

146916

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
SAYISAL YÖNTEMLER BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK PROSES
KONTROLÜNDE HOTELLING T^2
YAKLAŞIMI VE İMALAT SANAYİNDE BİR
UYGULAMA**

**HAZIRLAYAN:
ÇİĞDEM ARICIGİL ÇILAN**

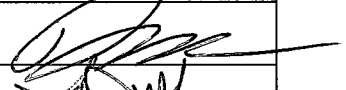


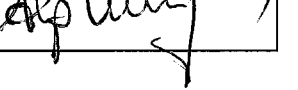

**ÖĞRENCİ NUMARASI:
2502000033**

**TEZİ YÖNETEN:
PROF. DR. NEYRAN ORHUNBİLGE**

İSTANBUL-2004

TEZ ONAYI

Enstitümüz **SAYISAL YÖNTEMLER** Bilim Dalında **2502000033** numaralı **ÇİGDEM ARICIGİL ÇILAN**'ın hazırladığı "**ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK PROSES KONTROLÜNDE HOTELLİNG T2 YAKLAŞIMI VE İMALAT SANAYİNDE BİR UYGULAMA**" konulu ~~YÜKSEK LİSANS~~ / **DOKTORA TEZİ** ile ilgili **TEZ SAVUNMA SINAVI**, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin 28.Maddesi uyarınca **17/11/2004 Çarşamba** günü saat: **14.00'da** yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin *Kabulu*.....'ne* **OYBİRLİĞİ / ~~OYÇOKLUGUYLA~~** karar verilmiştir.

| JÜRİ ÜYESİ | KANAATİ(*) | İMZA |
|---------------------------|------------|---|
| PROF.DR.NEYRAN ORHUNBİLGE | Kabulu |  |
| PROF.DR.BESİM AKIN | Kabulu |  |
| PROF.DR.ÖNER ESEN | Kabul |  |
| DOÇ.DR.ERHAN ÖZDEMİR | Kabul |  |
| YRD.DOÇ.DR.ALP BARAY | Kabul |  |

ÖZ

İstatistik proses kontrolünün en önemli araçlarından biri kontrol diyagramlarıdır. Tek değişkenli kontrol diyagramları ilk kez W. Shewhart tarafından 1924 yılında geliştirilmiştir. Bu diyagramlar birbirinden bağımsız değişkenlerdeki beklenmedik değişimlerin saptanabilmesi için kullanılmaktadır. Ancak birçok sanayide, prosesin performansı birbirleriyle ilişkili değişkenlere bağlıdır. Bu durumda, istatistik proses kontrolünde, tek değişkenli diyagramların kullanımı hatalı sonuçlar verebilmektedir. Proses kontrolünde sağlıklı sonuçların elde edilebilmesi için ele alınacak değişkenleri birlikte inceleyen proses kontrol yöntemleri kullanılmaktadır. 1940'larda Harold Hotelling tarafından geliştirilen ve istatistik literatüründe "Hotelling T^2 İstatistiğine Dayalı Proses Kontrol Diyagramları" olarak adlandırılan diyagramlar, ilk çok değişkenli istatistik proses kontrol diyagramlarıdır.

T^2 istatistiğine dayalı diyagramların kolay uygulanabilir olması ve kontrol dışı bir nokta belirlendiğinde, sorunun hangi değişkenden kaynaklandığının çeşitli yöntemlerle belirlenmesi, bu diyagramların diğer benzerlerinden (MCUSUM,MEWMA) daha yaygın olarak kullanılmasına neden olmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümünde kalite, kalite kontrol, istatistik proses kontrol kavramları açıklanarak kontrol diyagramlarının istatistik proses kontroldeki yerine değinilmekte ve uygulamada kullanılan tek değişkenli ve çok değişkenli kontrol diyagramları incelenmektedir. İkinci bölümde Hotelling T^2 istatistiğine ilişkin bazı temel kavramlar üzerinde durulmakta ve istatistiğin kullanılabilmesi için koşul olan varsayımlar araştırılmaktadır. Üçüncü bölümde çizilen T^2 diyagramı ile ortaya çıkan kontrol dışı durumun kaynağının belirlenebilmesi amacıyla geliştirilen yöntemler başta "MYT Ayırıştırma Yöntemi" olmak üzere incelenmektedir. Son bölümde ise araştırmanın sonuçları değerlendirilmektedir

ABSTRACT

One of the most important means of the statistical process control are control diagrams. As a first time, control diagrams are developed by W. Shewhart in 1924. These diagrams are used to determine unexpected changes in independent variables. However, in many industries, the performance of the process is dependent on variables related with each other. At this condition, the usage of the univariate diagrams give faulty results. At the stage of process control, to get definite results the methods of process control analysis the variables dealt with together are used. In 1940's the diagrams which are called in statistical literature as "Hotelling T^2 Diagrams" and which are developed by Harold Hotelling are the first diagrams of multivariate statistical process control.

The diagrams based on T^2 cause much more commonly used than the similar diagrams (MCUSUM, MEWMA) since these diagrams are easily applicable and since the problems originate from which variable can be determined. At the first stage of the study, the concepts of quality, quality control, statistical process control are explained and the place of the control diagrams in statistical process control is mentioned; Furthermore, univariate and multivariate control diagrams which are used in practice are analysed. In the second chapter, some basic concepts related with Hotelling T^2 statistics are examined and the hypothesis which are conditions for the useage of the statistics are searched. In the third chapter, the methods mainly (MYT Decomposition Method) which are developed to determine the origins of the condition, which is out of control as a result of T^2 diagrams are analysed. At the last part, the results of the research are evaluated.

ÖNSÖZ

Günümüzde üretim prosesinin iyileştirilmesinde ve kusurlu ürünün azaltılmasında istatistik yöntemler oldukça etkin araçlar olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemler prosesin yansız ve doğru bir şekilde izlenmesine yardımcı olmaktadır. İstatistik yöntemlerin kalite kontrolünde yer alması; daha üst düzeyde kalite, yeniden işleme ve hurdanın azaltılması ile daha az kayıp, daha iyi planlama ve yönetim ile kontrolün geliştirilmesi, koordineli çabalar sonucunda işletme içi ilişkilerin iyileştirilmesini sağlamaktadır.

İstatistik yöntemlerin amacına uygun olarak kullanılmasıyla etkin sonuçlar elde edilmektedir. Çalışmada istatistik proses kontrolünde en etkin istatistik araç olarak kabul edilen kontrol diyagramları temel alınarak imalat sanayiinde kalite kontrol uygulanmaya çalışılacaktır. Gerçek hayatta bir çok üretim prosesinin veya ürünün birden fazla değişkenden (proses değişkeni, kalite değişkeni) oluştuğu bilinmektedir. Bu durum uygulamada kullanılan tek değişkenli kontrol diyagramlarının yetersiz olmasına ve yanlış sonuçlar vermesine neden olmaktadır. Bu nedenle çok değişkenli kontrol diyagramlarının önemi artmaktadır. Uygulanması karmaşık hesaplamalar gerektirdiğinden bugüne kadar yaygın olarak kullanılmayan bu diyagramlar artık bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sayesinde sanayideki uygulamalarda yer almaya başlamıştır.

Çalışmanın amacı çok değişkenli kontrol diyagramlarının tek değişkenli kontrol diyagramlarından farklı olan özelliklerini belirtilerek ve bu diyagramların ortak varsayımlarını dikkate alarak sağladığı avantajları bir uygulamayla desteklemektir. Araştırmada Hotelling T^2 istatistiğine dayanan kontrol diyagramları, literatürde en fazla yer alan ve üzerinde ayrıştırma yöntemlerinin geliştirildiği diyagramlar olduğundan temel alınmıştır.

Araştırmanın her aşamasını titizlikle inceleyerek daha iyi olabilmesi için katkıda bulunan ve akademik hayatıma nasıl bir çizgide devam etmem gerektiği

konusunda bana her zaman örnek olan değerli hocam Prof. Dr. Neyran Orhunbilge başta olmak üzere tezin gelişme aşamasında düşüncelerine başvurduğum Prof. Dr. Öner Esen, Prof. Dr. Besim Akın ve Doç. Dr. Erhan Özdemir'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca konuyla ilgili kaynaklarını benimle paylaşan ve uygulama alanının belirlenmesinde destek olan Yrd. Doç. Dr. Alp Baray'a, tezin basıma hazırlanmasında bana yardımcı olan, her konuda kendimi yakın hissettiğim arkadaşım Ar.Gör. Bilge Acar Bolat'a, son olarak bugüne gelmemde sonsuz emeği olan sevgili aileme ve akademik sorumluluklarımı aksatmadan yerine getirmem konusundaki duyarlılığı için özverili eşim Mehmet'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

| | |
|--|----------|
| ÖZ | iii |
| ABSTRACT | iv |
| ÖNSÖZ | v |
| TABLolar LİSTESİ | xi |
| ŞEKİLLER LİSTESİ | xiii |
| GRAFİKLER LİSTESİ | xiv |
| GİRİŞ | 1 |
| BİRİNCİ BÖLÜM | |
| TEMEL KAVRAMLAR, TEK VE ÇOK DEĞİŞKENLİ KONTROL | |
| DİYAGRAMLARI | 4 |
| 1.1 KALİTE, KALİTE KONTROL VE İSTATİSTİK KALİTE KONTROL | |
| KAVRAMLARI | 4 |
| 1.1.1 Kalite Kavramı | 4 |
| 1.1.2 Kalite Kontrol Kavramı | 9 |
| 1.1.3 İstatistik Proses Kontrol | 14 |
| 1.2 TEK DEĞİŞKENLİ KONTROL DİYAGRAMLARI | 24 |
| 1.2.1 Shewhart Kontrol Diyagramları | 25 |
| 1.2.2 Kümülatif Toplam (Cumulative Sum (CUSUM)) ve Üstel | |
| Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (Exponentially Weighted | |
| Moving Average (EWMA)) Diyagramları | 36 |
| 1.2.2.1 Kümülatif Toplam (CUSUM) Diyagramları | 36 |
| 1.2.2.2 Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (EWMA) | |
| Diyagramları | 39 |
| 1.3 ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİK PROSES KONTROL VE DİYAGRAMLARI | 41 |
| 1.3.1 Çok Değişkenli İstatistik Proses Kontrol Yöntemlerinin Özellikleri | 42 |
| 1.3.2 Çok Değişkenli Kontrol Diyagramları | 43 |
| 1.3.2.1 Ortalama Vektörü ve Varyans-Kovaryans Matrisinin Elde | |
| Edilmesi | 44 |
| 1.3.2.2 χ^2 İstatistiğine Dayalı Diyagramlar | 48 |
| 1.3.2.3 Hotelling T ² İstatistiğine Dayalı Diyagramlar | 51 |
| 1.3.2.4 Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Ve Çok | |
| Değişkenli Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama | |
| (MEWMA) Diyagramları | 55 |
| 1.3.2.5 Neden-Seçimi (Cause- Selecting) Diyagramları | 58 |
| 1.3.3 Temel Bileşenler Analizi | 60 |

İKİNCİ BÖLÜM

HOTELLING T^2 İSTATİSTİĞİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR, VARSAYIMLAR VE HOTELLING T^2 İSTATİSTİĞİNE DAYALI DİYAGRAMLARIN ÇİZİLMESİ.....66

| | | |
|---------|---|-----|
| 2.1 | İSTATİSTİK UZAKLIK KAVRAMI..... | 66 |
| 2.2 | STUDENT T VE HOTELLING T^2 İSTATİSTİKLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ..... | 69 |
| 2.3 | HOTELLING T^2 İSTATİSTİĞİNİN DAĞILIM ÖZELLİKLERİ | 74 |
| | T^2 İstatistiklerinin Dağılımı | 76 |
| 2.4 | T^2 İSTATİSTİĞİNİN VARSAYIMLARI..... | 80 |
| 2.4.1 | Çok Değişkenli Normal Dağılım..... | 80 |
| 2.4.2 | Varyans-Kovaryans Matrislerinin Eşitliği Varsayımı | 88 |
| 2.4.3 | Zamana Bağlı Değerlerin Bağımsız Olması (Otokorelasyon Olmaması Varsayımı)..... | 89 |
| 2.4.4 | Tutarlı Varyans-Kovaryans Matrisi Tahmini ve Çoklu Doğrusal..... Bağlantı Olmaması Varsayımı..... | 97 |
| 2.4.5 | Doğrusallık Varsayımı..... | 99 |
| 2.5 | HOTELLING T^2 İSTATİSTİĞİNE DAYALI DİYAGRAMLARIN ÇİZİLMESİ..... | 100 |
| 2.5.1 | Geçmişte Kontrol Altında Olan Bir Prosesten Gözlem Değerlerinin Tesadüfi Olarak Seçilmesi..... | 100 |
| 2.5.1.1 | Planlama | 102 |
| 2.5.1.2 | Örnek Büyüklüğü, Örnek Sayısının Belirlenmesi ve İlk Verilerin Toplanması | 103 |
| 2.5.1.3 | Verilerin Kayıt Edilmesi..... | 104 |
| 2.5.1.4 | Eksik Gözlemlerin (Missing Value) Tahmin Edilmesi | 105 |
| 2.5.1.5 | Değişkenlere Dönüşüm Uygulanması | 106 |
| 2.5.2 | I. Aşama'da T^2 Diyagramının Çizilmesi | 110 |
| 2.5.2.1 | Örnek Büyüklüğü Bir ($n=1$) Olan m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda I. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi..... | 113 |
| 2.5.2.2 | Örnek Büyüklüğü Birden Fazla Olan ($n>1$) m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda I. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi..... | 114 |
| 2.5.3 | II.Aşama'da T^2 Diyagramının Çizilmesi..... | 116 |
| 2.5.3.1 | Örnek Büyüklüğü Bir ($n=1$) Olan m Tane Örneğin Çekilmesi T^2 Durumunda II. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi..... | 116 |
| 2.5.3.2 | Örnek Büyüklüğü Birden Fazla Olan ($n>1$) m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda II. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi...118 | |
| 2.5.4 | I. Aşama ve II. Aşamada Hesaplanan Kontrol Limitlerinin, χ^2 Dağılımı ile Belirlenen Limitlere Yaklaşması..... | 119 |
| 2.5.5 | Güçlü (Robust) T^2 İstatistiklerinin Hesaplanması | 122 |

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KONTROL DIŞI DEĞİŞKENLERİN SAPTANMASINDA, YORUMLANMASINDA KULLANILAN MYT AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ VE DİĞER YÖNTEMLER..... 125

| | | |
|---------|---|-----|
| 3.1 | MYT AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ..... | 126 |
| 3.1.1 | Ani ve Küçük Proses Değişimlerine Karşı T^2 İstatistiğinin Duyarlılığının Arttırılması..... | 131 |
| 3.1.2 | Koşullu ve Koşulsuz Terimlerin Dağılımı | 132 |
| 3.1.3 | p Değişkenli Bir Prosesin Olası Tüm Koşullu ve Koşulsuz Terimlerinin Hesaplanması..... | 134 |
| 3.1.4 | MYT Ayırıtırma Yönteminin Özellikleri Ve Uygulanmasında İzlenen Adımlar..... | 136 |
| 3.1.5 | Uyarı Veren Bir MYT Teriminin Yorumlanması | 139 |
| 3.2 | KONTROL DIŞI UYARILARIN NEDENİNİN SAPTANMASINDA KULLANILAN DİĞER YÖNTEMLER..... | 142 |
| 3.2.1 | Çok Değişkenli Ve Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Birlikte Çizilmesi..... | 142 |
| 3.2.2 | Step-Down Süreci..... | 145 |
| 3.2.3 | Grafik Gösterim..... | 149 |
| 3.2.3.1 | Yıldız Grafiği (Starplot) | 149 |
| 3.2.3.2 | Çok Değişkenli Profil Diyagramları (Multivariate Profile (MP)Charts)..... | 151 |
| 3.2.3.3 | Çokgen Grafiği (Polyplot)..... | 153 |
| 3.2.4 | Bonferroni EŞitsizliği Yaklaşımı (Bonferroni Yöntemi)..... | 154 |
| 3.2.5 | M-İstatistiği Yaklaşımı..... | 156 |
| 3.2.6 | D-İstatistiği Yaklaşımı | 158 |
| 3.2.7 | Temel Bileşenler Analizi Yaklaşımı İle Kontrol Dışındaki Değişkenin Belirlenmesi..... | 160 |

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

CAM SANAYİİNDE HOTELLING T^2 DİYAGRAMININ ÇİZİLMESİ VE MYT AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ'NİN UYGULANMASI..... 162

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1 | Araştırmanın Amacı ve Yöntemi..... | 163 |
| 4.2 | Araştırmanın Değişkenleri ve Verilerin Toplanması | 164 |
| 4.3 | Varsayımların Araştırılması | 164 |
| 4.3.1 | Doğrusallık Varsayımı..... | 165 |
| 4.3.2 | Normallik Varsayımı | 167 |
| 4.3.3 | EŞ- Varyanslılık Varsayımı | 174 |
| 4.3.4 | Zamana Bağlı Gözlem Değerlerinin Bağımsızlık | 175 |

| | | |
|-----------------------|--|------------|
| 4.4 | “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin Oluşturulması ve I. Aşama Kontrol Diyagramları..... | 178 |
| 4.5 | II. Aşama Kontrol Diyagramları..... | 194 |
| 4.6 | MYT Ayrıştırma Yönteminin Uygulanması | 198 |
| 4.7 | Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Çizilmesi | 210 |
| SONUÇ | | 221 |
| KAYNAKÇA..... | | 223 |
| EKLER..... | | 237 |
| ÖZGEÇMİŞ | | 265 |



TABLolar LİSTESİ

| | |
|---|-----|
| Tablo 1.1: Hipotez Testi Sonucunda Alınan Doğru ve Yanlış Kararlar..... | 34 |
| Tablo 1.2: Çok Değişkenli Veri Matrisinin Düzenlenmesi..... | 44 |
| Tablo 1.3: T^2 İstatistiklerinin Hesaplanması İçin Düzenlenen Veri Matrisi | 52 |
| Tablo 1.4: MEWMA Değerlerinin Hesaplanması İçin Düzenlenen Veri Matrisi | 57 |
| Tablo 1.5: Çeşitli λ ve p değerleri için MEWMA Diyagramlarının ÜKL Değerleri (H) | 58 |
| Tablo 2.1: Grup Sayısına ve Değişken Sayısına Göre Çok Değişkenli İstatistiklerin Sınıflandırılması..... | 70 |
| Tablo 2.2: $n=1$ Durumu için $p=2,3,4,5,10,20$; ÜKL= $[(m+1)/m]^p(m-1)/(m-p)F_{0,001,p,m-p}$ | 120 |
| Tablo 2.3: $n=5$ Durumu için $p=2,3,4,5,10,20$; ÜKL= $[p(m+1)(n-1)/(mn-m-p+1)]F_{0,001,p,mn-m-p+1}$ | 121 |
| Tablo 2.4: $n=10$ Durumu için $p=2,3,4,5,10,20$; ÜKL= $[p(m+1)(n-1)/(mn-m-p+1)]F_{0,001,p,mn-m-p+1}$ | 121 |
| Tablo 4.1: Kalite Değişkenlerinin Korelasyon Matrisi..... | 165 |
| Tablo 4.2 Yükseklik Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları..... | 168 |
| Tablo 4.3: Ağız Çapı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları | 168 |
| Tablo 4.4: Et Kalınlığı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları..... | 168 |
| Tablo 4.5: Dip Yüksekliği Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları..... | 169 |
| Tablo 4.6: Köpük Payı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları..... | 169 |
| Tablo 4.7: Yüksek Değişkeninin 84. Birimi Çıkarıldığında Elde Edilen Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları..... | 171 |
| Tablo 4.8: Orjinal Değişkenlerin Box M Testi Sonuçları..... | 174 |
| Tablo 4.9: Logaritması Alınmış Değişkenlerin Box M Testi Sonuçları..... | 174 |
| Tablo 4.10: Hiperbolik Dönüşüm Uygulanmış Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları..... | 175 |
| Tablo 4.11: Kare Dönüşüm Uygulanmış Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları..... | 175 |
| Tablo 4.12: 86 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 179 |
| Tablo 4.13: 12 Birimden Oluşan 86 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x}) | 180 |
| Tablo 4.14: 38 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 182 |
| Tablo 4.15: 12 Birimden Oluşan 38 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x}) | 182 |

| | |
|--|-----|
| Tablo 4.16: 29 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 184 |
| Tablo 4.17: 12 Birimden Oluşan 29 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})... .. | 184 |
| Tablo 4.18: 24 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 186 |
| Tablo 4.19: 12 Birimden Oluşan 24 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})... .. | 186 |
| Tablo 4.20: 19 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 188 |
| Tablo 4.21: 12 Birimden Oluşan 19 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})... .. | 188 |
| Tablo 4.22: 17 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi..... | 190 |
| Tablo 4.23: 12 Birimden Oluşan 17 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})... .. | 190 |
| Tablo 4.24: 16 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi... .. | 192 |
| Tablo 4.25: 12 Birimden Oluşan 17 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})... .. | 192 |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| | |
|--|-----|
| Şekil 1.1: Tasarım/Yeniden Tasarım Kalitesi..... | 7 |
| Şekil 1.2: Uygunluk Kalitesi..... | 8 |
| Şekil 1.3: Performans Kalitesi..... | 8 |
| Şekil 1.4 : Etkin Bir Kalite Kontrolünün Gerçekleştirilebilmesi İçin Gerekli Olan Aşamaların Akış Diyagramı İle Gösterimi..... | 10 |
| Şekil 1.5 Genel Üretim Prosesi..... | 15 |
| Şekil 1.6 : Geleneksel Kalite Kontrol Yaklaşımı..... | 16 |
| Şekil 1.7: İstatistik Kalite Kontrolünün Uygulanması..... | 17 |
| Şekil 1. 8: Örnek Bir Kalite Kontrol Diyagramı..... | 20 |
| Şekil 1.9: Kontrol Limitleri ile Doğal Tolerans ve Spesifikasyon Limitlerinin Karşılaştırılması..... | 22 |
| Şekil 2.1: T^2 İstatistiğinin Dağılımı..... | 76 |
| Şekil 2.2: Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Otokorelasyon Durumuna Göre Sınıflandırılması..... | 96 |
| Şekil 2.3: Çok Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Otokorelasyon Durumuna Göre Sınıflandırılması..... | 97 |
| Şekil 2.4: “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin Oluşturulması Aşamaları..... | 102 |

GRAFİKLER LİSTESİ

| | |
|--|-----|
| Grafik1.1:V-Maskesi Yaklaşımıyla Çizilen CUSUM Diyagramı..... | 38 |
| Grafik1.2:Tek Değişkenli \bar{x} -Diyagramı ile İki Değişkenli Elips Diyagramının Karşılaştırmalı Olarak Gösterimi..... | 50 |
| Grafik2.1:Euclide Uzaklığı..... | 67 |
| Grafik2.2:Mahalinobis Uzaklığı..... | 68 |
| Grafik2.3:Normallik İçin Uygulanan Dönüşümler | 107 |
| Grafik 2.4:Doğrusal Olmayan İlişkilerin Doğrusal Hale Getirilmesi İçin Önerilen Dönüşümler..... | 109 |
| Grafik 3.1: Gözlem Vektörü (x_1, x_2)'nin Regresyon Denkleminde Uzaklığı..... | 129 |
| Grafik 3.2: $T_{2,1}^2$ Bileşeninin Yorumu..... | 140 |
| Grafik 3.3: A, B Ve C Bölgelerine Göre Prosesin Durumu | 143 |
| Grafik 3.4: Altı Değişkenli Bir Proseste T^2 Grafiğinin “Yıldız Grafiği” İle Birlikte Gösterimine İlişkin Bir Örnek..... | 150 |
| Grafik 3.5: “MP- Diyagramı” Örneği..... | 152 |
| Grafik 3.6: Beş Değişkenli Bir “Çokgen Grafiği” Örneği..... | 154 |
| Grafik 4.1: χ^2 -Grafiği (6 Değişken 87 Örnek)..... | 170 |
| Grafik 4.2: χ^2 -Grafiği (5 Değişken 87 Örnek)..... | 172 |
| Grafik 4.3: χ^2 -Grafiği (6 Değişken 86 Örnek)..... | 173 |
| Grafik 4.4: I.Aşama T^2 Diyagramı (1. Adım)..... | 181 |
| Grafik 4.5: I. Aşama T^2 Diyagramı (2. Adım)..... | 183 |
| Grafik 4.6: I. Aşama T^2 Diyagramı (3. Adım)..... | 185 |
| Grafik 4.7: I. Aşama T^2 Diyagramı (4. Adım)..... | 187 |
| Grafik 4.8: I. Aşama T^2 Diyagramı (5. Adım)..... | 189 |
| Grafik 4.9: I. Aşama T^2 Diyagramı (6. Adım)..... | 191 |
| Grafik 4.10: I. Aşama T^2 Diyagramı (7. Adım)..... | 193 |
| Grafik 4.11: II. Aşama T^2 Diyagramı (1)..... | 195 |
| Grafik 4.12: II. Aşama T^2 Diyagramı (2)..... | 197 |
| Grafik 4.13: Yükseklik Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 215 |
| Grafik 4.14: Ağızçapı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 216 |
| Grafik 4.15: Dipçapı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 217 |
| Grafik 4.16: Etkalınlığı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 218 |
| Grafik 4.17: Dipyüksekliği Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 219 |
| Grafik 4.18: Köpükpayı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı..... | 220 |

GİRİŞ

Globalleşmeyle birlikte rekabet kavramının önemi her geçen gün artmakta ve serbest piyasa ekonomisine sahip olan tüm ülkeleri ve işletmeleri varlıklarını devam ettirme çabası göstermeye yöneltmektedir. Ülkeler ve işletmeler rekabet edebilmek için koşullarını yeniden inceleyerek farklı önlemler almak amacıyla sürekli yeni stratejiler geliştirmeye çalışmaktadır. Ülkeler kendi pazarlarını korumak amacıyla; Avrupa Birliği, Asya Birliği, Avrupa Serbest Ticaret Birliği gibi birlikler oluştururken, işletmeler ise iç yapılarında birtakım değişiklikler yapma gereksinimi duymaktadır. İşletmelerin önceliği olan en yüksek kara sahip olma amacı yerini, varlığını sürdürmek, en iyi olmak, rekabet edebilmek, dünya çapında bir işletme olmak unsurlarına bırakmaktadır. Bu amaca ulaşabilmek için uygulanan işletme stratejilerinden biri de kalitesi yüksek düzeyde olan ürün veya hizmet üretmektir. Bu amacın gerçekleştirilmesi, işletmelerin kaliteyi temel alan çağdaş bir yönetim sistemine sahip olabilmek için yeniden yapılandırılmasını gerektirmektedir. Toplam Kalite Yönetimi yaklaşımı bunun gerçekleştirilmesini sağlayan önemli bir yönetim yaklaşımıdır. Toplam Kalite Yönetimi, müşteri odaklı bir yönetim anlayışı olup, müşterileri ve müşterilerin gereksinimlerinin ön planda tutulmasını, ürün veya hizmetlerin doğru ve zamanında karşılanacak şekilde düzenlenmesini ve bu düzenlemenin düşük maliyetle gerçekleştirmesini temel almaktadır.

Ürün veya hizmet üretirken verimsizliği en aza indirmek amacıyla bütün faaliyetlerin müşteri gereksinimlerine yönelik olup olmadığının incelenmesi gerekmektedir. Son yıllarda sürekli yenilenme ve gelişme ihtiyacının artmasıyla birlikte, ürünlerin veya hizmetlerin üretilmesi oldukça karmaşık faaliyetler haline gelmiş ve bu faaliyetlerin sıklıkla kontrol edilmesi gereği ortaya çıkmıştır. Kontrol dışı bir durumda, prosesin durdurulup yeniden kontrol altına alınması gerekmektedir. Bu amaçla proseslerin nasıl kontrol edileceği önemli olmaktadır. Toplam Kalite Yönetimi'nin de temel unsurlarından biri sürekli yenilenme ve gelişmeyi sağlamaktır. Bu amacın gerçekleştirilmesi, bilgilerin sürekli olarak toplanması, kaydedilmesi ve sunulmasına, üretim prosesinin veya hizmetlerin kontrolüne

bağlıdır. Bu amaçla, birtakım istatistik yöntemler araç olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemler, ürünlerin üretilmesi aşamasında kalitenin beklenen düzeyde gerçekleşip gerçekleşmediğinin araştırılmasında ve müşteri memnuniyetinin ölçülmesinde etkindir. Müşteri memnuniyetinin ölçülmesi kalite kontrolünün bir parçası olarak kabul edilmektedir. İstatistik yöntemler bugüne kadar daha çok geleneksel yaklaşımla yapılan kontrollerde kullanılırken artık müşteri odaklı, müşterilerin gerçek gereksinimlerine cevap verecek şekilde ürünlerin üretilmesini sağlayan modern kalite kontrolünün gerçekleştirilmesinde de katkıda bulunmaktadır. Ürün veya hizmet üretilen prosesler birçok değişkenden oluşmaktadır. Genellikle değişkenler arasındaki bağımlılıklar çok değişkenli veri kümesinin karmaşık bir yapıya sahip olmasına neden olmaktadır. Bu nedenle müşteri memnuniyetini ölçmek veya ürün kalitesini kontrol etmek amacıyla oluşturulan veri kümelerinin analiz sonuçları yorumlanırken bilgi kaybına neden olmadan ve uygulamacı tarafından geliştirilen istatistik yazılımlar yardımıyla kolay uygulanabilir istatistik yöntemlere gereksinim duyulmaktadır. Proseslerin kontrol edilmesi amacıyla kullanılan yöntemler istatistik kalite kontrol araçları olarak bilinmektedir. Bu araçlardan biri olan kontrol diyagramları en sık kullanılan kontrol araçlarındandır. Kontrol diyagramları değişken sayılarına göre; tek değişkenli ve çok değişkenli, değişkenin türüne göre; kalitatif değişkenlere ve kantitatif değişkenlere uygulanan kontrol diyagramları olarak sınıflandırılabilir.

Prosesler, kalite yönetiminde olduğu gibi kalite kontrolünde de proaktif ve reaktif olmak üzere iki farklı yaklaşımla değerlendirilebilmektedir. Proaktif yaklaşımda, kalitenin tasarlanması önemliyken, reaktif yaklaşımda sadece kalitenin sağlanması önem kazanmaktadır. Yine proaktif yaklaşımda kalitesizliğe neden olabilecek faktörler önceden saptanırken, reaktif yaklaşımda ise kalitesizliğe neden olan faktörler belirlenmektedir. Kısaca proaktif yaklaşım proste saptanması güç ancak düzeltilmesi fazla maliyet gerektirmeyen problemlerle ilgilenmektedir. Geleneksel kalite kontrol yöntemlerinde reaktif bir yaklaşım benimserken, modern kalite kontrol yöntemlerinde proaktif kontrol yaklaşımı uygulanmaktadır. Proaktif kalite kontrol yaklaşımında değişkenler genellikle proses değişkenleri ve kalite değişkenleri olmak üzere iki grupta toplanmaktadır. Proses değişkenleri, ölçümleri

çok sık ve hızlı bir şekilde elde edilme özelliği gösterirken, kalite değişkenlerine ilişkin ölçümlerin sağlanması maliyetli ve zaman alıcı olmakta ve proses değişkenleri kadar sık ölçüm yapılamamaktadır. Tüm bu güçlükler özellikle kalite değişkenlerinden oluşan veri kümelerinde eksik gözlem ve ölçüm hatalarına neden olabilmektedir.

Çalışmada, proaktif yaklaşım temel alınarak kantitatif değişkenler için geliştirilen tek ve çok değişkenli kontrol diyagramları tanıtılarak aralarındaki farklar tartışılmaktadır. Diyagramların çizilebilmesi için sağlanması gereken istatistik varsayımlar detaylı olarak incelenmekte ve çok değişkenli diyagramlardan Hotelling T^2 diyagramı kalite değişkenlerine uygulanmaktadır. Diyagramın dağılım özellikleri, diğer çok değişkenli diyagramlara göre üstünlükleri tartışılarak bir işletme uygulaması ile konunun önemi vurgulanmaya çalışılmaktadır.

BİRİNCİ BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR, TEK VE ÇOK DEĞİŞKENLİ KONTROL DİYAGRAMLARI

1.1 Kalite, Kalite Kontrol ve İstatistik Kalite Kontrol Kavramları

Bir üretim prosesinde standarda uygun olarak üretilmeyen ürünler kusurlu olarak kabul edilmektedir. Kusurlu ürün sayısının azaltılması ve müşteri memnuniyetinin sağlanabilmesi, üretim prosesinde oluşan hataların belirlenmesine ve müşteri şikayetlerinin dikkate alınmasına bağlı olmaktadır. Bu aşamada kalite, kalite kontrol ve istatistik kalite kontrol kavramları önemli olmaktadır.

1.1.1 Kalite Kavramı

Günümüzde uluslararası rekabetin önemi, dünyadaki birçok işletmeyi üretim faaliyetlerinde en iyiyi üretmeye yönlendirmektedir. Global pazarda rekabet edebilmenin en önemli koşullarından biri en gelişmiş teknolojiyi kullanarak tüketicinin gereksinimlerini karşılayan kaliteli ürün üretmektir. İşletmelerin ve kişilerin satın alma kararlarında kalite çok önemli bir faktör haline gelmiştir. Bilindiği gibi üretim, ürün veya hizmetlerin istenilen kalitelere ulaşmak amacıyla makinelerin, aletlerin, yöntemlerin, malzemelerin ve görevlendirilmiş insanların oluşturdukları bir bileşimdir¹. Üretimde en önemli kavramlardan biri kalitedir. Sürekli olarak tüketicilere daha kaliteli mal veya hizmet üretmek işletmelerin en önemli amaçlarından biridir. Üretim sektöründe kalite, müşteri ile ürün kalitesi arasındaki ilişkiye bağlıdır. Bu ilişkinin güçlü olması kalitenin belirli bir standarda

¹ J.M. Juran , *Quality Control Handbook*, 3. baskı , New York, Mc-Graw-Hill Book Company, 1974, s. 23.

yükseltilmesi, işletmenin ürettiği ürünün kalitesini tanıtması ve tutundurması gerekmektedir. Kalite kavramı sadece ürünün kalitesi ile sınırlandırılmamalıdır. Kaliteli ürünün, kaliteli olarak sunulması da önemli olmaktadır.

Daha kaliteli mal ve hizmet üretmek son yıllarda üzerinde oldukça fazla durulan bir konudur. 1950 ve 1960'lı yıllarda kalite yerine fiyatın rekabet aracı olarak ön planda olduğu görülmektedir. 1970'li ve 80'li yıllarda ise daha yüksek düzeyde kalite fiyatın yerini almaya başlamıştır. Rekabet aracındaki bu değişim, dünya ticaretindeki dengelerin de değişimine neden olmuş dolayısıyla uzak doğu ülkelerine ait işletmeler, dünya pazarında daha geniş yer almaya başlamıştır. Dünyadaki ticaret dengelerinin bile değişimine neden olan kalite kavramının tanımlanması gerekmektedir.

