T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

KÜME DEĞERLİ F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

Gülhan MINAK

OCAK - 2020

Matematik Anabilim Dalında Gülhan MINAK tarafından hazırlanan KÜME DEĞERLİ F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE SABİT NOKTALARI ÜZERİNE Adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Doktora Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. İshak ALTUN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Duran TÜRKOĞLU	_______________
Üye	:	Prof. Dr. Ali OLGUN	_______________
Üye	:	Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK	_______________
Üye(Danışman)	:	Prof. Dr. İshak ALTUN	_______________
Üye	:	Doç. Dr. Murat OLGUN	_______________

14.01.2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KÜME DEĞERLİ F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE SABİT NOKTALARI ÜZERİNE

MINAK, Gülhan
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. İshak ALTUN
Ocak 2020, 115 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Alışılagelmiş biçimiyle ilk ve son bölümler sırasıyla giriş ve tartışma-sonuç için ayrılmıştır.

İkinci bölümde metrik ve topolojik kavramların yanı sıra sabit nokta teorinin tarihsel bir gelişimi ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Daha sonra küme değerli dönüşüm ve Hausdorff metriği ile ilgili temel özellikler ve küme değerli dönüşümler için bazı önemli sabit nokta teoremleri hatırlatılmıştır.

Araştırma bulguları adı altında verilen üçüncü bölüm ise orijinal çalışmalara ayrılmıştır. Burada, küme değerli F-büzülme, genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme, küme değerli lineer olmayan F-büzülme, küme değerli hemen hemen F-büzülme ve küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme kavramları tanımlanmıştır. Bu tür dönüşümlerin kompakt küme değerli olması ile kapalı ve sınırlı küme değerli olması durumları için sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca Hausdorff metriğini kullanmaksızın elde edilen ve ikinci bölümde bahsi geçen Feng-Liu, Klim-Wardowski ve

Ćirić sabit nokta teoremlerinin F-büzülme versiyonları da sunulmuştur. Elde edilen tüm sonuçların anlamlı olduğunu gösteren açıklayıcı ve karşılaştırmalı örnekler de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Küme Değerli Dönüşüm, Hausdoff metrik, F-büzülme dönüşümü

ABSTRACT

ON MULTIVALUED F-CONTRACTION MAPPINGS AND THEIR FIXED POINTS

MINAK, Gülhan
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. İshak ALTUN
January 2020, 115 pages

This thesis consists of four chapters. In the usual way, the first and last chapters are reserved for introduction and discussion and conclusion, respectively.

In the second part, besides the metric and topological concepts, a historical development and application areas of fixed point theory are mentioned. Then, some important fixed point theorems for multivalued mappings and basic properties related to multivalued mappings and Hausdorff metric are recalled.

The third section, which is named as the research findings, is devoted to the original studies. Here, the concepts of multivalued F-contraction, generalized multivalued F-contraction, multivalued nonlinear F-contraction, multivalued almost F-contraction and multivalued nonlinear almost F-contraction have been defined. Fixed point theorems have been obtained for these types of mappings being compact set valued and closed and bounded set valued cases. In addition, F-contraction versions of the Feng-Liu, Klim-Wardowski and Ćirić fixed point theorems mentioned in the second chapter, which are obtained without using Hausdorff metric, are also presented. Explanatory and comparative examples showing that all the results obtained are meaningful are also given.

Key Words: Fixed point, multivalued mapping, Hausdorff metric, F-contraction mapping

TEŞEKKÜR

İlk olarak doktora tez konumum belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, yüksek lisans ve doktora çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışmanım sayın hocam Prof. Dr. İshak Altun'a teşekkürlerimi sunarım.

Bunun yanı sıra doktora eğitim boyunca 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak eğitimim boyunca her türlü desteği veren sevgili anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
(X,τ)	Topolojik uzay
(X,d)	Metrik uzay
$D(x,A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\mathscr{P}(X)$	X in tüm alt kümelerinin sınıfı
$\mathscr{C}(X)$	X in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı
$\mathscr{K}(X)$	X in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerinin sınıfı
$\mathscr{C}\mathscr{B}(X)$	X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfı
H	Pompeiu-Hausdorff Metriği

1 . GİRİŞ

Diferansiyel denklemler için Cauchy'nin çalışmaları varlık teoremleri için temel bir alan teşkil etmektedir. Bu çalışmaların aşağıda bahsedilen konularla ilişkili olduğu bilinmektedir.

1. Cauchy-Lipschitz varlık ve teklik teoremleri,
2. Cauchy-Picard varlık ve teklik teoremleri,
3. Analitik denklemler için Cauchy-Majorant metodu,
4. Cauchy-Poincare küçük parametreler metodları.

Cauchy-Lipschitz varlık ve teklik teoremleri hakkındaki ilk bilgilere sahip olan bilim adamı L. Euler'dir. Ancak, A. L. Cauchy (1844), f sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

şeklindeki diferansiyel denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini araştıran ilk matematikçidir. R. Lipschitz (1877), günümüzde aşağıda ifade edilen "Lipschitz koşulu" olarak bilinen şartı kullanarak Cauchy tarafından verilen bu ispatı daha kolay anlaşılır hale getirmiştir.

A, $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesi ve f, bu küme üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve d, $\mathbb{R}^n$ üzerinde her $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlı Öklid metriği olmak üzere,

$$|f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y)$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa, o zaman f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Lipschitz'in bu koşulundan kısa bir süre sonra G. Peano (1890), sadece f fonksiyonunun sürekliliğini göz önüne alarak,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

şeklindeki diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için önemli bir sonuç oluşturdu. Aslında, Peano'nun bu sonucu varlık metotlarında kullanılan modern sabit nokta teori ile çok yakından bağlantısı bulunmaktadır. Fakat, Cauchy'den daha önce Cauchy-Picard metodunun kullanıldığını hatırlatmak ilginç olacaktır. Örneğin, J. L. Liouville (1838), ısı iletimi denklemleri için bu metodu kullanmıştır. Yine, Liouville'nin bu makalesinde iterasyonlar tanımlamış ve bir çözüm için Neumann serilerinin düzgün yakınsaklığını ispatlamada kullanılan hesaplamalar elde edilmiştir.

1890 yılında Picard, kısmi diferansiyel denklemlerin yanısıra adi diferansiyel denklemlere bu metotu uygulamaştır. Bu metod daha sonrasında çok geniş kullanım alanına sahip olmuştur. Hatta, 1920 yılında, Lawson, bu iterasyon metodunu kullanarak soyut uzaylarda kapalı fonksiyon teoremi olarak bilinen bir sonuç elde etmiştir. Bu sonuç yakınsaklığın keyfi bir başlangıç değeri için ispatlandığından dolayı uluslararası bir değere sahiptir. Yapılan bu çalışmaların ardından Hildebrant ve Graves, 1929 yılında, Lawson teoreminin lokal bir versiyonunu elde etmiştir.

Bu şekilde bilinen formülasyonlardan biri de 1922 yılında S. Banach tarafından verilmiştir. Bu formülasyon, literatürde "büzülme dönüşüm prensibi" ya da "Banach sabit nokta teoremi" olarak da adlandırılmakta ve bu teorem aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir:

" (X,d) bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Yani her

$x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti var olsun. Bu durumda X de $z = f(z)$ olacak şekilde bir tek z noktası vardır (Bu tür noktalara dönüşümün sabit noktası denilmektedir). Üstelik her $x \in X$ için $\{f^n(x)\}$ dizisi bu z noktasına yakınsar".

Banach sabit nokta teoreminin bir örneği olarak, $f : [a,b] \to [a,b]$ fonksiyonu türevlenebilir ve $sup|f'(x)| < 1$ ise o zaman f bir büzülme dönüşümüdür. O halde, f, $[a,b]$ de bir tek sabit noktaya sahiptir. Dikkat edilmelidir ki, Banach sabit nokta teoremindeki X üzerindeki tamlık şartı kaldırılamaz. Gerçekten, $X = (0,1]$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğine göre $f(x) = x/2$ şeklinde tanımlı f, büzülme dönüşümü olmasına rağmen X de bir sabit noktaya sahip değildir. Ayrıca, bu teoremdeki büzülme sabiti birden büyük veya eşit olsa, hatta $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlasa bile f fönüşümü X de bir sabit noktaya sahip olmayabilir. Gerçekten, $X = [0, \infty)$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğine göre $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ şeklinde tanımlı (sürekli) $f : X \to X$ dönüşümü $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ şartını sağlamasına rağmen f, X de bir sabit noktaya sahip değildir.

Öte yandan, büzülme dönüşüm prensibi, matematikte çok önemli problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için iyi bir araç olduğundan dolayı bu prensip çoğu araştırmacılar tarafından genişletilmiş ve genelleştirilmiştir. 1969 yılında Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak, küme değerli büzülme kavramını verip, büzülme dönüşüm prensibinin küme değerli versiyonunu ispatlamıştır.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\mathscr{P}(X)$, X in boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfını, $\mathscr{B}(X)$, X in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfını, $\mathscr{C}(X)$, X in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfını ve $\mathscr{CB}(X)$ de X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfını göstersin. $T : X \to \mathscr{P}(X)$ dönüşümü için, eğer $x \in Tx$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu noktaya T küme değerli dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin, $X=[0,1]$ olmak üzere $Tx=\left[x^3,x^2\right]$ şeklinde tanımlansın. O zaman $x_1=0$ ve $x_2=1$ bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

(X,d) bir metrik uzay, $A\subseteq X$ ve $x\in X$ olsun. x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$D(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$$

ile tanımlanır. $A,B\in\mathscr{P}(X)$ için

$$\delta(A,B)=\sup\{D(x,B):x\in A\}$$

ve

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}$$

şeklinde tanımlansın. $A,B\in\mathscr{B}(X)$ ise hem $\delta(A,B)$ ve hem de $H(A,B)$ birer reel sayıdır. Ayrıca iyi tanımlı olmaları nedeni ile δ ve H, $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)$ üzerinde birer reel değerli fonksiyondurlar. Yine H, $\mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ üzerinde bir metriktir. Bunun bir metrik olduğu ileriki bölümlerde gösterilecektir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

(X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to\mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$H(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$$

olacak şekilde bir $k\in[0,1)$ sabiti varsa T ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir. Nadler, tam metrik uzayda tanımlı her küme değerli büzülme dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu ispatlamıştır.

Nadler'in bu teoreminden sonra gelişmeye başlayan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori de tek değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremlerine paralel şekilde diferensiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığında da kullanılmaktadır.

1.1. Kaynak Özetleri

Metrik uzay ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar için Bizim'in "Genel Topoloji", Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar", Mucuk'un "Topoloji ve Kategori", Soykan'ın "Metrik Uzaylar ve Topolojisi" ile Istratescu'nun "Fixed Point Theory An Introduction" adlı kitapları kullanılmıştır [1, 2, 3, 4, 5].

F-büzülme dönüşümü kavramı, bu kavramın özellikleri ve bu dönüşümle ilgili sabit nokta sonuçları için sırasıyla, Wardowski'nin "Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces", Mınak, Helvacı ve Altun'un "Ćirić type generalized F-contractions on complete metric spaces and fixed point results" ve Secelean'ın "Iterated function systems consisting of F-contractions" adlı çalışmalarından yararlanılmıştır [6, 7, 8].

Küme değerli dönüşümler için bazı tanımlar ve kavramlar için Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitabı temel alınmıştır [9] . Daha sonra küme değerli dönüşümler için temel sabit noktaları ve aralarındaki ilişkiler için sırasıyla, Berinde ve Berinde'nin " On a general class of multi-valued weakly Picard mappings", Ćirić'in, "Multi-valued nonlinear contraction mappings", Daffer ve Kaneko'nun "Fixed points of generalized contractive multivalued mappings", Du'nun, "On coincidence point and fixed point thms for nonlinear multivalued maps" ve "Some new results and generalizations in metric fixed point theory", Feng ve Liu'nun "Fixed point thms for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings", Klim ve Wardowski'nin "Fixed point thms for set-valued contractions in complete metric spaces", Mizoguchi ve Takahashi'nin "Fixed point thms for multivalued mappings on complete metric spaces", Nadler'in "Multi-valued contraction mappings", Reich'in "Fixed points of contractive functions", "Some fixed point problems" ve "Some problems and results in fixed point theory", Suzuki'nin "Mizoguchi Takahashi's fixed point thm is a real generalization of Nadler's" adlı çalışmalarından faydalanılmıştır [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

Tezin asıl amacını oluşturan çalışmalar için de sırasıyla Altun, Mınak ve Dağ'ın "Multivalued F-contractions on complete metric space", Acar, Durmaz ve Mınak'ın "Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces", Olgun, Mınak ve Altun'un "A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point thms", Altun, Durmaz, Mınak ve Romaguera'nın "Multivalued almost F-contractions on complete metric spaces", Mınak, Altun ve Romaguera'nın "Recent developments about multivalued weakly Picard operators", Mınak, Olgun ve Altun'un "A new approach to fixed point thms for multivalued contractive maps", Altun, Mınak ve Olgun'un "Fixed points of multivalued nonlinear F-contractions on complete metric spaces" ve Altun, Olgun ve Mınak'ın "On a new class of multivalued weakly Picard operators on complete metric spaces" adlı çalışmalarından yararlanılmıştır [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30] .

1.2. Çalışmanın Amacı

Banach sabit nokta teoreminin en önemli genelleştirmelerinden birini, Wardowski, 2012 yılında bir çalışmasında aşağıdaki şekilde vermiştir: "(X,d) tam bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer T bir F büzülme dönüşümü, yani, $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ sabiti var ise o zaman T dönüşümü X de tek bir sabit z noktasına sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit z noktasına yakınsar."

Daha sonra bu teorem pek çok yazar tarafından genelleştirilmiş, uygulamaları yapılmış, farklı uzaylarda ispatları verilmiştir. Bu tez çalışmasında küme değerli dönüşümler için temel sabit nokta teoremlerini detaylı bir şekilde irdeleyerek bunların F-büzülme versiyonları göz önüne alınıp yeni sabit nokta sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmıştır.

2 . MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümün amacı, tezin okunulabilirliğini ve anlaşılabilirliğini sağlamak amacıyla literatürde var olan ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve bunların bilinen sonuçlarını hatırlatmak ve kavramlar arasında birlikteliği sağlamaktır.

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca sıkça kullanılacak olan, metrik uzay, metrik uzayda açık ve kapalı küme ve metrik uzayın topolojisi, metrik uzayda yakınsaklık, Cauchy dizisi, tamlık kavramı ve bazı topolojik kavramlar hatırlatılmıştır.

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir X kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir;

a) $d(x,y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,

b) her $x,y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

c) her $x,y,z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Tanım 2.1.2. (X,d) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $r > 0$ olmak üzere

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3. (X,d) bir metrik uzay ve U, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, her $x \in U$ için $B(x,r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa U kümesine açık küme denir. $K \subseteq X$ olmak üzere, eğer $X \backslash K$ kümesi açık ise K kümesine kapalıdır denir.

Önerme 2.1.1. (X,d) *bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

a) (X,d) *uzayındaki her açık yuvar açık bir kümedir.*

b) (X,d) *uzayındaki her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.*

Tanım 2.1.4. X boş olmayan bir küme ve τ, X in bazı alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

a) $\emptyset$ ve X kümeleri τ nun elemanıdır,

b) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesit kümesi τ nun elemanıdır,

c) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşim kümesi τ nun elemanıdır,

şartlarını sağlıyorsa o zaman τ sınıfına X kümesi üzerinde bir topoloji, (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Eğer τ nun her elemanı β sınıfının bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ topolojisi için bir tabandır denir.

Tanım 2.1.6. Bir (X,τ) topolojik uzayında τ nun elemanlarına açık kümeler denir. $A \subseteq X$ için eğer $X \backslash A$ kümesi açık ise A kümesine kapalı küme denir. A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine A kümesinin içi denir ve A^o ile gösterilir. A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. $x \in X$ olmak üzere x noktasını içeren her U açık kümesi için $(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. (X,τ) bir topolojik uzay, $\{x_n\}$, terimleri X de olan bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in U$ olacak şekildeki her U açık kümesi ve $n \geq n_0$ özelliğineki her n doğal sayısı için $x_n \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir. Bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yada $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.8. (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x) \in V$ özelliğindeki her bir $V \in \sigma$ kümesi için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.9. (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. (X,τ_1) uzayında x noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için (Y,τ_2) uzayında $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyor ise f fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir. f fonksiyonu X uzayının her noktasında dizisel sürekli ise f ye X de dizisel süreklidir veya kısaca dizisel sürekli denir.

Uyarı 1. Her sürekli fonksiyon dizisel sürekli olmasına rağmen tersi genelde doğru değildir. Fakat, metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik kavramları birbirine denktir.

Tanım 2.1.10. (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ boş olmayan iki küme olsun. Eğer,

$$\{d(a,b) : a,b \in A\}$$

kümesinin bir üst sınırı varsa A kümesine sınırlı küme, aksi takdirde A kümesine sınırsız küme denir. Bu durumda

$$d(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}$$

değerine de A kümesinin çapı denir. Herhangi bir x noktasının A kümesine uzaklığı $D(x,A)$ simgesi ile gösterilir ve

$$D(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

olarak tanımlanır. A ve B kümelerinin birbirine olan uzaklıkları da $D(A,B)$ simgesi ile gösterilir ve

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.11. (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ kümesi } (X,d) \text{ uzayında açık}\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu X üzerindeki τ_d topolojisine metrik topoloji veya d metriğinin ürettiği topoloji denir.

Tanım 2.1.12. (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$, terimleri X de olan bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her n doğal sayısı için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsıyor denir. Bu takdirde, x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir ve bu durum $x_n \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.1. *Metrik uzayda yakınsak olan her dizinin limiti tektir.*

Tanım 2.1.13. (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $m > n \geq n_0$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise o zaman bu uzaya tam metrik uzay denir.

Teorem 2.1.2. *Metrik uzayında yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Önerme 2.1.2. *(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) < \infty$$

ise, o zaman $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.14. (X,d) ve (Y,e) iki metrik uzay, $f : (X,d) \to (Y,e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa, diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $d(x_0,x) < \delta$ olduğunda $e(f(x_0),f(x)) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.15. (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap A \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına A nın bir yığılma noktasıdır denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir. $A \cup A'$ kümesine de A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.3. *(X,d) metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in A'$ olması için gerek ve yeter şart A kümesinde terimleri x den farklı ve $x_n \to x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisinin var olmasıdır.*

Teorem 2.1.4. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde A kümesinde bir $\{x_n\}$ dizisinin var olmasıdır.*

Uyarı 2. (X,τ) topolojik uzayında $x \in \overline{A}$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde A içinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulunmayabilir. Örneğin,

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$ sayılabilir tümleyenler uzayı için $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0,1)$ kümesinde 2 noktasına yakınsayan hiçbir dizi yoktur.

Sonuç 2.1.1. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda A kapalıdır ancak ve ancak A daki yakınsak her dizinin limiti A kümesindedir.*

Teorem 2.1.5. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$ dır.*

Teorem 2.1.6. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $D(x,A) = 0$ dır.*

Sonuç 2.1.2. *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in A$ dır ancak ve ancak $D(x,A) = 0$ dır.*

Tanım 2.1.16. Bir (X,τ) topolojik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{U_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ kümesi için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

oluyorsa $\{U_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer, açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{U_{i_k} : k = 1,2,\cdots,n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye A kümesinin sonlu bir alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.17. (X,τ) bir topolojik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer, X kompakt bir küme ise (X,τ) topolojik uzayına kompakt topolojik uzay denir.

Teorem 2.1.7. *Kompakt topolojik uzayın kapalı her alt kümesi de kompaktır.*

Tanım 2.1.18. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeler varsa (X,τ) ya Hausdorff uzay denir.

Teorem 2.1.8. (X,τ) *Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır.*

Teorem 2.1.9. (X,τ) *bir topolojik uzay, A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise $f(a) = \sup f(A)$ ve $f(b) = \inf f(A)$ olacak şekilde $a,b \in A$ vardır.*

Teorem 2.1.10. *Bir (X,d) metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Teorem 2.1.11. (X,d) *bir metrik uzay, $x \in X$ ve A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. O zaman $d(x,a) = D(x,A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.*

Uyarı 3. (X,d) metrik uzay, $A \subseteq X$ kompakt ve $x \in X$ olsun. O zaman $d(x,A) = d(x,a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. A nın kompakt olmaması halinde (kapalı ve sınırlı olsa bile) bu eşitliği sağlayan bir $a \in A$ noktası bulunmayabilir. Örneğin, $X = [0,2]$ kümesi üzerinde

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & , \quad x=y \\ \\ 1+|x-y| & , \quad x\neq y \end{cases}$$

tanımlı d metriğini göz önüne alalım. Bu durumda X üzerindeki topoloji, ayrık topoloji olacağından X in her alt kümesi kapalıdır. Ayrıca X bu metriğe göre sınırlı olduğundan, X in her alt kümesi sınırlıdır. O zaman $A=(0,1)$ kümesi X de kapalı ve sınırlı bir kümedir (ancak kompakt değildir). Diğer taraftan $d(2,A)=2$ olmasına rağmen $d(2,a)=2$ olacak şekillde bir $a\in A$ yoktur.

Tanım 2.1.19. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir $\preceq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve $(X,\preceq)$ ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

a) $\preceq$ yansımalıdır, yani her $x\in X$ için $x\preceq x$ dir.

b) $\preceq$ ters simetriktir, yani her $x,y\in X$ için $x\preceq y$ ve $y\preceq x$ ise $x=y$ dir.

c) $\preceq$ geçişlidir, yani her $x,y,z\in X$ için $x\preceq y$ ve $y\preceq z$ ise $x\preceq z$ dir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Sabit Nokta Teoriye Genel Bakış

Bu kısımda, sabit nokta teori hakkında genel bilgiler verilerek topolojik, ayrık ve metrik sabit nokta teorinin temelini oluşturan bazı sabit nokta teoremlerinden kısaca bahsedilmiştir. Ardından, metrik sabit nokta teorinin tek değerli ve küme değerli dönüşümler açısından gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak, metrik sabit nokta teori ile ilgili son zamanlarda yapılan bazı önemli çalışmalardan bahsedilmiştir.
X boş olmayan bir küme ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0=Tx_0$ özelliğini sağlayan $x_0\in X$ noktaları varsa bu noktalara T nin sabit noktaları denir. Yani T dönüşümü altında değişmeyen noktalar T nin sabit noktalarıdır. Örneğin,

- $X=\mathbb{R}$ olmak üzere $Tx=2x$ şeklinde tanımlanan T dönüşümü için $x=0$ noktası bir sabit noktadır.

- $X=\mathbb{R}$ olmak üzere $Tx=x$ şeklinde tanımlanan T dönüşümü için X kümesinin her noktası bir sabit noktadır.

