

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

5-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA Bİ-NUL EĞRİLER

Ali UÇUM

OCAK 2020

Matematik Anabilim Dalında Ali UÇUM tarafından hazırlanan 5-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA Bİ-NULL EĞRİLER adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN _____

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN _____

Üye : Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM _____

Üye : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN _____

Üye : Prof. Dr. Levent KULA _____

02/01/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Sevgili eşim HACER ve canım kızım ERVA' ya

ÖZET

5-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA Bİ-NULL EĞRİLER

UÇUM, Ali

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı, Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Ocak 2020, 84 sayfa

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda bi-null eğrilerin Frenet çatısı ve denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca sabit eğrilikli bi-null eğriler sınıflandırılmış ve parametrik denklemleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda bi-null eğrilerin oskülatör, normal ve rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde, 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda bi-null eğrilerin k-tip bi-null slant helis olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Altıncı bölümde, 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda bi-null eğriler ile elde edilen regle yüzeyler çalışılmıştır. Yedinci bölümde, 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayda bi-null eğriler ile elde edilen stationary yüzeyler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Öklidyen uzay, bi-null eğriler, k-tip slant helis, regle yüzeyler, stationary yüzeyler, marginally trapped yüzeyler.

ABSTRACT

BI-NULL CURVES IN SEMI-EUCLIDEAN 5-SPACE WITH INDEX 2

UÇUM, Ali

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Doctoral Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

January 2020, 84 pages

This thesis consists of seven chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter, Frenet frame and Frenet equations of bi-null curves are obtained in semi-Euclidean 5-space with index 2. Also, bi-null curves with constant curvatures are classified and parametric equations of such curves are obtained. In the fourth chapter, the necessary and sufficient conditions are obtained for bi-null curves to be osculator, normal and rectifying curve in semi-Euclidean 5-space with index 2. In the fifth chapter, the necessary and sufficient conditions are obtained for bi-null curves to be k-type slant helices in semi-Euclidean 5-space with index 2. In the sixth chapter, the ruled surfaces obtained from bi-null curves are studied in semi-Euclidean 5-space with index 2. In the seventh chapter, the Lorentzian stationary surfaces with bi-null curves are studied in semi-Euclidean 5-space with index 2.

Key Words: Semi-Euclidean space, bi-null curves, k-type slant helices, ruled surfaces, stationary surfaces, marginally trapped surfaces.

TEŞEKKÜR

İlk olarak doktora tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, doktora eğitimimi tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bilgi ve tecrübesi ile beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Makoto SAKAKI (Hirosaki Üniversitesi, Japonya)'ye teşekkürlerimi sunarım. Bunun yanı sıra doktora eğitimim boyunca 2211-E Doğrudan Yurt içi Doktora Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Son olarak doktora eğitimim boyunca her türlü desteği veren sevgili anneme, babama, kardeşlerime ve eşim Hacer UÇUM'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özeti.....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
3. 5-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA Bİ-NULL EĞRİLER	9
3.1. Frenet Denklemleri.....	9
3.2. \mathbb{R}_2^5 uzayında sabit eğrilikli bi-null eğriler	15
4. OSKÜLATÖR, NORMAL VEYA REKTİFİYAN Bİ-NULL EĞRİLER...	30
4.1. Oskülatör bi-null eğriler	30
4.2. Normal veya rektifiyan bi-null eğriler	35
5. k-TİP Bİ-NULL SLANT HELİSLER	41
6. Bİ-NULL EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLERİ	53
7. Bİ-NULL EĞRİLER VE LORENTZİYEN STATIONARY YÜZEYLER.	59
8. TARTIŞMA VE SONUÇ	70
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	76

SİMGELER DİZİNİ

D	Flat konneksiyon
TM	M manifoldunun tanjant demeti
TM^\perp	M manifoldunun normal demeti
$\Gamma(E)$	Vektör demetinin çapraz kesitlerinin kümesi
∇	Levi-civita konneksiyonu
${}^\perp\nabla$	M manifoldunun normal konneksiyonu
${}^\perp R$	M manifoldunun normal eğrilik tensörü
A_ξ	ξ boyunca şekil operatörü
h	İkinci temel form
H	Ortalama eğrilik vektörü
K	Gauss eğriliği
\langle , \rangle	Skalar çarpım fonksiyonu
$\ , \ $	Norm fonksiyonu
κ_i	Bir eğrinin i-inci eğrilik fonksiyonu
F_*	F dönüşümünün türev dönüşümü

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olup tarihi Huygens (1629-1695), Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727) un düzlemsel eğriler üzerine yaptıkları araştırmalara kadar dayanmaktadır. Bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarının eğriyi temsil eden fonksiyonun türevleri yardımıyla bulunması 1671 yılında Newton (1643-1727) tarafından verilmiştir. Uzay eğrilerinin diferensiyel geometrisinin çalışılmasında en önemli adım Frenet-Serret formüllerinin inşa edilmesidir. Bu formüller Frenet (1847) ve Serret (1851) tarafından ayrı ayrı tanımlanmıştır. T, N, B ile gösterdiğimiz ve günümüzde Frenet vektörleri olarak tanımlanan bu vektörler yardımıyla eğrinin birçok geometrik özelliği incelenebilmektedir. Ayrıca eğrinin esas teoremi olarak bilinen teorem Aoust tarafından 1876 yılında verilmiştir. 1775 yılında Monge (1746-1818), üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin birinci ve ikinci eğriliğini tanımlamış ve birinci eğrilik fonksiyonunun analitik ifadesini elde etmiştir. Fakat torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesini verememiştir. Torsiyon (burulma) eğriliğinin analitik ifadesi 1806 yılında Lancret (1774-1807) tarafından verilmiştir. Sonrasında 1826 yılında Cauchy (1789-1857) ilk olarak bir uzay eğrisini sistematik olarak ardışık türevler yardımıyla çalışmıştır ([1-3]).

Günümüzde yoğun bir şekilde çalışılmakta olan eğriler teoresinde öne çıkan problemlerden birisi de eğrilerin sınıflandırılması problemidir. Bu problemin çözümünde eğrinin eğrilikleri (κ_1 ve κ_2) ve eğrinin Frenet vektör alanları (T, N, B) büyük bir öneme sahiptir. Bunların başlıca örnekleri eğriler teorisinin klasik problemlerinden olan Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri ve helis eğrileri olup bu eğriler üzerine yapılan çalışmalar günümüzde de devam etmektedir. Bununla birlikte eğriler teorisine yeni tip eğri kavramları da eklenmektedir. Bunlardan bir tanesi B. Y. Chen (2003) tarafından ortaya konulan "Bir eğrinin konum vektörü ne zaman tamamen kendi rektifiyan düzleminde yatar?" sorusunun cevabı olarak ortaya çıkan rektifiyan eğri kavramıdır. Bu yaklaşım sonucunda bir eğrinin karakterizasyonunun konum vektörü yardımıyla da yapılabileceği ortaya çıkmıştır. Benzer düşünceyle normal eğri ve oskülatör eğri kavramı geliştirilmiştir. Normal eğri, konum vektörü tamamen kendi normal düzleminde yatan eğri ve oskülatör

eğri de konum vektörü tamamen kendi oskülütör düzleminde yatan eğri olarak tanımlanır. Bu eğriler 3-boyutlu ve 4-boyutlu Öklid uzayında, ayrıca 3-boyutlu ve 4-boyutlu yarı-Öklidyen uzaylarında da çalışılmıştır ([4-14]).

Eğrilikler yardımıyla da eğriler için birçok karakterizasyon verilmiştir. Bir eğrinin teğet vektör alanı sabit bir doğrultu ile her noktada sabit açı yapıyorsa bu eğri genel helis eğrisi olarak adlandırılır. Lancret tarafından genel helis eğrileri için verilen karakterizasyona göre " \mathbb{E}^3 de, bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart, eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla, κ_1 ve κ_2 olmak üzere κ_1/κ_2 oranının sabit olmasıdır". Açıktır ki bu uzayda κ_1 ve κ_2 eğrilikleri sıfırdan farklı ve sabit olan eğriler de bir genel helis eğrisi olup bu eğrilere sabit eğrilikli eğriler veya W -eğriler denir ([15-21]).

Izumiya ve Takeuchi (2004) genel helis eğrilerine benzer olarak slant helis kavramını ortaya koymuştur. Buna göre bir eğrinin normal vektör alanı sabit bir doğrultu ile her noktada sabit açı yapıyorsa bu eğri slant helis eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğrilerin birçok araştırmacı tarafından karakterizasyonu yapılmıştır ([22-25]). Daha sonra k -tip slant helis kavramı ortaya atılmıştır ve birçok araştırmacı tarafından ilgi görmüştür ([26-28]).

Diferensiyel geometrinin önemi bir diğer çalışma alanı da yüzeyler teorisidir. Yüzeyler teorisi ile ilgili ilk çalışmalar, 1760 yılında Euler in bir yüzeyin eğriliğini tanımlamasına kadar uzanmaktadır. Eğriler ve yüzeyler birbiriyle bağlantılı çalışma alanlarıdır. Eğri ve yüzey ilişkisinin güzel bir örneği olarak regle (doğrusal) yüzeyler verilebilir ([1]). Regle yüzeylerin bir örneği B -scroll olarak adlandırılan yüzeylerdir. Bu yüzeyler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır ([29-31]). Bir diğer örnek olarak Stationary yüzeyler verilebilir. Bu tip yüzeyler de birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır ([32-35]).

Bu tez çalışmasında, M. Sakaki (2012) tarafından $n \geq 6$ olmak üzere \mathbb{R}_2^n uzayında ortaya atılan bi-null eğri kavramı 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay \mathbb{R}_2^5 de çalışıldı ([36]). Bu tip eğrilerin Frenet denklemleri elde edilerek \mathbb{R}_2^5 uzayında sabit eğrilikli bi-null eğriler sınıflandırıldı. Daha sonra \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null eğrilerin oskülütör, normal, rektifiyan ve k -tip slant helis olması için gerek ve yeter şartlar elde edildi. Son olarak bi-null eğriler ile yüzeyler arasındaki ilişki araştırılarak, bi-null eğrilerden elde edilen regle ve stationary yüzeylerinin karak-

terizasyonu yapıldı. Bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar [37-41] makalelerinde yayımlanmıştır.

1.1. Kaynak zetleri

Bu tez çalışmasında temel kavramlar için başlıca O'Neill (1983), Kuhnel (1999), Duggal ve Bejancu (1996), Montiel ve Ros (1998), şahin (2012), Chen (2011) kitaplarının yanı sıra bi-null eğriler için Sakaki (2012), marginally trapped yüzeyler için başlıca Senovilla (2002), Chen (2009), Turgay (2014) makalelerinden yararlanılmıştır. Diğer bölümlerde yukarıda ifade edilen çalışmaların yanı sıra referans listesinde adı geçen makaleler ve kitaplardan yararlanılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form) Bir reel vektör uzayı V için

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

- i. $g(u, v) = g(v, u)$
- ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$
 $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

şartları sağlamıyorsa g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir ([42]).

Tanım 2.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

(i) $0 \neq w \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(u, w) = 0$$

ise g ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye non-dejeneredir denir.

Bu tanıma göre g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall w \in V$ için

$$g(u, w) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

(ii) **(Skalar çarpım)** Non-dejenere simetrik bilinear form, skalar çarpım olarak adlandırılır.

(iii) Eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) > 0$ ise g simetrik bilinear formu pozitif tanımlı, eğer her $0 \neq w \in V$ için $g(w, w) < 0$ ise g simetrik bilinear formu negatif tanımlıdır ([33]).

Tanım 2.3. n -boyutlu q -indeksli yarı-Öklidyen uzay \mathbb{R}_q^n uzayının bir dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ olmak üzere

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-q} dx_i^2 - \sum_{i=n-q+1}^n dx_i^2$$

olarak tanımlanan non-dejenere metrik ile donatılmış n boyutlu Öklid uzayıdır. \mathbb{R}_q^n uzayının skalar çarpımını $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile gösterelim. Özel olarak $n = 5$ ve $q = 2$ alınırsa 5-boyutlu 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay \mathbb{R}_2^5 elde edilir.

Tanım 2.4 $v \in \mathbb{R}_2^5 \setminus \{0\}$ olmak üzere, eğer

- i. $\langle v, v \rangle > 0$ ise, v spacelike (uzaysı) vektör
- ii. $\langle v, v \rangle < 0$ ise, v timelike (zamansı) vektör
- iii. $\langle v, v \rangle = 0$ ise, v null veya lightlike (ışıkı) vektör

olarak adlandırılır ([33]).

Tanım 2.5 $v \in \mathbb{R}_2^5 \setminus \{0\}$ olmak üzere, \mathbb{R}_2^5 uzayında v vektörünün normu

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$$

olarak tanımlanır. $\|v\| = 1$ ise v vektörüne birim vektör denir. ([33])

Tanım 2.6 $v, w \in \mathbb{R}_2^5$ olmak üzere, v ve w vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart $\langle v, w \rangle = 0$ olmasıdır ([3]).

Tanım 2.7 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^5$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\forall s \in I$ için hız vektörü $\alpha'(s)$ sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise α eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır ([42]).

Tanım 2.8 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^5$ bir eğri olsun.

i. α null bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii. α null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer $\forall s \in I$ için $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \pm 1$ şartı sağlanıyorsa α eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir ([33]).

\mathbb{R}_q^n , skalar çarpım fonksiyonu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve flat konneksiyonu D olan n -boyutlu q -indeksli yarı-Öklidyen uzay olsun. M , \mathbb{R}_q^n uzayının bir alt manifoldu olsun. O zaman $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bilinear form non-dejenere olduğundan her $p \in M$ için

$$T_p \mathbb{R}_q^n = T_p M + (T_p M)^\perp \quad \text{ve} \quad T_p M \cap (T_p M)^\perp = \{0\}$$

şeklinde yazılır. Bu kısaca

$$T_p \mathbb{R}_q^n = T_p M \perp T_p M^\perp$$

şeklinde gösterilecektir. Sonuç olarak

$$T\mathbb{R}_q^n = TM \perp TM^\perp$$

dir. Buradan

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$

ve

$$D_X \xi = -A_\xi X + {}^\perp \nabla_X \xi$$

bulunur. Burada $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ dir. O zaman ∇ , M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu, h ikinci temel formu, A_ξ , ξ yönündeki şekil operatörü ve ${}^\perp \nabla$ normal konneksiyonudur. Öyleyse

$$\langle h(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle$$

olarak yazılır.

Normal eğrilik tensörü ${}^\perp R$,

$${}^\perp R(X, Y)\xi = {}^\perp \nabla_X {}^\perp \nabla_Y \xi - {}^\perp \nabla_Y {}^\perp \nabla_X \xi - {}^\perp \nabla_{[X, Y]}\xi$$

olarak tanımlanır. Burada $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ dir.

$$D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X, Y]}\xi = 0$$

denklemin normal kısmı alınarak, Ricci denklemi

$$\langle {}^\perp R(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle - \langle A_\xi X, A_\eta Y \rangle$$

elde edilir. Burada $\eta, \xi \in \Gamma(TM^\perp)$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ dir.

Kabul edelim ki M , \mathbb{R}_2^5 uzayında iki boyutlu bir alt manifold olsun. M yi kısaca yüzey olarak adlandıracağız. Aşağıda uygun indis aralığı olarak

$$1 \leq A, B \dots \leq 5, \quad 1 \leq i, j \dots \leq 2, \quad 3 \leq \alpha, \beta \dots \leq 5$$

alalım. M üzerinde lokal ortonormal teğet vektör alanları $\{e_i\}$ ve M ye dik ortonormal vektör alanları $\{e_\alpha\}$ olsun. $\varepsilon_A = \langle e_A, e_A \rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$h_{ij}^\alpha = \varepsilon_\alpha \langle h(e_i, e_j), e_\alpha \rangle$$

ve

$$R_{\beta ij}^{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} \langle {}^{\perp}R(e_i, e_j) e_{\beta}, e_{\alpha} \rangle$$

sırasıyla ikinci temel form h nin bileşenleri ve normal eğrilik tensörü ${}^{\perp}R$ in bileşenleridir.

Ricci denkleminde, normal eğrilik tensörü ${}^{\perp}R$ in bileşenleri $R_{\beta ij}^{\alpha}$,

$$R_{\beta ij}^{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} (\langle A_{e_{\alpha}} e_i, A_{e_{\beta}} e_j \rangle - \langle A_{e_{\beta}} e_i, A_{e_{\alpha}} e_j \rangle)$$

denklemini sağlar.

$$A_{e_{\alpha}} e_i = \varepsilon_{\alpha} \sum_k \varepsilon_k h_{ik}^{\alpha} e_k$$

denklemini kullanarak,

$$R_{\beta ij}^{\alpha} = \varepsilon_{\beta} \sum_k \varepsilon_k (h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta})$$

elde edilir.

M nin Gauss eğriliği K ,

$$K = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} ((h_{12}^{\alpha})^2 - h_{11}^{\alpha} h_{22}^{\alpha})$$

olarak hesaplanır. Eğer $K = 0$ ise yüzey, flat yüzey olarak adlandırılır ([32, 33, 43]).

M nin ortalama eğrilik vektörü H ,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\varepsilon_1 h_{11}^{\alpha} + \varepsilon_2 h_{22}^{\alpha}) e_{\alpha}$$

olarak bulunur.

Eğer ortalama eğrilik vektörü $H = 0$ ise yüzey, minimal yüzey veya stationary yüzey olarak adlandırılır. Genel olarak, n -boyutlu q -indeksli yarı-Öklidyen uzay \mathbb{R}_q^n uzayında bir Lorentz stationary yüzeyin parametrizasyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$f(u, v) = P(u) + Q(v).$$

Burada $P(u)$ ve $Q(v)$, \mathbb{R}_q^n uzayında null eğriler ve $\langle P'(u), Q'(v) \rangle \neq 0$ dır ([32, 33, 43]).

İlk olarak Penrose (1965) tarafından ortaya atılan trapped yüzeyler kavramı fiziksel olarak kosmik kara delik teoresinde önemli rol oynamaktadır. Trapped

yüzeylerde içine gönderilen bir ışık ışını bu yüzeyin içinde hapsolür, dışarı çıkmaz. Bu sebeple İngilizcede hapsolmüş anlamına gelen "trapped" kelimesiyle adlandırılmıştır. Yani bir kara deliğın yüzeyi, bir marginally trapped yüzeydir (Fiziksel olarak ayrıntılı bilgi için [33] nolu referans incelenebilir). Matematiksel olarak, eğer bir yarı-Riemann manifoldundaki bir yüzeyin ortalama eğrilik vektörü H , her bir noktada lightlike ise, bu yüzey marginally trapped (quasi-minimal) yüzey olarak adlandırılır ([32, 33, 44-49]).

Son olarak, eğer ${}^{\perp}\nabla H = 0$ ise yüzey paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir denir ([32, 33, 43]).



