T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV ve q-BASKAKOV OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

DUYGU BAYIR

EYLÜL 2019

Matematik Anabilim Dalında Duygu BAYIR tarafından hazırlanmış olan GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV ve q-BASKAKOV OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA ____________

Üye (Danışman): Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI ____________

Üye: Prof. Dr. Ali ARAL ____________

… / … / 2019

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV ve q-BASKAKOV OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

DUYGU BAYIR

Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI
Eylül 2019, 58 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş kısmı yer almakta olup, tezin konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Genelleştirilmiş Baskakov Operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Genelleştirilmiş q-Baskakov Operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Baskakov operatörü, sınırlı salınımlı fonksiyon, total varyasyon, süreklilik modülü, Korovkin teoremi.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF GENERALIZED BASKAKOV AND q-BASKAKOV OPERATORS

BAYIR, DUYGU

Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: : Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI
September 2019, 58 pages

This thesis consists of four chapters.

The first part consists of introduction and general information about the subject.

The second part consists of the definitions and theorems to be used in the thesis.

The third part consists of convergence properties of Generalized Baskakov Operators.

The fourth part consists of convergence properties of Generalized q-Baskakov Operators.

Key Words: Baskakov operator, bounded variation, total variation, modulus of continuity, Korovkin theorem.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI’ ya, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan sayın Prof. Dr. Ali ARAL’ a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana destek olan başta sayın Prof. Dr. Kerim KOCA olmak üzere Matematik bölümündeki tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve yüksek lisans eğitimine başlamam konusunda bana ön ayak olan başta merhum babam Bayram BAYIR ve ayrıca annem Hayriye BAYIR olmak üzere aileme de sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$L_n(f;\ x)$	Baskakov operatörlerinin bir genellemesi olan operatör dizisi
$L_n^*(f;\ x)$	Genelleştirilmiş Baskakov operatörü
$B_n(f,x)$	Klasik Baskakov operatörü
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonların kümesi
$\omega(f,\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_k(f,\delta)$	f fonksiyonunun k. süreklilik modülü
$DB(0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında tanımlanan $\|f(t)\| \leq Mt^{\alpha},\ M>0,\ (0<\alpha<1)$ büyüme koşulunu sağlayan tüm lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
$\mathrm{V}_a^b(f)$	f' nin $[a,b]$ aralığındaki toplam salımı
$BV\ [a,b]$	$[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı
$\Delta f(x_j)$	İleri fark operatörü

1. GİRİŞ

Analiz ve fonksiyonlar teorisinin en önemli alanlarından birisi de yaklaşımlar teorisidir. Bu teoride amaç, bir fonksiyon uzayının belli bir normda veya belli bir noktada, bu uzayın bir alt uzayının veya daha iyi özelliklere sahip bir uzayın elemanlarından oluşan dizilerin limiti olacak şekilde bir gösterim bulmaktır. Burada adı geçen iyi özelliklere sahip elemanlar genellikle tam fonksiyonlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar ve cebirsel polinomlardır.

1885 yılında Alman bilim adamı Weierstrass, kapalı bir aralıkta sürekli her f fonksiyonuna karşılık gelen polinomlar dizisinin var olduğunu göstermiştir.

Bernstein f, $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]$$

şeklindeki polinomları tanımlamış ve $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını [8]' de ispatlamıştır. Bu nedenle Bernstein polinomları, Weierstrass Teoremi'ndeki polinomlar dizisine bir örnektir. Bernstein polinomlarını baz alan yaklaşımlar teorisi, bu polinomların çeşitli genelleştirmeleriyle ve modifikasyonlarıyla geçmişten günümüze yoğun olarak çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmalardan birisi de [1]' de verilen Baskakov operatörlerinin bir genellemesi olan L_n operatörüdür.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.1}$$

operatörü $x \in [0,b) \subset \mathbb{R}$ $(b = \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ iken $[0,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmıştır. Tüm $k,n \in \mathbb{N}$ için $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

$i)$ φ_n, $[0,b]$ aralığında analitiktir,

$ii)$ $\varphi_n(0) = 1$,

$iii)$ $(-1)^k \varphi_n^{(k)}(x) \geq 0$ dir, yani φ_n monotondur,

$iv)$ Öyle bir $m_{0=} m_0(n)$ pozitif tam sayısı vardır ki

$$-\varphi_n^{(k)}(x) = n\, \varphi_{n+m_0}^{(k-1)}(x) \qquad (k = 1,2,\dots), n \geq 3m_0\,,$$

$v)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{m_0+n} = 1.$

(1.1) de verilen $L_n(f;x)$ operatörleri için [2]' den;

$L_n(1;x) = 1,\; L_n(t;x) = x,\; L_n(t^2;x) = \frac{n(m_0+n)}{n^2}x^2 + \frac{x}{n}$ ve

$L_n((t-x)^2;x) = \frac{m_0}{n}x^2 + \frac{1}{n}x$ eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca Atakut ve arkadaşları [2]' de,

$P_{k,n}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$ ve $f \in C_B = C[0,\infty) \cap L_\infty[0,\infty)$

olmak üzere;

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_0^\infty f(t)\,P_{k,n}(t)dt\right)P_{k,n}(x) \tag{1.2}$$

operatöründen esinlenerek aşağıda verilmiş olan genelleştirilmiş Baskakov operatörünü tanımlamışlardır.

$n \in \mathbb{N}$ ve $\gamma_n = \int_0^\infty \varphi_n(t)\ dt < \infty$ olmak üzere i, ii, iii, iv ve v özelliklerine sahip olan ve ayrıca

$$\lim_{x\to\infty} x^k \varphi_n^{(k-1)}(x) = 0, \qquad k, n \in IN,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n-vm_0}}{\gamma_n} = 1 \qquad (v = 1,2,3)$$

koşullarını sağlayan L_n^* operatörü;

$$L_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_n} \int_0^\infty f(t) \frac{(-t)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(t) dt \right) \frac{(-x)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(x) \tag{1.3}$$

dir. Türevin sınırlı salınımlılığı ile yakınsama hızı hesaplamak son yıllarda çalışılan ilgi çekici konular arasındadır. Gupta ve arkadaşları [3]' de, Acar ve arkadaşları [4]' de sınırlı salınımlılık ile yakınsama oranlarını incelemişlerdir. Ayrıca M.K. Gupta ve arkadaşları [5]' de dekompozisyon tekniğini kullanarak fonksiyonların türevlerinin sınırlı salınımlılığı ile yakınsaklık oranı hesaplamışlardır.

Bu tezde, benzer teknik kullanılarak türevi sınırlı salınımlılığa sahip $L_n^*(f;x)$ operatörü için bazı yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Günümüzde klasik operatörler kadar, bu operatörlerin q genelleştirmeleri de yaygın olarak çalışılmış konular arasındadır. Klasik operatörlere göre q genelleştirmeleri daha iyi yakınsaklık sonuçları vermektedir. Bu tür bir çalışma öncelikle q-Bernstein operatörleri için kullanılmıştır. 1987' de Lupaş [6]' da, Bernstein opertörlerinin q analoğunu tanımlamış ve bunların bazı yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Phillips, 1997 yılında Bernstein operatörlerinin bir başka genelleştirmesi olan q-Bernstein operatörlerini [7] ve [8]' de tanımlamış ayrıca bu operatörlerin $C[0,1]$' de daha iyi yakınsaklık özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir. q operatörler ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları; Il'inskii ve Ostrovska [9], Oruç ve Tuncer [10] ve Ostrovska [11], [12] vb. dir.

Aral ve Gupta, [13] ve [14]' de Szàsz Mirakyan operatörlerinin q analoğunu tanımlayıp yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Klasik Basakov operatörlerinin $f \in C[0,\infty)$, $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (1.4)$$

şeklindeki tanımı [15]' de yer almaktadır. [16]-[19]' da bazı genelleştirmeler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

$f \in C[0,\infty)$, $q \in (0,1)$ ve her pozitif n sayısı için, [22]' de verilen q-Baskakov operatörleri;

$$P_{n,q}(f;x) = \left(\frac{qx}{1+x}, q\right)_n \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{qx}{1+x}\right)^k \qquad (1.5)$$

ve

$$P_{n,q}^{*}(f;x) = \left(\frac{q^2 x}{1+x}, q\right)_n \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k+1} [n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{q^2 x}{1+x}\right)^k \qquad (1.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu kısmında lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve bu operatörlerin q analogları ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere X' e ait olan herhangi bir f fonksiyonuna Y' de bir g fonksiyonu karşılık getiren L kuralına X uzayında bir **operatör**dür denir. Bu operatör $L(f;x) = g(x)$ biçiminde gösterilebilir.

Burada $L(f;x) = L(f(t);x)$ olmak üzere L operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni L işleminde sabit gibidir ve

$$L(f(x);x) = f(x)\, L(1;x)$$

yazılabilir.

X uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı yapılabilir.

Tanım 2.2 X ve Y lineer fonksiyon uzayları ise,

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L operatörünü ele alalım. Eğer her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f_1, f_2 \in X$ için;

$$L(\alpha\, f_1 + \beta\, f_2; x) = \alpha\, L(f_1; x) + \beta\, L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne **lineer operatör** denir.