- $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x + 2$ şeklinde tanımlanan T dönüşümünün X kümesinde hiç bir sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örneklerden de görüleceği gibi bir $T : X \to X$ dönüşümünün bir tek sabit noktası olabilir veya birden çok olabilir veya hiç olmayabilir.
Sabit nokta teori çalışmaları,

- Dönüşümün sabit noktası var mıdır?
- Varsa bu nokta tek midir?
- Bu nokta tek ise nasıl bulunabilir?

sorularına cevap aramaktadır. Tarihsel olarak bu teori üç ana dalda aşağıda ifade edildiği gibi gelişme göstermiştir:

Sabit Nokta Teori		
Topolojik	Ayrık	Metrik
Brouwer (1912)	Kneser (1950)	Banach (1922)
Schauder (1930)	Tarski (1955)	Kannan (1968)
Darbo (1955)	Amann (1977)	Chatterjea (1972)
Krasnoselskii (1955)		Reich (1971)
Mönch (1980)		Hardy-Rogers (1973)
		Ćirić (1972)

Topolojik Sabit Nokta Teori

Brouwer, $\mathbb{R}^n$ kümesinin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Bunun reel eksende özel bir durumu şu şekildedir: $T : [a,b] \to [a,b]$ sürekli bir dönüşüm ise T nin bir sabit noktası vardır. Daha sonra bu teoremde "$\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir Banach uzayı alınabilir mi?" sorusunun cevabı araştırılmıştır. Fakat, Kakutani bu teoremin Banach uzaylarında geçerli olmadığını gösteren aşağıdaki örneği vermiştir:

$(l_2, \|\cdot\|_2)$ Hilbert uzayını ve bunun $C = \{x = \{x_n\} \in l_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını göz önüne alalım. $x \in C$ için

$$Tx = \{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$

ile tanımlanan $T : C \to C$ dönüşümü süreklidir ve üstelik her $x = \{x_n\} \in C$ için

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2 &= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 + ...} \\
&= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + \|x\|_2^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olmaktadır. Şimdi, T nin sabit noktasının var olduğunu kabul edelim ve bu nokta $x_0 = \{x_0^{(n)}\}$ olsun. O zaman $\|x_0\|_2 = \|Tx_0\|_2 = 1$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
Tx_0 &= \{\sqrt{1 - \|x_0\|_2^2}, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\} \\
&= \{0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\} \\
&= x_0 \\
&= \{x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\}
\end{aligned}$$

olduğundan $x_0^{(1)} = 0, x_0^{(2)} = 0, \cdots, x_0^{(n)} = 0 \cdots$ veya $x_0 = \{0, 0, \cdots, 0, \cdots\}$ bulunur. Bu ise $\|x_0\|_2 = 1$ olması ile çelişmektedir.

Ancak yine de Schauder, Brouwer sabit nokta teoremini bazı ek şartlarla birlikte Banach uzayılarına genişletmiştir. Schauder bir Banach uzayının kompakt konveks alt kümesinden kendisine tanımlı sürekli dönüşümlerin sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Schauder'in bu teoremi, bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendisine tanımlı kompakt dönüşümlerin sabit noktası vardır şeklinde de ifade edilmektedir. Ardından Darbo, dönüşümün kompakt olması yerine yoğunlaştırıcı olmasını dikkate alarak Schauder sabit nokta teoremini genişletmiştir. Krasnoselskii ve Mönch'ün çalışmaları da bu yönde çalışmalardır.

Ayrık Sabit Nokta Teori

Bu yöndeki sabit nokta teori çalışmaları, kısmi sıralı bir kümeden kendisine tanımlı dönüşümler üzerine yapılmaktadır. $(X,\preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kneser, eğer her $x \in X$ için $x \preceq Tx$ ve X deki her zincir bir supremuma sahipse, o zaman T nin X de bir sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Ardından, Tarski, X bir tam latis ve T monoton artan bir dönüşüm ise, T nin X de bir sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Son olarak, Amann, T monoton artan, X deki her zincir bir supremuma sahip ve $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, T nin X de bir sabit noktası var olduğunu göstererek ayrık sabit nokta teoriyi katkılar sağlamıştır.

Metrik Sabit Nokta Teori

Bu yöndeki çalışmalar genellikle tam metrik uzaylar üzerinde verilmektedir ve Banach sabit nokta teoremine dayanmaktadırlar. (X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\lambda \geq 0$ sabiti varsa T ye bir Lipschitz dönşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan λ sayılarının en küçüğüne T nin Lipschitz sabiti denir ve genellikle L ile gösterilir. Eğer $L < 1$ ise T ye büzülme, eğer $L \leq 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. Yine $x \neq y$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir. Buna göre her büzülme dönüşümü büzülebilir ve her büzülebilir dönüşüm de genişlemeyendir. 1922 yılında Stefan Banach doktora tezinde aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir. Bu teorem, Stefan Banach'ın adıyla anılmaktadır.

Teorem 2.2.1. *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. O zaman T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ Picard* *iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.*

Ancak büzülebilir dönüşümlerin tam metrik uzaylarda sabit noktası olmayabilir. Bununla birlikte, eğer X kompakt ise büzülebilir dönüşümlerin de sabit noktası var, tek ve hatta her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ Picard iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsadığı Edelstein (1947) tarafından gösterilmiştir.
Banach sabit nokta teoremi, diğerlerinden farklı olarak sabit noktanın varlığının yanı sıra tek olduğunu ve hatta nasıl bulunabileceğini de göstermektedir. Bu düşüncelerle Picard operatör kavramı ortaya çıkmıştır. (X,d) bir metrik uzay $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T nin X de bir tek sabit noktası var ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ Picard iterasyonu dizisi bu sabit noktaya yakınsıyor ise T ye bir Picard operatör denir (Eğer T nin sabit noktaları kümesi boştan farklı ve her Picard iterasyon dizisi T nin bir sabit noktasına yakınsıyor ise T ye zayıf Picard operatör denir). Buna göre tam metrik uzay üzerinde her büzülme dönüşümü Picard operatörüdür.
Bu teoremdeki büzülme koşulu yerine büzülme tip denilen bazı eşitsizlikler kullanılarak da sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Örneğin,

Kannan $(0 \leq \lambda < \frac{1}{2})$
$$d(Tx,Ty) \leq \lambda [d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

Chatterjea $(0 \leq \lambda < \frac{1}{2})$
$$d(Tx,Ty) \leq \lambda [d(x,Ty) + d(y,Tx)]$$

Reich $(\alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \alpha + \beta + \gamma < 1)$
$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta d(x,Tx) + \gamma d(y,Ty)$$

Hardy-Rogers $(a,b,c,d \geq 0,\ a+b+c+d < 1)$
$$d(Tx,Ty) \leq ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty) + d[d(x,Ty) + d(y,Tx)]$$

Ćirić $(0 \leq k < 1)$
$$d(Tx,Ty) \leq k \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \tfrac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)]\}$$

bu eşitsizliklerden bazılarıdır.

Bu teoremlerin ispatları incelendiğinde tam metrik uzayda bu eşitsizliklerden birini sağlayan dönüşümlerin Picard operatör olduğu anlaşılmaktadır. Dikkat edilecek olursa her bir eşitsizliğin sağ tarafındaki terimlerin kat sayıları toplamı 1 den küçüktür. Bu nedenle bu eşitsizliklere büzülme tip denilmektedir. Diğer taraftan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx)$$

eşitsizliğini sağlayan $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa T ye hemen hemen büzülme dönüşümü denir. Bu tanım 2004 yılında Berinde tarafından verilmiştir. Berinde yukarıda metrik sabit nokta teorisi için bahsedilen tüm büzülme tip dönüşümlerinin hemen hemen büzülme olduğunu göstermiştir. Ayrıca tam metrik uzayda hemen hemen büzülme dönüşümlerinin bir sabit noktasının var olduğunu ve hatta her Picard iterasyon dizisinin T nin bir sabit noktasına yakınsadığını da göstermiştir. Yani tam metrik uzayda hemen hemen büzülme dönüşümleri zayıf Picard operatörlerdir.

Yukarıda bahsedilen tüm büzülme tip dönüşümler, kat sayılar sabit olmasından dolayı lineer büzülmeler olarak sınıflandırılmıştır. Bunun yanı sıra uygun fonksiyonlar kullanılarak lineer olmayan büzülmeler de tanımlanmıştır. Örneğin, Boyd-Wong 1969 yılında $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sağdan üst yarı sürekli ve her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ özelliğine sahip fonksiyonları dikkate alarak bir X tam metrik uzaydan kendisine tanımlı, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y))$$

eşitsizliğini sağlayan dönüşümlerin bir tek sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Yine $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan ve her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$ özelliğine sahip fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))$$

eşitsizliğini sağlayan T dönüşümlerinin tam metrik uzayda bir tek sabit noktaya sahip olduğu da Matkowski (1975) tarafından gösterilmiştir. Bu dönüşümlerin de Picard operatör oldukları görülmektedir.

Günümüze kadar bu büzülmelerin daha genel halleri ve bunların çeşitli uzaylardaki karşılıkları üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

Öte yandan, Banach büzülme prensibinin yukarıda bahsedilenlerin dışında farklı pek çok yönde genelleştirilmeleri de mevcuttur. Örneğin, Meir ve Keeler 1969 yılında aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmişlerdir; (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$x,y \in X,\ \varepsilon \le d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow d(Tx,Ty) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa, o zaman T dönüşümü bir Picard operatördür.
Bu şekildeki diğer önemli çalışmalardan birisi de Wardowski'nin 2012 yılındaki çalışmasıdır. Aşağıdaki kısımda bu çalışmaya değinilecektir.

2.3. F-Büzülme Dönüşümleri

Wardowski, 2012 yılında yayınlanan bir çalışmasında aşağıdaki özelliklere sahip fonksiyonları kullanarak yeni bir büzülme çeşidi tanımlamıştır. $\mathscr{F}$ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonların ailesi olsun;

(F1) F kesin artandır. Yani her $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır.

(F2) Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dır ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ dır.

(F3) $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır.

Aşağıdaki lemma, (F2) şartına denk fakat daha basit olan bir şart ile yer değiştirilebileceğini göstermektedir.

Lemma 2.3.1. *$F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon ve $\{\alpha_n\}$, $(0,\infty)$ içinde bir dizi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*
(i) Eğer $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ ise, o zaman $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dır.
(ii) Eğer $\inf F = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ ise, o zaman $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ dır.

İspat. (i) İlk önce $\{\alpha_n\}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Yani $\{\alpha_n\}$ dizisi üstten sınırlı olmasın. O zaman $\alpha_{n_k} \to \infty$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$ dizisinin bir $\{\alpha_{n_k}\}$ alt dizisi mevcuttur. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için $k \geq k_\varepsilon$ olduğunda $\alpha_{n_k} \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $F(\varepsilon) \leq F(\alpha_{n_k})$ olup $F(\varepsilon) \leq \lim_{k\to\infty} F(\alpha_{n_k}) = -\infty$ elde edilir ki bu $F(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir. Dolayısıyla, $\{\alpha_n\}$ dizisi $(0,\infty)$ da sınırlıdır. O halde genelliliği bozmamaksızın $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha \geq 0$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$ dizisinin yakınsak bir $\{\alpha_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Şimdi, kabul edelim ki $\alpha > 0$ olsun ve $\varepsilon < \alpha$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. O zaman $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $\alpha_{n_k} \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. F kesin artan bir fonksiyon olduğundan $F(\alpha - \varepsilon) \leq \lim_{k\to\infty} F(\alpha_{n_k}) = -\infty$ elde edilir ki bu $F(\alpha - \varepsilon) \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir. O halde $\alpha = 0$ dır.

(ii) $\inf F = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olduğunu kabul edelim. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını göz önüne alalım. O zaman $F(\alpha) < -\varepsilon$ olacak şekilde $\alpha > 0$ vardır. Üstelik, her $n \geq n_\alpha$ için $\alpha_n < \alpha$ olacak şekilde bir $n_\alpha \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, her $n \geq n_\alpha$ için $F(\alpha_n) \leq F(\alpha) < -\varepsilon$ elde edilir. O zaman, $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olur. □

Lemma 2.3.1'e göre (F2) şartına denk olan

- $\inf F = -\infty$

veya

- $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olacak şekilde $(0,\infty)$ da bir $\{\alpha_n\}$ dizisi vardır.

şartları alınabilmektedir.

Aşağıda, F-büzülme kavramı ifade edilmekte ve bu büzülme ile ilgili elde edilen özelliklerden bahsedilmektedir. Ayrıca, bu kavram kullanılarak elde edilen sabit nokta sonucuna değinilmektedir.

Tanım 2.3.1. (X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye bir F-büzülme adı verilir.

$F(\alpha) = \ln(\alpha)$, $F(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$, $F(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ ve $F(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ fonksiyonları $\mathscr{F}$ ailesine ait bazı örneklerdir. Eğer T sırasıyla verilen bu örneklere göre bir F-büzülme ise, o zaman $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için sırasıyla literatürde bulunan ve aşağıda verilen bazı farklı büzülme eşitsizlikleri elde edilebilir;

$$d(Tx,Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y) \tag{2.3.2}$$

$$\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{d(Tx,Ty)-d(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{2.3.3}$$

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{[1+\tau\sqrt{d(x,y)}]^2} d(x,y)$$

$$\frac{d(Tx,Ty)[d(Tx,Ty)+1]}{d(x,y)[d(x,y)+1]} \leq e^{-\tau}.$$

Burada dikkat edilmelidir ki $d(Tx,Ty) = 0$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için (2.3.2) eşitsizliği de sağlanır. Böylece, T dönüşümü $L = e^{-\tau}$ sabiti ile birlikte bir büzülme dönüşümü olmaktadır. Dolayısıyla her büzülme dönüşümü $F(\alpha) = \ln\alpha$ olmak üzere bir F-büzülmedir.

Uyarı 4. (F1) ve (2.3.1) eşitsizliğinden her F-büzülme dönüşümü bir büzülebilir dönüşümdür. Yani, T bir F-büzülme ise $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ eşitsizliği sağlanır. Buradan, her F-büzülme dönüşümünün sürekli olduğu görülmektedir.

Uyarı 5. $H,G \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer, her $\alpha > 0$ için $H(\alpha) \leq G(\alpha)$ ve $S = G - H$ azalmayan bir dönüşüm ise o zaman her H-büzülme bir G-büzülmedir. Gerçekten Uyarı 4 gereğince $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$S(d(Tx,Ty)) \leq S(d(x,y))$$

olup

$$\begin{aligned} \tau + G(d(Tx,Ty)) &= \tau + H(d(Tx,Ty)) + S(d(Tx,Ty)) \\ &\leq H(d(x,y)) + S(d(x,y)) \\ &= G(d(x,y)) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde her H-büzülme dönüşümü bir G-büzülmedir. $H(\alpha) = \ln(\alpha)$ ve $G(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ olarak alınırsa, her Banach büzülme dönüşümü, (2.3.3) eşitsizliğini sağlar.

Şimdi 2012 yılında Wardowski tarafından F-büzülme dönüşümleri için verilen teoremi ifade edelim ve bu tez boyunca kolaylık olması bakımından bu teorem, Wardowski sabit nokta teoremi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 2.3.1 (Wardowski [6])**.** *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü F-büzülme olsun. O zaman T nin bir tek sabit noktası vardır. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ Picard iterasyonu dizisi T nin sabit noktasına yakınsar.*

Şimdi F-büzülme kavramından daha genel bir kavram olan Ćirić tip genelleştirilmiş F-büzülme kavramı verilip, bu dönüşüm ile ilgili sabit nokta teoremine değilenilecektir.

Tanım 2.3.2. (X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. Eğer $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\right\}$$

olmak üzere

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye bir Ćirić tip genelleştirilmiş F-büzülme adı verilir.

Teorem 2.3.2. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü Ćirić tip genelleştirilmiş F-büzülme olsun. Eğer T veya F sürekli ise, o zaman T nin bir tek sabit noktası vardır.*

2.4. Küme Değerli Dönüşümler ve Pompeiu-Hausdorff Metriği

Bu kısımda küme değerli dönüşüm, küme değerli dönüşümün sabit noktası, üstten ve alttan yarı süreklilik kavramları kısaca ele alınmaktadır. Ayrıca Hausdorff metriği ve bazı özellikleri verilmektedir.

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise T ye X den Y ye bir küme değerli dönüşüm denir. $T : X \to \mathscr{P}(Y)$ ile gösterilir. Burada $\mathscr{P}(Y)$, Y nin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfıdır. $T : X \to \mathscr{P}(Y)$ küme değerli dönüşümünün tersi

$$(y,x) \in T^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in T$$

şeklinde tanımlanır.

T, X den Y ye bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. T nin x noktasındaki görüntüsü

$$Tx = \{y \in Y : (x,y) \in T\}$$

kümesidir. Yine $A \subseteq X$ için

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$$

kümesi A nın T küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca,

$$\bigcup_{x \in A} Tx = \left\{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\right\}$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
u \in T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } u \in Tx \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } (x,u) \in T \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } x \in T^{-1}(u) \\
& \Leftrightarrow \quad T^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset \\
& \Leftrightarrow \quad u \in \left\{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $B \subseteq Y$ için

$$T^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} T^{-1}(y)$$

kümesine B nin T^{-1} altındaki görüntüsü (veya T altındaki ters görüntüsü) denir. Benzer şekilde

$$\bigcup_{y \in B} T^{-1}(y) = \{x \in X : Tx \cap B \neq \emptyset\}$$

olduğu gösterilebilir.

$T : X \to \mathscr{P}(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya T nin sabit noktası denir. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani

$$F(T) = \{x \in X : x \in Tx\}$$

dir.

Örnek 1. $X = [0,1]$ olmak üzere $T : X \to \mathscr{P}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ [0,1-x] & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $T(0) = \{1\}$, $T((0,\frac{3}{4})) = [0,1]$ ve $T((\frac{3}{4},\frac{7}{8})) = [0,\frac{1}{4})$ olmaktadır. Burada $\frac{1}{2} \in T\frac{1}{2} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{2}$, T nin bir sabit noktasıdır.

Örnek 2. $X = (0,\infty)$ ve $Y = \mathbb{R}$ olmak üzere $T : X \to \mathscr{P}(Y)$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = [e^{-x},1]$ şeklinde tanımlansın. $\ln 2 \in T(\ln 2) = [\frac{1}{2},1]$ olduğundan $\ln 2$, T nin bir sabit noktasıdır.

Tanım 2.4.1. X ve Y iki topolojik uzay ve $T : X \to \mathscr{P}(Y)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü X de kapalı oluyorsa, T ye üsten yarı sürekli, Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de açık ise T ye alttan yarı sürekli dönüşüm denir. Eğer bir küme değerli dönüşüm hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi, üstten veya alttan yarı sürekli dönüşümler birbirlerini gerektirmemektedir.

Örnek 3. $T : [0,1] \to \mathscr{P}([0,1])$

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{2}x\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ [\frac{1}{4},\frac{3}{4}] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ \\ \{\frac{1}{2}(x+1)\} & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir.

Örnek 4. $T:\mathbb{R}\to\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$Tx=\begin{cases}\{0\} & , \quad x\neq 0\\ \\ [-1,1] & , \quad x=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü sıfır noktasında üstten yarı süreklidir fakat sıfır noktasında alttan yarı sürekli değildir.

Örnek 5. $T:\mathbb{R}\to\mathscr{P}(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$Tx=\begin{cases}[-1,1] & , \quad x\neq 0\\ \\ \{0\} & , \quad x=0\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü sıfır noktasında alttan yarı süreklidir ancak sıfır noktasında üstten yarı sürekli değildir.

Örnek 6. $T:[0,1]\to\mathscr{P}([0,1])$

$$Tx=\begin{cases}[0,x] & , \quad 0\leq x<1\\ \\ \{0\} & , \quad x=1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü alttan yarı süreklidir ancak üstten yarı sürekli değildir.

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere, X üzerinde belli özelliklere sahip olan alt kümeleri kolaylık olması bakımından aşağıdaki simgelerle gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(X) &= \{A\subseteq X : A\neq\emptyset \text{ ve sınırlı}\},\\ \mathscr{C}(X) &= \{A\subseteq X : A\neq\emptyset \text{ ve kapalı}\},\\ \mathscr{CB}(X) &= \{A\subseteq X : A\neq\emptyset \text{ ve kapalı ve sınırlı}\},\\ \mathscr{K}(X) &= \{A\subseteq X : A\neq\emptyset \text{ ve kompakt}\}.\end{aligned}$$

O halde $\mathscr{K}(X)\subseteq\mathscr{CB}(X)\subseteq C(X)$ ve $\mathscr{K}(X)\subseteq\mathscr{CB}(X)\subseteq\mathscr{B}(X)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $A,B\in\mathscr{P}(X)$ için δ ve H genişletilmiş reel değerli fonksiyonları

$$\delta(A,B)=\sup_{x\in A}\{D(x,B)\}=\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y)$$

ve

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}d(x,y),\sup_{x\in B}\inf_{y\in A}d(x,y)\right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.
$X=\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki $d(x,y)=|x-y|$ metriğine göre $A=[1,2]$ ve $B=[4,\infty)$ kümeleri için

$$\delta(A,B)=3,\ \delta(B,A)=\infty$$

ve

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=\infty$$

olacağından δ ve H ın $\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmadığı da görülmektedir.Ayrıca, δ fonksiyonunun simetrik olmadığı buradan görülebilir. Yani genelde $\delta(A,B)\neq\delta(B,A)$ dır. Ancak, eğer A ve B kümeleri (X,d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise $\delta(A,B)$, $\delta(B,A)$ ve $H(A,B)$ birer reel sayı olacağından, δ ve H, $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca, $X=\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki $d(x,y)=|x-y|$ metriğine göre $A=[2,4]$ ve $B=(2,4)$ kümeleri için

$$\delta(A,B)=\delta(B,A)=0$$

ve

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=0$$

bulunur. Burada $H(A,B)=0$ olmasına rağmen $A\neq B$ dir. Yani H, $\mathscr{B}(X)$ üzerinde bir metrik değildir.
H fonksiyonu ayrıca aşağıdaki şekilde de ifade edilmektedir.

Teorem 2.4.1. *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere $A,B\in\mathscr{P}(X)$ için*

$$H(A,B)=\sup\{|D(x,A)-D(x,B)|:x\in X\}$$

dir.

Aşağıdaki önermede δ fonksiyonunu bazı özellikleri incelenmiştir.

Önerme 2.4.1. *(X,d) bir metrik uzay ve $A,B,C \in \mathscr{B}(X)$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır.*

1. $\delta(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$
2. $B \subseteq C \Rightarrow \delta(A,C) \leq \delta(A,B)$
3. $\delta(A \cup B, C) = \max\{\delta(A,C), \delta(B,C)\}$
4. $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$

Önerme 2.4.2. *(X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda H, $\mathscr{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir.*

$\mathscr{CB}(X)$ üzerindeki H metriğine Pompeiu-Hausdorff metriği denilmektedir. Ayrıca, Pompeiu-Hausdorff metriğinin d ye bağlı olduğu aşağıdaki örnekle gösterilmektedir. Üstelik, eğer (X,d) tam metrik uzay ise $(\mathscr{CB}(X),H)$ ve $(\mathscr{K}(X),H)$ metrik uzayları da tamdırlar.