Kalite; "Bir ürünün veya hizmetin gereksinimleri karşılayabilmesine dayanan tüm özellikler", "Tüketici gereksinimlerini mümkün olan en ekonomik düzeyde cevap vermeyi amaçlayan mühendislik ve üretim karakteristiklerinin bileşimi", "Ürün veya hizmetin tüketici gereksinimlerini ekonomik düzeyde karşılayabilmesi için tasarım ve üretim aşamalarında kazandırılan özellikler", "Ürün veya hizmetin tüketicinin isteklerine uygunluk derecesi", "Ürünün gerekliliklerine uygunluk derecesidir" gibi farklı şekillerde tanımlanmaktadır². Kalite fonksiyonellik, güvenilirlik, dayanıklılık, güvenlik ve estetik özellikler açısından incelendiğinde ise aşağıdaki tanımlar yapılabilmektedir:

Kalite, fonksiyonellik boyutuyla incelendiğinde "Bir ürünün kendisinden beklenen amacı üretim prosesi sonunda veya ilk kullanılmaya başlandığı zaman gerçekleştirip gerçekleştirilmemesinin incelenmesi", güvenilirlik boyutuna göre "önceden saptanan süre içinde ürünün herhangi bir sorun çıkarmadan çalışması", dayanıklılık boyutuna göre "ürünün alışık olunmayan koşullar altında kendisinden beklenen işlevi gerçekleştirme ölçüsü", güvenlik boyutuna göre "ürünü kullanan

² TSE, **Kalite Kontrolünde Kullanılan Terimler**, Ankara , Türk Standartları Enstitüsü, 1984, s. 8.
A.V. Feigenbaum, **Total Quality Control**, New York, McGraw-Hill Publishing Co., Inc., 1961, s. 13.
B. Kobu, **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, 2.baskı, İstanbul, İ.Ü. Yayını, 1987, s. 14.

kimsenin güvenliğini olumsuz yönde etkileyen bir durumun bulunmaması” ve estetik özellikler açısından ise “görünüş ile ilgili özelliklerin (yüzey düzgünlüğü, simetri, parlaklık, renk, koku gibi özelliklerin) standartlara uygun olarak sağlanması” şeklinde tanımlanabilmektedir³. Juran kaliteyi; “tüketicinin amaçlarına kullanım süresinde başarılı bir biçimde hizmet verip vermediğine konu olan özellik, kullanım uygunluğu” olarak tanımlamaktadır⁴. Juran’ın “kullanıma uygunluk” olarak tanımladığı kalite farklı anlamlar taşıyabilmektedir. Üretimde kullanıma uygunluk, ürünün tasarlanan spesifikasyonlarına uygunluğudur. K. Ishikawa ise kaliteyi; “ürünün veya hizmetin tüketiciyi tatmin etmek için sahip olduğu özellikler” olarak tanımlarken, Feigenbaum bir ürünün veya hizmetin kalitesini “tüketici gereksinimlerini mümkün olan en ekonomik düzeyde karşılamayı amaçlayan pazarlama, mühendislik, üretim ve kalitenin sürdürülmesi”⁵ olarak tanımlamaktadır. Bir başka yaklaşıma göre kalitenin tanımlanmasında, ürünün ortaya çıkma süreci dikkate alınmalıdır. Buna göre, bir ürünün ortaya çıkmasında aşağıda belirtilen üç faktör önemli rol oynamaktadır:

- Üretim öncesi faaliyetler
- Üretim sırasındaki faaliyetler
- Üretim sonrası faaliyetler

Belirli düzeyde bir kaliteye ulaşılabilmesi için, üretim öncesinde pazar araştırması, araştırma-geliştirme, tasarım, proses mühendisliği ve çeşitli kontrol işlemlerinin hazırlanması, parça, malzeme ve hammaddelerin alımının yapılması gerekmektedir⁶. Üretim öncesinde bu çalışmaların yapılması, müşterilerin üründe

³ S. Gözllü, **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, İstanbul, İTÜ yayını, 1990, s. 2.

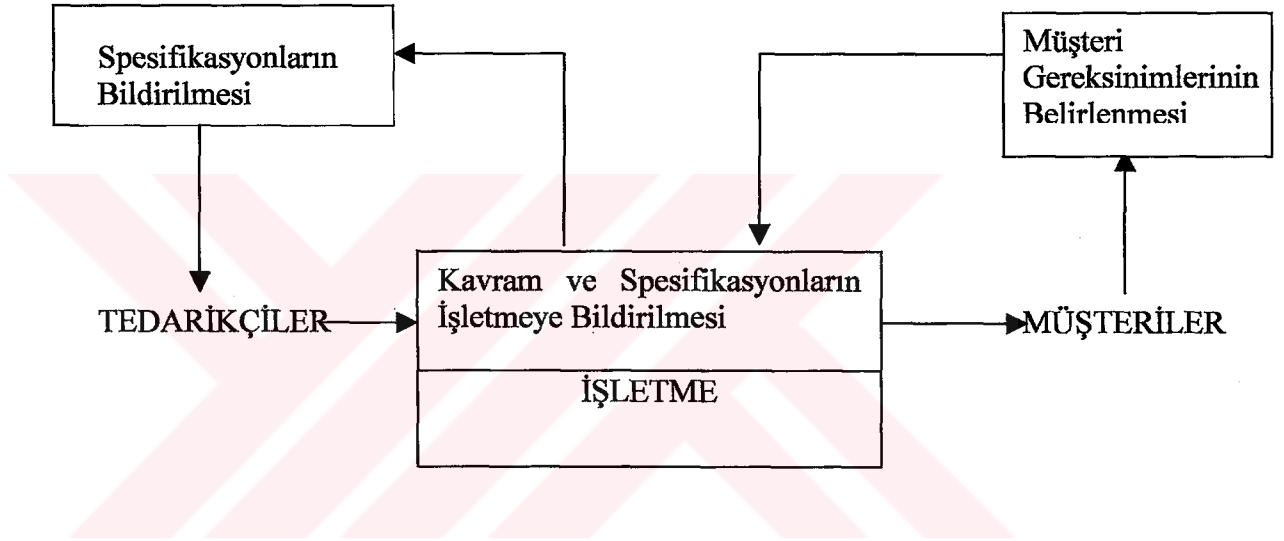
⁴ Juran, **a.g.e**, s. 2.

⁵ A.V. Feigenbaum, **Total Quality Control**, 3. baskı, Singapore, McGraw-Hill Book Company, 1987, s. 7.

⁶ S. Tan, N. Peşkireloğlu, **Kalitesizliğin Maliyeti**, Ankara, Milli Prodüktivite Merkezi Yayını, 1991, s. 24.

istediği özelliklerin belirlenmesini ve bu isteklere göre ürünün tasarımının gerçekleştirilmesini sağlamaktadır. Bu durumda “tasarım kalitesi” ’nden söz edilmektedir. Tasarımda kalite çalışmalarının genel olarak amacı, ürün/hizmet tasarımı veya yeniden tasarımlar için sürekli bir şekilde müşteri araştırmalarını sürdürmektir⁷. Şekil 1.1’de tasarım kalitesinin işleyişi gösterilmektedir.

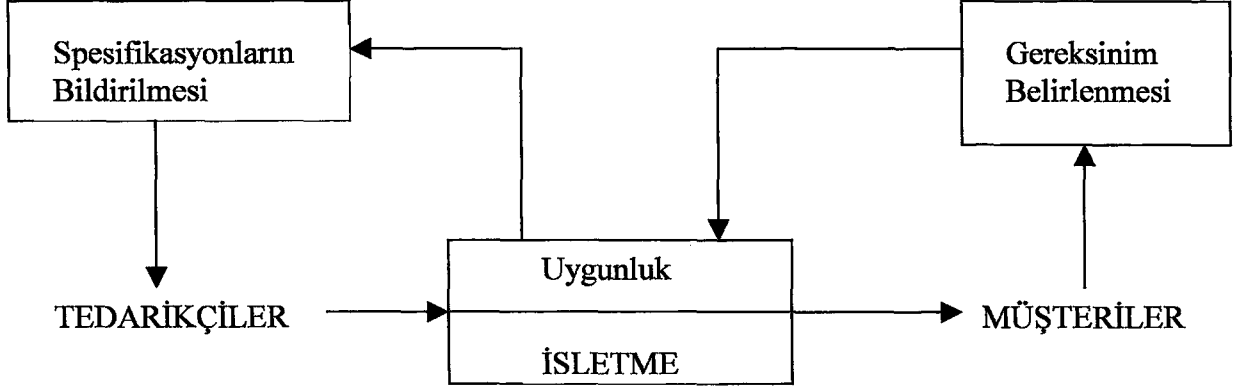
Şekil 1.1 Tasarım/Yeniden Tasarım Kalitesi



Üretim sırasındaki faaliyetlerin, tasarımda belirlenen özelliklere uygun olup olmadığının araştırılması aşamasında “uygunluk kalitesi” ’den söz edilmektedir. Uygunluk kalitesi, müşteri gereksinimlerini karşılamak için gerekli olan tasarım spesifikasyonlarını karşılayabilme ölçüsüdür. Şekil 1.2’de uygunluk kalitesinin işleyişi sunulmaktadır:

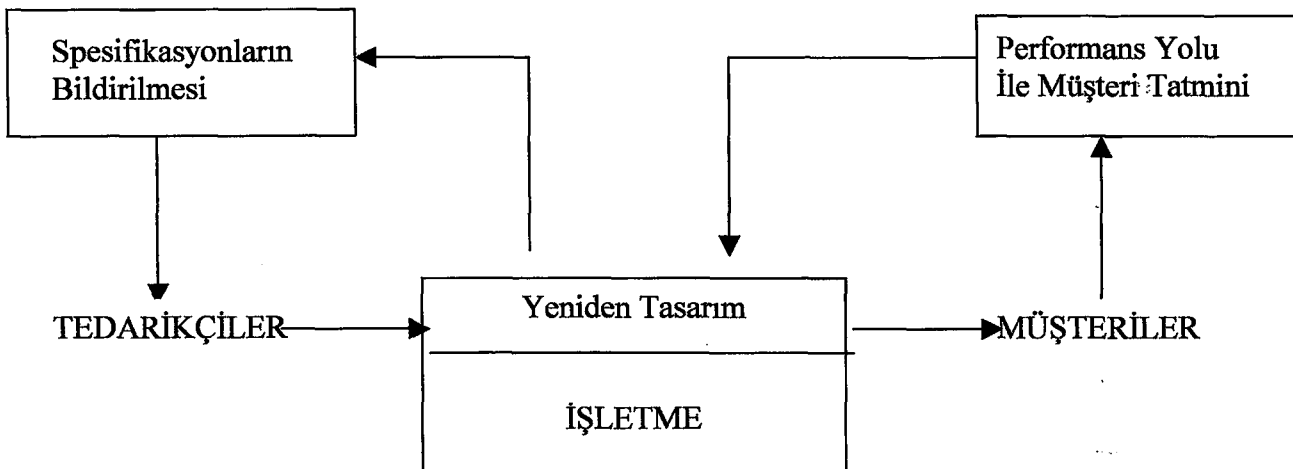
⁷ R. Bozkurt, **Kalite İyileştirme Araç ve Yöntemleri (İstatistiksel Teknikler)**, 3. baskı, Ankara, Milli Prodüktivite Merkezi Yayınları, No:630, 2003

Şekil 1.2: Uygunluk Kalitesi



Üretim sonrası faaliyetler olarak bilinen, ürünün nakliyesi (lojistik), yerleştirilmesi, bakımı, müşteriye götürülen hizmetlerin kalitesi işletmelerin ürünlerinin veya hizmetlerinin pazardaki performans düzeylerini belirlemede önemli faktörlerdir. Müşteri tatminini belirleyen bu faktörler pazarlama departmanı yardımıyla belirlenmekte ve bu üretim sonrası faaliyetlerin kalite düzeyi “performans kalitesi” olarak adlandırılmaktadır⁸. Şekil 1.3’te performans kalitesinin sağlanabilmesi için gerçekleşmesi gereken aşamalar gösterilmektedir:

Şekil 1.3: Performans Kalitesi



⁸ Bozkurt, a.e., s. 17.

Kalite kavramını “gerçek kalite” ve “algılanan kalite” şeklinde incelemek de mümkündür. Bir ürün veya hizmeti sunan kişi veya işletmenin ürün veya hizmeti sunmak için gösterdiği çaba ve katlandığı maliyet sonucunda ürünün spesifikasyonlarına ulaşması durumunda elde edilen kalite “gerçek kalite” olarak adlandırılmaktadır. “Algılanan kalite” ise subjektif bir kavramdır ve müşterinin algıladığı kalitedir. Bir ürün veya hizmet, müşterilerin beklentilerini karşıladığı zaman algılanan kaliteye ulaşmış olmaktadır⁹.

1.1.2 Kalite Kontrol Kavramı

Üretimde sürekliliğin sağlanabilmesi için üretilen mal ve hizmetlerin spesifikasyonlarını sağlayıp sağlanamadığını araştırmak amacıyla çeşitli ölçümler yapılmaktadır. Kalite kontrol olarak adlandırılan bu süreç “var olan bir durumu değiştirmek veya değişmesini önlemek için tasarlanmış davranış biçimi veya bir konuda standartların kurulması ve standartların sağlanması süreci” olarak da tanımlanmaktadır. Juran (1988) etkin bir kalite kontrolünün gerçekleştirilebilmesi için 7 aşama belirlemiştir:

- I. Aşama: Kalite kontrol konusunun belirlenmesi
- II. Aşama: Ölçümü yapılacak özelliklerin belirlenmesi
- III. Aşama: Ölçülen özelliklerin hedef değerlerinin belirlenmesi
- IV. Aşama: Mevcut performansın ölçülebilmesi için veri toplama sisteminin belirlenmesi
- V. Aşama: Mevcut durum performansının belirlenmesi

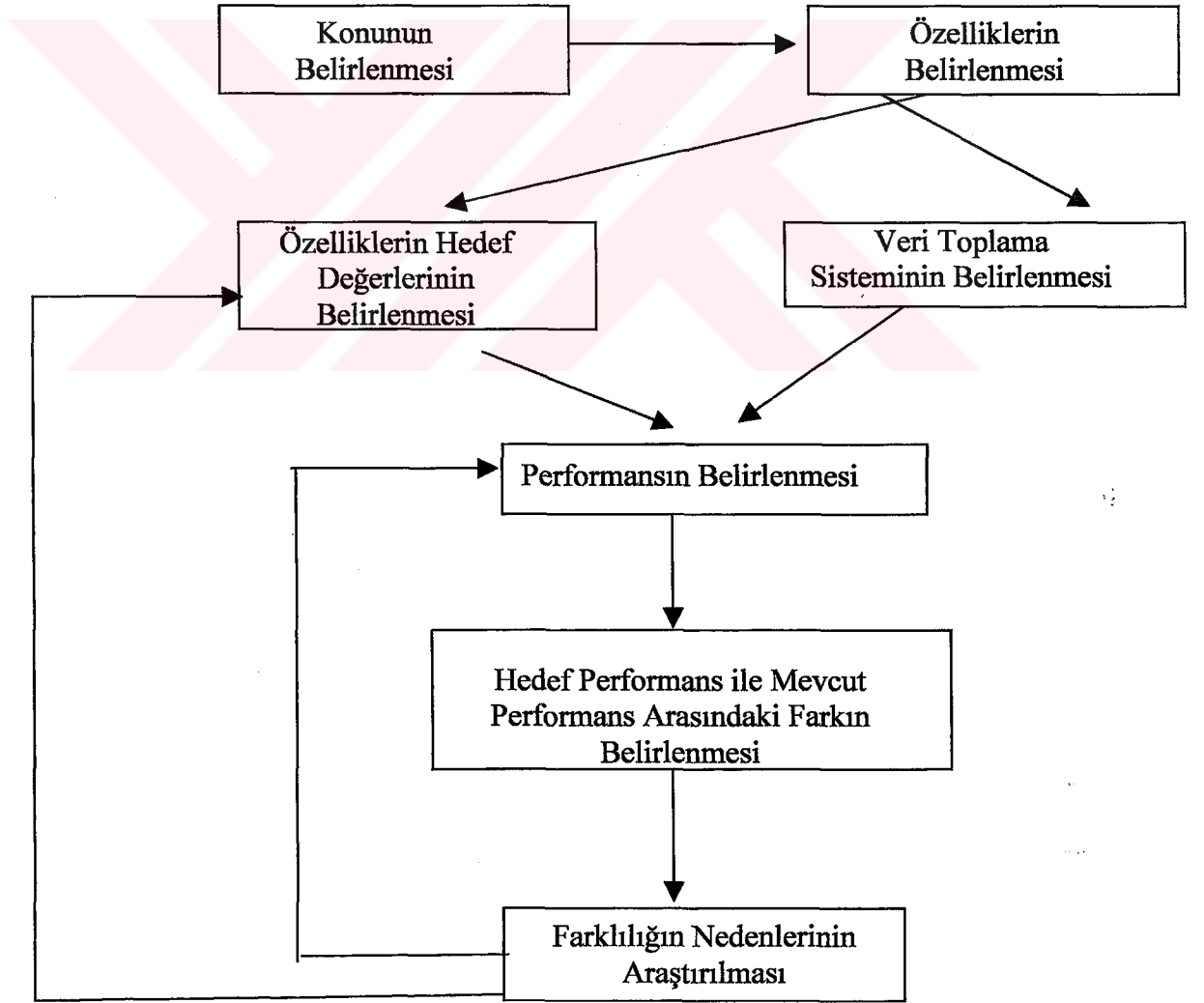
⁹ I.M. Pekdemir, *İşletmelerde Kalite Yönetimi, Kavramlar, Kalite İyileştirme Süreci, Vak'alar*, İstanbul, Beta Yayın Dağıtım A.Ş., 1992, s. 8.

VI. Aşama: Hedeflenen performans ile mevcut performans arasındaki farkın değerlendirilmesi

VII. Aşama: Önceden belirlenmiş kriterleri kullanarak farklılığın nedenlerinin araştırılması

Bu aşamalar Şekil 1.4'de akış diyagramı yardımıyla da gösterilmektedir:

Şekil 1.4 : Etkin Bir Kalite Kontrolünün Gerçekleştirilebilmesi İçin Gerekli Olan Aşamaların Akış Diyagramı İle Gösterimi



Juran, yukarıdaki aşamalar çerçevesinde kalite kontrolü; “gerçek kalite düzeyinin ölçüldüğü, standartlarla karşılaştırıldığı ve farklılık karşısında harekete geçilen bir düzenleme şekli” olarak tanımlamaktadır¹⁰. Feigenbaum ise kalite kontrolünü “Tatmin edici sonuçların elde edilmesi amacıyla gerekli araçları koruyarak bir yönetsel süreç için sorumluluk ve yetkinin devredilmesi”¹¹ olarak tanımlarken kalite kontrolüne yönelik tüm faaliyetleri “Toplam Kalite Kontrolü (TKK)” olarak adlandırmaktadır. TKK, tüketici isteklerini en ekonomik düzeyde karşılamak amacıyla işletme içindeki çeşitli bölümlerinde kalitenin yaratılması, korunması ve geliştirilmesine yönelik çabaların bütünleştirilmesini sağlayan etkili bir sistem olarak kabul edilmektedir.

Belirtilen aşamaların başarılı bir şekilde uygulanabilmesi ve faaliyete geçirilebilmesi için yönetsel birtakım faaliyetlerin de yerine getirilmesi gerekmektedir. Bu konuda genellikle Japonya’nın endüstriyel başarısında büyük payı olan Deming’in 14 ilkesi temel alınmaktadır¹².

- 1- Ürünlerin ve hizmetlerin geliştirilmesini hedefleyen amacın sürekli olmasını sağlayınız. Ürün tasarımı ve performansının sürekli olarak geliştirilmesi konusunda çaba gösteriniz. Araştırma, geliştirme ve yeniliklere yapılan yatırımlar uzun dönemde şize katlanarak dönecektir.
- 2- Kötü işçilik, kusurlu ürünleri ve kötü hizmeti kabul etmeyen yeni bir felsefe izleyiniz. Kusurlu bir ürünü üretmenin maliyeti en azından kusursuz bir ürünü üretmek kadardır. Kusurlu ürünler nedeniyle yüklenilen hurda ve yeniden işleme maliyetleri işletmenin kaynaklarını büyük ölçüde tüketir.

¹⁰ Juran, a.g.e., s. 11.

¹¹ Feigenbaum, a.g.e., s. 10.

¹² D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4. baskı, New York, John Wiley & Sons, Inc., 2001, s. 18-20.

N. Gürsakar, *İstatistik I Çözümlü Sorular*, Bursa, Marmara Kitabevi Yayını, 1996, s. 5-7.

- 3- Kaliteyi kontrol ederken ürünlerin yığın halinde incelenerek kusurluların belirlenmesine güvenmeyiniz. Ürettikten sonra kontrol etmek, üretim prosesi için çok gecikmiş, pahalı ve etkin olmayan bir kontrol şeklidir. Kalite, üretim prosesinde kusurlu üretiminden kaçınmakla elde edilebilir.
- 4- Size mal sağlayanları sadece fiyat temelinde değerlendirmeyerek, aynı zamanda kaliteyi de dikkate alınız. Fiyat ancak belirli bir kalite düzeyi ile ilişkili olduğunda anlamlı bir ölçüdür. Diğer bir deyişle bir ürünün sadece satın alındığı fiyatı değil, toplam maliyeti göz önüne alınmalıdır.
- 5- Sürekli geliştirmeye yönelin, dikkatinizi bu noktaya odaklayın. Sürekli olarak üretim ve hizmet sisteminizi geliştirmeye çalışın. Bu etkinliklere çalışanlarınızın katılımını sağlayarak, istatistik yöntemler kullanın. Özellikle istatistik proses kontrol araçlarından yararlanın.
- 6- Modern eğitim yöntemlerini kullanarak, tüm çalışanlarınızın eğitimine yatırım yapın. Her çalışan, işi ile ilgili olarak teknik anlamda ve aynı zamanda kalite ve verimlilik geliştirme yöntemleri konularında da eğitilmelidir. Eğitim, çalışanların hergün öğrendikleri yöntemleri uygulamalarını desteklemelidir.
- 7- Modern denetim yöntemlerini uygulayınız. Denetim sadece pasif olarak işçilerin izlenmesi anlamına gelmez, onların içinde çalıştıkları sistemi geliştirmelerine yardımcı olmalısınız. Denetimin birinci amacı iş sisteminin ve ürünün geliştirilmesi olmalıdır.

- 8- İş yerinizden korkuyu kovun. Birçok işçi soru sormaya, sorunları raporlamaya, koşullara dikkati çekmeye korkar. Bunlar ise, üretimin kalite ve etkinliğini engeller. Birçok organizasyonda korkudan kaynaklanan ekonomik kayıplar büyüktür. Korkuyu sadece yönetim ortadan kaldıracaktır.
- 9- İşletme fonksiyonları arasındaki engelleri kaldırın. Etkin, kalite ve verimlilik gelişmeleri için farklı birimler arasında takım çalışmaları esas olmalıdır.
- 10- İşgücünüzün önündeki hedefleri, sloganları ve sayısal amaçları kaldırın. "Sıfır Hata" gibi bir amaç bu amaca nasıl ulaşılacağını anlatan bir plan olmaksızın yararsızdır. Gerçekte sloganlar ve programlar genellikle verimliliği azaltır. Oysa siz sistemi geliştirmeye ve buna bilgi sağlamaya çaba gösterin.
- 11- Sayısal kotaları ve iş standartlarını kaldırın. Bu standartlar tarihi olarak kaliteyi dikkate almadan belirlenmiştir. İş standartları genellikle, yönetimin iş sürecini anlamakta ve süreci geliştirmeye yönelik etkin bir yönetim sistemi sağlamak konusundaki yetersizliğin belirtisidir.
- 12- Çalışanların işlerini yapmakta cesaretlerini kıran engelleri kaldırın. Yönetim çalışanların öneri, yorum ve şikayetlerini dinlemek zorundadır. İş yapan işi en çok bilendir. Sürecin daha etkin olması için değerli görüşlerin onlarda olduğunu dikkate alınız. İşgücü sadece toplu sözleşmelerde karşımızda olan değil işletmede önemli olan bir katılımcıdır.
- 13- Basit, yararlı istatistik yöntemlerin eğitimi, tüm çalışanlar için zorunlu olmalıdır. İstatistik proses kontrolünün problem çözme araçları, özellikle kontrol diyagramları yaygın olarak kullanılmalıdır. Bu diyagramlar yaygınlaştıkça ve çalışanlar

bunların kullanımını anladıkça, kalitesizliğin nedenlerini ve prosesin geliştirilme yollarını daha iyi anlarlar.

- 14- Üst yönetimde tüm bu noktaları kuvvetle savunan bir yapı oluşturunuz.

1.1.3 İstatistik Proses Kontrol Ve Kontrol Diyagramları

İstatistik yöntemlerin kalite kontrolünde kullanılması 1920'li yıllarda başlamıştır. İstatistik kalite kontrol, istatistik kuram ve yöntemlerinin, tasarım, üretim ve hizmetin her aşamasına uygulanması veya bir prostedeki tesadüfi ve anlamlı değişimlerin saptanabilmesi amacıyla kullanılan yöntemlerin tümü olarak tanımlanabilmektedir¹³. Kalite kontrol sırasında kullanılan istatistik yöntemler belirlenebilir nedenleri açığa çıkaran tam niteliğinde olup olasılık kurallarından hareketle ürünün istenen kalitede olup olmadığını ortaya çıkarmaktadır. II. Dünya savaşına kadar geçen sürede istatistik yöntemlerin kalite kontrolüne uygulanmasının yaygın olmadığı görülmüş ancak II. Dünya savaşı sırasında ve sonrasında istatistik kalite kontrol yeniden önem kazanmaya başlamıştır.

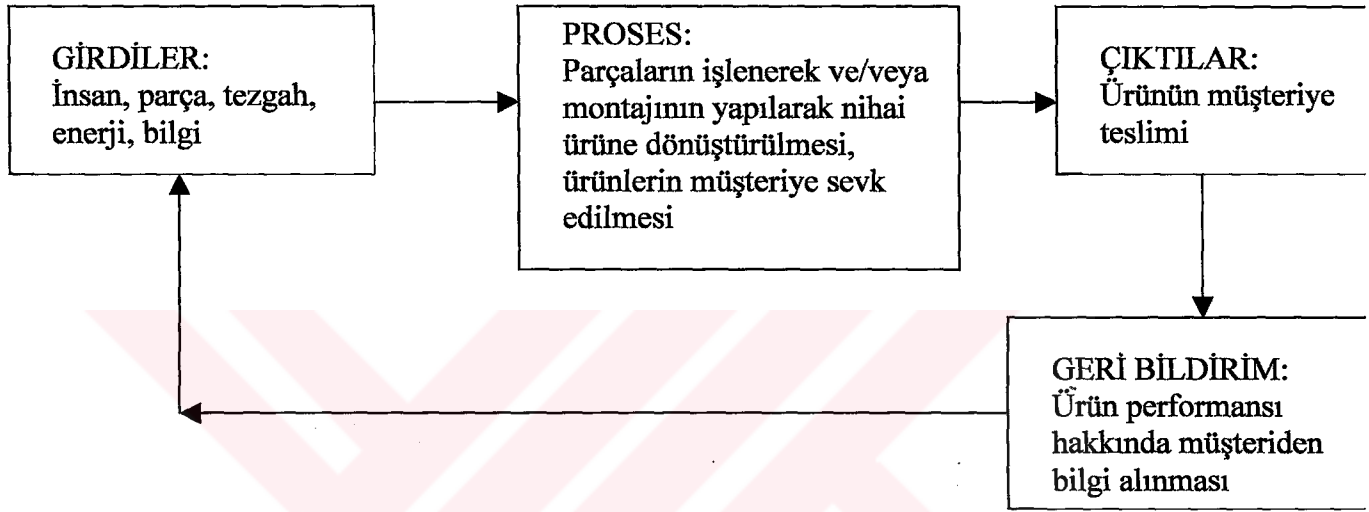
İstatistik yöntemler ürünlerin kalitesini kontrol etmenin dışında alınan veya üretilmiş ürünlerin kabulüne ilişkin karar vermede ürün kabul örneklemeleri kullanılmaktadır. Bu nedenle istatistik kalite kontrolünde kullanılan istatistik yöntemler; 1-) Proses Kontrol Yöntemleri, 2-) Kabul Örneklemesi Yöntemleri olmak üzere 2 grupta toplanmaktadır¹⁴.

¹³W.E.Deming, *Industrial Quality Control*, Wisconsin, American Society for Quality Control, 1956, s. 12.

¹⁴N. Burnak, *Çokdeğişkenli Kalite Kontrolünde Maliyet Analizi*, Eskişehir, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1988, No:259, s. 25.

Genel üretim prosesi Şekil 1.5'deki gibi gösterildiğinde prosesin girdiler, proses, çıktılar ve geri bildirim aşamalarının istatistik yöntemlerle kontrol edilmesi istatistik kalite kontrol, proses aşamasının kontrol edilmesi istatistik proses kontrolü olarak tanımlanmaktadır¹⁵.

Şekil 1.5 Genel Üretim Prosesi



Kabul örnekleme ise, kabul veya red etme amacıyla kontrol, üretimin çeşitli aşamalarında gerçekleştirilen bir işlemdir. Satın alınan malzeme veya teçhizatın kontrolü, üretimin farklı aşamalarında kontrol ve ürünün üretici ve tüketici tarafından kontrolü bu alanda yapılan çalışmaları kapsamaktadır. Kabul örneklemesinin amacı söz konusu anakütlenin kalitesini tahmin etmek değil, kabul veya red kararı için yol göstermektir¹⁶.

İstatistik proses kontrol; yedi temel kalite aracı ile uygulanabilmektedir:

1- Çetele Diyagramı (Check Sheet)

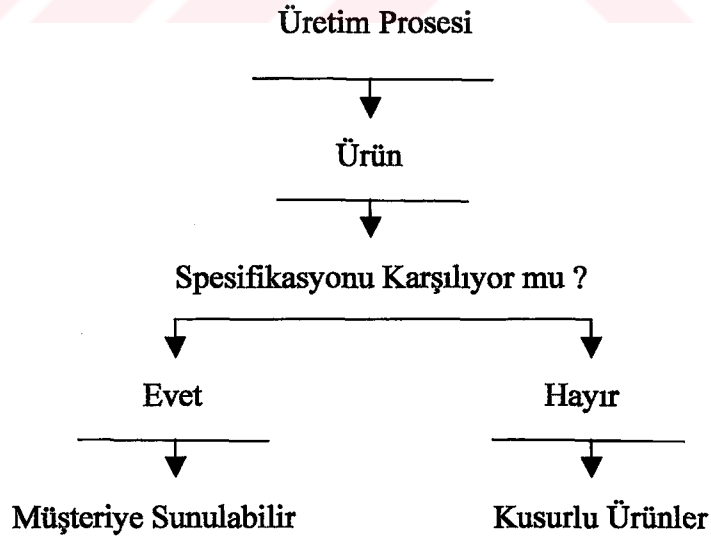
¹⁵Bozkurt, a.g.e., s. 36.

¹⁶Gözlü, a.g.e., 1990, s. 114.

- 2- Pareto Diyagramı (Pareto Diagram),
- 3- Neden-Etki Diyagramı (Cause and Effect Diagram)
- 4- Histogram (Histogram)
- 5- Hata Odaklı Diyagram (Defect Concentration Diagram)
- 6- Serpilme Diyagramı (Scatter Diagram)
- 7- Kontrol Diyagramı (Control Chart)

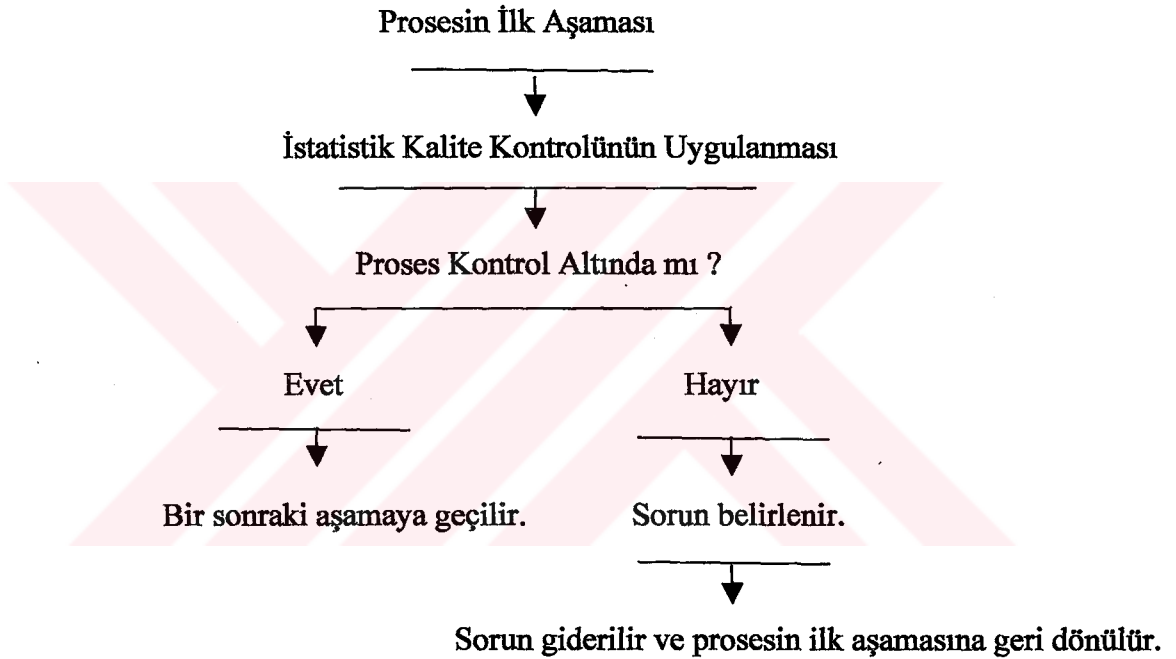
İstatistik proses kontrol, geleneksel kalite kontrol yaklaşımından oldukça farklıdır. Geleneksel yönteme göre; ürün üretildikten sonra, spesifikasyonlarının sağlanıp sağlanmadığı, bir kontrolör tarafından belirlenmekte ve spesifikasyonları sağlanamayan ürünler yeniden işlenmek üzere üretime geri gönderilmektedir. Geleneksel yöntemin işleyişi aşağıda Şekil 1.6'da gösterilmektedir:

Şekil 1.6 : Geleneksel Kalite Kontrol Yaklaşımı



İstatistik kalite kontrol, üretimin bir parçasıdır; üretimin her aşamasında yer almaktadır ve amacı ürün kalitesinin bozulmasına neden olan etkenlerin oluşmasını önlemektir. Bu yaklaşım, yüksek düzeyde kalite, onarım ve kusurlu ürün sayısında azalma, daha iyi planlama, denetim, üretim hızında ve verimlilikte artış, maliyetlerde düşme ve sürekli bir iyileşme sağlayabilmektedir¹⁷. İstatistik kalite kontrolünün üretim prosesine nasıl uygulandığı Şekil 1.7’de gösterilmektedir.

Şekil 1.7: İstatistik Kalite Kontrolünün Uygulanması



Kalite kontrolü uygulamalarında, genellikle kontrol diyagramları kullanılmaktadır. Bu diyagramlar, prosesteki değişimlerin görsel olarak sürekli izlenmesini sağlamaktadır. Kontrol diyagramları, “değişken olarak tanımlanan ürün özelliklerinin değerlerindeki değişimin ve trendin grafik bir gösterimle sunulması”, “prosesin zaman içindeki değişiminin görsel olarak sunumu”, “çeşitli üretim proseslerini kontrol etmek ve gözlemlenmek amacı ile kullanılan etkin bir istatistik araç”, “prosesin istatistik yöntemlerle ekonomik ve güvenilir biçimde kontrol altında

¹⁷ N.Uğur, H.Çaltuğ, *İstatistik Kalite Kontrol*, 2. baskı, Ankara, KOSGEB Yayını, 1995, s. 3.

tutulmasında kullanılan etkin bir araç” olarak tanımlanabilmektedir¹⁸. Diğer bir tanım “proseste meydana gelen değişimi tesadüfi ve özel faktörler olmak üzere ikiye ayırmak için kullanılan araçlar” şeklindedir¹⁹.