Tanım 2.3 Eğer bir L operatörü pozitif değerli bir fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyorsa yani, f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere,

$$f \geq 0 \text{ için } L(f;x) \geq 0$$

oluyorsa L operatörüne **pozitif operatör** denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatöre **lineer pozitif operatör** denir.

2.1 Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1 Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ ve L operatörü pozitif olduğundan,

$$L(g-f) \geq 0$$

dir. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan dolayı

$$L(g-f) = L(g) - L(f)$$

elde edilir. Böylece,

$$L(g-f) = L(g) - L(f) \geq 0 \;\Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.2 L bir lineer pozitif operatör ise,

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Keyfi bir f fonksiyonu için,

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

dir. L operatörü lineer ve monoton artan olduğundan dolayı

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Buradan,

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

olduğu görülebilir.

Tanım 2.4 X ve Y fonksiyon uzayları, $L : X \to Y$ olarak tanımlı lineer operatör olsun. $D(L)$ fonksiyon uzayı, L operatörünün tanım kümesi olmak üzere $\forall\, f \in D(L)$ için,

$$\|L(f)\|_Y \leq M\, \|L(f)\|_X$$

olacak şekilde $M \geq 0$ sayısı varsa L operatörüne **sınırlı operatör** denir.

Tanım 2.5 X ve Y iki fonksiyon uzayı, $L : X \to Y$ olacak şekilde lineer operatör olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\exists\ \delta > 0$ için $\|f - f_0\| < \delta$ olduğunda

$$\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$$

oluyorsa L operatörüne **sürekli operatör** denir.

Tanım 2.6 Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $\boldsymbol{C[a,b]}$ **fonksiyon uzayı** denir. Bu uzaydaki norm,

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

şeklindedir. $C[a,b]$ uzayı normlu bir vektör uzayıdır.

Teorem 2.1 (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna **düzgün yakınsak** olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanmasıdır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

olmalıdır. Tezde, düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.7 (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna noktasal yakınsamadığı noktaların kümesi sıfır ölçülü ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde **hemen hemen her yerde yakınsaktır** denir.

Bu tanıma göre (f_n), f ' ye hemen hemen her yerde yakınsak ise $\varepsilon > 0$ verildiğinde X kümesinin öyle bir M alt kümesi vardır ki $\mu(M) = 0$ ve $x \in X \backslash M$ için öyle bir $n_0(\varepsilon, x)$ vardır ki $\forall\, n \ge n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ kalır.

Teorem 2.2 Weierstrass Yaklaşım Teoremi

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Yani her sürekli f fonksiyonuna karşılık gelen $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır.

Teorem 2.3 Korovkin Teoremi

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| < M_f$ olsun. Eğer $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatör dizisi her $x \in [a,b]$ için;

$$L_n(1;x) \to 1$$
$$L_n(t;x) \to x$$
$$L_n(t^2;x) \to x^2$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında $L_n(f;x) \to f(x)$ dir.

Tanım 2.8 $f : I \to R$ sınırlı ve reel değerli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ için, $\boldsymbol{f}$ **fonksiyonunun süreklilik modülü**,

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y|\le\delta}} |f(x) - f(y)| = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y|\le\delta}} |\Delta_h f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\omega_k(f,\delta) = \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ x,x+kh \in I}} \left|\Delta_h^k f(x)\right| = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f(x+mh)$$

$\boldsymbol{f}$ **fonksiyonunun** $\boldsymbol{k}$**. süreklilik modülü** olarak tanımlanır.

2.2 Süreklilik Modülünün Sağladığı Özellikler

(i) $\omega(f;\delta) \ge 0$

(ii) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$

(iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;\delta) \le m\,\omega(f;\delta)$

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega\,(f; \lambda\delta) \leq (1+\lambda)\,\omega\,(f;\delta)$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega\,(f;\delta) = 0$

(vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega\,(f; |t-x|)$

(vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega\,(f;\delta)$

Tanım 2.9 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır ki $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k) \subset [a,b]: k = 1,2,\ldots,n\}$ aralık ailesi için;

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **mutlak süreklidir** denir.

Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir. Fakat bunun karşıtı her zaman doğru değildir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ise, $[a,b]$ aralığının hemen hemen her noktasında türevlidir. Ayrıca f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli ve hemen hemen her $x \in [a,b]$ için $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

Tanım 2.10 $0 < a \leq 1$ olmak üzere;

$$|f(t) - f(x)| \leq M\,|t-x|^a$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına **Lipschitz sürekli fonksiyonlar,** M' ye de **Lipschitz sabiti** denir ve bu sınıf $Lip_M(a)$ ile gösterilir.

Lipschitz şartını sağlayan her fonksiyon mutlak süreklidir. Bir mutlak sürekli f fonksiyonunun Lipschitz şartını sağlaması için gerek ve yeter şart $|f|$' nin sınırlı olmasıdır.

Tanım 2.11 f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, $P = \{x_0,\ x_1 \dots x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve P' de $[a,b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. f' nin $[a,b]$ üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_a^b (f) = \sup_{P \in \mathrm{P}} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Eğer $\bigvee_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde **sınırlı salınımlıdır** denir. $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı $BV\ [a,b]$ ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan ise, herhangi bir $P \in \mathrm{P}$ parçalanması için,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} -f(x_k) + f(x_{k-1}) = f(x_0) - f(x_n)$$

$$= f(a) - f(b)$$

olduğundan $\bigvee_a^b(f) = f(a) - f(b)$ dir. O halde f sınırlı salınımlıdır. Aynı şekilde, f azalmayansa $\bigvee_a^b(f) = f(b) - f(a)$ olur. Böylece monoton fonksiyonlar sınırlı salınımlı fonksiyonlardır.

Tanım 2.12 f fonksiyonunun tanım kümesinde $x_0, x_1, \dots, x_n$ şeklinde $n+1$ tane nokta seçilirse;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

ifadesine f fonksiyonunun $\boldsymbol{n}$**. bölünmüş farkı** denir.

$n = 1$ için

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$n = 2$ için

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

şeklindedir.

Tanım 2.13 f fonksiyonu için **ileri fark operatörü;**

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$$

şeklinde ifade edilebilir. $k \geq 1$ için;

$$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j)$$

dir. Burada $k = 2, 3, \dots, n$ alınırsa;

$$\Delta^2 f(x_j) = \Delta f(x_{j+1}) - \Delta f(x_j)$$

$$= f(x_{j+2}) - f(x_{j+1}) - [f(x_{j+1}) - f(x_j)]$$

$$= f(x_{j+2}) - 2 f(x_{j+1}) + f(x_j)$$

$$\Delta^n f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(x_{j+n-i})$$

bulunur. $x_j = j$ alınırsa,

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = \frac{f(j+1) - f(j)}{j+1-j} = \Delta f(x_j) = f[x_j - x_{j+1}]$$

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j}$$

$$= \frac{f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})}{x_{j+2} - x_{j+1}} - \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

elde edilir.

Tanım 2.14 $\varepsilon \in (x_0, x_r)$ için,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_r] = \frac{f^{(r)}(\varepsilon)}{r!}, \tag{2.1}$$

sağlanır [20, Syf 10].

Şimdi q-Analiz ile ilgili bazı kavramlar vererek devam edelim.

Tanım 2.15

$$(x,q)_n = (1-x)(1-qx) \ \dots (1-q^{n-1}x) = \prod_{j=0}^{n-1} (1-q^j x)$$

q parametresi pozitif bir gerçel sayı ve n negatif olmayan bir tam sayı olsun. q tam sayısı $[n]_q$ ile gösterilir,

$$[n]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ n \quad , & q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve faktöriyeli,

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \ldots [1]_q & n = 1,2,\ldots \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

dir. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ (n$\geq k \geq 1$) ile gösterilen q binom katsayısı,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q,q)_n}{(q,q)_k(q,q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

ile tanımlanır ve $k = 0$ olduğunda 1, aksi halde sıfır olduğu [20] ve [9]' da yer almaktadır. Ayrıca q türev, D_q ile gösterilir ve

$$D_q\, f(x) := \frac{f\,(qx) - f(x)}{(q-1)x}\,, \quad x \neq 0 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre,

$$D_q f(x)\,\big|_{x=0} := f'(0),\; D_q^0 f := f\;,\; D_q^n := D_q\big(D_q^{n-1} f\big)\,, n = 1,2,3\ldots$$

dir. Çarpım ve bölümün q türevleri ise,

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = g(x)D_q f(x) + f(qx)D_q g(x) \tag{2.3}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır ([21]).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BASKAKOV OPERATÖRLERİ İÇİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde L_n^* operatörünün yakınsaklık özelliklerini incelemek için gerekli olan bazı sonuçlar verilmiştir.

Lemma 3.1 [2]' den aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$i)\ L_n^*(1,x) = 1,$

$$ii)\ L_n^*(t,x) = \frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\left(\frac{nx}{n-m_0} + \frac{1}{n-m_0}\right),$$

$$iii)\ L_n^*(t^2,x) = \frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\left[\frac{n(m_0+n)}{(n-2m_0)(n-m_0)}x^2 + \frac{4nx}{(n-2m_0)(n-m_0)} + \frac{2}{(n-2m_0)(n-m_0)}\right].$$

İspat:

$i)\ L_n^*(1,x) = 1$ dir.