3. 5-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA Bİ-NULL EĞRİLER

Bu bölümde \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null eğrinin Frenet çatısı ve denklemleri elde edilecektir. Daha sonra \mathbb{R}_2^5 uzayında sabit eğrilikli bi-null eğriler sınıflandırılacaktır ve parametrik denklemleri elde edilecektir.

3.1. Frenet Denklemleri

Tanım 3.1. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. W uzayı, V uzayının bir alt uzayı olmak üzere eğer her $u, v \in W$ için $g(u, v) = 0$ ise W uzayına izotropik alt uzay denir.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 üzerinde bir eğri olmak üzere eğer her $t \in \mathbb{R}$ için $\text{sp}\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ bir izotropik 2-düzlem ise $\gamma(t)$ eğrisi bi-null eğri olarak adlandırılır. Yani,

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle = 0$$

ve $\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ lineer bağımsızdır. Bu durum parametre seçiminden bağımsızdır. Ayrıca

$$\langle \gamma'(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma^{(4)}(t) \rangle = 0$$

elde edilir.

Eğer $\langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle = 1$ ise $\gamma(t)$ eğrisi bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiştir denir. \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi,

$$\langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle \geq 0$$

şartını sağlar. Çünkü, kabul edelim ki $\langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle < 0$ olsun. O zaman $\gamma^{(3)}(t) \perp \gamma'(t)$, $\gamma^{(3)}(t) \perp \gamma''(t)$ ve $\text{sp}\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ bir izotropik 2-düzlem olması durumları düşünüldüğünde, bu durum \mathbb{R}_2^5 uzayının indeksinin 2 olması ile çelişir. Eğer bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi, $\langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle > 0$ şartını sağlıyorsa

$$u(t) = \int_{t_0}^t \langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle^{1/6} dt$$

bu eğrinin bi-null yay-parametresidir.

\mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi için,

$$\begin{aligned}\langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(4)}(t) \rangle &= 0, & \langle \gamma''(t), \gamma^{(4)}(t) \rangle &= -1, & \langle \gamma'(t), \gamma^{(5)}(t) \rangle &= 1, \\ \langle \gamma''(t), \gamma^{(5)}(t) \rangle &= 0, & \langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(5)}(t) \rangle &= -\langle \gamma^{(4)}(t), \gamma^{(4)}(t) \rangle\end{aligned}$$

şartları sağlanır.

Lemma 3.1. \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi verilsin. O zaman her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\{\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(4)}(t), \gamma^{(5)}(t)\}$$

cümlesi lineer bağımsızdır.

İspat. Kabul edelim ki

$$a_1\gamma'(t) + a_2\gamma''(t) + a_3\gamma^{(3)}(t) + a_4\gamma^{(4)}(t) + a_5\gamma^{(5)}(t) = 0$$

eşitliği sağlansın. O zaman sırasıyla $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$, $\gamma^{(3)}(t)$, $\gamma^{(4)}(t)$ ve $\gamma^{(5)}(t)$ ile üstteki eşitliği sırasıyla skalar çarpım yaparak $1 \leq i \leq 5$ için $a_i = 0$ olduğu elde edilir. Buradan $\{\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(4)}(t), \gamma^{(5)}(t)\}$ lineer bağımsızdır.

\mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi verilsin.

$$\gamma'(t) = L_1, \quad L_1' = L_2, \quad L_2' = W$$

olarak alalım. O zaman $W = \gamma^{(3)}$ bir spacelike vektördür.

3 boyutlu Π uzayı

$$\Pi = \text{sp}\{\gamma''(t), \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(4)}(t)\}$$

olarak alınsın.

Lemma 3.2. \langle , \rangle metriği Π üzerinde non-dejeneredir ve her noktada indeksi 1 dir.

İspat. Eğer herhangi $X \in \Pi$ için

$$\langle a_1\gamma''(t) + a_2\gamma^{(3)}(t) + a_3\gamma^{(4)}(t), X \rangle = 0$$

ise o zaman X sırasıyla $\gamma''(t)$, $\gamma^{(3)}(t)$ ve $\gamma^{(4)}(t)$ seçilerek, $i \in \{1, 2, 3\}$ için $a_i = 0$ elde edilir. Dolayısıyla \langle , \rangle metriği Π üzerinde non-dejeneredir.

Π uzayı, \mathbb{R}_2^5 uzayının alt uzayı olduğundan, Π uzayının indeksi 2 den küçük veya eşittir. Π uzayı null vektör $\gamma''(t)$ içerir ve Π uzayının indeksi 1 veya 2 dir.

Kabul edelim ki Π uzayının indeksi 2 olsun. O zaman Π uzayında, spacelike $\gamma^{(3)}(t)$ vektörünün gerdiği uzayının dik tümleyeni Π_0 olmak üzere Π_0 uzayı 2 boyutludur ve indeksi 2 dir, yani negatif tanımlıdır. Fakat Π_0 uzayı bir null vektör olan $\gamma''(t)$ vektörünü içerdiğinden dolayı bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Π uzayının indeksi 1 olmak zorundadır.

L_2 null vektörü ve W spacelike vektörü, Π uzayında ve ortogonaldır. Öyleyse tek olarak belli olan bir null vektör $N_2 \in \Pi$ vardır öyle ki

$$\langle L_2, N_2 \rangle = 1, \quad \langle W, N_2 \rangle = 0$$

dır ([50], syf 9-10). Bu durumda

$$\Pi = \text{sp} \{L_2, N_2, W\}$$

dur.

Π^\perp , \mathbb{R}_2^5 uzayında Π nin dik tümleyeni olmak üzere Π^\perp her noktada 2 boyutlu uzaydır. Null vektör $L_1 \in \Pi^\perp$ olduğundan, tek olarak belli olan bir null vektör $N_1 \in \Pi^\perp$ vardır öyle ki $\langle L_1, N_1 \rangle = 1$ dir ([50], syf 9-10). O zaman $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$, \mathbb{R}_2^5 uzayının bir bazıdır.

$W' = \gamma^{(4)} \in \Pi$ olduğu göz önüne alınarak, bazı k_0 fonksiyonları için

$$W' = -k_0 L_2 - N_2$$

olarak yazılabilir. Ayrıca bazı k_1 fonksiyonları için

$$N_2' = -k_1 L_1 - N_1 + k_0 W$$

olarak yazılabilir. Son olarak

$$N_1' = k_1 L_2$$

elde edilir.

Sonuç olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null eğrinin Frenet denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

Teorem 3.1. \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi için tek bir Frenet çatısı $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned}\gamma' &= L_1, & L_1' &= L_2, & L_2' &= W, \\ N_1' &= k_1 L_2, \\ N_2' &= -k_1 L_1 - N_1 + k_0 W, \\ W' &= -k_0 L_2 - N_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

dir. Burada N_1, N_2 null vektörlerdir. Ayrıca $\langle L_1, N_1 \rangle = \langle L_2, N_2 \rangle = 1$, $\text{sp}\{L_1, N_1\}$, $\text{sp}\{L_2, N_2\}$ ve $\text{sp}\{W\}$ birbirine dik uzaylardır, W bir spacelike birim vektördür.

$\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ çatısı pseudo-ortonormal çatıdır. k_0 ve k_1 fonksiyonları γ eğrisinin eğrilikleridir. Teorem 3.1 kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} \gamma' \\ \gamma'' \\ \gamma^{(3)} \\ \gamma^{(4)} \\ \gamma^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k_0 & 0 & -1 & 0 \\ k_1 & -k_0' & 1 & 0 & -2k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ N_1 \\ N_2 \\ W \end{bmatrix}$$

elde edilir.

[36] makalesindeki teoreme benzer olarak yapılacağından aşağıdaki teoremin ispatını vermeden teoremi ifade edeceğiz.

Teorem 3.2. \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi için k_0 ve k_1 eğrilikleri

$$k_0 = \frac{1}{2} \langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle, \quad k_1 = \frac{1}{2} (\langle \gamma^{(5)}, \gamma^{(5)} \rangle - \langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle^2)$$

olarak verilir.

Aşağıda böyle eğrilerin varlığını gösteren örnekler vereceğiz.

Örnek 3.1. $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $p^2 > q^2$ için

$$A = 1 / \left(\sqrt{p^4 (p^2 - q^2)} \right), \quad B = 1 / \left(\sqrt{q^4 (p^2 - q^2)} \right) \quad \text{ve} \quad C = 1 / \left(\sqrt{p^2 q^2} \right)$$

olarak alınsın. \mathbb{R}_2^5 uzayında bir $\gamma(t)$ eğrisi

$$\gamma(t) = (Ct, A \sin pt, A \cos pt, B \sin qt, B \cos qt)$$

şeklinde verilsin. O zaman $\{\gamma'(t), \gamma''(t)\}$ lineer bağımsız ve

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle = 0 \text{ ve } \langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle = 1$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla $\gamma(t)$ eğrisi bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null eğridir. Teorem 3.2 kullanılarak,

$$k_0 = \frac{p^2 + q^2}{2} \text{ ve } k_1 = -\frac{p^2 q^2}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2. $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $p^2 > q^2$ için

$$A = 1/\left(\sqrt{p^4(p^2 - q^2)}\right), \quad B = 1/\left(\sqrt{q^4(p^2 - q^2)}\right) \quad \text{ve} \quad C = 1/\left(\sqrt{p^2 q^2}\right)$$

olarak alınsın. \mathbb{R}_2^5 uzayında bir $\gamma(t)$ eğrisi

$$\gamma(t) = (Ct, A \sinh pt, B \cosh qt, B \sinh qt, A \cosh pt)$$

şeklinde verilsin. Örnek 3.1 dekine benzer olarak, $\gamma(t)$ eğrisi bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null eğri ve

$$k_0 = -\frac{p^2 + q^2}{2} \text{ ve } k_1 = -\frac{p^2 q^2}{2}$$

olduğu görülür.

Tanım 3.2. \mathbb{R}_2^5 uzayında $r > 0$ yarıçaplı ve p_0 merkezli pseudo-küre

$$S_2^4(r) = \{x \in \mathbb{R}_2^5 \mid \langle x - p_0, x - p_0 \rangle = r^2\},$$

$r > 0$ yarıçaplı ve p_0 merkezli pseudo-hiperbolik uzay

$$H_1^4(r) = \{x \in \mathbb{R}_2^5 \mid \langle x - p_0, x - p_0 \rangle = -r^2\}$$

şeklinde verilir ([1]).

Teorem 3.3. \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi ile parametrelendirilmiş bir bi-null $\gamma(t)$ eğrisi verilsin. $\gamma(t)$ eğrisine 3. mertebeden geçen pseudo-küre ve pseudo-hiperbolik uzay yoktur.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t_0)$ noktasında $\gamma(t)$ eğrisine 3. mertebeden geçen r yarıçaplı ve $A(t_0)$ merkezli bir pseudo-küre olsun. $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ çatısı kullanılarak, $1 \leq i \leq 5$ olmak üzere bazı sabit m_i için

$$\gamma(t_0) - A(t_0) = m_1 L_1(t_0) + m_2 L_2(t_0) + m_3 N_1(t_0) + m_4 N_2(t_0) + m_5 W(t_0)$$

yazılır.

$$f(t) = \langle \gamma(t) - A(t_0), \gamma(t) - A(t_0) \rangle - r^2$$

fonksiyonunu ele alalım. 3. mertebeden değme durumundan

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = f^{(3)}(t_0) = 0$$

sağlanır.

$f(t)$ nin türevi alınarak

$$f'(t) = 2 \langle \gamma(t) - A(t_0), L_1 \rangle$$

ve

$$f'(t_0) = 2 \langle \gamma(t_0) - A(t_0), L_1(t_0) \rangle = 2m_3 = 0$$

elde edilir. $f'(t)$ nin türevi alınarak

$$f''(t) = 2 \langle \gamma(t) - A(t_0), L_2 \rangle$$

ve

$$f''(t_0) = 2 \langle \gamma(t_0) - A(t_0), L_2(t_0) \rangle = 2m_4 = 0$$

bulunur. $f''(t)$ nin tekrar türevi alınarak

$$f^{(3)}(t) = 2 \langle \gamma(t) - A(t_0), W \rangle$$

ve

$$f^{(3)}(t_0) = 2 \langle \gamma(t_0) - A(t_0), W(t_0) \rangle = 2m_5 = 0$$

olduğu görülür. O zaman $f(t_0) = -r^2 < 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Şimdi, kabul edelim ki $\gamma(t_0)$ noktasında $\gamma(t)$ eğrisine 3. mertebeden değen r yarıçaplı ve $A(t_0)$ merkezli bir pseudo-hiperbolik uzay olsun. $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ çatısı kullanılarak, $1 \leq i \leq 5$ olmak üzere bazı sabit m_i için

$$\gamma(t_0) - A(t_0) = m_1 L_1(t_0) + m_2 L_2(t_0) + m_3 N_1(t_0) + m_4 N_2(t_0) + m_5 W(t_0)$$

yazılır.

$$f(t) = \langle \gamma(t) - A(t_0), \gamma(t) - A(t_0) \rangle + r^2$$

fonksiyonunu ele alalım. Pseudo-küre durumuna benzer olarak

$$m_3 = m_4 = m_5 = 0$$

elde edilir. Böylece $f(t_0) = r^2 > 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir.

Sunuç 3.1. \mathbb{R}_2^5 uzayında pseudo küresel bi-null eğri ve pseudo hiperbolik bi-null eğri yoktur.

3.2. \mathbb{R}_2^5 Uzayında Sabit Eğrilikli Bi-Null Eğriler

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_2^5$ bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş sabit eğrilikli $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. (3.1) deki Frenet denklemleri kullanılarak,

$$L_1^{(5)} + 2k_0 L_1^{(3)} - 2k_1 L_1' = 0 \quad (3.2)$$

sabit katsayılı homojen diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin karakteristik denklemi

$$r(r^4 + 2k_0 r^2 - 2k_1) = 0$$

şeklindedir. Buradan $r = 0$ veya

$$r^4 + 2k_0 r^2 - 2k_1 = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Şimdi (3.3) denkleminin çözümlerini bulalım. (3.3) denkleminde,

$$\Delta = 4(k_0^2 + 2k_1)$$

elde edilir. Burada $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ veya $\Delta = 0$ olmak üzere 3 ayrı durumu inceleyeceğiz.

i. $\Delta > 0$ olsun. O zaman

$$r^2 = -k_0 \mp \sqrt{k_0^2 + 2k_1}$$

bulunur. $k_0 > 0$, $k_0 < 0$ veya $k_0 = 0$ durumlarını ayrı ayrı ele alalım.

i.1. $k_0 > 0$ olsun. O zaman $k_1 > 0$ veya $k_1 < 0$ olduğunu varsayabiliriz.

i.1.1. $k_1 > 0$ olsun. O zaman

$$L_1 = \cos(\lambda_1 t) v_1 + \sin(\lambda_1 t) v_2 + \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \sinh(\lambda_2 t) v_4 + v_5 \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ dir. $\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullanılarak, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle, & \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle, \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$L_2 = -\lambda_1 \sin(\lambda_1 t) v_1 + \lambda_1 \cos(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2 \sinh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2 \cosh(\lambda_2 t) v_4 \quad (3.6)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.5) kullanılarak,

$$\lambda_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle v_4, v_4 \rangle = 0 \quad (3.7)$$

bulunur. (3.6) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$W = -\lambda_1^2 \cos(\lambda_1 t) v_1 - \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 t) v_4$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.5) kullanılarak,

$$\lambda_1^4 \langle v_1, v_1 \rangle - \lambda_2^4 \langle v_4, v_4 \rangle = 1 \quad (3.8)$$

bulunur. (3.7) ve (3.8) birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_5, v_5 \rangle &= -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.4. $k_0 > 0$ ve $k_1 > 0$ reel sayılar olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ için

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda_1} (\sin(\lambda_1 t) v_1 - \cos(\lambda_1 t) v_2) + \frac{1}{\lambda_2} (\sinh(\lambda_2 t) v_3 + \cosh(\lambda_2 t) v_4) + t v_5$$

formundadır. Burada $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \mathbb{R}_2^5$ uzayında birbirlerine ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \quad \langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}.\end{aligned}$$

Örnek 3.3. Teorem 3.4 de $k_0 = 1$ ve $k_1 = 1/2$ alınırsa,

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}v_1 &= \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, 0, 0, 0, 0 \right), & v_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, 0, 0, 0 \right), \\ v_3 &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, 0, 0 \right), & v_4 &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = 1$ ve $k_1 = 1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = (A_1 \sin(\lambda_1 t), -A_1 \cos(\lambda_1 t), A_2 \sinh(\lambda_2 t), t, A_2 \cosh(\lambda_2 t)) \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Burada $A_1 = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{2}$ ve $A_2 = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{2}$ dir.

i.1.2. $k_1 < 0$ olsun. O zaman

$$L_1 = \cos(\lambda_1 t) v_1 + \sin(\lambda_1 t) v_2 + \cos(\lambda_2 t) v_3 + \sin(\lambda_2 t) v_4 + v_5 \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{k_0 - \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ dir.

$\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullanılarak, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle, & \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_4, v_4 \rangle, \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_i, v_j \rangle &= 0\end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.10) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$L_2 = -\lambda_1 \sin(\lambda_1 t) v_1 + \lambda_1 \cos(\lambda_1 t) v_2 - \lambda_2 \sin(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2 \cos(\lambda_2 t) v_4 \quad (3.12)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.11) kullanılarak,

$$\lambda_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle v_3, v_3 \rangle = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. (3.12) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$W = -\lambda_1^2 \cos(\lambda_1 t) v_1 - \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 t) v_2 - \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 t) v_3 - \lambda_2^2 \sin(\lambda_2 t) v_4$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.11) kullanılarak,

$$\lambda_1^4 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^4 \langle v_3, v_3 \rangle = 1 \quad (3.14)$$

bulunur. (3.13) ve (3.14) birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \\ \langle v_5, v_5 \rangle &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.5. $k_0 > 0$ ve $k_1 < 0$, $k_0^2 + 2k_1 > 0$ şartını sağlayan reel sayılar olsun.

O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{k_0 - \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ için

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda_1} (\sin(\lambda_1 t) v_1 - \cos(\lambda_1 t) v_2) + \frac{1}{\lambda_2} (\sin(\lambda_2 t) v_3 - \cos(\lambda_2 t) v_4) + t v_5$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında birbirlerine ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \langle v_5, v_5 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Örnek 3.4. Teorem 3.5 de $k_0 = \sqrt{2}$ ve $k_1 = -1/2$ alınırsa,

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, 0, 0, 0, 0 \right), & v_2 &= \left(0, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, 0, 0, 0 \right), \\ v_3 &= \left(0, 0, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, 0 \right), & v_4 &= \left(0, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \right), \\ v_5 &= (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = \sqrt{2}$ ve $k_1 = -1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = (A_3 \sin(\lambda_1 t), -A_3 \cos(\lambda_1 t), t, A_4 \sin(\lambda_2 t), -A_4 \cos(\lambda_2 t))$$

olarak elde edilir. Burada $A_3 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ ve $A_4 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ dir.

i.2. $k_0 < 0$ olsun. O zaman $k_1 > 0$ veya $k_1 < 0$ olduğunu varsayabiliriz.

i.2.1. $k_1 > 0$ olsun. O zaman

$$L_1 = \cos(\lambda_1 t) v_1 + \sin(\lambda_1 t) v_2 + \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \sinh(\lambda_2 t) v_4 + v_5 \quad (3.15)$$

elde edilir. Burada $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ dir.