Örnek 7. $X = \mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x,y) = |x-y|$ ve

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

metriklerini göz önüne alalım. Bu durumda $A = [0,2]\,, B = [4,9]$ kümeleri için $H_1(A,B) = 7$ ve $H_2(A,B) = 1$ olur. Burada dikkat edelim ki her iki kümede d_1 ve d_2 metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.

2.5. Küme Değerli Dönüşümler için Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, küme değerli büzülme dönüşümü kavramı hatırlatılıp, bu tip dönüşümler için verilen sabit nokta teoremleri ve aralarındaki ilişkilerden bahsedilmektedir.

(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq Ld(x,y) \tag{2.5.1}$$

olacak şekilde bir $L \in [0,1)$ sabiti varsa T ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir.

1969 yılında Nadler [18], Banach sabit nokta teoreminin küme değerli versiyonunu, aşağıdaki lemmayı kullanarak vermiştir.

Lemma 2.5.1. *$A,B \in \mathscr{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.*

Ayrıca, bazı küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremlerinde, Lemma 2.5.1 ifadesine denk olan aşağıdaki lemma da kullanılmaktadır.

Lemma 2.5.2. *$A,B \in \mathscr{CB}(X)$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $q > 1$ için $d(a,b) \leq qH(A,B)$olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.*

Nadler, küme değerli dönüşümleri için temel olan aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir. Bu teorem, literaturde, Nadler sabit nokta teoremi veya Nadler'in sonucu olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 2.5.1 (Nadler [18])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer, $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

Aşağıda, küme değerli büzülme dönüşümleri için bir örnek verilmektedir. Bu örnek, küme değerli büzülme dönüşümlerinin sabit noktasının tek olmayabileceği yönünde önemli bir örnektir.

Örnek 8. $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{x+1}{2}, 0\} & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ \{-\frac{x}{2} + 1, 0\} & , \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T bir küme değerli büzülme dönüşümüdür. Ayrıca $F(T) = \{0, \frac{2}{3}\}$ dir.

Reich, 1971 yılında bir çalışmasında, Nadler sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde vermiştir.

Teorem 2.5.2 (Reich [19, 21])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq aD(x,Tx) + bD(y,Ty) + cd(x,y)$$

olacak şekilde $a+b+c < 1$ özelliğine uygun $a,b,c \in [0,\infty)$ sayıları varsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Küme değerli sabit nokta teoremlerinin en önemlilerinden biri Mizoguchi ve Takahashi tarafından elde edilmiştir. Burada, önce Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu ve özelliklerinden bahsedilip, ardından sonra Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin ispatına değinilmektedir.

Tanım 2.5.1 ([13])**.** $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in [0,\infty)$ için

$$\limsup_{s \to t^+} \varphi(s) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < s-t < \varepsilon} \varphi(s) < 1$$

oluyorsa bu φ fonksiyona bir Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu adı verilir ve kısaca $\mathscr{MT}$-fonksiyonu şeklinde gösterilir.

Aşağıda, $\mathscr{MT}$-fonksiyonlarına örnekler verilmiştir.

Örnek 9. $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ artmayan veya azalmayan bir fonksiyon ise o zaman bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur.

Yukarıdaki örnekten anlaşılmaktadır ki $\mathscr{MT}$-fonksiyonların sınıfı oldukça geniştir.

Örnek 10. $\varphi(t) = c \in [0,1)$ şeklinde tanımlı $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur.

Örnek 11.

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t \quad , & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ 0 & t \in [\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur.

Örnek 12.

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t} & , \quad t \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\limsup_{s\to 0^+} \varphi(s) = 1$ olduğundan bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon değildir.

Aşağıdaki teorem, $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyonlarını karakterize etmektedir.

Teorem 2.5.3. $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) φ *bir* $\mathscr{M}\mathscr{T}$*-fonksiyonudur.*

ii) *Her* $t \in [0,\infty)$ *ve her* $s \in (t, t+\varepsilon_t^{(1)})$ *için* $\varphi(s) \leq r_t^{(1)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(1)} \in [0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(1)} > 0$ *vardır.*

iii) *Her* $t \in [0,\infty)$ *ve her* $s \in [t, t+\varepsilon_t^{(2)}]$ *için* $\varphi(s) \leq r_t^{(2)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(2)} \in [0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(2)} > 0$ *vardır.*

iv) *Her* $t \in [0,\infty)$ *ve her* $s \in (t, t+\varepsilon_t^{(3)}]$ *için* $\varphi(s) \leq r_t^{(3)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(3)} \in [0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(3)} > 0$ *vardır.*

v) *Her* $t \in [0,\infty)$ *ve her* $s \in [t, t+\varepsilon_t^{(4)})$ *için* $\varphi(s) \leq r_t^{(4)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(4)} \in [0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(4)} > 0$ *vardır.*

vi) *Herhangi bir* $\{x_n\} \subseteq [0,\infty)$ *artmayan dizisi için*

$$0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$$

dir.

vii) *Herhangi bir* $\{x_n\} \subseteq [0,\infty)$ *kesin azalan dizisi için*

$$0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$$

dir.

İspat. Aşağıdaki aşamaları takip ederek ispatı yapalım.

(a) (i)⇔(ii). İlk önce (i)⇒(ii) olduğunu gösterelim. φ bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon olsun. O zaman her $t \in [0,\infty)$ için

$$\sup_{t<s<t+\varepsilon_t} \varphi(s) < 1$$

olacak şekilde bir $\varepsilon_t > 0$ vardır. $\mathbb{R}$ kümesinin yoğunluğundan dolayı

$$\sup_{t<s<t+\varepsilon_t} \varphi(s) \leq r_t < 1$$

olacak şekilde bir $r_t \in [0,1)$ vardır. Bu ise her $s \in (t, t+\varepsilon_t)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ demektir. Tersinin yani (ii)⇒(i) olduğu açıktır.

(b) (ii)⇔(iii). $r_t^{(2)} = r_t^{(1)}$ ve $\varepsilon_t^{(2)} = \varepsilon_t^{(1)}$ alırsak (iii)⇒(ii) olur. Tersine (ii) yi kabul edelim. $t \in [0,\infty)$ verilsin. Kabulümüzden her $s \in (t, t+\varepsilon_t^{(1)})$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(1)}$ olacak şekilde $r_t^{(1)} \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t^{(1)} > 0$ vardır. $\varepsilon_t^{(2)} = \varepsilon_t^{(1)}$ ve

$$r_t^{(2)} = \max\{r_t^{(1)}, \varphi(t), \varphi(t+\varepsilon_t^{(1)})\}$$

alırsak, o zaman her $s \in [t, t+\varepsilon_t^{(2)}]$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(2)}$ ve $r_t^{(2)} \in [0,1)$ dir. Böylece (ii)⇒(iii) ispatlandı.

(c) (iii)⇒(iv)⇒(ii) ve (iii)⇒(v)⇒(ii) gerektirmeleri açıktır.

(d) (v)⇒(vi). (v) nin olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$, $[0,\infty)$ da artmayan bir dizi olsun. O zaman

$$t_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \geq 0$$

dır. Kabulümüzden her $s \in [t, t+\varepsilon_{t_0})$ için $\varphi(s) \leq r_{t_0}$ olacak şekilde $r_{t_0} \in [0,1)$ ve $\varepsilon_{t_0} > 0$ vardır. Öte yandan $n \geq l$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $t_0 \leq x_n < t_0 + \varepsilon_{t_0}$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $n \geq l$ için $\varphi(x_n) \leq r_{t_0}$ dır.

$$\eta = \max\{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n), r_{t_0}\}$$

olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(x_n) \leq \eta$ dir. Bu yüzden $0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$ dir. Dolayısıyla (vi) sağlanır.

(e) (vi)$\Rightarrow$(vii) gerektirmesi açıktır.

(f) Son olarak (vii)$\Rightarrow$(v) gerektirmesini ispat edelim. (vii) sağlansın. O zaman (v) sağlanır. Gerçekten, aksini kabul edelim. Yani, her $r \in [0,1)$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \in [0,\infty)$ elemanı var ki $s \in [t_0, t_0 + \varepsilon)$ için $\varphi(s) > r$ eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden $r_1 = \varphi(t_0) \in [0,1)$ ve $\varepsilon_1 = 1 > 0$ için $\varphi(s_1) > r_1$ şartını sağlayan $s_1 \in [t_0, t_0 + \varepsilon_1)$ var olmalıdır. Son eşitsizlik $s_1 \neq t_0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $t_0 < s_1$ dir. $t_0 + \varepsilon_2 \leq s_1$ olacak şekilde $\varepsilon_2 > 0$ seçelim ve $r_2 = \max\{\varphi(s_1), 1 - \frac{1}{2}\}$ olsun. O zaman r_2 ve ε_2 için $\varphi(s_2) > r_2$ şartını sağlayan $s_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon_2)$ bulabiliriz. Bu ayrıca $t_0 < s_2 < s_1$ olmasını gerektirir. Böyle devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(s_n) > r_n = \max\{\varphi(s_{n-1}), 1 - \frac{1}{n}\} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

olacak şekilde kesin azalan $\{s_n\} \subset [t_0, \infty) \subset [0, \infty)$ dizisi oluşturabiliriz. Bu ise $\sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x_n) \geq 1$ demektir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (vii)$\Rightarrow$(v) gerektirmesi doğrudur.

$\square$

Teorem 2.5.3 göz önüne alarak ileride daha sık kullanılacak olan ve kolaylık olması bakımından aşağıdaki lemma yazılabilmektedir.

Lemma 2.5.3 ([14])**.** $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *foksiyonunun bir $\mathscr{MT}$-fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart her $t \in [0,\infty)$ ve her $s \in [t, t + \varepsilon_t)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ olacak şekilde $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ sayılarının var olmasıdır.*

1972 yılında Reich [19] bir çalışmasında, tek değerli dönüşümler için Meir-Keeler sabit nokta teoreminin küme değerli versiyonunu ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 2.5.4. *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{K}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer, her $x, y \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için*

$$\varepsilon \leq d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow H(T(x), T(y)) \leq \varepsilon$$

özelliğine uygun bir $\delta > 0$ sayısı varsa o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $G(A) = \cup\{T(a) : a \in A\}$ şeklinde tanımlı $G : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ dönüşümünü göz önüne alınsın. O halde G dönüşümü için, her $\varepsilon > 0$ için

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ [\varepsilon \leq H(A,B) < \varepsilon + \delta \Rightarrow H(G(A),G(B)) \leq \varepsilon]$$

özelliğine uygun bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. Gerçekten, verilen $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon \leq H(A,B) < \varepsilon + \delta$ şartını sağlayan δ yı göz önüne alınsın. Eğer $x \in G(A)$ ise, o zaman bazı $a \in A$ için $x \in T(a)$ dır. $d(a,b) \leq H(A,B)$ olacak şekilde bir $b \in B$ seçilebilir. Eğer $d(a,b) \geq \varepsilon$ ise o zaman kabulden $H(T(a),T(b)) < \varepsilon$ olur. O zaman $d(x,y) \leq H(T(a),T(b))$ olacak şekilde $y \in T(b)$ vardır ve buradan $D(x,G(B)) < \varepsilon$ elde edilir. Eğer $0 < d(a,b) < \varepsilon$ ise o zaman $H(T(a),T(b)) < d(a,b)$ elde edilir ki buradan $D(x,G(B)) < \varepsilon$ bulunur. $G(A)$ kompakt olduğundan $\sup\{D(x,G(B)) : x \in G(A)\}$ mevcuttur. (X,d) nin tamlığı $(\mathcal{K}(X),H)$ ın tamlığını gerektirdiğinden, tek değerli dönüşümler için Meiler-Keiler sabit nokta teoremi gereğince G dönüşümünün $\mathcal{K}(X)$ de bir sabit noktası vardır. Bu sabit noktaya A denilirse, A nın kompaktlığından $\inf\{D(a,T(A)) : a \in A\}$ mevcutur. Yani, bu infimumun $d(b,c)$ ye eşit olacak şekilde $b \in A$ ve $c \in T(b)$ vardır. Eğer $d(b,c) > 0$ ise o zaman $D(c,T(c)) \leq H(T(b),T(c)) < d(b,c)$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $b = c$ elde edilir. Bu ise, T nin X de bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermektedir. □

Teorem 2.5.4 gereğince aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Sonuç 2.5.1 (Reich [19])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in (0,\infty)$ için*

$$\limsup_{r \to t^+} \alpha(r) < 1$$

özelliğini sağlasın. Eğer $x \neq y$ özelliğine uygun her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Reich [20], yukarıdaki sonucu göz önüne alarak 1974 yılında aşağıdaki problemi ortaya atmıştır.

Problem 1. Sonuç 2.5.1 de $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alındığında T, X de bir sabit noktaya sahip midir?

Reich'in bu problemi üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bu problemin çözümü tam olarak yapılamasa da bazı kısmi cevaplar verilmiştir. Bunlardan en önemlisi Mizoguchi ve Takahashi [17] tarafından 1989 yılında elde edilmiştir. Mizoguchi ve Takahashi, Reich'in sorusunda α fonksiyonu üzerindeki

$$\limsup_{r\to t^+} \alpha(r) < 1$$

şartının her $t \in [0,\infty)$ için sağlanması halinde $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alınabileceğini göstermiştir. Bu teorem, literatürde, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi olarak anılmaktadır.

Teorem 2.5.5 (Mizoguchi-Takahashi [17])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ için*

$$\limsup_{r\to t^+} \alpha(r) < 1$$

özelliğini sağlasın. Eğer $x \neq y$ özelliğine uygun her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanırsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin ispatı hem uzun hemde karmaşık olduğundan, bu teorem bazı yazarlar tarafından farklı yollarla ispatlanmıştır. 2008 yılında Suzuki [22] tarafından, $\mathscr{MT}$-fonksiyonlarla ile ilgili aşağıda ifade ve ispat edilen lemmayı kullanarak Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin daha kolay ve anlaşılır ispatını vermiştir.

Lemma 2.5.4 ([14])**.** *$\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathscr{MT}$-fonksiyon olsun. $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$,*

$$\beta(t) = \frac{1+\varphi(t)}{2}$$

şeklinde tanımlı β fonksiyonu da bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur.

İspat. Her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) < 1$ olduğundan $\frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$ olur. O halde $0 < \beta(t) < 1$ dır. Ayrıca $\varphi(t) < 1$ olduğu göz önüne alınırsa $\varphi(t) < \frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$ olduğından her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) < \beta(t)$ elde edilir. $t \in [0,\infty)$ sabit bir eleman olsun. φ, bir $\mathscr{MT}$-fonksiyon olduğundan her $s \in [t, t+\varepsilon_t)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ olacak şekilde $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ var olduğundan $\lambda_t = \frac{r_t+1}{2}$ denilirse her $s \in [t, t+\varepsilon_t)$ için

$$\varphi(s) \leq r_t \quad \Rightarrow \quad \varphi(s)+1 \leq r_t+1 \quad \Rightarrow \quad \beta(s) = \frac{\varphi(s)+1}{2} \leq \frac{r_t+1}{2} = \lambda_t$$

ifadesinden $\beta(s) \leq \lambda_t$ elde edilir. O halde β bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur. □

Teorem 2.5.6 (Suzuki [22]). *(X,d) bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir dönüşüm ve α da bir $\mathscr{MT}$-fonksiyon olsun. O zaman her $x,y \in X$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y) \tag{2.5.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{1+\alpha(t)}{2}$ olarak tanımlansın. Lemma 2.5.4 gereğince β bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur. $x \neq y$ özelliğinde keyfi $x,y \in X$ elamanları göz önüne alınsın. $u \in Tx$ ve $\varepsilon = \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2}d(x,y) > 0$ denilirse Lemma 2.5.1 gereğince $d(u,v) \leq H(Tx,Ty)+\varepsilon$ olacak şekilde $v \in Ty$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}
d(u,v) &\leq H(Tx,Ty) + \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2}d(x,y) \\
&\leq \alpha(d(x,y))d(x,y) + \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2}d(x,y) \\
&= \frac{1+\alpha(d(x,y))}{2}d(x,y) \\
&= \beta(d(x,y))d(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir, Yani her $x,y \in X$ ve $u \in Tx$ için

$$d(u,v) \leq \beta(d(x,y))d(x,y) \tag{2.5.3}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ vardır. $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ için, eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktası olduğundan ispat tamamlanır. O halde $x_0 \neq x_1$ denilirse (2.5.3) den

$$d(x_1,x_2) \leq \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_1 = x_2$ ise o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olacağından ispat tamamlanır. O halde $x_1 \neq x_2$ denilirse (2.5.3) den

$$d(x_2,x_3) \leq \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})$$

özelliklerine uygun X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. Dikkat edilmelidir ki $\{x_n\}$ dizinin ardışık terimlerinin birbirinden farklı olduğu kabul edilmektedir, aksi halde ispat bitmektedir. Her $t \in [0,\infty)$ için $\beta(t) < 1$ olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de artmayan bir dizi olup, alttan sınırlı olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\lambda \geq 0$ sayısına yakınsar. β bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyonu olduğu için $\limsup_{s\to\lambda^+}\beta(s) < 1$ ve $\beta(\lambda) < 1$ dir. Dolayısıyla, her $s \in [\lambda,\lambda+\varepsilon)$ için $\beta(s) \leq r$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Her $n \geq k_0$ için $\lambda \leq d(x_n,x_{n+1}) < \lambda+\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ seçilip $n \geq k_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq rd(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} d(x_{n+1},x_{n+2}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} rd(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_{k_0},x_{k_0+1}) \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilmektedir. O halde, $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha(d(x_n, z))d(x_n, z) \\ &\leq d(x_n, z) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z, Tz) = 0$ olur. O haldee $z \in Tz$ elde edilir. Böylece, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Aşağıdaki örnek, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin, Nadler sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Örnek 13. $X = [0, \infty)$ üzerindeki

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

metriği göz önüne alınsın. O halde (X, d) tamdır. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = [0, \frac{x^2}{x+1}]$$

olarak tanımlansın ve $\varphi(t) = \frac{t}{t+1}$ şeklinde tanımlı $\mathscr{MT}$-fonksiyonu göz önüne alınsın. $x > y$ özelliğine uygun her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) = \frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}x = \varphi(d(x,y))d(x,y)$$

olmaktadır. Dikkat edelim ki $x = y$ için (2.5.2) şartı açıkca sağlanır. O halde, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. Böylece T, X de bir sabit nokta sahiptir.

Öte yandan, Nadler sabit nokta teoremi bu örnek için uygulanamaz. Gerçekten, kabul edelim ki (2.5.1) eşitsizliğini sağlayan bir $L \in [0, 1)$ var olsun. O halde her $x \geq 0$ için

$H(Tx,T0) = \frac{x^2}{x+1}$, $d(x,0) = x$ ve $H(Tx,T0) \leq Ld(x,0)$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(Tx,T0)}{d(x,0)} = 1 \leq L$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Öte yandan, 2007 yılında V. Berinde ve M. Berinde [10] , küme değerli (δ,L)-zayıf büzülme (küme değerli hemen hemen büzülme) ve küme değerli (k,L)-zayıf büzülme kavramlarını verip sırasıyla Nadler ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremlerinin genelleştirmeleri olan bazı sabit nokta sonuçları elde etmişlerdir.
(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer, her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + LD(y,Tx) \tag{2.5.4}$$

olacak şekilde $\delta \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa, o zaman T ye küme değerli (δ,L)-zayıf büzülme (küme değerli hemen hemen büzülme) dönüşümü adı verilir.
d ve H nın simetrik olmasından dolayı T nin küme değerli (δ,L)-zayıf büzülme dönüşümü olması için ayrıca (2.5.4) eşitsizliğinin dualinin de kontrol edilmesi gerekmektedir. Yani T dönüşümü ayrıca her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + LD(x,Ty)$$

eşitsizliğini de sağlaması gerekmektedir.
(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer, her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) \tag{2.5.5}$$

olacak şekilde bir k $\mathscr{MT}$-fonksiyon ve $L \geq 0$ sabiti varsa, o zaman T ye küme değerli (k,L)-zayıf büzülme (küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme) dönüşümü adı verilir.
Yine d ve H nın simetrik olmasından dolayı T nin küme değerli (k,L)-zayıf büzülme dönüşümü olması için ayrıca (2.5.5) eşitsizliğinin dualini de kontrol etmemiz gerek-

mektedir. Yani T dönüşümü ayrıca her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y) + LD(x,Ty)$$

eşitsizliğini de sağlaması gerekmektedir.