$ii)\ L_n^*(t,x) = \frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\left(\frac{nx}{n-m_0} + \frac{1}{n-m_0}\right)$ olduğunu gösterelim.

$$L_n^*(t;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\infty} t\ \frac{(-t)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{\infty} t^{k+1}\varphi_n^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.1}$$

Burada $t^{k+1} = u,\ \varphi_n^{(k)}(t)dt = dv$ olacak şekilde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\left(-\int_0^\infty \varphi_n^{(k-1)}(t)(k+1)t^k dt\right)$$

$$= -\frac{(-1)^k(k+1)}{k!}\left(\int_0^\infty \varphi_n^{(k-1)}(t)\; t^k\; dt\right) \tag{3.2}$$

bulunur. Burada

$$-\varphi_n^{(k)}(t) = n\,\varphi_{n+m_0}^{(k-1)}(t) \qquad (n \to n - m_0)$$

$$-\varphi_{n-m_0}^{(k)}(t) = (n-m_0)\,\varphi_n^{(k-1)}(t)$$

$$\varphi_n^{(k-1)}(t) = -\frac{\varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)}{n-m_0} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3)' de bulunanlar (3.1)' de yerine yazılırsa;

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\frac{(-1)^k(k+1)}{k!\,(n-m_0)}\int_0^\infty \varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.4}$$

dir. (3.4)' de $\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty \varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)dt = \gamma_{n-m_0}$ olduğundan

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\frac{(k+1)}{(n-m_0)}\,\gamma_{n-m_0}\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.5}$$

olmaktadır. $(k+1)$ ifadesi dağıtılacak olursa;

$$= \frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k)}(x) + \frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k)}(x)$$

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^k}{(k-1)!}\,\varphi_n^{(k)}(x)+\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k)}(x)$$

elde edilir. Burada birinci seride k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k+1}}{k!}\,\varphi_n^{(k+1)}(x)+\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k)}(x)$$

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\left((-x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k+1)}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_n^{(k)}(x)\right) \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6)' da $-\varphi_n^{(k+1)}(x)=n\,\varphi_{n+m_0}^{(k)}(x)$ olarak yerine yazılırsa;

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\left((-x)(-n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\,\varphi_{n+m_0}^{(k)}(x)+1\right)$$

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{n-m_0}\left((-x)(-n)+1\right)$$

$$=\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\left(\frac{nx}{n-m_0}+\frac{1}{n-m_0}\right)$$

elde edilerek sonuca ulaşılır.

$$iii)\ L_n^*(t^2,x)=\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\left[\frac{n(m_0+n)}{(n-2m_0)(n-m_0)}x^2+\frac{4nx}{(n-2m_0)(n-m_0)}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{(n-2m_0)(n-m_0)}\right]$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$L_n^*(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\infty} t^2\ \frac{(-t)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\ \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{\infty} t^{k+2}\ \varphi_n^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \qquad (3.7)$$

Burada $t^{k+2} = u$, $\varphi_n^{(k)}(t)dt = dv$ olacak şekilde iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$L_n^*(f;x) = -\int_0^{\infty} \varphi_n^{(k-1)}(t)\,(k+2)t^{k+1}dt$$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi_n^{(k-1)}(t)\,\varphi_n^{(k-2)}(t)(k+2)(k+1)t^k dt$$

$$= -(k+2)(k+1)\int_0^{\infty} \varphi_n^{(k-1)}(t)\,\varphi_n^{(k-2)}(t)t^k dt \qquad (3.8)$$

elde edilir. Burada

$$-\varphi_n^{(k)}(t) = n\,\varphi_{n+m_0}^{(k-1)}(t) \qquad (n \to n - m_0)$$

$$-\varphi_{n-m_0}^{(k)}(t) = (n - m_0)\,\varphi_n^{(k-1)}(t)$$

$$\varphi_n^{(k-1)}(t) = -\frac{\varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)}{n - m_0} \qquad (3.9)$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$-\varphi_n^{(k-1)}(t) = n\,\varphi_{n+m_0}^{(k-2)}(t) \qquad (n \to n - 2m_0)$$

$$-\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t) = (n - 2m_0)\,\varphi_{n-m_0}^{(k-2)}(t)$$

$$\varphi_{n-m_0}^{(k-2)}(t) = -\frac{\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t)}{n-2m_0} \tag{3.10}$$

dir. (3.9) ve (3.10)' da bulunanlar (3.8)' de yerine yazıldığında

$$L_n^*(f;x) = -(k+2)(k+1)\int_0^\infty \left(-\frac{\varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)}{n-m_0}\right)\left(-\frac{\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t)}{n-2m_0}\right)t^k dt$$

elde edilir. Bulunan ifadeler (3.7)' de yerine yazıldığında;

$$L_n^*(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left(-\frac{(-1)^k(k+2)(k+1)}{k!\,(n-m_0)(n-2m_0)}\right)\left(\int_0^\infty \varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t)t^k dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\frac{(k+2)(k+1)}{(n-m_0)(n-2m_0)}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\int_0^\infty \varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t)t^k dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) \tag{3.11}$$

elde edilir. Burada $\frac{(-1)^k}{k!}\left(\int_0^\infty \varphi_{n-m_0}^{(k)}(t)\varphi_{n-2m_0}^{(k-1)}(t)t^k dt\right) = \gamma_{n-2m_0}$ dir. Bu eşitlik (3.11)' de yerine yazılırsa;

$$L_n^*(f;x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\frac{(k+2)(k+1)}{(n-m_0)(n-2m_0)}\gamma_{n-2m_0}\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)$$

dir. $(k+2)(k+1)$ ifadesi uygun şekilde dağıtılacak olursa;

$$L_n^*(f;x) = -\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}$$

$$\times\left(\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}4k\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{\infty}2\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)\right)$$

$$L_n^*(f;x) = -\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}$$

$$\times\left((-x)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-x)^{k-2}}{(k-2)!}\varphi_n^{(k)}(x)+4x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi_n^{(k)}(x)-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)\right)$$

elde edilir. Birinci seride k yerine $k+2$, ikinci seride k yerine $k+1$ yazılırsa;

$$L_n^*(f;x)=-\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}$$

$$\times\left((-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k+2)}(x)+4x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k+1)}(x)-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)\right)\quad(3.12)$$

elde edilir. Burada $\varphi_n^{(k+2)}(x)=-n\,\varphi_{n+m_0}^{(k+1)}(x)$, $\varphi_n^{(k+1)}(x)=-n\,\varphi_{n+m_0}^{(k)}(x)$ ve $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)=1$ olduğundan (3.12)' de yerlerine yazıldığında;

$$L_n^*(f;x)=-\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}$$

$$\times\left((-x)^2(-n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_{n+m_0}^{(k+1)}(x)+4x(-n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_{n+m_0}^{(k)}(x)-2\right)\quad(3.13)$$

dir. (3.13)' de $-\varphi_{n+m_0}^{(k+1)}(x)=(n+m_0)\varphi_{n+2m_0}^{(k)}(x)$ ve $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_{n+m_0}^{(k)}(x)=1$ ifadeleri yerine yazıldığında;

$$L_n^*(f;x)=-\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}\left((-x)^2(-n)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}(n+m_0)\varphi_{n+2m_0}^{(k)}(x)-4xn-2\right)$$

$$=-\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{1}{(n-m_0)(n-2m_0)}\left((-x)^2(-n)(n+m_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_{n+2m_0}^{(k)}(x)-4xn-2\right)$$

$$=\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\left(\frac{n(n+m_0)}{(n-m_0)(n-2m_0)}x^2+\frac{4nx}{(n-m_0)(n-2m_0)}+\frac{2}{(n-m_0)(n-2m_0)}\right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2 L_n^* operatörü ve yukarıda verilen lemma 3.1 göz önüne alındığında;

$$L_n^*((t-x)^2,x)=\left(\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}\frac{n(m_0+n)}{(n-2m_0)(n-m_0)}-\frac{2n}{(n-m_0)}\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}+1\right)x^2$$
$$+\left(\frac{4n}{(n-2m_0)(n-m_0)}\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}-\frac{2}{n-m_0}\frac{\gamma_{n-m_0}}{\gamma_n}\right)x$$
$$+\frac{2}{(n-2m_0)(n-m_0)}\frac{\gamma_{n-2m_0}}{\gamma_n}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.3 [2]' deki sonuçlar kullanılarak,

$$L_n^*(|t-x|;x)\le[L_n^*(|t-x|^2;x)]^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{2(m_0x+1)\big((n+m_0)x+1\big)}{(n-2m_0)(n-m_0)}}=\sqrt{\delta_n} \tag{3.14}$$

dir. Şimdi $L_n^*(f;x)$ operatörüne bakılacak olursa;

$$L_n^*(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\infty}f(t)\frac{(-t)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(t)dt\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x)$$

operatörün yakınsaklık oranını araştırmak için dekompozisyon tekniği kullanılarak, $L_n^*(f;x)$ operatörü aşağıdaki gibi yeni formda yazılabilir,

$$K_n(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma_n}\frac{(-t)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(t)\right)\frac{(-x)^k}{k!}\varphi_n^{(k)}(x). \tag{3.15}$$

(3.15)' den,

$$L_n^*(f;x)=\int_0^{\infty}K_n(x,t)\,f(t)dt \tag{3.16}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\beta_n(x,t) = \int_0^t K_n(x,s)\,ds \tag{3.17}$$

olmak üzere,

$$\beta_n(x,\infty) = \int_0^\infty K_n(x,s)ds = 1 \tag{3.18}$$

dir.