Kontrol diyagramlarının en sık kullanılan tanımlarından biri de Feigenbaum’a aittir. Feigenbaum kontrol diyagramını, “Ürünün, ürünü oluşturan parçaların veya diğer bileşkenlerin kalite spesifikasyonlarını geçmiş deneyimlere dayanarak saptanan limitlere göre kronolojik (saat, gün, hafta v.b.) olarak karşılaştırmaya yarayan grafik araç” olarak tanımlamaktadır²⁰.

Bir prosesin değişimine neden olan faktörler iki grupta toplanabilmektedir²¹:

- Tesadüfi faktörler
- Özel faktörler

Tesadüfi faktörler proseste küçük değişimlere neden olmaktadır. Bu değişimler prosesin kontrol altında kalmasına engel olmuyorsa doğal kabul edilebilmektedir. Çevresel koşullardaki değişim, ölçme hataları gibi faktörler tesadüfi faktörlerdir. Özel faktörlerin proseste meydana getirdikleri değişim ise prosesin kontrol limitlerinin dışına çıkmasına neden olacak kadar büyük olmaktadır.

Kontrol diyagramlarının çizilmesinin amacı aşağıdaki iki tip hatayı azaltmaktır:

¹⁸ D.H. Stamatis, **TQM Engineering Handbook**, New York, Marcel Dekker, Inc., 1997, s. 149. Kobu, a.g.e., s. 341.

¹⁹ G. Nedumaran, J.J. Pignatiello, “On Constructing T² Control Charts for Online Process Monitoring”, **IIE Transactions**, C. XXXI, No: 6, 1999, s. 529.

²⁰ Feigenbaum, a.g.e., s. 396.

²¹ H. Kume, **Statistical Methods for Quality Improvement**, 8. baskı, Tokyo, AOTS, 1992, s. 93.

- Özel faktörler mevcut değilken aramaya çalışmak ve gereksiz önlemler almak
- Özel faktörler mevcut olduğu halde farkına varamamak ve önlem almakta geç kalmak²²

Bu hataların azaltılması prosese ilişkin kontrol diyagramlarının doğru çizilmesine bağlı olmaktadır.

Kontrol diyagramlarının istatistik proses kontrolünde kullanılmasının pek çok avantajı bulunmaktadır. Bu avantajlar:

- Uygulamada incelenen değişken(ler)in gözlem değerlerinin belirli limitler arasında olup olmadığının incelenmesi yeterli görüldüğünden herhangi bir matematik veya istatistik modele gereksinim duyulmaması
- Diyagramların kolay uygulanması ve yorumlanması
- Prosesteki değişimin görsel olarak sürekli izlenebilmesi

olarak sıralanabilmektedir.

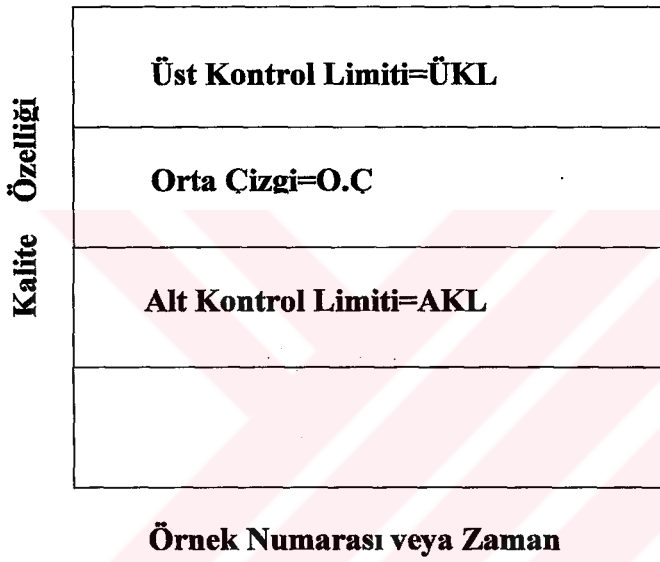
Kontrol diyagramları I. Aşama ve II.Aşama diyagramları olmak üzere iki aşamada incelenmektedir²³: I. Aşama diyagramları prosesten çekilen büyük bir örnekle (“İlk örnek” (Priori Sample)) prosesin geçmişte kontrol altında olup olmadığını test ederek prosesin kontrolde olduğu durumu saptamaya çalışırken, II. Aşama diyagramları ise prosesi gözlemek amacıyla oluşturulmaktadır.

²² Kobu B., a.g.e., s. 343.

²³ R. Mason, v.d., “Assesment of Multivariate Process Control Techniques”, *Journal of Quality Technology*, C.XXIX, N:2, 1997, s. 140.

Kontrol diyagramlarında hesaplanan üst sapma limitine “Üst Kontrol Limiti (ÜKL)”, alt sapma limitine “Alt Kontrol Limiti (AKL)” ve ortalama değerinden geçen çizgiye ise “Orta Çizgi (OÇ)” adı verilmektedir. Kontrol limitleri, literatürde faaliyet limitleri (action limits) olarak da bilinmektedir²⁴. Limitlerin kontrol diyagramlarındaki konumu Şekil 1.8’de gösterilmektedir.

Şekil 1. 8: Örnek Bir Kalite Kontrol Diyagramı



Birimlerin değerlerinin normal dağıldığı kabul edilerek oluşturulan;

$$\text{ÜDTL} = \bar{X} + 3\sigma \quad (1.1)$$

$$\text{ADTL} = \bar{X} - 3\sigma$$

limitleri Doğal Tolerans Limitleri (DTL) olarak tanımlanmaktadır. Bu limitler anakütle normal dağılıyorsa veya büyük örnekler çekilmişse örnek ortalamalarının (iadesiz kombinasyon sayıda) %99.73’ünün $\pm 3\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ sınırları arasında kaldığını

²⁴ A. Nijhuis, S. Jong, B.G.M. Vandeginste, “The Application of Multivariate Quality Control in Gas Chromatography”, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, C.XLVII, No:1, 1999, s. 109.

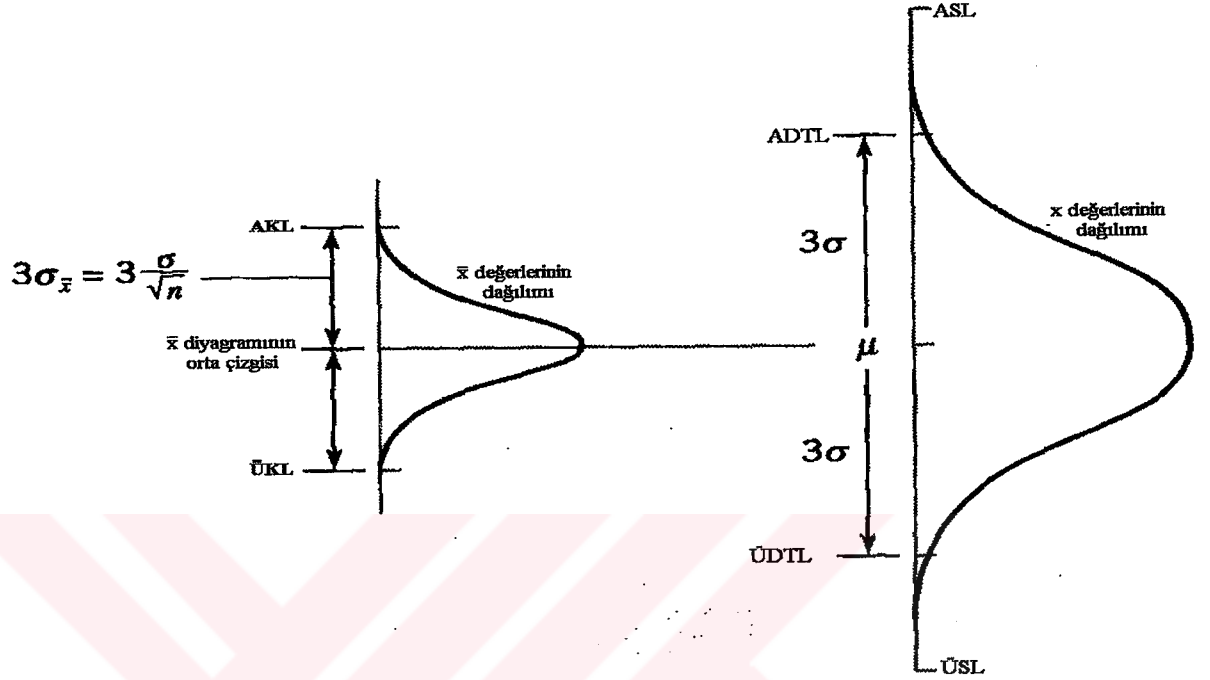
göstermektedir²⁵. Üretim aşamasından önce üretim mühendisi, yönetici, ürün geliştirenler tarafından dışsal olarak belirlenen limitler ise “Spesifikasyon Limitleri”’dir. Kontrol limitleri ile arasında herhangi bir matematik veya istatistik ilişki bulunmamaktadır. Spesifikasyon limitleri, önceden belirlenen spesifikasyonlara uygun ürün üretilip üretilmediğinin izlenmesini sağlarken, kontrol limitleri prosesin kontrol altında olup olmadığının karar verilmesine yardımcı olmaktadır. Bir gözlem değerinin kontrol limitleri arasında yer alması, spesifikasyonlara uygun bir ürünün üretildiği anlamına gelmemektedir.²⁶ Kontrol diyagramlarıyla sadece ürünün incelenen özelliğinin kontrol altında olup olmadığına karar verilmektedir. Bu durumda spesifikasyon limitlerinin, kontrol limitleri yerine kullanılması incelenen proses ile ilgili yanlış sonuçlar elde edilmesine neden olabilmektedir. Doğal tolerans limitlerinin hesaplanmasında kullanılan standart sapma (σ), anakütle değerleriyle hesaplanmakta veya anakütleden çekilen bir örnekle tahmin ($\hat{\sigma}$) edilmektedir. Ortalamadaki değişimi gösteren kontrol diyagramının (\bar{x} -diyagramı) limitlerinin hesaplanmasında ortalamanın standart hatası ($\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) kullanılmaktadır. Doğal tolerans limitleri ve spesifikasyon limitleri anakütle değerleri kullanılarak belirlenirken, \bar{x} -diyagramının kontrol limitleri anakütleden çekilen örneklerle hesaplanmaktadır. Bu ayırım Şekil 1.9’da gösterilmektedir. Ancak birçok uygulamacı, ortalamadaki değişime dayanan diyagramların (\bar{x} -diyagramı) çizilmesi aşamasında kontrol limitleri yerine spesifikasyon limitlerini kullanarak yanlış sonuçlar elde edebilmektedir.²⁷

²⁵ N. Orhunbilge, **Örnekleme Yöntemleri ve Hipotez Testleri**, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 1997, s. 32.

²⁶ D. R. Bothe, **Measuring Process Capability Techniques and Calculation for Quality and Manufacturing Engineers**, U.S.A, Mc Graw-Hill, 1997, s. 22.

²⁷ D.C. Montgomery, a.g.e., s. 221.

Şekil 1.9: Kontrol Limitleri ile Doğal Tolerans ve Spesifikasyon Limitlerinin Karşılaştırılması



Genellikle noktaların limitler arasında olması prosesin tesadüfi faktörlerin etkisi altında bulunduğunu göstermektedir. Ancak bu durum prosesin kesin olarak kontrol altında olduğu anlamına gelmemektedir. Kontrol dışı durumun tanımlanmasında belirlenen kurallar işletmelere göre farklılık göstermektedir. En yaygın olarak bilinenleri Western Electric Company (WECO) ve American Telephone and Telegraph Company (AT&T) kurallarıdır. WECO'ya göre²⁸;

- Herhangi bir noktanın, $\bar{X} \pm 3\sigma$ aralığının dışında olması
- Son 3 noktadan 2'sinin $\bar{X} \pm 2\sigma$ aralığının dışında olması
- Son 5 noktadan 4'ünün $\bar{X} \pm \sigma$ aralığının dışında olması

²⁸ "What are Control Charts", **Engineering Statistics Handbook**, (Çevrimiçi), <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc32.htm>, 27 Şubat 2004.

- Ardarda 8 noktanın ortalama çizginin hemen üzerinde veya altında yer alması durumlarında proses kontrol dışındadır.

AT&T kurallarına²⁹ göre ise;

- Kontrol limitlerinin dışında noktaların olması
- Prosesin ortalama değerinin altında veya üzerinde 7 noktanın ard arda görülmesi
- Aşağıya veya yukarıya doğru en az 7 noktalı trendin belirlenmesi
- Devirsel hareketlerin olması
- Noktaların ortalamanın etrafında fazlasıyla toplanması (Bu durum ilk bakışta, kontrol diyagramının “iyi” olduğunun düşünülmesine neden olabilmektedir. Ancak çok gerçekçi görünmemektedir. Noktaların ortalamanın etrafında yoğun olarak toplanması durumunda, sorunun kaynağı; prosesin akışında önemli bir değişim olup olmadığının araştırılması ve prosesin akışına etki ederek prosesin bütününe etkilenmesine neden olan faktörün belirlenmesiyle ortaya çıkarılabilmektedir. Genellikle sorunun; grafiğin ölçeğinden veya örneğin tesadüflüğünün ortadan kalkmasından kaynaklandığı görülmektedir³⁰.)

prosesin kontrol altında olmadığını göstermektedir. “Kontrol limitlerinin dışında noktaların olması” dışındaki kurallar , kontrol diyagramlarının duyarlılığını arttırmak için kullanılmaktadır³¹.

²⁹ Stamatis, a.g.e., s. 160.

³⁰ Stamatis, a.g.e., s. 160.

³¹ A.Nijhuis, S.Jong, B.G.M. Vandeginste, “Multivariate Statistical Process Control in Chromatograph, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, C.XXXVIII, 1997, s. 51-62.

Kontrol diyagramları incelenen ürün özelliğinin sayısına göre; tek değişkenli ve çok değişkenli, değişkenin türüne göre ise kantitatif ve kalitatif diyagramlar olmak üzere iki grupta toplanmaktadır. Tek değişkenli ve çok değişkenli diyagramlar uygulamada farklılıklar göstermektedir. Bu fark, tek değişkenli diyagramlarda incelenen ürün özelliğinin kontrol altında olup olmadığının, çok değişkenli diyagramlarda ise ürünün incelenecek tüm özelliklerinden hesaplanan ortak bir istatistik için çizilen kontrol diyagramının kontrol altında olup olmadığının incelenmesinden kaynaklanmaktadır. Ancak çok değişkenli kontrol diyagramı uyarı verdiğinde sorunun kaynağının belirlenmesi ayrıştırma yöntemleri³² kullanılmadan kolay olmadığından, tek ve çok değişkenli diyagramların birlikte çizilmeleri önerilmektedir.³³ Tek ve çok değişkenli kontrol diyagramları, prosesin ortalama değerindeki ve değişkenliğindeki değişimlerin izlenmesi amacıyla çizilebilmektedir. Ancak uygulamada özellikle çok değişkenli diyagramlarda prosesin ortalama değerindeki değişim izlendiğinden, prosesin ortalama değerindeki değişim temel alınacaktır. Ortalamalar için geliştirilen diyagramlar, proses düzeyinin standart değere eşit olup olmadığını test etmek amacıyla çizilmektedir. Çok değişkenli kontrol diyagramlarının yorumlanması tek değişkenli kontrol diyagramlardan farklılık göstermektedir. Tek değişkenli kontrol diyagramlarının kontrol altında olup olmadığı genel kurallarla (WECO, AT&T gibi) değerlendirilirken, çok değişkenli kontrol diyagramlarında kontrol dışı durum kontrol limitini aşan değerler olarak kabul edilmektedir³⁴.

1.2 Tek Değişkenli Kontrol Diyagramları

Tek değişkenli kontrol diyagramları; Shewhart, Kümülatif Toplam (CUSUM) ve Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (EWMA) diyagramları olmak üzere üç bölümde incelenmektedir:

³² Bu yöntemler 3. bölümde detaylı olarak incelenmektedir.

³³ Y. Nong, v.d., "Hotelling's T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection", *Proceedings of the 2000 IEE Workshop on Information Assurance and Security United States Military Academy*, New York, 2000, s. 180.

³⁴ Nijhuis, Jong, Vandeginste, a.g.e., s.112.

1.2.1 Shewhart Kontrol Diyagramları

Verilerin diyagramlarla ve grafiklerle gösterimi prosesi karakterize eden değişkenlerin değişiminin saptanmasında önemli bir rol oynamaktadır. Uygulamadaki pek çok örnekte istatistik kalite kontrol, tek bir değişken için kontrol diyagramının çizilmesine dayanmaktadır. Birden fazla değişken olması durumunda bile değişkenlerin tek değişkenli kontrol diyagramları ile gösterimi tercih edilmektedir. İlk olarak 1924 yılında W.A. Shewhart Amerika'da Bell Telefon Laboratuvarı'nda istatistik yöntemleri kalite kontrolüne uygulamış ve kendi adını taşıyan tek değişkenli Shewhart Kontrol Diyagramları'nı geliştirmiştir. 1926 yılında "Quality Control Charts" adlı eserini Bell System Technical Journal adlı dergide, istatistik kalite kontrol ile ilgili yaptığı çalışmalarını ise 1931 yılında "Economic Control of Quality of Manufactured Product" adlı kitabında yayınlamıştır³⁵. Bu gelişme istatistik proses kontroldeki en temel gelişmelerden biri olarak kabul edilmektedir.

Shewhart kontrol diyagramları, örnek büyüklüğü bir ($n=1$) olan m tane ve örnek büyüklüğü birden büyük ($n>1$) olan m tane örnek çekilmesi durumlarının grafik üzerinde gösterilmesinde etkin olmakta ve bu diyagramlar sırasıyla x -diyagramları³⁶, \bar{x} -diyagramları olarak adlandırılmaktadır.

Çalışmada, çok değişkenli kontrol diyagramları genellikle proses değişkenliğinin izlenmesinden çok proses ortalamasındaki değişimin izlenmesi amacıyla örnek büyüklüğü birden büyük olan örneklere uygulandığından, tek değişkenli kontrol diyagramlarında da örnek ortalamalarına dayanan \bar{x} -diyagramları temel alınmaktadır. Ortalama değerlerindeki değişkenliklerin izlenebilmesi için R

³⁵ Montgomery, a.g.e., s. 9.

J.S. Hunter, "Statistical Process Control", **Quality Progress**, Aralık 1999, s. 54.

³⁶ x -diyagramları, örnek büyüklüğü bir ($n=1$) olan m tane örnek çekilmesi durumunda ortalama değerindeki değişimi gösteren tek değişkenli kontrol diyagramlarıdır. Kontrol limitleri; (ÜKL= $\bar{x}+3\sigma$, OÇ= \bar{x} , AKL= $\bar{x}-3\sigma$) şeklinde hesaplanmaktadır. (Detaylı bilgi için bkz. "Individuals Control Charts", **Engineering Statistics Handbook** <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc322.htm>)

(Değişim Aralığı-Range) veya S (Standart sapma-Standart Deviation) diyagramları çizilmektedir.

Bilindiği gibi örnek ortalamalarındaki değişimin tek değişkenli kontrol diyagramları yardımı ile incelenebilmesi için öncelikle proses değişkenliğinin kontrol altında olması gerekmektedir. Bu nedenle uygulamada, \bar{x} -diyagramı ile değişkenliğin kontrol edilmesini sağlayan S ve R diyagramları birlikte kullanılmaktadır.

Uygulamada $n > 10$ olduğunda veya örnekten örneğe farklı bir değer aldığında R-diyagramı yerine S-diyagramı kullanılmaktadır. Değişkenlik kontrol altındaysa ortalamadaki değişimin \bar{x} - diyagramı ile incelenmesi yapılabilmektedir. \bar{x} -diyagramı, proses ortalamasının değişimine neden olan özel nedenlerin saptanmasında en etkin tek değişkenli diyagram olarak kabul edilmektedir³⁷.

\bar{x} ve R Diyagramı:

Shewhart'a göre \bar{x} -diyagramının çizilebilmesi için örnek büyüklüğü genellikle 4, 5 veya 6 ($n=4,5,6$) olan en az 25 örnek ($m=25$) ile çalışılması gerekmektedir³⁸.

Çekilen her örneğe ait Değişim Aralığı (R), örnekteki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka eşittir:

$$(R = x_{\max} - x_{\min}) \quad (1.2)$$

R_1, R_2, \dots, R_m , m tane örneğin aralığı olarak tanımlandığında, \bar{R} aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

³⁷ D.M. Hawkins, P. Qiu, C. W. Kang, "The Changepoint Model for Statistical Process Control", *Journal of Quality Technology*, C. XXXV, No: 4, 2003, s. 355.

³⁸ Montgomery, a.g.e., s. 208-209.

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (1.3)$$

Hesaplanan R değerlerinin standart sapma tahmini $\hat{\sigma}_R = d_3\sigma$, genellikle σ bilinmediğinden $\hat{\sigma} = \bar{R}/d_2$ ($\bar{R} = d_2\sigma$ eşitliğine dayanarak) denklemden tahmin edilmektedir. d_2 ve d_3 örnek büyüklüğüne dayanan tablo değerleridir³⁹. R-diyagramı için hesaplanan kontrol limitleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \\ \text{O.Ç} &= \bar{R} \\ \text{AKL} &= \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

R-diyagramı yardımıyla izlenen prosesin değişkenliği kontrol altında ise, prosesin ortalamasının kontrol altında olup olmadığının araştırılması gerekmektedir.

n büyüklüğünde m tane örneğin olduğu varsayılarak çizilecek \bar{x} diyagramının orta çizgisi örnek ortalamalarının ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$) ortalamasına eşittir:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m} \quad (1.5)$$

$\bar{\bar{x}}$: örnek ortalamalarının ortalaması

³⁹ H.Gitlow, A.Oppenheim, R. Oppenheim, **Quality Management, Tools and Methods for Improvement**, 2.baskı, U.S.A., Richard D. Irwin, Inc., 1995, s. 130.

\bar{x} -diyagramının AKL, ÜKL ve O.Ç değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁴⁰.

$$\begin{aligned}\text{ÜKL} &= \bar{x} + 3\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \bar{x} + 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \\ \text{O.Ç} &= \bar{x} \\ \text{AKL} &= \bar{x} - 3\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \bar{x} - 3\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}\end{aligned}\quad (1.6)$$

$\sigma_{\bar{x}}$, örnek ortalamaları serisinin (${}_N C_n$ tane örnek ortalaması), kendi ortalamaları olan anakütle ortalamasından (\bar{X}) ortalama farkını gösteren ortalamalar serisinin standart sapması veya kısaca ortalamanın standart hatasıdır. Ortalamanın standart hatası;

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad (1.7)$$

formülüyle hesaplanmaktadır. $\sigma_{\bar{x}}$, anakütle standart sapması (σ) yardımıyla elde edilmektedir. σ , serideki tüm birimlerin, seri aritmetik ortalamasından ortalama olarak ne kadar farklı olduğunu gösteren ve aritmetik ortalamanın temsil gücünü gösteren çok önemli bir ölçüdür. Serideki birimlerin tümünün değerlerine dayandığı ve yine tüm değerlere dayanan aritmetik ortalamadan farklarla hesaplandığı için istatistikte en çok kullanılan dağılma ölçüsüdür⁴¹.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N}} \quad (1.8)$$

⁴⁰ Gitlow, Oppenheim&Oppenheim, a.e., s. 133.

⁴¹ N. Orhunbilge, **Tanımsal İstatistik Olasılık Dağılımları**, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 2000, s. 121.

formülüyle hesaplanmaktadır. σ bilinmediğinde, örnek değerleriyle tahmin edilebilmektedir. N birimlik anakütleden tesadüfi olarak seçilen belirli n birimlik örneklerin n'e bölünerek hesaplanan varyanslarının (s^2) beklenen değeri (matematik ümidi, aritmetik ortalaması) anakütle varyansından (σ^2) küçüktür ($E(s^2) < \sigma^2$). Bu nedenle örnek varyanslarının taraflı tahminleyen olduğu ve anakütle varyansını hep küçük olarak tahmin edecekleri ortaya çıkmaktadır⁴². Tarafsız bir tahminleyen elde edebilmek için aritmetik ortalamadan farkların kareleri toplamı örnek birim sayısı n yerine n-1'e bölünmektedir.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1.9)$$

$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ise, "sonlu anakütle düzeltme faktörü"dür. Örnekleme oranının (n/N), 0.05'den küçük olduğu durumda ($\frac{n}{N} < 0.05$) sonlu anakütle düzeltme faktörünün kullanılmasına gerek kalmamaktadır⁴³. Anakütle sonsuz olduğunda karekök içindeki değer 1'e yaklaştığı için ortalamanın standart hatası $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ formülüyle hesaplanmaktadır. σ bilinmediğinde $\sigma_{\bar{x}}$, ($\sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) formülüyle edilmektedir.

⁴² Orhunbilge, a.e., s. 120.

⁴³ Orhunbilge, a.g.e. (1997), s. 25.

Kontrol limitleri, değişen örnek büyüklüklerine göre farklılaşan A_2 ($A_2=d_2\sqrt{n}$) değerleriyle de hesaplanabilmektedir. Değerler A_2 tablosundan kolaylıkla belirlenmektedir⁴⁴;

$$\begin{aligned}\bar{ÜKL} &= \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} \\ \text{O.Ç} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{AKL} &= \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}\end{aligned}\quad (1.10)$$

\bar{x} ve S Diyagramı:

\bar{x} ve R, prosesin değişkenliğinin ve ortalamasının kontrol altında olup olmadığını ölçülmesinde çok sık kullanılan diyagramlar olmasına rağmen bazı işletmeler örneklerin değişkenliğinin ölçülmesinde R yerine örnek standart sapmasını (s) tercih etmektedir. R diyagramı, kolay hesaplanabilen (sadece örnek değerlerinin maksimum ve minimum değerleri arasındaki farklar) ve açıklanan bir kontrol diyagramıdır. S diyagramının çizilebilmesi için ise kullanılan örnek standart sapmasının hesabında, örnekteki değerlerin tümü alınmaktadır. Dolayısıyla S diyagramıyla, R diyagramına göre daha doğru sonuçlar elde edilmektedir. Örnek büyüklüğü 10'dan küçük ($n < 10$) olduğunda R ve S diyagramları grafik üzerinde aynı şekilde gösterilmektedir.⁴⁵ Örnek büyüklüğü 10'dan büyük ($n > 10$) olduğunda, örneklerde bulunabilecek aşırı değerler R diyagramı üzerinde etkili olacağından, $n \geq 10$ durumunda S diyagramının kullanılması önerilmektedir.⁴⁶

m tane örneğin, örnek standart sapmalarının⁴⁷ (\bar{s}) ortalaması (\bar{s});

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i \quad (1.11)$$

⁴⁴ Gitlow, Oppenheim & Oppenheim, a.g.e., s. 133.

⁴⁵ D. H. Besterfield, *Quality Control*, 5.baskı, Ohio, Prentice Hall, 1998, s. 130.

⁴⁶ Besterfield, a.e., s. 130

⁴⁷ s'in formülü için Bkz. s. 28.

şeklindedir. S-diyagramının kontrol limitleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁴⁸.

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{s} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \\ \text{O.Ç} &= \bar{s} \\ \text{AKL} &= \bar{s} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Burada c_4 örnek büyüklüğüne bağlı olan bir sabittir⁴⁹:

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{n-1} \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)!}} \quad (1.13)$$

S-diyagramından yararlanılarak çizilen \bar{x} -diyagramının kontrol limitleri de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}} \\ \text{O.Ç} &= \bar{\bar{x}} \\ \text{AKL} &= \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Uygulamada anakütle ortalama ve standart sapma değerinin bilinmesi durumunda bile örnekten elde edilen değerlerin kullanılması tercih edilmektedir. Bunun en önemli nedeni genellikle prosese ilişkin tüm bilgilerin elde edilememesi ve proses değişkenliğinin her zaman kontrol altında tutulamamasıdır. $\bar{\bar{X}}$ 'nin $\bar{\bar{x}}$ yerine

⁴⁸ Montgomery, a.g.e., s. 242.

⁴⁹ "What are Variable Control Charts?", **Engineering Statistics Handbook**, (çevrimiçi), www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc32.htm, 27 Şubat 2004

kullanılabilmesi için R-diyagramının kontrol altında olması gerekmektedir. Ancak bu koşul her zaman sağlanamamaktadır⁵⁰.

Üretim prosesinin, kontrol diyagramları yardımıyla izlenmesi, hipotez testlerinin aşamaları dikkate alınarak gerçekleştirilmektedir. Bilindiği gibi hipotez testleri, anakütleden çekilen örnek veya örnekler yardımıyla anakütle parametreleri (ortalama, standart sapma, varyans, regresyon katsayısı, korelasyon katsayısı) hakkındaki iddiaların belirli bir anlamlılık düzeyinde geçerliliğini araştırarak anakütle ile ilgili karar vermeyi sağlamaktadır.⁵¹ Hipotez testleri 4 aşamadan oluşmaktadır:

- Hipotezin Yazılması
- Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi
- Test İstatistiğinin Dağılımı Belirlenerek Hesaplanması
- Karar aşaması

- **Hipotezin Yazılması:** Anakütle hakkındaki iddialar iki hipotez şeklinde yazılmaktadır. Bu hipotezler H_0 ve H_1 notasyonu ile gösterilmektedir. H_0 hipotezi, sıfır hipotezi olarak adlandırılmaktadır. Hipotez (H_0) anakütle parametresiyle, örnek istatistiğinin birbirine eşit veya aradaki farkın sıfıra eşit olduğu anlamını taşımaktadır. Alternatif hipotez olarak adlandırılan H_1 , H_0 hipotezinin tamamlayıcısıdır. Anakütle parametresi ile örnek istatistiği arasındaki farkın tesadüflerden ileri gelemeyecek kadar büyük olduğunu göstermektedir⁵². θ anakütle

⁵⁰ Montgomery, a.g.e., s. 218.

⁵¹ W.W.Daniel, J.C.Terrell, **Business Statistics, Basic Concepts and Methodology**, 4. baskı, U.S.A, Houghton Mifflin Company, 1986, s. 230.

⁵² N.Orhunbilge, a.g.e., (1997), s. 132.

parametrelerini, θ_0 anakütle parametreleri hakkında iddia edilen değerleri göstermek üzere hipotezler 3 farklı şekilde yazılabilmektedir⁵³:

| Tek Taraf (Kuyruk) Hipotezleri | | |
|---|---|---|
| Çift Taraf Hipotezleri | Alt (Sol) Taraf | Üst (Sağ) Taraf |
| $H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ | $H_0 : \theta \geq \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$ | $H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$ |

- **Anlamlılık Düzeyinin (α) Belirlenmesi:** Hipotezlerin test edilmesi sonucunda H_0 red veya kabul edilmektedir. Her iki durumda doğru veya yanlış bir karar verme olasılığı bulunmaktadır. Bu durumda 4 farklı karar alınabilmektedir.

- 1-Yanlış olan H_0 hipotezinin red edilmesi (Doğru Karar)
- 2-Doğru olan H_0 hipotezinin red edilmesi (Yanlış Karar)
- 3-Yanlış olan H_0 hipotezinin kabul edilmesi (Yanlış Karar)

⁵³ Orhunbilge, a.g.e., (1997), s. 132.

4-Doğru olan H_0 hipotezinin kabul edilmesi (Doğru Karar)

Hipotez testi sonucunda alınan yanlış kararlar “hatalar” olarak adlandırılmaktadır. Hatalar 1.tip ve 2.tip olmak üzere 2 çeşittir. I. tip hata (α hatası, α riski), doğru olan H_0 hipotezinin red edilmesi, II. tip hata (β hatası, β riski), ise yanlış olan H_0 hipotezinin kabul edilmesi ile ortaya çıkmaktadır⁵⁴. Hipotezlerin test edilmesi sonucunda alınan doğru ve yanlış kararlar ile I., II. tip hatalar aşağıdaki tabloda gösterilmektedir:

Tablo 1.1: Hipotez Testi Sonucunda Alınan Doğru ve Yanlış Kararlar

| | H_0 Kabul | H_0 Red |
|--------------|--|--|
| H_0 doğru | Doğru Karar (1- α) | Yanlış Karar I. tip hata (α hatası) |
| H_0 yanlış | Yanlış Karar II. tip hata (β hatası) | Doğru Karar (1- β) |

α , I. tip hatanın gerçekleşmesi olasılığı, β ise II. tip hatanın gerçekleşmesi olasılığıdır. Hipotez testleri gerçekleştirilirken amaç her iki tip hatanın ortaya çıkmaya olasılığını en aza indirmektedir. Ancak α olasılığı artarken, β olasılığı azalmakta veya α olasılığı azalırken, β olasılığı artmaktadır. Her iki tip hatanın gerçekleşme olasılıklarını azaltmak için örnek büyüklüğü arttırılmalıdır⁵⁵. Anlamlılık düzeyi (α) karar verici tarafından örnek çekilmeden önce saptanmaktadır. α belirlenirken, β riski de dikkate alınmaktadır. Test sonucunda ya H_0 red edilerek α hatası veya H_0 kabul edilerek β hatası yapılabilir. Her ikisinin birlikte gerçekleşmesi doğal olarak mümkün değildir. Ancak araştırmacı veya karar verici hangi karara varacağını bilmediği için her iki hatayı da minimize etmek ve doğru karar olasılıklarını arttırmak zorundadır.

⁵⁴ Daniel, Terrell, a.g.e., s. 234.

⁵⁵ Daniel, Terrell, a.g.e., s. 234.

- **Test İstatistiğinin Dağılımının Belirlenerek Hesaplanması:** Test istatistiği, kurulan hipotezlerin test edilmesinde kullanılmaktadır. İstatistik, örnekten hesaplanan tahmini parametre değeri yardımıyla elde edilmektedir. Birçok test istatistiği aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır⁵⁶:

$$\text{Test İstatistiği} = \frac{\text{Örnek İstatistiği} - \text{Anakütle Parametresi}}{\text{İstatistiğin Standart Hatası}}$$

Hesaplanan test istatistiğinin, nasıl bir dağılım gösterdiği karar aşamasında önem kazanacağından, olasılık dağılımının da örnekleme teorisinden belirlenmesi gerekmektedir.

- **Karar aşaması:** Bilinen olasılık dağılımı ve belirlenen anlamlılık düzeyi ile tablo değerleri test istatistikleriyle karşılaştırılır. İstatistik tablo değerinden küçükse H_0 hipotezi kabul, büyükse red edilmektedir.

Kontrol parametresinin seçilmesi ve seçilen örnek(ler)in istatistiklerinin anakütle parametre değeri veya anakütle tahmini değerine eşit olup olmadığının araştırılması için öncelikle hipotezlerin yazılması gerekmektedir.

H_0 : Proses Kontrol Altındadır

H_1 : Proses Kontrol Dışındadır

I. tip hata (α), kontrol problemlerinde kontrol altında olan prosesin kontrol dışındaymış gibi görünme olasılığı olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda proses kontrol altındayken uyarı vermeme olasılığı $(1-\alpha)$ 'dır. Seçilen test istatistiği, gösterdiği olasılık dağılımının kritik değeriyle karşılaştırılır. Sıfır hipotezi (H_0), red

⁵⁶ Daniel, Terrell, a.g.e., s. 233.

edildiğinde proseste kontrol dışı bir durum olduğu anlaşılmaktadır⁵⁷. Burada prosesin kontrol altında olup olmadığı probleminin, hipotez testleriyle olan önemli benzerliği dikkat çekmektedir.

1.2.2 Kümülatif Toplam (Cumulative Sum (CUSUM)) ve Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)) Diyagramları

Prosesin ortalamasındaki küçük sapmaların belirlenmesinde daha etkin olduğu iddia edilen Kümülatif Toplam (Cumulative Sum (CUSUM)) ve Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)) diyagramları, Shewhart diyagramlarına alternatif olarak geliştirilmişlerdir⁵⁸. Özellikle ortalamadaki küçük sapmalar süreklilik gösteriyorsa ve prosese bir düzeltme uygulanmadıkça kontrol dışı durum devam ediyorsa, bu tür sapmaların belirlenmesinde CUSUM ve EWMA diyagramlarının çizilmesi tercih edilmektedir⁵⁹.