Teorem 2.5.7 (Berinde-Berinde [10])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer, $T : X \rightarrow \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli (δ,L)-zayıf büzülme ise, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $h = q\delta < 1$ olmak üzere $q > 1$, $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $H(Tx_0,Tx_1) = 0$ ise o zaman $Tx_0 = Tx_1$ olup $x_1 \in Tx_1$ elde edilir. Bu ise x_1 in T nin bir sabit noktası olduğunu göstermektedir. O halde ispat tamamlanmaktadır. Şimdi $H(Tx_0,Tx_1) > 0$ olsun. Lemma 2.5.2 gereğince

$$d(x_1,x_2) \leq qH(Tx_0,Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. (2.5.4) dan

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\leq qH(Tx_0,Tx_1) \\ &\leq q\left[\delta d(x_0,x_1) + LD(x_1,Tx_0)\right] \\ &= q\delta d(x_0,x_1) \\ &= hd(x_0,x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $H(Tx_1,Tx_2) = 0$ ise o zaman $Tx_1 = Tx_2$ olur. Buradan ise $x_2 \in Tx_2$ elde edilir. Bu ise x_2 nin T nin bir sabit noktası olduğunu göstermektedir. Böylece ispat tamamlanmaktadır. Şimdi $H(Tx_1,Tx_2) > 0$ olsun. O halde, Lemma 2.5.2 gereğince

$$d(x_2,x_3) \leq qH(Tx_1,Tx_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. (2.5.4) dan

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\leq qH(Tx_1,Tx_2) \\ &\leq q\left[\delta d(x_1,x_2)+LD(x_2,Tx_1)\right] \\ &= q\delta d(x_1,x_2) \\ &= hd(x_1,x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq hd(x_{n-1},x_n) \leq h^n d(x_0,x_1)$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilmektedir. Ayrıca $m > n$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m-1},x_m) \\ &\leq h^n d(x_0,x_1)+h^{n+1}d(x_0,x_1)+\cdots+h^{m-1}d(x_0,x_1) \\ &= \left[h^n+h^{n+1}+\cdots+h^{m-1}\right]d(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{h^n}{1-h}d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

elde edilmektedir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} D(z,Tz) &\leq d(z,x_{n+1})+D(x_{n+1},Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1})+H(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1})+\delta d(x_n,z)+LD(z,Tx_n) \\ &\leq d(z,x_{n+1})+\delta d(x_n,z)+Ld(z,x_{n+1}) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z,Tz) = 0$ bulunur. Buradan $z \in Tz$ elde edilir. Dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Teorem 2.5.8 (Berinde-Berinde [10]). *(X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli (k,L)-zayıf büzülme ise o zaman T, X de bir sabit noktaya* *sahiptir.*

İspat. $\beta(t) = \frac{1+k(t)}{2}$ şeklinde tanımlı $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Lemma 2.5.4 gereğince β bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur. $x \neq y$ özelliğindeki keyfi $x,y \in X$ noktalar için $u \in Tx$ ve $\varepsilon = \frac{1-k(d(x,y))}{2}d(x,y) > 0$ denilirse Lemma 2.5.1 gereğince $d(u,v) \leq H(Tx,Ty)+\varepsilon$ olacak şekilde $v \in Ty$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq H(Tx,Ty)+\frac{1-k(d(x,y))}{2}d(x,y) \\ &\leq k(d(x,y))d(x,y)+LD(y,Tx)+\frac{1-k(d(x,y))}{2}d(x,y) \\ &= \frac{1+k(d(x,y))}{2}d(x,y)+LD(y,Tx) \\ &= \beta(d(x,y))d(x,y)+LD(y,Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x,y \in X$ ve $u \in Tx$ için

$$d(u,v) \leq \beta(d(x,y))d(x,y)+LD(y,Tx) \tag{2.5.6}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ vardır. Şimdi $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olmak üzere eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat bitmektedir. Şimdi $x_0 \neq x_1$ olmak üzere (2.5.6) den

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\leq \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1)+LD(x_1,Tx_0) \\ &= \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_1 = x_2$ ise x_1, T nin bir sabit noktası olmaktadır. Böylece ispat bitmektedir. O halde $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu takdirde (2.5.6) den

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\leq \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)+LD(x_2,Tx_1) \\ &= \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilmektedir. Dikkat edilmelidir ki ardışık terimler birbirinden farklıdır, aksi halde ispat bitmektedir. Her $t \in [0,\infty)$ için $\beta(t) < 1$ olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de artmayan bir dizi olup, ve ayrıca alttan sınırlı olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\lambda \geq 0$ sayısına yakınsar. β bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon olduğu için $\limsup_{s\to\lambda^+}\beta(s) < 1$ ve $\beta(\lambda) < 1$ dir. O halde her $s \in [\lambda, \lambda+\varepsilon)$ için $\beta(s) \leq r$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Her $n \geq k_0$ için $\lambda \leq d(x_n,x_{n+1}) < \lambda+\varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ seçilip $n \geq k_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \\
&\leq rd(x_n,x_{n+1})
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} d(x_{n+1},x_{n+2}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} rd(x_n,x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n,x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_{k_0},x_{k_0+1}) \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

bulunmaktadır. O hakde $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

$$
\begin{aligned}
D(x_{n+1},Tz) &\leq H(Tx_n,Tz) \\
&\leq \beta(d(x_n,z))d(x_n,z) \\
&< d(x_n,z)
\end{aligned}
$$

olduğu için $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z,Tz) = 0$ olup, $z \in \overline{Tz} = Tz$ elde edilir. Bu durumda, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

2006 yılında, Feng ve Liu [15], Pompeiu-Hausdorff metriğini kullanmayarak küme

değerli dönüşümler için ilginç sabit nokta teoremini elde etmiştir.
(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm olsun. $b \in (0,1)$ için

$$I_b^x = \{y \in Tx : bd(x,y) \leq D(x,Tx)\}$$

şeklinde tanımlı I_b^x kümesi göz önüne alınsın. Dikkat edelim ki her $x \in X$ için I_b^x kümesi boş değildir. Gerçekten eğer, her $x \in X$ için $D(x,Tx) = 0$ ise $x \in Tx$ olup her $b \in (0,1)$ ve $y = x \in Tx$ için $x \in I_b^x$ dir. O halde, her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ olduğu göz önüne alınıra, her $b \in (0,1)$ için $bd(x,y) \leq D(x,Tx)$ olacak şekilde bir $y \in Tx$ vardır. Yani, $y \in I_b^x$ olur. Aksi kabul edilirse, her $y \in Tx$ için $0 < D(x,Tx) < bd(x,y)$ olacak şekilde en az bir $b \in (0,1)$ var olacağından son eşitsizliğin her iki tarafından Tx kümesi üzerinden infimum alınırsa $0 < D(x,Tx) \leq bD(x,Tx)$ elde edilmektedir ki bu ise $b \geq 1$ demektir. O halde bu bir çelişkidir. Dolayısıyla her $x \in X$ için I_b^x kümesi boş değildir.
Aşağıdaki teorem, kolaylık olması bakımından Feng-Liu sabit nokta teoremi olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 2.5.9 (Feng-Liu [15])**.** *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve en az bir $y \in I_b^x$ için*

$$D(y,Ty) \leq cd(x,y)$$

olacak şekilde bir $c \in (0,1)$, ($c < b$) var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. b ve c hipotezde verilen sabitler olmak üzere $x_0 \in X$ keyfi noktasını göz önüne alınırsa

$$D(x_1,Tx_1) \leq cd(x_0,x_1)$$

olacak şekilde $x_1 \in I_b^{x_0}$ vardır. Yine $x_1 \in X$ için

$$D(x_2,Tx_2) \leq cd(x_1,x_2)$$

olacak şekilde $x_2 \in I_b^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse

$$D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq cd(x_n,x_{n+1})$$

ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ özelliğine uygun bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Diğer taraftan $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ ifadesi

$$bd(x_n, x_{n+1}) \leq D(x_n, Tx_n)$$

eşitsizliğini gerektirdiğinden

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{c}{b} d(x_n, x_{n+1})$$

ve

$$D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \frac{c}{b} D(x_n, Tx_n)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n d(x_0, x_1)$$

ve

$$d(x_n, Tx_n) \leq \left(\frac{c}{b}\right)^n D(x_0, Tx_0)$$

eşitsizlikleri elde edilmektedir. $m > n$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\frac{c}{b} = a$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left(a^n + a^{n+1} + \cdots + a^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunmaktadır. Dikkat edelim ki $c < b$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ dır. O halde, $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Yine $f(x_n) = D(x_n, Tx_n)$ ile tanımlı $\{f(x_n)\}$ dizisi azalan olduğundan sıfıra yakınsaktır. Ayrıca f alttan yarı sürekli ve $x_n \to z$ olduğundan

$$0 \leq D(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

elde edilir. Bu ise $z \in Tz$ demektir. Böylece ispat bitmektedir. □

Uyarı 6. Feng-Liu sabit nokta teoremi, Nadler sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesidir. Gerçekten, T dönüşümü Nadler sabit nokta teoreminin şartlarını sağlasın ve $\{x_n\}$, x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. T nin küme değerli büzülme dönüşümü olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= D(x,Tx) \\ &\leq d(x,x_n)+D(x_n,Tx) \\ &\leq d(x,x_n)+D(x_n,Tx_n)+H(Tx_n,Tx) \\ &\leq d(x,x_n)+f(x_n)+kd(x_n,x) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ elde edilir. O halde $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Ayrıca, her $x \in X$ ve her $y \in Tx$ için

$$D(y,Ty) \leq H(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

olduğundan Feng-Liu sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanmış olmaktadır.

Aşağıdaki örnek, Feng-Liu sabit nokta teoremi, Nadler sabit nokta teoreminin bir öz genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 14. $X = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0,1\}$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriği göz önüne alınsın. O halde (X,d) tamdır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{2^{n+1}},1\} & , \quad x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ \\ \{0,\frac{1}{2}\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} H(T\frac{1}{2^n},T0) &= H(\{\frac{1}{2^{n+1}},1\},\{0,\frac{1}{2}\}) \\ &= \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} = \left|\frac{1}{2^n}-0\right| \\ &= d(\frac{1}{2^n},0) \end{aligned}$$

olduğundan T, küme değerli büzülme dönüşümü değildir. Diğer taraftan

$$f(x) = D(x,Tx) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & , \quad x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & , \quad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

olacağından f süreklidir. Ayrıca, her $x \in X$ ve en az bir $y \in I^x_{0.7}$ için $D(y,Ty) = \frac{1}{2}d(x,y)$ elde edildiğinden Feng-Liu sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanmaktadır. Böylece T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 7. Feng-Liu sabit nokta teoremindeki küme değerli T dönüşümü tek değerli dönüşüm olsa bile sabit noktası tek olmayabilmektedir. Örneğin, $X = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0,1\}$, üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriğine göre tamdır.

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & , \quad x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \\ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} & , \quad x = 1 + \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \\ x & , \quad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $T : X \to X$ dönüşümü sürekli olduğundan $f(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca, her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) = \frac{1}{2}d(x,Tx)$$

sağlandığından Feng-Liu sabit nokta teoremi gereğince T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir. Dikkat edilmelidir ki, 0 ve 1 noktaları T nin iki sabit noktasıdır.

Feng-Liu sabit nokta teoreminden, her $x \in X$ için $I^x_b \subseteq Tx$ olduğundan aşağıdaki sonuç yazılabilmektedir.

Sonuç 2.5.2. *(X,d) bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve her $x \in X$ ve her $y \in Tx$ için*

$$D(y,Ty) \leq cd(x,y)$$

olacak şekilde $c \in (0,1)$ var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonsiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

2007 yılında Klim ve Wardowski [16], Feng-Liu sabit nokta teoremindeki c sabitini

$d(x,y)$ nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alıp Feng-Liu sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde vermişlerdir. Bu teorem, yine kolaylık olması bakımından Klim-Wardowski sabit nokta teoremi olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 2.5.10 (Klim-Wardowski Teorem 2.1 [16]). *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $b \in (0,1)$ olmak üzere her $x \in X$ ve en az bir $y \in I_b^x$ için*

$$D(y,Ty) \leq \varphi\left(d(x,y)\right) d(x,y) \tag{2.5.7}$$

ve her $t \in [0,\infty)$ için

$$\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < b$$

olacak şekilde bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu var olsun. Eğer, $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin sabit noktasının var olmadığı kabul edilsin. O halde, her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ olmaktadır. Yine, her $x \in X$ için $Tx \in \mathscr{C}(X)$ olduğundan I_b^x kümesi boş değildir. Yani, her $b \in (0,1)$ ve her $x \in X$ için bir $y \in I_b^x$ vardır. Eğer $y = x$ alınırsa $x \in Tx$ olacağından bu T nin sabit noktası olmaması ile çelişmektedir. O halde $y \neq x$ dir. Bu durumda, her $b \in (0,1)$ ve her $x \in X$ için $y \in I_b^x$ ise $y \neq x$ olur. Yani, her $b \in (0,1)$ ve her $x \in X$ için $bd(x,y) \leq D(x,Tx)$ olacak şekilde her $y \in Tx$ için $y \neq x$ olmaktadır. Şimdi, b ve φ teoremin ifadesindeki gibi olmak üzere $x_1 \in X$ keyfi bir nokta için

$$bd(x_1,x_2) \leq D(x_1,Tx_1) \text{ ve } x_2 \neq x_1$$

ve

$$D(x_2,Tx_2) \leq \varphi\left(d(x_1,x_2)\right) d(x_1,x_2)$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} D(x_1,Tx_1) - D(x_2,Tx_2) &\geq bd(x_1,x_2) - \varphi\left(d(x_1,x_2)\right) d(x_1,x_2) \\ &= \left[b - \varphi\left(d(x_1,x_2)\right)\right] d(x_1,x_2) > 0 \end{aligned}$$

olur. Yine $x_2 \in X$ için

$$bd(x_2,x_3) \leq D(x_1,Tx_1) \text{ ve } x_3 \neq x_2$$

ve

$$D(x_3,Tx_3) \leq \varphi\left(d(x_2,x_3)\right)d(x_2,x_3)$$

olacak şekilde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. O zaman

$$D(x_2,Tx_2) - D(x_3,Tx_3) \geq \left[b - \varphi\left(d(x_2,x_3)\right)\right]d(x_2,x_3) > 0$$

olur ve ayrıca

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{1}{b}D(x_2,Tx_2) \leq \frac{\varphi\left(d(x_1,x_2)\right)}{b}d(x_1,x_2) < d(x_1,x_2)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu şekilde devam edilirse $n > 1$ olacak şekildeki $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} \in Tx_n,\ x_{n+1} \neq x_n,$$

$$bd(x_n,x_{n+1}) \leq D(x_n,Tx_n)$$

ve

$$D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n,x_{n+1})\right)d(x_n,x_{n+1})$$

özelliklerine uygun bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilmektedir. Ayrıca

$$D(x_n,Tx_n) - D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \geq \left[b - \varphi\left(d(x_n,x_{n+1})\right)\right]d(x_n,x_{n+1}) > 0$$

ve

$$d(x_n,x_{n+1}) < d(x_{n-1},x_n)$$

eşitsizlikleri de sağlanmaktadır. Son iki eşitsizlikten $\{D(x_n,Tx_n)\}$ ve $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizileri azalan olduklarından yakınsak olurlar. φ üzerindeki şart dikkate alındığında

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi(d(x_n,x_{n+1})) = q$$

olacak şekilde bir $q \in [0,b)$ vardır. O halde, her $b_0 \in (q,b)$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\varphi(d(x_n,x_{n+1}) < b_0$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Sonuç olarak, $b - b_0 = \alpha$ denilirse her $n > n_0$ için

$$D(x_n, Tx_n) - D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \geq (b - b_0)\, d(x_n, x_{n+1}) = \alpha d(x_n, x_{n+1})$$

olur. Ayrıca, her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}
D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) &\leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) d(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq \frac{\varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right)}{b} D(x_n, Tx_n) \\
&\leq \frac{\varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) \cdots \varphi\left(d(x_1, x_2)\right)}{b^n} D(x_1, Tx_1) \\
&\leq \frac{\varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) \cdots \varphi\left(d(x_{n_0+1}, x_{n_0+2})\right)}{b^{n-n_0}} \\
&\quad \times \frac{\varphi\left(d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\right) \cdots \varphi\left(d(x_1, x_2)\right)}{b^{n_0}} D(x_1, Tx_1) \\
&< \left(\frac{b_0}{b}\right)^{n-n_0} \frac{\varphi\left(d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\right) \cdots \varphi\left(d(x_1, x_2)\right)}{b^{n_0}} D(x_1, Tx_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $b_0 < b$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} (\frac{b_0}{b})^{n-n_0} = 0$ olacağından,

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0$$

bulunur. $m > n > n_0$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=n}^{m-1} \left[D(x_i, Tx_i) - D(x_{i+1}, Tx_{i+1})\right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(D(x_n, Tx_n) - D(x_m, Tx_m)\right)
\end{aligned}$$

olacağından $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Ayrıca f alttan yarı sürekli ve $x_n \to z$ olduğundan

$$0 \leq D(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

olur. Buradan $z \in Tz$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Uyarı 8. Klim-Wardowski sabit nokta teoreminde, φ fonksiyonunu $c \in (0,b)$ olmak üzere her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) = c$ olarak göz önüne alındığında Feng-Liu sabit nokta teoremi elde edilmektedir.

Aşağıdaki örnek, Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin, Feng-Liu sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 15. $X = [0,1]$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tamdır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{17}{96}, \frac{1}{4}\} & , \quad x = \frac{15}{32} \\ \\ \{\frac{1}{2}x^2\} & , \quad x \neq \frac{15}{32} \end{cases}$$

ve $b = \frac{3}{4}$ olmak üzere $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & , \quad t \in [0, \frac{7}{24}) \cup (\frac{7}{24}, \frac{1}{2}) \\ \frac{425}{768} & , \quad t = \frac{7}{24} \\ \frac{1}{2} & , \quad t \in [\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$f(x) = d(x,Tx) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & , \quad x \neq \frac{15}{32} \\ \\ \frac{7}{32} & , \quad x = \frac{15}{32} \end{cases}$$

olup f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Ayrıca, $x \neq \frac{15}{32}$ ve $y = \frac{1}{2}x^2 \in Tx$ için

$$bd(x,y) \leq d(x,Tx)$$

ve

$$d(y,Ty) \leq \varphi\left(d(x,y)\right) d(x,y)$$

olup, ayrıca son iki eşitsizlik $x = \frac{15}{32}$ ve $y = \frac{17}{96} \in Tx$ içinde sağlandığından Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. Diğer taraftan, eğer $b \in (0, \frac{3}{4}]$

ve $c \in (0,1)$, $c < b$ ise $x = 1$ ve $y = \frac{1}{2} \in T1$ için

$$d(\frac{1}{2}, T\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > cd(1, \frac{1}{2})$$

olmaktadır. Eğer $b \in (\frac{3}{4}, 1)$ ve $c \in (0,1)$, $c < b$ ise o zaman $x = \frac{15}{32}$ için $Tx = \{\frac{17}{96}, \frac{1}{4}\}$ olup. $y = \frac{17}{96} \in Tx$ için

$$bd(\frac{15}{32}, \frac{17}{96}) > d(\frac{15}{32}, T\frac{15}{32})$$

ve $y = \frac{1}{4} \in Tx$ için

$$d(\frac{1}{4}, T\frac{1}{4}) > cd(\frac{15}{32}, \frac{1}{4})$$

oldığundan dolayı Feng-Liu sabit nokta teoreminin şartları sağlanmamaktadır..

Klim-Wardowski sabit nokta teoreminde eğer $b = 1$ olarak alındığında yani φ bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon olduğunda, $\mathscr{C}(X)$ yerine $\mathscr{K}(X)$ alınmaktadır.

Teorem 2.5.11 (Klim-Wardowski Teorem 2.2 [16])**.** *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{K}(X)$ bir dönüşüm ve $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ bir $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve en az bir $y \in I_1^x$ için*

$$D(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))\, d(x,y)$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer, $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin sabit noktasının olmadığını kabul edilsin. O halde, her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ olmaktadır. Yine her $x \in X$ için $Tx \in \mathscr{K}(X)$ olduğundan I_1^x boş değildir. Yani her $x \in X$ için bir $y \in T_1^x$ vardır. Eğer $y = x$ alınırsa $x \in Tx$ olacağından bu T nin sabit noktasının olmaması ile çelişir. O halde $y \neq x$ dir. Dolayısıyla, her $x \in X$ için bir $y \in I_1^x$ ise $y \neq x$ dir. Yani, her $x \in X$ ve en az bir $y \in Tx$ için $d(x,y) = D(x,Tx)$ ve $y \neq x$ olmaktadır. φ fonksiyonu teoremin ifadesindeki gibi olduğu göz önüne alınırsa $x_1 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere, Teorem 2.5.10 nin ispatındaki gibi,

$$x_{n+1} \in Tx_n,\ x_{n+1} \neq x_n$$

$$d(x_n, x_{n+1}) = D(x_n, Tx_n)$$

ve

$$D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) d(x_n, x_{n+1}) \text{ ve } \varphi\left(d(x_n, x_{n+1})\right) < 1$$

özelliklerine uygun bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi elde edilebilir. X tam olduğunda $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan, f alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq D(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

elde edilir ki bu ise $z \in Tz$ demektir. Yani, bu durum bir çelişkidir. O halde, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

Aşağıdaki örnek, Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin ve Teorem 2.5.11 nin, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi ve Sonuç 2.5.1 dan farklı olduğunu göstermektedir.

Örnek 16. $X = [0,1]$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile göz önüne alınsın. O halde (X,d) tamdır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \quad x = 0 \\ \{\frac{1}{2}x^2, 1\} & , \quad x \in (0, \frac{1}{4}] \\ \{\frac{1}{2}x^2\} & , \quad x \in (\frac{1}{4}, 1) \\ \{\frac{1}{2}, 1\} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ve $b = \frac{3}{4}$ olmak üzere $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t & , \quad t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \\ 0 & , \quad t \in [\frac{1}{2}, \infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$f(x) = D(x, Tx) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & , \quad x \in [0,1) \\ \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

olacağından f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Ayrıca, $x \in [0,1)$ ve $y = \frac{1}{2}x^2 \in Tx$ için

$$bd(x,y) \leq D(x,Tx)$$

ve

$$D(y,Ty) \leq \frac{3}{2}d(x,y)d(x,y) = \varphi\left(d(x,y)\right)d(x,y)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca son iki eşitsizlik $x = y = 1$ içinde sağlandığından Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. O halde T, X de iki sabit noktaya sahiptir. Dikkat edelim ki 0 ile 1, T nin X deki sabit noktalarıdır. Ayrıca, kolayca Teorem 2.5.11 nin tüm şartlarının da sağlandığı gösterilebilir.
Diğer yandan, $x = 0$ ve $y = 1$ için

$$H(T0,T1) = H(\{0\},\{\frac{1}{2},1\}) = 1 < \varphi(d(0,1))d(0,1)$$

olacak şekilde hiçbir $\varphi : (0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bulanamadığından Sonuç 2.5.1 ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi bu örnek için uygulanmamaktadır. O halde, Klim-Wardowski sabit nokta teoremi ve Teorem 2.5.11, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminden, ayrıca, Teorem 2.5.11 de Sonuç 2.5.1 den farklıdır.

2009 yılında, Ćirić [11], I_b^x kümesindeki b sayısını sabit olmayacak şekilde tanımlayıp, küme değerli dönüşümler için önemli iki sabit nokta teoremi vermiştir. Onları sırasıyla aşağıda ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.5.12 (Ćirić [11])**.** *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $0 < a < 1$ olmak üzere $\varphi : [0,\infty) \to [a,1)$ fonksiyonu her $s \in [0,\infty)$ için $\limsup_{t \to s^+} \varphi(t) < 1$ şartını sağlasın. Her $x \in X$ için*

$$\sqrt{\varphi(D(x,Tx))}d(x,y) \leq D(x,Tx) \tag{2.5.8}$$

ve

$$D(y,Ty) \leq \varphi(D(x,Tx))d(x,y) \tag{2.5.9}$$

olacak şekilde bir $y \in Tx$ var olsun. Eğer, $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. φ fonksiyonunun tanımından her $x \in X$ için $\varphi(D(x,Tx)) < 1$ olduğundan her $x \in X$ için (2.5.8) eşitsizliğini sağlayan bir $y \in Tx$ mevcuttur. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere,

$$\sqrt{\varphi(D(x_0,Tx_0))}d(x_0,x_1) \leq D(x_0,Tx_0) \tag{2.5.10}$$

ve

$$D(x_1,Tx_1) \leq \varphi(D(x_0,Tx_0))d(x_0,x_1) \tag{2.5.11}$$

olacak şekilde bir $x_1 \in Tx_0$ vardır. (2.5.10) ve (2.5.11) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} D(x_1,Tx_1) &\leq \varphi(D(x_0,Tx_0))d(x_0,x_1) \\ &= \sqrt{\varphi(D(x_0,Tx_0))}\sqrt{\varphi(D(x_0,Tx_0))}d(x_0,x_1) \\ &\leq \sqrt{\varphi(D(x_0,Tx_0))}D(x_0,Tx_0) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$D(x_1,Tx_1) \leq \sqrt{\varphi(D(x_0,Tx_0))}D(x_0,Tx_0) \tag{2.5.12}$$

dir. Yine,

$$\sqrt{\varphi(D(x_1,Tx_1))}d(x_1,x_2) \leq D(x_1,Tx_1)$$

ve

$$D(x_2,Tx_2) \leq \varphi(D(x_1,Tx_1))d(x_1,x_2)$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Böylece,

$$D(x_2,Tx_2) \leq \sqrt{\varphi(D(x_1,Tx_1))}D(x_1,Tx_1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$,

$$\sqrt{\varphi(D(x_n,Tx_n))}d(x_n,x_{n+1}) \leq D(x_n,Tx_n) \tag{2.5.13}$$

ve

$$D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq \sqrt{\varphi(D(x_n,Tx_n))}D(x_n,Tx_n) \tag{2.5.14}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilmektedir.

Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f(x_n) = D(x_n,Tx_n) > 0$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde, bazı $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = D(x_n, Tx_n) = 0$ elde edileceğinden $x_n \in Tx_n$ olur ki böylece ispat tamamlanır. (2.5.14) ve $\varphi(t) < 1$ den $\{f(x_n)\}$ dizisi kesin azalandır. O halde $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \delta$ olacak şekilde bir $\delta \geq 0$ vardır. Eğer $\delta > 0$ ise (2.5.14) eşitsizliğinden

$$\delta \leq \lim_{f(x_n)\to\delta^+} \sqrt{\varphi(f(x_n))}\delta < \delta$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\delta = 0$ dır. Yani $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ dır. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için

$$\alpha = \lim_{f(x_n)\to 0^+} \sqrt{\varphi(D(x_n, Tx_n))}$$

denilirse $\alpha < 1$ olup, $\alpha < q < 1$ olacak şekilde bir q sayısını göz önüne alındığında her $n \geq n_0$ için $\sqrt{\varphi(D(x_n, Tx_n))} < q$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, (2.5.14) den her $n \geq n_0$ için $D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq qD(x_n, Tx_n)$ olacağından

$$D(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq q^{n+1-n_0} D(x_{n_0}, Tx_{n_0}) \tag{2.5.15}$$

elde edilir. Her $t \geq 0$ için $0 < a \leq \varphi(t)$ olduğundan (2.5.13) den

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} D(x_n, Tx_n)$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.5.15) den her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} q^{n-n_0} D(x_{n_0}, Tx_{n_0}) \tag{2.5.16}$$

ve (2.5.16) den her $m > n \geq n_0$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=n}^{m-1} q^{n-n_0} D(x_{n_0}, Tx_{n_0}) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{q^{n-n_0}}{1-q} D(x_{n_0}, Tx_{n_0})$$

olmaktadır. $q < 1$ olduğu için $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu elde edilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan, $f(x) = D(x, Tx)$ alttan yarı sürekli ve $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ olduğundan

$$0 \leq D(z, Tz) = f(z) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $D(z,Tz) = 0$ dan $z \in Tz$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.5.13 (Ćirić [11]). *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm ve $0 < a < 1$ olmak üzere $\varphi : [0,\infty) \to [a,1)$ fonksiyonu her $s \in [0,\infty)$ için $\limsup_{t\to s^+} \varphi(t) < 1$ şartını sağlasın. Her $x \in X$ için*

$$\sqrt{\varphi(d(x,y))}d(x,y) \leq D(x,Tx) \tag{2.5.17}$$

ve

$$D(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) \tag{2.5.18}$$

olacak şekilde bir $y \in Tx$ var olsun. Eğer, $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 2.5.12 de $\varphi(D(x,Tx))$ yerine $\varphi(d(x,y))$ alındığında, her $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$\sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))}d(x_n,x_{n+1}) \leq D(x_n,Tx_n) \tag{2.5.19}$$

ve

$$D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \leq \sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))}D(x_n,Tx_n) \tag{2.5.20}$$

olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi elde edilmektedir. (2.5.20) den $\{f(x_n)\} = \{D(x_n,Tx_n)\}$ dizisi azalandır. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \delta$ olacak şekilde bir $\delta \geq 0$ vardır. Şimdi, $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisinin

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k},x_{n_k+1}) = \eta \geq 0 \tag{2.5.21}$$

olacak şekilde bir $\{d(x_{n_k},x_{n_k+1})\}$ alt dizisinin olduğunu gösterelim. (2.5.19) dan ve $a \leq \varphi(t)$ olduğu için

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{a}}f(x_n) \tag{2.5.22}$$

elde edilir. (2.5.21) ve (2.5.22) dan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi sınırlıdır. Bu yüzden,

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = \theta \tag{2.5.23}$$

olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ vardır. $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğu için her $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $f(x_n) \leq$

$d(x_n,x_{n+1})$ olur ki $\delta \leq \theta$ olur. $\delta = \theta$ olduğunu gösterelim. İlk önce, varsayalım ki $\delta = 0$ varsayılırsa (2.5.21) ve (2.5.22) dan $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$ elde edilir. Eğer $\delta = 0$ ise $\theta = \delta$ olur. Şimdi varsayalım ki $\delta > 0$ dır. $\delta = \theta$ olduğunu göstermek için $\theta > \delta$ olduğunu kabul edilirse $\theta - \delta > 0$ olduğu için (2.5.21) ve (2.5.22) dan her $n \geq n_0$ için

$$f(x_n) < \delta + \frac{\theta - \delta}{4} \tag{2.5.24}$$

ve

$$\theta - \frac{\theta - \delta}{4} < d(x_n,x_{n+1}) \tag{2.5.25}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (2.5.19), (2.5.24) ve (2.5.25) den her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))}(\theta - \frac{\theta-\delta}{4}) &< \sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))}d(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq f(x_n) < \delta + \frac{\theta-\delta}{4}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $n \geq n_0$ için

$$\sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1}))} \leq \frac{\theta + 3\delta}{3\theta + \delta} \tag{2.5.26}$$

olup $h = \frac{\theta+3\delta}{3\theta+\delta} = 1 - \frac{2(\theta-\delta)}{3\theta+\delta}$ denilirse $\theta > \delta$ olduğundan $h < 1$ olur. (2.5.20), ve (2.5.26) den her $n \geq n_0$ için

$$f(x_{n+1}) \leq hf(x_n)$$

elde edilir. Dolayısıyla $k \geq 1$ için

$$f(x_{n_0+k}) \leq h^k f(x_{n_0}) \tag{2.5.27}$$

dır. $\delta > 0$ ve $h < 1$ olduğu için $h^k f(x_{n_0}) < \delta$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (2.5.27) den her $n \geq 0$ için $\delta < f(x_n)$ olduğu için

$$\delta \leq f(x_{n_0+k_0}) \leq h^{k_0} f(x_{n_0}) < \delta$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\theta = \delta$ bulunur. Şimdi $\theta = 0$ olduğunu göstermek için

$$\theta = \delta \leq f(x_n) \leq d(x_n, x_{n+1})$$

olduğu için (2.5.23) ifadesi

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \theta^+$$

olarak tekrar yazılabilirmektedir. O halde $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisinin

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) = \theta^+$$

olacak şekilde bir $\{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})\}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla

$$\limsup_{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})\to\theta^+} \sqrt{\varphi(d(x_{n_k}, x_{n_k+1})} < 1$$

olur. (2.5.20) den

$$f(x_{n_k+1}) \leq \sqrt{\varphi(d(x_{n_k}, x_{n_k+1})} f(x_{n_k})$$

elde edilir. (2.5.21) den ve $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\delta &= \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k+1}) \\
&\leq (\limsup_{k\to\infty} \sqrt{\varphi(d(x_{n_k}, x_{n_k+1}))})(\limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})) \\
&= (\limsup_{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})\to\theta^+} \sqrt{\varphi(d(x_{n_k}, x_{n_k+1}))})\delta
\end{aligned}$$

olur. $\delta > 0$ olduğu için

$$1 \leq \limsup_{d(x_{n_k}, x_{n_k+1})\to\theta^+} \sqrt{\varphi(d(x_{n_k}, x_{n_k+1})}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\delta = 0$ bulunur. O zaman (2.5.21) ve (2.5.22) dan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{2.5.28}$$

elde edilir. O halde (2.5.28) den

$$\alpha = \limsup_{d(x_n,x_{n+1})\to\theta^+} \sqrt{\varphi(d(x_n,x_{n+1})} < 1$$

olmaktadır. İspatın geri kalanı, Teorem 2.5.12 de olduğu gibi yapılmaktadır. □

Uyarı 9. Teorem 2.5.13 den kolayca Feng-Liu sabit nokta teoremi ve Klim-Wardowski sabit nokta teoremi elde edilmektedir. Ayrıca, Teorem 2.5.13, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesidir. Gerçekten, α, (2.5.2) şartını sağlayan bir $\mathscr{MT}$-fonksiyon olmak üzere,.T dönüşümü Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin tüm şartlarını sağlasın. O halde, $\{x_n\}$, x noktasına yakınsayan bir dizi olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(x) &= D(x,Tx) \\
&\leq d(x,x_n)+D(x_n,Tx) \\
&\leq d(x,x_n)+D(x_n,Tx_n)+H(Tx_n,Tx) \\
&\leq d(x,x_n)+f(x_n)+\alpha(d(x_n,x))d(x_n,x)
\end{aligned}$$

olup $n\to\infty$ için limit alınırsa $f(x)\leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ olduğundan $f(x)=D(x,Tx)$ ile tanımlı f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Diğer taraftan her $x\in X$ ve her $y\in Tx$ için

$$D(y,Ty)\leq H(Tx,Ty)\leq \alpha(d(x,y))d(x,y)$$

ve

$$\sqrt{\varphi(d(x,y))}d(x,y)\leq d(x,Tx)$$

şartları sağlandığından Teorem 2.5.13 in tüm şartları sağlanmaktadır.

Aşağıdaki teoremde, Teorem 2.5.12 ın biraz değişiklik ve iyileştirme yapılmış hali verilmektedir. Bu teoremin ispatı, Teorem 2.5.12 de olduğu gibi elde edilmektedir

Teorem 2.5.14. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T:X\to\mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm ve $0<a<1$ olmak üzere $\varphi:[0,\infty)\to[a,1)$ fonksiyonu her $s\in[0,\infty)$ için $\limsup_{t\to s^+}\varphi(t)<1$ şartını sağlasın. Her $x\in X$ için*

$$\sqrt[\frac{n-1}{n}]{\varphi(f(x))}d(x,y)\leq D(x,Tx)$$

ve

$$D(y,Ty) \leq \varphi(D(x,Tx))d(x,y)$$

olacak şekilde bir $y \in Tx$ var olsun. Eğer, $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki örnekler, Teorem 2.5.12 ve Teorem 2.5.13 in, Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu göstermesi bakımından önem teşkil etmektedir.

Örnek 17. $X = [0,1]$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriği göz önüne alınsın. O halde (X,d) tamdır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{2}x^2\} & , \quad x \in [0,\frac{15}{32}) \cup (\frac{15}{32},1] \\ \\ \{\frac{17}{96},\frac{1}{4}\} & , \quad x = \frac{15}{32} \end{cases}$$

ve $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu

$$\varphi(t) = \begin{cases} \max\{\frac{1}{12},\frac{23}{12}t\} & , \quad t \in [0,\frac{7}{32}) \cup (\frac{7}{32},\frac{1}{2}] \\ \\ \frac{161}{288} & , \quad t = \frac{7}{32} \\ \\ \frac{23}{24} & , \quad t \in (\frac{1}{2},\infty) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Teorem 2.5.13 in tüm şartları sağlanır. Gerçekten,

$$f(x) = D(x,Tx) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & , \quad x \in [0,\frac{15}{32}) \cup (\frac{15}{32},1] \\ \\ \frac{23}{24} & , \qquad x = \frac{15}{32} \end{cases}$$

fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Ayrıca, eğer $x \in [0,\frac{15}{32}) \cup (\frac{15}{32},1]$ ise $y = Tx = \{\frac{1}{2}x^2\}$

ve $d(x,y)=d(x,Tx)=x-\frac{1}{2}x^2$ den

$$\begin{aligned}
D(y,Ty) &= \left|\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right| = \frac{1}{2}(x^2-(\frac{1}{2}x^2)^2) \\
&= \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^2)(x-\frac{1}{2}x^2) \\
&= \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}x^2)d(x,y) \\
&\leq \max\{\frac{1}{12},\frac{23}{12}(x-\frac{1}{2}x^2)\}d(x,y) \\
&= \varphi(d(x,y))d(x,y)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x=\frac{15}{32}$ ve $y=\frac{17}{96}\in Tx$ için de (2.5.17) ve (2.5.18) eşitsizlikleri sağlanmaktadır. Dolayısıyla, T dönüşümü Teorem 2.5.13 in tüm şartlarını sağlamaktadır. Dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan, Klim-Wardowski sabit nokta teoremi bu örnek için uygulanamaz. Gerçekten, eğer $b\in(0,\frac{3}{4}]$ ise o zaman $\varphi(d(x,y))<\frac{3}{4}$ olup $x=1$ için $Tx=\{\frac{1}{2}\}$, $Ty=\{\frac{1}{8}\}$, $d(x,y)=\frac{1}{2}$ ve $D(y,Ty)=\frac{3}{8}$ olduğundan

$$D(y,Ty)=\frac{3}{4}\frac{1}{2}=\frac{3}{4}d(x,y)\nleq\varphi(d(x,y))d(x,y)$$

elde edilir. O halde, $b\in(0,\frac{3}{4}]$ için Klim-Wardowski sabit nokta teoreminin (2.5.7) eşitsizliği sağlanmaz. Eğer, $b\in(\frac{3}{4},1)$ ise $x=\frac{15}{32}$ için $bd(x,y)\leq D(x,Tx)$ ve (2.5.7)eşitsizliğini sağlayan bir $y\in Tx=\{\frac{17}{96},\frac{1}{4}\}$ bulunmamaktadır. Gerçekten,eğer $y=\frac{17}{96}\in Tx$ ise $d(x,y)=\frac{7}{24}$, $d(x,Tx)=\frac{7}{32}$ ve $b>\frac{3}{4}$ olduğundan

$$bd(x,y)\nleq\frac{3}{4}d(x,y)=\frac{3}{4}\frac{7}{24}=\frac{7}{32}=D(x,Tx)$$

olup $y=\frac{17}{96}$ için $bd(x,y)\leq D(x,Tx)$ eşitsizliği sağlanmamaktadır. Eğer, $y=\frac{1}{4}\in Tx$ ise, o zaman $Ty=\{\frac{1}{32}\}$, $d(x,y)=D(x,Tx)=D(y,Ty)=\frac{7}{32}$ ve $\varphi(d(x,y))<1$ olduğundan

$$D(y,Ty)=d(x,y)\nleq\varphi(d(x,y))d(x,y)$$

olacak şekilde her hangi bir $\varphi:[0,\infty)\to[0,b)\subset[0,1)$ fonksiyonu bulunamamaktadır. O halde, $y=\frac{1}{4}$ için (2.5.7)eşitsizliği sağlanmaz.

Örnek 18. X ve $T:X\to\mathscr{C}(X)$ dönüşümü ve φ fonksiyonu Örnek 17 deki gibi tanımlanmak üzere $\varphi_1 : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) & , \quad t \neq \frac{7}{32} \\ \\ \varphi(\frac{7}{24}) & , \quad t = \frac{7}{32} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde T dönüşümü φ_1 fonksiyonu ile beraber Teorem 2.5.12 in tüm şartlarını sağlar. Fakat, Klim-Wardowski sabit nokta teoremi bu örnek için uygulanamaz.

3 . ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara yer vereceğiz. İlk olarak, tek değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı göz önüne alınarak bunun küme değerli versiyonu tanımlanacak ve böyle dönüşümler için sabit nokta sonuçları elde edilecektir. Ardından, materyal ve yöntemler kısmında küme değerli dönüşümler için bahsedilen sabit nokta sonuçlarının karşılıkları göz önüne alınarak sabit nokta teoremleri verilip ispatlarına değinilecektir. Ayrıca, elde edilen sonuçların bir genelleştirme olduğu örneklerle desteklenecektir.

3.1. Küme Değerli F-Büzülme Dönüşümler

Wardowski'nin F-Büzülme kavramının küme değerli versiyonları üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır. Şimdi F-büzülme dönüşümlerinin küme değerli versiyonunu verelim.

Tanım 3.1.1. (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathscr{F}$ ve $T : X \to \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye küme değerli F-büzülme adı verilir.

Küme değerli F-büzülme kavramında F fonksiyonu $F(\alpha) = \ln(\alpha)$ olarak göz önüne alınırsa, her küme değerli büzülme, bir küme değerli F-büzülme olur. Nadler sabit nokta teoreminin ifadesinde de bahsedildiği gibi tam metrik uzayda küme değerli her büzülme dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Buna dayanarak, küme değerli F-büzülme dönüşümlerinin de tam metrik uzayda sabit noktasının var olup olmadığı problemi üzerine çalışılmıştır. Bununla ilgili aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 3.1.1 ([23])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $T : X \to \mathscr{K}(X)$ küme değerli F-büzülme dönüşümü ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx kümesi boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde bir $x_1 \in X$ seçibiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. O halde $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Öte yandan, $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olup, (3.1.1) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau \tag{3.1.2}$$

elde edilir. Tx_1 kompakt olduğundan, $d(x_1,x_2) = D(x_1,Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu durumda (3.1.2) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau$$

olur. Eğer bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) - \tau \tag{3.1.3}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Eğer $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise o zaman x_{n_0}, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. O halde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \notin Tx_n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n = d(x_n,x_{n+1})$ denilirse $a_n > 0$ olduğundan ve (3.1.3) eşitsizliğini kullanarak

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \tau \leq F(a_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(a_0) - n\tau \tag{3.1.4}$$

elde edilir. (3.1.4) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olur. (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olacağından (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.1.4) eşitsizliğinde her $\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.1.5}$$

olur. (3.1.5) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0 \tag{3.1.6}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.1.6) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $a_n^k n\tau \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i < \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan (3.1.1) eşitsizliğinden $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) < d(x,y)$$

olduğundan her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y)$$

olur. O zaman

$$D(x_{n+1},Tz) \leq H(Tx_n,Tz) \leq d(x_n,z)$$

olacağından $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z,Tz) = 0$ bulunur. Buradan $z \in Tz$ olduğundan T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. □

Uyarı 10. Dikkat edelim ki Teorem 3.1.1 de her $x \in X$ için Tx kompaktır. Bu yüzden Reich probleminde olduğu gibi aşağıdaki soru akla gelmektedir.

Problem 2. Teorem 3.1.1 de $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alındığında T, X de bir sabit noktaya sahip midir?

Bu problemin cevabı aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alındığında T nin X de bir sabit noktaya sahip olmayabileceğinden dolayı negatiftir. Dolayısıyla, Teorem 3.1.1 de aynı şartlar altında $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alınamaz.

Örnek 19. $X = [0,1]$ üzerinde

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \\ 1+|x-y| & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı d metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tamdır. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} Q & , \quad x \in I \\ \\ I & , \quad x \in Q \end{cases},$$

ve $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(\alpha) = \begin{cases} \ln\alpha & , \quad \alpha \leq 1 \\ \\ \alpha & , \quad \alpha > 1 \end{cases},$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T nin sabit noktasının olmadığı açıktır ve F fonksiyonu (F1)-(F3) koşullarını sağlar. Şimdi $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekilde her $x,y \in X$ için

$$1 + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

eşitsizliğinin sağlandığını görelim. $H(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow \{x,y\} \cap Q$ kümesi tek elemanlı olduğu için $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekilde her $x,y \in X$ için $H(Tx,Ty) = H(Q,I) = 1$ ve $d(x,y) = 1 + |x-y| > 1$ olduğundan $F(H(Tx,Ty)) = 0$ ve $F(d(x,y)) = 1 + |x-y|$ olur ki bu ise

$$1 + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

demektir. O halde, Problem 2 in tüm koşulları sağlanır, ancak T nin X de hiç bir sabit noktası yoktur.

Teorem 3.1.1 de $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{CB}(X)$ alınıp alınamayacağı yine araştırılmıştır. Bunun için F fonksiyonunun aşağıdaki (F4) şartının sağlamasına ihtiyaç duyulmuştur:

(F4) $\inf A > 0$ olacak şekildeki her $A \subseteq (0,\infty)$ için $F(\inf A) = \inf F(A)$ dır.

Lemma 3.1.1. *F fonksiyonu (F1) şartını sağlasın. O zaman, (F4) şartının sağlanması için gerek ve yeter koşul F nin sağdan sürekli olmasıdır.*

İspat. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına sağdan yakınsayan, genelliği bozmamaksızın, kesin azalan bir dizi olsun. Bu durumda $x = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olacağından (F4) şartı gereğince $F(x) = \inf\{F(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ elde edilir. (F1) şartı ile birlikte $\{F(x_n)\}$ kesin azalan bir dizi olacağından $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$ elde edilir. O halde, F sağdan sürekli olur.
Tersine $\inf A = a > 0$ olsun. (F1) şartı ile birlikte $F(a) \leq \inf F(A)$ bulunur. Diğer taraftan, $\inf A = a$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < a + \frac{1}{n}$ olacak şekilde A da bir $\{a_n\}$ dizisi elde edilebilir. Böylece, $\{a_n\}$ dizisi a ya sağdan yakınsak olup F sağdan sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = F(a)$ olur. Bu ise $\inf F(A) \leq F(a)$ demektir. □
Burada, (F1)-(F4) şartlarını sağlayan $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfı kolaylık olması bakımından $\mathscr{F}_*$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.2 ([23])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. Eğer $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ küme değerli F-büzülme dönüşümü ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ olup, $D(x_1,Tx_1) \leq$

$H(Tx_0, Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

elde dilir ki (3.1.1) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau \tag{3.1.7}$$

olur. Dikkat edelim ki $D(x_1, Tx_1) > 0$ dır. (F4) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) = \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y))$$

olacağından (3.1.7) eşitsizliğinden

$$\inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau < F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2} \tag{3.1.8}$$

bulunur. O zaman (3.1.8) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi takdirde benzer yolla

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(d(x_2, x_1)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ elde edebiliriz. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. İspatın geri kalan kısmı, Teorem 3.1.1 ispatında olduğu gibi yapılabilir. □

Aşağıdaki örnek, küme değerli F-büzülme dönüşümü olan fakat küme değerli büzülme dönüşümü olmayan dönüşümlerin var olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Örnek 20. $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile birlikte göz önüne alınsın. O zaman (X,d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{K}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \\ \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

ve $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(\alpha) = \alpha + \ln\alpha$ şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü $\tau = 1$ ile birlikte küme değerli F-büzülmedir. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım. Öncelikle, her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$H(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow ((m > 2 \wedge n = 1) \vee (m > n > 1))$$

dır. Şimdi eğer $m > 2$ ve $n = 1$ ise o zaman,

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx_m,Tx_1)}{d(x_m,x_1)} e^{H(Tx_m,Tx_1)-d(x_m,x_1)} &= \frac{x_{m-1}-x_1}{x_m-x_1} e^{x_{m-1}-x_m} \\ &= \frac{m^2-m-2}{m^2+m-2} e^{-m} < e^{-m} < e^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $m > n > 1$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx_m,Tx_n)}{d(x_m,x_n)} e^{H(Tx_m,Tx_n)-d(x_m,x_n)} &= \frac{x_{m-1}-x_{n-1}}{x_m-x_n} e^{x_{m-1}-x_{n-1}-x_m+x_n} \\ &= \frac{m+n-1}{m+n+1} e^{n-m} < e^{n-m} \le e^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden T bir küme değerli F-büzülmedir. Ayrıca Teorem 3.1.1 veya Teorem 3.1.2 nin diğer şartları da sağlanır. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Tx_n,Tx_1)}{d(x_n,x_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1}-1}{x_n-1} = 1$$

olduğu için T küme değerli büzülme dönüşümü değildir.