Lemma 3.4 $x \in (0,\infty)$ ve $K_n(x,t)$, (3.15)' de verilen operatör olsun. Bu durumda $n \geq 2$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$i)\ \beta_n(x,y) = \int_0^y K_n\,(x,t)dt \leq \frac{1}{(x-y)^2}\delta_n\,, \qquad 0 \leq y \leq x$$

$$ii)\ 1-\beta_n(x,z) = \int_z^\infty K_n(x,t)dt \leq \frac{1}{(x-z)^2}\delta_n\,, \qquad x < z < \infty.$$

İspat:

i. Not (3.1) ve Not (3.2) göz önüne alınırsa, $0 \leq t < y < x$ için;

$$0 < x-y \leq x-t$$

$$(x-y)^2 \leq (x-t)^2$$

$$\frac{(x-t)^2}{(x-y)^2} \geq 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak;

$$\beta_n(x,y)=\int_0^y K_n\,(x,t)dt \leq \int_0^y K_n\,(x,t)\frac{(x-t)^2}{(x-y)^2}dt$$

$$\leq \frac{1}{(x-y)^2}\int_0^\infty K_n(x,t)(x-t)^2dt$$

$$\beta_n(x,y)=\int_0^y K_n\,(x,t)dt \leq \frac{1}{(x-y)^2}\delta_n\,,\quad 0\leq y\leq x$$

dir. $\int_0^\infty K_n(x,t)\,(x-t)^2\,dt = L_n^*(x-t)^2$ ve $L_n^*(x-t)^2 \leq \delta_n$ olduğundan

$$\beta_n(x,y)\leq \frac{1}{(y-x)^2}\delta_n$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. $\beta_n(x,y)=\int_0^y K_n(x,t)dt$, $\beta_n(x,\infty)=\int_0^\infty K_n(x,t)dt = 1$ dir.

$$\beta_n(x,\infty)=\int_0^z K_n(x,t)dt+\int_z^\infty K_n(x,t)dt$$

şeklinde yazılırsa $\int_0^z K_n(x,t)dt=\beta_n(x,z)$ bulunur. Böylece;

$$1-\beta_n(x,z)=\int_z^\infty K_n(x,t)dt$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $x<z<t<\infty$ için;

$$0<z-x<t-x$$

$$(z-x)^2 \leq (t-x)^2$$

$$\frac{(t-x)^2}{(z-x)^2} \geq 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten yararlanarak;

$$1-\beta_n(x,z) = \int_z^\infty K_n(x,t)dt \leq \int_z^\infty K_n(x,t)\frac{(t-x)^2}{(z-x)^2}dt$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{1}{(x-z)^2} K_n(x,t)\,(t-x)^2 dt$$

yazılabilir. $\int_0^\infty K_n(x,t)(t-x)^2\,dt = L_n^*(t-x)^2$ ve $L_n^*(t-x)^2 \leq \delta_n$ olduğundan

$$1-\beta_n(x,z) \leq \frac{1}{(x-z)^2}\delta_n$$

eşitsizliği sağlanır ve böylece ispat tamamlanır.

L_n^* Operatörünün Yakınsaklığı

$\Psi(t)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı ise,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \Psi(t)dt \tag{3.19}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca f_x yardımcı fonksiyonu

$$f_x(t) = \begin{cases} f(t)-f(x^-), & 0 \leq t < x \\ 0 & t = x \\ f(t)-f(x^+), & x < t < \infty \end{cases} \tag{3.20}$$

olarak verilsin. Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem $f \in DB_\alpha\,(0,\infty)$, $(\alpha \geq 1)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun. Bu durumda;

$$|L_n^*(f,x) - f(x)| \leq M'\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2(1+m_0x)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + |f'(x^+)|\sqrt{\frac{\delta_n}{n}}$$

$$+\frac{\delta_n}{x^2}|f(2x) - f(x) - xf'(x^+)|$$

$$+\frac{\delta_n}{x}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}\,]}\bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x+\frac{x}{k}}(f')_x + \frac{x}{\sqrt{n}}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x + |f'(x^+)|\sqrt{\delta_n}$$

sağlanır. $\bigvee_a^b(f_x)$, f_x' in $[a,b]$ aralığındaki total varyasyonu ve $DB(0,\infty)$ ise $[0,\infty)$ aralığında tanımlanan $|f(t)| \leq Mt^\alpha$, $M > 0$, $(0 < \alpha < 1)$ büyüme koşulunu sağlayan tüm lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfı olsun. $[0,\infty)$ aralığının her sonlu alt aralığı üzerinde $f' \in BV$ dir.

İspat:

Bu teoremin ispatında;

$$\int_x^t f'(u)du = f(u)\,|_x^t = f(t) - f(x)$$

olduğundan

$$L_n^*(f,x) - f(x) = \int_0^\infty K_n\,(x,t)\big(f(t) - f(x)\big)dt = \int_0^\infty\left(\int_x^t K_n(x,t)\,f'(u)du\right)dt \qquad (3.21)$$

yazılabilir. Bununla birlikte,

$$f'(u)=\frac{1}{2}[f'(x^+)+f'(x^-)]+(f')_x(u)+\frac{1}{2}[f'(x^+)-f'(x^-)]sgn(u-x)$$

$$+\left[f'(x)-\frac{1}{2}\{f'(x^+)+f'(x^-)\}\right]x_x(u) \tag{3.22}$$

özdeşliği kullanılarak integral dört parça halinde yazılacaktır. Ayrıca $u=x$, $u<x$ ve $u>x$ koşulları tek tek ele alınacaktır.

$u=x$ için $x_x(u)=1$ ve $sgn(u-x)=0$ dır.

$u<x$ ve $u>x$ için $x_x(u)=0$ dır.

(3.21) ile verilen eşitlikte $f'(u)$ türevi yerine (3.22) ile verilen özdeşlik yazılırsa;

$$L_n^*(f;x)-f(x)=\int_0^\infty\left(\int_x^t K_n(x,t)\,\frac{1}{2}\,[f'(x^+)+f'(x^-)]du\right)dt$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_x^t K_n(x,t)\,\frac{1}{2}[f'(x^+)-f'(x^-)]sgn(u-x)du\right)dt$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_x^t K_n(x,t)f_x'(u)du\right)dt$$

$$+\int_0^\infty\left(\int_x^t K_n(x,t)\left[f'(x)-\frac{1}{2}[f'(x^+)+f'(x^-)]X_x(u)\right]du\right)dt$$

elde edilir. Bu integraller kısaca;

$$I_1+I_2+I_3+I_4$$

şeklinde ifade edilsin. Öncelikle I_4' ü hesaplayalım.

(I_4) için $x \neq u$ durumunda $x_x(u) = 0$ olduğundan ve ayrıca $x = u$ durumunda

$$\int_0^\infty \left(\int_x^t f'(x) - \frac{1}{2}[f'(x^+) + f'(x^-) x_x(u) du] \right) K_n(x,t) dt = 0$$

olduğundan yukarıdaki eşitlikte $I_4 = 0$ olmaktadır.

I_2 ile devam edilirse;

$$I_2 = \int_0^\infty \left(\int_x^t \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)] sgn(u-x) du \right) K_n(x,t) dt$$

$x < u < t$ için $x < u$ olduğundan $u - x > 0$ olur. Yani $sgn(u-x) = 1$ olup;

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^t \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)] du \right) K_n(x,t) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)] \left(\int_x^t du \right) K_n(x,t) dt$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\int_x^t du = t - x$ olduğundan;

$$= \frac{1}{2}[f'(x^+) + f'(x^-)] \int_0^\infty K_n(x,t)(t-x) dt$$

yazılabilir. Ayrıca (3.14) ve (3.16)' dan ;

$$= \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)] L_n^*(|t-x|; x)$$

elde edilir. $L_n^*(|t-x|;x) \leq \sqrt{\delta_n}$ olduğu (3.14)' den bilinmektedir. O halde;

$$I_2 \leq \frac{1}{2}\,[\,f'(x^+) - f'(x^-)\,]\,\sqrt{\delta_n} \tag{3.23}$$

bulunur. I_1 integrali için ise;

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\int_x^t K_n(x,t)\,\frac{1}{2}\,[f'(x^+) + f'(x^-)]du \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)] \left(\int_x^t du \right) K_n(x,t)dt$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\int_x^t du = t - x$ olduğundan

$$= \frac{1}{2}\,[\,f'(x^+) + f'(x^-)\,] \int_0^\infty K_n(x,t)\,(t-x)\,dt$$

yazılabilir. Ayrıca (3.14) ve (3.16)' dan;

$$= \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)]L_n^*(|t-x|;x)$$

elde edilir. $L_n^*(|t-x|;x) \leq \sqrt{\delta_n}$ olduğu (3.14)' den bilinmektedir. O halde;

$$I_1 \leq \frac{1}{2}[f'(x^+) - f'(x^-)]\sqrt{\delta_n} \tag{3.24}$$

bulunur. Bu durumda (3.23) ve (3.24)' den $I_1 + I_2 \leq f'(x^+)\sqrt{\delta_n}$ elde edilir.