$\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullamlarak, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle, & \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle, \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.15) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$L_2 = -\lambda_1 \sin(\lambda_1 t) v_1 + \lambda_1 \cos(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2 \sinh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2 \cosh(\lambda_2 t) v_4 \quad (3.17)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.16) kullamlarak,

$$\lambda_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle v_4, v_4 \rangle = 0 \quad (3.18)$$

bulunur. (3.17) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$W = -\lambda_1^2 \cos(\lambda_1 t) v_1 - \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 t) v_4$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.16) kullamlarak,

$$\lambda_1^4 \langle v_1, v_1 \rangle - \lambda_2^4 \langle v_4, v_4 \rangle = 1 \quad (3.19)$$

bulunur. (3.18) ve (3.19) birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_5, v_5 \rangle &= -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak, $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.6. $k_0 < 0$ ve $k_1 > 0$ reel sayılar olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda_1 = \sqrt{k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ için

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda_1} (\sin(\lambda_1 t) v_1 - \cos(\lambda_1 t) v_2) + \frac{1}{\lambda_2} (\sinh(\lambda_2 t) v_3 + \cosh(\lambda_2 t) v_4) + t v_5$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında birbirlerine ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}, \quad \langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Örnek 3.5. Teorem 3.6 da $k_0 = -1$ ve $k_1 = 1/2$ alınırsa,

$$\lambda_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, 0, 0, 0, 0 \right), & v_2 &= \left(0, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, 0, 0, 0 \right), \\ v_3 &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, 0, 0 \right), & v_4 &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = -1$ ve $k_1 = 1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = (A_5 \sin(\lambda_1 t), -A_5 \cos(\lambda_1 t), A_6 \sinh(\lambda_2 t), t, A_6 \cosh(\lambda_2 t)) \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. Burada $A_5 = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}+4}}{2}$ ve $A_6 = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}-4}}{2}$ dir.

i.2.2. $k_1 < 0$ olsun. O zaman

$$L_1 = \cosh(\lambda_1 t) v_1 + \sinh(\lambda_1 t) v_2 + \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \sinh(\lambda_2 t) v_4 + v_5 \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada $\lambda_1 = \sqrt{-k_0 - \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ dir.

$\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullanılarak, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= -\langle v_2, v_2 \rangle, & \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle, \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.21) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$L_2 = \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) v_1 + \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2 \sinh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2 \cosh(\lambda_2 t) v_4 \quad (3.23)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.22) kullanılarak,

$$\lambda_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^2 \langle v_3, v_3 \rangle = 0 \quad (3.24)$$

bulunur. (3.23) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$W = \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 t) v_1 + \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 t) v_2 + \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 t) v_3 + \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 t) v_4$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.22) kullanılarak,

$$\lambda_1^4 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2^4 \langle v_3, v_3 \rangle = 1 \quad (3.25)$$

bulunur. (3.24) ve (3.25) birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= -\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \\ \langle v_5, v_5 \rangle &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.7. $k_0 < 0$ ve $k_1 < 0$, $k_0^2 + 2k_1 > 0$ şartını sağlayan reel sayılar olsun.

O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda_1 = \sqrt{-k_0 - \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ ve $\lambda_2 = \sqrt{-k_0 + \sqrt{k_0^2 + 2k_1}}$ için

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda_1} (\sinh(\lambda_1 t) v_1 + \cosh(\lambda_1 t) v_2) + \frac{1}{\lambda_2} (\sinh(\lambda_2 t) v_3 + \cosh(\lambda_2 t) v_4) + t v_5$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında birbirlerine ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= -\langle v_2, v_2 \rangle = \frac{1}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \\ \langle v_5, v_5 \rangle &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}. \end{aligned}$$

Örnek 3.6. Teorem 3.7 de $k_0 = -\sqrt{2}$ ve $k_1 = -1/2$ alınırsa,

$$\lambda_1 = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(0, 0, 0, \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, 0 \right), & v_2 &= \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}, 0, 0, 0, 0 \right), \\ v_3 &= \left(0, \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, 0, 0, 0 \right), & v_4 &= \left(0, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} \right), \\ v_5 &= (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = -\sqrt{2}$ ve $k_1 = -1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = (A_7 \cosh(\lambda_1 t), A_8 \sinh(\lambda_2 t), t, A_7 \sinh(\lambda_1 t), A_8 \cosh(\lambda_2 t))$$

olarak elde edilir. Burada $A_7 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ ve $A_8 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$.

i.3. $k_0 = 0$ olsun. O zaman $k_1 > 0$ dir. Öyleyse

$$L_1 = \cos(\lambda t) v_1 + \sin(\lambda t) v_2 + \cosh(\lambda t) v_3 + \sinh(\lambda t) v_4 + v_5 \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada $\lambda = \sqrt[4]{2k_1}$ dir. $\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullanılarak, $i \neq j$ ve $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle, & \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_4, v_4 \rangle, \\ \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle &= -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.26) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$L_2 = -\lambda \sin(\lambda t) v_1 + \lambda \cos(\lambda t) v_2 + \lambda \sinh(\lambda t) v_3 + \lambda \cosh(\lambda t) v_4 \quad (3.28)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.27) kullanılarak,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_3, v_3 \rangle \quad (3.29)$$

bulunur. (3.28) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$W = -\lambda^2 \cos(\lambda t) v_1 - \lambda^2 \sin(\lambda t) v_2 + \lambda^2 \cosh(\lambda t) v_3 + \lambda^2 \sinh(\lambda t) v_4$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.27) kullanılarak,

$$\lambda^4 (\langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_3, v_3 \rangle) = 1 \quad (3.30)$$

bulunur. (3.29) ve (3.30) birlikte düşünülerek,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle v_3, v_3 \rangle = -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{2\lambda^4}, \quad \langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.8. $k_0 = 0$ ve $k_1 > 0$ bir reel sayı olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda = \sqrt[4]{2k_1}$ için

$$\gamma(t) = \frac{1}{\lambda} (\sin(\lambda t) v_1 - \cos(\lambda t) v_2 + \sinh(\lambda t) v_3 + \cosh(\lambda t) v_4) + t v_5$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında birbirlerine ortogonal vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle v_3, v_3 \rangle = -\langle v_4, v_4 \rangle = \frac{1}{2\lambda^4}, \quad \langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}.$$

Örnek 3.7. Teorem 3.8 de $k_0 = 0$ ve $k_1 = 1/2$ alınırsa $\lambda = 1$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right), & v_2 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right), \\ v_3 &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), & v_4 &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ v_5 &= (0, 0, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = 0$ ve $k_1 = 1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh t}{\sqrt{2}}, t, \frac{\cosh t}{\sqrt{2}} \right)$$

olarak elde edilir.

ii. $\Delta < 0$ olsun. O zaman (3.3) denkleminin çözümleri

$$\begin{aligned} r_1 &= -r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{-k_0 + \sqrt{-2k_1}} - i\sqrt{k_0 + \sqrt{-2k_1}} \right), \\ r_3 &= -r_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{-k_0 + \sqrt{-2k_1}} + i\sqrt{k_0 + \sqrt{-2k_1}} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-k_0 + \sqrt{-2k_1}} \quad \text{ve} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k_0 + \sqrt{-2k_1}}$$

alınarak,

$$L_1 = e^{\beta t} (\cos(\gamma t) w_1 + \sin(\gamma t) w_2) + e^{-\beta t} (\cos(\gamma t) w_3 + \sin(\gamma t) w_4) + w_5$$

olarak bulunur. $v_1 = w_1 + w_3$, $v_2 = w_2 + w_4$, $v_3 = w_1 - w_3$, $v_4 = w_2 - w_4$, $v_5 = w_5$ dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned} L_1 &= \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) v_1 + \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) v_2 \\ &+ \sinh(\beta t) \cos(\gamma t) v_3 + \sinh(\beta t) \sin(\gamma t) v_4 + v_5 \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. $\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullamlarak

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_3, v_3 \rangle = -\langle v_4, v_4 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle, \\ \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle &= 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = 0, \\ \langle v_2, v_4 \rangle &= \langle v_2, v_5 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilir. (3.31) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned} L_2 &= \beta \sinh(\beta t) \cos(\gamma t) v_1 - \gamma \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) v_1 \\ &+ \beta \sinh(\beta t) \sin(\gamma t) v_2 + \gamma \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) v_2 \\ &+ \beta \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) v_3 - \gamma \sinh(\beta t) \sin(\gamma t) v_3 \\ &+ \beta \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) v_4 + \gamma \sinh(\beta t) \cos(\gamma t) v_4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

bulunur. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.32) kullamlarak,

$$\langle v_1, v_1 \rangle (\gamma^2 - \beta^2) - 2 \langle v_1, v_4 \rangle \gamma \beta = 0 \quad (3.34)$$

bulunur. (3.33) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned} W &= (\beta^2 - \gamma^2) \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) v_1 - 2\beta\gamma \sinh(\beta t) \sin(\gamma t) v_1 \\ &+ (\beta^2 - \gamma^2) \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) v_2 + 2\beta\gamma \sinh(\beta t) \cos(\gamma t) v_2 \\ &+ (\beta^2 - \gamma^2) \sinh(\beta t) \cos(\gamma t) v_3 - 2\beta\gamma \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) v_3 \\ &+ (\beta^2 - \gamma^2) \sinh(\beta t) \sin(\gamma t) v_4 + 2\beta\gamma \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) v_4 \end{aligned}$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.32) kullamlarak,

$$\langle v_1, v_1 \rangle (\beta^4 - 6\gamma^2\beta^2 + \gamma^4) + 4\beta\gamma \langle v_1, v_4 \rangle (\beta^2 - \gamma^2) = 1 \quad (3.35)$$

bulunur. (3.34) ve (3.35) birlikte düşünülerek,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_3, v_3 \rangle = -\langle v_4, v_4 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{(\beta^2 + \gamma^2)^2},$$

$$\langle v_1, v_4 \rangle = -\langle v_2, v_3 \rangle = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.9. k_0 ve $k_1 \neq 0$, $k_0^2 + 2k_1 < 0$ şartını sağlayan reel sayılar olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-k_0 + \sqrt{-2k_1}}$ ve $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k_0 + \sqrt{-2k_1}}$ için

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} (\gamma \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) + \beta \sinh(\beta t) \cos(\gamma t)) v_1 \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} (-\gamma \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) + \beta \sinh(\beta t) \sin(\gamma t)) v_2 \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} (\beta \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) + \gamma \sinh(\beta t) \sin(\gamma t)) v_3 \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2 + \gamma^2} (\beta \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) - \gamma \sinh(\beta t) \cos(\gamma t)) v_4 + t v_5 \end{aligned}$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_3, v_3 \rangle = -\langle v_4, v_4 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{(\beta^2 + \gamma^2)^2}, \\ \langle v_1, v_4 \rangle &= -\langle v_2, v_3 \rangle = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)^2}, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = 0, \\ \langle v_2, v_4 \rangle &= \langle v_2, v_5 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Örnek 3.8. Teorem 3.9 da $k_0 = 1$ ve $k_1 = -1$ alınırsa,

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & v_2 &= \left(0, 0, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ v_3 &= \left(1, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & v_4 &= \left(0, -1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ v_5 &= \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = 1$ ve $k_1 = -1$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{1}{2}(B_1 \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) + B_2 \sinh(\beta t) \sin(\gamma t), \\ &\quad -B_1 \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) + B_2 \sinh(\beta t) \cos(\gamma t), \\ &\quad \sqrt{2}t, B_2 \cosh(\beta t) \sin(\gamma t) - B_1 \sinh(\beta t) \cos(\gamma t), \\ &\quad B_2 \cosh(\beta t) \cos(\gamma t) + B_1 \sinh(\beta t) \sin(\gamma t))\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $B_1 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, $B_2 = \sqrt{\sqrt{2}+1}$ ve $B_2 + B_1 = \sqrt{2}B_2$, $B_2 - B_1 = \sqrt{2}B_1$ dir.

iii. $\Delta = 0$ olsun. O zaman $k_1 < 0$ dir. $k_0 > 0$ ve $k_0 < 0$ durumlarını ayrı ayrı düşünelim.

iii.1. $k_0 > 0$ olsun. O zaman $\lambda = \sqrt{k_0}$ için

$$L_1 = \cos(\lambda t) v_1 + \sin(\lambda t) v_2 + t \cos(\lambda t) v_3 + t \sin(\lambda t) v_4 + v_5 \quad (3.36)$$

elde edilir. $\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle &= 0, \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, v_5 \rangle = 0, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_4 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0\end{aligned} \quad (3.37)$$

bulunur. (3.36) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}L_2 &= -\lambda \sin(\lambda t) v_1 + \lambda \cos(\lambda t) v_2 + \cos(\lambda t) v_3 - t\lambda \sin(\lambda t) v_3 \\ &\quad + \sin(\lambda t) v_4 + t\lambda \cos(\lambda t) v_4\end{aligned} \quad (3.38)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.37) kullanılarak,

$$\lambda \langle v_1, v_1 \rangle + 2 \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \quad (3.39)$$

bulunur. (3.38) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}W &= -\lambda^2 \cos(\lambda t) v_1 - \lambda^2 \sin(\lambda t) v_2 - 2\lambda \sin(\lambda t) v_3 - t\lambda^2 \cos(\lambda t) v_3 \\ &\quad + 2\lambda \cos(\lambda t) v_4 - t\lambda^2 \sin(\lambda t) v_4\end{aligned}$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.37) kullanılarak,

$$\lambda^4 \langle v_1, v_1 \rangle + 4\lambda^3 \langle v_2, v_3 \rangle = 1 \quad (3.40)$$

bulunur. (3.39) ve (3.40) birlikte düşünülerek,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = -\langle v_1, v_4 \rangle = \frac{1}{2\lambda^3}$$

elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullanılarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.10. $k_0 > 0$ ve $k_1 < 0$, $k_0^2 + 2k_1 = 0$ şartını sağlayan reel sayılar olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda = \sqrt{k_0}$ için

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) v_1 - \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda t) v_2 + \left(\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda^2} + t \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right) v_3 \\ & + \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^2} - t \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right) v_4 + t v_5 \end{aligned}$$

formundadır. Burada v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , \mathbb{R}_2^5 uzayında vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}, & \langle v_1, v_4 \rangle &= -\langle v_2, v_3 \rangle = -\frac{1}{2\lambda^3} \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, v_5 \rangle = 0, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_4 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Örnek 3.9. Teorem 3.10 da $k_0 = 1$ ve $k_1 = -1/2$ alınırsa, $\lambda = 1$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0, 0, 1, 0), & v_2 &= (0, 0, 0, 0, -1), \\ v_3 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \right), & v_4 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right), \\ v_5 &= (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = 1$ and $k_1 = -1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, 2t, 3 \sin t - t \cos t, 3 \cos t + t \sin t)$$

olarak elde edilir.

iii.2. $k_0 < 0$ olsun. O zaman $\lambda = \sqrt{-k_0}$ için

$$L_1 = \cosh(\lambda t) v_1 + \sinh(\lambda t) v_2 + t \cosh(\lambda t) v_3 + t \sinh(\lambda t) v_4 + v_5 \quad (3.41)$$

elde edilir. $\langle L_1, L_1 \rangle = 0$ olduğu kullamlarak,

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= -\langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle, & \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle &= 0, \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, v_5 \rangle = 0, & & (3.42) \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_4 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0\end{aligned}$$

bulunur. (3.41) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}L_2 &= \lambda \sinh(\lambda t) v_1 + \lambda \cosh(\lambda t) v_2 + \cosh(\lambda t) v_3 + t\lambda \sinh(\lambda t) v_3 \\ &+ \sinh(\lambda t) v_4 + t\lambda \cosh(\lambda t) v_4\end{aligned}\quad (3.43)$$

elde edilir. $\langle L_2, L_2 \rangle = 0$ ve (3.42) kullamlarak,

$$\lambda \langle v_1, v_1 \rangle + 2 \langle v_1, v_4 \rangle = 0 \quad (3.44)$$

bulunur. (3.43) denkleminin t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}W &= \lambda^2 \cosh(\lambda t) v_1 + \lambda^2 \sinh(\lambda t) v_2 + 2\lambda \sinh(\lambda t) v_3 + t\lambda^2 \cosh(\lambda t) v_3 \\ &+ 2\lambda \cosh(\lambda t) v_4 + t\lambda^2 \sinh(\lambda t) v_4\end{aligned}$$

elde edilir. $\langle W, W \rangle = 1$ ve (3.42) kullamlarak,

$$\lambda^4 \langle v_1, v_1 \rangle + 4\lambda^3 \langle v_1, v_4 \rangle = 1 \quad (3.45)$$

bulunur. (3.44) ve (3.45) birlikte düşünülerek,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = -\langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}, \quad \langle v_1, v_4 \rangle = -\langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1}{2\lambda^3}$$

elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalardan aşağıdaki teoremi verebiliriz. Tersine Teorem 3.2 kullamlarak $\gamma(t)$ nin eğriliklerinin k_0 ve k_1 olduğu görülebilir.

Teorem 3.11. $k_0 < 0$ ve $k_1 < 0$, $k_0^2 + 2k_1 = 0$ şartını sağlayan reel sayılar olsun. O zaman $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay-parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğridir ancak ve ancak $\lambda = \sqrt{-k_0}$ için

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{1}{\lambda} \sinh(\lambda t) v_1 + \frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda t) v_2 + \left(t \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda} - \frac{\cosh(\lambda t)}{\lambda^2} \right) v_3 \\ &+ \left(t \frac{\cosh(\lambda t)}{\lambda} - \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda^2} \right) v_4 + t v_5\end{aligned}$$

formundadır. Burada $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \mathbb{R}_2^5$ uzayında vektörlerdir ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1 \rangle &= -\langle v_2, v_2 \rangle = -\langle v_5, v_5 \rangle = -\frac{1}{\lambda^4}, & \langle v_1, v_4 \rangle &= -\langle v_2, v_3 \rangle = \frac{1}{2\lambda^3} \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_1, v_5 \rangle = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle v_2, v_5 \rangle = 0, \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_3, v_4 \rangle = \langle v_3, v_5 \rangle = \langle v_4, v_4 \rangle = \langle v_4, v_5 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Örnek 3.10. Teorem 3.11 de $k_0 = -1$ ve $k_1 = -1/2$ alınırsa $\lambda = 1$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}v_1 &= (0, 0, 0, -1, 0), & v_2 &= (-1, 0, 0, 0, 0), \\ v_3 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right), & v_4 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), \\ v_5 &= (0, 0, 1, 0, 0)\end{aligned}$$

seçilebilir ve eğrilikleri $k_0 = -1$ ve $k_1 = -1/2$ olan bi-null eğri $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}(t \sinh t - 3 \cosh t, t \cosh t - \sinh t, 2t, t \cosh t - 3 \sinh t, t \sinh t - \cosh t)$$

olarak elde edilir.