Küme değerli F-büzülme dönüşümlerin Ćirić tip versiyonunu aşağıdaki yeni kavram ile verelim.

Tanım 3.1.2. (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathscr{F}$ ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun.

Eğer $H(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$M(x,y) = \max\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{1}{2}[D(x,Ty)+D(y,Tx)]\right\}$$

olmak üzere

$$H(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y)) \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye genelleştirilmiş (Ćirić tip) küme değerli F-büzülme denir.

$\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$H(Tx,Ty)) \leq \lambda M(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan her küme değerli $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü, $F(\alpha) = \ln(\alpha)$ ve $\tau = -\ln(\lambda)$ sabiti ile birlikte bir genelleştirilmiş küme değerli F-büzülmedir.
Genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta sonucu verelim. Bu teoremde dikkat edilmelidir ki T veya F sürekli olarak kabul edilmektedir.

Teorem 3.1.3 ([24])**.** *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{K}(X)$ genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olsun. Eğer T veya F sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Öte yandan, $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur. Dolayısıyla (3.1.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \\
&\leq F(M(x_0,x_1))-\tau \\
&= F(\max\left\{\begin{array}{l} d(x_0,x_1),D(x_0,Tx_0),D(x_1,Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0,Tx_1)+D(x_1,Tx_0)\right] \end{array}\right\})-\tau \\
&\leq F(\max\left\{d(x_0,x_1),\frac{1}{2}D(x_0,Tx_1)\right\})-\tau \\
&\leq F(\max\left\{d(x_0,x_1),\frac{1}{2}\left[d(x_0,x_1)+D(x_1,Tx_1)\right]\right\})-\tau \\
&\leq F(\max\{d(x_0,x_1),D(x_1,Tx_1)\})-\tau \\
&= F(d(x_0,x_1))-\tau \qquad (3.1.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Tx_1 kompakt olduğundan $d(x_1,x_2)=D(x_1,Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O zaman (3.1.10) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0))-\tau$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1}))-\tau \qquad (3.1.11)$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. Teorem 2.3.1 deki gibi $\{x_n\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz$ ve

$$D(x_n,Tz) \leq H(Tx_n,Tz)$$

dir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında $D(z,Tz)=0$ elde edilir. Dolayısıyla $z \in Tz$ dir.

Şimdi F sürekli olsun. Bu durumda biz iddia ediyoruz ki $z \in Tz$ dir. Aksini kabul edelim. Yani, $z \notin Tz$ olsun. Bu durumda her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1},Tz) > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Aksi halde her $n \geq n_1$ için $x_n \in Tz$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki bu ise $z \in Tz$ olması demektir. Bu ise $z \notin Tz$ olması ile çelişir. O halde $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\tau + F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq \tau + F(H(Tx_{n_k}, Tz)) \\
&\leq F(M(x_{n_k}, z)) \\
&\leq F(\max \left\{ \begin{array}{c} d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1}) \end{array} \right\})
\end{aligned}$$

elde edilir. F nin sürekliliği kullanılırsa $k \to \infty$ için limit alındığında $\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$ bulunur ki bu ise bir çelişkidir. O halde $z \in Tz$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.3 de, eğer $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü $F \in \mathscr{F}_*$ ile birlikte göz önüne alınırsa, aynı şartlar altında T nin X de yine bir sabit noktaya sahip olduğu kolay bir şekilde gösterilebilir.

Şimdi, küme değerli F-büzülme dönüşümündeki τ sabiti $d(x,y)$ nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alarak, yeni bir kavram verelim ve bu yeni kavram ile ilgili önemli sabit nokta sonucu ifade ve ispat edelim.

Tanım 3.1.3. (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathscr{F}$, $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ ve $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ iki dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\tau(d(x,y)) + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{3.1.12}$$

oluyorsa T ye küme değerli (F,τ)-büzülme (küme değerli lineer olmayan F-büzülme) denir.

Eğer (3.1.12) deτ yu sabit olarak alınırsa, T bir küme değerli F-büzülme dönüşümü olur. O halde, her küme değerli F-büzülme dönüşümleri küme değerli (F,τ)-büzülmedir.

Teorem 3.1.4. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{K}(X)$ küme değerli (F,τ)-büzülme olsun Eğer τ fonksiyonu her $s \in [0,\infty)$ için*

$$\liminf_{t \to s^+} \tau(t) > 0 \tag{3.1.13}$$

şartını sağlıyorsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçibilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise ispat biter. Bu yüzden $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur. (3.1.12) kullanılarak

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau(d(x_1,x_0)) \qquad (3.1.14)$$

elde edilir. Tx_1 kümesi kompakt olduğundan $d(x_1,x_2) = D(x_1,Tx_1)$ olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. (3.1.14) dan

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau(d(x_1,x_0)).$$

bulunur. Böyle devam edelirse, X de $x_{n+1} \in Tx_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) - \tau(d(x_n,x_{n-1})) \qquad (3.1.15)$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi bulabiliriz. Dikkat edelim ki $x_n \notin Tx_n$ olduğunu kabul etmekteyiz. Aksi halde ispat biter. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n = d(x_n,x_{n+1})$ olsun. O zaman $a_n > 0$ ve (3.1.15) den $\{a_n\}$ azalan bir dizidir. Bu dizi alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır ve bu yakınsadığı nokta $\delta \geq 0$ olsun, yani $\lim_{n\to\infty} a_n = \delta^+$ dır. Şimdi $\delta > 0$ olsun. Dolayısıyla (3.1.13) gereğince her $n \geq n_0$ için $\tau(a_n) > b$ olacak şekilde $b > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde (3.1.15) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned}
F(a_n) &\leq F(a_{n-1}) - \tau(a_{n-1}) \\
&\leq F(a_{n-2}) - \tau(a_{n-1}) - \tau(a_{n-2}) \\
&\ \ \vdots \\
&\leq F(a_0) - \tau(a_{n-1}) - \tau(a_{n-2}) - \cdots - \tau(a_0) \\
&= F(a_0) - \{\tau(a_0) + \tau(a_1) + \cdots + \tau(a_{n_0-1})\} - \{\tau(a_{n_0}) + \tau(a_{n_0+1}) + \cdots \tau(a_{n-1})\} \\
&\leq F(a_0) - (n-n_0)b. \qquad (3.1.16)
\end{aligned}$$

elde edelir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olup (F2) den $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır. (3.1.16) ifadesinden her $n \geq n_0$ için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k (n - n_0) b \leq 0,$$

yani,

$$0 \leq a_n^k (n - n_0) b \leq a_n^k F(a_0) - a_n^k F(a_n) \tag{3.1.17}$$

elde edilir. (3.1.17) da $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0 \tag{3.1.18}$$

olur. O halde (3.1.18) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $a_n^k n \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak, her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} a_i < \sum_{i=n}^{\infty} a_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan (3.1.12) eşitsizliğinden $H(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) < d(x, y)$$

elde edilir ve böylece her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y)$$

olur. O zaman

$$D(x_{n+1},Tz) \leq H(Tx_n,Tz) \leq d(x_n,z)$$

olacağından $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z,Tz) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $z \in Tz$ elde edilir. Böylece, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

Uyarı 11. Örnek 19 gereğince Thm 3.1.4 de $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ alınamamaktadır. Fakat, (F4) koşulu ile birlikte alınabileceği aşağıda ispat edilmiştir.

Teorem 3.1.5. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}\mathscr{B}(X)$ dönüşümü $F \in \mathscr{F}_*$ olmak üzere bir küme değerli (F,τ)-büzülme olsun Eğer τ fonksiyonu her $s \in [0,\infty)$ için*

$$\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > 0$$

şartını sağlıyorsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise ispat biter. Bu yüzden $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur. (3.1.12) kullanılarak

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau(d(x_1,x_0)) \tag{3.1.19}$$

elde edilir. (F4) den ve $D(x_1,Tx_1) > 0$ olduğundan

$$F(D(x_1,Tx_1)) = \inf_{y\in Tx_1} F(d(x_1,y))$$

yazabiliriz ve böylece (3.1.19) ifadesinden

$$\begin{aligned} \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1,y)) &\leq F(d(x_1,x_0)) - \tau(d(x_1,x_0)) \\ &< F(d(x_1,x_0)) - \frac{\tau(d(x_1,x_0))}{2} \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

elde edilir. O zaman (3.1.20) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \frac{\tau(d(x_1,x_0))}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi halde aynı yolla

$$F(d(x_2,x_3)) \leq F(d(x_2,x_1)) - \frac{\tau(d(x_2,x_1))}{2}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ bulabiliriz. O halde bu şekilde devam edilirse X de $x_{n+1} \in Tx_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) - \frac{\tau(d(x_n,x_{n-1}))}{2}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.1.4 deki gibi yapılabilir. □

Teorem 3.1.5 de $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(\alpha) = \ln(\alpha)$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Sonuç 3.1.1. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t \to s^+} \tau(t) > 0$ şartını sağlasın. Eğer $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü, $x \neq y$ özelliğndeki her $x,y \in X$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq e^{-\tau(d(x,y))} d(x,y),$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.1.1 de özel bir $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu göz önüne alarak Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi elde edilmektedir.

Sonuç 3.1.2. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $\alpha : (0,\infty) \to (0,1)$ fonksiyonu her $s \in$*

$[0,\infty)$ *için* $\limsup_{t\to s^+} \alpha(t) < 1$ *şartını sağlasın. Eğer* $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ *dönüşümü* $x \neq y$ *özelliğindeki her* $x,y \in X$ *için*

$$H(Tx,Ty) \leq e^{-\tau(d(x,y))} d(x,y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman T, X *de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu $\tau(t) = -\ln \alpha(t)$ olarak tanımlansın. Eğer her $s \in [0,\infty)$ için $\limsup_{t\to s^+} \alpha(t) < 1$ ise o zaman her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > 0$ olur. O halde, Sonuç 3.1.1 gereğince ispat tamamlanır. □

Şimdi, küme değerli F-büzülme dönüşümlerinin, küme değerli hemen hemen büzülme versiyonunu ifade edelim.

Tanım 3.1.4. (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathscr{F}$ ve $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y) + \lambda D(y,Tx)) \tag{3.1.21}$$

olacak şekilde $\tau > 0$ ve $\lambda \geq 0$ sabitleri varsa T ye küme değerli hemen hemen F-büzülme denir.

O halde, her küme değerli hemen hemen büzülme dönüşümü $F(\alpha) = \ln \alpha$ ve $\tau = -\ln \delta$ sabiti ile birlikte bir küme değerli hemen hemen F-büzülmedir.

Teorem 3.1.6. (X,d) *tam bir metrik uzay ve* $F \in \mathscr{F}_*$ *olsun. Eğer,* $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ *bir küme değerli hemen hemen* F*-büzülme dönüşümü ise, o zaman* T, X *de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise ispat biter. Bu yüzden $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur ve (3.1.21) den

$$\begin{aligned} F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1,x_0)+\lambda D(x_1,Tx_0))-\tau \\ &= F(d(x_1,x_0))-\tau \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

elde edilir. (F4) den ve $D(x_1,Tx_1)>0$ olduğundan

$$F(D(x_1,Tx_1)) = \inf_{y\in Tx_1} F(d(x_1,y)),$$

ve (3.1.22) dan

$$\inf_{y\in Tx_1} F(d(x_1,y)) \leq F(d(x_1,x_0))-\tau \tag{3.1.23}$$

elde edilir. O zaman (3.1.23) ifadesinden

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(d(x_1,x_0))-\tau$$

olacak şekilde bir $x_2\in Tx_1$ vardır. Eğer $x_2\in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi halde

$$F(d(x_2,x_3)) \leq F(d(x_2,x_1))-\tau$$

olacak şekilde $x_3\in Tx_2$ bulabiliriz. O halde bu şekilde devam edilirse X de $x_{n+1}\in Tx_n$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) - \frac{\tau(d(x_n,x_{n-1}))}{2} \tag{3.1.24}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi bulabiliriz. Teorem 3.1.4 de olduğu gibi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir.

Diğer taraftan (3.1.21) eşitsizliğinden $H(Tx,Ty)>0$ olacak şekildeki $x,y\in X$ için

$$H(Tx,Ty) < d(x,y)+\lambda D(y,Tx)$$

elde edilir ve böylece her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y) + \lambda D(y,Tx)$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} D(x_{n+1},Tz) &\leq H(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(x_n,z) + \lambda D(z,Tx_n) \\ &\leq d(x_n,z) + \lambda d(z,x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$D(x_{n+1},Tz) \leq H(Tx_n,Tz) \leq d(x_n,z) \tag{3.1.25}$$

olacağından son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z,Tz) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $z \in Tz$ elde edilir. Böylece, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Uyarı 12. Teorem 3.1.6 de $T : X \to \mathscr{K}(X)$ ise o zaman F üzerinde (F4) şartı kaldırılabilir. Gerçekten, $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman ispat biter. Bu yüzden $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur ve (3.1.21) den

$$\begin{aligned} F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1,x_0) + \lambda D(x_1,Tx_0)) - \tau \\ &= F(d(x_1,x_0)) - \tau \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

elde edilir. Tx_1 kompakt olduğundan $d(x_1,x_2) = D(x_1,Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde (3.1.26) den

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau$$

elde edilir. Teoremin geri kalanı Teorem 3.1.6 de olduğu gibi yapılabilir.

Uyarı 13. Eğer (2.5.4) eşitsizliğini sağlayan $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa, o zaman $F(\alpha) = \ln \alpha$, $\tau = -\ln \delta$ and $\lambda = \frac{L}{\delta}$ ile birlikte (3.1.21) eşitsizliği de sağlanır. O halde Teorem 2.5.7, Teorem 3.1.6 nin özel bir halidir.

Uyarı 14. Eğer (3.1.1) eşitsizliğini sağlayan bir $\tau > 0$ ve $F \in \mathscr{F}_*$ varsa o zaman $\lambda = 0$ ile birlikte (3.1.21) eşitsizliği de sağlanır. Bu yüzden, Teorem 3.1.2, Teorem 3.1.6 nin özel bir halidir.

Aşağıdaki iki örnek, Teorem 3.1.6 in sırasıyla Teorem 2.5.7 ve Teorem 3.1.2 lerinin uygun bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 21. $X = \{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) bir tam metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \\ \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

ve $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ şeklinde tanımlansın. O zaman Örnek 20 de gösterildiği gibi , $\tau = 1$ ve $\lambda \geq 0$ sabitleri ile birlikte T nin bir küme değerli hemen hemen F-büzülme olduğu gösterilebilir. O halde, Teorem 3.1.6 in tüm şartları sağlanır ve böylece T, X de bir sabit noktaya sahiptir.
Öte yandan $D(x_1, Tx_n) = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olduğundan (2.5.4) eşitsizliğini sağlayan bir $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ bulunamayacağından T dönüşümü bir küme değerli hemen hemen büzülme değildir. Yani, Teorem 2.5.7 bu örneğe uygulanamaz.

Örnek 22. $X = [0,1] \cup \{2,3\}$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \left[\frac{1-x}{3}, \frac{1-x}{2}\right] & , \quad x \in [0,1] \\ \\ \{x\} & , \quad x \in \{2,3\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $H(T2,T3) = 1 = d(2,3)$ olduğundan her $F \in \mathscr{F}$ ve $\tau > 0$ için

$$\tau + F(H(T2,T3)) > F(d(2,3))$$

elde edileceğinden T bir küme değerli F-büzülme dönüşümü değildir. O halde,Teorem 3.1.2 bu örneğe uygulanamaz.

Şimdi, $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $F(\alpha) = \ln \alpha$ ile göz önüne alınırsa, o zaman T dönüşümü, $\tau = \ln 2$ ve $\lambda = 10$ sabitleri ile birlikte küme değerli hemen hemen F-büzülmedir. Gerçekten, dikkat edelim ki eğer $H(Tx,Ty) > 0$ ise o zaman $x \neq y$, ve böylece $x \neq y$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$\tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y) + \lambda D(y,Tx))$$

ve buna denk olarak

$$H(Tx,Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y) + \lambda e^{-\tau} D(y,Tx)$$

ve böylece

$$H(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2} d(x,y) + 5D(y,Tx)] \tag{3.1.27}$$

elde edilir. Şimdi, eğer $x,y \in [0,1]$ ise o zaman

$$H(Tx,Ty) = \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2} d(x,y)$$

olur. Eğer $x,y \in \{2,3\}$ ise o zaman

$$H(Tx,Ty) = d(x,y) = D(y,Tx) = |x-y|$$

olur. Eğer, $x \in [0,1]$ ve $y \in \{2,3\}$ ise o zaman

$$H(Tx,Ty) = \frac{3y+x-1}{3}, d(x,y) = y-x \text{ ve } D(y,Tx) = \frac{2y+x-1}{2}$$

olup

$$\frac{1}{2} d(x,y) + 5D(y,Tx) = \frac{11y+4x-5}{2}$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{3y+x-1}{3} \leq \frac{11y+4x-5}{2}$ olduğundan (3.1.27) eşitsizliği sağlanır. Son olarak, eğer $x \in \{2,3\}$ ve $y \in [0,1]$ ise o zaman

$$H(Tx,Ty) = \frac{3x+y-1}{3}, d(x,y) = x-y \text{ ve } D(y,Tx) = x-y$$

olup

$$\frac{1}{2}d(x,y) + 5D(y,Tx) = \frac{11}{2}(x-y)$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{3x+y-1}{3} \leq \frac{11}{2}(x-y)$ olduğundan (3.1.27) eşitsizliği sağlanır. O halde, Teorem 3.1.6 in tüm şartları sağlanır ve böylece T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi de küme değerli hemen hemen F-büzülme dönüşümünün lineer olmayan versiyonunu ifade edelim.

Tanım 3.1.5. (X,d) bir metrik uzay, $F \in \mathscr{F}$, $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ ve $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ dönüşümü her $s \in [0,\infty)$ için

$$\liminf_{t \to s^+} \tau(t) > 0 \tag{3.1.28}$$

şartını sağlasın. Eğer $H(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x,y \in X$ için

$$\tau(d(x,y)) + F(H(Tx,Ty)) \leq F((d(x,y) + \lambda D(y,Tx)) \tag{3.1.29}$$

olacak şekilde bir $\lambda \geq 0$ sabiti varsa T ye küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme denir.

Uyarı 15. Tanım 3.1.5 de $\tau(t) = \tau > 0$ olarak göz önüne alınırsa her küme değerli almost F-büzülme dönüşümü bir küme değerli lineer olmayan almost F-büzülmedir.

Uyarı 16. Her küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme ayrıca özel bir F fonksiyonu ile birlikte küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülmedir. Gerçekten, (X,d) bir metrik uzay ve T küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme olsun. O zaman her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) \tag{3.1.30}$$

eşitsizliğini sağlayan $L \geq 0$ sabiti ve bir φ $\mathscr{MT}$-fonksiyonu vardır. $\beta(t) = \frac{1+\varphi(t)}{2}$ olsun. O zaman β da bir $\mathscr{MT}$-fonksiyondur. Bu yüzden (3.1.30) ifadesinden $H(Tx,Ty) >$

0 olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$\begin{aligned} H(Tx,Ty) &\leq \varphi(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) \\ &\leq \frac{1+\varphi(d(x,y))}{2}d(x,y) + L[1+\varphi(d(x,y))]D(y,Tx) \\ &= \beta(d(x,y))d(x,y) + 2L\beta(d(x,y))D(y,Tx) \\ &= \beta(d(x,y))[d(x,y) + 2LD(y,Tx)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$-\ln(\beta(d(x,y))) + \ln(H(Tx,Ty)) \leq \ln(d(x,y) + 2LD(y,Tx)) \qquad (3.1.31)$$

yazabiliriz. Şimdi $\tau(t) = -\ln\beta(t)$ olsun. β bir $\mathscr{MT}$-fonksiyon olduğundan her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t\to s^+}\tau(t) > 0$ olur. Bu yüzden (3.1.31) eşitsizliği göz önüne alınarak $\lambda = 2L$ sabiti ve $F(\alpha) = \ln\alpha$, $\tau(t) = -\ln(\frac{1+\varphi(t)}{2})$ fonksiyonları ile birlikte T bir küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme olur.

Şimdi, küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.7. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. Eğer, $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ bir küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme ise, o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçebiliriz. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise ispat biter. Bu yüzden $x_1 \notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur ve T küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1)) \\ &\leq F(d(x_1,x_0) + \lambda D(x_1,Tx_0)) - \tau(d(x_1,x_0)) \\ &= F(d(x_1,x_0)) - \tau(d(x_1,x_0)). \end{aligned} \qquad (3.1.32)$$

elde edilir. (F4) den ve $D(x_1,Tx_1)>0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$F(D(x_1,Tx_1))=\inf_{y\in Tx_1}F(d(x_1,y)),$$

olup, (3.1.32) den

$$\inf_{y\in Tx_1}F(d(x_1,y))\leq F(d(x_1,x_0))-\tau \tag{3.1.33}$$

bulunur. O halde (3.1.32) den

$$F(d(x_1,x_2))\leq F(d(x_1,x_0))-\tau$$

olacak şekilde bir $x_2\in Tx_1$ vardır. Eğer $x_2\in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi halde

$$F(d(x_2,x_3))\leq F(d(x_2,x_1))-\tau$$

olacak şekilde $x_3\in Tx_2$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse X de $x_{n+1}\in Tx_n$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$F(d(x_n,x_{n+1}))\leq F(d(x_n,x_{n-1}))-\frac{\tau(d(x_n,x_{n-1}))}{2} \tag{3.1.34}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.1.6 de olduğu gibi tamamlanabilir. □

Uyarı 17. Teorem 3.1.7 de $T:X\to\mathcal{K}(X)$ ise o zaman biz F üzerinde (F4) şartını kaldırabiliriz. Gerçeken, $x_0\in X$ ve $x_1\in Tx_0$ olsun. Eğer $x_1\in Tx_1$ ise o zaman ispat biter. Bu yüzden $x_1\notin Tx_1$ olsun. O zaman Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1,Tx_1)>0$ dır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1)\leq H(Tx_0,Tx_1)$ olduğundan (F1) gereğince

$$F(D(x_1,Tx_1))\leq F(H(Tx_0,Tx_1))$$

olur ve (3.1.29) den

$$\begin{aligned}F(D(x_1,Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0,Tx_1))\\ &\leq F(d(x_1,x_0)+\lambda D(x_1,Tx_0))-\tau(d(x_1,x_0))\\ &= F(d(x_1,x_0))-\tau(d(x_1,x_0)).\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

elde edilir. Tx_1 kompakt olduğundan $d(x_1,x_2) = D(x_1,Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O halde (3.1.35) den

$$F(d(x_1,x_2)) \leq F(d(x_1,x_0)) - \tau$$

elde edilir. Teoremin geri kalanı Teorem 3.1.7 de olduğu gibi tamamlanabilir.