Şimdi I_3 integralini göz önüne alalım;

$$I_3 = \int_0^\infty \left(\int_x^t K_n(x,t) f_x'(u) du \right) dt$$

$$= \int_0^x \left[\int_x^t K_n(x,t)(f_x')(u) du \right] dt + \int_x^\infty \left[\int_x^t K_n(x,t)(f_x')(u) du \right] dt$$

olarak ifade edilebilir. Burada;

$$F_n(f,x) = \int_0^x \left[\int_x^t K_n(x,t)(f_x')(u) du \right] dt$$

ve

$$E_n(f,x) = \int_x^\infty \left[\int_x^t K_n(x,t)(f_x')(u) du \right] dt$$

olarak ele alınsın. Yakınsaklığı göstermek için E_n ve F_n' den yararlanarak aşağıdaki yol izlenir.

$$|L_n^*(f,x) - f(x)| \leq \left| \int_x^\infty \int_x^t (f')_x(u) K_n(x,t) du dt - \int_0^x \int_x^t (f')_x(u)\, K_n(x,t) du dt \right|$$

$$+ \frac{1}{2} |f'(x^+) - f'(x^-)| L_n^*(|t-x|, x)$$

$$+ \frac{1}{2} |f'(x^+) + f'(x^-)| L_n^*\big((t-x), x\big)$$

$$\leq |E_n(f,x) + F_n(f,x)| + \frac{1}{2} |f'(x^+) - f'(x^-)| L_n^*(|t-x|, x)$$

$$+\frac{1}{2}|f'(x^+)+f'(x^-)|L_n^*(|t-x|,x)$$

$$\leq |E_n(f,x)+F_n(f,x)|+|f'(x^+)|\sqrt{\delta_n}. \qquad (3.25)$$

Son olarak teoremin ispatını tamamlamak için $E_n(f,x)$ ve $F_n(f,x)$ terimlerini tahmin etmek yeterlidir. Bu terimlere integrasyon uygulanarak, lemma 3.1 ile lemma 3.2 ve $t=x-\frac{x}{\sqrt{n}}$ kullanılarak;

$$F_n(f,x)=\int_0^x\left[\int_x^t K_n(x,t)(f_x')(u)du\right]dt=\int_0^x\left(\int_x^t (f')_x\,(u)du\right)K_n(x,t)dt$$

elde edilir. Burada (3.17)' den;

$$F_n(f,x)=\int_0^x \beta_n(x,t)\,(f')_x(t)dt$$

yazılabilir.

$$|F_n(f,x)|\leq \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} |\beta_n(x,t)|\,|(f')_x(t)|dt+\int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}|\beta_n(x,t)|\,|(f')_x(t)|dt$$

şeklinde $x-\frac{x}{\sqrt{n}}$ noktasında ikiye bölünsün.

$$\leq \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}\left(\bigvee_t^x (f')_x\right)|\beta_n(x,t)|\,dt+\int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}\left(\bigvee_t^x (f')_x\right)|\beta_n(x,t)|\,dt$$

Lemma (3.2)' den;

$$\leq \delta_n \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} \left(\bigvee_t^x (f')_x \right) \frac{1}{(x-t)^2} dt + \int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} \left(\bigvee_t^x (f')_x \right) dt$$

$$\leq \delta_n \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} \left(\bigvee_t^x (f')_x \right) \frac{1}{(x-t)^2} dt + \frac{x}{\sqrt{n}} \left(\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} (f')_x \right) \tag{3.26}$$

elde edilir. $u = \frac{x}{x-t}$ değişken değiştirmesi yaparsak,

$t = 0$ için, $u = 1$,

$t = x - \frac{x}{\sqrt{n}}$ için, $u = \frac{x}{x + \frac{x}{\sqrt{n}} - x} = \frac{x}{\frac{x}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}$ dir. O halde (3.26) için;

$$\delta_n \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} \bigvee_t^x (f')_x \frac{1}{(x-t)^2} dt = \delta_n \int_1^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{u}}^{x} ((f')_x) du \leq \frac{\delta_n}{x} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x} ((f')_x)$$

yazılabilir. Böylece;

$$|F_n(f,x)| \leq \frac{\delta_n}{x} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x} ((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} ((f')_x) \tag{3.27}$$

elde edilir. Diğer yandan;

$$|E_n(f,x)| = \left|\int_x^\infty \left(\int_x^t (f')_x(u)du\right) K_n(x,t)dt\right|$$

$$= \left|\int_x^{2x} \left(\int_x^t (f')_x(u)\, du\right) K_n(x,t)dt + \int_{2x}^\infty \left(\int_x^t (f')_x(u)du\right) K_n(x,t)dt\right| \qquad (3.28)$$

dir. (3.28) denklemi, hesabı kolaylaştırmak için iki parçaya ayrılırsa;

$$E_{n_1} = \left|\int_x^{2x} \left(\int_x^t (f')_x(u)\, du\right) K_n(x,t)dt\right|$$

ve

$$E_{n_2} = \left|\int_{2x}^\infty \left(\int_x^t (f')_x(u)\, du\right) K_n(x,t)dt\right|$$

yazılabilir. İlk olarak E_{n_2} denklemi ele alınacak olursa ve E_{n_2} denkleminde,

$$\int_x^t (f')_x(u)\, du = \int_x^t (f'(u) - f'(x^+)du)$$

eşitliği yerine yazılırsa;

$$E_{n_2} = \left|\int_{2x}^\infty \left(\int_x^t (f'(u) - f'(x^+)du)\right) K_n(x,t)dt\right|$$

elde edilir. Burada;

$$E_{n_2}=\left|\int_{2x}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}(f'(u)-f'(x^+)du)\right)K_n(x,t)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_{2x}^{\infty}\big(f(t)-f(x)\big)K_n(x,t)dt\right|+|f'(x^+)|\left|\int_{2x}^{\infty}(t-x)K_n(x,t)dt\right|$$

$$\leq\int_{2x}^{\infty}|f(t)|K_n(x,t)dt+|f(x)|\int_{2x}^{\infty}K_n(x,t)dt+|f'(x^+)|\int_{2x}^{\infty}(t-x)K_n(x,t)dt$$

dir. $t\geq 2x$ ve $t-x\geq x$ olduğundan $\frac{t-x}{x}\geq 1$ olur. $f\in DB$ $|f(t)|\leq Mt^{2\alpha}$ için;

$$\leq M\int_{2x}^{\infty}t^{\alpha}K_n(x,t)dt+\frac{|f(x)|}{x^2}\int_{0}^{\infty}(t-x)^2K_n\,(x,t)dt+|f'(x^+)|$$

$$\leq M\int_{2x}^{\infty}t^{\alpha}K_n(x,t)dt+\frac{|f(x)|}{x^2}\,\delta_n+|f'(x^+)|\sqrt{\delta_n}$$

$$=M\int_{x}^{\infty}(t-x)^{2\alpha}K_n(x,t)\,dt$$

$$\leq M\int_{0}^{\infty}(t-x)^{2\alpha}\,K_n(x,t)dt$$

$$=ML_n^*(|t-x|^{2\alpha};t)\leq L_n^*(f,x)$$

dir. Şimdi E_{n_1}' i göz önüne alalım;

$$E_{n_1}=\left|\int_{x}^{2x}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)\,du\right)K_n(x,t)dt\right|$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$\int_x^t (f')_x(u)\,du = u$ ise $(f')_x(t)\,dt = du$ bulunur. Ayrıca

$\int_x^{2x} K_n(x,t)\,dt = dv$ ise $1-\beta_n(x,2x) = v$ dir. Buradan;

$$= \left|\int_x^{2x} (f')_x(u)du\right| |1-\beta_n(x,2x)| + \int_x^{2x} |(f')_x(t)|\,|1-\beta_n(x,t)|dt$$

$$\leq \frac{\delta_n}{x^2}|f(2x)-f(x)-xf'(x^+)| + \frac{\delta_n}{x}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \bigvee_x^{x+\frac{x}{k}} (f')_x + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_x^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}} (f')_x$$

elde edilir. $M' > 0$ sabiti için sonuçlar bir araya getirilecek olursa [2]' den,

$$\left|\int_{2x}^{\infty} (f(t)-f(x))K_n(x,t)dt\right| \leq M'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2(1+m_0x)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dir. E_{n_1} ve E_{n_2} için elde edilen sonuçlar birleştirilirse;

$$|E_n(f,x)| \leq M'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2(1+m_0x)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + |f'(x^+)|\sqrt{\frac{\delta_n}{n}}$$

$$+\frac{\delta_n}{x^2}\left|f\big(2x-f(x)-xf'(x^+)\big)\right| + \frac{\delta_n}{x}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}\,]} \bigvee_x^{x+\frac{x}{k}} ((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_x^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}} ((f')_x) \quad (3.29)$$

elde edilir. I_1, I_2, I_3 ve I_4 integralleri birleştirilirse;

$$|L_n^*(f,x)-f(x)| \le M'\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2(1+m_0x)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}+|f'(x^+)|\sqrt{\frac{\delta_n}{\sqrt{n}}}$$

$$+\frac{\delta_n}{x^2}|f(2x)-f(x)-xf'(x^+)|+\frac{\delta_n}{x}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x+\frac{x}{k}}(f')_x$$

$$+\frac{x}{\sqrt{n}}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x+|f'(x^+)|\sqrt{\delta_n}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ q-BASKAKOV OPERATÖRLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

4.1 q-Baskakov Operatörleri İle İlgili Temel Teoremler

$f \in C[0,\infty)$, $q > 0$ ve her n pozitif tam sayısı için bir q-Baskakov operatörü tanımlanacak olursa;

$$\beta_{n,q}(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{q}(x)\, f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \qquad (4.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. $q = 1$ için (4.1.1) polinomu klasik Baskakov operatörünü verir.