1.2.2.1 Kümülatif Toplam (CUSUM) Diyagramları

CUSUM diyagramlarının, ortalama meydana gelebilecek küçük ve sürekli değişimlere daha duyarlı olduğu iddia edilmektedir⁶⁰. Prosesin performansını izlemek için “kümülatif toplam” kullanılmaktadır⁶¹. CUSUM diyagramları hem kantitatif hem de kalitatif değişkenler için uygundur. Proseste her noktanın bir önceki örnekle kümülatif toplamı bulunur. Amaç proses ortalamasındaki sapmayı büyüterek, kontrol dışı durumları hızlı bir şekilde saptamaktır. Böylece noktaların

⁵⁷J.E. Jackson, “Multivariate Quality Control 40 Years Later”, *Statistical Process Control in Manufacturing*, Ed. D. C. Montgomery, J.B. Keats, New York Milwaukee, Marcel Dekker, Inc., 1991, s. 124.

⁵⁸Montgomery, a.g.e, s. 406.

⁵⁹Hawkins, Qui, Kang, a.g.e., s. 355.

⁶⁰E. L. Grant, R. S. Leavenworth, *Statistical Quality Control*, 6.baskı, U.S.A., McGraw-Hill, 1988, s. 348.

⁶¹Gözlü, a.g.e., s. 175.

genel eğilimi belirlenebilmektedir. Bu eğilimin yukarıya doğru olması, gözlemlerin proses ortalamasının üstünde, aşağıya doğru olması proses ortalamasının altında toplandığını göstermektedir. Diyagram üzerinde düz bir hattın oluşması ise, prosesin ortalamasının etrafında dağıldığını yani kontrol altında olduğunu göstermektedir.

n büyüklüğünde m tane örnek çekildiğinde ve her örneğin ortalaması, \bar{x}_i $i=1,2,\dots,m$ olarak tanımlandığında, CUSUM diyagramı, aşağıdaki hesaplamalardan⁶¹ birinin grafiğinin çizilmesi ile oluşturulmaktadır:

$$S_m = \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{X}_0) \quad (1.15)$$

$$S'_m = \frac{1}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{X}_0) \quad (1.16)$$

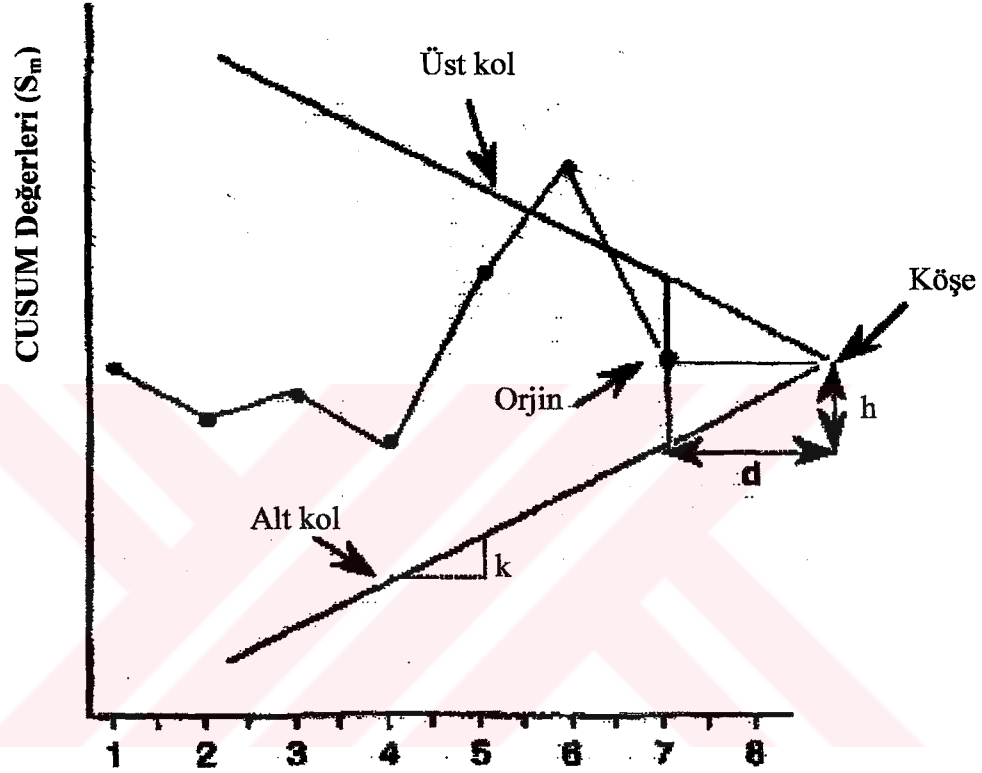
\bar{X}_0 incelenen kalite özelliğinin tahmini ortalama değerini, $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ ise örnek ortalamalarının standart sapmasını göstermektedir. CUSUM diyagramının çizilebilmesi için α , β , δ sabitlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Genellikle $\alpha=0.0027$, $\beta=0.01$ ve $\delta=1$ (1σ 'lık bir değişimin hemen saptanabilmesi için $\delta=1$ kullanılmaktadır.) olarak seçilmektedir⁶². CUSUM diyagramının kontrol altında olup olmadığı V-maskesi yaklaşımı ile belirlenebilmektedir. V-maskesi yaklaşımında, dizayn parametreleri (tasarım parametreleri) olarak adlandırılan d ve k değerleri seçilmektedir. Grafik 1.1'de de gösterildiği gibi, k değeri V-maskesinin alt kolunun eğimini gösterirken, d değeri V'nin köşesinin merkeze uzaklığını temsil etmektedir.

⁶¹ Grant, Leavenworth, a.g.e., s. 351.

"Cusum Control Charts", **Engineering Statistics Handbook**, (Çevrimiçi), <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc323.htm>, 3 Mart 2004

⁶² "Cusum Control Charts", a.g.e., s. 3.

Grafik 1.1: V-Maskesi Yaklaşımıyla Çizilen CUSUM Diyagramı



Örnek No:

k değeri uygulamada δ değerinin yarısı, d değeri de 4 veya 5 olarak seçildiğinde CUSUM diyagramlarının performansının arttığı belirlenmiştir⁶³. CUSUM değerlerinin (S_m) alt ve üst kolların dışında yer alması, prosesin kontrol dışına çıktığını göstermektedir. Uygulamada genellikle V-maskesi yaklaşımı yerine CUSUM diyagramının çizilmesi yaklaşımı tercih edilmektedir⁶⁴. V-maskesi kuralının uygulanması genellikle bilgisayar yazılımları yardımı ile gerçekleştirildiğinden kontrol diyagramı yaklaşımı tercih edilmektedir.

⁶³ Montgomery, a.g.e., s. 415.

⁶⁴ Montgomery, a.g.e., s. 409.

$S_{üst}$ ve S_{alt} , CUSUM diyagramının alt ve üst limiti olarak tanımlanmaktadır. CUSUM, x değişkeni yardımıyla oluşturulan $(\bar{x} - \mu_0)$ serisinin birikimli değerlerinden oluşmaktadır.

$$S_{üst}(i) = \max (0, S_{üst}(i-1) + \bar{x}_i - \bar{X}_{0-k}) \quad (1.17)$$

$$S_{alt}(i) = \max (0, S_{alt}(i-1) + \bar{X}_{0-k} - \bar{x}_i)$$

şeklinde hesaplanmaktadır⁶⁵.

$S_{üst}(0)=0$ ve $S_{alt}(0)=0$, $S_{üst}(i)$ veya $S_{alt}(i)$ değerlerinden herhangi biri h değerini aştığında prosesin kontrol altında olmadığına karar verilebilmektedir. CUSUM diyagramının uyarı vermesi, üretilen üründe kesin bir sorun olduğu anlamına gelmemektedir. Bu durumda uyarı, proseste sorunlu ürün üretilmemesi için önlem alınması gerektiğini göstermektedir⁶⁶.

1.2.2.2 Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (EWMA) Diyagramları

EWMA diyagramları, kalite kontrol literatüründe diğer tek değişkenli diyagramlara göre daha az yer almaktadır⁶⁷. Bu diyagramlar, ağırlıklandırılmış hareketli ortalama değerleri kullanılarak çizilmektedir. Ortalama değerinin, geçmiş gözlem değerlerine ne kadar bağlı olduğunu belirlemek için kullanılan ağırlık faktörü (λ), uygulamacı tarafından seçilmektedir. EWMA istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$E_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)E_{i-1} \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.18)$$

E_0 : değişkenin ortalama değeri olarak kabul edilmektedir.

⁶⁵ "Cusum Control Charts", **Engineering Statistics Handbook**, (Çevrimiçi) www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc323.htm, 16 Aralık 2003.

⁶⁶ J.M. Lucas, "Cumulative Sum (CUSUM) Control Schemes", **Commun. Statist.- Theor. Meth.**, C:XIV, N.14, 1985, s. 2690.

⁶⁷ N. Niang, "Multidimensional Methods for Statistical Process Control: Some Contributions of Robust Statistics", Ed. C. Laura, J. Antoch, V.Vinzi, G.Saporta, , **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, New York, Physica-Verlag Heidelberg, 2002, s. 139.

x_i : i. gözlem değeridir.

n: örnek büyüklüğüdür.

λ : 0 ile 1 arasında değer alabilen ağırlık faktörüdür.

$\lambda=1$ olması durumunda EWMA yerine \bar{x} -diyagramı çizilmektedir. Uygulamada genellikle λ , 0,2 ile 0,3 arasında değerler almaktadır.

EWMA diyagramının kontrol limitlerinin belirlenebilmesi için öncelikle EWMA değerlerinin varyansının hesaplanması gerekmektedir.

$$s^2_{EWMA} = (\lambda/(2-\lambda)) s^2 \quad (1.19)$$

s^2 : x değişkeninin varyans değeridir.

$$\text{ÜKL} = E_0 + ks_{EWMA}$$

$$\text{OÇ} = E_0$$

$$\text{AKL} = E_0 - ks_{EWMA}$$

(1.20)

CUSUM diyagramları normallik varsayımına karşı duyarlı iken, EWMA diyagramları normalliğin sağlanıp sağlanamamasından etkilenmemektedir⁶⁸.

⁶⁸ D. M. Hawkins, D.H. Olwell, Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement, New York , Springer –Verlag,, 1998, b.a.

1.3 Çok Değişkenli İstatistik Proses Kontrol ve Diyagramları

Tek değişkenli diyagramların (Shewhart, CUSUM, EWMA) kullanılmasından kaynaklanan en önemli sorun sadece tek değişkenli ve birbirinden bağımsız değişkenlere uygulanabilmesi kısıtına sahip olmasıdır⁶⁹. Birden fazla proses değişkeninin eşanlı olarak incelenmesinde tek değişkenli Shewhart diyagramlarının kullanılması özellikle değişkenler arasında “biraz” (mildley) ve yüksek düzeyde korelasyon olduğunda proses hakkında kısmi bilgilerin elde edilmesine neden olmaktadır⁷⁰. Değişken değerlerinin hedef değerlerinden (ortalama) sapmalarının toplu olarak ölçülebilmesi için çok değişkenli istatistik proses kontrol yöntemlerinin kullanılması önerilmektedir.

Çok değişkenli istatistik proses kontrol; bir işletmede kalite ve verimliliğin artırılması amacı ile çok değişkenli istatistik yöntemlerin uygulanması olarak tanımlanmakta ve müşteri memnuniyeti, üretimin izlenmesi gibi hizmet ve üretim sektöründeki pek çok alanda uygulanmaktadır. En yaygın olarak kullanılan yöntem tek değişkenli Shewhart diyagramlarının çok değişkenli benzeri olan ve çok değişkenli T^2 istatistiğine dayanan Hotelling T^2 diyagramlarıdır⁷¹.

Hotelling 1947 yılındaki çalışması ile proses kontrolüne çok değişkenli istatistik yöntemleri uygulayan ilk araştırmacı olmuştur. Hotelling bu çalışmasında II. Dünya Savaşı sırasında kullanılan bombaların hedefi vurma gücünü test etmiş, “atış uzaklığı” ve “hedeften sapma” değişkenlerini seçerek, bombaların kalitesini saptamaya çalışmıştır. Bombaların hedefi vurma gücünü bir bütün olarak incelemek için T^2 -kontrol diyagramını geliştirmiştir. Ancak bu yöntemlerin farklı alanlarda uygulanması konusundaki girişimler bilgisayar teknolojisi yeterince gelişmediğinden

⁶⁹ J.V. Kresta, J.F. MacGregor, “Multivariate Statistical Monitoring of Process Operating Performance”, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, C:LIX, 1991, s. 35

⁷⁰ C. Fuchs, R.S. Kenett, *Multivariate Quality Control: Theory and Applications*, New York, Marcel Dekker, Inc., 1998, s. 78.

⁷¹ R.L. Mason, J.C. Young, “Implementing Multivariate Statistical Process Control Using Hotelling’s T^2 Statistic”, *Quality Progress*, C:XXXIV, N.4, 2001, s. 71.

etkin olamamıştır.⁷²

Genellikle prosesler birden fazla değişken içermekte ve elde edilen ölçümlerin tek bir değerle açıklanmasını gerektirmektedir. Bu tür proseslere tek değişkenli proses kontrol yöntemlerinin uygulanması α (proses kontrol altındayken kontrol dışındaymış gibi görünme olasılığı) ve β (proses kontrol dışındayken kontrol altındaymış gibi görünme olasılığı) olasılıklarının değişmesine neden olmaktadır. $(1 - \alpha)^p$; p tane değişkenin ortalama değerlerinin tümünün kontrol altında olması olasılığıdır. Birden fazla birbirinden bağımsız değişken ile çalışıldığında, her bir \bar{x} diyagramı için seçilen 1. tip hatanın (α), yerini $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$ (p:değişken sayısı) formülü kullanılarak hesaplanan α' almaktadır. Böylece birbirinden bağımsız değişkenler için eşanlı olarak çizilen tek değişkenli kontrol diyagramlarının gerçek kontrol limitleri hesaplanmış olmaktadır. Değişkenlerin birbirinden bağımsız olup olmadıkları genellikle bilinemediğinden, prostesten çekilen büyük bir örnekle korelasyon katsayıları hesaplanarak anlamlı olup olmadıkları test edilmektedir. Değişkenler arasında anlamlı bir ilişki saptandığında çok değişkenli istatistik proses kontrol yöntemleri kullanılmaktadır⁷³.

1.3.1 Çok Değişkenli İstatistik Proses Kontrol Yöntemlerinin Özellikleri

Çok değişkenli istatistik proses kontrol yöntemlerinin uygulamada tercih edilmesini sağlayan birçok olumlu özelliği bulunmaktadır⁷⁴:

⁷² F. B. Alt, "Multivariate Statistical Quality Control", *The Encyclopedia of Statistical Sciences*, C:VI, 1984, s. 110.

⁷³ H. Hotelling, *Techniques of Statistical Analysis*, y.y., 1947, s. 111.

⁷⁴ R.L. Mason, J.C. Young, *Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications*, Virginia, American Statistical Association (ASA), 2001, s. 9.

- Prosesin kontrol edilmesi amacı ile seçilen istatistik değeri için kolaylıkla diyagram çizilebilmektedir. Böylece proseste oluşabilecek bir eğilimin tanımlanması veya prosesin uyarı vermesi hızlı bir şekilde saptanabilmektedir.

-Proseste kontrol dışı bir durum belirlendiğinde sorunun hangi değişken(ler)den kaynaklandığının belirlenebilmesi

- Hem bağımsız hem de zamana bağlı gözlem değerlerine uygulanabilmesi ve verilerin farklı değerlerinin (ortalama, gözlem değeri) kontrol istatistiğinin hesaplanmasında kullanılabilmesi esnekliğine sahip olması

- Prosesteki küçük ancak sürekli değişimlere duyarlı olması

Bu olumlu özelliklerin dışında çok değişkenli kontrol yöntemlerinin uygulamada sık kullanılmamasına neden olan birtakım olumsuz özellikleri de bulunmaktadır:

- Kontrol istatistiğinin hesaplanmasındaki karmaşık yapı

- Çizilen çok değişkenli kontrol diyagramının değişkenlerden herhangi birinin ölçü birimine sahip olmaması

-Hesaplanan kontrol istatistiği, karşılaştırıldığı kritik değeri aştığında sorunun hangi değişkenden kaynaklandığının birtakım ayrıştırılmalar yapılmadan hemen belirlenememesi.

1.3.2 Çok Değişkenli Kontrol Diyagramları

Çok değişkenli kontrol diyagramları, çok değişkenli veri kümelerine uygulandığından öncelikle ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisinin nasıl

hesaplandığının hatırlanması gerekmektedir. Çok değişkenli kontrol diyagramlarından, χ^2 , Hotelling T^2 , MCUSUM, MEWMA ve Neden-Seçimi diyagramları incelenecektir.

1.3.2.1 Ortalama Vektörü ve Varyans-Kovaryans Matrisinin Elde Edilmesi

Çok değişkenli istatistik analizlerde genellikle n satır ve p sütundan oluşan $n \times p$ boyutlu X veri matrisi ile ilgilenilir. X_{ij} değerlerinden oluşan matris genellikle aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

Tablo 1.2: Çok Değişkenli Veri Matrisinin Düzenlenmesi

| Değişkenler | | | | |
|-------------|----------|----------|-----|----------|
| Gözlem No: | X_1 | X_2 | ... | X_p |
| 1 | X_{11} | X_{12} | ... | X_{1p} |
| 2 | X_{21} | X_{22} | ... | X_{2p} |
| . | . | . | ... | . |
| . | . | . | ... | . |
| . | . | . | ... | . |
| N | X_{n1} | X_{n2} | ... | X_{np} |

Tek bir değişkenin dağılım özelliklerinin belirlenmesi amacıyla, aritmetik ortalama, standart sapma, varyans gibi değişkenin tanımsal istatistikleri elde edilmektedir. Çok değişkenli veri kümesinde ise değişkenleri tanımlayabilmek için genellikle ortalama vektörü, kovaryans değeri, varyans-kovaryans matrisi kullanılmaktadır. Çok değişkenli veri kümesinde, tek bir ortalama değeri yerine değişken sayısı (p) kadar ortalama bulunmaktadır. Bu ortalamalar ortalama vektörü yardımıyla gösterilmektedir. Anakütle değerleri ile çalışılıyorsa j.değişkene ilişkin ortalama;

$$\bar{X}_j = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ij}}{N} \quad (1.21)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. p değişken için oluşturulan ortalama vektörü⁷⁵;

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} \text{ veya transpozesi alınarak } \bar{X}' = [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \dots \bar{X}_p] \text{ şeklinde gösterilmektedir.}$$

Tek değişkenin dağılım ölçüsü olan varyans anakütlelerde (σ^2) ile gösterilirken, çok değişkenli durumda p tane değişken ile çalışıldığından j. değişkene ilişkin varyans G_j^2 ile gösterilmekte ve aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N X_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^N X_{ij})^2}{N}}{N} \quad j=1,2,\dots,p$$

Varyansın çok değişkenli analizlerdeki karşılığı ise $p \times p$ boyutlu simetrik varyans-kovaryans matrisidir ve anakütle değerleri için $\Sigma = (\sigma_{ij})_{p \times p}$ şeklinde gösterilir. $i=j$ durumunda σ_{ii} veya σ_i^2 ifadesi değişkenlere ilişkin varyans değeri iken $i \neq j$ durumu için σ_{ij} kovaryans değerleridir. p tane değişken için Σ matrisi şöyledir⁷⁶:

⁷⁵ H. Tatlıdil, **Çokdeğişkenli İstatistiksel Analiz**, Ankara, Cem Web Ofset, 1996, s. 33.

⁷⁶ A.C. Rencher, **Methods of Multivariate Analysis**, U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1995, s. 67.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \sigma_{p3} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

İki değişken arasındaki doğrusal ilişki ölçülerinden biri olan kovaryans değeri ise, ilk iki değişken için aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁷⁷:

$$\sigma_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2)}{N} \quad (1.24)$$

\bar{X} ve Σ 'nın bilinmediği durumda, \bar{X} yerine örnek büyüklüğü birden büyük ($n > 1$) olan m tane örnek ortalamalarının ortalaması vektörü ($\bar{\bar{x}}$), Σ yerine ise örnek varyans-kovaryans matrisi (S_p) kullanılmaktadır. Örneklere ait $\bar{\bar{x}}$ ve S_p gösterimi ise aşağıdaki gibidir:

$$S_p = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & \dots & \bar{s}_{1p} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_2^2 & \bar{s}_{23} & \dots & \bar{s}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{s}_{p1} & \bar{s}_{p2} & \bar{s}_{p3} & \dots & \bar{s}_p^2 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

m tane örnekle çalışıldığı varsayılırsa p değişkenin, örnek ortalama vektörü ($\bar{\bar{x}}$), örnek varyansı \bar{s}_j^2 ve kovaryansı \bar{s}_{jh} aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁷⁸:

$$\bar{x}_{jk} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad (1.26)$$

$$j=1, 2, \dots, p \quad k=1, 2, \dots, m$$

⁷⁷ R. Alpar, Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1, 2.baskı, Ankara, Nobel Yayınevi, 2003, s. 44-45.

⁷⁸ Montgomery, a.g.e., s. 516.

$$s_{jk}^2 = (1/n-1) \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2 \quad (1.27)$$

Formüllerdeki x_{ijk} : j. değişkenin k. örnekteki i. gözlem değeridir. j. değişken ile h. değişkenin k. örnekteki kovaryansı aşağıdaki gibidir:⁷⁹

$$s_{jhk} = (1/n-1) \sum_{i=1}^m (x_{ijk} - \bar{x}_{jk}) (x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad j \neq h \quad (1.28)$$

m tane örnekten hesaplanan genelleştirilmiş \bar{x}_{jk} , s_{jk}^2 ve s_{jhk} aşağıdaki gibi elde edilmektedir⁸⁰:

$$\bar{x}_j = (1/m) \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk} \quad (1.29)$$

$$\bar{s}_j^2 = (1/m) \sum_{k=1}^m s_{jk}^2 \quad (1.30)$$

$$\bar{s}_{jh} = (1/m) \sum_{k=1}^m s_{jhk} \quad j \neq h \quad (1.31)$$

$$\bar{x}' = [\bar{x}_j] \quad (1.32)$$

⁷⁹ Montgomery, a.g.e., s. 516.

⁸⁰ Montgomery, a.g.e., s. 516.

1.3.2.2 χ^2 İstatistiğine Dayalı Diyagramlar

Ortalamaları \bar{X}_1 ve \bar{X}_2 standart sapmaları σ_1, σ_2 olan ve normal dağıldığı varsayılan iki anakütleye ait X_1 ve X_2 değişkenlerinin kovaryansı σ_{12} şeklinde gösterildiğinde ve \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 , bu anakütlerden tesadüfi olarak seçilen n büyüklüğündeki iki örneğin ortalamaları olarak tanımlandığında, iki değişkenli χ^2 istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁸¹:

$$\chi_i^2 = \frac{n}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \left[\sigma_2^2 (\bar{x}_1 - \bar{X}_1)^2 + \sigma_1^2 (\bar{x}_2 - \bar{X}_2)^2 - 2\sigma_{12} (\bar{x}_1 - \bar{X}_1)(\bar{x}_2 - \bar{X}_2) \right] \quad (1.33)$$

$$i=1,2,\dots,m$$

Bu değerlerin dağılımı ise 2 serbestlik dereceli (burada serbeslik derecesi değişken sayısına eşit kabul edilmektedir) bir χ^2 dağılımına uymaktadır. Örnek değerlerinin kontrol altında olup olmadığının izlenmesi kontrol limitlerinin oluşturulmasına bağlı olmaktadır. Birimlerin değerlerinin proses ortalamasına göre artması veya azalması (χ_i^2) kareli bir değer olduğundan istatistiğin artışına neden olmaktadır. Bu nedenle sadece ÜKL temel alınarak prosesin kontrol altında olup olmadığına karar verilmektedir. ÜKL= $\chi^2_{\alpha, p}$ değerini almaktadır.

İki değişkenli durumda kontrol alanının belirlenebilmesi amacıyla “kontrol elipsler”inden (control ellipse) yararlanılmaktadır. Kontrol elipsleri ikiden fazla değişken içeren üretim prosesleri için oluşturulamadığından çok yaygın olarak kullanılamamaktadır.⁸² Bu elipslerin dezavantajı ise gözlem değerlerinin kronolojik sıralarının belirli olmamasıdır⁸³.

$$\bar{x}'_i = \left[\bar{x}_{1i} \quad \bar{x}_{2i} \right] \quad (i=1,2,\dots,m \quad m:\text{örnek sayısı}) \text{ ortalama vektörünün}$$

⁸¹ “Multivariate Shewhart Charts”, (çevrimiçi),

<http://www.sys.virginia.edu/edu/mqc/mqc/index2a.html>, 20.04.2003

⁸² C.M. Mastrengelo, G.C. Runger, D.C. Montgomery, “Statistical Process Monitoring with Principal Component”, **Quality and Reliability Engineering**, C.XII, 1996, s. 203-210.

⁸³ R.Y. Liu, “Control Charts for Multivariate Processes”, **Journal of the American Statistical Association**, C. XM, No: 432, 1995, s. 1386.

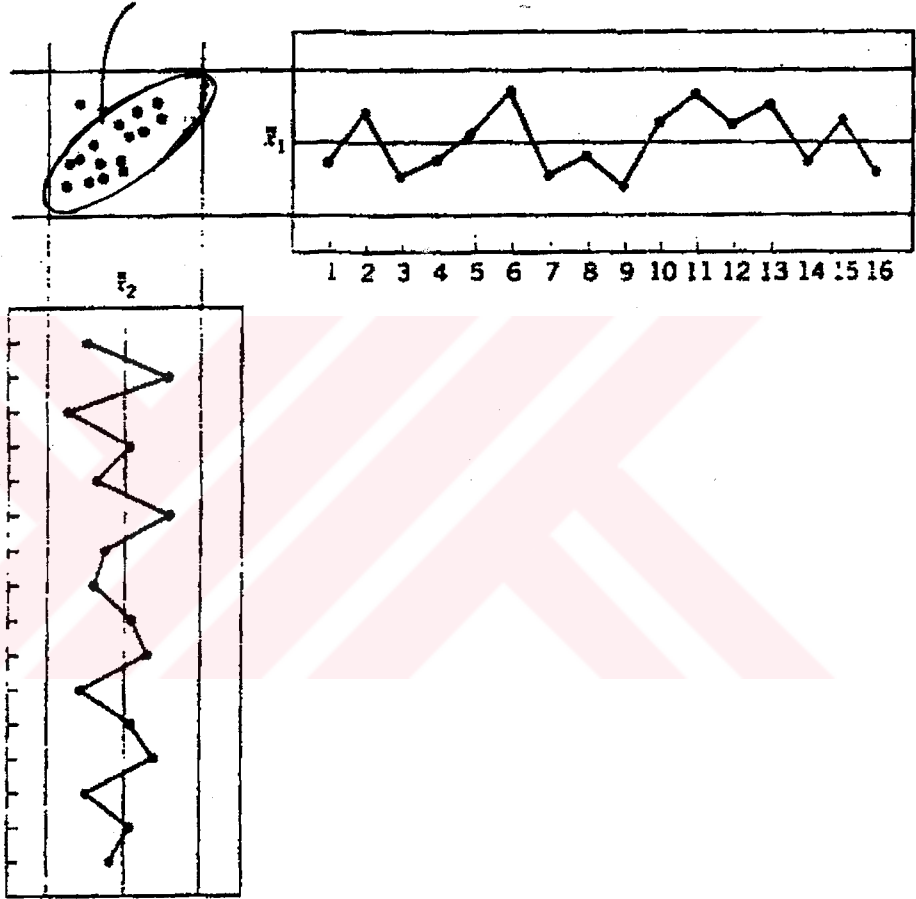
$(\bar{x}_i - \bar{X})' \Sigma^{-1} (\bar{x}_i - \bar{X}) \leq \chi^2_{\alpha,p}$ koşulunu sağlaması durumunda, vektörün elips sınırları içinde yer aldığı kabul edilmektedir. Elipsin sınırları değişkenler arasındaki korelasyon arttıkça genişlemektedir⁸⁴. Bazı durumlarda elips dışında bir nokta belirlenmesine rağmen tek değişkenli kontrol diyagramları prosesin kontrol altında olduğunu gösterebilmektedir. Bu durum Grafik 1.2’de çizilen örnek kontrol elipsinde açıkça görülmektedir. Çelişki değişkenler arasındaki bağımlılıktan kaynaklanmaktadır.



⁸⁴T.P. Ryan, *Statistical Methods for Quality Improvement*, 2. baskı, New York, John Wiley&Sons, Inc., 2000, s. 255.

Grafik 1.2: Tek Değişkenli \bar{x} -Diyagramı ile İki Değişkenli Elips Diyagramının Karşılaştırmalı Olarak Gösterimi

\bar{x}_1 ve \bar{x}_2 için ortak kontrol alanı



Proses ortalama vektörü $\bar{X} = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \dots \bar{X}_p]$, varyans-kovaryans matrisi Σ olan ve ikiden fazla değişken içeren üretim proseslerinden çekilen n büyüklüğünde m tane örneğin ortalamaları $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ vektörleri ile gösterilmekte ve $\bar{x}_i = (\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \dots, \bar{x}_{ip})$ $i=1,2,\dots,m$ şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumda her örnek için χ^2 istatistiği ;

$$\chi^2 = n (\bar{x} - \bar{X})' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \bar{X}) \quad (1.34)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

1.3.2.3 Hotelling T² İstatistiğine Dayalı Diyagramlar

Proses ortalama vektörü ($\bar{X}' = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \dots \bar{X}_p]$) ve varyans-kovaryans matrisi (Σ), uygulamada genellikle prosesin kontrol altında olduğu varsayıldığında seçilen n büyüklüğündeki örnek(ler)den tahmin edilmekte (\bar{x}) veya dışarıdan bir uzmanın önerdiği değer dikkate alınmaktadır (m_0). Böyle durumlarda χ^2 diyagramları yerine Hotelling T² istatistiğine dayalı diyagramlar kullanılmaktadır⁸⁵.

Dışarıdan belirlenen hedeflerin istatistik proses kontrole uygulanması uygun olmamakla birlikte μ 'nün m_0 'a eşit olup olmadığı test edilebilmektedir:

$$H_0: \mu = m_0$$

$$H_1: \mu \neq m_0$$

Hipotezlerini test etmek amacıyla n büyüklüğünde m tane örnek için hesaplanan T² istatistiği aşağıdaki gibidir⁸⁶:

$$T^2 = n(\bar{x} - m_0)'S^{-1}(\bar{x} - m_0) \quad (1.35)$$

Her örnek için hesaplanan T² istatistikleri (p,n-p) serbestlik dereceli F dağılımı göstermekte ve;

⁸⁵Nedumaran, Pignatiello, a.g.e., s. 529.

Ü.Oktay Fırat, Ç. Arıcıgil Çılan, Multivariate Quality Control:A Historical Perspective, First International Joint Symposium on Business Administration, Challenges for Business Administrators in the New Millenium, 1-3 Haziran 2000, Gökçeada, Türkiye, s. 4.

⁸⁶Fuchs, Kenett, a.g.e., s. 29.

$$\text{ÜKL} = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha, p, n-p} \quad (1.36)$$

değeri ile karşılaştırılmaktadır. $T^2 > \text{ÜKL}$ olması durumunda \bar{x} ile m_0 arasındaki farkın tesadüfi olmadığı ve belirlenebilir bir sorunun prosesi etkilediği sonucuna varılmaktadır⁸⁷.

Prosesten seçilen n birimlik örnekle hesaplanan T^2 istatistiği;

$$T^2 = (x - \bar{x})' S^{-1} (x - \bar{x}) \quad (1.37)$$

formülüyle elde edilirken, m tane n birimlik örnekten hesaplanan T^2 istatistiği;

$$T^2 = n(\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S_p^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}}) \quad (1.38)$$

şeklindedir⁸⁸. n birimlik m tane örnekten T^2 istatistiklerin hesaplanabilmesi için aşağıdaki veri matrisinin düzenlenmesi kolaylık sağlamaktadır.

Tablo 1.3: T^2 İstatistiklerinin Hesaplanması İçin Düzenlenen Veri Matrisi

| Örnek No: (k) | \bar{x}_{1k} | \bar{x}_{2k} | S_{1k}^2 | S_{2k}^2 | S_{12k} | T_k^2 |
|---------------|-------------------|-------------------|---------------|---------------|----------------|---------|
| 1 | \bar{x}_{11} | \bar{x}_{21} | S_{11}^2 | S_{21}^2 | S_{121} | T_1^2 |
| 2 | \bar{x}_{12} | \bar{x}_{22} | S_{12}^2 | S_{22}^2 | S_{122} | T_2^2 |
| · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · | · |
| m | \bar{x}_{1m} | \bar{x}_{2m} | S_{1m}^2 | S_{2m}^2 | S_{12m} | T_m^2 |
| Ortalamalar | $\bar{\bar{x}}_1$ | $\bar{\bar{x}}_2$ | \bar{S}_1^2 | \bar{S}_2^2 | \bar{S}_{12} | |

⁸⁷Fuchs, Kennet, a.g.e., s. 29.

⁸⁸ S_p 'nin açılımı için Bkz. s. 46.

T^2 istatistiğinin hesaplanmasında birçok farklı kovaryans tahmin edicisi kullanılabilmektedir. Ancak en yaygın olarak kullanılan formüller S ve S_p 'dir⁸⁹.

Prosesten örnek büyüklüğü bir ($n=1$) olan m tane örnek çekildiğinde varyans-kovaryans matrisi olarak S , örnek büyüklüğü birden büyük ($n>1$) m tane örnek çekildiğinde ise S_p hesaplanmaktadır:

$$S = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}) \cdot (x_i - \bar{x})' \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.39)$$

$$S_p = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1) S_j}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)} \quad k=1,2,\dots,m \quad (1.40)$$

n_j : j . örnekteki birim sayısıdır. Bu durumda toplam birim sayısı $n = \sum_{j=1}^k n_j$

S_j : j . örneğin varyans-kovaryans matrisidir.

Tüm örneklerin büyüklükleri eşit ise ($n_1=n_2=\dots=n_m$) S_p aşağıdaki gibi elde edilebilmektedir:

$$S_p = \frac{\sum_{j=1}^k S_j}{k} \quad (1.41)$$

S 'in, veri kümesindeki aykırı gözlemlerin saptanmasında en etkin tahmin edici olduğu bilinmektedir⁹⁰.

⁸⁹ Fuchs, Kennet, a.g.e, s. 15-16.

⁹⁰ J.H. Sullivan, W. H. Woodall, "A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations", *Journal of Quality Technology*, C.28, No:4, 1996, s.398-408, s. 405.