Aşağıdaki örnek, T dönüşümünün küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme olmadığını fakat küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme dönüşümü olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Örnek 23. $X = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \cup \{0\}$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriği göz önüne alınsın. O zaman (X,d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{CB}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{0, \frac{1}{(n+1)^2}\} & , \quad x = \frac{1}{n^2}, n > 2 \\ \\ \{x\} & , \quad x = \{0, \frac{1}{4}\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $F \in \mathscr{F}_*$ ve $\sup_{x,y \in X} d(x,y) = \frac{1}{4} < e^2$ olduğunu açıktır. Her $F \in \mathscr{F}_*$ ve (3.1.28) şartını sağlayan her $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyon için

$$\tau(d(0,\frac{1}{4})) + F(H(T0,T\frac{1}{4})) > F(d(0,\frac{1}{4}))$$

olduğundan Teorem 3.1.5 bu örneğe uygulanamaz.
Şimdi, T nin bir küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme dönüşümü olmadığını gösterelim. Gerçekten, her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $L \geq 0$ ve bir φ $\mathscr{MT}$-fonksiyonu var olsun. Bu yüzden, $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ için $D(y,Tx) = 0$,

$$H(Tx,Ty) = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \text{ ve } d(x,y) = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

olduğundan

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \varphi(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2})\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{(2n+3)n^2}{(2n+1)(n+2)^2} \leq \varphi(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}).$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit supremum alınırsa, o zaman

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq \limsup_{t\to 0^+} \varphi(t) < 1$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, T küme değerli lineer olmayan hemen hemen büzülme değildir.

Diğer taraftan, T dönüşümü $\lambda = 1$, $\tau = \ln\frac{100}{81}$ sabitleri ve

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} & , \quad 0 < \alpha < e^2 \\ \\ \frac{2\alpha}{e^3} & , \quad \alpha \geq e^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile birlikte bir küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülme dönüşümüdür. Bunu görmek için $H(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için

$$\ln\frac{100}{81} + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y) + \min\{D(y,Tx), D(x,Ty)\}), \tag{3.1.36}$$

olduğunu göstermeliyiz. Dikkat edelim ki $H(Tx,Ty) > 0$ ise $x \neq y$ dır. Şimdi, aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1: $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{m^2}$, $m > n > 2$, için

$$H(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{H(Tx,Ty)}}} d(x,y)^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)}}}$$

$$= \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}}}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}}}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}}} \left(\frac{m^2-n^2}{n^2m^2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}} \left(\frac{(m+n+2)n^2m^2}{(m+n)(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

dır. Öte yandan

$$\frac{(m+1)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2} \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}} \geq 1,$$

$$\frac{(m+n+2)n^2m^2}{(m+n)(n+1)^2(m+1)^2} < 1$$

ve

$$\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}} > 1$$

olduğu için

$$H(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{H(Tx,Ty)}}} d(x,y)^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)}}} \leq \frac{1}{2} < \frac{81}{100}$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} \ln\frac{100}{81} + F(H(Tx,Ty)) &\leq F(d(x,y)) \\ &\leq F(d(x,y) + \min\{D(y,Tx), D(x,Ty)\}) \end{aligned}$$

olur. Yani (3.1.36) eşitsizliği sağlanır.

Durum 2. $x=\frac{1}{n^2}$, $n>2$ ve $y=0$ için

$$\begin{aligned}
H(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{H(Tx,Ty)}}}d(x,y)^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)}}} &= \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}}}}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}}\\
&= \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}}\\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2}\\
&< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (3.1.36) eşitsizliği sağlanır.

Durum 3. $x=\frac{1}{4}$ ve $y=0$ için $H(Tx,Ty)=d(x,y)=\min\{D(y,Tx),D(x,Ty)\}=\frac{1}{4}$ olduğu için

$$\begin{aligned}
&H(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{H(Tx,Ty)}}}\left[d(x,y)+\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}\right]^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)+\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}}}}\\
= \ & (\frac{1}{4})^2(\frac{1}{2})^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{16}.4=\frac{1}{4}<\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

elde ederiz. Yani (3.1.36) eşitsizliği sağlanır.

Durum 4. $x=\frac{1}{n^2}$, $n>2$ ve $y=\frac{1}{4}$ için $H(Tx,Ty)=\frac{1}{4}$ ve

$$d(x,y)=\min\{D(y,Tx),D(x,Ty)\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n^2}$$

dır. Ayrıca $n\geq 3$ için

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{n^2}\geq\frac{1}{2}-\frac{2}{9}=\frac{5}{18}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
&H(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{H(Tx,Ty)}}}\left[d(x,y)+\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}\right]^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)+\min\{d(y,Tx),d(x,Ty)\}}}}\\
= \ & (\frac{1}{4})^2(\frac{1}{2}-\frac{2}{n^2})^{-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{2}{n^2}}}}\\
\leq \ & \frac{1}{16}(\frac{18}{5})^{\sqrt{\frac{18}{5}}}\\
< \ & \frac{1}{16}(\frac{18}{5})^2\\
= \ & \frac{81}{100}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T küme değerli lineer olmayan hemen hemen F-büzülmedir. Sonuç olarak, Thm 3.1.7 in tüm şartları sağlandığından T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi, Feng-Liu sabit nokta teoreminin F-büzülme karşılıklarını inceleyeceğiz.
$T : X \to \mathscr{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm, $F \in \mathscr{F}$ ve $\sigma > 0$ olsun. $d(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $F_\sigma^x \subseteq X$ kümesi

$$F_\sigma^x = \{y \in Tx : F(d(x,y)) \leq F(D(x,Tx)) + \sigma\}$$

şeklinde tanımlayalım.
Eğer $T : X \to \mathscr{K}(X)$ ise o zaman her $\sigma > 0$ ($\sigma = 0$ için bile) ve $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $F_\sigma^x \neq \emptyset$ dır. Gerçekten, her $x \in X$ için Tx kümesi kompakt olduğundan $d(x,y) = D(x,Tx)$ olacak şekilde bir $y \in Tx$ vardır. Bu yüzden $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $F(d(x,y)) = F(D(x,Tx))$ olur. O halde her $\sigma > 0$ için $F_\sigma^x \neq \emptyset$ dır.
Eğer $T : X \to \mathscr{C}(X)$ ise bazı $x \in X$ ve $\sigma > 0$ için F_σ^x kümesi boş küme olabilir. Örneğin, $X = \{0\} \cup (1,2)$ kümesini $d(x,y) = |x-y|$ metriği ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ kümesi

$$Tx = \begin{cases} (1,2) & , \quad x = 0 \\ \\ \{0\} & , \quad x \in (1,2) \end{cases}$$

ve $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(\alpha) = \begin{cases} \ln \alpha & , \quad \alpha \leq 1 \\ \\ 2\alpha & , \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x = 0$ için $D(0,T0) = 1 > 0$ olup

$$\begin{aligned} F_1^0 &= \{y \in T0 : F(d(0,y)) \leq F(D(0,T0)) + 1\} \\ &= \{y \in (1,2) : F(y) \leq F(1) + 1\} \\ &= \{y \in (1,2) : 2y \leq 1\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $T : X \to \mathscr{C}(X)$ ($T : X \to \mathscr{P}(X)$ olsa bile) ise o zaman her $\sigma > 0$ ve $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $F_\sigma^x \neq \emptyset$ dır. Gerçekten, (F4) şartından

$$\begin{aligned} F_\sigma^x &= \{y \in Tx : F(d(x,y)) \leq F(D(x,Tx)) + \sigma\} \\ &= \{y \in Tx : F(d(x,y)) \leq F(\inf\{d(x,y) : y \in Tx\}) + \sigma\} \\ &= \{y \in Tx : F(d(x,y)) \leq \inf\{F(d(x,y)) : y \in Tx\} + \sigma\} \\ &\neq \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıda, yukarıdaki durumları göz önüne alarak ilgili sabit nokta sonuçları elde edilmiştir.

Teorem 3.1.8. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{K}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in F_\sigma^x$ için*

$$\tau + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$, ($\sigma < \tau$) var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin hiç bir sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. O halde her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ dır. Her $x \in X$ için $Tx \in \mathscr{K}(X)$ olduğundan her $\sigma > 0$ için F_σ^x kümesi boş değildir. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. O zaman

$$\tau + F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(d(x_0,x_1))$$

olacak şekilde bir $x_1 \in F_\sigma^{x_0}$ vardır ve $x_1 \in X$ için

$$\tau + F(D(x_2,Tx_2)) \leq F(d(x_1,x_2))$$

olacak şekilde bir $x_2 \in F_\sigma^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $x_{n+1} \in F_\sigma^{x_n}$ ve

$$\tau + F(D(x_{n+1},Tx_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n+1})) \tag{3.1.37}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. Şimdi bu dizinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $x_{n+1} \in F_{\sigma}^{x_n}$ olduğundan

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(D(x_n, Tx_n)) + \sigma \tag{3.1.38}$$

dır. (3.1.37) ve (3.1.38) ifadelerinden

$$F(D(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq F(D(x_n, Tx_n)) + \sigma - \tau \tag{3.1.39}$$

ve

$$F(d(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq F(d(x_n, x_{n+1})) + \sigma - \tau \tag{3.1.40}$$

elde edilir. Böyle devam edilirse

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_0, x_1)) + n(\sigma - \tau) \tag{3.1.41}$$

ve

$$F(D(x_n, Tx_n)) \leq F(D(x_0, Tx_0)) + n(\sigma - \tau) \tag{3.1.42}$$

bulunur. (3.1.41) ifadesinde $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(d(x_n, x_{n+1})) = -\infty$ elde edilir. O halde (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

yazılabilir. O halde (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} [d(x_n, x_{n+1})]^k F(d(x_n, x_{n+1})) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. (3.1.41) ifadesinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & [d(x_n, x_{n+1})]^k F(d(x_n, x_{n+1})) - [d(x_n, x_{n+1})]^k F(d(x_0, x_1)) \\ \leq\ & [d(x_n, x_{n+1})]^k n(\sigma - \tau) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1.43}$$

bulunur. (3.1.43) ifadesinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n [d(x_n, x_{n+1})]^k = 0 \tag{3.1.44}$$

olur. (3.1.44) göz önüne alınarak her $n \geq n_1$ için $n\,[d(x_n,x_{n+1})]^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.1.45}$$

eld edilir. O halde $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.
Öte yandan (3.1.42) ve (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0$$

olup $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq D(z,Tz) \leq \liminf_{n\to\infty} D(x_n,Tx_n) = 0$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$
Teorem 3.1.8 da $F \in \mathscr{F}_*$ olması halinde $\mathscr{K}(X)$ yerine $\mathscr{C}(X)$ alınabilmektedir.

Teorem 3.1.9. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in F_\sigma^x$ için*

$$\tau + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$, $(\sigma < \tau)$ var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin hiç bir sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. O halde her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ dır. $F \in \mathscr{F}_*$ olduğundan her $x \in X$ ve $\sigma > 0$ için F_σ^x kümesi boş değildir.. İspatın geri kalanı Tz nin kapalılığı göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 da olduğu gibi yapılabilir. $\square$

Aşağıda, Teorem 3.1.9 den Feng-Liu sabit nokta teoremi elde edilmektedir.

Sonuç 3.1.3 (Thm 2.5.9)**.** *(X,d) tam metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve en az bir $y \in I_b^x$ için*

$$D(y,Ty) \leq cd(x,y)$$

olacak şekilde bir $c \in (0,1)$, $(c < b)$ var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin hiç bir sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. O halde her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ dır. Teorem 3.1.9 de eğer $F(\alpha) = \ln\alpha$, $\tau = -\ln c$ ve $\sigma = -\ln b$ olarak alınırsa T, X de bir sabit noktaya sahip olur ki bu bir çelişkidir. O halde, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

Uyarı 18. Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.1 in bir genelleştirmesidir. Gerçekten, T dönüşümü Teorem 3.1.1 in tüm şartlarını sağlasın. O halde her küme değerli F-büzülme dönüşümleri, genişlemeyen dönüşümdür. Yani her $x,y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır. $\{x_n\}$, x noktasına yakınsayan bir dizi olmak üzere T nin küme değerli genişlemeyen dönüşüm olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= D(x,Tx) \\ &\leq d(x,x_n) + D(x_n,Tx) \\ &\leq d(x,x_n) + D(x_n,Tx_n) + H(Tx_n,Tx) \\ &\leq d(x,x_n) + f(x_n) + d(x_n,x) \end{aligned}$$

olacağından son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit infimum alınırsa $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ elde edilir. O halde, $f(x) = D(x,Tx)$ ile tanımlı f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Öte yandan $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in F_\sigma^x$ için

$$\tau + F(D(y,Ty)) \leq \tau + F(H(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olduğundan T dönüşümü, Teorem 3.1.8 nın tüm şartlarını sağlar. Dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.9 arasında da benzer ilişki mevcuttur.

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.1.8 (Teorem 3.1.9), Teorem 3.1.1 (Teorem 3.1.2) nın bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 24. $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{n+1}, 1\} & , \quad x = \frac{1}{n} \\ \\ \{0, \frac{1}{2}\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $H(T\frac{1}{2}, T0) = \frac{1}{2} = d(\frac{1}{2}, 0)$ olduğundan her $F \in \mathscr{F}$ ve $\tau > 0$ için

$$\tau + F(H(T\frac{1}{2}, T0)) > F(d(\frac{1}{2}, 0))$$

olacağından T bir küme değerli F-büzülme dönüşümü değildir. Böylece Teorem 3.1.1 veTeorem 3.1.2 bu örneğe uygulanamaz.
Öte yandan

$$f(x) = D(x,Tx) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)} & , \quad x = \frac{1}{n}, n > 1 \\ \\ 0 & , \quad x = 0, 1 \end{cases}$$

olduğundan f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Şimdi $F(\alpha) = \ln \alpha$ olsun. Eğer $D(x,Tx) > 0$ ise o zaman $n > 1$ olmak üzere $x = \frac{1}{n}$ dir. O halde $y = \frac{1}{n+1} \in Tx$ için

$$F(d(x,y)) - F(D(x,Tx)) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} F(D(y,Ty)) - F(d(x,y)) &= \ln(\frac{1}{(n+1)(n+2)}) - \ln(\frac{1}{n(n+1)}) \\ &= \ln(\frac{n}{n+2}) \\ &\leq -\ln 2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $0 < \sigma < \tau \leq \ln 2$ için $y \in F_\sigma^x$ ve

$$\tau + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olur. Böylece Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.9 nın tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla, T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremde $\mathscr{C}(X)$ yerine $\mathscr{P}(X)$ alınmıştır. Ancak bunun için ilave şart gerekmektedir.

Teorem 3.1.10. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in F_\sigma^x$ için $D(y,Ty) > 0$ ve*

$$\tau + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$, $(\sigma < \tau)$ var olsun. Ayrıca,

$$\begin{cases} \textit{Her } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \textit{ için } x_{n+1} \in Tx_n \textit{ olacak şekildeki her } \{x_n\} \textit{ dizisi için} \\ T(\lim x_n) \textit{ kümesi kapalıdır.} \end{cases}$$

şartını sağlayan $D(x_0,Tx_0) > 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $D(x_0,Tx_0) > 0$ olduğundan $D(x_1,Tx_1) > 0$ ve

$$\tau + F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(d(x_0,x_1))$$

olacak şekilde bir $x_1 \in F_\sigma^{x_0}$ vardır. Ayrıca $D(x_1,Tx_1) > 0$ olduğunda $D(x_2,Tx_2) > 0$ ve

$$\tau + F(D(x_2,Tx_2)) \leq F(d(x_1,x_2))$$

olacak şekilde bir $x_2 \in F_\sigma^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse Thm 3.1.8 de olduğu gibi $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi elde edilebilir. X tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir noktaya yakınsaktır ve bu yakınsadığı nokta z olsun. O halde hipotez gereği Tz kapalıdır. Öte yandan (3.1.42) ve (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0$$

elde edilir. f fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq D(z, Tz) \leq \liminf_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0$$

olacağından buradan $z \in Tz$ bulunur. O halde, T, X de bir sabit noktaya sahiptir. $\square$

Teorem 3.1.10 de $F(\alpha) = \ln \alpha$, $\tau = -\ln c$ ve $\sigma = -\ln b$ alınırsa aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.1.4. *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathscr{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in_b^x$ ($b \in (0,1)$) için*

$$0 < D(y,Ty) \leq cd(x,y). \tag{3.1.46}$$

olacak şekilde bir $c \in (0,1)$, $c < b$ var olsun. Ayrıca, aşağıdaki şartı sağlayan $D(x_0, Tx_0) > 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var olsun.

$$\begin{cases} \textit{Her } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \textit{ için } x_{n+1} \in Tx_n \textit{olacak şekildeki her } \{x_n\} \textit{ dizisi için} \\ T(\lim x_n) \textit{ kümesi kapalıdır.} \end{cases}$$

Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi, Sonuç 3.1.4 nin tüm şartlarını sağlayan bir örnek verelim.

Örnek 25. $X = [0,2]$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{P}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} (\frac{x}{4}, \frac{x}{2}] & , \quad x \in (0,1] \\ \\ \{\frac{x}{2}\} & , \quad x \in \{0\} \cup (1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bazı $x \in X$ ler için Tx kümesi kapalı değildir. Bu yüzden Nadler ve Feng-Liu sabit nokta teoremi bu T dönüşümü için uygulanamaz. Öte yandan, eğer

$\frac{1}{2} \leq c < b$ ve $x_0 \in (0,2]$ alırsak Sonuç 3.1.4 nin tüm şartları sağlanır. Gerçekten, eğer $D(x,Tx) > 0$ ise o zaman $x \in (0,2]$ dir ve böylece $y = \frac{x}{2} \in Tx$ için

$$bd(x,y) = bd(x,\frac{x}{2}) = b\frac{x}{2} \leq \frac{x}{2} = D(x,Tx)$$

ve

$$D(y,Ty) = D(\frac{x}{2},T\frac{x}{2}) = \frac{x}{4} \leq c\frac{x}{2} = cd(x,y)$$

elde edilir. Yani $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $y \in I_b^x$ dır. O halde (3.1.46) eşitsizliği sağlanır. Şimdi, $x_0 \in (0,2]$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekildeki $\{x_n\}$ dizisi için $0 < x_n \leq \frac{x_0}{2^n}$ dır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi 0 noktasına yakınsar. Ayrıca, $T0$ kümesi kapalıdır. Son olarak $f(x) = D(x,Tx) = \frac{x}{2}$ fonksiyonu alttan yarı süreklidir. O halde Sonuç 3.1.4 tüm şartları sağlanır ve T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda, Teorem 3.1.9 ve Teorem 3.1.8 nin lineer olmayan versiyonları ifade ve ispat edilmiştir. Dikkat edelim ki Teorem 3.1.11, Teorem 2.5.10 (Klim-Wardowki sabit nokta teorem) nin bir genelleştirmesidir.

Teorem 3.1.11. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in F_\sigma^x$ için*

$$\tau(d(x,y)) + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{3.1.47}$$

ve her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ ve $\tau : (0,\infty) \to (\sigma,\infty)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin hiç bir sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. O halde her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ dır. Her $x \in X$ için $Tx \in C(X)$ olduğundan her $\sigma > 0$ için F_σ^x kümesi boş değildir. $x_0 \in X$ olsun. O zaman

$$\tau(d(x_0,x_1)) + F(D(x_1,Tx_1)) \leq F(d(x_0,x_1))$$

olacak şekilde bir $x_1 \in F_\sigma^{x_0}$ vardır ve $x_1 \in X$ için

$$\tau(d(x_1,x_2)) + F(D(x_2,Tx_2)) \leq F(d(x_1,x_2))$$

olacak şekilde bir $x_2 \in F_\sigma^{x_1}$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $x_{n+1} \in F_\sigma^{x_n}$ ve

$$\tau(d(x_n,x_{n+1})) + F(D(x_{n+1},Tx_{n+1})) \leq F(d(x_n,x_{n+1})) \tag{3.1.48}$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabilir. Şimdi bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $x_{n+1} \in F_\sigma^{x_n}$ olduğundan

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(D(x_n,Tx_n)) + \sigma \tag{3.1.49}$$

dır. (3.1.48) ve (3.1.49) ifadelerinden

$$F(D(x_{n+1},Tx_{n+1})) \leq F(D(x_n,Tx_n)) + \sigma - \tau(d(x_n,x_{n+1})) \tag{3.1.50}$$

ve

$$F(d(x_{n+1},x_{n+2})) \leq F(d(x_n,x_{n+1})) + \sigma - \tau(d(x_n,x_{n+1})) \tag{3.1.51}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n = d(x_n,x_{n+1})$ olsun. O zaman $a_n > 0$ dır ve (3.1.15) den $\{a_n\}$ azalan bir dizidir. Bu dizi alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır ve bu yakınsadığı nokta $\delta \geq 0$ olsun, yani $\lim_{n\to\infty} a_n = \delta^+$ dır. Şimdi $\delta > 0$ olsun. Dolayısıyla her $s \geq 0$ için $\liminf\limits_{t\to s^+} \tau(t) > \sigma$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $\tau(a_n) > b + \sigma$ olacak şekilde $b > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde (3.1.51) ifadesini kullanarak her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}
F(a_{n+1}) &\leq F(a_n) + \sigma - \tau(a_n) \\
&\leq F(a_0) + n\sigma - \tau(a_n) - \tau(a_{n-1}) - \cdots - \tau(a_{n_0}) - \cdots - \tau(a_0) \\
&\leq F(a_0) + n\sigma - \{\tau(a_n) + \tau(a_{n-1}) + \cdots + \tau(a_{n_0+1})\} \\
&\leq F(a_0) + n\sigma - (n-n_0)(\sigma+b) \\
&= F(a_0) + n_0(\sigma+b) - nb
\end{aligned} \tag{3.1.52}$$

elde ederiz. O halde yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında $\lim_{n\to\infty} F(a_n) =$

$-\infty$ ve dolayısıyla (F2) den $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır. (3.1.52) ifadesinden her $n > n_0$ için

$$a_n^k[F(a_n) - F(a_0) - n_0(\sigma + b)] \leq -a_n^k nb \leq 0 \tag{3.1.53}$$

elde edilir. (3.1.53) da $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\lim_{n\to\infty} na_n^k = 0 \tag{3.1.54}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.1.54) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $na_n^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) \\
&= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1} \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} a_i < \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}
\end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Diğer taraftan, (3.1.50) ve (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0$$

elde edilir. $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 \leq D(z,Tz) \leq \liminf_{n\to\infty} D(x_n,Tx_n) = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.1.11 nin Teorem 2.5.10 nin uygun bir genelleştirmesi olduğunu göstermektedir.