4. OSKÜLATÖR, NORMAL VEYA REKTİFİYEN Bİ-NULL EĞRİLER

Bu bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null eğrinin oskülatör, normal veya rektifiyen eğri olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

Aşağıdaki teorem \mathbb{R}^3 uzayında eğriler için temel varlık teoremine benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1. $k_0(t)$ ve $k_1(t)$, $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ açık aralığında diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. $\{L_1^0, L_2^0, N_1^0, N_2^0, W^0\}$, \mathbb{R}_2^5 uzayında pseudo-ortonormal bir taban ve p_0 \mathbb{R}_2^5 uzayında bir nokta olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş ve $\gamma(t_0) = p_0$ olan yalnız bir tek $\gamma(t)$ bi-null eğrisi vardır. $\gamma(t)$ eğrisinin Frenet çatısı $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$

$$L_1(t_0) = L_1^0, \quad L_2(t_0) = L_2^0, \quad N_1(t_0) = N_1^0, \quad N_2(t_0) = N_2^0, \quad W(t_0) = W^0$$

eşitliklerini sağlar.

4.1. Oskülatör Bi-Null Eğriler

Bu bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null eğrinin oskülatör eğri olma durumları incelenecektir.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. Eğer γ eğrisinin konum vektörü her zaman

(i) $N_1^\perp = \text{sp}\{L_2, N_1, N_2, W\}$ normal uzayında kalıyor ise γ eğrisi **birinci tip bi-null oskülatör eğri** olarak adlandırılır. O zaman birinci tip bi-null oskülatör eğrinin konum vektörü $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere bazı $\mu_i(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(t) = \mu_1(t) L_2(t) + \mu_2(t) N_1(t) + \mu_3(t) N_2(t) + \mu_4(t) W(t) \quad (4.1)$$

denklemini sağlar.

(ii) $N_2^\perp = \text{sp}\{L_1, N_1, N_2, W\}$ normal uzayında kalıyor ise γ eğrisi **ikinci tip bi-null oskülatör eğri** olarak adlandırılır. O zaman ikinci tip bi-null oskülatör eğrinin konum vektörü $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere bazı $\mu_i(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(t) = \mu_1(t) L_1(t) + \mu_2(t) N_1(t) + \mu_3(t) N_2(t) + \mu_4(t) W(t) \quad (4.2)$$

denklemini sağlar.

(iii) $W^\perp = \text{sp}\{L_1, L_2, N_1, N_2\}$ normal uzayında kalıyor ise γ eğrisi **üçüncü tip bi-null oskülatör eğri** olarak adlandırılır. O zaman üçüncü tip bi-null oskülatör eğrinin konum vektörü $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere bazı $\mu_i(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(t) = \mu_1(t) L_1(t) + \mu_2(t) L_2(t) + \mu_3(t) N_1(t) + \mu_4(t) N_2(t) \quad (4.3)$$

denklemini sağlar.

İlk olarak \mathbb{R}_2^5 uzayında birinci tip bi-null oskülatör eğrisini ele alalım. O zaman $\gamma(t)$ konum vektörü (4.1) denklemini sağlar. (4.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} L_1 = & -\mu_3 k_1 L_1 + (\mu'_1 + \mu_2 k_1 - \mu_4 k_0) L_2 + (\mu'_2 - \mu_3) N_1 + (\mu'_3 - \mu_4) N_2 \\ & + (\mu'_4 + \mu_1 + k_0 \mu_3) W \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mu'_1 + \mu_2 k_1 - \mu_4 k_0 &= 0, & \mu'_4 + \mu_1 + k_0 \mu_3 &= 0, \\ \mu'_2 - \mu_3 &= 0, & \mu'_3 - \mu_4 &= 0, & -\mu_3 k_1 &= 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada $k_1 \neq 0$ dır. (4.4) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{k_0}{k_1} + \left(\frac{1}{k_1}\right)'' , & \mu_3 &= -\frac{1}{k_1}, & \mu_4 &= -\left(\frac{1}{k_1}\right)' , \\ \mu_2 &= -\frac{1}{k_1} \left(k_0 \left(\frac{1}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_0}{k_1}\right)' + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{(3)} \right) \end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$k_1 \left[\frac{1}{k_1} \left(k_0 \left(\frac{1}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_0}{k_1}\right)' + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{(3)} \right) \right]' = 1$$

bulunur. Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. O zaman γ eğrisi birinci tip bir oskülatör eğrisine denktir gerek ve yeter şart aşağıdaki denklem sağlanır

$$k_1 \left[\frac{1}{k_1} \left(k_0 \left(\frac{1}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_0}{k_1}\right)' + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{(3)} \right) \right]' = 1. \quad (4.5)$$

İspat. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş birinci tip bir bi-null oskülatör eğri olsun. O zaman yukarıdaki hesaplamalardan (4.5) denkleminin sağlandığı açıktır.

Tersine, kabul edelim ki (4.5) denklemini sağlansın. Bir $X \in \mathbb{R}_2^5$ vektörünü

$$\begin{aligned} X = & \gamma(t) - \left(\frac{k_0}{k_1} + \left(\frac{1}{k_1} \right)'' \right) L_2 + \frac{1}{k_1} \left(k_0 \left(\frac{1}{k_1} \right)' + \left(\frac{k_0}{k_1} \right)' + \left(\frac{1}{k_1} \right)^{(3)} \right) N_1 \\ & + \frac{1}{k_1} N_2 + \left(\frac{1}{k_1} \right)' W \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $X' = 0$ olduğundan γ eğrisi birinci tip bir oskülatör eğriye denktir.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. $k_0(t)$ ve $k_1(t)$ fonksiyonları

$$k_1 \left[\frac{1}{k_1} \left(k_0 \left(\frac{1}{k_1} \right)' + \left(\frac{k_0}{k_1} \right)' + \left(\frac{1}{k_1} \right)^{(3)} \right) \right]' = 1 \quad (4.6)$$

şartını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş birinci tip bir bi-null oskülatör eğri vardır.

Teorem 4.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1. \mathbb{R}_2^5 uzayında k_0, k_1 eğrilikleri sabit olan birinci tip bir bi-null oskülatör eğri yoktur.

Örnek 4.1. Aşağıdaki eğri çiftleri (4.6) denklemini sağlar.

$$(i) k_0 = t^2/2, k_1 = 1 \quad (ii) k_0 = t/6, k_1 = 1/t \quad (iii) k_0 = 0, k_1 = 120/t^4$$

Şimdi, \mathbb{R}_2^5 uzayında ikinci tip bi-null oskülatör eğrisini ele alalım. O zaman $\gamma(t)$ konum vektörü (4.2) denklemini sağlar. (4.2) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} L_1 = & (\mu_1' - \mu_3 k_1) L_1 + (\mu_1 + \mu_2 k_1 - \mu_4 k_0) L_2 + (\mu_2' - \mu_3) N_1 + (\mu_3' - \mu_4) N_2 \\ & + (\mu_4' + \mu_3 k_0) W \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 k_1 - \mu_4 k_0 &= 0, & \mu_4' + \mu_3 k_0 &= 0, \\ \mu_2' - \mu_3 &= 0, & \mu_3' - \mu_4 &= 0, & \mu_1' - \mu_3 k_1 &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerden

$$\mu_1 = k_0\mu_2'' - k_1\mu_2, \quad \mu_3 = \mu_2', \quad \mu_4 = \mu_2''$$

ve sonuç olarak

$$\mu_2^{(3)} + k_0\mu_2' = 0, \quad k_0'\mu_2'' - (2k_1 + k_0^2)\mu_2' - k_1'\mu_2 = 1$$

bulunur. Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. O zaman γ eğrisi ikinci tip bir oskülatör eğrisine denktir gerek ve yeter şart aşağıdaki denklemleri sağlayan bir μ_2 fonksiyonu vardır:

$$\mu_2^{(3)} + k_0\mu_2' = 0, \quad k_0'\mu_2'' - (2k_1 + k_0^2)\mu_2' - k_1'\mu_2 = 1. \quad (4.7)$$

İspat. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş ikinci tip bir bi-null oskülatör eğri olsun. O zaman yukarıdaki hesaplamalardan (4.7) denkleminin sağlandığı açıktır.

Tersine, kabul edelim ki bir μ_2 fonksiyonu için (4.7) denklemleri sağlansın. Bir $X \in \mathbb{R}_2^5$ vektörünü

$$X = \gamma(t) - (k_0\mu_2'' - k_1\mu_2)L_1 - \mu_2N_1 - \mu_2'N_2 - \mu_2''W$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $X' = 0$ olduğundan γ eğrisi ikinci tip bir oskülatör eğriye denktir.

$\mu_2' \neq 0$ için, (4.7) in ilk denkleminde

$$k_0 = -\frac{\mu_2^{(3)}}{\mu_2'}$$

elde edilir. (4.7) in ikinci denkleminde,

$$k_0'\mu_2'' - k_0^2\mu_2' - 1 = k_1'\mu_2 + 2k_1\mu_2'$$

elde edilir. $\mu_2 \neq 0$ ile çarpılırsa,

$$(\mu_2^2 k_1)' = k_0'\mu_2\mu_2'' - k_0^2\mu_2\mu_2' - \mu_2,$$

ve sonuç olarak

$$k_1 = \frac{1}{\mu_2'} \int (k_0' \mu_2 \mu_2'' - k_0^2 \mu_2 \mu_2' - \mu_2) dt$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan ve Teorem 4.1 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5. $\mu_2 \neq 0$, $\mu_2' \neq 0$ olmak üzere bir μ_2 diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$k_0 = -\frac{\mu_2^{(3)}}{\mu_2'}, \quad k_1 = \frac{1}{\mu_2'} \int (k_0' \mu_2 \mu_2'' - k_0^2 \mu_2 \mu_2' - \mu_2) dt \quad (4.8)$$

olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0 , k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş ikinci tip bir bi-null oskülör eğri vardır.

Örnek 4.2. Aşağıdaki üçlüler (4.8) denklemlerini sağlar.

$$(i) \mu_2 = t, k_0 = 0, k_1 = -1/2 \quad (ii) \mu_2 = t^2, k_0 = 0, k_1 = -1/(3t).$$

Son olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında üçüncü tip bi-null oskülör eğrisini ele alalım. O zaman $\gamma(t)$ konum vektörü (4.3) denklemini sağlar. (4.3) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} L_1 &= (\mu_1' - k_1 \mu_4) L_1 + (\mu_1 + \mu_2' + k_1 \mu_3) L_2 + (\mu_3' - \mu_4) N_1 + \mu_4' N_2 \\ &\quad + (\mu_2 + k_0 \mu_4) W \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2' + k_1 \mu_3 &= 0, & \mu_3' - \mu_4 &= 0, \\ \mu_2 + k_0 \mu_4 &= 0, & \mu_1' - k_1 \mu_4 &= 1, & \mu_4' &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Bu denklemlerden

$$\mu_1 = c_4 k_0' - k_1 (c_4 t + c_3), \quad \mu_2 = -c_4 k_0, \quad \mu_3 = c_4 t + c_3, \quad \mu_4 = c_4$$

ve sonuç olarak

$$c_4 k_0'' - k_1' (c_4 t + c_3) - 2c_4 k_1 = 1$$

bulunur. Burada $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0 , k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. O zaman γ eğrisi üçüncü tip bir

oskületör eğrisine denktir gerek ve yeter şart $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki denklem sağlanır

$$c_4 k_0'' - k_1' (c_4 t + c_3) - 2c_4 k_1 = 1. \quad (4.10)$$

İspat. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş üçüncü tip bir bi-null oskületör eğri olsun. O zaman yukarıdaki hesaplamalardan (4.10) denkleminin sağlandığı açıktır.

Tersine, kabul edelim ki (4.10) denklemini sağlansın. Bir $X \in \mathbb{R}_2^5$ vektörünü

$$X = \gamma(t) - (c_4 k_0' - k_1 (c_4 t + c_3)) L_1 + c_4 k_0 L_2 - (c_4 t + c_3) N_1 - c_4 N_2$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $X' = 0$ olduğundan γ eğrisi üçüncü tip bir oskületör eğriye denktir.

$(c_3, c_4) \neq (0, 0)$ için (4.10) denklemini $c_4 t + c_3$ ile çarpılırsa,

$$((c_4 t + c_3)^2 k_1)' = (c_4 t + c_3) (c_4 k_0'' - 1)$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$k_1 = \frac{1}{(c_4 t + c_3)^2} \int (c_4 t + c_3) (c_4 k_0'' - 1) dt$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalardan ve Teorem 4.1 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.7. $(c_3, c_4) \neq (0, 0)$ olmak üzere c_3, c_4 reel sayıları ve diferensiyelenebilir bir $k_0(t)$ fonksiyonu için

$$k_1 = \frac{1}{(c_4 t + c_3)^2} \int (c_4 t + c_3) (c_4 k_0'' - 1) dt \quad (4.11)$$

olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş üçüncü tip bir bi-null oskületör eğri vardır.

Örnek 4.3. Aşağıdaki dörtlüler (4.11) denklemini sağlar.

(i) $c_3 = 1, c_4 = 0, k_0 = t, k_1 = -t$

(ii) $c_3 = 0, c_4 = 1, k_0 = (t^2 + t^3)/2, k_1 = t.$

4.2. Normal veya Rektifiyan Bi-Null Eğriler

Bu bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bir bi-null eğrinin normal veya rektifiyan eğri olma durumları incelenecektir.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. Eğer γ eğrisinin konum vektörü her zaman

(i) $L_1^\perp = \text{sp}\{L_1, L_2, N_2, W\}$ normal uzayında kalıyor ise γ eğrisi **normal bi-null eğri** olarak adlandırılır. O zaman normal bi-null eğrinin konum vektörü $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere bazı $\mu_i(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(t) = \mu_1(t) L_1(t) + \mu_2(t) L_2(t) + \mu_3(t) N_2(t) + \mu_4(t) W(t) \quad (4.12)$$

denklemini sağlar.

(ii) $L_2^\perp = \text{sp}\{L_1, L_2, N_1, W\}$ normal uzayında kalıyor ise γ eğrisi **rektifiyan bi-null eğri** olarak adlandırılır. O zaman rektifiyan bi-null eğrinin konum vektörü $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere bazı $\mu_i(t)$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\gamma(t) = \mu_1(t) L_1(t) + \mu_2(t) L_2(t) + \mu_3(t) N_1(t) + \mu_4(t) W(t) \quad (4.13)$$

denklemini sağlar.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir normal bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ konum vektörü (4.12) denklemini sağlar. (4.12) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} L_1 = & (\mu_1' - \mu_3 k_1) L_1 + (\mu_1 + \mu_2' - \mu_4 k_0) L_2 + (\mu_2 + \mu_3 k_0 + \mu_4') W \\ & - \mu_3 N_1 + (\mu_3' - \mu_4) N_2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2' - \mu_4 k_0 &= 0, & \mu_1' - \mu_3 k_1 &= 1, & \mu_2 + \mu_3 k_0 + \mu_4' &= 0, \\ \mu_3' - \mu_4 &= 0, & \mu_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.14) denklemleri çözülerek,

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \quad (4.15)$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.8. \mathbb{R}_2^5 uzayında normal bi-null eğri yoktur.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir rektifiyan bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ konum vektörü (4.13) denklemini sağlar. (4.13) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$L_1 = \mu_1' L_1 + (\mu_1 + \mu_2' + \mu_3 k_1 - \mu_4 k_0) L_2 + (\mu_2 + \mu_4') W + \mu_3' N_1 - \mu_4 N_2$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\mu_1' &= 1, & \mu_1 + \mu_2' + \mu_3 k_1 - \mu_4 k_0 &= 0, \\ \mu_2 + \mu_4' &= 0, & \mu_3' &= 0, & \mu_4 &= 0\end{aligned}\quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) denklemleri çözümlenerek,

$$\mu_2 = \mu_4 = 0, \quad \mu_3 = c_3 \neq 0, \quad \mu_1 + c_3 k_1 = 0, \quad \mu_1 = t + c_0 \quad (4.17)$$

elde edilir. Burada c_0 ve c_3 reel sayılardır. Sonuç olarak γ eğrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma(t) = (t + c_0)L_1 + c_3 N_1. \quad (4.18)$$

Yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.9. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. O zaman γ eğrisi rektifiyan eğridir gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

(i) $k_1(t) = -(t + c_0)/c_3$,

(ii) uzaklık fonksiyonu $\rho = \|\gamma\|$ olmak üzere

$$\rho^2 = |a_0 t + a_1|$$

dir,

(iii) $\langle \gamma, L_1 \rangle = c_3$. Burada $a_0, c_3 \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $a_1, c_0 \in \mathbb{R}$ dir.

İspat. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri k_0, k_1 olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir rektifiyan bi-null eğri olsun. O zaman (4.17) kullanılarak, $k_1(t) = -(t + c_0)/c_3$ bulunur. (4.18) denkleminde (ii) ve (iii) durumlarının sağlandığı açıktır.

Tersine, kabul edelim ki (i), (ii) veya (iii) şartlarından biri sağlansın. Eğer (i) sağlanırsa, Frenet denklemleri kullanılarak

$$\frac{d}{dt}(\gamma - (t + c_0)L_1 - c_3 N_1) = 0$$

elde edilir. Buradan \mathbb{R}_2^5 uzayında öteleme farkıyla, γ eğrisi rektifiyan bir eğridir.

Eğer (ii) sağlanırsa, $\langle \gamma, \gamma \rangle = \pm(a_0 t + a_1)$ denkleminin t ye göre ikinci türevi alınarak, $\langle \gamma, L_2 \rangle = 0$ elde edilir. Buradan γ eğrisinin rektifiyan bir eğri olduğu elde edilir.

Eğer (iii) sağlarsa, $\langle \gamma, L_1 \rangle = c_3$ denkleminin t ye göre türevi alınarak γ eğrisinin rektifiyan bir eğri olduğu görülür.

Son olarak \mathbb{R}_2^5 uzayında spacelike konum vektörlü rektifiyan eğriler için bir teorem vereceğiz.