Prosesteki değişimlere daha duyarlı olduğu iddia edilen birçok alternatif varyans - kovaryans tahmin edicisi geliştirilmiştir. En sık kullanılanlardan biri S_v tahmin edicisidir. Veri kümesindeki değişkenlerin tümü için yapılan $v_i = x_{i+1} - x_i$, $i=1,2,\dots,n-1$ dönüşümü sonucunda oluşan V matrisi yardımıyla S_v aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$S_v = \frac{1}{2} \frac{V'V}{m-1} \quad (1.42)$$

S_v 'nin, proseste oluşabilecek bir adım değişiminin (step-change)

$$\left(\bar{X}_i = \begin{cases} \bar{X}_0 & i=1,2,\dots,k \\ \bar{X}_0 + \delta & i=k+1,\dots,n \end{cases} \right) \text{ veya rampa değişiminin (ramp change, drift)}$$

$(\bar{X}_i = \bar{X}_0 + \frac{i-1}{n-1} \delta \quad i=1,2,\dots,n)$ saptanabilmesinde S ve S_p 'ye göre daha fazla duyarlılık gösterdiği ancak aykırı gözlemlerin belirlenmesinde yetersiz olduğu iddia edilmektedir.⁹¹

Bazı ürünlerin çok fazla kalite göstergesi bulunmaktadır. Bu göstergelerin tümü eşit ağırlıkta ürün kalitesini etkilememektedir. Bunlardan bazıları çok önemli bazıları orta düzeyde önemli, bazıları ise önemsiz sayılabilmektedir. İncelenen kalite göstergesi çok fazla olduğundan T^2 ve χ^2 istatistiklerine dayanan kontrol diyagramlarının kullanılması önerilmemektedir⁹². Bunun en önemli nedeni üst kontrol limitinin, değişken sayısının artmasıyla birlikte aşırı derecede yüksek değerler alabilmesidir.

⁹¹ Sullivan, Woodall, a.g.e., s. 400.

⁹² L. Jaupi, "Multivariate Control Charts for Complex Processes", Ed. C. Laura, J. Antoch, V. Vinzi, G. Saporta, Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances, New York, Physica-Verlag Heidelberg, 2002, s. 125.

1.3.2.4 Çok Değişkenli Kümülatif Toplam (MCUSUM) Ve Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklandırılmış Hareketli Ortalama (MEWMA) Diyagramları

CUSUM diyagramları tek değişkenli Shewhart diyagramları gibi değişkenler arasındaki korelasyonu göz ardı etmektedir. Bu eksikliğin giderilebilmesi için çeşitli yaklaşımlar önerilmektedir:

p tane değişkenin eşanlı olarak CUSUM diyagramlarının çizilmesi ve diyagramlardan herhangi biri kontrol limitlerini aştığında proseste bir sorun olduğuna karar verilmesi bu yaklaşımlardan en çok bilinenidir⁹³. Woodall ve Ncube (1985), Temel Bileşenler Analizi uygulayarak CUSUM diyagramlarını çizerken⁹⁴, Healy (1987) ve Crosier (1988), T^2 istatistiğinin her gözlem vektörü için hesaplanan T^2 değerlerinin karekökünden (T), CUSUM diyagramının çizilmesini önermektedirler. Bu MCUSUM diyagramı COT (CUSUM of T) olarak adlandırılmaktadır⁹⁵. Çok değişkenli veri kümeleri için CUSUM'a alternatif olabilecek diğer bir yöntem ise, her bir değişken için CUSUM değerlerinin hesaplanması ve bu değerlerden hareketle T^2 diyagramının çizilmesidir⁹⁶. Prosesteki her değişkenin diğer değişkenlerle oluşturulan regresyon denkleminde elde edilen artıklar ile CUSUM diyagramının çizilmesi, diğer bir MCUSUM yaklaşımı olarak kabul edilmektedir⁹⁷. MCUSUM diyagramları, proses ortalamasındaki küçük sapmaların belirlenmesinde T^2 diyagramlarına göre daha etkindir (T^2 diyagramlarının $1.5 \sigma_{\bar{x}}$ 'dan büyük sapmaların

⁹³ W. H. Woodall, M.M.Ncube, "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures", *Technometrics*, C. XXVII, No: 3, 1985, s. 285.

⁹⁴ J.E. Jackson, a.g.e., s. 129.

⁹⁵ R.B. Crosier, "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes", *Technometrics*, C.XXX, No:3, 1988, s. 292.

J.D.Healy, "A note on Multivariate CUSUM Procedures", *Technometrics*, C.XXIX, No:4, 1987, s. 411.

⁹⁶ Jackson, a.g.e., s. 130.

⁹⁷ D.M. Hawkins, "Multivariate Quality Control Based on Regression Adjusted Variables", *Technometrics*, C.XXXIII, No:1, 1991, s. 62.

belirlenmesinde etkin olduğu iddia edilmektedir)⁹⁸. Ancak aykırı gözlemlerin belirlenmesinde aynı etkinlikten söz edilememektedir⁹⁹.

Birden fazla değişken ile çalışıldığında EWMA istatistiğinin formülü aşağıdaki şekilde genelleştirilebilmektedir:

$$E_i = \Lambda x_i + (1 - \Lambda)E_{i-1} \quad (1.43)$$

E_i : i. EWMA vektörü

x_i : i. gözlem vektörü

E_0 : ortalama vektörü

Λ : Köşegenleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ olan köşegen matrisidir (EWMA ağırlıklandırma matrisi olarak da adlandırılmaktadır). E_i değerlerinden hareketle T_i^2 istatistikleri (MEWMA değerleri) hesaplanmaktadır. λ : EWMA ağırlıklandırma katsayılarıdır. Her değişken için ağırlıklandırma katsayılarının belirlenmesi güçtür. Bu nedenle uygulamada $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$ olarak kabul edilmekte ve genellikle $\lambda = 0.05$ olarak seçilmektedir¹⁰⁰. EWMA'lar (E_i) ile T^2 istatistikleri hesaplanmaktadır. Tablo 1.4'te MEWMA değerlerinin hesaplanabilmesi için oluşturulan veri matrisi gösterilmektedir.

$$T_i^2 = E_i' \Sigma^{-1} E_i \quad (1.44)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p \text{ ise } \Sigma_{E_i} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \Sigma \quad (1.45)$$

⁹⁸ A. Oğuzlar, "Hotelling T^2 Grafiği ve Bir Uygulama", Uludağ Üniversitesi İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, C. XVII, No: 1-2, 1999, s. 2.

⁹⁹ Crosier, a.g.e., s. 300.

¹⁰⁰ C.A.Lowry, W.H. Woodall, C.W. Champ, "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Charts", *Technometrics*, C.XXXIV, No: 1, 1992, s. 48.

şeklinde hesaplanabilmektedir. Σ_z : Daha öncede belirtildiği gibi orjinal verilerden hesaplanan varyans-kovaryans matrisidir. Birim sayısı yeterince büyükse (yani $(1-\lambda)^{2i}$ değeri 0'a yaklaşıyorsa) Σ_z aşağıdaki genel formül ile de elde edilebilmektedir:

$$\Sigma_z = \frac{\lambda}{2-\lambda} \Sigma \quad (1.46)$$

Tablo 1.4: MEWMA Değerlerinin Hesaplanması İçin Düzenlenen Veri Matrisi

| Gözlem No: | x_1 | x_2 | $E_{1i}(\text{EWMA}_{1i})$ | $E_{2i}(\text{EWMA}_{2i})$ | $T_i^2(\text{MEWMA})$ |
|------------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1 | x_{11} | x_{21} | E_{11} | E_{21} | T_1^2 |
| 2 | x_{12} | x_{22} | E_{12} | E_{22} | T_2^2 |
| · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · |
| · | · | · | · | · | · |
| N | x_{1n} | x_{2n} | E_{1n} | E_{2n} | T_n^2 |

Örnek numaralarına karşılık MEWMA değerleri (T_i^2) ile çizilen MEWMA-diyagramlarının, ÜKL'lerinin değerleri, Prabhu ve Runger'in (1997) çeşitli λ ve p değerlerini ele alarak hazırladıkları tablodaki H değerlerine karşılık gelmektedir¹⁰¹. Tablo 1.5'de çeşitli değişken sayıları ve λ değerleri için H değerleri gösterilmektedir. $\lambda=1$ durumunda MEWMA diyagramı ile T^2 -diyagramı aynı sonuçları vermektedir. MEWMA diyagramları, literatürde T^2 istatistiğinin formülüne dayanarak çizilmektedir. Dolayısıyla tam anlamıyla geliştirilemediği söylenebilmektedir¹⁰².

¹⁰¹ S.S. Prabhu, G.C. Runger, "Designing a Multivariate EWMA Control Chart", *Journal of Quality Technology*, C. XXIX, No:1, 1997, s. 11.

¹⁰² Niang, a.g.e., s. 144.

Tablo 1.5: Çeşitli λ ve p değerleri için MEWMA Diyagramlarının ÜKL Değerleri (H)

| λ Değerleri | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| pDeğerleri | 0.05 | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.80 |
| 2 | 7.35 | 8.64 | 9.65 | 10.08 | 10.31 | 10.44 | 10.52 | 10.58 |
| 4 | 11.22 | 12.73 | 13.87 | 14.34 | 14.58 | 14.71 | 14.78 | 14.85 |
| 6 | 14.60 | 16.27 | 17.51 | 18.01 | 18.26 | 18.39 | 18.47 | 18.54 |
| 10 | 20.72 | 22.67 | 24.07 | 24.62 | 24.89 | 25.03 | 25.11 | 25.17 |
| 15 | 27.82 | 30.03 | 31.59 | 32.19 | 32.48 | 32.63 | 32.71 | 32.79 |

1.3.2.5 Neden-Seçimi (Cause- Selecting) Diyagramları

T^2 , MCUSUM ve MEWMA gibi kontrol diyagramlarının çizilebilmesi için, incelenen veri kümesinin çok değişkenli normal dağılıma uygun olması gerekmektedir¹⁰³. Uygulamada bu varsayımın sağlanması her zaman mümkün olamamaktadır. Bu problemi aşmak amacı ile Neden Seçimi (Cause-Selecting) diyagramları geliştirilmiştir.¹⁰⁴ Bu yaklaşımın uygulanabilmesi için öncelikle kalite özellikleri arasında (x,y gibi) hata terimleri normal dağılım gösteren ve birbirlerinden bağımsız olan bir regresyon modelinin kurulması gerekmektedir. ($y = b_0 + b_1x + e$, $y = b_0 x^{b_1} + e$ gibi).

Neden-Seçimi diyagramı, kurulan regresyon modelinin artıkları ($e_i = y_i - \hat{y}_i$) ile çizilmektedir. Diyagramın orta çizgisi (O.Ç);

¹⁰³ G.Scepi, "Parametric and Non Parametric Multivariate Quality Control Charts", Ed. C. Lauro, J. Antoch, V.E. Vinzi, G. Saporta, **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, Almanya, Physica-Verlag, 2002, s. 163.

¹⁰⁴ M.R. Wade, W.H. Woodall, "A Review and Analysis of Cause-Selecting Charts", **Journal of Quality Technology**, C:XXV, No.3, 1993, s. 161.

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (1.47)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Regresyon denklemini en küçük kareler (EKK) yöntemiyle hesaplandığıysa $\bar{e} = 0$ olmakta;

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{e} + 3\hat{\sigma} \\ \text{AKL} &= \bar{e} - 3\hat{\sigma} \end{aligned} \quad (1.48)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. ÜKL ve AKL aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da bulunabilmektedir:

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{Z} + A_3 \overline{\text{MR}} \\ \text{AKL} &= \bar{Z} - A_3 \overline{\text{MR}} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Bu denklemlerdeki A_3 ve $\overline{\text{MR}}$ 'in formülleri aşağıdaki gibidir:

$$A_3 = \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} \quad (1.50)$$

$$c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad (1.51)$$

$$\text{MR}_i = |e_{i+1} - e_i| \quad (1.52)$$

$$\overline{\text{MR}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \text{MR}_i \quad (1.53)$$

Neden-Seçimi diyagramları, literatürde çok değişkenli Shewhart diyagramlarına alternatif olarak sunulmaktadır. Ancak kontrol dışına çıkan bir değer yorumu kolay olmadığından yaygın olarak kullanılmamaktadır¹⁰⁵.

Hawkins (1991), bu klasik çok değişkenli kontrol diyagramlarına bir alternatif olarak “regresyona uyarlama” (regression adjusting) olarak adlandırdığı etkin bir yöntem önermiştir¹⁰⁶. Bu yöntemle göre değişkenler arasındaki ilişkinin yönü dikkate alınarak oluşturulan regresyon modelinin standardize edilmiş artıkları incelenerek prosesin kontrol altında olup olmadığı araştırılmaktadır.

1.3.3 Temel Bileşenler Analizi

Çok değişkenli istatistik proses kontrolde en sık kullanılan yöntemlerden biri olan Temel Bileşenler Analizi (Principal Component Analysis), bir değişken grubunun varyans-kovaryans yapısını değişkenlerin doğrusal kombinasyonları yardımı ile açıklamaktadır. Doğrusal kombinasyonlar “Temel Bileşenler” adı verilmektedir. Analizin genel amacı veri kümesini indirgemek ve yorumlamaktır¹⁰⁷.

Değişken sayısı kadar temel bileşen hesaplanabilmektedir. Ancak genellikle birkaç (k tane) temel bileşen veri kümesindeki değişkenliği açıklayabilmektedir. Böylece k tane temel bileşen p tane değişken yerine kullanılarak, herbiri n gözlemli olan p değişken yine herbiri n gözlemli olan k tane temel bileşene indirgenmiş olmaktadır.

Temel Bileşenler Analizi, aralarında önemli ilişki (korelasyon) olan veri kümeleri için uygundur. Değişkenlerin sayısını indirgeyerek kolaylık sağlamaktadır.

¹⁰⁵ Wade, Woodall, a.g.e., s. 164.

¹⁰⁶ Hawkins, a.g.e., s. 61-75.

¹⁰⁷ R. A. Johnson, D.W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 4 baskı, New Jersey, Prentice Hall, 1998, s. 458.

Analiz ilk kez 1957 yılında Jackson ve Morris tarafından kalite kontrol alanında kullanılmaya başlanmıştır¹⁰⁸.

Çok değişkenli istatistik proses kontrolde Temel Bileşenler Analizi'nin uygulanabilmesi için aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir¹⁰⁹:

- Değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren korelasyon matrisi incelenir ve aralarında anlamlı ilişki olan değişkenlerden bir alt grup oluşturulur.
- Alt gruptan hareketle temel bileşenler hesaplanır ve anlamlı olanlar belirlenir.
- Her bir temel bileşen için tek değişkenli kontrol diyagramları çizilir.

Öncelikle temel bileşenlerin elde edilmesi ve anlamlı bileşenlerin, kalite değişkenleri olarak belirlenmesi gerekmektedir. Temel bileşenler arasında korelasyon olmadığından, tek değişkenli Shewhart diyagramları çizilebilmekte ve böylece elde edilen diyagramlar daha etkin sonuçlar vermektedir¹¹⁰.

Σ , $x' = [x_1 \ x_2 \dots x_p]$ gözlem vektörünün varyans-kovaryans matrisi olarak kabul edilsin. Σ matrisinin özdeğerleri $|\Sigma - \lambda I| = 0$ eşitliğinden elde edilmektedir. p tane özdeğerin $(\lambda_i \ i=1,2,\dots,p)$ herbiri ile özvektörler $(e_i \ i=1,2,\dots,p)$ hesaplanabilmektedir. Özvektörlerin hesaplanabilmesi için $\Sigma e_i = \lambda_i e_i \ i=1,2,\dots,p$ denklemlerinin çözülmesi gerekmektedir. Örneğin λ_1 'e ilişkin özvektör $e_1' = [e_{11} \ e_{21} \dots e_{p1}]$, $\Sigma e_1 = \lambda_1 e_1$ denkleminin çözülmesi ile elde edilmektedir. $[(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \dots, (\lambda_p, e_p)]$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0)$ özdeğer ve özvektör

¹⁰⁸ Jackson, a.g.e., s. 128.

¹⁰⁹ Johson, Wichern, a.g.e., s. 490.

¹¹⁰ P.Nomikos, J.F. MacGregor, "Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes", *Technometrics*, C.XXXVII, N:1, 1995, s.41-59, s. 41.

ikilileri olarak tanımlandığında temel bileşenler aşağıdaki şekilde formüle edilmektedir¹¹¹:

$$Y_i = e_i'X = e_{i1}X_1 + e_{i2}X_2 + \dots + e_{ip}X_p \quad i=1,2,\dots,p \quad (1.54)$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_i) &= e_i' \Sigma e_i = \lambda_i & i &= 1,2,\dots,p \\ \text{cov}(Y_i, Y_k) &= e_i' \Sigma e_k = 0 & i &\neq k \end{aligned} \quad (1.55)$$

olmaktadır.

Temel Bileşenler;

$$\begin{aligned} Y_1 &= e_1'x \\ Y_2 &= e_2'x \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ Y_p &= e_p'x \end{aligned} \quad (1.56)$$

olarak tanımlandığında;

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^p \text{Var}(x_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = \sum_{i=1}^p \text{Var}(Y_i) \quad (1.57)$$

eşitliğinden hareketle toplam anakütle varyansı = $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ olarak elde edilmektedir. k. temel bileşenin toplam değişkenliği açıklama oranı ise;

¹¹¹ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 460.

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} \quad k=1,2,\dots,p \quad (1.58)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Anlamli bileşen sayısının belirlenmesi çeşitli kriterlere dayanmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir¹¹²:

- Bileşenlerden kaç tanesinin, toplam değişkenliğin en az %70-80 düzeyinde açıkladığı araştırılır.
- Varyansı 1'den büyük olan bileşenler seçilir.
- Her bir bileşenin varyansının, toplam varyansın (değişkenliğin) en az (1/değişken sayısı) oranında açıklaması beklenir.

Toplam değişkenliğin çoğu (yaklaşık %70-%80'i) ilk birkaç temel bileşenle açıklanabiliyorsa, bu temel bileşenler, fazla bilgi kaybına neden olmadan p tane değişken yerine kullanılabilir.

Genellikle temel bileşenlerin yorumlanmasında birtakım güçlüklerle karşılaşmaktadır. İncelenen temel bileşenin hangi değişkeni daha çok temsil ettiğini araştırmak amacıyla, temel bileşen ve proses değişkeni arasındaki korelasyon katsayıları incelenmektedir¹¹³.

$$\rho_{Y_i, X_k} = \frac{e_{ki} \sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\sigma_{kk}}} \quad i, k = 1, 2, \dots, p \quad (1.59)$$

¹¹² Mastrangelo, Runger, Montgomery, a.g.e., s. 205.

¹¹³ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 461.

Temel bileşenler örnekten hesaplanıyorsa \hat{Y} şeklinde gösterilmekte ve, T^2 kontrol istatistiğinin hesaplanmasında da kullanılabilir¹¹⁴:

$$T_j^2 = \frac{\hat{Y}_{j1}^2}{\hat{\lambda}_1} + \frac{\hat{Y}_{j2}^2}{\hat{\lambda}_2} + \dots + \frac{\hat{Y}_{jp}^2}{\hat{\lambda}_p} \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.60)$$

Temel Bileşenler Analizi'nin çok değişkenli proses kontrolüne uygulanması genellikle iki aşamada gerçekleştirilmektedir. İlk aşamada ilk iki temel bileşene ilişkin kontrol istatistiği;

$$T_{(1,2)}^2 = \frac{\hat{Y}_{j1}^2}{\hat{\lambda}_1} + \frac{\hat{Y}_{j2}^2}{\hat{\lambda}_2} \quad (1.61)$$

hesaplanarak, $\chi_{\alpha,2}^2$ değeri ile karşılaştırılmakta ve bu bileşenler için iki değişkenli elips diyagramı çizilmektedir. Elips dışına çıkan bir nokta belirlendiğinde veri kümesi incelenerek hangi temel bileşenden kaynaklandığı araştırılmaktadır. İkinci aşamada prosesin ilk iki değişkeni dışındaki değişkenler için T^2 istatistiği hesaplanmaktadır¹¹⁵:

$$T_{(3,\dots,p)}^2 = \frac{\hat{Y}_{j3}^2}{\hat{\lambda}_3} + \frac{\hat{Y}_{j4}^2}{\hat{\lambda}_4} + \dots + \frac{\hat{Y}_{jp}^2}{\hat{\lambda}_p} \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.62)$$

Bu aşamada T^2 kontrol diyagramı çizilerek prosesin kontrol altında olup olmadığı incelenmekte ve proseste şoklar meydana getirebilecek küçük sorunlar saptanmaya çalışılmaktadır¹¹⁶.

¹¹⁴ Mason, Young, a.g.e., s. 117.

¹¹⁵ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 494.

¹¹⁶ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 495.

Temel Bileşenler Analizi'nin, dışında veri kümesinin boyutunun indirgenmesini sağlayan pek çok alternatif yöntem geliştirilmiştir. Örneğin ürün kalitesini belirleyen değişkenler (Y), proses değişkenleri (X) ile oluşturulan regresyon denkleminde hesaplanan hata kareleri toplamı ($\sum(Y - \hat{Y})^2$) proses değişkeni olarak kabul edilerek tek değişkenli kontrol diyagramları çizilebilmektedir¹¹⁷.

Bu bölümde kalite, kalite kontrol, istatistik proses kontrol kavramları açıklanarak kontrol diyagramlarının istatistik proses kontroldeki yeri vurgulanmış diyagramların yorumlanmasında geçerli olan kurallar incelenmiştir. Kontrol diyagramları değişken sayısına göre tek ve çok değişkenli, niteliklerine göre nicel ve nitel olarak sınıflandırılmıştır. Proses ortalamasındaki değişimi izlemek üzere nicel olan kontrol diyagramları, değişken sayısına göre gruplandırılarak ele alınmıştır. Tek değişkenli kontrol diyagramlarından Shewhart, CUSUM, EWMA diyagramları, çok değişkenli kontrol diyagramlarından ise χ^2 , T^2 , MCUSUM, MEWMA, Neden-Seçimi diyagramları incelenmiştir. Çok değişkenli veri kümesi ile çalışıldığında değişkenler arasında olabilecek bağımlılıkların tek değişkenli kontrol diyagramlarında dikkate alınmadığı vurgulanarak çok değişkenli diyagramların üstünlüğü vurgulanmaya çalışılmıştır. Son olarak Temel Bileşenler Analizi incelenmiş ve çok değişkenli istatistik proses kontroldeki önemi açıklanmıştır. Çalışma uygulamada en sık kullanılan, prosesin ortalamasındaki değişime karşı duyarlılığı ayırıştırma yöntemlerinin uygulanmasıyla artırılabilen Hotelling T^2 istatistiğine dayalı kontrol diyagramlarını temel aldığından 2. bölümde, Hotelling T^2 istatistiği ile ilgili temel kavramlar ve varsayımlar incelenmektedir.

¹¹⁷ Kresta, MacGregor, a.g.e., s. 35.

İKİNCİ BÖLÜM

HOTELLING T² İSTATİSTİĞİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR, VARSAYIMLAR VE HOTELLING T² İSTATİSTİĞİNE DAYALI DİYAGRAMLARIN ÇİZİLMESİ

2.1 İstatistik Uzaklık Kavramı

Bir noktanın ortalamayı temsil eden noktaya uzaklığını gösteren değere “istatistik uzaklık” adı verilmektedir. İstatistikte iki tip uzaklık kavramı yer almaktadır¹: 1-Euclide Uzaklığı, 2-Mahalonobis Uzaklığı

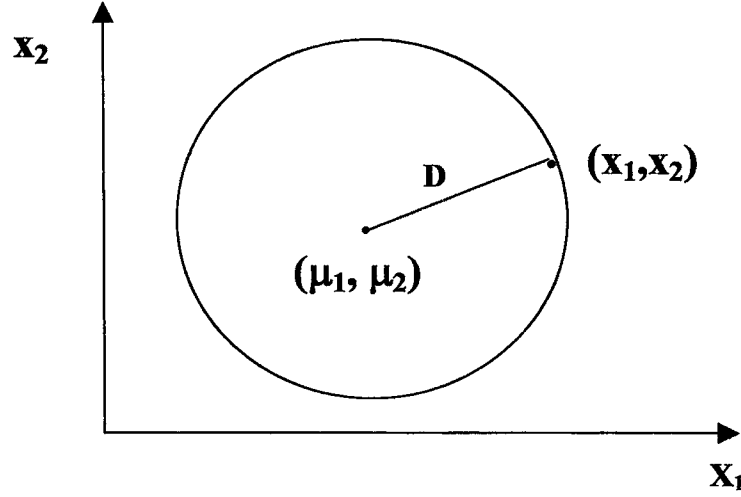
(x_1, x_2) noktasının ortalamaya (μ_1, μ_2) uzaklığı Euclide’e göre aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$D^2 = (X_1 - \bar{X}_1)^2 + (X_2 - \bar{X}_2)^2 \quad (2.1)$$

Tüm noktaların ortalamadan uzaklıkları eşit kabul edildiğinde merkezi ortalama ve yarıçapı D olan bir daire oluşmaktadır.

¹ K.Özdamar, *Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler) 2*, 2. baskı, Eskişehir, Kaan Kitabevi, 1999, s. 67.

Grafik 2.1: Euclide Uzaklığı



$X' = [X_1 \ X_2 \dots X_p]$ ve $\bar{X}' = [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \dots \bar{X}_p]$ p-boyutlu gözlem vektörleri için Euclide uzaklık formülü;

$$D^2 = (X - \bar{X})'(X - \bar{X}) \quad (2.2)$$

şeklini almaktadır².

Euclide uzaklığı sadece değişkenler arasındaki uzaklığın büyüklüğünü ölçmektedir. Diğer bir uzaklık ölçüsü olan Mahalinobis uzaklığı ise, değişkenler arasındaki kovaryans yapısının da hesaba katılmasını sağlamaktadır. Mahalinobis uzaklığı hesaplanırken değişkenler kendi standart sapmalarının tersi ile ağırlıklandırılırken, Euclide uzaklığının hesaplanmasında böyle bir ağırlıklandırma yapılmamaktadır. Standardizasyon olarak da adlandırılan bu işlemin yapılması,

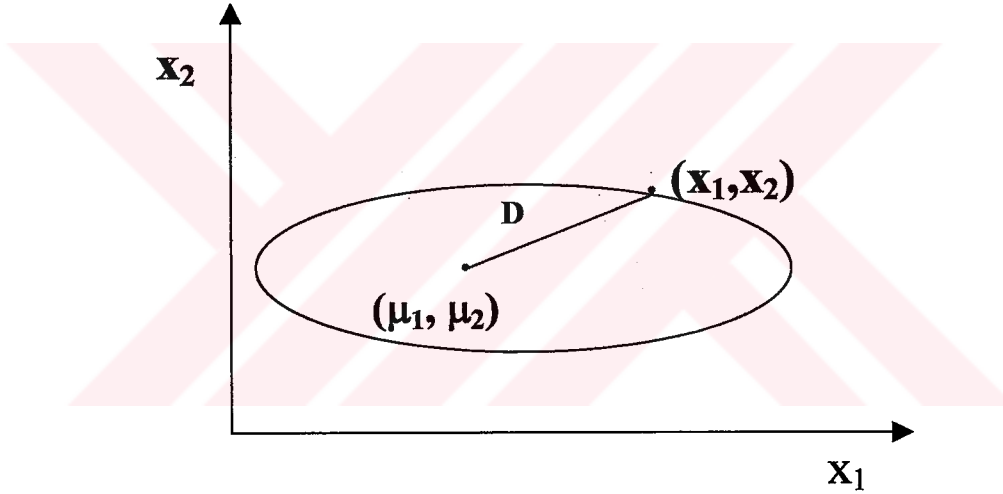
² N.D.Tracy, J.C.Young, R.L.Mason, "Some Aspects of Hotelling's T² Statistic for Multivariate Quality Control, Ed. G.Subir, W.R.Schucany, W.B. Smith, **Statistics of Quality, Textbooks and Monographs**, C. MLIII, New York, Marcel Dekker, Inc., 1997, s. 79.

değişkenlerin birimlerinden ve değişkenliğinden arındırılmasını sağladığından, Mahalinobis uzaklığı çok değişkenli uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır.³

$$SD^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sigma_2^2} \quad (2.3)$$

Yine tüm noktaların, ortalamaya uzaklıkları eşit kabul edildiğinde, noktaların grafiği bir elips oluşturmaktadır.

Grafik 2.2: Mahalinobis Uzaklığı



p boyutlu x vektörünün ($x' = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$), çekilen örnekten elde edilen ortalama vektörüne ($\bar{x}' = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_p]$) uzaklığının Mahalinobis uzaklığı ile hesaplanabilmesi için kullanılan genelleştirilmiş formül aşağıdaki gibidir⁴:

$$SD^2 = (x - \bar{x})'S^{-1}(x - \bar{x}) \quad (2.4)$$

³R.L. Mason, J.C. Young, **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, Virginia, American Statistical Association, 2001, s. 15.

“ Hotelling’s T² as a Multivariate SPC Procedure-Statistical Distance”, (çevrimiçi) <http://www.incontroltech.com/mvspc/tutorial.html>, 21 Şubat 1999 .

⁴ W.R.Dillon, M.Goldstein, **Multivariate Analysis Methods and Applications**, New York, John Wiley&Sons, 1984, s. 125.

n büyüklüğünde m tane örnek için hesaplanan $\bar{x}'_i = (\bar{x}_{i1} \bar{x}_{i2} \dots \bar{x}_{ip})$ $i = 1, 2, \dots, m$ vektörünün ortalama vektörüne uzaklığı;

$$SD^2 = (\bar{x} - \bar{\bar{x}})' S_p^{-1} (\bar{x} - \bar{\bar{x}}) \quad (2.5)$$

formülüyle hesaplanabilmektedir⁵.

T^2 istatistiği ile Mahalinobis uzaklığı sadece hesaplamada kullanılan bir sabitten dolayı farklılık göstermektedir. Çok değişkenli kontrol süreçlerinin geliştirilmesinde Mahalinobis uzaklığı kullanılmakta ve "İstatistik Uzaklık" olarak tanımlanmaktadır.

2.2 Student t ve Hotelling T^2 İstatistikleri Arasındaki İlişki

Bilindiği gibi t-testi $n < 30$ olması durumunda, tek bir anakütle ortalamasının belirli bir değere eşit olup olmadığının veya iki anakütle ortalamasının farkının 0'a eşit olup olmadığının test edilmesinde kullanılmaktadır⁶.

Ortalaması \bar{X} ve varyansı σ^2 olan normal dağılımlı anakütleden tesadüfi olarak çekilen n birimlik örnekten hesaplanan t istatistiğinin formülü⁷;

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{s/\sqrt{n}} \quad (2.6) \text{ şeklindedir.}$$

Burada \bar{x} örnek ortalaması, s örnek standart sapmasını, \bar{X}_0 ise anakütle ortalaması hakkında iddia edilen değeri göstermektedir. t istatistiğinin karesi;

⁵Tracy, Young, Mason, a.g.e., s. 79.

⁶Özdamar, a.g.e., s. 358.

⁷J.T. McClave, P.G.Benson, A First Course in Business Statistics, 5.baskı, New York, Macmillan Publishing Company, 1992, s. 333.

$$t^2 = \frac{(\bar{x} - \bar{X}_0)^2}{s^2/n} \quad (2.7)$$

$$t^2 = \frac{n(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)}{s^2} \quad (2.8)$$

$$t^2 = n(\bar{x} - \bar{X}_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0) \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilmektedir⁸. Tek anakütlenin birden fazla özelliğinin ortalamasının belirli bir değere eşit olup olmadığının veya birden fazla özellik için 2 anakütle ortalamaları arasındaki farkın 0'a eşit olup olmadığının araştırılmasında ise T² istatistiği kullanılmaktadır.⁹ Çok değişkenli analizlerde değişken sayısına ve incelenen grup sayısına göre bir sınıflandırma yapıldığında T² istatistiğinin hangi sınıfta yer aldığı ve diğer durumlarda kullanılan istatistikler Tablo 2.1'de gösterilmektedir¹⁰:

Tablo 2.1: Grup Sayısına ve Değişken Sayısına Göre Çok Değişkenli İstatistiklerin Sınıflandırılması

| | Bir Değişken | Birden Fazla Değişken |
|--------------------------|---------------------|------------------------------|
| İki Grup | Student (t) | Hotelling T ² |
| İkiden Fazla Grup | Fisher (F) | Wilks Lambda |

⁸T.P.Ryan, *Statistical Methods for Quality Improvement*, 2. baskı, New York, John Wiley & Sons, Inc.2000, s. 256.

⁹ H. H.Hotelling, "Multivariate Quality Control, Illustrated by The Air Testing of Sample Bombsights", *Techniques of Statistical Analysis*, 1947, s. 113-183.

J.E. Jackson, "Multivariate Quality Control: 40 Years Later, Ed. D.C Monygomery, J.B.Keats, *Statistical Process Control in Manufacturing*, New York, Marcel Dekker, Inc., 1991, s. 143.

¹⁰ J.Tacq, *Multivariate Techniques in Social Sciences*, Britanya, The Cromwell Press Ltd., 1997, s. 348.

T^2 istatistiği aşağıda izlenen adımlar yardımıyla da elde edilebilmektedir¹¹:

Yeni bir değişken (w) tanımlanmaktadır.

$$w = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = xa \quad (2.10)$$

x_j : j. değişkene ilişkin n birimli sütün vektörüdür. $x = [x_1 \ x_2 \dots x_p]$ $n \times p$ boyutlu veri matrisini oluşturmaktadır. Her bir satır i. birimin p tane değişkene ait değerlerini göstermektedir. a, değişkenler toplanmadan önce çarpıldıkları p boyutlu sütün vektörüdür. Bu durumda w n birimli sütün vektörü olarak tanımlanmaktadır.

$$w_i = a_1x_{i,1} + a_2x_{i,2} + \dots + a_px_{i,p} \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.11)$$

Tesadüfi olarak seçilen örnek(ler)den hesaplanan tüm değişkenlerin örnek ortalamalarının, anakütle ortalama değerlerine eşit olup olmadığının araştırılması amacıyla;

$$H_0: \bar{X}_1 = \bar{X}_{01}; \bar{X}_2 = \bar{X}_{02}, \dots, \bar{X}_p = \bar{X}_{p0}$$

H_1 : En az biri farklıdır.

hipotezleri oluşturulmaktadır. $\bar{X}_{01}, \bar{X}_{02}$ ve \bar{X}_{0p} anakütle ortalamaları hakkında iddia edilen değerlerdir. Hipotezler matris notasyonuyla aşağıdaki gibidir:

¹¹ R. Harris, *A Primer of Multivariate Statistics*, 3. baskı, Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2001, s. 157-158.

$$H_0: \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{01} \\ \bar{X}_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_{0p} \end{bmatrix} = \bar{X}_0$$

H_1 : En az biri farklıdır.

$\bar{X}_w = a' \bar{X}_0$ eşitliği söz konusudur.

Değişkenlerin doğrusal kombinasyonlarının varyansı s_w^2 olarak tanımlanmakta ve değişkenlerin varyansları ve kovaryansları cinsinden yazılabilmektedir:

$$s_w^2 = a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + \dots + a_p^2 s_p^2 + 2a_1 a_2 s_{12} + 2a_1 a_3 s_{13} + \dots + 2a_{p-1} a_p s_{p-1,p} \quad (2.12)$$

s_w^2 matris notasyonu ile $s_w^2 = a'Sa$ şeklinde de gösterilebilmektedir (S tahmin edilen varyans-kovaryans matrisidir). w değişkeni için hesaplanan t değeri aşağıdaki gibidir:

$$t = \frac{a'\bar{x} - a'\bar{X}_0}{\sqrt{a'Sa/n}} = \frac{a'(\bar{x} - \bar{X}_0)}{\sqrt{a'Sa/n}} \quad (2.13)$$

$$t^2 = \frac{n[a'(\bar{x} - \bar{X}_0)]^2}{a'Sa} = \frac{na'(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)'a}{a'Sa} \quad (2.14)$$

Denkleme $a'Sa = 1$ kısıtının eklenmesiyle t^2 değeri maksimize edilmektedir. t^2 eşitliği Lagrange fonksiyonu yardımıyla yazıldığında aşağıdaki gibi gösterilmektedir¹²:

$$L = na'(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)'a - \lambda(a'Sa - 1) \quad (2.15)$$

Denklemin a' 'ya göre 1. kısmi türevi alındığında;

$$\frac{\partial L}{\partial a} = n2a'(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)' - 2\lambda a'S = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = [n(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)' - \lambda S]a = 0 \quad (2.17)$$

şeklini almaktadır.