Not 4.1.1 f , (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon ve h pozitif reel bir sayı olsun. f ‘ nin ∇_h^r q ileri farkları $r \geq 0$ için;

$$\nabla_q^0 f(x_j) := f(x_j)$$

$$\nabla_q^{r+1} f(x_j) := q^r \nabla_q^r f(x_{j+1}) - \nabla_q^r f(x_j)$$

dir. Bölünmüş farklar ile q ileri farklar arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilsin.

Lemma 4.1.1 Her $j, r \geq 0$ için;

$$x_j = \frac{[j]_q}{q^{j-1}}$$

olmak üzere;

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r}\right] = q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}} \frac{\nabla_q^r f\left(x_j\right)}{[r]_q!} \tag{4.1.2}$$

sağlanır.

İspat: r üzerinden tümevarım uygulanırsa, not 4.1.1' e göre sonuç $r = 0$ için açıktır. (4.1.2) eşitliğinin bazı $r \geq 0$ ve her $j \geq 0$ için doğru olduğu varsayılırsa ve ayrıca $\Delta f\left(x_j\right) = f\left(x_{j+1}\right) - f(x_j)$ olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$x_{j+r+1} - x_j = \frac{[j+r+1]_q}{q^{j+r+1-1}} - \frac{[j]_q}{q^{j-1}}$$

$$= \frac{1}{q^{j+r}} \frac{1 - q^{j+r+1}}{1-q} - \frac{1}{q^{j-1}} \frac{1 - q^j}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q} \left(\frac{1 - q^{j+r+1}}{q^{j+r}} - \frac{1 - q^j}{q^{j-1}} \right)$$

elde edilir. Burada q^{j-1} ifadesi ($q^{r+1} * q^{-r-1}$) ile çarpılırsa;

$$= \frac{1}{1-q} \left(\frac{1 - q^{j+r+1}}{q^{j+r}} - \frac{1 - q^j}{q^{j-1+r+1} q^{-r-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-q} \frac{1}{q^{j+r}} \left(1 - q^{j+r+1} - \left(1 - q^j\right) q^{r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q} \frac{1}{q^{j+r}} \left(1 - q^{j+r+1} - q^{r+1} + q^{j+r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q} \frac{1}{q^{j+r}} (1 - q^{r+1}) = \frac{[r+1]_q}{q^{j+r}}$$

dir. Yani $x_{j+r+1}-x_j=\frac{[r+1]_q}{q^{j+r}}$ için;

$$f[x_j,x_{j+1},\dots,x_{j+r+1}]=\frac{f[x_{j+1},x_{j+2},\dots,x_{j+r+1}]-f[x_j,x_{j+1},\dots,x_{j+r}]}{x_{j+r+1}-x_j}$$

$$=\frac{q^{j+r}}{[r+1]_q}\left(q^{\frac{r(2j+r+1)}{2}}\frac{\nabla_q^r f(x_{j+1})}{[r]_q!}-q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}}\frac{\nabla_q^r f(x_j)}{[r]_q!}\right)$$

$$=q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}+j+r}\left(\frac{q^r\nabla_q^r f(x_{j+1})-\nabla_q^r f(x_j)}{[r+1]_q!}\right)$$

$$=q^{\frac{(r+1)(2j+r)}{2}}\frac{\nabla_q^{r+1}f(x_j)}{[r+1]_q!}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Lemma 4.1.2 $n,\ k\geq 0$ için;

$$D_q[x^k(-x,q)_{n+k}^{-1}]=[k]_q x^{k-1}(-x,q)_{n+k}^{-1}-q^k x^k[n+k]_q(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \tag{4.1.3}$$

dir.

İspat İlk olarak $D_q(-x,q)_n=\ [n]_q(-qx,q)_{n-1}$ olduğu gösterilsin. q türev formülü kullanırsa;

$$D_q(-x,q)_n=\frac{1}{(q-1)x}\left(\prod_{j=0}^{n-1}(1+q^{j+1}x)-\prod_{j=0}^{n-1}(1+q^jx)\right)$$

$$=\frac{1}{(q-1)x}\prod_{j=0}^{n-2}(1+q^{j+1}x)\big((1+q^nx)-(1+x)\big)$$

$$= \frac{q^n - 1}{q - 1} \prod_{j=0}^{n-2} \left(1 + q^{j+1}x\right)$$

$$= [n]_q(-qx, q)_{n-1}$$

elde edilir. (2.4)' den bölümün q-türev formülü kullanılırsa;

$$D_q(-x, q)_{n+k}^{-1} = \frac{-[n+k]_q(-qx, q)_{n+k-1}}{(-x, q)_{n+k}(-qx, q)_{n+k}}$$

$$= -[n+k]_q(-x, q)_{n+k+1}^{-1} \tag{4.1.4}$$

bulunur. Ayrıca ;

$$D_q x^k = [k]_q x^{k-1} \tag{4.1.5}$$

olduğu açıktır. (4.1.4) ve (4.1.5) ‘i kullanarak lemma 4.1.2 elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem q ileri farklar ile $B_{n,q}$' nin r-inci türevinin bir temsilini verir.

Teorem 4.1.1 $r \geq 0$ olsun. q-Baskakov operatörünün r. q türevi;

$$D_q^r B_{n,q}(f, x) = \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=0}^{\infty} q^{rk} P_{n+r,k}^q(x) \nabla_q^r f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \tag{4.1.6}$$

formülü ile hesaplanabilir.

İspat: r üzerinde tümevarım uygulayarak,

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q [k+1]_q = [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q [n+k]_q = [n]_q \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitlikleri ile q türev tanımı kullanılarak;

$$D_q B_{n,q}(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} [k]_q x^{k-1} (-x,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^k [n+k]_q (-x,q)_{n+k+1}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

$$= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+k} \; x^k (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \left(f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right) - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right) \right)$$

$$= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty} q^k P_{n+1,k}^q (x) \, \nabla_q^1 f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

elde edilir. (4.1.6) eşitliğinin $r = 1$ için geçerli olduğu açıktır. Bazı $r \geq 2$ değerleri için geçerli olduğu varsayılarak (4.1.6)' nın türevi alınırsa;

$$D_q^{r+1}\left(B_{n,q}(f,x)\right) = \frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k+r-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+rk} \; [k]_q$$

$$\times x^{k-1} (-x,q)_{n+k+r}^{-1} \; \nabla_q^r f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

$$-\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k+r-1 \\ k \end{bmatrix}_q [n+k+r]_q \; q^k \, q^{\frac{k(k-1)}{2}+rk}$$

$$\times\, x^k \, (-x,q)_{n+k+r}^{-1} \;\; \nabla_q^r \, f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

$$=\frac{[n+r]_q!}{[n-1]_q!}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k+r \\ k \end{bmatrix}_q \; q^{\frac{k(k-1)}{2}+(r+1)k} x^k (-x,q)_{n+k+r+1}^{-1}$$

$$\times\left(q^r \nabla_q^r \, f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)-\nabla_q^r \, f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\right)$$

$$=\frac{[n+r]_q!}{[n-1]_q!}\sum_{k=0}^{\infty} q^{(r+1)k} \;\; P_{n+r+1,k}^{q}(x)\, \nabla_q^{r+1} \, f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 1 (4.1.1)' deki operatör, q ileri farklar yardımıyla

$$B_{n,q}(f,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\;\; \nabla_q^r \, f(0)\; \frac{x^r}{[r]_q!}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: Teorem (4.1.1) gereğince $r \geq 1$ için;

$$D_q^r\left(B_{n,q}(f,x)\right) \big|_{x=0}=\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\; P_{n+r,0}^{q}\,(0)\, \nabla_q^r \, f(0)$$

$$=\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\; \nabla_q^r \, f(0)$$

dir. $[21]$' de verilen q Taylor formülünde yukarıdaki eşitliği kullanarak;

$$B_{n,q}(f,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\ \nabla_q^r f(0)\ \frac{x^r}{[r]_q!} \tag{4.1.7}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.1 ve Sonuç 1 birleştirilerek Sonuç 2 verilebilir.

Sonuç 2 q-Baskakov operatörleri

$$B_{n,q}(f,x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[n+r-1]_q!}{[n-1]_q!}\ q^{-\frac{r(r-1)}{2}}\ f\left[0,\frac{1}{[n]_q},\frac{[2]_q}{q[n]_q},\dots,\frac{[r]_q}{q^{r-1}[n]_q}\right]\frac{x^r}{[n]_q^r}$$

olarak temsil edilebilir.

Lemma 4.1.3 $B_{n,q}$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$B_{n,q}(1,x)=1, \tag{4.1.8}$$

$$B_{n,q}(t,x)=x, \tag{4.1.9}$$

$$B_{n,q}(t^2,x)=x^2+\frac{x}{[n]_q}\left(1+\frac{1}{q}x\right). \tag{4.1.10}$$

İspat: (2.1) ve Lemma 4.1.1' den,

$$\frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}\ \nabla_q^r f(x_0)}{[r]_q!}\ [n]_q^r=\frac{f^{(r-1)}(\varepsilon)}{r!}$$

olduğu görülür. Böylece x^m , $m>r$ için $r-$ inci q ileri farklarının sıfır olduğu gözlenmiştir. (4.1.7)' den (4.1.8) sağlanır.