Teorem 4.10. (i) $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında spacelike konum vektöre sahip olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir bi-null eğri olsun. Eğer γ rektifiyan bir eğri ise parametre değişikliği ile

$$\gamma(s) = be^s y(s), \quad b \in \mathbb{R}^+$$

olarak yazılır. Burada $y(s)$, $S_2^4(1) = \{x \in \mathbb{R}_2^5 | \langle x, x \rangle = 1\}$ uzayında birim hızlı timelike eğridir ve

$$\left\langle \frac{d^2 y}{ds^2}(s), \frac{d^2 y}{ds^2}(s) \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{d^3 y}{ds^3}(s), \frac{d^3 y}{ds^3}(s) \right\rangle = \frac{64b^{10}e^{10s}}{a_0^6} - 1, \quad a_0 \in \mathbb{R}^+$$

sağlanır.

(ii) Tersine, $y(s)$, $S_2^4(1)$ uzayında birim hızlı timelike eğri olsun ve

$$\left\langle \frac{d^2 y}{ds^2}(s), \frac{d^2 y}{ds^2}(s) \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{d^3 y}{ds^3}(s), \frac{d^3 y}{ds^3}(s) \right\rangle = \frac{64b^{10}e^{10s}}{a_0^6} - 1, \\ \frac{d^2 y}{ds^2}(s) \neq y(s), \quad a_0, b \in \mathbb{R}^+$$

şartlarını sağlasın. O zaman $\gamma(s) = be^s y(s)$ eğrisi parametre değişikliği ile \mathbb{R}_2^5 uzayında bir rektifiyan bi-null eğridir.

İspat. (i) $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında spacelike konum vektöre sahip olan bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir rektifiyan bi-null eğri olsun. Teorem 4.9 ve $\gamma(t)$ spacelike konum vektörüne sahip olduğundan, uzaklık fonksiyonu $\rho = \|\gamma\|$ olmak üzere $\rho^2 = a_0 t + a_1 > 0$, $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ dir. Burada $a_0 \in \mathbb{R}^+$ seçilebilir.

$y(t) = \gamma(t) / \rho(t)$ olacak şekilde bir $y(t)$ eğrisi tanımlayalım. Burada y eğrisi $S_2^4(1)$ pseudo küresinde yatan bir eğridir. O zaman

$$\gamma(t) = y(t) \sqrt{a_0 t + a_1} \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) denkleminin t ye göre türevi alınrsa,

$$L_1(t) = \frac{a_0}{2\sqrt{a_0 t + a_1}} y(t) + y'(t) \sqrt{a_0 t + a_1} \quad (4.20)$$

bulunur. Buradan

$$\langle y'(t), y'(t) \rangle = -\frac{a_0^2}{4(a_0t + a_1)^2}, \quad \|y'(t)\| = \frac{a_0}{2(a_0t + a_1)}$$

elde edilir ve y eğrisi timelike bir eğridir.

y eğrisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere

$$s = \int_{t_0}^t \|y'(u)\| du = \frac{1}{2} \ln \frac{a_0t + a_1}{b^2}, \quad b \in \mathbb{R}^+.$$

O zaman $a_0t + a_1 = b^2 e^{2s}$ eşitliği (4.19) denkleminde yerine yazılarak

$$\gamma(s) = be^s y(s)$$

elde edilir.

Ayrıca, $\gamma(s) = be^s y(s)$ denkleminin s ye göre ikinci türevi alınıp,

$$dt/ds = 2b^2 e^{2s}/a_0$$

eşitliği kullanılarak,

$$L_2(t) = \frac{a_0^2}{4b^3} e^{-3s} \left(\frac{d^2 y}{ds^2}(s) - y(s) \right) \quad (4.21)$$

bulunur. $\langle L_2(t), L_2(t) \rangle = 0$ ve (4.21) denkleminde

$$\left\langle \frac{d^2 y}{ds^2}(s), \frac{d^2 y}{ds^2}(s) \right\rangle = 1$$

elde edilir. (4.21) denkleminin s ye göre türevi alınıp, $dt/ds = 2b^2 e^{2s}/a_0$ eşitliği kullanılarak

$$W(t) = \frac{a_0^3}{8b^5} e^{-5s} \left(3y(s) - \frac{dy}{ds}(s) - 3\frac{d^2 y}{ds^2}(s) + \frac{d^3 y}{ds^3}(s) \right) \quad (4.22)$$

bulunur. $\langle W(t), W(t) \rangle = 1$ ve (4.22) denkleminde

$$\left\langle \frac{d^3 y}{ds^3}(s), \frac{d^3 y}{ds^3}(s) \right\rangle = \frac{64b^{10}e^{10s}}{a_0^6} - 1$$

elde edilir.

(ii) İlk olarak, $(d^2 y/ds^2)(s) \neq y(s)$ durumunda $\left\{ \frac{d\gamma}{ds}(s), \frac{d^2 \gamma}{ds^2}(s) \right\}$ lineer bağımsızdır. Bu şart altında $\gamma(s) = be^s y(s)$ için yeni bir parametre t seçelim şöyle ki

$$s = \frac{1}{2} \ln \frac{a_0t + a_1}{b^2}, \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

olsun. Buradan

$$\gamma(t) = y(t) \sqrt{a_0 t + a_1} \quad (4.23)$$

bulunur. $y(s)$ eğrisinin şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle y'(t), y'(t) \rangle &= \frac{-a_0^2}{4(a_0 t + a_1)^2}, \\ \langle y''(t), y''(t) \rangle &= \frac{-3a_0^4}{16(a_0 t + a_1)^4}, \\ \langle y^{(3)}(t), y^{(3)}(t) \rangle &= \frac{1}{(a_0 t + a_1)} - \frac{45}{64} \frac{a_0^6}{(a_0 t + a_1)^6} \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.23) denkleminin türevi alınarak,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{a_0}{2} (a_0 t + a_1)^{-\frac{1}{2}} y(t) + (a_0 t + a_1)^{\frac{1}{2}} y'(t), \\ \gamma''(t) &= -\frac{a_0^2}{4} (a_0 t + a_1)^{-\frac{3}{2}} y(t) + a_0 (a_0 t + a_1)^{-\frac{1}{2}} y'(t) + (a_0 t + a_1)^{\frac{1}{2}} y''(t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma^{(3)}(t) &= \frac{3}{8} a_0^3 (a_0 t + a_1)^{-\frac{5}{2}} y(t) - \frac{3}{4} a_0^2 (a_0 t + a_1)^{-\frac{3}{2}} y'(t) \\ &\quad + \frac{3}{2} a_0 (a_0 t + a_1)^{-\frac{1}{2}} y''(t) + (a_0 t + a_1)^{\frac{1}{2}} y^{(3)}(t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemler ve (4.24) denkleminde,

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle = 0, \quad \langle \gamma^{(3)}(t), \gamma^{(3)}(t) \rangle = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, γ eğrisi bir bi-null eğridir ve t , γ eğrisinin bi-null yay parametresidir. O zaman $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = a_0 t + a_1$ olduğundan Teorem 4.9 den, γ eğrisi \mathbb{R}_2^5 uzayında bir rektifiyan bi-null eğridir.

Sonuç 4.2. Teorem 4.1 ve Teorem 4.9 in (i) şartından, \mathbb{R}_2^5 uzayında rektifiyan bi-null eğrilerin varlığını görebiliriz. Üstelik, Teorem 4.10 için, Teorem 4.1 de bir spacelike vektör p_0 seçerek, \mathbb{R}_2^5 uzayında spacelike konum vektöre sahip olan rektifiyan bi-null eğrilerin varlığını bulabiliriz.

5. k -TİP Bİ-NULL SLANT HELİSLER

Bu bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null eğrilerin k -tip slant helis olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri k_0, k_1 ve Frenet çatısı $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ olan bir bi-null eğri olsun. Bu bölümde $\gamma(t)$ eğrisinin tamamen \mathbb{R}_2^5 uzayında yatması için $k_1 \neq 0$ olarak alınacaktır.

$V_1 = L_1, V_2 = L_2, V_3 = N_1, V_4 = N_2$ ve $V_5 = W$ olsun.

Tanım 5.1. γ , \mathbb{R}_2^5 uzayında Frenet çatısı $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ olan bir bi-null eğri olsun. Eğer $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ için

$$\langle V_{k+1}, U \rangle = \text{sabit}$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü varsa, γ eğrisi k -tip bi-null slant helis olarak adlandırılır. Özel olarak, $k = 0$ için 0-tip bi-null slant helis, genel helistir.

İlk olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında 0-tip bi-null slant helisleri göz önüne alalım.

Teorem 5.1. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ eğrisi bir 0-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart k_1 sıfırdan farklı bir sabit sayıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 0-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle L_1, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. (5.1) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\langle L_2, U \rangle = 0, \quad \langle W, U \rangle = 0, \quad \langle N_2, U \rangle = 0 \tag{5.2}$$

elde edilir. (5.2) denklemleri kullanılarak,

$$U = \lambda L_1 + c N_1 \tag{5.3}$$

olarak yazılır. Burada λ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (5.3) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$0 = \lambda' L_1 + (\lambda + ck_1) L_2$$

bulunur. Buradan λ sabit, $c \neq 0$ ve $k_1 = -\lambda/c = \text{sabit}$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki k_1 sıfırdan farklı sabit bir sayı olsun. $c \neq 0$ için

$$U = -ck_1 L_1 + cN_1 \quad (5.4)$$

olacak şekilde bir U vektörü seçelim. Buradan $U' = 0$ ve $\langle L_1, U \rangle = c$ (sabit) elde edilir. Sonuç olarak $\gamma(t)$ eğrisi bir 0-tip bi-null slant helistir.

Teorem 4.1 ve Teorem 5.1 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2. $k_0(t)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $k_1(t)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon olmak üzere \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir 0-tip bi-null slant helis vardır.

Sonuç 5.1. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 0-tip bi-null slant helis olsun. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere

$$U = -ck_1 L_1 + cN_1$$

olarak verilir.

Sonuç 5.2. \mathbb{R}_2^5 uzayında, $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere $\langle L_1, U \rangle = 0$ şartını sağlayan 0-tip bi-null slant helis yoktur.

İkinci olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında 1-tip bi-null slant helisleri göz önüne alalım.

Teorem 5.3. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ eğrisi bir 1-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veya $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere k_0 ve k_1

$$ck_0'' - 2ck_1 - (ct + a)k_1' = 0$$

şartını sağlar.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 1-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle L_2, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. (5.5) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak, $\langle W, U \rangle = 0$ elde edilir. O zaman U vektörü

$$U = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 N_1 + c N_2 \quad (5.6)$$

olarak yazılır. Burada $i \in \{1, 2, 3\}$ olmak üzere λ_i diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (5.6) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$0 = (\lambda_1' - ck_1) L_1 + (\lambda_1 + \lambda_2' + \lambda_3 k_1) L_2 + (\lambda_3' - c) N_1 + (\lambda_2 + ck_0) W$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda_1' - ck_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2' + \lambda_3 k_1 = 0, \\ \lambda_3' - c = 0, \\ \lambda_2 + ck_0 = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

bulunur. (5.7) in ikinci, üçüncü ve dördüncü denklemlerinden,

$$\lambda_1 = ck_0' - (ct + a) k_1, \quad \lambda_3 = ct + a \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -ck_0 \quad (5.8)$$

bulunur. Burada $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veya $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır. (5.7) in birinci denklemini ve (5.8) kullanılarak,

$$ck_0'' - 2ck_1 - (ct + a) k_1' = 0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki k_0 ve k_1

$$ck_0'' - 2ck_1 - (ct + a) k_1' = 0$$

şartını sağlasın. Burada $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veya $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır. O zaman

$$U = (ck_0' - (ct + a) k_1) L_1 - ck_0 L_2 + (ct + a) N_1 + c N_2$$

olacak şekilde bir U vektörü seçelim. Buradan $U' = 0$ ve $\langle L_2, U \rangle = c$ (sabit) elde edilir. Sonuç olarak, $\gamma(t)$ eğrisi bir 1-tip bi-null slant helistir.

Teorem 4.1 ve Teorem 5.3 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.4. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veya $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $k_0(t)$ ve $k_1(t)$

$$ck_0'' - 2ck_1 - (ct + a)k_1' = 0 \quad (5.9)$$

şartını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir 1-tip bi-null slant helis vardır.

Örnek 5.1. Aşağıdaki eğri çiftleri (5.9) denklemini sağlar.

$$(i) k_0 = t^2, k_1 = 1 - a^2/(ct + a)^2 \quad (ii) k_0 = t, k_1 = 1/(ct + a)^2$$

Sonuç 5.3. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 1-tip bi-null slant helis olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin eksenini U olmak üzere

$$U = (ck_0' - (ct + a)k_1)L_1 - ck_0L_2 + (ct + a)N_1 + cN_2 \quad (5.10)$$

olarak verilir.

Sonuç 5.4. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ 0-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $\gamma(t)$, asli normal vektörü L_2 , helisin eksenini U ile ortogonal olan 1-tip bi-null slant helistir.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 0-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle L_1, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (5.11)$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. (5.11) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak, $\langle L_2, U \rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\gamma(t)$, asli normal vektörü L_2 , helisin eksenini U ile ortogonal olan 1-tip bi-null slant helistir.

Tersine, kabul edelim ki $\gamma(t)$, asli normal vektörü L_2 , helisin eksenini U ile ortogonal olan 1-tip bi-null slant helis olsun. O zaman (5.7) denkleminde $c = 0$ alınırsa, k_1 sıfırdan farklı sabit sayı olarak bulunur. Buradan $\gamma(t)$ 0-tip bi-null slant helistir.

Sonuç 5.5. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ 1-tip bi-null slant

helistir gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veya $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere k_0 ve k_1

$$(ct + a)(ck'_0 - (ct + a)k_1) - c^2k_0 = \text{sabit} \quad (5.12)$$

şartını sağlar.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$ eğrisi \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 1-tip bi-null slant helis olsun. Sonuç 5.3 ve U vektörünün sabitliği kullanılarak,

$$(ct + a)(ck'_0 - (ct + a)k_1) - c^2k_0 = \text{sabit}$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (5.12) şartı sağlansın. O zaman (5.12) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$ck''_0 - 2ck_1 - (ct + a)k'_1 = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, Teorem 5.3 den, $\gamma(t)$ 1-tip bi-null slant helistir.

Sonuç 5.6. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 1-tip bi-null slant helis olsun. Eğer $\gamma(t)$ eğrisinin (5.10) deki eksenini U bir null vektör ve $c \neq 0$ ise o zaman

$$k_0 = \frac{ct + a}{c} \int k_1(t) dt.$$

İspat. Kabul edelim ki (5.10) deki eksenini U bir null vektör olsun. O zaman

$$(ct + a)(ck'_0 - (ct + a)k_1) - c^2k_0 = 0$$

bulunur. Bu diferensiyel denklem k_0 a göre çözümlürse istenilen sonuç elde edilir.

Üçüncü olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında 2-tip bi-null slant helisleri göz önüne alalım.

Teorem 5.5. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ eğrisi bir 2-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart k_1 sıfırdan farklı bir sabit sayıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 2-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle N_1, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. (5.13) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\langle L_2, U \rangle = 0, \quad \langle W, U \rangle = 0, \quad \langle N_2, U \rangle = 0. \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.14) denklemleri kullanılarak,

$$U = cL_1 + \lambda N_1 \quad (5.15)$$

olarak yazılır. Burada λ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (5.15) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$0 = (c + \lambda k_1) L_2 + \lambda' N_1$$

bulunur. Buradan λ sıfırdan farklı sabit, $c \neq 0$ ve $k_1 = (-c/\lambda) = \text{sabit}$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki k_1 sıfırdan farklı sabit bir sayı olsun. $c \neq 0$ için

$$U = cL_1 - \frac{c}{k_1} N_1$$

olacak şekilde bir U vektörü seçelim. Buradan $U' = 0$ ve $\langle N_1, U \rangle = c$ (sabit) elde edilir. Sonuç olarak $\gamma(t)$ eğrisi bir 2-tip bi-null slant helistir.

Teorem 4.1 ve Teorem 5.5 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.6. $k_0(t)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $k_1(t)$ sıfırdan farklı sabit bir fonksiyon olmak üzere \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir 2-tip bi-null slant helis vardır.

Sonuç 5.7. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 2-tip bi-null slant helis olsun. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere

$$U = cL_1 - \frac{c}{k_1} N_1$$

olarak verilir.

Sonuç 5.8. \mathbb{R}_2^5 uzayında, $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere $\langle N_1, U \rangle = 0$ şartını sağlayan 2-tip bi-null slant helis yoktur.

Sonuç 5.9. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ bir 2-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $\gamma(t)$ bir 0-tip bi-null slant helistir.

Sonuç 5.10. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ bir 2-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $\gamma(t)$, asli normal vektörü L_2 , helisin eksenini U ile ortogonal olan 1-tip bi-null slant helistir.

Dördüncü olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında 3-tip bi-null slant helisleri göz önüne alalım.

Teorem 5.7. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ eğrisi bir 3-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}$ ve λ_2 sıfır olmayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere k_0 ve k_1

$$k_0\lambda_2^{(3)} + k_0'\lambda_2'' - 2k_1\lambda_2' - k_1'\lambda_2 = 0 \quad (5.16)$$

ve

$$c + k_0\lambda_2' + \lambda_2^{(3)} = 0 \quad (5.17)$$

denklemlerini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 3-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle N_2, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. O zaman U vektörü

$$U = \lambda_1 L_1 + c L_2 + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 + \lambda_4 W \quad (5.18)$$

olarak yazılır. Burada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere λ_i diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (5.18) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1' - k_1\lambda_3) L_1 + (\lambda_1 + k_1\lambda_2 - k_0\lambda_4) L_2 + (\lambda_2' - \lambda_3) N_1 \\ &\quad + (\lambda_3' - \lambda_4) N_2 + (c + k_0\lambda_3 + \lambda_4') W \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1' - k_1\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + k_1\lambda_2 - k_0\lambda_4 = 0, \\ \lambda_2' - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3' - \lambda_4 = 0, \\ c + k_0\lambda_3 + \lambda_4' = 0 \end{array} \right. \quad (5.19)$$

bulunur. (5.19) den λ_2 sıfır olmayan bir fonksiyondur. (5.19) denklemlerinin çözümleri,

$$k_0\lambda_2^{(3)} + k_0'\lambda_2'' - 2k_1\lambda_2' - k_1'\lambda_2 = 0$$

ve

$$c + k_0\lambda_2' + \lambda_2^{(3)} = 0$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki (5.16) ve (5.17) denklemleri sağlansın. O zaman

$$U = (k_0\lambda_2'' - k_1\lambda_2) L_1 + cL_2 + \lambda_2 N_1 + \lambda_2' N_2 + \lambda_2'' W$$

olacak şekilde bir U vektörü seçelim. Buradan $U' = 0$ ve $\langle N_2, U \rangle = c$ (sabit) elde edilir. Sonuç olarak, $\gamma(t)$ eğrisi bir 3-tip bi-null slant helistir.