Eşitliğin her iki tarafı S^{-1} matrisi ile çarpıldığında denklem aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır¹³:

$$[nS^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)' - \lambda I]a = 0 \quad (2.18)$$

Bu durumda problem $nS^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)'$ matrisinin özdeğerlerinin ve özvektörlerinin bulunması olayına indirgenmiş olmaktadır. $nS^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)'$ matrisinin 0'a eşit olmayan tek bir özdeğeri bulunmaktadır ve bu değer matrisinin $nS^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0)(\bar{x} - \bar{X}_0)'$ izine (köşegenlerinin toplamına) eşittir¹⁴.

¹² D.A.Wisner, R.Chattergy, **Introduction to Nonlinear Optimization A Problem Solving Approach**, U.S.A., Elsevier North Holland, Inc., 1978, s. 55.

¹³ Harris, a.g.e., s. 159.

¹⁴ Harris, a.g.e., s. 158.

$T^2 = n(\bar{x} - \bar{X}_0)'S^{-1}(\bar{x} - \bar{X}_0)$ formülü tek değişkenli t istatistiğinin p tane değişken için genelleştirilmiş şeklidir.

T^2 değeri geometrik olarak örnek ortalamaları ile anakütle ortalamaları arasındaki uzaklığın karesi olarak tanımlanmaktadır. Bu ölçü örnek ortalamalarının anakütle ortalamalarına yakınlığını göstermektedir. Doğal olarak, \bar{x} , \bar{X} 'ya yaklaştıkça T^2 değeri de 0'a yaklaşmaktadır. Dolayısıyla T^2 , çok değişkenli gözlem vektörünün ortalama vektörü \bar{X} 'dan uzaklığının karesi ile orantılı parametre olarak da tanımlanabilmektedir. Ortalama değerinden (\bar{X}) eşit uzaklıktaki noktalar ortalamayı çevrelemekte T^2 değeri arttıkça gözlem vektörünün ortalama değerlerinden uzaklaştığı görülmektedir.

2.3 Hotelling T^2 İstatistiğinin Dağılım Özellikleri

T^2 istatistiğinin, çok değişkenli istatistik proses kontrolünde sıklıkla kullanılmasının en önemli nedenlerinden biri, normal dağılımdan elde edilen örneklere ilişkin T^2 istatistiklerinin tanımlanabilen olasılık dağılımlarına sahip olmalarıdır¹⁵.

Hotelling T^2 istatistiği, p değişkenli örneğin tek bir değerle gösterilmesini sağlamak ve tüm değişkenlere ilişkin bilgileri içermektedir¹⁶. Örneklemeyle elde edilen değerler tesadüfi ise hesaplanan T^2 değerleri de tesadüfi olmakta ve uygun bir olasılık fonksiyonu ile tanımlanabilmektedir. T^2 istatistiği, çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında, Şekil 2.1'de gösterildiği gibi anakütle parametrelerinin bilinmediği durum için x vektörünün anakütle parametre değerlerini tahmin etmek

¹⁵ Hotelling, a.g.e., s. 115.

¹⁶ N.Y.Q. Chen, S.M. Erman, S. Vilbert, "Hotelling's T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection", Proceedings of the 2000 IEEE Workshop on Information Assurance and Security United States Military Academy, West Point, New York, 6-7 Haziran, 2000, s. 181.

amacıyla \bar{x} ve S' 'in hesaplanmasında kullanıldığı ve kullanılmadığı durum olmak üzere iki grupta incelenmektedir. Konuyla ilgili literatürde anakütle parametrelerinin bilindiği durumda χ^2 istatistiği hesaplanırken, bilinmediği durumda T^2 istatistiği hesaplanmaktadır. Ancak, parametrelerin bilindiği durumda T^2 istatistiğinin χ^2 dağılımı gösterdiği kabul edilerek¹⁷ $T^2 = n(\bar{x} - \bar{X})' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \bar{X})$ gösterimi, birçok makalede¹⁸ $\chi^2 = n(\bar{x} - \bar{X})' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \bar{X})$ eşitliği yerine kullanılmaktadır.

- Anakütle parametreleri \bar{X} ve Σ bilindiğinde, örnek büyüklüğü bir ($n=1$) olan m örnek için x gözlem vektörünün χ^2 istatistiği;

$$\chi^2 = (x - \bar{X})' \Sigma^{-1} (x - \bar{X}) \quad (2.19)$$

p serbestlik dereceli χ^2 dağılımı göstermektedir. Tüm gözlem vektörleri için hesaplanan χ^2 istatistiklerinin dağılımı sadece değişken sayısına bağlı olmaktadır.

- Anakütle parametrelerinin bilinmediği durum; gözlem vektörünün (x) parametre tahmininden bağımsız olduğu (x vektörünün \bar{x} ve S' in tahmininde kullanılmadığı durum) ve gözlem vektörü x 'in parametre tahminine bağımlı olduğu durum (yani x 'in, \bar{x} ve S' in hesaplanmasında kullanıldığı durum) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.¹⁹

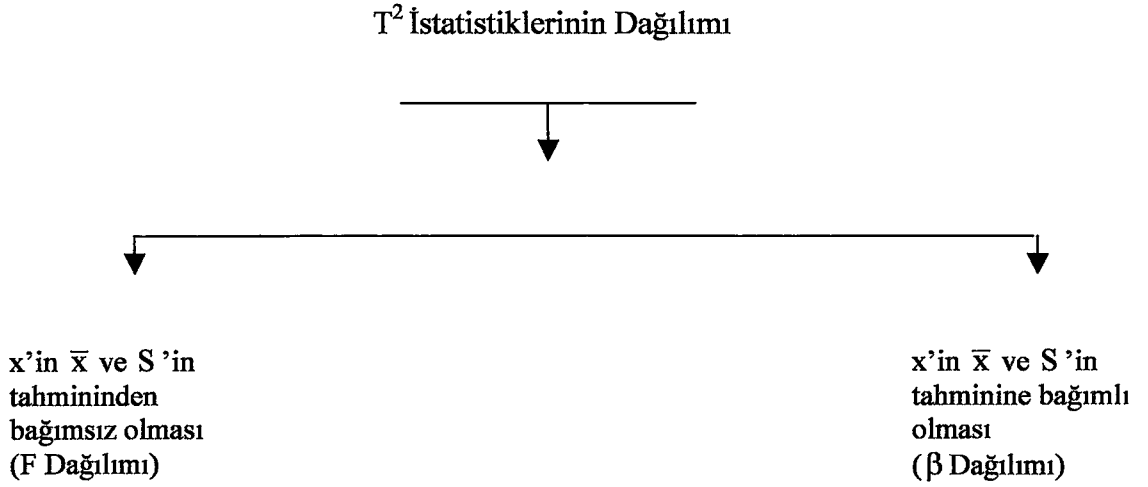
¹⁷Anakütle parametrelerinin bilinmediği durumda hesaplanan T^2 istatistiklerinin dağılımı, χ^2 dağılımına yaklaşmaktadır.

¹⁸ N.H.Timm, "Multivariate Quality Control Using Finite Intersection Tests", *Journal of Quality Technology*, C.XXVIII, No:2, 1996, s. 233.

B.J. Murphy, "Selecting out of control Avariables with the T^2 Multivariate Quality Control Procedure", *Statistician*, C. XXVI, 1987, s. 571.

¹⁹Mason, Young, a.g.e., s. 23-24.

Şekil 2.1: T² İstatistiğinin Dağılımı



Çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında, anakütle parametrelerinin bilinmediği, \bar{x} ve S tahmin edicileri ile tahmin edildiği varsayılınsın. \bar{x} ve S, geçmişte kontrol altında olan bir süreçten gözlem değerlerinin tesadüfi olarak seçilmesi ile elde edilen örnekten hesaplanmış olsun. Bu durumda prosesin halen kontrol altında olup olmadığını belirlenmesi amacı ile seçilen x vektörü, \bar{x} ve S'in hesaplanmasından bağımsız olmakta ve T² istatistikleri, F dağılımı göstermektedir²⁰:

$$T^2 = (x - \bar{x})'S^{-1}(x - \bar{x}) \sim [p(n+1)(n-1) / n(n-p)] F_{(p,n-p)}$$

T² değerlerinin dağılımı, geçmişte kontrol altında olan bir prosesden tesadüfi olarak seçilen örnek (n) büyüklüğüne ve değişken sayısına bağlıdır.- Gözlem vektörü x, \bar{x} ve S'in hesaplanmasında kullanılıyorsa yani geçmişte kontrol altında olan bir prosesdeki vektörlerden biri ise, T² istatistikleri örnek büyüklüğü (n) ve değişken sayısına (p) bağlı bir β dağılımı izlemektedir²¹.

²⁰Mason, Young, a.g.e., s. 24.

²¹N.D. Tracy, J.C. Young, R.L.Mason, "Multivariate Control Charts for Individual Observations", *Journal of Quality Technology*, C.XXIV, No: 2, 1992, s. 90.

$$T^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \sim [(n-1)^2 / n] \beta_{[(p/2), (n-p-1)/2]}$$

β dağılımı;

$$\text{ortalaması: } \frac{a}{(a + b)} \quad (2.20)$$

$$\text{varyansı: } \frac{ab}{[(a + b)^2 (a + b + 1)]} \quad (2.21)$$

olan iki parametrelili sürekli bir dağılımdır²². β dağılımı gösteren bir x değişkenin değerleri 0 ile 1 arasında değişmektedir. Dağılım bu özelliği ile χ^2 ve F dağılımından farklılaşmaktadır. β dağılımının parametreleri (α, β) bilinmediğinde;

$$a = \bar{x} \left[\left[\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{s^2} \right] - 1 \right] \quad (2.22)$$

$$b = (1 - \bar{x}) \left[\left[\frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{s^2} \right] - 1 \right] \quad (2.23)$$

formülleri ile tahmin edilmektedir²³.

β istatistiği, F ve β olasılık dağılımları arasındaki matematik ilişki yardımı ile F istatistiği olarak da yazılabilmektedir²⁴.

²² "Beta Distribution", **Engineering Statistics Handbook**, (çevrimiçi), www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda366h.htm, 23 Şubat 2004

²³ "Beta Distribution", **Statistical Distributions**, (çevrimiçi), <http://www.reascorp.com/beta.htm>, 23 Şubat 2004

²⁴ T.P. Ryan, **a.g.e.**, s. 61.

$$\beta_{(\alpha,a,b)} = \frac{(2a/2b)F_{(\alpha;2a,2b)}}{1 + (2a/2b)F_{(\alpha;2a,2b)}} \quad (2.24)$$

X değişkeni, ortalaması \bar{X} , standart sapması σ olan normal dağılımlı bir anakütleden çekilen n birimlik örneklerin değerleri olarak tanımlandığında, standardizasyon işlemi ($Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}$) şeklinde gerçekleşmektedir. Standardize edilen her örneğe $u = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ dönüşümü uygulandığında, u değerleri n serbestlik dereceli χ^2 dağılımı göstermektedir²⁵. Bilindiği gibi F değeri, bağımsız iki χ^2 tesadüfi değişkeninin kendi serbestlik derecelerine bölündükten sonra oranlanmalarıyla elde edilmektedir.

$$F_{(f_1, f_2)} = \frac{\chi_{f_1}^2 / f_1}{\chi_{f_2}^2 / f_2} \quad (0 < F < \infty) \quad (2.25)$$

f_1 : 1. χ^2 tesadüfi değişkeninin serbestlik derecesi, f_2 : 2. χ^2 tesadüfi değişkeninin serbestlik derecesi ile oluşan F tesadüfi değişkenin dağılımı olarak tanımlanmaktadır. F dağılımı gösteren değişkenin ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\text{ortalaması: } \frac{f_2}{f_2 - 1} \quad (2.26)$$

$$\text{varyansı: } \frac{2f_2^2(f_1 + f_2 - 2)}{[f_1(f_2 - 2)^2(f_2 - 4)]} \quad (2.27)$$

β istatistiği uygulamada genellikle, F istatistiğine dönüştürülmeden kullanılmaktadır.

²⁵ W.W. Daniel, J.C.Terrell, **Business Statistics**, 4.baskı, Boston, Houghton Mifflin Company, 1986, s. 500.

Normal, t, χ^2 ve F dağılımları arasındaki ilişkiler aşağıdaki şekilde de belirtilebilmektedir²⁶:

Bilindiği gibi t değeri, örnek ortalamasının standart tesadüfi değişkene ($t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{s/\sqrt{n}}$) dönüştürülmesiyle elde edilmektedir. t değerinin pay ve paydası σ 'ya bölüldüğünde;

$$\frac{\bar{x} - \bar{X}/\sigma}{s/\sqrt{n}\sigma^2} = \frac{\bar{x} - \bar{X}/\sigma/\sqrt{n}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu durumda t değerinin payı Z'ye eşitken paydanın karesi alındığında;

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi_f^2 \quad f = (n-1) \text{ serbestlik derecesi} \quad (2.29)$$

eşitliğinden dolayı²⁷

$$\frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{\chi_f^2}{n-1} = \frac{\chi_f^2}{f} = F \quad (2.30)$$

eşitliği yazılabilmektedir. Doğal olarak t^2 'de;

²⁶ N. Orhunbilge, *Örnekleme Yöntemleri ve Hipotez Testleri*, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 1997, s. 241.

²⁷ Anakütle normal dağıldığında, $\chi_f^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ tesadüfi değişkeni f=(n-1) serbestlik dereceli χ^2 dağılımına uymaktadır.

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\chi_f^2 / f}} \quad t^2 = \frac{Z^2}{\chi_f^2 / f} \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Tanım olarak t^2 'nin payı χ_{1,f_1}^2 'e ($f_1=1$), paydası da χ_{2,f_2}^2 'e ($f_2=n-1$) eşittir. Bu durumda t^2 aynı zamanda $f_1=1$, $f_2=(n-1)$ serbestlik dereceli F değerine ($t_f^2 = F_{f_1,f_2}$) eşittir. f_1 0'dan farklı sonlu bir sayı, f_2 ise ∞ olduğunda F;

$$F = \frac{\chi_f^2}{f} \quad (f=n-1) \text{ eşitliği ile gösterilebilmektedir}^{28}.$$

2.4 T^2 İstatistiğinin Varsayımları

T^2 istatistiğinin belirtilen dağılımları gösterebilmesi ve bir kontrol istatistiği olarak kullanılabilmesi için aşağıdaki varsayımları sağlaması gerekmektedir²⁹.

2.4.1 Çok Değişkenli Normal Dağılım

Çok değişkenli istatistik analiz yöntemlerinin büyük çoğunluğunda örneklerin çok değişkenli normal dağılımlı anakütlelerden geldiği kabul edilmektedir. Bu varsayım bazı işlemlerin ve sonuçların yorumlanmasını kolaylaştırmanın ötesinde dağılım teorisi açısından da gerekli görülmektedir³⁰.

²⁸ Orhunbilge, a.g.e., s. 242.

²⁹ J.Stevens, *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences*, 4.baskı, New Jersey, Lawrence Erlbaum Assoc. Inc., 2002, s. 257.

³⁰ H.Tatlıdil, *Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz*, Ankara, Akademi Matbaası, 1996, s. 53.

Çok değişkenli normal dağılım, tek değişkenli normal dağılımın $p \geq 2$ (p :değişken sayısı) boyutu için genelleştirilmiş şeklidir. Çok değişkenli istatistik yöntemlerin çoğu, çok değişkenli normal dağılım varsayımına dayanmaktadır.

Ortalaması \bar{X} , varyansı σ^2 olan bir X değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-[(x-\bar{X})/\sigma]^2/2} \quad -\infty < X < \infty \quad (2.32)$$

Formüldeki $\left(\frac{X-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 = (X-\bar{X})'(\sigma^2)^{-1}(X-\bar{X})$ X değişkeninin \bar{X} 'ya

uzaklığının karesidir ve $p \times 1$ boyutlu X vektörü için $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix}$;

$(X-\bar{X})'\Sigma^{-1}(X-\bar{X})$ şeklinde genelleştirilmektedir. \bar{X} : X vektörünün beklenen değeri ve Σ : $p \times p$ boyutlu varyans-kovaryans matrisidir.

Tek değişkenli normal yoğunluk fonksiyonunda “normalleştirme sabiti” olarak tanımlanan $(2\pi)^{-1/2}(\sigma^2)^{-1/2}$ çok değişkenli durum için genelleştirildiğinde; $(2\pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-1/2}$ şeklinde yazılmaktadır. X tesadüfi vektörünün $(X' = [X_1 X_2 \dots X_p])$ p boyutlu normal yoğunluk fonksiyonu $-\infty < x_i < \infty$ ($i=1,2,\dots,p$) koşulu altında aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-[(x-\bar{X})'\Sigma^{-1}(x-\bar{X})]/2} \quad (2.33)$$

p boyutlu normal dağılım $N_p(\bar{X}, \Sigma)$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Çok değişkenli normal dağılım varsayımını sağlayan örnek veri kümesi aşağıdaki özellikleri göstermektedir³¹:

$$- \bar{x} \sim N_p\left(\bar{X}, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

$$- \bar{x} \sim N_p\left(\bar{X}, \frac{1}{n}\Sigma\right) \text{ ise } n(\bar{x} - \bar{X})'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \bar{X}) \sim \chi^2_{\alpha,p}$$

$-(n-1)S \sim W_p(n-1, \Sigma)$ dağılımının çok değişkenli benzeri olan Wishart dağılımı göstermektedir.

- x vektörünün tüm alt bileşenleri çok değişkenli normal dağılmaktadır.

Çok değişkenli normal dağılımın sağlanıp sağlanmadığının belirlenmesinde kullanılan doğrudan bir test bulunmamaktadır³². Analitik ve grafik yöntemler kullanılmaktadır. Mahalinobis uzaklığı $[d_j^2 = (\bar{x}_j - \bar{x})'S^{-1}(\bar{x}_j - \bar{x})]$ ($j=1,2,3,\dots,m$) yardımı ile normallik araştırılabilmektedir. Anakütlenin çok değişkenli normal dağılması, n veya np 'nin ≥ 25 veya 30 olması durumunda her uzaklık d_j^2 ($d_1^2, d_2^2, \dots, d_m^2$) bir χ^2 tesadüfi değişkenine benzemektedir. Ancak uzaklıklar (d_j^2), birbirlerinden bağımsız olmamakta ve kesin bir χ^2 dağılımı göstermemektedir³³. d_j^2 değerleri ile çizilen grafik χ^2 -grafığı olarak adlandırılmaktadır. Çok değişkenli normal dağılım varsayımının araştırılması amacı

³¹ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 184-187.

³² J.F. Hair, R.E. Anderson, R.L. Tatham, W.C. Black, **Multivariate Data Analysis**, 5.baskı, New Jersey, Prentice Hall, 1998, s.348.

³³ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 196.

ile oluşturulacak χ^2 - grafiğinin çizilebilmesi için aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir³⁴:

- Hesaplanan d_j^2 değerleri küçükten büyüğe doğru sıralanır ($d_1^2 < d_2^2 < \dots < d_m^2$)

- $[\chi^2_{p, [(m-j+1/2)/m]}, d_j^2]$ ikililerine ilişkin bir grafik çizilir.

Çok değişkenli normalliğin sağlandığı bir veri kümesinde grafiğin, eğimi 1 olan doğrusal bir çizgi şeklinde olması gerekmektedir. Sistemik bir eğilim normallikten sapma olduğunu göstermektedir. Çok değişkenli normalliğin sağlanabilmesi için d_j^2 değerlerinin yaklaşık yarısının $\chi^2_{p,0.50}$ değerinden küçük olması beklenmektedir³⁵.

χ^2 -grafiğinde aykırı gözlemlerin saptanabilmesi için öncelikle değişkenler standartlaştırılmaktadır ($Z_{jk} = \frac{x_{jk} - \bar{x}_k}{\sqrt{s_{kk}}}$ $k=1,2,\dots,p$ $j=1,2,\dots,n$). Standartlaştırılan değişkenler ile d_j^2 değerleri hesaplanmakta ve $\chi^2_{p,\alpha}$ (Uygulamada $\chi^2_{p,0.005}$ değeri tercih edilebilmektedir³⁶.) değeri ile karşılaştırılmaktadır. $d_j^2 > \chi^2_{p,\alpha}$ olan gözlemlerin aykırı gözlem olduklarına karar verilmektedir. Veri kümesinde bir kaç tane aykırı gözlemin olması çok değişkenli normal dağılım varsayımını bozmamaktadır³⁷.

T^2 istatistiklerinin hesaplanabilmesi için kullanılan veri kümesinin çok değişkenli normal dağılım varsayımını sağlayıp sağlamadığı dolaylı bir şekilde de araştırılabilmektedir. Veri kümesi çok değişkenli normal dağıldığında, T^2 istatistiği β dağılımı göstermektedir³⁸. Dolayısıyla T^2 istatistik değerlerine, tek değişkenli uygunluk testleri, uygulanarak β dağılımı gösterip göstermediği araştırılabilmektedir.

³⁴ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 196.

³⁵ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 199.

³⁶ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 204.

³⁷ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 204.

³⁸ Mason, Young, a.g.e., s. 36.

Hesaplanan T^2 istatistikleri β dağılımına uygun olduğunda, T^2 istatistikleri için çizilen histogramın genellikle sağa çarpık bir dağılım göstermektedir. Dolayısıyla böyle bir görünüm T^2 istatistiklerinin β dağılımına uygunluğu konusunda bilgi vermektedir.

Çok değişkenli normal dağılım varsayımının sınanması için kullanılan diğer bir yaklaşım Q-Q grafiğinin çizilmesidir.³⁹ Grafiğin çizilebilmesi için, T^2 değerleri β değerlerine dönüştürülerek küçükten büyüğe sıralanmakta ve $q_{(i)} = \frac{[i-1/2]}{n}$ değerlerine karşılık gelecek şekilde grafiği çizilmektedir.

$$\left[\frac{n}{(n-1)^2} \right] T^2 \cong \beta_{[p/2, (n-p-1)/2]} \quad (2.34)$$

Çizilen Q-Q grafiği yaklaşık olarak bir doğru ise veri kümesinin çok değişkenli normal dağılım varsayımını sağladığı ve T^2 istatistiklerinin β dağılımı gösterdiği sonucuna varılabilmektedir. Çok değişkenli normalliğin sağlanması durumunda genellikle her değişkenin tek değişkenli normal dağılıma uyduğu görülmektedir. Ancak tüm değişkenlerin tek değişkenli dağılıma uygun olması veri kümesinin çok değişkenli normal dağılıma uygun olduğunu garanti etmemektedir. Böyle bir yaklaşım çok değişkenli normalliğin araştırılmasında iyi bir başlangıç noktası olarak kabul edilmekte ve en temel yöntem olarak bilinmektedir⁴⁰. Bu nedenle veri kümesindeki değişkenlerin tek değişkenli normal dağılıma uyması, çok değişkenli normal dağılımın sağlanmasına yardımcı olmaktadır⁴¹. Dolayısıyla çok değişkenli normalliğin sağlanıp sağlanamamasının araştırılmasında tek değişkenli normalliğin sınanması önemli olmaktadır. Sonuç olarak veri kümesi çok değişkenli normal dağılıma uymuyorsa, tek değişkenli normal dağılmayan değişken araştırılmakta ve

³⁹ S. Sharma, *Applied Multivariate Techniques*, U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1996, s. 376.

⁴⁰ A.Nijhuis, S. Jong, B.G.M. Vandeginste, "The Application of Multivariate Quality Control in Gas Chromatography", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, C.XLVII, No:1, 1999, s. 110

S. Looney, "How to Use Tests for Univariate Normality to Assess Multivariate Normality", *The American Statistician*, C.XLIX, No:1, 1995, s. 64.

⁴¹ Stevens, a.g.e., s. 262.

gerekli dönüşümler yapılarak normallik sağlanmaktadır⁴². Tek değişkenli normallik varsayımı grafik yöntemler ve istatistik testlerle sınanabilmektedir⁴³:

En sık kullanılan grafik yöntemler; histogram, kutu grafiği, dal-yaprak gösterimi, Q-Q grafiği, P-P grafiğidir⁴⁴. Uygulamada genellikle Q-Q grafiği kullanılmaktadır. Grafiğin çizilebilmesi için gözlenen değerler küçükten büyüğe sıralanmakta ve beklenen normal dağılım değerleriyle karşılaştırılmaktadır. Q-Q grafiğinde, normal dağılım formu doğrusal bir çizgi şeklindedir. Grafiği çizilen değişken doğrusal çizgiyle karşılaştırılmakta ve dağılım normal ise, gözlenen değerler doğrusala yakın bir dağılım göstermektedir. Yöntemin uygulanması kolay olsa da, küçük örnekler için uygun bulunmamaktadır. Q-Q grafiğinin doğrusal olup olmadığının kararı subjektiftir. Bu nedenle grafiğin doğrusal olup olmadığına karar verebilmek için gözlenen değerlerle, beklenen normal dağılım değerleri arasındaki korelasyon katsayılarına bakılmaktadır. Katsayı yüksek ve anlamlı ise tek değişkenli normalliğin sağlandığı söylenebilmektedir. Tek değişkenli normalliğin testinde asimetri ve basıklık ölçüleri, χ^2 , Kolmogorov-Smirnov, Jarque-Bera, Shapiro-Wilks gibi uygunluk testleri kullanılmaktadır. Bilindiği gibi χ^2 uygunluk testinin uygulanabilmesi için her iki özelliğin sıklıklarına ait frekansların 5'ten büyük olması koşulu aranmakta bu nedenle büyük örneklerin gözlenmesi gerekmektedir. Kolmogorov- Smirnov testi böyle bir koşula dayanmadığından uygulamada sıklıkla kullanılmaktadır. Kolmogorov-Smirnov testinde aşağıdaki hipotezler test edilmektedir.

H_0 : Örnek normal dağılım gösteren anakütleden gelmektedir.

H_1 : Örnek normal dağılım gösteren anakütleden gelmemektedir.

⁴²S. Sharma, a.g.e., s. 376.

⁴³B.G. Tabachnick, L.S.Fidell, *Using Multivariate Statistics*, 3. baskı, California, Haper Collins College Publisher, 1996, s. 71.

⁴⁴ Sharma, a.g.e., s. 376.

P.Newbold, *İşletme ve İktisat için İstatistik*, çev. Ümit Şenesen, 4.baskı, İstanbul, Literatür Yayıncılık, 2001, s. 33, 63.

Test örnekten elde edilen kümülatif nisbi frekans dağılımının H_0 'da ileri sürülen anaktüle teorik dağılımıyla karşılaştırılmasına dayanmaktadır⁴⁵. D değeri test istatistiği olarak kullanılmakta ve aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$D = \max|f - f'| \quad (2.35)$$

f : Gözlenen kümülatif nisbi frekans

f' : Kümülatif teorik frekans

D istatistiği D değerlerini gösteren tabloda bulunan $D_{\alpha/n}$ değeriyle karşılaştırılmaktadır. $D > D_{\alpha/2}$ olması durumunda H_0 hipotezi red edilmekte ve örneğin normal dağılan bir anaktüleden geldiği kabul edilmektedir⁴⁶.

Uygulanan grafik yöntemler ve istatistik testlerin sonucunda normal dağılmayan değişkenlere dönüşüm (karekök, logaritmik, kare gibi) uygulanabilmektedir⁴⁷. Dönüşümler sonucunda da çok değişkenli normallik sağlanamıyorsa doğru kontrol limitlerinin bulunabilmesi için Chebyshev Teoremi de kullanılabilir. ⁴⁸ Teoreme göre X değişkeni, dağılıma bakmaksızın $(1-1/k^2)$ olasılıkla $(\bar{X} - k\sigma < x < \bar{X} + k\sigma)$ aralığında yer almaktadır. (k, $k > 1$ koşulunu sağlayan bir sabit olarak tanımlanmaktadır.) k uygulamada genellikle 3 değerini almaktadır. Buna göre, β dağılımını sağlayamayan T^2 istatistikleri ile çizilecek kontrol diyagramının kontrol limitleri yaklaşık olarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

⁴⁵ Orhunbilge, a.g.e., s. 283.

⁴⁶ M. Hollander, D.A. Wolfe, *Nonparametric Statistical Methods*, 2. baskı, New York, John Wiley & Sons Inc., 1999, s. 529.

⁴⁷ Bkz. s. 107.

⁴⁸ Mason, Young, a.g.e., s. 48.

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{T} + ks_T \\ \text{AKL} &= \bar{T} - ks_T \end{aligned} \quad (2.36)$$

\bar{T} : T^2 istatistiklerinin ortalaması, s_T : T^2 istatistiklerinin standart sapması olarak tanımlanmakta k değeri de, α seçildikten sonra $\alpha = 1/k^2$ eşitliğiyle belirlenebilmektedir⁴⁹.

Normalliğin sağlanamaması durumu için simülasyon yönteminin uygulanması ve alternatif çok değişkenli kontrol diyagramlarının geliştirilmesi çalışmaları devam etmektedir. Örneğin Liu'nun (1995), 2. Aşama diyagramları için parametrik olmayan yaklaşımını konu alan bir çalışması bulunmaktadır⁵⁰. Ancak çok değişkenli normal dağılım varsayımı sağlandığında bu yaklaşım kontrol dışı uyarıların saptanmasında yetersiz kalabilmektedir.⁵¹

Örnek büyüklüklerinin $n > 1$ olması durumunda, çekilen örnek sayısı arttıkça veri kümesinin dağılımı Merkezi Limit Teoremi'ne göre çok değişkenli normal dağılıma yaklaşmaktadır. Örnek büyüklüğünün ($n=1$) olması durumunda ise bu teorem geçerli olmamaktadır⁵².

Konuyla ilgili literatürdeki bazı çalışmalarda normal dağılmayan veya normal dağılıma yakın olmayan değişkenlerle çizilen kontrol diyagramlarının güçlü (robust) sonuçlar verdiği iddia edilmektedir. Ancak bu iddialar örnek büyüklüğünün birden büyük ($n > 1$) olduğu durumlar için geçerli olmaktadır⁵³.

⁴⁹ Mason, Young, a.g.e., s. 48.

⁵⁰ R.Y.Liu, "Control Charts for Multivariate Processes", *Journal of American Statistical Association*, C.XM, No: 432, 1995, s. 1382.

⁵¹ R. Mason v.d., "Assesment of Multivariate Process Control Techniques", *Journal of Quality Technology*, C.XXIX, 1997, s. 142.

⁵² Nijhuis, Jong, Vandeginste, a.g.e., s. 110.

⁵³ I.W. Burr, "The Effect of Non-Normality on Constants for \bar{x} and R Charts", *Industrial Quality Control*, 1967, s. 563-569.

E.G. Schilling, P.R. Nelson, "The Effect of Non-Normality on the Control Limits of \bar{x} Charts", *Journal of Quality Technology*, C.VIII, 1976, s. 183-188.

2.4.2 Varyans-Kovaryans Matrislerinin Eşitliği Varsayımı

Veri kümesinde yer alan örneklerdeki birim sayıları (n) yeterince büyük olmadığında örneklerin, varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği önem kazanmaktadır. Eşitlik, varyansların (σ_{ii}^2 $i=1,2,\dots,p$) ve kovaryansların (σ_{ij} $i, j=1,2,\dots,p$ $i \neq j$) eşit olması ile sağlanabilmektedir. $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$ koşulu altında incelenen veri kümesi için aşağıdaki ortak varyans-kovaryans matrisi (S_p) hesaplanabilmektedir⁵⁴.

S_p 'nin hesaplanabilmesi için varyans-kovaryans matrislerinin eşitliğinin test edilmesi gerekmektedir. Ancak bu amaçla geliştirilen testler çok değişkenli normal dağılım varsayımına oldukça duyarlıdır⁵⁵. Uygulamada en sık kullanılan test Box-M testidir. Bu test de normallikten sapma durumundan oldukça fazla etkilenmektedir. Bu nedenle öncelikle çok değişkenli normallik varsayımının sağlanması önerilmektedir. Box-M testinin hipotezleri aşağıdaki gibidir⁵⁶:

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_k$$
$$H_1 : \text{En az biri farklıdır.}$$

Box-M test istatistiği⁵⁷;

$$M = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln |S| - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \ln |S_i| \quad (2.37)$$

⁵⁴ S_p 'nin açılımı için Bkz. s. 43.

⁵⁵ Johnson, Wichern, a.g.e., s. 238.

⁵⁶ R. Alpar, Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1, 2.baskı, Ankara, Nobel Yayınevi, 2003, s. 131.

⁵⁷ N.H. Timm, Applied Multivariate Analysis, Springer Verlag, U.S.A., 2002, s. 134.

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)} \left[\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \right] \quad (2.38)$$

MC⁻¹ değeri $\frac{1}{2}(k-1)p(p+1)$ serbestlik dereceli χ^2 değeri ile karşılaştırılmaktadır. Varyans-kovaryans matrislerinin gözlem sayıları eşit ise n herhangi bir grubun gözlem sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir:

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(k+1)}{6(p+1)k(n-1)} \quad (2.39)$$

χ^2 yaklaşımı k ve p'nin 5'i aşmadığı durumlarda ve örneklerin büyüklüğü $n \geq 20$ olduğunda daha etkin sonuç vermektedir⁵⁸. Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliğinin araştırılmasında F istatistiği de kullanılmaktadır. Eşitlikten sapmalar α ve β hatalarını etkilemektedir. Ancak yapılan simülasyon çalışmaları α hatasının daha çok etkilendiğini göstermektedir⁵⁹. Varsayımın gerçekleşmemesi durumunda, T² istatistiğinin güçlü (robust) sonuçlar verdiği iddia edilerek, eşit varyans-kovaryans varsayımını araştıran testler gözardı edilmektedir⁶⁰.

2.4.3 Zamana Bağlı Değerlerin Bağımsız Olması (Otokorelasyon Olmaması Varsayımı)

Otokorelasyon, bir zaman serisinde farklı zamanlara ait değerler arasındaki bağımlılık derecesini ölçen korelasyon katsayısı olarak tanımlanmaktadır.⁶¹ Otokorelasyon olması durumunda yapılacak tesadüfiliğe dayanan aralık tahminleri

⁵⁸ Alpar, a.g.e., s. 132.

⁵⁹ L.N. Holloway, O.J.Dunn, "The Robustness of Hotelling's T²", *Journal of American Statistical Association*, C.LXII, 1967, s. 124-136.

⁶⁰ W.W. Cooley, P.R.Lohnes, *Multivariate Data Analysis*, New York, Wiley, 1971

⁶¹ P.J. Brockwell, R.A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, U.S.A., Springer Verlag, 1996, s. 44.

ve istatistik testler geçerliliklerini kaybedeceğinden, kontrol sürecinde ciddi sorunlar yaratabilmektedir.

X_t bir zaman serisi değeri olarak tanımlandığında, otokovaryans fonksiyonundan⁶² hareketle tanımlanan otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\gamma(k) = \text{cov}(y_{t-k}, y_t) \quad (2.40)$$

$$r(k) \equiv \frac{\gamma_y(k)}{\gamma_y(0)} = \text{cor}(y_{t-k}, y_t) = r_k \quad (2.41)$$

k , kaydırılan dönem sayısı olarak tanımlandığında otokorelasyon katsayısı (r_k) aşağıdaki genel formül ile hesaplanabilmektedir⁶³:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-k} - \bar{y}_t)}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad (2.42)$$

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_0: \rho_k \geq 0$$

$$H_0: \rho_k \leq 0$$

$$H_1: \rho_k \neq 0$$

$$H_1: \rho_k < 0$$

$$H_1: \rho_k > 0$$

şeklindeki üç farklı hipotezle sırasıyla otokorelasyon olup olmadığı, negatif otokorelasyon olup olmadığı ve pozitif otokorelasyon olup olmadığını, çeşitli uzunlukta kaydırmalarla Q testi ve “t benzeri testi” kullanılarak araştırılmaktadır. m : kaydırılan dönemlerin en büyüğü, n : gözlenen veri sayısı olarak tanımlandığında, Q testi için (Portmanteau Testi olarak da bilinmektedir.) hesaplanan Q istatistiği;

⁶² Brockwell, Davis, a.g.e., s. 15.