$f(x) = x$ için $\nabla_q^0 f(0) = f(0) = 0$, $\nabla_q^1 f(0) = f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - f(0) = \frac{1}{[n]_q}$ ve (4.1.7)' den (4.1.9) elde edilir.

$f(x) = x^2$ alınırsa $\nabla_q^0 f(0) = f(0) = 0$, $\nabla_q^1 f(0) = f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - f(0) = \frac{1}{[n]_q^2}$ ve $\nabla_q^2 f(0) = q\, f\left(\frac{[2]_q}{q[n]_q}\right) - (1+q)\, f\left(\frac{1}{[n]_q}\right) - f(0)$ için;

$$B_{n,q}(t^2, x) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q}\left(\frac{1}{q}[2]_q - 1\right)x^2 + \frac{x}{[n]_q}$$

$$= \frac{q[n]_q + 1}{[n]_q}\left(\frac{1}{q}(1+q) - 1\right)x^2 + \frac{x}{[n]_q}$$

$$= x^2 + \frac{1}{q[n]_q}x^2 + \frac{x}{[n]_q}$$

$$= x^2 + \frac{x}{[n]_q}\left(1 + \frac{1}{q}x\right)$$

elde edilir.

Önerme 4.1.1

$$U_{n,m}^q(x) \coloneqq B_{n,q}(t^m, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^q(x)\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)^m$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $U_{n,0}^q = 1$, $U_{n,1}^q = x$ olur ve $m > 1$ için;

$$[n]_q U_{n,m+1}^q(qx) = qx(1+x)D_q U_{n,m}^q(x) + qx[n]_q U_{n,m}^q(qx)$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{q}(x) = 1$ özdeşliği ve (4.1.1) ile $U_{n,0}^{q}(x)$, $U_{n,1}^{q}(x)$ değerleri bulunabilir. Lemma (4.1.2)' den;

$$x(1+q^{n+k}x)\, D_q\, P_{n,k}^{q}(x) = \big([k]_q - q^k[n]_q x\big)P_{n,k}^{q}(x)$$

olduğu açıktır. Bu ifade $x(1+x)\, D_q\, P_{n,k}^{q}\,(x) = \left(\frac{[k]_q}{q^{\,k-1}\,[n]_q} - qx\right)\frac{[n]_q}{q}\, P_{n,k}^{q}\,(qx)$ şeklinde yazılabilir. Özdeşlik kullanılarak;

$$qx(1+x)D_q U_{n,m}^{q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} qx(1+x)D_q P_{n,k}^{q}(x)\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)^m$$

$$= [n]_q \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q} - qx\right)P_{n,k}^{q}(qx)\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)^m$$

$$= [n]_q U_{n,m+1}^{q}(qx) - qx[n]_q U_{n,m}^{q}(qx)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2 q-Baskakov Operatörlerinin Yakınsaklık Özellikleri

B_f , f' ye bağlı bir sabit ve $\|f\|_2 := \sup\limits_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$ olsun.

$E_2(\mathbb{R}_+) := \left\{ f \in C\,(\mathbb{R}_+) : \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} < \infty \right\}$ ve

$B_2(\mathbb{R}_+) := \left\{ f : |f(x)| \leq B_f(1+x^2) \right\}$

olarak alınırsa Lemma 4.1.3' ün bir sonucu olarak (4.1.1) operatörü, $E_2(\mathbb{R}_+)$' yi $E_2(\mathbb{R}_+)$' ye eşler. $q > 0$ olan sabit bir q değeri için,

$$\lim_{n\to\infty} [n]_q = \frac{1}{1-q}$$

$B_{n,q}(t^2; x)$, n→ ∞ iken, x^2' ye yakınsamaz. Korovkin teoremine göre, (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.10), her $f \in E_2(\mathbb{R}_+)$ için $\mathbb{R}_+$' nin kompakt alt kümesi üzerinde $\lim\limits_{n\to\infty} B_{n,q_n} f = f$ olduğunu garanti etmez. (4.1.1)' in bu tür yakınsama özelliklerini sağlaması için $q = q_n$ yerine $n \to \infty$ iken $q_n > 0$ için $q_n \to 1$ ve $n \to \infty$ için $[n]_{q_n} \to \infty$ olacak şekilde bir dizi alınarak değiştirilir. Ayrıca $B_{n\,,q_n} f$, $q_n > 0$ için lineer pozitif operatördür. Bu durumda Korovkin teoremi $B_{n,q_n} f$' e uygulanabilir.

Teorem 4.2.1 (q_n), $q_n > 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. $\mathbb{R}$' nin kompakt bir alt kümesi üzerinde her $f \in E_2(\mathbb{R}_+)$ için

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,q_n} f = f$$

dir.

Teorem 4.2.2 $n \to \infty$ ve $q_n > 0$ için $q = q_n$ dir. Her $f \in B_2(\mathbb{R}_+)$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} \frac{\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} = 0 \tag{4.2.1}$$

dir.

İspat: f' nin sürekliliğinden, kapalı bir aralıkta $\mathcal{E}$ ve f' ye bağlı olan bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, $|t-x| < \delta$ için $|f(t) - f(x)| < \mathcal{E}$ dır. $f \in B_2(\mathbb{R}_+)$ olduğundan, $|t-x| \geq \delta$ için $|f(t) - f(x)| < A_f\,(\delta)\,\{(t-x)^2 + (1+x^2)|t-x|\}$ yazılabilir. Burada $A_f\,(\delta)$, f ve δ' ya bağlı olan pozitif bir sabittir.

Yukarıdaki sonuçlar birleştirilirse,

$$|f(t) - f(x)| < \mathcal{E} + A_f\,(\delta)\,\{(t-x)^2 + (1+x^2)|t-x|\},$$

bulunur. Burada $t, x \in \mathbb{R}_+$dir. Böylece;

$$\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| < \mathcal{E} + A_f(\delta)\left\{B_{n,q_n}((t-x)^2;x) + (1+x^2)B_{n,q_n}(|t-x|;x)\right\}$$

olup Lemma 4.1.3' den

$$\sup_{x\geq 0} \frac{\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} < \mathcal{E} + A_f\,(\delta)\left\{\frac{1}{[n]_{q_n}}\left(1+\frac{1}{q_n}\right) + \sqrt{\frac{1}{[n]_{q_n}}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)}\right\}$$

elde edilir.

Not: [18 syf 301]' de verilen yöntemi kullanarak,

$$\left|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| \leq M\,\omega\left(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_q}\left(1+\frac{1}{q}x\right)}\right)$$

elde edilir. $B_{n,q_n}(f)$' nin $\mathbb{R}_+$' nın herhangi bir kapalı alt aralığında f' ye yakınsama hızı, klasik Baskakov operatörlerde $\frac{1}{\sqrt{n}}$ iken q-Baskakov operatörlerinde $\frac{1}{[n]_{q_n}}$ olduğu söylenebilir.

4.3 q-Baskakov Operatörlerinin Şekil Koruma Özellikleri

f sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Her f fonksiyonu, a pozitif gerçel sayı olmak üzere $x\in[0,a]$ ve her bir α için $\alpha\in[0,1]$ iken;

$$f(\alpha x)\leq\alpha\, f(x)$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonu yıldız şeklindedir ([23]).

(2.2) q türev tanımından aşağıdaki lemma açıktır.

Lemma 4.3.1 f fonksiyonu, her $q\in(0,1)$ ve $x\in[0,a]$ için

$$xD_q(f)(x)\geq f(x)$$

koşulunu sağlıyorsa yıldız şeklindedir.

Teorem 4.3.1 Eğer f yıldız şeklinde ise, $B_{n,q}(f)$' de yıldız şeklindedir.

İspat: Teorem 4.1.1' den;

$$D_q\left(B_{n,q}(f,x)\right)-\frac{B_{n,q}(f,x)}{x}$$

$$=[n]_q\sum_{k=0}^{\infty}q^k\,\nabla_q^1\,f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}\,x^k\,(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}\,x^{k-1}\;\;(-x,q)_{n+k}^{-1}$$

$$= [n]\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}\ q^k\, x^k\ (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$\times\left(f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)-f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)-\frac{1}{[k+1]_q}\,f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$1-\frac{1}{[k+1]_q}=\frac{q[k]_q}{[k+1]_q}$$

olduğundan,

$$D_q\left(B_{n,q}(f,x)\right)-\frac{B_{n,q}(f,x)}{x}$$

$$= [n]\sum_{k=0}^{\infty} q^k\, P_{n+1,k}^{q}\left(\frac{q[k]_q}{[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)-f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\right) \qquad (4.3.1)$$

elde edilir. f yıldız şeklinde olduğundan,

$$\frac{q[k]_q}{[k+1]_q}f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\geq f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)$$

dir. Bu eşitsizlikten ve (4.3.1)' den istenen sonuca varılabilir.

Teorem 4.3.2 f, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x\in(0,\infty)$ için $f(x)\geq 0$ olur. Eğer $\frac{f(x)}{x}$, $(0,\infty)$ aralığındaki tüm x' ler için azalıyorsa, o zaman $x\in(0,\infty)$ ve her $q\in(0,\infty)$ için $D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right)\leq 0$ dır.