Örnek 26. $X = \{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\}$ üzerinde $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tam metrik uzaydır. $T : X \to \mathscr{C}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \\ \{x_1, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman X üzerindeki topoloji ayrık topoloji olduğundan $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu süreklidir. Şimdi, Teorem 2.5.10 nin (2.5.7) şartının sağlanmadığını gösterelim. Gerçekten, $x = x_n$, $n > 1$ için $Tx = \{x_1, x_{n-1}\}$ olup her $b \in (0,1)$ için öyle bir $n_0(b) \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_0(b)$ için $I_b^{x_n} = \{x_{n-1}\}$ dır. Bu yüzden $n \geq n_0(b)$ için

$$D(y,Ty) = n-1, \, d(x,y) = n$$

bulunur. Böylece, $\frac{D(y,Ty)}{d(x,y)} = \frac{n-1}{n}$ olduğundan

$$D(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y)$$

olacak şekilde bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,b)$ fonksiyonu bulunamaz.

Şimdi, son olarak, Teorem 3.1.11 nin (3.1.47) şartının $F(\alpha) = \alpha + \ln\alpha$, $\sigma = \frac{1}{2}$ ve $\tau(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$ ile birlikte sağlandığını gösterelim. Eğer $D(x,Tx) > 0$ ise o zaman $x = x_n$, $n > 1$ dir. Bu durumda $D(x_n,Tx_n) = n$ olup $y = x_{n-1} \in Tx_n$ için $y \in F_{\frac{1}{2}}^{x_n}$ ve

$$\begin{aligned} \tau(d(x,y)) + F(D(y,Ty)) &= \tau(n) + F(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + n - 1 + \ln(n-1) \\ &\leq n + \ln n \\ &= F(n) \\ &= F(D(x,Tx)) \end{aligned}$$

olduğundan (3.1.47) şartı sağlanır. Sonuç olarak T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 19. Eğer Teorem 3.1.11 de $\mathscr{C}(X)$ yerine $\mathscr{K}(X)$ alırsak F üzerinde (F4) şartını kaldırabiliriz. Ayrıca, biz σ sabitini $\sigma \geq 0$ olarak da alabiliriz. Teorem 3.1.11 de olduğu gibi aşağıdaki teoremin ispatı kolay bir şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1.12. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{K}(X)$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve en az bir $y \in F_\sigma^x$ için*

$$\tau(d(x,y)) + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

ve her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma \geq 0$ ve $\tau : (0,\infty) \to (\sigma,\infty)$ fonksiyonu var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda, Teorem 2.5.12 in önemli bir genelleştirmesi verilmiştir.

Teorem 3.1.13. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to \mathscr{C}(X)$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}_*$ olsun. $D(x,Tx) > 0$ olacak şekildeki her $x \in X$ için*

$$F(d(x,y)) \leq F(D(x,Tx)) + \frac{\tau(D(x,Tx))}{2} \tag{3.1.55}$$

ve

$$\tau(D(x,Tx)) + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y)) \tag{3.1.56}$$

olacak şekilde bir $y \in Tx$ ve her $s \in [0,\infty)$ için $\sigma > 0$ olmak üzere

$$\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > 0 \tag{3.1.57}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\tau : (0,\infty) \to (0,\sigma]$ fonksiyonu var olsun. Eğer $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin hiç bir sabit noktaya sahip olmasın. O halde her $x \in X$ için $D(x,Tx) > 0$ dır. Her $t > 0$ için $\tau(t) > 0$ ve $F \in \mathscr{F}_*$ olduğundan her $x \in X$ için (3.1.55) ifadesini sağlayan bir $y \in Tx$ vardır. $x_0 \in X$ olsun. (3.1.55) ve (3.1.56) ifadelerinden

$$F(d(x_0,x_1)) \leq F(D(x_0,Tx_0)) + \frac{\tau(D(x_0,Tx_0))}{2} \tag{3.1.58}$$

ve

$$\tau(D(x_0,Tx_0))+F(D(x_1,Tx_1))\leq F(d(x_0,x_1)) \tag{3.1.59}$$

olacak şekilde bir $x_1\in Tx_0$ vardır. (3.1.58) ve (3.1.59) den

$$\frac{\tau(D(x_0,Tx_0))}{2}+F(D(x_1,Tx_1))\leq F(D(x_0,Tx_0)) \tag{3.1.60}$$

elde edilir. Şimdi

$$F(d(x_1,x_2))\leq F(D(x_1,Tx_1))+\frac{\tau(D(x_1,Tx_1))}{2}$$

ve

$$\tau(D(x_1,Tx_1))+F(D(x_2,Tx_2))\leq F(d(x_1,x_2))$$

olacak şekilde bir $x_2\in Tx_1$ seçelim. Dolayısıyla

$$\frac{\tau(D(x_1,Tx_1))}{2}+F(D(x_2,Tx_2))\leq F(D(x_1,Tx_1))$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$F(d(x_n,x_{n+1}))\leq F(D(x_n,Tx_n))+\frac{\tau(D(x_n,Tx_n))}{2} \tag{3.1.61}$$

ve

$$\frac{\tau(D(x_n,Tx_n))}{2}+F(D(x_{n+1},Tx_{n+1}))\leq F(D(x_n,Tx_n)) \tag{3.1.62}$$

şartlarını sağlayan ve $x_{n+1}\in Tx_n$ şeklinde X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabilir.
Şimdi, $\lim_{n\to\infty}D(x_n,Tx_n)=0$ olduğunu gösterelim. (3.1.62) ifadesinden $\{D(x_n,Tx_n)\}$ dizisi kesin azalan bir dizisidir. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n,Tx_n)=\delta$$

olacak şekilde bir $\delta\geq 0$ vardır. $\delta>0$ olduğunu kabul edelim. F sağdan sürekli olduğundan (3.1.62) ifadesinin her iki tarafından limit infimum alırsak ve (3.1.57) kabulümüzden

$$\liminf_{d(x_n,Tx_n)\to\delta^+}\frac{\tau(D(x_n,Tx_n))}{2}+F(\delta)\leq F(\delta)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $\delta = 0$ dır, yani,

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n, Tx_n) = 0 \tag{3.1.63}$$

dır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$$\alpha = \liminf_{d(x_n,Tx_n)\to\delta^+} \frac{\tau(D(x_n,Tx_n))}{2} > 0$$

ve $0 < q < \alpha$ olsun. O zaman her $n \geq n_0$ için $\frac{\tau(d(x_n,Tx_n))}{2} > q$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden (3.1.62) den her $n \geq n_0$ için

$$q + F(D(x_{n+1}, Tx_{n+1})) \leq F(D(x_n, Tx_n))$$

olur. Böylece her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} F(D(x_{n+1},Tx_{n+1})) &\leq F(D(x_n,Tx_n)) - q \\ &\vdots \\ &\leq F(D(x_{n_0},Tx_{n_0})) - (n+1-n_0)q \end{aligned} \tag{3.1.64}$$

elde edilir. Her $t > 0$ için $0 < \tau(t) \leq \sigma$ olduğundan (3.1.61) ifadesinden

$$F(d(x_n,x_{n+1})) \leq F(D(x_n,Tx_n)) + \sigma$$

bulunur. Dolayısıyla (3.1.64) den her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} F(d(x_n,x_{n+1})) &\leq F(D(x_n,Tx_n)) + \sigma \\ &\leq F(D(x_{n_0},Tx_{n_0})) - (n-n_0)q + \sigma \end{aligned} \tag{3.1.65}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.1.65) ifadesinden $\lim_{n\to\infty} F(d(x_n,x_{n+1})) = -\infty$ bulunur ve (F2) den $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$ elde edilir. O halde (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} [d(x_n,x_{n+1})]^k F(d(x_n,x_{n+1})) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. (3.1.65) den her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} [d(x_n,x_{n+1})]^k F(d(x_n,x_{n+1})) - [d(x_n,x_{n+1})]^k F(d(x_{n_0},Tx_{n_0})) \\ \leq -[d(x_n,x_{n+1})]^k [(n-n_0)q+\sigma] \leq 0 \end{aligned} \tag{3.1.66}$$

elde edilir. (3.1.66) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} [d(x_n,x_{n+1})]^k [(n-n_0)q+\sigma] = 0 \tag{3.1.67}$$

bulunur. (3.1.67) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $[d(x_n,x_{n+1})]^k [(n-n_0)q+\sigma] \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Burada $n_1 > n_0$ olarak alabiliriz. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{[(n-n_0)q+\sigma]^{\frac{1}{k}}} \tag{3.1.68}$$

yazılır. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1},x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{[(i-n_0)q+\sigma]^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum_{i>n_0-\frac{\sigma}{q}} \frac{1}{[(i-n_0)q+\sigma]^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $f(x) = d(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan (3.1.63) den

$$0 \leq D(z,Tz) \leq \liminf_{n\to\infty} D(x_n,Tx_n) = 0$$

bulunur. Buradan $D(z,Tz) = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. □

Uyarı 20. Eğer Teorem 3.1.13 da $\mathscr{C}(X)$ yerine $\mathscr{K}(X)$ alırsak F üzerinde (F4) şartını kaldırabiliriz. Dolayısıyla, Teorem 3.1.13 de olduğu gibi kolay bir şekilde aşağıdaki teoremin ispatı yapılabilir.

Teorem 3.1.14. *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to K(X)$ bir dönüşüm ve $F \in \mathscr{F}$*

olsun. $D(x,Tx) > 0$ *olacak şekildeki her* $x \in X$ *için*

$$F(d(x,y)) \leq F(D(x,Tx)) + \frac{\tau(D(x,Tx))}{2}$$

ve

$$\tau(D(x,Tx)) + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

olacak şekilde bir $y \in Tx$ *ve her* $s \in [0,\infty)$ *için* $\sigma > 0$ *olmak üzere*

$$\liminf_{t \to s^+} \tau(t) > 0$$

olacak şekilde bir $\tau : (0,\infty) \to (0,\sigma]$ *fonksiyonu var olsun. Eğer* $f(x) = D(x,Tx)$ *fonksiyonu alttan yarı sürekli ise o zaman* T, X *de bir sabit noktaya sahiptir.*

Aşağıdaki örnek, Teorem 3.1.13 uygulandığı ama Teorem 2.5.1, 2.5.5, 2.5.9, 2.5.10, 2.5.12, 2.5.8, 3.1.2, 3.1.4 lerin uygulanmaması bakımından önemlidir.

Örnek 27. $X = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ üzerindeki $d(x,y) = |x-y|$ metriğini göz önüne alalım. O zaman (X,d) tam metrik uzaydır. $T : X \to CB(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{0, \frac{1}{(n+1)^2}\} & , \quad x = \frac{1}{n^2} \\ \\ \{x\} & , \quad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$f(x) = D(x,Tx) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \{0,1\} \\ \\ \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} & , \quad x = \frac{1}{n^2},\ n \geq 2 \end{cases}$$

olacağından $f(x) = D(x,Tx)$ fonksiyonu alttan yarı süreklidir.

$\tau(t) = \ln 2$, $\sigma = 4$ sabitleri ve

$$F(\alpha) = \begin{cases} \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}} & , \quad 0 < \alpha < e^2 \\ \\ \alpha - e^2 + \frac{2}{e} & , \quad \alpha \geq e^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyon ile birlikte Teorem 3.1.13 in tüm şartları sağlanır. Gerçekten, $F \in \mathscr{F}_*$ ve $\sup_{x,y\in X} d(x,y) = 1 < e^2$ olduğu açıktır. Eğer $D(x,Tx) > 0$ ise o zaman $x = \frac{1}{n^2}$, $n \geq 2$ dır. Dolayısıyla $y = \frac{1}{(n+1)^2} \in Tx = \{0, \frac{1}{(n+1)^2}\}$ olarak alınırsa

$$d(x,y) = D(x,Tx) = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

ve

$$D(y,Ty) = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

elde edilir. $d(x,y) = D(x,Tx)$ olduğundan (3.1.55) ifadesi açıkça sağlanır. (3.1.56) ifadesini görmek için

$$\ln 2 + F(D(y,Ty)) \leq F(d(x,y))$$

veya buna denk olarak

$$|y-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|y-Ty|}}} |x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \leq \frac{1}{2} \tag{3.1.69}$$

olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ için

$$\begin{aligned}
&|y-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|y-Ty|}}} |x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \\
&= \left(\tfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{2n+3}}} \left(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right)^{-\frac{n(n+1)}{\sqrt{2n+1}}} \\
&= \left(\tfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{2n+3}}} \left(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,\tfrac{2n+3}{2n+3}\,\tfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)^{-\frac{n(n+1)}{\sqrt{2n+1}}} \\
&= \left(\tfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{\sqrt{2n+3}}-\frac{n(n+1)}{\sqrt{2n+1}}} \left(\tfrac{(2n+3)n^2(n+1)^2}{(2n+1)(n+1)^2(n+2)^2}\right)^{\frac{n(n+1)}{\sqrt{2n+1}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $n \geq 2$ için

$$\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \frac{1}{2},$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{\sqrt{2n+3}} - \frac{n(n+1)}{\sqrt{2n+1}} \geq 1$$

ve

$$\frac{(2n+3)n^2(n+1)^2}{(2n+1)(n+1)^2(n+2)^2} < 1$$

olduğundan

$$|y-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|y-Ty|}}} |x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Böylece (3.1.69) eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 3.1.13 in tüm şartları sağlanır. Dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi, yukarıda bahsedilen teoremlerin bu örneğe uygulanmadığını gösterelim. Kabul edelim Thm 2.5.8 in şartlarını sağlayan bir $L \geq 0$ sabiti ve bir $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ $\mathscr{M}\mathscr{T}$-fonksiyon var. O halde $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ için $D(y,Tx) = 0$,

$$H(Tx,Ty) = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \text{ ve } d(x,y) = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$H(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \varphi(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2})\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tfrac{(2n+3)n^2}{(2n+1)(n+2)^2} \leq \varphi(\tfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2})$$

elde edilir ki son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit supremum alınırsa

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq \limsup_{t\to 0^+} \varphi(t) < 1$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece Teorem 2.5.8 bu örneğe uygulanamaz. Ayrıca, T küme değerli almost büzülme değildir. Teorem 2.5.8, Mizoguchi-Takahashi ve Nadler sabit nokta teoremlerinin bir genelleştirmesi olduğundan Teorem 2.5.1 ve Teorem 2.5.5 bu örneğe de uygulanamaz.

Kabul edelim ki Teorem 2.5.10 (Klim-Wardowski sabit nokta teoremi) nin şartlarını sağlayan bir $b \in (0,1)$ sabiti ve $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu var. $x = \frac{1}{n^2}$ için $Tx =$

$\{0, \frac{1}{(n+1)^2}\}$ olur. Eğer $y = 0$ ise o zaman

$$bd(x,y) \leq D(x,Tx) \Leftrightarrow b \leq \frac{2n+1}{(n+1)^2}$$

olup burada $n \to \infty$ için limit alırsak $b = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Eğer $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ ise

$$D(y,Ty) \leq \varphi(d(x,y))d(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2})\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+3)n^2}{(2n+1)(n+2)^2} \leq \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2})$$

olup son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq \limsup_{t\to 0^+} \varphi(t) < b$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde Teorem 2.5.10 bu örneğe de uygulanamaz. Teorem 2.5.10, Feng-Liu sabit nokta teoremi (Teorem 2.5.9) nin bir genelleştirmesi olduğundan bu teorem bu örneğe de uygulanamaz.

Kabul edelim ki Teorem 2.5.12 in şartlarını sağlayan bir $a \in (0,1)$ sabiti ve $\varphi : [0,\infty) \to [a,1)$ fonksiyonu var olsun. $x = \frac{1}{n^2}$ için $Tx = \{0, \frac{1}{(n+1)^2}\}$ olur. Eğer $y = 0$ ise

$$\sqrt{\varphi(D(x,Tx))}d(x,y) \leq D(x,Tx) \Leftrightarrow \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^4}$$

elde edilir ki son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$0 < a \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq 0$$

olur ki bu bir çelişkidir. Eğer $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ ise

$$D(y,Ty) \leq \varphi(D(x,Tx))d(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \leq \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2})\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+3)n^2}{(2n+1)(n+2)^2} \leq \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2})$$

elde edilir ki son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alırsak

$$1 \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}) \leq \limsup_{t\to 0^+} \varphi(t) < 1,$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden Teorem 2.5.12 de bu örneğe uygulanamaz.
Son olarak, $H(T0,T1) = 1 = d(0,1)$ olduğundan her $F \in \mathscr{F}_*$ ve her $s \in [0,\infty)$ için $\liminf_{t\to s^+} \tau(t) > 0$ ifadesini sağlayan her $\tau : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\tau(d(0,1)) + F(H(T0,T1)) > F(d(0,1))$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.1.4 bu örneğe uygulanamaz. Ayrıca, T bir küme değerli F-büzülme dönüşümü değildir. O halde Teorem 3.1.2 de bu örneğe uygulanamaz.

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının ilk kısmında küme değerli dönüşümler ve onların özelliklerine kısa bir şekilde değinilmiştir. Ardından, küme değerli dönüşümler için literatürdeki önemli sabit nokta teoremlerinin ispatları ve aralarındaki ilişkiler detaylı bir şekilde incelenmişitr. Tezin orijinal kısmınında küme değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı tanımlanmış ve bu tip dönüşümler için sabit nokta teoremi elde edilmiştir. Küme değerli F-büzülme kavramı genişletilerek küme değerli dönüşümler için temel sabit nokta teoremlerinin karşılıkları incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların literatürde bulunan Nadler, Mizoguchi-Takahashi, Feng-Liu, Klim-Wardowski, Ćirić gibi temel sabit nokta teoremlerinden daha genel olduklarını gösteren açıklayıcı örnekler verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Bizim, O., Genel Topoloji, Dora Yayıncılık, Bursa, 2013.

[2] Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[3] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.

[4] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[5] Istratescu, V. I., Fixed Point Theory An Introduction, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland, 2001.

[6] Wardowski, D., Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:94, 6 pp.

[7] Mınak, G., Helvacı, A., Altun, I., Ćirić type generalized F-contractions on complete metric spaces and fixed point results, Filomat, 28 (6) (2014), 1143-1151.

[8] Secelean, N.A., Iterated function systems consisting of F-contractions, Fixed Point Theory Appl. 2013, 2013:277, 13 pp.

[9] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

[10] Berinde, M., Berinde, V., On a general class of multi-valued weakly Picard mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 326 (2) (2007), 772-782.

[11] Ćirić, Lj. B., Multi-valued nonlinear contraction mappings, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 71 (7-8) (2009), 2716-2723.

[12] Daffer, P. Z., Kaneko, H., Fixed points of generalized contractive multivalued mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 192 (2) (1995), 655-666.

[13] Du, W.-S., On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps, Topology and its Applications, 159 (1) (2012), 49-56.

[14] Du, W.-S., Some new results and generalizations in metric fixed point theory, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73 (5) (2010), 1439-1446.

[15] Feng, Y., Liu, S., Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 317 (1) (2006), 103-112.

[16] Klim, D., Wardowski, D., Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 334 (1) (2007), 132-139.

[17] Mizoguchi, N., Takahashi, W., Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications,141 (1) (1989), 177-188.

[18] Nadler, S.B., Multi-valued contraction mappings, Pacific Journal of Mathematics, 30 (2) (1969), 475-488.

[19] Reich, S., Fixed points of contractive functions, Bollettino della Unione Matemàtica Italiana, 5 (4) (1972), 26-42.

[20] Reich, S., Some fixed point problems, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, 57 (1974), 194-198.

[21] Reich, S., Some problems and results in fixed point theory, Contemporary. Mathematics, 21 (1983), 179-187.

[22] Suzuki, T., Mizoguchi Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340 (1) (2008), 752 755.

[23] Altun, I., Mınak, G., Dağ, H., Multivalued F-contractions on complete metric space, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 16 (4) (2015), 659-666.

[24] Acar, Ö., Durmaz, D., Mınak, G., Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces, Bulletin of İranian Mathematical Society, 40 (6) (2014), 1469-1478.

[25] Olgun, M., Mınak, G., Altun, I., A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 17 (3) (2016), 579-587.

[26] Altun, I., Durmaz, G., Mınak, G., Romaguera, S., Multivalued almost F-contractions on complete metric spaces, Filomat, 30 (2) (2016), 441–448.

[27] Mınak, G., Altun, I., Romaguera, S., Recent developments about multivalued weakly Picard operators, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, 22 (3) (2015), 411-422.

[28] Mınak, G., Olgun, M., Altun, I., A new approach to fixed point theorems for multivalued contractive maps, Carpathian Journal of Mathematics, 31 (2) (2015), 241-248.

[29] Altun, I., Mınak, G., Olgun, M., Fixed points of multivalued nonlinear F-contractions on complete metric spaces, Nonlinear Analysis-Modelling and Control, 21(2) (2016), 201-210.

[30] Altun, I., Olgun, M., Mınak, G., On a new class of multivalued weakly Picard operators on complete metric spaces, Taiwanese Journal of Mathematics, 19(3) (2015), 659-672.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülhan MINAK
Doğum Tarihi/Yeri : 25.11.1987 / Tirebolu
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise **:** Espiye 75. Yıl ÇPL, 2005
Lisans **:** Erciyes Üniversitesi, Yozgat Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Haziran 2009
Yüksek Lisans **:** Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eylül 2013

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

1.) Çankırı Karatekin Üniversitesi ÖYP Araştırma Görevliliği (2010-2012)
2.) Kırıkkale Üniversitesi ÖYP Araştırma Görevliliği (2012-2016)

Yayınları :

1.) Ö. Acar, G. Durmaz, G. Mınak, Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces, Bulletin of İranian Mathematical Society, 40 (6) (2014), 1469-1478.

2.) M. Olgun, G. Mınak, I. Altun, A new approach to Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 17(3)(2016), 579-587.

3.) I. Altun, G. Durmaz, G. Mınak, S.Romaguera, Multivalued almost F-contractions on complete metric spaces, Filomat, 30(2) (2016), 441-448.

4.) G. Mınak, I. Altun, S. Romaguera, Recent developments about multivalued weakly Picard operators, Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, 22 (3) (2015), 411-422.

5.) G. Mınak, M. Olgun, I. Altun, A new approach to fixed point theorems for multivalued contractive maps, Carpathian Journal of Mathematics, 31 (2) (2015), 241-248.

6.) I. Altun, G. Mınak, M. Olgun, Fixed points of multivalued nonlinear F-contractions on complete metric spaces, Nonlinear Analysis-Modelling and Control, 21(2) (2016), 201-210.

7.) I. Altun, M. Olgun, G. Mınak, On a new class of multivalued weakly Picard operators on complete metric spaces, Taiwanese Journal of Mathematics, 19(3) (2015), 659-672.