⁶³ N. Orhunbilge, Zaman Serileri Analizi Tahmin ve Fiyat İndeksleri, İstanbul, İşletme Fakültesi Yayını, 1999, s. 137.

$$Q = n \sum_{k=1}^m r_k^2 \quad (2.43)$$

şeklindedir⁶⁴. Q istatistiği, $\chi^2_{\alpha, m-1}$ değeri ile karşılaştırılmaktadır. $Q \leq \chi^2_{\alpha, m-1}$ otokorelasyon olmadığını gösterirken, $Q > \chi^2_{\alpha, m-1}$ durumu otokorelasyon olduğu anlamına gelmektedir.

“t benzeri” testin uygulanabilmesi için öncelikle otokorelasyonların (r_k) standart hataları (s_{r_k}) hesaplanmakta;

$$s_{r_k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} r_j^2} \quad (2.44)$$

ve $t_{r_k} = \frac{r_k}{s_{r_k}}$ elde edilmektedir. Otokorelasyon katsayıları asimptotik olarak normale yaklaştığından, $|t_{r_k}| \leq 2$ ($Z_{0.05/2} = 1.96 \sim 2$) otokorelasyonun olmadığını, $|t_{r_k}| > 2$ ise otokorelasyonun olduğunu göstermektedir.

y_t ve y_{t-k} arasındaki otokorelasyon, bu iki dönem arasındaki değerlerin etkisi altında olmaktadır. y_t ile y_{t-k} arasındaki bağımlılık derecesi, y_{t-1} 'den y_{t-k+1} 'e kadar olan ara değerlerin etkisi sabit tutularak hesaplandığında ise elde edilen katsayı kısmi otokorelasyon katsayısı olarak adlandırılmaktadır⁶⁵. Otoregresif ve/veya Hareketli Ortalama modellerinin derecelerini belirlemek amacıyla incelenen kısmi otokorelasyon katsayıları aşağıdaki formülle hesaplanmaktadır⁶⁶:

$k=1$ olduğunda $r_{kk} = r_1$ olmak üzere;

⁶⁴ Brockwell, Davis, a.g.e., s. 34.

⁶⁵ W. Enders, Applied Econometric Time Series, U.S.A., John Wiley&Sons, Inc., 1995, s. 82.

⁶⁶ Orhunbilge, (1999), a.g.e., s. 146.

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} r_j} \quad k = 2, 3, \dots \text{ ise} \quad (2.45)$$

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} r_{k-1,k-j} \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (2.46)$$

r_k : k dönem gecikmeli otokorelasyon katsayısı

r_{kk} : k dönem gecikmeli iki değer arasındaki kısmi otokorelasyon katsayısı

Kısmi korelasyon katsayıları da, otokorelasyon katsayıları gibi “t benzeri” testler ile test edilmektedir. r_{kk} 'nın t değerleri; $t_{kk} = \frac{r_{kk}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ hesaplandıktan sonra, $|t_{kk}| \sim 2$ ile

karşılaştırılmakta ve 2'den büyük t değerlerine sahip olan kısmi otokorelasyon katsayılarının anlamlı olduğuna karar verilmektedir.

İncelenen değişkende, ikinci ve üçüncü gecikmeden sonra yüksek otokorelasyonlar söz konusu ise, $(y'_t = y_{t+1} - y_t)$ işlemi uygulanarak, birinci farklar serisi oluşturulmaktadır. İlk farklarla otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayıları yeniden test edilmektedir. Bir ve iki dönemli gecikmeyle elde edilen otokorelasyonlar dışındaki otokorelasyonlar anlamlı ise birinci farklar serisinin ilk farkları alınarak otokorelasyon testleri tekrarlanır, anlamsız ise değişkenin geçmiş dönem değerlerinin bağımsız değişken olarak kullanıldığı “Oto regresif Modeller (AR)” ve/veya geçmiş dönem hatalarının doğrusal kombinasyonlarının kullanıldığı “Hareketli Ortalama Modelleri (MA)”den hata kareleri toplamı en az olanı seçilerek uygun model oluşturulmaktadır⁶⁷. p gecikmeli oto regresif ve q gecikmeli hareketli ortalama modeli ARMA(p,q) şeklinde gösterilmektedir. p ve q'nun alacağı değere karar verilirken otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının dağılımından yararlanılmaktadır. Otokorelasyon katsayıları üstel olarak 0'a yaklaşırken, anlamlı kısmi otokorelasyonun sayısı

⁶⁷ Orhunbilge, (1999), a.g.e. s. 143-152.

AR'ın derecesini (p), kısmi otokorelasyon katsayıları 0'a yaklaşırken ise anlamlı otokorelasyon katsayısı MA'nın derecesini göstermektedir. Uygulamada otokorelasyonun etkisini ortadan kaldırabilecek uygun zaman serisi modelinin oluşturulması kolay olmamaktadır⁶⁸.

Bir değişkende otokorelasyon olup olmadığının araştırılmasında, değişkenin durağan olup olmadığı da belirleyici olmaktadır. Durağanlık birim kökün olup olmadığını araştıran Dickey-Fuller Testi ile test edilebilmektedir. Testin gerçekleştirilebilmesi için öncelikle aşağıdaki modellerden biri oluşturulmaktadır⁶⁹:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.47)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.48)$$

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t \quad (2.49)$$

Yukarıdaki üç denklem arasındaki farklılıklar a_0 sabiti ve $a_2 t$ trend teriminden kaynaklanmaktadır. $\gamma = (\rho - 1)$ eşitliğindeki ρ 'nin 1'e eşit olması yani γ 'nin 0'a eşit olması birim kök sorununun (durağan olmama durumunun) varlığını göstermektedir. Birim kökün araştırılmasında oluşturulan hipotezler şöyledir:

$$H_0 : \gamma = 0 \text{ (Birim kök var)}$$

$$H_1 : \gamma \neq 0 \text{ (Birim kök yok)}$$

Geleneksel yolla hesaplanan t istatistiği, Dickey ve Fuller tarafından geliştirilen eşik değerleriyle karşılaştırıldığından τ (tau) istatistiği olarak bilinmektedir⁷⁰. Dickey-Fuller tarafından geliştirilen eşik değerleri yeterli bulunmadığından MacKinnon tarafından büyük

⁶⁸Mason v.d., a.g.e., s. 143.

⁶⁹Enders, a.g.e., s. 221.

ölçüde geliştirilmiştir⁷¹. Dickey-Fuller istatistiği birçok istatistik yazılımında (TSP, Eviews gibi) genellikle MacKinnon değeriyle karşılaştırılmaktadır⁷². τ istatistiğinin mutlak değeri Mac Kinnon değerinin mutlak değerinden büyükse incelenen değişkenin durağan olduğuna (H_0 red) yani birim kök olmadığına dolayısıyla seride otokorelasyon sorunun görülmediğine de karar verilmektedir.

Otokorelasyon olan değişkenler için hesaplanan T^2 istatistik değerlerinin 0'dan uzaklaştıkları ve küçük ancak sürekli proses değişimlerini saptayamadıkları görülmektedir. Çok değişkenli veri kümesinde otokorelasyonun saptanması oldukça güçtür.

Gözlemlerin bağımsızlığı varsayımı (otokorelasyonun olmaması), kontrol diyagramlarının da en temel varsayımlarından biri olduğundan T^2 diyagramının çizilebilmesi için de gözlemlerin bağımsız olması gerekmektedir⁷³. x_{ij} ; $i=1,2,\dots,n$ ve $j=1,2,\dots,p$ olarak tanımlandığında, p değişkenli iki gözlem vektörünün; ($x_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}]$ ve $x_2 = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2p}]$) T^2 istatistikleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁷⁴:

$$T_1^2 = (x_1 - \bar{x})'S^{-1}(x_1 - \bar{x}) \text{ ve } T_2^2 = (x_2 - \bar{x})'S^{-1}(x_2 - \bar{x})$$

x_1 ve x_2 gözlem vektörlerinin birbirinden bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Gözlemler arasında görülebilecek düşük düzeyde bir otokorelasyon bile kontrol diyagramlarının hatalı sonuçlar vermesine neden olabilmektedir. Bir çok araştırmacı otokorelasyon olduğu durumda tek değişkenli kontrol diyagramlarının uygulanmasını

⁷⁰ D.N. Gujarati, çev. Ü. Şenesen, G. Şenesen, **Temel Ekonometri**, İstanbul, Literatür Yayıncılık, 1995, s. 719.

⁷¹ J.G. MacKinnon, "Critical Values of Cointegration Tests", R.e. Engle, C.W.J.Granger; **Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration**, 13. bölüm, Oxford University Pres, New York, 1991

⁷² Gujarati, a.g.e., s. 719.

⁷³ A. Oğuzlar, "Hotelling T^2 Grafiği ve Bir Uygulama", **Uludağ Üniversitesi İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, C. XVII, No:1-2, 1999, s. 1.

⁷⁴ A.J. Hayter, "Multivariate Quality Control Procedures", **Statistical Process Monitoring and Optimization, Statistics, Textbooks and Monographs**, Ed. S.H. Park, G.G. Vining, NewYork, Marcel Dekker Inc., 2000, s. 213.

önermektedir⁷⁵. Otokorelasyon olduğu durumda, uygun bir zaman serisi modeli oluşturularak bu modelin artıklarına (e_t) tek değişkenli kontrol diyagramı uygulanabilmektedir. Artıklara uygulanan kontrol diyagramındaki tüm e_t 'lerin kontrol altında olmaması oluşturulan modelin doğru olmadığını yanlış tanımlandığını göstermektedir. Bu durum otokorelasyon sorununun ortadan kaldırılamadığı anlamına gelmektedir⁷⁶. Zamana bağlı değişken, uygun tek değişkenli kontrol diyagramının seçilebilmesi amacıyla, Şekil 2.2'de, otokorelasyon olup olmaması, nicel veya nitel olması durumuna göre, örnek büyüklüğü belirtilerek sınıflandırılmaktadır.

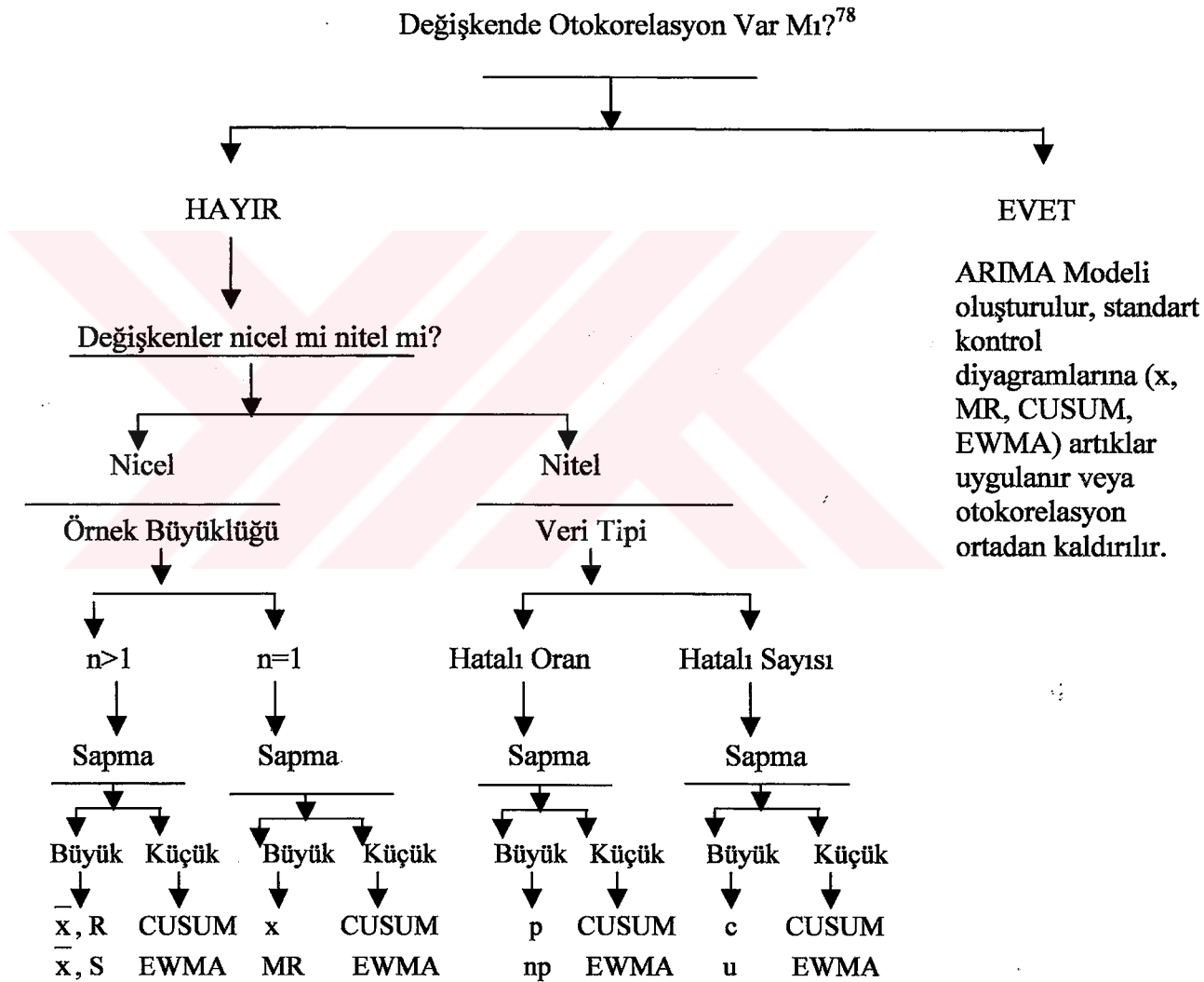
Otokorelasyonlu çok değişkenli veri kümesi için, önerilen diğer bir yaklaşım, otokorelasyonlu değişken(ler)e uygun ARMA modelinin seçilip, değişken(ler)in bağımlı oldukları dönem sayısı kadar gecikmeleri alınarak, veri kümesine gecikmeli değişkenleri eklemektir. Örneğin x_{1t} , x_{2t} , x_{3t} değişkenlerinden oluşan veri kümesinde x_1 otokorelasyonlu olduğu kabul edilsin. x_1 için en uygun modelin AR(1) olduğu varsayıldığında veri kümesine (x_{1t} , x_{2t} , x_{3t}) x_{1t-1} değişkeni eklenmektedir. Yeni oluşan veri kümesiyle (x_{1t} , x_{2t} , x_{3t} , x_{1t-1}) çok değişkenli kontrol diyagramı çizilebilmektedir⁷⁷.

⁷⁵R. Mason, N. D.Tracy, J.C. Young, "Monitoring a Multivariate Step Process", **Journal of Quality Technology**, C:XXIX, No:1, 1996, s. 39.

⁷⁶ D.C. Montgomery, C.M. Mastrangelo "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data", **Journal of Quality Technology**, C:XXIII, No. 3, 1991, s. 180.

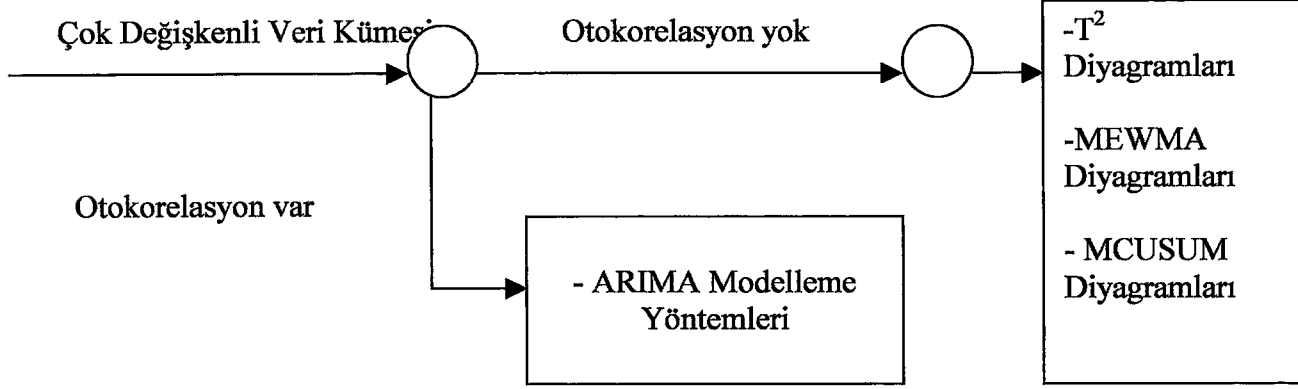
⁷⁷ R.L.Mason, J.C.Young, "A Control Procedure for Autocorrelated Multivariate Processes", **American Statistical Association**, 1997, s. 143-145.

Şekil 2.2: Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Otokorelasyon Durumuna Göre Sınıflandırılması



Çok değişkenli kontrol diyagramları Şekil 2.3'te otokorelasyon durumlarına göre sınıflandırılmaktadır:

Şekil 2.3: Çok Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Otokorelasyon Durumuna Göre Sınıflandırılması



2.4.4 Tutarlı Varyans-Kovaryans Matrisi Tahmini ve Çoklu Doğrusal Bağlantı Olmaması Varsayımı

Tüm çok değişkenli istatistik proses kontrol yöntemlerinin doğru sonuçlar verebilmesi veri kümesinin kovaryans yapısına bağlı olmaktadır. Varyans-kovaryans matrisinin tekil olmaması yani determinantının sıfırdan farklı bir değer almış olması beklenmektedir⁷⁹.

Bilindiği gibi çoklu doğrusal bağlantı; 2 veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki doğrusal korelasyon katsayısının yüksek olması durumudur. Çok değişkenli veri kümesi için hesaplanan varyans-kovaryans matrisinin tekil (yani determinantının 0 olması) veya tekile yakın olmasına neden olmaktadır. Tekil veya tekile yakın bir varyans-kovaryans matrisine sahip veri kümesinden hesaplanacak T^2 istatistiği gerçek değerinden uzaklaşarak proses hakkında yanıltıcı sonuçlar verebilmektedir. Bu özelliğin dışında, çoklu doğrusal bağlantı sorununun en belirgin

işaretleri; bağımsız değişkenlerin varyans ve kovaryanslarının artması, çok sayıda bağımsız değişken olması durumunda çoklu korelasyon katsayısı (R) yüksek ancak bağımsız değişkenlerden çok azının anlamlı veya hepsinin anlamsız çıkması, açıklayıcı değişkenler arasında basit korelasyon katsayısının yüksek ve anlamlı olması, bağımsız değişkenlerin bazılarının teoriye uymayan işarete sahip olması, iki değişken arasındaki basit korelasyonlar anlamlıyken kısmi korelasyon katsayılarının anlamsız olması olarak sıralanabilmektedir. Sorunun ortaya çıkarılmasında birçok yöntem kullanılmaktadır. Klein'in Parmak Hesabı Yöntemi bunlardan biridir. Yöntem uygulanırken her açıklayıcı değişkenin diğer açıklayıcı değişkenlerle regresyonundan elde edilen çoklu korelasyon katsayılarının kareleri ($R_{x_i}^2$, i: kaçınıcı bağımsız değişkenin bağımlı değişken olarak alındığını göstermektedir.), bağımlı değişkenin tüm açıklayıcı değişkenlerle regresyonundan elde edilen çoklu korelasyon katsayısının karesiyle (R_y^2) karşılaştırılmakta herhangi bir $R_{x_i}^2$ 'nin, R_y^2 'den büyük olması durumunda çoklu doğrusal bağlantı olabileceğine karar verilmektedir. Özdeğer ve koşul indeksi yaklaşımının kullanılması durumunda öncelikle koşul sayısının k ($k=En$ yüksek özdeğer(λ_{max})/ En düşük özdeğer(λ_{min})) belirlenmesi gerekmektedir. Koşul indeksi (Kİ), \sqrt{k} 'ye eşittir. Kİ, 10 ile 30 arasındaysa orta veya güçlü, 30'u aşıyorsa ciddi çoklu doğrusal bağlantıdan söz edilebilmektedir⁸⁰. Bu yöntemlerin dışında varyans artış faktörleri (VIF) yaklaşımı çoklu doğrusal bağlantının ortaya çıkarılmasında kullanılan en etkin yöntemdir⁸¹. VIF, tahmini regresyon katsayıları varyanslarının, bağımsız değişkenlerin birbirlerinden bağımsız olması durumuna göre ne kadar arttığını ortaya çıkarmakta ve aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$VIF_i = \left(\frac{1}{1 - R_{x_i}^2} \right)^2 \quad (2.50)$$

⁷⁹ Mason v.d., a.g.e., s. 143.

⁸⁰ Gujarati, a.g.e., s. 338.

⁸¹ Orhunbilge, a.g.e., s. 241.

VIF_i'in 1'e yakın olması, $R_{x_i}^2$ 'nin 0'a yakın olduğunu yani x_i değişkeninin diğer bağımsız değişkenlerle doğrusal ilişkisinin olmadığını göstermektedir. VIF'ler büyüdükçe ciddi bir çoklu doğrusal bağlantı sorunundan söz edilmektedir.

Çoklu doğrusal bağlantı sorununun ortadan kaldırılması amacıyla uygulanan yöntemlerden bazıları aşağıdaki gibidir⁸²:

- Ek verilerle örneğin büyütülmesi
- Bir veya daha çok değişkenin modelden çıkarılması. Ancak bu yaklaşım tanımlama hatasına neden olabilmektedir.
- Birbirleriyle ilişkili iki değişkenin toplamı alınarak tek bir değişken olarak modelde yer alması
- Değişkenlere fark alma işleminin uygulanması. Regresyon analizinde en küçük kareler yönteminin ayarlanmış şekli olan ve taraflı standardize edilmiş regresyon katsayıları tahmin edebilen yanlı regresyon (Ridge Regression) yönteminin kullanılması⁸³
- Birbirinden bağımsız temel bileşenler türeten , Temel Bileşenler Analizi'nin uygulanması

2.4.5 Doğrusallık Varsayımı

Çok değişkenli istatistik yöntemler doğrusal korelasyon temeline dayanmaktadır. İlişkinin derecesi, serpilme diyagramları ile kesin olmamakla birlikte ortaya çıkarılabilmektedir. Doğrusal ilişki göstermeyen değişkenlere dönüşüm

⁸² D.N. Gujarati, *Basic Econometrics*, 3. baskı, Chicago, McGraw-Hill, 1995, s. 339-344.

uygulanarak doğrusallık sağlanabilmektedir. Değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olup olmadığının belirlenmesinde izlenen en kolay yol ikili değişkenler için serpilme diyagramlarının çizilmesidir. Doğrusallığın sağlanabilmesi için çeşitli dönüşümler uygulanabilmektedir⁸⁴. Her iki değişkenin karesinin alınması veya değişkenlerden birinin karesi alınarak diğerinin sırasıyla $\log y$, $-1/y$ ve \sqrt{y} işlemleri uygulanarak doğrusallığa en yakın olan dönüşümün seçilmesi⁸⁵ bu dönüşümlerden birkaçıdır.

2.5 Hotelling T² İstatistiğine Dayalı Diyagramların Çizilmesi

Hotelling T² istatistiğine dayalı diyagramlar incelenen veri kümesinde yukarıda belirtilen varsayımlar sağlandıktan sonra çizilebilmektedir. Diyagramın çizilebilmesi için öncelikle “Geçmiş Veri Kümesi” oluşturulmalı, veri kümesinin birimlerden mi yoksa örneklerden oluştuğu saptanmalıdır. Buna göre T² istatistiğinin ve I., II. Aşama Diyagramlarının ÜKL'nin formülü seçilmelidir.

2.5.1 Geçmişte Kontrol Altında Olan Bir Prosesten Gözlem Değerlerinin Tesadüfi Olarak Seçilmesi

Anakütle parametrelerinin bilinmediği ve proses dışından bir uzman görüşü alınarak hedef değerlerinin belirlenmediği bir durumda, anakütle parametrelerinin; çok değişkenli istatistik yöntemlerin uygulanabilmesi için gerekli olan varsayımları sağlayan aykırı gözlem içermeyen bir veri kümesinden tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu veri kümesi literatürde “Geçmiş Veri Kümesi (Historical Data Set)” veya “Referans Örnek” olarak adlandırılmaktadır⁸⁶. “Geçmiş Veri Kümesi” ile tahmin edilen parametreler, sonradan seçilen örnek(ler)le prosesin kontrol altında olup olmadığının araştırılmasında temel alınmaktadır. Konuyla ilgili literatürde

⁸³ Detaylı bilgi için Bkz. N Orhunbilge, *Uygulamalı Regresyon ve Korelasyon Analizi*, (2002), s. 243.

⁸⁴ Doğrusallığın sağlanması amacıyla gerçekleştirilen dönüşümler s. 109'da detaylı olarak incelenmektedir.

⁸⁵ J.F. Hair v.d., a.g.e., s. 77.

⁸⁶ R.L. Mason, J.C. Young, “Interpretive Features of a T² Chart In Multivariate SPC”, *Quality Progress*, Nisan 2000, s. 85.

“Geçmiş Veri Kümesi” ’nin oluşturulması konusu çok kısıtlı yer almakla birlikte uygulamada prosesin doğru incelenmesini sağlayan en önemli basamak olarak kabul edilmektedir⁸⁷.

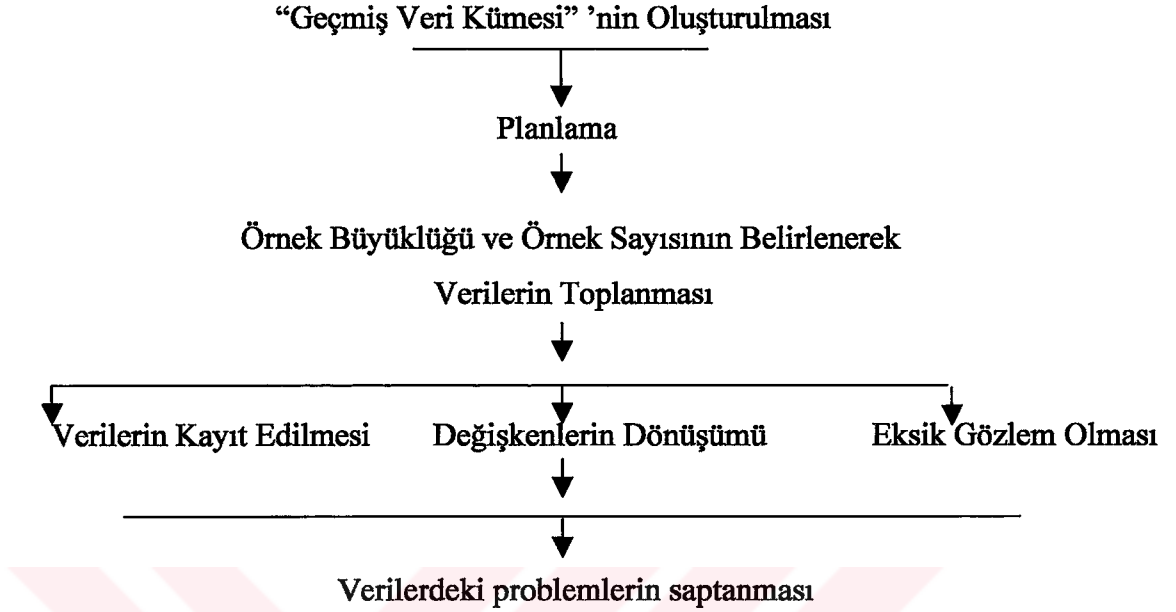
Tek değişkenli durumda olduğu gibi, çok değişkenli proses kontrolde de proses kontrol altındayken elde edilecek “Geçmiş Veri Kümesi” ’ne gereksinim duyulmaktadır. “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin geliştirilmesi I. Aşama olarak bilinmektedir. Seçilen yeni gözlem vektörlerinin I.Aşamadaki bulgulara uygunluğunun araştırılması ise II. Aşamadır⁸⁸. Prosesin kontrol altında olduğunun bilindiği bir durumda, tesadüfi olarak seçilen veri kümesiyle, veri kümesinin dağılımını belirleyen, parametre tahminleri yapılmaktadır. Yapılan bu tahminler başlangıçtaki kontrol sürecinin oluşturulmasını ve aykırı gözlemlerin belirlenmesini sağlamaktadır. Aykırı gözlemler veri kümesinden ayıklandıktan sonra kalan veri kümesi için yeniden parametre tahminleri yapılır ve homojen bir veri kümesi elde edilene kadar aynı süreç tekrarlanır. Tüm aykırı gözlemler veri kümesinden çıkarıldıktan sonra kalan veri kümesinin “Geçmiş Veri Kümesi” olduğu kabul edilmektedir. “Geçmiş Veri Kümesi”, kontrol altındaki prosesin tanımlanmasında temel alınmaktadır. “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin oluşturulabilmesi için proseste hangi değişkenlerin inceleneceğine karar verilmesi, seçilen değişkenlere en iyi dönüşümlerin uygulanması, gözlemlerin zamana bağımlı olup olmadığının araştırılması , değişkenlerin eksik gözlem içerip içermediklerinin incelenmesi ve değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı sorununun araştırılması gerekmektedir.⁸⁹ Şekil 2.4’de “Geçmiş Veri Kümesi” oluşturmak amacıyla prosesten elde edilen ham veri kümesine uygulanan işlemler gösterilmektedir.

⁸⁷ E.B. Martin, A.J. Morris, C. Kiparissides, “Manufacturing Performance Enhancement Through Multivariate Statistical Process Control”, **Annual Reviews in Control**, C.XXIII, 1999, s. 36.

⁸⁸ N.D.Tracy, J. C. Young, R.L. Mason, “Multivariate Control Charts for Individual Observations”, **Journal of Quality Technology**, C. XXIV, No: 2, 1992, s. 89.

⁸⁹ R.L. Mason, Y.M. Chou, J.C. Young, “Applying Hotelling’s T^2 Statistic to Batch Processes”, **Journal of Quality Technology**, C.XXXIII, No:4, 2001, s. 467.

Şekil 2.4: “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin Oluşturulması Aşamaları



2.5.1.1 Planlama

Sanayideki prosesler, proses girdileri, prosesin kendisi ve proses çıktısı olmak üzere 3 bölümden oluşmaktadır. Her bölümde kontrol edilebilen ve kontrol edilemeyen değişkenler bulunmaktadır. Prosesin kontrolü bölüm bölüm ya da bir bütün halinde gerçekleştirilebilmektedir. Proses kontrolünün etkin bir şekilde uygulanabilmesi, proses hakkında bilgili olmayı gerektirmektedir. Planlama aşamasında, prosesin tüm bölümlerine veya uygulama yapılacak bölüme ait değişkenler belirlenmekte ve prosesin işleyişi Akış Diyagramı (Flow-Chart) veya Proses Haritası (Process Mapping) ile gösterilmektedir. Akış diyagramı çalışanlara veya çalışma takımına prosesin daha iyi anlaşılması konusunda yardımcı olmaktadır. Proses haritası ise proses hakkında daha detaylı bilgiler içermekte, çalışanların veya çalışma takımlarının prosesi anlamasını sağlamakta, gelişmesi için fırsatların değerlendirilmesi konusunda yol göstermektedir⁹⁰.

⁹⁰ J.S. Oakland, *Statistical Process Control, A Really Practical Guide*, 3. baskı, Londra, Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1996, s. 29.

2.5.1.2 Örnek Büyüklüğü, Örnek Sayısının Belirlenmesi ve İlk Verilerin Toplanması

Çok değişkenli veri kümesinde, anakütle parametrelerinin bilinmemesi durumunda, \bar{X} ve Σ , tesadüfi olarak seçilen örneklerden tahmin edilmektedir. X_1, X_2, \dots, X_p olmak üzere p tane tesadüfi değişken ile çalışıldığında; p tane \bar{X} , p tane σ^2 , $\left[\frac{p(p-1)}{2} \right]$ tane σ_{ij} ($i \neq j$ olmak üzere $i=1,2,\dots,p$) toplam $2p + \left[\frac{p(p-1)}{2} \right]$ tane parametre tahmin edilmektedir⁹¹. Örneğin 3 değişkenli bir proseste tahmin edilecek parametre sayısı buna göre 9'dur. Doğru parametre tahminlerinin yapılabilmesi için öncelikle prostesten tesadüfi olarak seçilecek ilk örnek birim sayılarının (n) ve örnek sayısının (m) yeterince büyük olması gerekmektedir. Çok değişkenli analizlerin uygulanabilmesi için $n > p$ koşulu aranmakta ve n birimlik en az 20 örneğin çekilmesi önerilmektedir. Örnek büyüklüğünün belirlenmesi konusunda kesin kurallar bulunmamaktadır. Ancak örnek büyüklüğü arttıkça ortalamadaki sapmaları gösteren diyagramların kontrol limitleri anakütle parametrelerinin bilindiği durumda hesaplanan kontrol limitlerine yaklaştığı görülmektedir. Bunun nedeni büyük örneklerin çekildikleri anakütleyi doğal olarak daha iyi temsil etmeleridir. Özellikle örnekten hareketle çizilen T^2 - diyagramlarının, χ^2 diyagramlarının kontrol limitlerine yakın değerler elde edebilmek için $p=3$ ve $n=5$ için örnek sayısının 200 ($m=200$), $p=6$ ve $n=5$ için en az 400 ($m \geq 400$), $p=10$ ve $n=5$ için 600 ($m=600$) olması önerilmektedir⁹². Doğal olarak örnek büyüklüğü arttıkça kontrol maliyeti de artmaktadır. Örnek büyüklüğünün prosese sağlayacağı fayda ile kontrol maliyetleri arasındaki denge göz önünde bulundurularak büyüklük belirlenmelidir. Prosesin hedef değerlerinden sapmadığı veya istenmeyen sapmaların en aza indirildiği durum, "kontrol altındaki durum" olarak tanımlanmaktadır. Örnekler, prosesin kontrol altında olduğu kabul edilerek seçilmektedir. Örnek seçme sıklığının belirlenmesi konusunda genel bir kural bulunmamaktadır. Ancak proses kontrolüne başlarken daha sık örnek çekilmesi önerilmekte ve önerilen bu örnek

⁹¹ Mason, Young, a.g.e., s. 47.

⁹² G.Nedumaran, J.J. Pignatiello, "On Constructing T^2 Control Charts for Online Process Monitoring", IIE Transactions, C. XXXI, 1999, s. 533-534.

büyükliklerinin Lowry, Montgomery (1995) çalışmasında önerilenlerden daha etkin olduğu iddia edilmektedir⁹³.

Genellikle prosesten tesadüfi olarak seçilen örneklerin büyüklükleri aynıdır ve literatürde bu durum “Sabit Örnek Büyüklüğü” (Fixed Sample Size) olarak adlandırılmaktadır.⁹⁴ Ancak bazı proseslerde n_1 ve n_2 olmak üzere iki ayrı örnek büyüklüğü (n_2) n_1) kullanılmaktadır. Bu durumda w ile tanımlanan ve $0 < w < \text{ÜKL}$ koşulunu sağlayan bir eşik değeri proses uzmanları tarafından belirlenmektedir. Eşik değeri örnek büyüklüğünün ne zaman n_1 ’den n_2 ’ye geçilmesi gerektiğini belirtmektedir. i . örneğin büyüklüğü T_{i-1}^2 değerine bağlıdır. Eğer $T_{i-1}^2 < w$ ise i . grubun örnek büyüklüğü n_1 , $w < T_{i-1}^2 < \text{ÜKL}$ ise n_2 olarak alınmaktadır. Bu yaklaşım, daha çok prosesin ortalama değerinin sıklıkla değiştiği alanlarda kullanılmaktadır⁹⁵.