Teorem 4.1 ve Teorem 5.7 den aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.8. $c \in \mathbb{R}$ ve λ_2 sıfır olmayan diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $k_0(t)$ ve $k_1(t)$

$$k_0\lambda_2^{(3)} + k_0'\lambda_2'' - 2k_1\lambda_2' - k_1'\lambda_2 = 0 \quad (5.20)$$

ve

$$c + k_0\lambda_2' + \lambda_2^{(3)} = 0 \quad (5.21)$$

denklemlerini sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir 3-tip bi-null slant helis vardır.

Örnek 5.2. Aşağıdaki eğri çiftleri (5.20) ve (5.21) denklemlerini sağlar.

$$(i) \lambda_2 = t^2, k_0 = -c/2t, k_1 = c/t^3 \quad (ii) \lambda_2 = t, k_0 = -c, k_1 = 1/t^2$$

Sonuç 5.11. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 3-tip bi-null slant helis olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere

$$U = (k_0\lambda_2'' - k_1\lambda_2) L_1 + cL_2 + \lambda_2 N_1 + \lambda_2' N_2 + \lambda_2'' W$$

olarak verilir. Burada $c \in \mathbb{R}$ ve λ_2 sıfır olmayan diferensiyellenebilir bir fonksiyondur şöyle ki

$$k_0\lambda_2^{(3)} + k_0'\lambda_2'' - 2k_1\lambda_2' - k_1'\lambda_2 = 0$$

ve

$$c + k_0 \lambda_2' + \lambda_2^{(3)} = 0$$

denklemleri sağlanır.

Sonuç 5.12. $\lambda_2 \neq 0$ ve $\lambda_2' \neq 0$ olmak üzere bir λ_2 fonksiyonu için, (5.16) ve (5.17) denklemleri kullanılarak

$$k_0 = -\frac{(\lambda_2^{(3)} + c)}{\lambda_2'}$$

ve

$$k_1 = \frac{1}{\lambda_2^2} \int \lambda_2 (k_0 \lambda_2^{(3)} + k_0' \lambda_2'') dt$$

elde edilir.

Son olarak, \mathbb{R}_2^5 uzayında 4-tip bi-null slant helisleri göz önüne alalım.

Teorem 5.9. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ eğrisi bir 4-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $c, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ olmak üzere k_0 ve k_1

$$3ck_0' + (ct + a_1)(k_0'' - 2k_1) - \left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)k_1' = 0 \quad (5.22)$$

denklemini sağlar.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 4-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle W, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.23)$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. O zaman U vektörü

$$U = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 N_1 + \lambda_4 N_2 + cW \quad (5.24)$$

olarak yazılır. Burada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere λ_i diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (5.24) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1' - k_1 \lambda_4) L_1 + (\lambda_1 + \lambda_2' + \lambda_3 k_1 - ck_0) L_2 + (\lambda_3' - \lambda_4) N_1 \\ &\quad + (\lambda_4' - c) N_2 + (\lambda_2 + k_0 \lambda_4) W \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda_1' - k_1 \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2' + \lambda_3 k_1 - c k_0 = 0, \\ \lambda_3' - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_4' - c = 0, \\ \lambda_2 + k_0 \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

bulunur. (5.25) in son dört denkleminde,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -k_0 (ct + a_1), \quad \lambda_3 = c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2, \quad \lambda_4 = ct + a_1, \\ \lambda_1 &= 2ck_0 + (ct + a_1) k_0' - \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) k_1 \end{aligned} \quad (5.26)$$

bulunur. Burada $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ dir. (5.25) in birinci denklemini ve (5.26), kullanılarak,

$$3ck_0' + (ct + a_1) (k_0'' - 2k_1) - \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) k_1' = 0$$

elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki k_0 ve k_1

$$3ck_0' + (ct + a_1) (k_0'' - 2k_1) - \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) k_1' = 0$$

şartını sağlasın. Burada $c, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} U &= \left(2ck_0 + (ct + a_1) k_0' - \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) k_1 \right) L_1 - k_0 (ct + a_1) L_2 \\ &+ \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) N_1 + (ct + a_1) N_2 + cW \end{aligned}$$

olacak şekilde bir U vektörü seçelim. Buradan $U' = 0$ ve $\langle W, U \rangle = c$ (sabit) elde edilir. Sonuç olarak, $\gamma(t)$ eğrisi bir 4-tip bi-null slant helistir.

Teorem 4.1 ve Teorem 5.9 dan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.10. $c, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ olmak üzere $k_0(t)$ ve $k_1(t)$

$$3ck_0' + (ct + a_1) (k_0'' - 2k_1) - \left(c \frac{t^2}{2} + a_1 t + a_2 \right) k_1' = 0 \quad (5.27)$$

şartını sağlayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir 4-tip bi-null slant helis vardır.

Örnek 5.3. Aşağıdaki eğri çiftleri (5.27) denklemini sağlar.

$$(i) k_0 = 1, k_1 = \left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)^{-2}$$

$$(ii) k_0 = t, k_1 = 2ct(6a_2 + 3a_1t + ct^2) / (2a_2 + 2a_1t + ct^2)^2$$

Sonuç 5.13. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 4-tip bi-null slant helis olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin ekseni U olmak üzere

$$U = \left(2ck_0 + (ct + a_1)k'_0 - \left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)k_1\right)L_1 - k_0(ct + a_1)L_2 \\ + \left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)N_1 + (ct + a_1)N_2 + cW$$

olarak verilir.

Sonuç 5.14. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ 1-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $\gamma(t)$ eğrisi, U ekseni $\langle W, U \rangle = 0$ şartını sağlayan 4-tip bi-null slant helistir.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 1-tip bi-null slant helis olsun. O zaman

$$\langle L_2, U \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

olacak şekilde sıfır olmayan bir sabit $U \in \mathbb{R}_2^5$ vektörü vardır. (5.28) denkleminin t ye göre türevi alınıp, (3.1) Frenet denklemleri kullanılarak, $\langle W, U \rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\gamma(t)$ eğrisi, U ekseni $\langle W, U \rangle = 0$ şartını sağlayan 4-tip bi-null slant helistir.

Tersine, kabul edelim ki $\gamma(t)$ eğrisi, U ekseni $\langle W, U \rangle = 0$ şartını sağlayan 4-tip bi-null slant helis olsun. O zaman (5.22) denkleminde $c = 0$ alınırsa

$$a_1k''_0 - 2a_1k_1 - (a_1t + a_2)k'_1 = 0$$

elde edilir. Burada $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Sonuç olarak, Teorem 5.3 den $\gamma(t)$ 1-tip bi-null slant helistir.

Sonuç 5.13 kullanılarak aşağıdaki Sonuç 5.16 elde edilir.

Sonuç 5.15. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir bi-null eğri olsun. O zaman $\gamma(t)$ 4-tip bi-null slant helistir gerek ve yeter şart $c, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ için k_0 ve k_1

$$\left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right) \left(2ck_0 + (ct + a_1)k'_0 - \left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)k_1\right) - (ct + a_1)^2 k_0 = \text{sabit}$$

denklemini sağlar.

Sonuç 5.16. $\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirilmiş, eğrilikleri $k_0, k_1 \neq 0$ olan bir 4-tip bi-null slant helis olsun. Eğer $\gamma(t)$ eğrisinin Sonuç 5.13 deki eksenini U bir null vektör ise o zaman

$$k_1 = \frac{1}{\left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)} \left[2ck_0 + (ct + a_1)k_0' - \frac{2(ct + a_1)^2 k_0 - c^2}{2\left(c\frac{t^2}{2} + a_1t + a_2\right)} \right].$$

Burada $c, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $(c, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ dir.

6. Bİ-NULL EĞRİLER VE REGLE YÜZEYLERİ

$\gamma(t)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş, Frenet çatısı $\{L_1, L_2, N_1, N_2, W\}$ ve eğrilikleri k_0, k_1 olan bir bi-null eğri olsun. Bu bölümde \mathbb{R}_2^5 uzayında

$$M_1 : \quad x(t, u) = \gamma(t) + uN_1(t) \quad (6.1)$$

ve

$$M_2 : \quad y(t, u) = \gamma(t) + uW(t), \quad u > 0 \quad (6.2)$$

doğrusal (regle) yüzeylerini inceleyeceğiz.

İlk olarak, (6.1) ile parametrelendirilmiş M_1 regle yüzeyini göz önüne alalım. O zaman

$$x_t = L_1 + uk_1L_2, \quad x_u = N_1$$

ve

$$\langle x_t, x_t \rangle = \langle x_u, x_u \rangle = 0, \quad \langle x_t, x_u \rangle = 1$$

elde edilir. Buradan, M_1 yüzeyinin flat Lorentz yüzey olduğu bulunur.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_t + x_u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_1 + uk_1L_2 + N_1), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_t - x_u) = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_1 + uk_1L_2 - N_1) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_1, e_2\}$, M_1 yüzeyinin teğet uzayının işareti $(+, -)$ olan ortonormal bir çatıdır.

$$e_3 = W, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 - uk_1N_1 + L_2), \quad e_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_2 - uk_1N_1 - L_2)$$

alalım. O zaman $\{e_3, e_4, e_5\}$, M_1 yüzeyinin normal uzayının işareti $(+, +, -)$ olan ortonormal bir çatıdır.

M_1 yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \langle D_{e_1}e_1, e_3 \rangle = \frac{1}{2}uk_1, \quad h_{12}^3 = \langle D_{e_1}e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{2}uk_1, \quad h_{22}^3 = \langle D_{e_2}e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{2}uk_1, \\ h_{11}^4 &= \langle D_{e_1}e_1, e_4 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + uk_1' + 2k_1), \quad h_{22}^4 = \langle D_{e_2}e_2, e_4 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + uk_1' - 2k_1), \end{aligned}$$

$$h_{12}^4 = \langle D_{e_1}e_2, e_4 \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + uk'_1), \quad h_{11}^5 = -\langle D_{e_1}e_1, e_5 \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1 + uk'_1 + 2k_1),$$

$$h_{12}^5 = -\langle D_{e_1}e_2, e_5 \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1 + uk'_1), \quad h_{22}^5 = -\langle D_{e_2}e_2, e_5 \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1 + uk'_1 - 2k_1)$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.1. M_1 yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere $H = k_1L_2$ dir.

İspat. Ortalama eğrilik vektörü H aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (h_{11}^{\alpha} - h_{22}^{\alpha}) e_{\alpha}$$

$$= \frac{k_1}{\sqrt{2}} (e_4 - e_5) = k_1L_2.$$

Sonuç 6.1. M_1 yüzeyi minimal yüzeydir gerek ve yeter şart $k_1 = 0$ dir.

Sonuç 6.2. Eğer her $t \in \mathbb{R}$ için $k_1(t) \neq 0$ ise M_1 yüzeyi marginally trapped yüzeydir.

$D_X H$ uzayının normal kısmı ${}^{\perp}\nabla_X H = (D_X H)^{\perp}$ olmak üzere $H = k_1L_2$ olduğundan $D_{x_u} H = 0$ ve $D_{x_t} H = k'_1L_2 + k_1W$ olur. Böylece ${}^{\perp}\nabla_{x_u} H = 0$ dir.

Ayrıca

$$\langle D_{x_t} H, e_3 \rangle = k_1, \quad \langle D_{x_t} H, e_4 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}k'_1, \quad \langle D_{x_t} H, e_5 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}k'_1$$

bulunur. Buradan

$${}^{\perp}\nabla_{x_t} H = k_1e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}k'_1e_4 - \frac{1}{\sqrt{2}}k'_1e_5$$

olur. O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.2. M_1 yüzeyi paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir gerek ve yeter şart $k_1 = 0$ veya $H = 0$ dir.

Teorem 6.3. M_1 yüzeyinin normal eğrilik tensörü sıfırdır.

İspat.

$$R_{412}^3 = h_{11}^3 h_{21}^4 - h_{21}^3 h_{11}^4 - h_{12}^3 h_{22}^4 + h_{22}^3 h_{12}^4 = 0,$$

$$R_{512}^3 = -h_{11}^3 h_{21}^5 + h_{21}^3 h_{11}^5 + h_{12}^3 h_{22}^5 - h_{22}^3 h_{12}^5 = 0,$$

$$R_{512}^4 = -h_{11}^4 h_{21}^5 + h_{21}^4 h_{11}^5 + h_{12}^4 h_{22}^5 - h_{22}^4 h_{12}^5 = 0$$

olarak bulunur. Buradan ${}^{\perp}R = 0$ dir.

Şimdi (6.2) ile parametrelendirilmiş M_2 regle yüzeyini göz önüne alalım.

O zaman

$$y_t = L_1 - uk_0L_2 - uN_2, \quad y_u = W,$$

ve

$$\langle y_t, y_t \rangle = 2u^2k_0, \quad \langle y_u, y_u \rangle = 1, \quad \langle y_t, y_u \rangle = 0$$

elde edilir. Eğer $k_0 \neq 0$ ise M_2 yüzeyi flat Lorentz yüzeydir.

Durum 1. Kabul edelim ki $k_0 > 0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} e_1 &= y_u = W, \\ e_2 &= \frac{1}{u\sqrt{2k_0}}y_t = \frac{1}{u\sqrt{2k_0}}(L_1 - uk_0L_2 - uN_2) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_1, e_2\}$, M_2 yüzeyinin teğet uzayının işareti $(+, +)$ olan ortonormal bir çatısıdır.

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(L_1 + N_1 + \frac{1}{u}L_2 \right), \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(L_1 - N_1 - \frac{1}{u}L_2 \right), \\ e_5 &= \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left(-\frac{1}{u}L_1 - k_0L_2 + N_2 \right) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_3, e_4, e_5\}$, M_2 yüzeyinin normal uzayının işareti $(+, -, -)$ olan ortonormal bir çatısıdır.

M_2 yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \langle D_{e_1}e_1, e_3 \rangle = 0, \quad h_{11}^4 = -\langle D_{e_1}e_1, e_4 \rangle = 0, \quad h_{11}^5 = -\langle D_{e_1}e_1, e_5 \rangle = 0, \\ h_{12}^3 &= \langle D_{e_1}e_2, e_3 \rangle = -\frac{1}{2u^2\sqrt{k_0}}, \quad h_{12}^4 = -\langle D_{e_1}e_2, e_4 \rangle = -\frac{1}{2u^2\sqrt{k_0}}, \\ h_{12}^5 &= -\langle D_{e_1}e_2, e_5 \rangle = 0, \quad h_{22}^3 = \langle D_{e_2}e_2, e_3 \rangle = \frac{1+k_1}{2\sqrt{2}uk_0}, \\ h_{22}^4 &= -\langle D_{e_2}e_2, e_4 \rangle = \frac{k_1-1}{2\sqrt{2}uk_0}, \quad h_{22}^5 = -\langle D_{e_2}e_2, e_5 \rangle = \frac{k'_0}{2\sqrt{2}u(k_0)^{3/2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.4. $k_0 > 0$ için M_1 yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere

$$H = \left(\frac{2uk_0k_1 - k'_0}{8u^2k_0^2} \right) L_1 + \left(\frac{2 - uk'_0}{8u^2k_0} \right) L_2 + \left(\frac{1}{4uk_0} \right) N_1 + \left(\frac{k'_0}{8uk_0^2} \right) N_2$$

dir.

İspat. Ortalama eğrilik vektörü H aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (h_{11}^{\alpha} + h_{22}^{\alpha}) e_{\alpha} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}u} \left(\frac{1+k_1}{k_0} e_3 + \frac{k_1-1}{k_0} e_4 + \frac{k'_0}{(k_0)^{3/2}} e_5 \right) \\ &= \left(\frac{2uk_0k_1 - k'_0}{8u^2k_0^2} \right) L_1 + \left(\frac{2 - uk'_0}{8u^2k_0} \right) L_2 + \left(\frac{1}{4uk_0} \right) N_1 + \left(\frac{k'_0}{8uk_0^2} \right) N_2. \end{aligned}$$

Sonuç 6.3. M_2 yüzeyi marginally trapped yüzeydir gerek ve yeter şart

$$(k'_0)^2 - 4k_0k_1 = 0$$

dır.

İspat. Teorem 6.4 ten

$$\langle H, H \rangle = \frac{4k_0k_1 - (k'_0)^2}{32u^2k_0^3}$$

bulunur. Buradan istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3 ve Teorem 4.1. den, \mathbb{R}_2^5 uzayında flat marginally trapped spacelike yüzeylerin bir sınıfını elde edebiliriz.

Örnek 6.1. $t \neq 0$ olmak üzere $k_0 = t^2$ ve $k_1 = 1$ fonksiyonlarını eğrilikleri olarak kabul eden γ bi-null eğrisi için M_2 yüzeyi \mathbb{R}_2^5 uzayında flat marginally trapped spacelike yüzeydir.

Durum 2. Kabul edelim ki $k_0 < 0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} e_1 &= y_u = W, \\ e_2 &= \frac{1}{u\sqrt{-2k_0}} y_t = \frac{1}{u\sqrt{-2k_0}} (L_1 - uk_0L_2 - uN_2) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_1, e_2\}$, M_2 yüzeyinin teğet uzayının işareti $(+, -)$ olan ortonormal bir çatıdır.

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(L_1 + N_1 + \frac{1}{u} L_2 \right), \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{-2k_0}} \left(-\frac{1}{u} L_1 - k_0 L_2 + N_2 \right), \\ e_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(L_1 - N_1 - \frac{1}{u} L_2 \right) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_3, e_4, e_5\}$, M_2 yüzeyinin normal uzayının işareti $(+, +, -)$ olan ortonormal bir çatıdır.

M_2 yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \langle D_{e_1}e_1, e_3 \rangle = 0, & h_{11}^4 &= \langle D_{e_1}e_1, e_4 \rangle = 0, & h_{11}^5 &= -\langle D_{e_1}e_1, e_5 \rangle = 0, \\ h_{12}^3 &= \langle D_{e_1}e_2, e_3 \rangle = -\frac{1}{2u^2\sqrt{-k_0}}, & h_{12}^4 &= \langle D_{e_1}e_2, e_4 \rangle = 0, \\ h_{12}^5 &= -\langle D_{e_1}e_2, e_5 \rangle = -\frac{1}{2u^2\sqrt{-k_0}}, & h_{22}^3 &= \langle D_{e_2}e_2, e_3 \rangle = -\frac{1+k_1}{2\sqrt{2}uk_0}, \\ h_{22}^4 &= \langle D_{e_2}e_2, e_4 \rangle = -\frac{k'_0}{2\sqrt{2}u(-k_0)^{3/2}}, & h_{22}^5 &= -\langle D_{e_2}e_2, e_5 \rangle = \frac{1-k_1}{2\sqrt{2}uk_0} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 6.5. $k_0 < 0$ için M_2 yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere

$$H = \left(\frac{2uk_0k_1 - k'_0}{8u^2k_0^2} \right) L_1 + \left(\frac{2 - uk'_0}{8u^2k_0} \right) L_2 + \left(\frac{1}{4uk_0} \right) N_1 + \left(\frac{k'_0}{8uk_0^2} \right) N_2$$

dir.