İspat: (4.1.1)' den,

$$\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}=\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}(-x,q)_{n+k}^{-1}+\frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte türev alınırsa ve Lemma 4.1.2 kullanılırsa;

$$D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right)=\sum_{k=2}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}[k-1]_q x^{k-2}(-x,q)_{n+k}^{-1}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}[n+k]_q q^{k-1} x^{k-1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$+D_q\left(\frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}\right)$$

elde edilir. Ayrıca (2.3) ve (2.4) kullanılarak;

$$D_q\left(\frac{f(0)}{x}(-x,q)_n^{-1}\right)=-\frac{f(0)}{qx^2}(-x,q)_n^{-1}-[n]_q\frac{f(0)}{x}(-x,q)_{n+1}^{-1}$$

bulunur. Bu nedenle;

$$D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^{k}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k [k]_q x^{k-1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}[n+k]_q q^{k-1} x^{k-1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$-\frac{f(0)}{qx^2}(-x,q)_n^{-1}-[n]_q\frac{f(0)}{x}(-x,q)_{n+1}^{-1}$$

dir. Burada

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n]_q}{[k+1]_q}$$

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q [n+k]_q = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q [n]_q$$

özdeşlikleri kullanılarak;

$$D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$\left(f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\frac{q^k[n]_q}{[k+1]_q} - f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\frac{q^{k-1}[n]_q}{[k]_q}\right)[k]_q$$

$$-\frac{f(0)}{qx^2}(-x,q)_n^{-1} - [n]_q \frac{f(0)}{x}(-x,q)_{n+1}^{-1}$$

elde edilir.

$f(x) \geq 0$ ve $\frac{f(x)}{x}$, $x \in (0,\infty)$ için fonksiyon artan olmadığından, her $q \in (0,\infty)$ ve $x \in (0,\infty)$ için $D_q\left(\frac{B_{n,q}(f;x)}{x}\right) \leq 0$ dır.

Şimdi (4.1.1) ile tanımlanan q-Baskakov operatörlerinin monotonluk özelliğini sağladığını gösterelim.

4.4 q-Baskakov Operatörlerinin Monotonluğu

$B_{n,q}(f)$ dizisinin iki ardışık terimi arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur. Klasik Baskakov operatörleri için benzer sonuçlar [24]' de verilmiştir.

Teorem 4.4.1 $f \in C(\mathbb{R}^{+})$ olduğunda aşağıdaki formül sağlanır.

$$B_{n+1,q}(f,x) - B_{n,q}(f,x)$$

$$= -\frac{q^n}{[n]_q[n+1]_q}\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}-2k} x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

$$\times \frac{[n+k+1]_q}{[n+1]_q} f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right]$$

İspat:

$$1 = 1 + q^{n+k}x - q^{n+k}x$$

eşitliğini ve (4.1.1)' i kullanarak;

$$B_{n+1,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k\,(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k\,(-x,q)_{n+k}^{-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k} x^{k+1}(-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$= f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k}^{-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k} x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

yazılabilir. Böylece,

$B_{n+1,q}(f;x)$

$$= f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^{k}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{n+k} x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

bulnur. Ayrıca,

$$B_{n,q}(f;x) = f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k}^{-1}$$

$$= f(0)(-x,q)_n^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^{k}[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1}$$

olduğundan,

$B_{n+1,q}(f,x) - B_{n,q}(f,x)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^k x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \left(f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q \right.$$

$$\left. - q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q - f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q \right)$$

dir. Bununla birlikte

$$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[n]_q}{[k+1]_q}$$

eşitlikleri kullanılarak;

$$B_{n+1,q}(f,x) - B_{n,q}(f,x) = -\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}} x^{k+1} (-x,q)_{n+k+1}^{-1} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q$$

$$\left(q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right) - \frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right) + \frac{[n]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q} - \frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q} = \frac{[n+k+1]_q}{q^k[n]_q[n+1]_q},$$

$$\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q} - \frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q} = \frac{1}{q^k[n+1]_q},$$

ve

$$\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q} - \frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q} = \frac{q^n[k+1]_q}{q^k[n+1]_q[n]_q}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla;

$$f\left[\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}, \frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right] = \frac{q^{2k}[n]_q[n+1]_q^2}{q^n[n+k+1]_q}$$

$$\left(q^n f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1}[n+1]_q}\right) - \frac{[n+k+1]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n+1]_q}\right) + \frac{[n]_q}{[k+1]_q} f\left(\frac{[k+1]_q}{q^k[n]_q}\right)\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

f' nin tüm ikinci bölünmüş farklarının negatif olmaması durumunda f' nin bir dışbükey olduğu bilinmektedir. Bu özellik ve Teorem 4.4.1 kullanılarak aşağıdaki sonuca varılabilir.

Sonuç Eğer f, $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlı bir konveks fonksiyonsa, f lineer fonksiyon olmadıkça, (4.1.1) ile tanımlanan $B_{n,q}(f,x)$ operatörü n için kesinlikle monoton azalmayandır. f, lineer ise bu durumda her n için;

$$B_{n,q}(f,x) = B_{n+1,q}(f,x)$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Lineer pozitif operatör olan Baskakov operatörlerinin ve bu operatörlerin q genelleştirmesi olan q-Baskakov operatörlerinin bazı yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Lineer pozitif operatörlerin, bu tip genelleştirmelerinin ve modifikasyonlarının tanımlanmasının sebebi daha iyi yakınsaklık sonuçları elde edebilmektir. Dolayısıyla yaklaşımlar teorisi, en iyi yakınsaklık sonuçları elde edebilmek adına, araştırmacılar için popülerliğini ve güncelliğini korumaktadır.

KAYNAKÇA

[1] Baskakov, V. A., *An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*. Dokl. Akad. Naulc., 113, 249-251, 1957.

[2] Atakut, Ç., Serenbay, S.K. and Büyükyazıcı, I., *Approximation properties for generalized Baskakov-type operators.* Mathematical Sciences, 7:21, 2013.

[3] Gupta, V., Abel, U., and Ivan, M., *Rate of convergence of Beta operators of second kind for functions with derivatives of bounded variation.* Int. J. Math. Sci., (23) 3827-3833, 2005.

[4] Acar, T., Gupta, V. and Aral, A. R*ate of convergence for generalized Szàsz operators*. Bull. Math. Sci., 1:99-113,2011.

[5] Gupta, M. K., Beniwal, M. S. and Goel, P., *Rate of convergence for Szàsz-Mirakyan-Durrmeyer operators with derivatives of bounded variation*. Appl. Math. Conput., 199, no. 2, 828-832, 2008.

[6] Lupaş, A*., A q-analogue of the Bernstein operators.* Seminar on Numerical and Statistical Calculus 9, Universty of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1987.

[7] Phillips, G. M. *Bernstein polynomials based on the q-integers*, Ann. Numer. Math. 4, 511-518, 1997.

[8] Phillips, G. M. *On Generalized Bernstein polynomials*. In: Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birtday Volume (D. F. Griffits, G. A. Watson, eds.), World Science, Singapore, 263-269, 1996.

[9] Il'Inski, A., Ostrovska, S., *Convergence of generalized Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory 116, 100-112, 2002.

[10] Oruç, H., Tuncer, N., *On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials*, J. Approx. Theory 117, 301-313, 2002.

[11] Ostrovska, S., *q-Bernstein polynomials and their iterates*, J. Approx. Theory 123, 232-255, 2003.

[12] Ostrovska, S., *On the improvement of analytic properties under the limit q-Bernstein operators*, J. Approx. Theory 138, 37-53, 2006.

[13] Aral, A., *A generalization of Szàsz Mirakyan operators based on q-integers*, Math. Comput. Modelling 47, 1052-1062, 2008.

[14] Aral, A., Gupta, V., *q-derivative and applications to the q-Szàsz Mirakyan Operators*, Calcolo 43, 151-170, 2006.

[15] Baskakov, V. A., *An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 113, 259-251, 1957.

[16] Gupta, V., *A note on modifed Baskakov operators*, Approx. Theory Appl. (N.S.) 10, 74-78, 1994.

[17] Gupta, V., Aral, A., *Generalized Baskakov-Beta operators*, Rocky Mauntain J. Math. 39, 1-13, 2009.

[18] Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin-type Approximation Theory and Applications (H. Bauer, J. L. Kazdan, E. Zehnder, eds.).de Gruyter Stud*. Math. 17, de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[19] Altomare, F., Mangino, E. M. *On a generalization of Baskakov operator*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 44, 683-705, 1999.

[20] Phillips, G. M. Interpolation and Approximation by Polynomials. CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC 14, Springer, Berlin, 2003.

[21] Ernst, T., The history of q-calculus and a new method, U. U. D. M. Report 2000, 16, Department of Mathematics, Upsala University, 2000.

[22] Aral, A., Gupta, V., *On q-Baskakov type operators*, Demonstratio Math. 42 2009.

[23] Lupas, L., *On star shapedness preserving properties of a class of linear positive operators,* Mathematica (Cluj) 12 (35), 105-109, 1970.

[24] Mastroianni, G., *A class of positive linear operators,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) 48, 217-235, 1980.

[25] Aral, A., Gupta, V., *Generalized q-Baskakov operators* Mathematical Institute Slovak Academy of Sciences, 2011.

[26] Kırcı Serenbay, S., Aydın Arı D., *Rate of convergence for generalized Baskakov type operators with derivatives of bounded variation* Asian Journal of Mathematics and Computer Research Volume 2 [Issue 2], 2015.