1} e^{-1} < e^{-1}. \end{aligned}$$

dır.

Durum 3. $x > y > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx,Ty)}{M(x,y)} e^{H(Tx,Ty)-M(x,y)} &= \frac{x-1}{x+y} e^{x-1-x-y} \\ &= \frac{x-1}{x+y} e^{-1-y} < e^{-1} \end{aligned}$$

Böylece Teorem 3.5 (veya Teorem 3.6)' in tüm şartları sağlanmış olup, $T$ bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan, $X$ üzerinde bir graf olmadığını varsayarsak, büzülme şartının sağlanmadığını görürüz. Gerçekten, $x = 0$ ve $y = 1$ için $H(Tx, Ty) = 1$ ve $d(x, y) = 1$ olup tüm $F \in \mathcal{F}$ ve $\tau > 0$ için

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) > F(d(x, y))$$

elde ederiz.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tam metrik uzaylar üzerinde Wardowski tekniği kullanılarak $F$-büzülme yardımıyla sırasıyla Hausdorff metrik ve $\Delta$-metrikimsi fonksiyonu kullanılarak bazı sabit nokta teoremleri ve sonuçları verilmiştir. Ayrıca sabit nokta teori ile graf teori birleştirilerek yine tam metrik uzaylarda sırasıyla $F$-büzülme ve hemen hemen büzülme kulanılarak yeni sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır.

Sonuç olarak literatüre, graf ile donatılmış metrik uzaylar üzerinde çeşitli sabit nokta teoremleri kazandırılmış ve grafın büzülme şartı üzerindeki önemi gösterilmiştir.

# KAYNAKLAR

[1] Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.

[3] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[4] Johnsonbaugh, R., Discrete mathematics, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 19

[5] Banach, S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3, 133–181, 1922.

[6] Kannan, R., Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc., 10, 71–76, 1968.

[7] Chatterjea, S. K., Fixed point theorems, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25, 727–730, 1972.

[8] Zamfirescu, T., Fixed point theorems in metric spaces, Arch. Math. (Basel), 292–298, 1972.

[9] Berinde, V., Approximating fixed points of weak $\varphi$-contractions using the Picard iteration, Fixed Point Theory, 4, no. 2, 131–142, 2003.

[10] Rus, I. A., Generalized Contractions, Seminar on fixed point theory, Univ. Cluj-Napoca, Preprint 3, 1–130, 1983.

[11] Berinde, V., On the approximation of fixed points of weak $\varphi$-contractive operators, Fixed Point Theory, 4, no. 2, 131–142, 2003.

[12] Wardowski, D., Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012,94,6pp, 2012.

[13] Nadler, S. B., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 475-488, 1969.

[14] Reich, S., Fixed points of contractive functions, Boll. Unione Mat. Ital., 5, 26-42, 1972.

[15] Reich, S., Some fixed point problems, Atti Acad. Naz. Lincei, 57, 194-198, 1974.

[16] Mizoguchi, N., Takahashi, W., Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl.,141, 177-188, 1989.

[17] Berinde, M., Berinde, V., On a general class of multi-valued weakly Picard mappings, J. Math. Anal. Appl., 326, 772-782, 2007.

[18] Echenique, F., A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem, Internat. J. Game Theory 33(2), 215–218, 2005.

[19] Espínola, R., Kirk,W.A., Fixed point theorems in R-trees with applications to graph theory, Topology Appl., 153(7), 1046–1055, 2006.

[20] Jachymski, J., The contraction principle for mappings on a complete metric space with a graph, Proc. Amer. Math. Soc., 136(1),1359-1373, 2008.

[21] Beg, I., Butt, A. R., Radojević, S., The contraction principle for set valued mapping on a metric space with a graph, Comput. Math. Appl., 60,1214-1219, 2010.

[22] Fisher, B., Common fixed points of mappings and set-valued mappings. Rostock. Math. Kolloq. No. 18, 69–77, 1981.

[23] Fisher, B., Fixed points for set-valued mappings on metric spaces. Bull. Malaysian Math. Soc. (2), 4, no. 2, 95–99, 1981.

[24] Fisher, B., Set-valued mappings on metric spaces. Fund. Math. 112, no. 2, 141–145, 1981.

[25] Fisher, B., Common fixed points of set-valued mappings. Punjab Univ. J. Math. (Lahore), 14/15, 155–163, 1981/82.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Özlem ACAR

**Doğum Yeri:** Kadıköy

**Doğum Tarihi:** 17/03/1986

**Medeni Hali:** Evli

**Yabancı Dili:** İngilizce

**Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):**

**Lise:** Gebze Anadolu Lisesi

**Lisans:** Atatürk Üniversitesi,Matematik Bölümü,Haziran 2008

**Yüksek Lisans:** Haziran 2012

**Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:**

**Yayınları:** 1-) Acar, Ö., Durmaz, G., Mınak, G., Generalized multivalued $F$-contractions on complete metric spaces, Bulletin of the Iranian mathematical society, 40(6), (2014), 1469-1478.
2-) Acar, Ö., Altun, İ., A Fixed Point Theorem for Multivalued Mappings with $\delta-$Distance, Abstract and Applied Analysis, (2014), Article ID 497092, 5 Pages.
3-) Altun, İ., Acar, Ö., Multivalued Almost Contractions in Metric Space Endowed With a Graph, Creative Mathematics and Informatics, 24, no:1, (2015), 1-8.
4-) Acar, Ö., Altun, İ., Multivalued $F$-contractive mappings with a graph and some fixed point results, Pulb. Math. Debrecen, 88/3-4, (2016), 305-317.