İspat. Ortalama eğrilik vektörü H aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (h_{11}^{\alpha} - h_{22}^{\alpha}) e_{\alpha} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}u} \left(\frac{1+k_1}{k_0} e_3 + \frac{k'_0}{(-k_0)^{3/2}} e_4 + \frac{k_1-1}{k_0} e_5 \right) \\ &= \left(\frac{2uk_0k_1 - k'_0}{8u^2k_0^2} \right) L_1 + \left(\frac{2 - uk'_0}{8u^2k_0} \right) L_2 + \left(\frac{1}{4uk_0} \right) N_1 + \left(\frac{k'_0}{8uk_0^2} \right) N_2. \end{aligned}$$

Sonuç 6.4. M_2 yüzeyi marginally trapped yüzeydir gerek ve yeter şart

$$(k'_0)^2 - 4k_0k_1 = 0$$

dır.

İspat. Teorem 6.5 ten,

$$\langle H, H \rangle = \frac{4k_0k_1 - (k'_0)^2}{32u^2k_0^3}$$

bulunur. Buradan istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4 ve Teorem 4.1. den, \mathbb{R}_2^5 uzayında flat marginally trapped Lorentz yüzeylerin bir sınıfını elde edebiliriz.

Örnek 6.2. $t \neq 0$ olmak üzere $k_0 = -t^2$ ve $k_1 = -1$ fonksiyonlarını eğrilikleri olarak kabul eden γ bi-null eğrisi için M_2 yüzeyi \mathbb{R}_2^5 uzayında flat marginally trapped Lorentz yüzeydir.

Not. \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null yay parametresi t ile parametrelendirmiş bir $\gamma(t)$ bi-null eğrisi için,

$$F_1(t, u) = \gamma(t) + uL_1(t),$$

$$F_2(t, u) = \gamma(t) + uL_2(t)$$

ve

$$F_3(t, u) = \gamma(t) + uN_2(t)$$

parametrizasyonu ile verilen regle yüzeyleri de düşünülebilir. Fakat bu yüzeylerin indirgenmiş metriği dejeneredir, yani bu yüzeyler lightlike yüzeydir. Bu tez çalışmasında non-dejenere yüzeyler çalışılmıştır.



7. Bİ-NULL EĞRİLER VE LORENTZİYEN STATIONARY YÜZEYLER

$P(u)$ ve $Q(v)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında null eğriler olmak üzere

$$f(u, v) = P(u) + Q(v)$$

Lorentz stationary yüzeyini göz önüne alalım. O zaman aşağıdaki durumlar ayrı ayrı düşümlenebilir:

(i) $P(u)$ ve $Q(v)$ bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğrilerdir,

(ii) $P(u)$ bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğri ve $Q(v)$ pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir null eğridir.

Bu bölümde, bu tip bir Lorentz stationary yüzey için

$$S_2^4(1) = \{x \in \mathbb{R}_2^5 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

pseudo küresinde yatan Gauss dönüşümüne benzer bir dönüşümü inceleyeceğiz. Bu dönüşümü kısaca "Gauss-like dönüşüm" olarak adlandıracamız.

İlk olarak, (i) durumunu göz önüne alalım. $P(u)$ ve $Q(v)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında sırasıyla u ve v bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğriler olmak üzere M Lorentz stationary yüzeyi

$$f(u, v) = P(u) + Q(v)$$

olarak verilsin. Burada $\langle P'(u), Q'(v) \rangle \neq 0$ dır.

$a = \langle P'(u), Q'(v) \rangle$ alalım. Parametre yönlendirilmesinin değişikliği ile $a > 0$ olarak kabul edelim. M yüzeyinin Gauss eğriliği K

$$K = -\frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a^3}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} (f_u + f_v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (P'(u) + Q'(v)), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} (f_u - f_v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (P'(u) - Q'(v)) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_1, e_2\}$, M yüzeyinin teğet uzayının işareti $(+, -)$ olan ortonormal bir çatısıdır.

$$\begin{aligned} W_1 &= P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u), \\ W_2 &= Q''(v) - \frac{a_v}{a} Q'(v) \end{aligned}$$

olsun. $i = 1, 2$ için $\langle W_i, P'(u) \rangle = \langle W_i, Q'(v) \rangle = \langle W_i, W_i \rangle = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

$$b = \langle W_1, W_2 \rangle = \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a} = -a^2 K$$

olarak tanımlayalım ve kabul edelim ki $K \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon b}} (W_1 + W_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon b}} \left(P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) + Q''(v) - \frac{a_v}{a} Q'(v) \right), \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon b}} (W_1 - W_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon b}} \left(P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) - Q''(v) + \frac{a_v}{a} Q'(v) \right), \\ e_5 &= P^{(3)}(u) - \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{aa_{uv} - a_u a_v} P''(u) + \frac{a_u a_{uv} - a_{uv} a_v}{aa_{uv} - a_u a_v} P'(u) \end{aligned}$$

alalım. Burada $\varepsilon = \pm 1$ öyle ki $\varepsilon b > 0$. O zaman $\{e_3, e_4, e_5\}$, M yüzeyinin normal uzayının işareti $(\varepsilon, -\varepsilon, +)$ olan ortonormal bir çatısıdır. Buradan

$$\langle e_5, P'(u) \rangle = \langle e_5, P''(u) \rangle = \langle e_5, Q'(v) \rangle = \langle e_5, Q''(v) \rangle = 0$$

olduğu görülür.

M yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \varepsilon \langle D_{e_1} e_1, e_3 \rangle = \frac{\varepsilon}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_3 \rangle = \frac{\sqrt{2\varepsilon b}}{2a}, \\ h_{22}^3 &= \varepsilon \langle D_{e_2} e_2, e_3 \rangle = \frac{\varepsilon}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_3 \rangle = \frac{\sqrt{2\varepsilon b}}{2a}, \\ h_{12}^4 &= -\varepsilon \langle D_{e_1} e_2, e_4 \rangle = \frac{-\varepsilon}{2a} \langle P''(u) - Q''(v), e_4 \rangle = \frac{\sqrt{2\varepsilon b}}{2a}, \\ h_{12}^3 &= h_{11}^4 = h_{22}^4 = h_{11}^5 = h_{12}^5 = h_{22}^5 = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin $S_2^4(1)$ uzayına tanımlı Gauss-like dönüşümünü

$$G = e_5$$

olarak tanımlayalım.

$$D_{e_1} e_5 = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5$$

olarak yazılabilir. O zaman $p_5 = 0$,

$$p_1 = \langle D_{e_1} e_5, e_1 \rangle = -\langle D_{e_1} e_1, e_5 \rangle = -h_{11}^5 = 0,$$

$$p_2 = -\langle D_{e_1} e_5, e_2 \rangle = \langle D_{e_1} e_2, e_5 \rangle = h_{12}^5 = 0,$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \varepsilon \langle D_{e_1} e_5, e_3 \rangle = -\varepsilon \langle D_{e_1} e_3, e_5 \rangle \\ &= \frac{-\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 + a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4 &= -\varepsilon \langle D_{e_1} e_5, e_4 \rangle = \varepsilon \langle D_{e_1} e_4, e_5 \rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 - a_{uuvv} - Aa_{uuv} - Ba_{vv}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$A = -\frac{aa_{uuv} - a_v a_{uu}}{aa_{uv} - a_u a_v} \quad \text{ve} \quad B = \frac{a_u a_{uuv} - a_{uu} a_{uv}}{aa_{uv} - a_u a_v}$$

dir. Öyleyse

$$\begin{aligned} D_{e_1} e_5 &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 + a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}) e_3 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 - a_{uuvv} - Aa_{uuv} - Ba_{vv}) e_4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_{e_2} e_5 &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 - a_{uuvv} - Aa_{uuv} - Ba_{vv}) e_3 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 + a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}) e_4 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$E_1 = G_*(e_1) = D_{e_1} e_5, \quad E_2 = G_*(e_2) = D_{e_2} e_5, \quad E_3 = e_1, \quad E_4 = e_2$$

alalım. O zaman $\{E_1, E_2\}$, $S_2^4(1)$ içinde $G(M)$ yüzeyinin teğet uzayının bir çatısıdır ve $\{E_3, E_4\}$ $G(M)$ yüzeyinin normal uzayının bir çatısıdır.

$$E_1 = R_1 e_3 + R_2 e_4 \quad \text{ve} \quad E_2 = -R_2 e_3 - R_1 e_4$$

olarak yazılır. Burada

$$R_1 = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 + a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}),$$

$$R_2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon ab}} (1 - a_{uuvv} - Aa_{uuv} - Ba_{vv})$$

dir. O zaman

$$\langle E_1, E_1 \rangle = -\langle E_2, E_2 \rangle = \varepsilon (R_1^2 - R_2^2), \quad \langle E_1, E_2 \rangle = 0$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki G nin indirgenmiş metriği dejenerer olsun. O zaman $R_1^2 - R_2^2 \neq 0$ ve $G, S_2^4(1)$ de bir Lorentz yüzeydir. $G(M)$ nin ikinci temel formu \tilde{h} nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11}^3 &= \langle D_{E_1} E_1, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_1} e_5), e_1 \rangle = \langle D_{e_1}(R_1 e_3 + R_2 e_4), e_1 \rangle \\ &= R_1 \langle D_{e_1} e_3, e_1 \rangle + R_2 \langle D_{e_1} e_4, e_1 \rangle = -\varepsilon R_1 h_{11}^3 + \varepsilon R_2 h_{11}^4 \\ &= \frac{-\varepsilon \sqrt{2\varepsilon b}}{2a} R_1, \\ \tilde{h}_{11}^4 &= -\langle D_{E_1} E_1, E_4 \rangle = -\langle D_{e_1}(D_{e_1} e_5), e_2 \rangle = -\langle D_{e_1}(R_1 e_3 + R_2 e_4), e_2 \rangle \\ &= \varepsilon R_1 h_{12}^3 - \varepsilon R_2 h_{12}^4 = \frac{-\varepsilon \sqrt{2\varepsilon b}}{2a} R_2, \\ \tilde{h}_{12}^3 &= \langle D_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_2} e_5), e_1 \rangle = \langle D_{e_1}(-R_2 e_3 - R_1 e_4), e_1 \rangle \\ &= \varepsilon R_2 h_{11}^3 - \varepsilon R_1 h_{11}^4 = \frac{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon b}}{2a} R_2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{h}_{12}^4 = -\tilde{h}_{22}^3 = \frac{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon b}}{2a} R_1, \quad \tilde{h}_{22}^4 = -\frac{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon b}}{2a} R_2$$

bulunur.

$\tilde{g}_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ ve $\tilde{g}^{ij}, (\tilde{g}_{ij})$ matrisinin tersinin bileşenleri olsun. O zaman $G(M)$ nin ortalama eğrilik vektörü \tilde{H}

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij}^\alpha E_\alpha = \frac{\varepsilon}{2(R_1^2 - R_2^2)} \left((\tilde{h}_{11}^3 - \tilde{h}_{22}^3) e_1 + (\tilde{h}_{11}^4 - \tilde{h}_{22}^4) e_2 \right) = 0$$

olarak elde edilir. Böylece $G(M)$ nin $S_2^4(1)$ de bir Lorentz stationary yüzey olduğu görülür.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.1. $P(u)$ ve $Q(v)$, \mathbb{R}_2^5 uzayında sırasıyla u ve v bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğriler ve $\langle P'(u), Q'(v) \rangle \neq 0$ olmak üzere M Lorentz stationary yüzeyi

$$f(u, v) = P(u) + Q(v)$$

olarak verilsin. O zaman Gauss eğriliği $K \neq 0$ olmak üzere indirgenmiş metriğin dejenere olmadığı noktalarda M yüzeyinin Gauss-like dönüşümü $S_2^4(1)$ pseudo küresinde bir Lorentz stationary yüzeyi verir.

Şimdi (ii) durumunu göz önüne alalım. \mathbb{R}_2^5 uzayında, $P(u)$ bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğri ve $Q(v)$ pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir null eğri olmak üzere M Lorentz stationary yüzeyi

$$f(u, v) = P(u) + Q(v)$$

olarak verilsin. Burada $\langle P'(u), Q'(v) \rangle \neq 0$ dır.

$a = \langle P'(u), Q'(v) \rangle$ alalım. Parametre yönlendirilmesinin değişikliği ile $a > 0$ olarak kabul edelim. M yüzeyinin Gauss eğriliği K

$$K = -\frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a^3}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} (f_u + f_v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (P'(u) + Q'(v)), \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} (f_u - f_v) = \frac{1}{\sqrt{2a}} (P'(u) - Q'(v)) \end{aligned}$$

alalım. O zaman $\{e_1, e_2\}$, M yüzeyinin teğet uzayının işareti $(+, -)$ olan ortogonal bir çatıdır.

Durum 1. Kabul edelim ki $\langle Q''(v), Q''(v) \rangle = 1$ olsun.

$$e_3 = Q''(v) - \frac{a_v}{a} Q'(v)$$

alalım. Burada $\langle e_3, P'(u) \rangle = \langle e_3, Q'(v) \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_3 \rangle = 1$ olduğu görülür. Böylece e_3 vektörü M yüzeyinin normal uzayında bir spacelike vektördür.

$$W = P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) - \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a} e_3$$

olsun. O zaman

$$\langle W, P'(u) \rangle = \langle W, Q'(v) \rangle = \langle W, e_3 \rangle = 0$$

ve

$$\langle W, W \rangle = -\left(\frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a}\right)^2 = -a^4 K^2$$

olarak bulunur. Kabul edelim ki $K \neq 0$ olsun. O zaman, W vektörü M yüzeyinin normal uzayında e_3 vektörüne dik olan timelike bir vektördür.

$$b = \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a}, \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ öyle ki } \varepsilon b > 0$$

ve

$$\begin{aligned} e_4 &= \frac{\varepsilon}{b} \left(P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) \right) - \varepsilon e_3, \\ e_5 &= P^{(3)}(u) - \frac{aa_{uvw} - a_v a_{uu}}{aa_{uv} - a_u a_v} P''(u) + \frac{a_u a_{uvw} - a_{uu} a_{uv}}{aa_{uv} - a_u a_v} P'(u) \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\langle e_5, P'(u) \rangle = \langle e_5, P''(u) \rangle = \langle e_5, Q'(v) \rangle = \langle e_5, Q''(v) \rangle = 0$$

ve $\{e_3, e_4, e_5\}$, M yüzeyinin normal uzayının işareti $(+, -, +)$ olan ortonormal bir çatısıdır.

M yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= \langle D_{e_1} e_1, e_3 \rangle = \frac{1}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_3 \rangle = \frac{1+b}{2a}, \\ h_{11}^4 &= -\langle D_{e_1} e_1, e_4 \rangle = -\frac{1}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_4 \rangle = \frac{\varepsilon b}{2a}, \\ h_{12}^3 &= \langle D_{e_1} e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{2a} \langle P''(u) - Q''(v), e_3 \rangle = \frac{b-1}{2a}, \\ h_{12}^4 &= -\langle D_{e_1} e_2, e_4 \rangle = -\frac{1}{2a} \langle P''(u) - Q''(v), e_4 \rangle = \frac{\varepsilon b}{2a}, \\ h_{22}^3 &= h_{11}^3, \quad h_{22}^4 = h_{11}^4, \quad h_{11}^5 = h_{12}^5 = h_{22}^5 = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin $S_2^4(1)$ uzayına tanımlı Gauss-like dönüşümünü

$$G = e_5$$

olarak tanımlayalım.

$$D_{e_1} e_5 = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5$$

olarak yazılabilir. O zaman $p_5 = 0$,

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle D_{e_1} e_5, e_1 \rangle = -\langle D_{e_1} e_1, e_5 \rangle = -h_{11}^5 = 0, \\ p_2 &= -\langle D_{e_1} e_5, e_2 \rangle = \langle D_{e_1} e_2, e_5 \rangle = h_{12}^5 = 0, \\ p_3 &= \langle D_{e_1} e_5, e_3 \rangle = -\langle D_{e_1} e_3, e_5 \rangle \\ &= -\frac{a_{uuvv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}}, \\ p_4 &= -\langle D_{e_1} e_5, e_4 \rangle = \langle D_{e_1} e_4, e_5 \rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} - a_{uuvv} - Aa_{uvv} - Ba_{vv} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$A = -\frac{aa_{uuv} - a_v a_{uu}}{aa_{uv} - a_u a_v} \quad \text{ve} \quad B = \frac{a_u a_{uuv} - a_{uu} a_{uv}}{aa_{uv} - a_u a_v}$$

dir. Öyleyse

$$D_{e_1} e_5 = -\frac{a_{uuvv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}} e_3 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} - a_{uuvv} - Aa_{uvv} - Ba_{vv} \right) e_4$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$D_{e_2} e_5 = \frac{a_{uuvv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}} e_3 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} + a_{uuvv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv} \right) e_4$$

elde edilir.

$$E_1 = G_*(e_1) = D_{e_1} e_5, \quad E_2 = G_*(e_2) = D_{e_2} e_5, \quad E_3 = e_1, \quad E_4 = e_2$$

alalım. O zaman $\{E_1, E_2\}$, $S_2^4(1)$ içinde $G(M)$ yüzeyinin teğet uzayının bir çatısı ve $\{E_3, E_4\}$ de $G(M)$ yüzeyinin normal uzayının bir çatısıdır.

$$E_1 = -\frac{R}{\sqrt{2a}} e_3 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} - R \right) e_4 \quad \text{ve} \quad E_2 = \frac{R}{\sqrt{2a}} e_3 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} + R \right) e_4$$

olarak yazılır. Burada $R = a_{uuvv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}$ dir. O zaman

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \frac{2bR - 1}{2ab^2}, \quad \langle E_1, E_2 \rangle = -\frac{1}{2ab^2}, \quad \langle E_2, E_2 \rangle = -\frac{2bR + 1}{2ab^2}$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki G nin indirgenmiş metriği dejenere olmasın. O zaman $R \neq 0$ ve G , $S_2^4(1)$ de bir Lorentz yüzeydir. $G(M)$ nin ikinci temel formu \tilde{h} nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11}^3 &= \langle D_{E_1} E_1, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_1} e_5), e_1 \rangle = \frac{R + 1}{(2a)^{3/2}}, \\ \tilde{h}_{11}^4 &= -\langle D_{E_1} E_1, E_4 \rangle = -\langle D_{e_1}(D_{e_1} e_5), e_2 \rangle = \frac{R - 1}{(2a)^{3/2}}, \\ \tilde{h}_{12}^3 &= \langle D_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_2} e_5), e_1 \rangle = -\frac{R - 1}{(2a)^{3/2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{h}_{12}^4 = -\tilde{h}_{22}^3 = -\frac{R+1}{(2a)^{3/2}}, \quad \tilde{h}_{22}^4 = \frac{R-1}{(2a)^{3/2}}$$

bulunur.

$\tilde{g}_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ ve \tilde{g}^{ij} , (\tilde{g}_{ij}) matrisinin tersinin bileşenleri olsun. O zaman $G(M)$ nin ortalama eğrilik vektörü \tilde{H}

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij}^\alpha E_\alpha = \frac{1}{2R\sqrt{2a}}(e_1 + e_2)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\langle \tilde{H}, \tilde{H} \rangle = 0$ ve $\tilde{H} \neq 0$ olduğundan $G(M)$, $S_2^4(1)$ de bir marginally trapped Lorentz yüzeydir.

Durum 2. Kabul edelim ki $\langle Q''(v), Q''(v) \rangle = -1$ olsun.

$$e_3 = Q''(v) - \frac{a_v}{a} Q'(v)$$

alalım. Burada $\langle e_3, P'(u) \rangle = \langle e_3, Q'(v) \rangle = 0$ ve $\langle e_3, e_3 \rangle = -1$ olduğu görülür. Böylece e_3 vektörü M yüzeyinin normal uzayında bir timelike vektördür.

$$W = P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) + \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a} e_3$$

olsun. O zaman

$$\langle W, P'(u) \rangle = \langle W, Q'(v) \rangle = \langle W, e_3 \rangle = 0$$

ve

$$\langle W, W \rangle = \left(\frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a} \right)^2 = a^4 K^2$$

olarak bulunur. Kabul edelim ki $K \neq 0$ olsun. O zaman, W vektörü M yüzeyinin normal uzayında e_3 vektörüne dik olan spacelike bir vektördür.

$$b = \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{a}, \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ öyle ki } \varepsilon b > 0$$

ve

$$\begin{aligned} e_4 &= \frac{\varepsilon}{b} \left(P''(u) - \frac{a_u}{a} P'(u) \right) + \varepsilon e_3, \\ e_5 &= P^{(3)}(u) - \frac{aa_{uv} - a_u a_v}{aa_{uv} - a_u a_v} P''(u) + \frac{a_u a_{uv} - a_{uu} a_v}{aa_{uv} - a_u a_v} P'(u) \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\langle e_5, P'(u) \rangle = \langle e_5, P''(u) \rangle = \langle e_5, Q'(v) \rangle = \langle e_5, Q''(v) \rangle = 0$$

ve $\{e_3, e_4, e_5\}$, M yüzeyinin normal uzayının işareti $(-, +, +)$ olan ortonormal bir çatısıdır.

M yüzeyinin ikinci temel formu h nin bileşenleri

$$\begin{aligned} h_{11}^3 &= -\langle D_{e_1} e_1, e_3 \rangle = -\frac{1}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_3 \rangle = \frac{1-b}{2a}, \\ h_{11}^4 &= \langle D_{e_1} e_1, e_4 \rangle = \frac{1}{2a} \langle P''(u) + Q''(v), e_4 \rangle = \frac{\varepsilon b}{2a}, \\ h_{12}^3 &= -\langle D_{e_1} e_2, e_3 \rangle = -\frac{1}{2a} \langle P''(u) - Q''(v), e_3 \rangle = -\frac{1+b}{2a}, \\ h_{12}^4 &= \langle D_{e_1} e_2, e_4 \rangle = \frac{1}{2a} \langle P''(u) - Q''(v), e_4 \rangle = \frac{\varepsilon b}{2a}, \\ h_{22}^3 &= h_{11}^3, \quad h_{22}^4 = h_{11}^4, \quad h_{11}^5 = h_{12}^5 = h_{22}^5 = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

M yüzeyinin $S_2^4(1)$ uzayına tanımlı Gauss-like dönüşümünü

$$G = e_5$$

olarak tanımlayalım.

$$D_{e_1} e_5 = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4 + p_5 e_5$$

olarak yazılabilir. O zaman $p_5 = 0$,

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle D_{e_1} e_5, e_1 \rangle = -\langle D_{e_1} e_1, e_5 \rangle = -h_{11}^5 = 0, \\ p_2 &= -\langle D_{e_1} e_5, e_2 \rangle = \langle D_{e_1} e_2, e_5 \rangle = h_{12}^5 = 0, \\ p_3 &= -\langle D_{e_1} e_5, e_3 \rangle = \langle D_{e_1} e_3, e_5 \rangle \\ &= \frac{a_{uuv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}}, \\ p_4 &= \langle D_{e_1} e_5, e_4 \rangle = -\langle D_{e_1} e_4, e_5 \rangle \\ &= -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} + a_{uuv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada

$$A = -\frac{aa_{uuv} - a_v a_{uu}}{aa_{uv} - a_u a_v} \quad \text{ve} \quad B = \frac{a_u a_{uuv} - a_{uu} a_{uv}}{aa_{uv} - a_u a_v}$$

dir. Öyleyse

$$D_{e_1} e_5 = \frac{a_{uuv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}} e_3 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}} \left(\frac{1}{b} + a_{uuv} + Aa_{uvv} + Ba_{vv} \right) e_4$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$D_{e_2}e_5 = -\frac{a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}}{\sqrt{2a}}e_3 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{b} - a_{uuvv} - Aa_{uuv} - Ba_{vv}\right)e_4$$

elde edilir.

$$E_1 = G_*(e_1) = D_{e_1}e_5, \quad E_2 = G_*(e_2) = D_{e_2}e_5, \quad E_3 = e_1, \quad E_4 = e_2$$

alalım. O zaman $\{E_1, E_2\}$, $S_2^4(1)$ içinde $G(M)$ yüzeyinin teğet uzayının bir çatısı ve $\{E_3, E_4\}$ de $G(M)$ yüzeyinin normal uzayının bir çatısıdır.

$$E_1 = \frac{R}{\sqrt{2a}}e_3 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{b} + R\right)e_4 \quad \text{ve} \quad E_2 = -\frac{R}{\sqrt{2a}}e_3 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{b} - R\right)e_4$$

olarak yazılır. Burada $R = a_{uuvv} + Aa_{uuv} + Ba_{vv}$ dir. O zaman

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \frac{2bR + 1}{2ab^2}, \quad \langle E_1, E_2 \rangle = \frac{1}{2ab^2}, \quad \langle E_2, E_2 \rangle = \frac{1 - 2bR}{2ab^2}$$

olduğu görülür. Kabul edelim ki G nin indirgenmiş metriği dejenere olmasın. O zaman $R \neq 0$ ve G , $S_2^4(1)$ de bir Lorentz yüzeydir. $G(M)$ nin ikinci temel formu \tilde{h} nin bileşenleri

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11}^3 &= \langle D_{E_1}E_1, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_1}e_5), e_1 \rangle = \frac{R + 1}{(2a)^{3/2}}, \\ \tilde{h}_{11}^4 &= -\langle D_{E_1}E_1, E_4 \rangle = -\langle D_{e_1}(D_{e_1}e_5), e_2 \rangle = \frac{R - 1}{(2a)^{3/2}}, \\ \tilde{h}_{12}^3 &= \langle D_{E_1}E_2, E_3 \rangle = \langle D_{e_1}(D_{e_2}e_5), e_1 \rangle = -\frac{R - 1}{(2a)^{3/2}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{h}_{12}^4 = -\tilde{h}_{22}^3 = -\frac{R + 1}{(2a)^{3/2}}, \quad \tilde{h}_{22}^4 = \frac{R - 1}{(2a)^{3/2}}$$

bulunur.

$\tilde{g}_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ ve \tilde{g}^{ij} , (\tilde{g}_{ij}) matrisinin tersinin bileşenleri olsun. O zaman $G(M)$ nin ortalama eğrilik vektörü \tilde{H}

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij}^\alpha E_\alpha = -\frac{1}{2R\sqrt{2a}}(e_1 + e_2)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\langle \tilde{H}, \tilde{H} \rangle = 0$ ve $\tilde{H} \neq 0$ olduğundan $G(M)$, $S_2^4(1)$ de bir marginally trapped Lorentz yüzeydir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.2. \mathbb{R}_2^5 uzayında, $P(u)$ bi-null yay parametresiyle parametrelendirilmiş bi-null eğri, $Q(v)$ pseudo yay parametresiyle parametrelendirilmiş bir null eğri ve $\langle P'(u), Q'(v) \rangle \neq 0$ olmak üzere M Lorentz stationary yüzeyi

$$f(u, v) = P(u) + Q(v)$$

olarak verilsin. O zaman Gauss eğriliği $K \neq 0$ olmak üzere indirgenmiş metriğin dejenere olmadığı noktalarda M yüzeyinin Gauss-like dönüşümü $S_2^4(1)$ pseudo küresinde bir marginally trapped Lorentz yüzeyi verir.



8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null eğri kavramı literatüre kazandırılmıştır. Daha sonra sabit eğrilikli bi-null eğrilerin parametrik denklemi elde edilmiş ve örnekleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bi-null eğrilerin konum vektörüne göre sınıflandırılması yapılmıştır. Buna göre \mathbb{R}_2^5 uzayında üç tip oskületör bi-null eğri ve rektifiyan bi-null eğri kavramları literatüre kazandırılırken \mathbb{R}_2^5 uzayında normal bi-null eğri olmadığı gösterilmiştir. Beşinci bölümde, bi-null eğrilerin başka bir sınıflandırılması olan k -tip bi-null slant helisler çalışılmıştır. \mathbb{R}_2^5 uzayında bu tip eğriler arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur.

Eğriler yardımıyla elde edilen yüzeylerden en bilindik olanlarından biri doğrusal(regle) yüzeyleridir. Altıncı bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null eğrilerden elde edilen regle yüzeyleri çalışılmıştır. Bu bölümde minimal, paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip ve normal eğrilik tensörü sıfır olan regle yüzeyleri elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde, flat marginally trapped yüzeylerinin bir sınıfı da elde edilmiştir. Stationary yüzeyler de eğrilerden elde edilebilen yüzey örneklerinden biridir. Yedinci bölümde, \mathbb{R}_2^5 uzayında bi-null eğrilerden elde edilen stationary yüzeyleri çalışılmıştır. Bu bölümde Lorentz stationary yüzeyler için Gauss-like dönüşümü olarak adlandırılan Gauss dönüşümüne benzer bir dönüşüm tanımlanmıştır. İki bi-null eğriden elde edilen Lorentz stationary yüzeyler için Gauss-like dönüşümü $S_2^4(1)$ de bir Lorentz stationary yüzey olduğu görülmüştür. Ayrıca bir bi-null eğri ve bir null eğriden elde edilen Lorentz stationary yüzeyler için Gauss-like dönüşümü $S_2^4(1)$ de bir marginally trapped yüzey olduğu görülmüştür. Böylece $S_2^4(1)$ üzerinde Lorentz stationary yüzey ve marginally trapped yüzey örnekleri literatüre kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Kuhnel, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.
- [2] Montiel, S., Ros, A., Curves and surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.
- [3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.
- [4] Chen, B. Y., When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. Amer. Math. Montly. 110: 147-152, 2003.
- [5] Grbovic, M., Nesovic, E., Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space. Math. Commun. 17: 655-664, 2012.
- [6] İlarıslan, K., Spacelike normal curves in Minkowski space \mathbb{E}_1^3 . Turkish J. Math. 29(1): 53-63, 2005.
- [7] İlarıslan, K., Nesovic, E., Timelike and null normal curves in Minkowski space \mathbb{E}_1^3 . Indian J. Pure Appl. Math. 35(7): 881-888, 2004.
- [8] İlarıslan, K., Nesovic, E., Some characterizations of rectifying curves in the Euclidean space \mathbb{E}^4 . Turk. J. Math. 32: 21-30, 2008.
- [9] İlarıslan, K., Nesovic, E., Some characterizations of null, pseudo null and partially null rectifying curves in Minkowski space-time. Taiwanese J. Math. 12(5):1035-1044, 2008.
- [10] İlarıslan, K., Nesovic, E., Spacelike and timelike normal curves in Minkowski space-time. Publ. Inst. Math. Belgarde. 85(99): 111-118, 2009.
- [11] İlarıslan, K., Nesovic, E., The first kind and second kind osculating curves in Minkowski space-time. Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 62(6): 677-686, 2009.

- [12] İlarıslan, K., Nesovic, E., Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time. *Proc. Est. Acad. Sci.* 61(1): 1-8, 2012.
- [13] İlarıslan, K., Nesovic, E., Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time. *Int. Electron. J. Geom.* 7(1): 26-35, 2014.
- [14] İlarıslan, K., Nesovic, E., Petrovic-Torgasev, M., Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad J. Math.* 33(2): 23-32, 2003.
- [15] Lancret, M. A., Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires présentés à l'Institut 1: 416-454, 1806.
- [16] Klein, F., Lie, S., Über diejenigen ebenen Curven welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergeben. *Math. Ann.* 4(1): 50-84, 1871.
- [17] Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., Null helices in Lorentzian space forms. *Internat. J. Modern Phys. A* 16(30): 4845-4863, 2001.
- [18] Petrovic-Torgasev, M., Sucurovic, E., W-curves in Minkowski space-time. *Novi Sad J. Math.* 32: 55-65, 2002.
- [19] Petrovic-Torgasev, M., İlarıslan, K., Nesovic, E., On partially null and pseudo null curves in the semi-Euclidean space \mathbb{R}_2^4 . *J. Geom.* 84: 106-116, 2005.
- [20] Synge, J. L., Timelike helices in flat space-time. *Proc. Roy. Irish Academy.* A65: 27-42, 1967.
- [21] Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space. Doctoral thesis. K. U. Leuven, Fac. of Science, Leuven, 1995.
- [22] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces. *Turkish J. Math.* 28: 531-537, 2004.
- [23] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarıslan, K., Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish J. Math.* 34: 261-273, 2010.

- [24] Ali, A., Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *J. Egyptian Math. Soc.* 20: 1–6, 2012.
- [25] Kula, L., Yaylı, Y., On slant helix and its spherical indicatrix. *Appl. Math. Comput.* 169: 600–607, 2005.
- [26] M. Ergüt, M., Öztekin, H. B., Aykurt, S., Non-null k -slant helices and their spherical indicatrices in Minkowski 3-space. *J. Adv. Res. Dyn. Control. Syst.* 2: 1–12, 2010.
- [27] Ali, A. T., Lopez, R., Turgut, M., k -type partially null and pseudo null slant helices in Minkowski 4-space. *Math. Commun.* 17: 93–103, 2012.
- [28] Nesovic, E., Koç Öztürk, E. B., Öztürk, U., k -type null slant helices in Minkowski space-time. *Math. Commun.* 20: 83–95, 2015.
- [29] Alías, L. J., Ferrández, A., Lucas, P., Meroño, M. A., On the Gauss map of B -scrolls. *Tsukuba J. Math.* 22(2), 371–377, 1998.
- [30] Ferrández, A., Lucas, P., On the Gauss map of B -scrolls in 3-dimensional Lorentzian space forms. *Czechoslovak Math. J.* 50(4): 699-704, 2000.
- [31] Graves, L. K., Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 252: 367–392, 1979.
- [32] Anciaux, H., *Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry.* World Sci. 2011.
- [33] Chen, B.-Y., *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -Invariants and Applications.* World Sci. 2011.
- [34] Sakaki, M., Lorentzian stationary surfaces in 4-dimensional space forms of index 2. *Tsukuba J. Math.* 35(2): 215-229, 2011.
- [35] Sakaki, M., Lorentzian stationary surfaces and null curves in R_2^4 . *J. Geom.* 105: 359-368, 2014.
- [36] Sakaki, M., Bi-null Cartan curves in semi-Euclidean spaces of index 2. *Beitr. Algebra Geom.* 53(2): 421–436, 2012.

- [37] Uçum, A., Sakaki, M., İlarıslan, K., Bi-null curves with constant curvatures in \mathbb{R}_2^5 . *J. Geom.* 110: 8 pp, 2019.
- [38] İlarıslan, K., Sakaki, M., Uçum, A., On osculating, normal and rectifying bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . *Novi Sad J. Math.* 48(1): 9-20, 2018.
- [39] Uçum, A., İlarıslan, K., Sakaki, M., k -type bi-null slant helices in \mathbb{R}_2^5 . *J. Geom.* 108: 913–924, 2017.
- [40] Sakaki, M., Uçum, A., İlarıslan, K., Ruled surfaces with bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser* 66: 485–493, 2017.
- [41] Uçum, A., Sakaki, M., İlarıslan, K., Lorentzian stationary surfaces and bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 14 (10): 11 pp, 2017.
- [42] Duggal, K. L., Bejancu, A., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications.* 1-76. Kluwer Academic Publisher, London, 1996.
- [43] Şahin, B., *Manifoldların diferensiyel geometrisi.* Nobel Kitapevi, Ankara, 2012.
- [44] Anciaux, H., Marginally trapped submanifolds in space forms with arbitrary signature. *Pacific J. Math.* 272: 257-274, 2014.
- [45] Chen, B. Y., Classification of marginally trapped surfaces of constant curvature in Lorentzian complex plane. *Hokkaido Math. J.* 38: 361-408, 2009.
- [46] Chen, B. Y., Van der Veken, J., Marginally trapped surfaces in Lorentzian space forms with positive relative nullity. *Class. Quantum Gravity.* 24: 551-563, 2007.
- [47] Haesen, S., Ortega, M., Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space. *Class. Quantum Gravity.* 24: 5441-5452, 2007.
- [48] Senovilla, J., Trapped surfaces, horizons and exact solutions in higher dimensions. *Class. Quantum Gravity.* 19: L113-L119, 2002.

- [49] Turgay, N. C., On the marginally trapped surfaces in 4-dimensional spacetimes with finite type Gauss map. *Gen. Relativity Gravitation*. 46(1): 1621-1637, 2014.
- [50] Duggal, K. L., Jin D. H., Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds. World Scientific, Singapore, 2007.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali UÇUM

Doğum Yeri : İstanbul

Doğum Tarih : 20.09.1990

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Esenyurt Lisesi, Haziran 2007

Lisans : Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Haziran 2012

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, Eylül 2015

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2013

Tezden Çıkan Yayınlar:

1. Uçum, A., İlarıslan, K., Sakaki, M., k-type bi-null slant helices in \mathbb{R}_2^5 . J. Geom. 108: 913-924, 2017.
2. Sakaki, M., Uçum, A., İlarıslan, K., Ruled surfaces with bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 66: 485-493, 2017.
3. Uçum, A., Sakaki, M., İlarıslan, K., Lorentzian stationary surfaces and bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 14 (10): 11 pp, 2017.
4. İlarıslan, K., Sakaki, M., Uçum, A., On osculating, normal and rectifying bi-null curves in \mathbb{R}_2^5 . Novi Sad J. Math. 48(1): 9-20, 2018.
5. Uçum, A., Sakaki, M., İlarıslan, K., Bi-null curves with constant curvatures in \mathbb{R}_2^5 . J. Geom. 110: 8 pp, 2019.