2.5.1.3 Verilerin Kayıt Edilmesi

Verilerin kayıt edilmesi, elle tutulan kayıtlar ve elektronik kayıtlar olmak üzere 2 şekilde gerçekleştirilmektedir. Her iki kayıt şeklinde de bir takım hatalar oluşabilmektedir. Elle tutulan kayıtlarda, en sık görülen hatalar; örnek numarasının (periyodun) kaydırılması, ölçümün yanlış kayıt edilmesi veya ölçümün kayıt edilmesinin unutulması şeklinde ortaya çıkmaktadır. Kayıtın unutulması veri setinde eksik gözlemlerin olmasına neden olmaktadır. Elektronik kayıt, prosesten belirli periyotlarla tesadüfi olarak gözlem vektörü seçilerek elde edilen ölçümlerin elektronik olarak kayıt edilmesi şeklinde gerçekleştirilmektedir. Bu tür kayıtlarda, periyotlarda sapmaların olması en sık rastlanan hata türüdür.

⁹³Oakland, a.g.e., s. 123-124.

⁹⁴F. Aparisi, “Hotelling’s T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes”, *International Journal of Production Research*, C.XXIV, No:10, 1996, s. 2854.

⁹⁵F. Aparisi, a.g.e., s. 2856.

2.5.1.4 Eksik Gözlemlerin (Missing Value) Tahmin Edilmesi

Tek değişkenli çalışmalarda olduğu gibi çok değişkenli çalışmalarda da eksik verilere sıkça rastlanmaktadır. İncelenen veri kümesinde bulunan eksik verilerin tesadüfi dağılıp dağılmadıkları⁹⁶ ve ne miktarda oldukları önem taşımaktadır⁹⁷. Eksik veriler, tesadüfi dağılmıyorsa ve miktarı önlem almayı gerektirecek kadar fazla ise uygulanan istatistiki yöntemlerin sonuçları yanlış olabilmektedir. Eksik gözlem miktarının fazla olması aynı zamanda bilgi kaybına da neden olmaktadır. Uygulamada eksik gözlemlerin tesadüfi faktörler sonucu oluştuğu kabul edilmektedir. Herhangi bir gözlem vektörünün veya değişkenin eksik gözlem değerlerine sahip olması durumunda eksik gözlem sorununun giderilmesine yönelik çeşitli yaklaşımlar bulunmaktadır. Bunlar arasında en basit olanı, ilgili gözlem vektörü veya değişkenin veri kümesinden çıkarılmasıdır. Bu yaklaşım sıklıkla çözüm yolu olarak kullanılmaktadır. Diğer bir yöntem ise, değer atama yöntemleri ile eksik gözlem değerlerinin tahmin edilmesidir. En sık kullanılan tahmin yöntemleri aşağıda kısaca verilmektedir⁹⁸:

- Eksik gözlem ile tam gözlemin yer değiştirilmesi; Örnekte olmayan ancak eksik gözlem değeri içeren gözlem vektörüne benzeyen bir gözlem vektörünün, eksik gözlem vektörü yerine atanması ile uygulanır.
- Eksik gözlem ile ortalamanın yer değiştirilmesi; Değişkenlere ilişkin tam gözlemlerin ortalama değerinin, eksik gözlemlere atanması ile gerçekleştirilmektedir. En sık kullanılan yöntemlerden biridir. Ancak eksik gözlemlerin her birine aynı değer atandığından değişkenlerin gerçek dağılımlarından uzaklaşmalarına neden olabilmektedir.

⁹⁷ Martin, Morris, Kiparissides, a.g.e., s. 36.

⁹⁸ Alpar, a.g.e., s. 110.

- Hot Deck atama yöntemi; eksik gözlem vektörüne benzeyen gözlem vektörleri kümesi örnekten belirlenir ve bu kümeden tesadüfi olarak seçilen gözlem vektörü, eksik gözlem vektörünün yerini alır.
- Cold Deck atama yöntemi; dış kaynaklardan elde edilen sabit bir değer, ilgili değişkenin tüm eksik değerleri yerine atanır. Bu yöntemin eksik gözlem ile ortalamanın yer değiştirmesi yönteminden tek farkı atanacak değer in ortalama yerine belirlenen bir sabit sayının olmasıdır.
- Regresyon atama yöntemi; Bir değişkende yer alan eksik gözlemler, regresyon analizi yardımıyla tahmin edilir. Regresyon atama yönteminde bağımlı değişken eksik gözlem değerleri içeren değişken, bağımsız değişkenler ise diğer değişkenlerdir. Bu yöntemin eksik veri sayısının çok fazla olmadığı ve değişkenliğin fazla olduğu durumlarda uygulanması önerilmektedir.

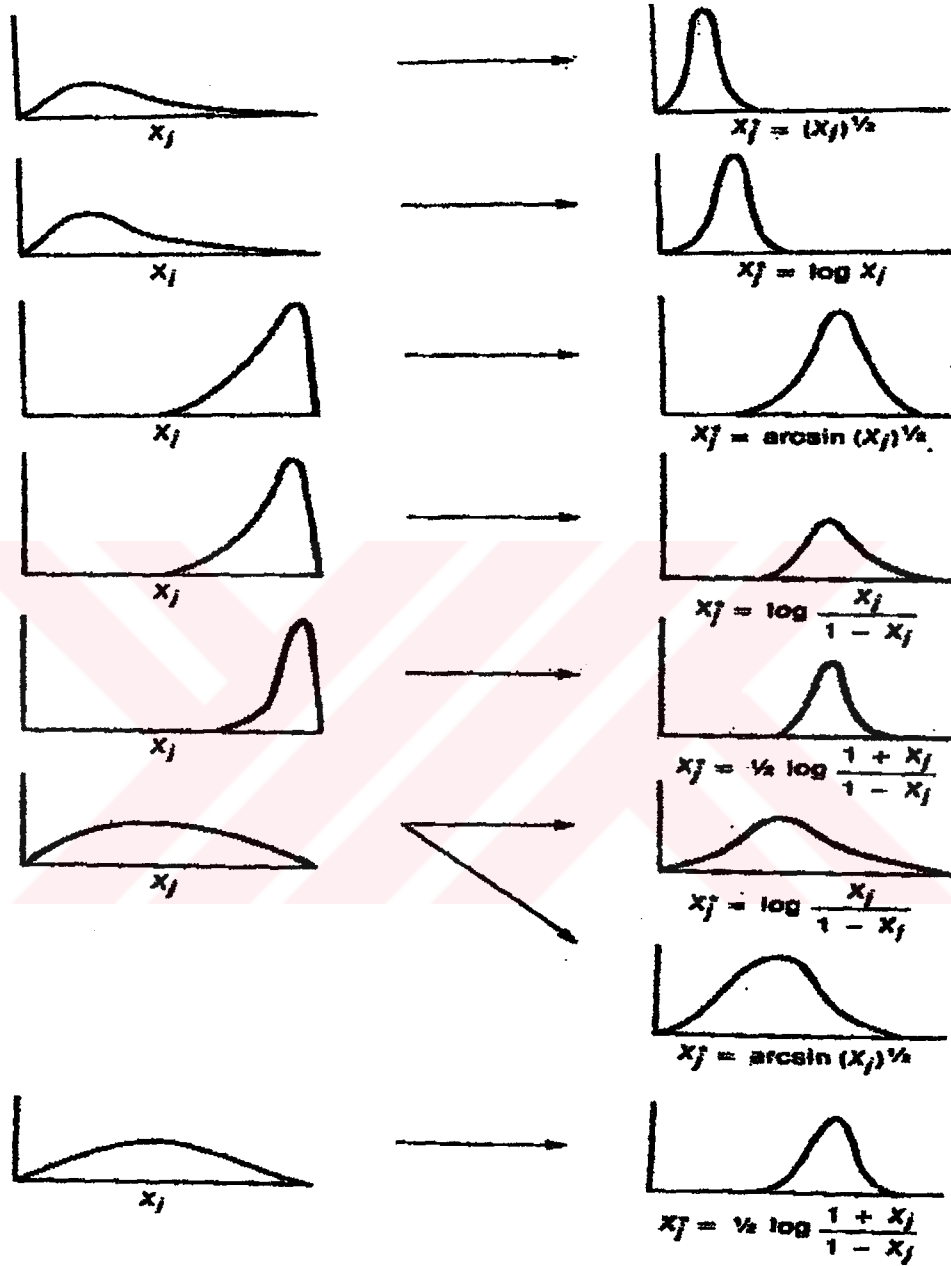
2.5.1.5 Değişkenlere Dönüşüm Uygulanması

Birçok istatistik yöntemin uygulanabilmesi değişkenler arasındaki bağımsızlık (tesadüfilik), doğrusallık, normallik, eş varyanslılık varsayımlarının sağlanmasına bağlıdır. Ancak bu varsayımlar her zaman sağlanamamaktadır. Varsayımların sağlanabilmesi amacıyla değişkenlere bazı dönüşümler uygulanabilmektedir.

Normalliğin sağlanabilmesi, için gerçekleştirilecek dönüşümler değişkenin çarpıklığına ve basıklığına bağlı olarak sınıflandırılabilir⁹⁹. Bu durum Grafik 2.3'de gösterilmektedir.

⁹⁹ J. Stevens, *Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences*, 3. baskı, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates. Inc., 1996, s. 246.

Grafik 2.3 Normallik İçin Uygulanan Dönüşümler



Sağa çarpık ve basık bir değişkene (X), karekök ($X^* = \sqrt{X}$) veya logaritmik dönüşüm ($X^* = \log X$) uygulanarak daha normal bir görünüm elde edilebilmektedir. Sola çarpık ve sivri bir değişkene ise (X), ($X^* = \arcsin \sqrt{x}$), ($X^* = \log \frac{X}{1-X}$),

$(X^* = 1/2 \log \frac{1+X}{1-X})$, $(X^* = X^2)$, $(X^* = \sqrt{X})$ dönüşümleri değişkenin normale yakın dağılmasını sağlamaktadır. Bunların dışında basık ve hafif sağa çarpık olan bir değişkene hiperbolik dönüşüm $(1/X)$ uygulanarak normale yakın bir dağılım elde edilebilmektedir¹⁰⁰.

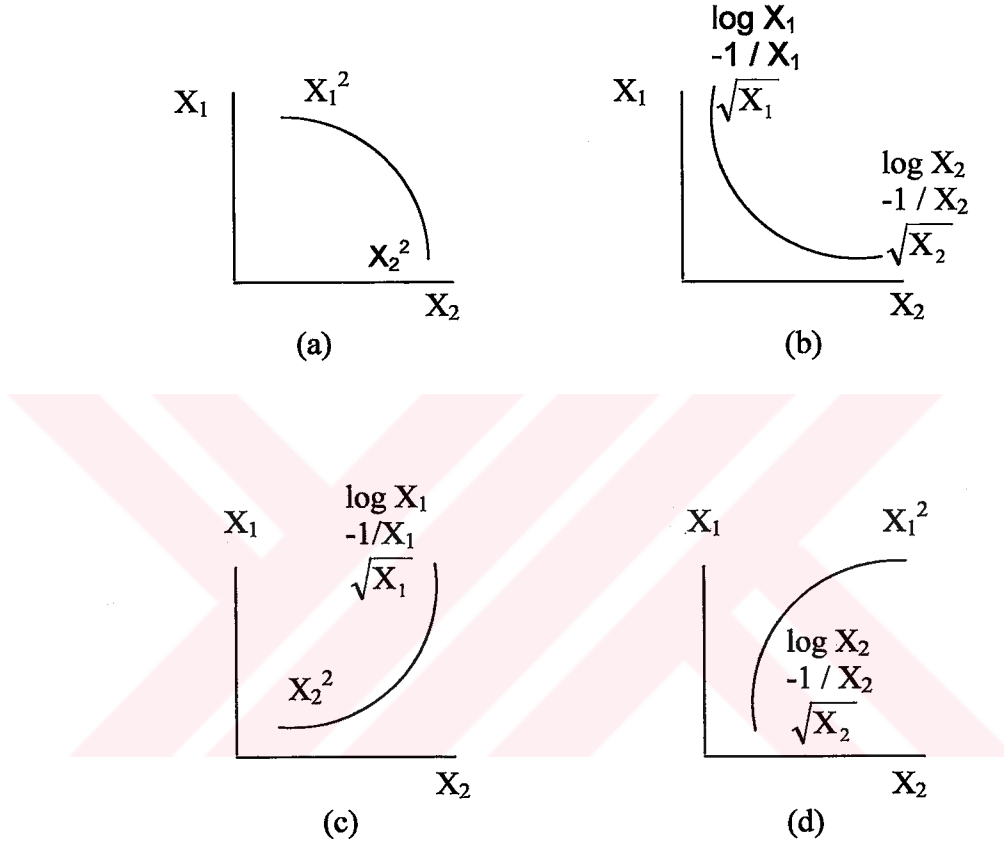
Değişkenlerin durağan varyansa sahip olabilmeleri için logaritmik dönüşüm uygulanabilmektedir. Logaritmik dönüşüm negatif sayıların logaritması alınamayacağından pozitif değerli değişkenlere uygulanabilmektedir. Ancak tüm negatif değerleri pozitif yapacak bir sabit sayı değişkenin değerlerine eklenerek bu sorun giderilebilmektedir. Varyansın durağanlaştırılması amacıyla uygulanan diğer bir dönüşüm hiperbolik $(1/X)$ dönüşümdür. Hiperbolik dönüşüm uygulandığında değerlerin tersi sıfıra yakın olacağından, çok büyük değerlerin etkisi azalmaktadır. Değişkenin karesinin alınması da varyansın durağanlaştırılmasına yardımcı olabilmektedir.

Değişkenler arasındaki serpilme diyagramları incelendiğinde doğrusal bir görünümün dışında oluşabilecek doğrusal olmayan ilişkiler genel olarak dört gruba ayrılarak incelenebilmektedir¹⁰¹. Gruplar önerilen dönüşümler belirtilerek Grafik 2.4'de gösterilmektedir.

¹⁰⁰ J.F. Hair v.d, **Multivariate Data Analysis**, 5. baskı, Prentice Hall, New Jersey, 1998, s. 77.

¹⁰¹ Hair v.d., **a.g.e.**, s. 77.

Grafik 2.4 Doğrusal Olmayan İlişkilerin Doğrusal Hale Getirilmesi İçin Önerilen Dönüşümler



Değişkenlerin değerleri oran ise normalliğin sağlanabilmesi için logit dönüşümünün uygulanması $\left[\text{Logit}(p) = 0.5 \text{Log} \left(\frac{p}{1-p} \right) \right]$, varyansın durağanlığının sağlanabilmesi için ise arcsin dönüşümünün ($X^* = \arcsin \sqrt{x} = \text{Sin}^{-1} \sqrt{x}$) uygulanması önerilmektedir¹⁰². Değişkenlerin değeri korelasyonlar ise değişkeni normalleştirmek için Fisher Z Dönüşümü $\left[\text{FisherZ} = 0.5 \text{Log} \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \right]$ kullanılmaktadır¹⁰³.

¹⁰² A.S. Albayrak, Türkiye'de İllerin Sosyo-Ekonomik Gelişmişlik Düzeylerinin Çok değişkenli İstatistik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, İstanbul, 2003, s. 57.

¹⁰³ S.Sharma, Applied Multivariate Techniques, U.S.A., John Wiley&Sons, Inc., 1996, s. 383.

2.5.2 I. Aşama'da T² Diyagramının Çizilmesi

I. Aşama diyagramları aykırı gözlemlerin veri kümesinden çıkarılmasını temel almakta ve “başlangıç aşaması” olarak da bilinmektedir.

Bilindiği gibi kontrol diyagramının çizilebilmesi doğru bir hipotezin red edilme olasılığı olan 1. tip hatanın (α) belirlenmesine bağlıdır. Proses kontrolünde α , proses kontrol altındayken, kontrol dışındaymış gibi görünme olasılığıdır. I Aşamada α , II. Aşamaya göre daha küçük seçilmektedir¹⁰⁴. I. tip hatanın küçük seçilmesi, veri kümesi aykırı gözlemlerden arındırılırken yapılabilecek hatanın olasılığını azaltmaktadır. Proseslerde aykırı gözlemlerin arındırılması, tek değişkenli ve çok değişkenli kontrol diyagramlarının yardımıyla gerçekleştirilebilmektedir.

Tek değişkenli durumda x gözleminin aykırı gözlem olup olmadığının belirlenebilmesi için oluşturulan hipotezler aşağıdaki gibidir:

$$H_0: X \sim N(\bar{X}, \sigma^2)$$

$$H_1: X \sim N(\bar{X}+d, \sigma^2)$$

H_0 hipotezinde, incelenen gözlemin ortalaması \bar{X} ve varyansı σ^2 olan normal bir anakütleden geldiği varsayılırken, H_1 hipotezinde, ortalaması $(\bar{X}+d)$, varyansı σ^2 olan normal bir anakütleye sahip olduğu kabul edilmektedir. d ortalamadaki değişim miktarı olarak tanımlanmaktadır.

Hangi hipotezin kabul edileceğine karar verebilmek için tek değişkenli kontrol diyagramları çizilerek alt ve üst kontrol limitleri hesaplanmaktadır. İncelenen x gözlemi, kontrol limitlerinin dışında ise aykırı gözlem olduğuna karar verilmekte

¹⁰⁴G.Scepi, “Parametric and Non Parametric Multivariate Quality Control Charts”, Ed. C.Lauro, J.Antoch, V.E. Vinzi, G. Saporta **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, , Almanya, Physica-Verlag, 2002, s. 165.

ve değişikenden çıkarılarak işleme devam edilmektedir. Yani H_0 hipotezi red edilmektedir.

Çok değişkenli durumda ise, hipotezler aşağıdaki gibidir:

$$H_0: X_i \sim N(\bar{X}, \Sigma)$$

$$H_1: X_i \sim N(\bar{X} + d_i, \Sigma) \quad i=1,2, \dots, m$$

d_i : i.gözlem vektörü için ortalama vektöründeki bilinen değişim miktarıdır.

Tek değişkenli durumda, aykırı gözlemin saptanması sadece ortalamadaki sapmanın miktarına (d 'ye) bağlı iken çok değişkenli durumda hem ortalama vektöründeki sapma miktarına hem de değişkenler arasındaki korelasyon yapısından dolayı varyans-kovaryans matrisine (Σ) bağlı olmaktadır¹⁰⁵.

Çok değişkenli durum için oluşturulan hipotezler, T^2 diyagramı yardımıyla test edilebilmektedir. Daha öncede belirtildiği gibi I.Aşama'da T^2 diyagramının çizilme amacı, veri kümesinin ortalamasından aşırı uzakta olan gözlemlerin (aykırı gözlemlerin) saptanıp, veri kümesinden çıkarılmasıdır. Gözlem vektöründe meydana gelen herhangi bir değişim, T^2 istatistiğine artış olarak yansıdığından, aykırı gözlem değeri uygun dağılıma göre hesaplanan ÜKL'yi aşan değer olarak tanımlanmaktadır.

Çok değişkenli veri kümesinin aykırı gözlemlerden arındırılması, anakütle parametrelerinin bilinmediği ve bilindiği durum olmak üzere ayrı ayrı incelenmektedir.

¹⁰⁵ Y.M. Chou, R. L. Mason, J.C. Young, " Power Comperasions for a Hotelling's T^2 Statistic", *Commun. Statist-Simula.*, C.XXIX, No:4, 1999, s. 1037.

Anakütle parametreleri bilinmiyorsa ve veri kümesi örnek ortalamalarından oluşuyorsa \bar{x} ve S, veri kümesinden tahmin edilmektedir. Bu durumda daha öncede değinildiği gibi I. Aşama için hesaplanan T^2 değerleri β dağılımı göstermektedir. İncelenen x_i gözlem vektörü için hesaplanan T_i^2 , $\text{ÜKL} = [(n-1)^2 / n] \beta_{[\alpha;p/2,(n-p-1)/2]}$ değeri ile karşılaştırılmaktadır¹⁰⁶. $T_i^2 > \text{ÜKL}$ olması durumunda i . gözlem vektörü, veri kümesinden çıkarılarak kalan veri kümesinden (n-1 ile çalışılarak) \bar{x} ve S yeniden tahmin edilmektedir. Her i vektörü için yeniden tahmin edilen \bar{x} ve S'e göre T_i^2 değerleri hesaplanarak $\text{ÜKL} = [(n-1)^2 / n] \beta_{[\alpha;p/2,(n-p-1)/2]}$ değeriyle karşılaştırılmaktadır. Aykırı gözlem olduğuna karar verilen gözlem vektörleri tekrar veri kümesinden çıkarılmakta ve bu işlem aykırı gözlem kalmayınca kadar devam etmektedir. Tüm aykırı gözlemlerden arındırılmış veri kümesi, "Geçmiş Veri Kümesi" 'ni oluşturmaktadır.

Anakütle parametrelerinin bilinmesi durumunda, aykırı gözlemlerin belirlenmesi T^2 yerine χ^2 istatistiklerinin hesaplanmasıyla gerçekleştirilmektedir. Çizilen χ^2 diyagramında ÜKL , p değişken sayısı olmak üzere $\chi^2_{(\alpha,p)}$ değerine eşittir. Aykırı gözlemlerin saptanması konusunda anakütle parametresinin bilinmediği duruma göre tek fark ÜKL değerinin hesaplanış şeklindedir. $n \rightarrow \infty$ 'a yaklaştığında β dağılımı ile hesaplanan ÜKL_β , χ^2 dağılımı ile hesaplanan ÜKL_χ^2 'ye yaklaşmaktadır. Veri kümesinin dağılımı bilinmediğinde Chebyshev eşitsizliği kullanılarak da aykırı gözlemlerden arındırma işlemi yapılabilir.

¹⁰⁶ Tracy, Young, Mason, a.g.e., s. 90.

2.5.2.1 Örnek Büyüklüğü Bir (n=1) Olan m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda I. Aşama T² Diyagramının Çizilmesi

I.Aşamada, m tane örneğin herbirinin örnek büyüklüğü bir (n=1) ise ve anakütle parametreleri bilinmiyorsa T² istatistiği [T² = (x - \bar{x})'S⁻¹(x - \bar{x})] aşağıdaki gibi bir β dağılımı göstermektedir.

$$T^2 \sim \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{(p/2, (m-p-1)/2)} \quad (2.51)$$

Bu aşamada çizilecek diyagramın alt kontrol limiti (AKL) ve üst kontrol limiti (ÜKL) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır¹⁰⁷:

$$AKL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{(1-\alpha/2, p/2, (m-p-1)/2)} \quad (2.52)$$

$$ÜKL = \frac{(m-1)^2}{m} \beta_{(\alpha/2, p/2, (m-p-1)/2)} \quad (2.53)$$

β ve F dağılımı arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde tanımlanabilmektedir:

$$\frac{[p/(m-p-1)] F_{(\alpha, p/2, (m-p-1)/2)}}{1 + [p/(m-p-1)] F_{(\alpha, p/2, (m-p-1)/2)}} = \beta_{(\alpha, p/2, (m-p-1)/2)} \quad (2.54)$$

Bu ilişki ile hesaplanan kontrol limitleri aşağıdaki şekle dönüşmektedir:

$$AKL = \frac{(m-1)^2}{m} \times \frac{[p/(m-p-1)] F_{(1-\alpha/2, p/2, (m-p-1)/2)}}{1 + [p/(m-p-1)] F_{(1-\alpha/2, p/2, (m-p-1)/2)}} \quad (2.55)$$

¹⁰⁷ Tracy, Young, Mason, a.e., s. 90.

$$\dot{U}KL = \frac{(m-1)^2}{m} \times \frac{[p/(m-p-1)] F_{(\alpha/2, p, m-p-1)}}{1 + [p/(m-p-1)] F_{(\alpha/2, p, m-p-1)}} \quad (2.56)$$

T^2 istatistiği kareli bir ifade olduğundan, proses ortalamasındaki artış veya azalış, T^2 istatistik değerinin büyümesine neden olmaktadır. Bu nedenle uygulamada AKL =0 olarak kabul edilmekte ve hesaplamalarda her zaman gözardı edilmektedir¹⁰⁸.

I.Aşamada β dağılımı ve F dağılımı ile hesaplanan $\dot{U}KL$ 'ler oldukça farklı sonuçlar vermektedir (genellikle $\dot{U}KL_F > \dot{U}KL_\beta$ sonucu elde edilir). Farklılık örnek sayısı (m) azaldıkça artmaktadır¹⁰⁹.

2.5.2.2 Örnek Büyüklüğü Birden Fazla Olan (n>1) m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda I. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi

n>1 büyüklüğünde m tane örnek çekildiğinde her örneğin ortalaması \bar{x}_j , j=1,2,...,m olarak tanımlanmaktadır. Anakütle parametreleri bilinmediğinde m tane örnekte T^2 istatistiklerinin hesaplanabilmesi için $(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})$ vektörü ve S_p matrisinin elde edilmesi gerekmektedir. $T^2 = n(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})' S_p^{-1} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})$ olarak hesaplanan T^2 istatistiğinin $\dot{U}KL$ 'si ise;

$$\dot{U}KL = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1) - p + 1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (2.57)$$

şeklindedir¹¹⁰. n>1 olduğu durumda T^2 istatistikleri F dağılımı göstermektedir.¹¹¹

¹⁰⁸ D. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4. baskı, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001, s. 517.

¹⁰⁹ Tracy, Young, Mason, *a.g.e.*, s. 93.

¹¹⁰ F. B. Alt, "Multivariate Quality Control: State of Art", *ASQC Annual Quality Congress Transactions*, 1982, s. 890.

¹¹¹ Ryan, *a.g.e.*, s. 218.

Statgraphics¹¹² programı yardımıyla I. Aşama diyagramları ($n > 1$ durumu için) çizildiğinde temel alınan ÜKL'nin, Jackson'un II. Aşama diyagramları için önerdiği kontrol limiti¹¹³ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla yanlış sonuçlar elde edilebilmektedir¹¹⁴.

Bu yaklaşımın dışında veriler n büyüklüğünde m tane örnekten oluştuğunda ve tüm verilerin aynı dağılımı gösterdiği kabul edildiğinde, $n=1$ durumu için hesaplanan S matrisinin S_p matrisinden daha etkin bir tahmin edici olduğu iddia edilmektedir¹¹⁵. Bu nedenle T^2 istatistiği;

$$T^2 = n(\bar{x}_j - \bar{x})' S^{-1} (\bar{x}_j - \bar{x}) \quad (2.58)$$

$$\text{ÜKL} = \frac{(mn-1)(m-1)}{n} \beta_{\alpha, (p/2, (mn-p-1)/2)} \quad (2.59)$$

formülleri kullanılarak da uygulanabilmektedir. Sınırlı gözlem sayısı olduğunda S matrisinin yerine S_p 'nin kullanılması önerilmektedir. Ancak verilerin aynı dağılımı göstermediği durumlarda S_p 'nin kullanımı daha etkindir¹¹⁶.

m tane örnekten k tanesinin T^2 istatistikleri ÜKL ise k tane örnek veri kümesinden çıkarılarak \bar{x} ve S_p , $(m-k)$ tane örnekten hesaplanmaktadır. Yeniden hesaplanan T^2 değerleri aşağıdaki ÜKL ile karşılaştırılır¹¹⁷:

¹¹² T^2 diyagramının çizilebileceği diğer programlar için bakınız s. 124.

¹¹³ Bkz. s. 117.

¹¹⁴ C.A. Lowry, D.C. Montgomery, "A review of multivariate control charts", *IIE Transactions*, C.XXIII, No: 6, 1995, s. 806.

¹¹⁵ Alt, a.g.e., s. 886-893.

¹¹⁶ C. Fuchs, R.S. Kennett, *Multivariate Quality Control- Theory and Applications*, U.S.A., Marcel Dekker, 1998, s. 56.

¹¹⁷ N.Niang, "Multidimensional Methods for Statistical Process Control: Some Contributions of Robust Statistics", Ed. C.Laura, J. Antoch, V.E. Vizi, G. Sapota, *Multivariate Total Quality Control Foundations and Recent Advances*, 2002, s. 143.

$$\dot{U}KL = \frac{(m-k-1)(n-1)p}{n(m-k)-(m-k)-p+1} F_{p,n(m-k)-(m-k)-p+1,\alpha} \quad (2.60)$$

Ancak kontrol altında olmayan örnekler procesten çıkarıldıktan sonra kalan her örneğin ortalamasının genel ortalamaya eşitliğinin testi dikkatlice yapılmalıdır. Çünkü proceste halen var olabilecek merkezden uzak gözlemler prosesin genel ortalamasını ve varyans-kovaryans matrisini etkileyebilmektedir. Bu durum daha sonra seçilecek örnekler için yapılacak testlerin yanlış sonuçlar vermesine neden olabilmektedir.

2.5.3 II.Aşama'da T^2 Diyagramının Çizilmesi

II.Aşamada prosesin kontrol süreci başlamaktadır. “Geçmiş Veri Kümesi” ’nden tahmin edilen anakütle parametreleri temel alınarak procesten tesadüfi olarak seçilen “yeni” gözlem vektörlerinin kontrol altında olup olmadığı belirlenmektedir. I. Aşamaya göre en büyük farklılık kontrol limitlerinin belirlenmesi amacı ile kullanılan dağılımlardadır. II. Aşamada T^2 diyagramının çizilmesi de, $n=1$ ve $n>1$ durumları için incelenmektedir.

2.5.3.1 Örnek Büyüklüğü Bir ($n=1$) Olan m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda II. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi

II. Aşamada \bar{X} “Geçmiş Veri Kümesi” yardımı ile tahmin edilen ortalama vektörü olarak tanımlansın. “yeni” gözlemlerin örnek büyüklüğü $n=1$ ise her x vektörünün, tahmin edilen ortalama vektörüne (\bar{x}) eşit olup olmadığı;

$$H_0: \bar{X} = \bar{X}_0$$

$$H_1: \bar{X} \neq \bar{X}_0$$

hipotezi ile test edilmektedir.¹¹⁸

$n=1$ durumunda yeni seçilen gözlem vektörü $\mathbf{x}_{\text{yeni}}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ olarak tanımlansın. Hesaplanacak T^2 istatistiği¹¹⁹;

$$T_{\text{yeni}}^2 = (\mathbf{x}_{\text{yeni}} - \bar{\mathbf{x}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_{\text{yeni}} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (2.61)$$

şeklindedir.

$\bar{\mathbf{x}}$ ve \mathbf{S} “Geçmiş Veri Kümesi”nden tahmin edilen parametrelerdir. II. Aşama T^2 diyagramlarının ÜKL’i F dağılımının bir fonksiyonu olarak hesaplanabilmektedir. Ryan (1989) çalışmasında $n=1$ durumu için II. Aşama diyagramlarının ÜKL’nin aşağıdaki gibi hesaplanmasını önermektedir.¹²⁰

$$\text{ÜKL} = \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} F_{\alpha, p, m-p} \quad (2.62)$$

ÜKL formülündeki m , Aşama I’de kontrol limitlerinin oluşturulması amacıyla çekilen örnek sayısıdır.

Jackson (1985) çalışmasında ise örnek büyüklüğünün bire eşitken ($n=1$) çok sayıda örnek çekildiğinde ÜKL aşağıdaki gibi tanımlamaktadır:

$$\text{ÜKL} = \frac{p(m-1)}{(m-p)} F_{\alpha, p, m-p} \quad (2.63)$$

¹¹⁸ Hipotezde örnek istatistiği yer alamayacağından $\bar{\mathbf{x}}$ yerine anakütle ortalamasını belirten $\bar{\mathbf{X}}$ parametresi kullanılmıştır.

¹¹⁹ J. Young, T. Alloway, R. Schmotzer, “Introduction to Multivariable Statistical Process Control And Its Application In The Process Industries”, NPRA 2000 Computer Conference, Chicago, Illinois, 13-15 Kasım 2000, s. 7.

¹²⁰ T. P. Ryan, *Statistical Methods for Quality Improvement*, New York, John Wiley & Sons, 1989, s. 225.

İncelenen “yeni” gözlem vektörü, ÜKL değerini aştığında proseste kontrol dışı bir durum olduğu anlaşılmaktadır

2.5.3.2 Örnek Büyüklüğü Birden Fazla Olan ($n>1$) m Tane Örneğin Çekilmesi Durumunda II. Aşama T^2 Diyagramının Çizilmesi

($n>1$) olan m tane örneğin, örnek ortalamalarının ($\bar{x}_i, i=1,2,\dots,m$) \bar{X} 'ye eşit olup olmadığı;

$$H_0: \bar{X} = \bar{X}_i$$

$$H_1: \bar{X} \neq \bar{X}_i \quad i=1,2,\dots,m$$

hipotezleri ile test edilmektedir.

Bu durumda T^2 istatistiği ve ÜKL aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır¹²¹:

$$T_{\text{yeni}}^2 = n(\bar{x}_{\text{yeni}} - \bar{x})' S_p^{-1} (\bar{x}_{\text{yeni}} - \bar{x}) \quad (2.64)$$

$$\text{ÜKL} = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn - m - p + 1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \quad (2.65)$$

ÜKL formülündeki m, I. Aşama'da “Geçmiş Veri Kümesi” 'ni oluşturan örnek sayısı, n ise I. Aşamadaki örneklerin birim sayısıdır.

II.Aşama diyagramları kontrol dışında olan gözlem vektörlerini gösterirken kontrol dışı durumun hangi değişkenden kaynaklandığı ve proseste ne zaman ve nasıl müdahale edileceği ile ilgili bilgi vermemektedir. Bu nedenle kontrol dışındaki

¹²¹ Ryan, a.g.e., s. 218.

vektörlere ayrıştırma yöntemleri¹²² uygulanarak sorunun neden(ler)i belirlenmeye çalışılır.

2.5.4 I. Aşama ve II. Aşamada Hesaplanan Kontrol Limitlerinin, χ^2 Dağılımı ile Belirlenen Limitlere Yaklaşması

Uygulamada, anakütle parametrelerinin (\bar{X}, Σ) bilinmediği durumda, I. Aşama ve II. Aşama kontrol diyagramlarında farklı formüllerle hesaplanan ÜKL'leri yerine örnek sayısı 25'den büyük olduğunda χ^2 dağılımına dayanan ÜKL'nin kullanılması tercih edilmektedir¹²³. Ancak bu uygulama, yanlış kontrol limitlerinin elde edilmesine neden olabilmektedir. Hatalı bu yaklaşımın sonuçlara etkisi I. Aşama ($n=1$ ve $n>1$) ve II. Aşama ($n=1$ ve $n>1$) için ayrı ayrı incelenecektir.

Lowry ve Montgomery (1995) çalışmalarında, II. Aşama $n=1$ ve $n>1$ durumları için çeşitli değişken ve örnek sayılarına göre hesaplanan gerçek ÜKL değerlerini, ÜKL olarak kullanılan χ^2 değerleriyle karşılaştırmalı olarak gösteren tablolar (Tablo 2.2-2.3-2.4) düzenlemişlerdir¹²⁴.

¹²² Bu yöntemler 3. bölümde detaylı olarak açıklanmaktadır.

¹²³ D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4. baskı, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001, s. 517.

¹²⁴ Lowry, Montgomery, a.g.e., s. 802.

Tablo 2.2: n=1 Durumu için p=2,3,4,5,10,20;

$$\text{ÜKL} = \frac{(m+1)}{m} p(m-1) / (m-p) F_{0,001,p,m-p}$$

| p | χ^2 | m=20 | m=25 | m=30 | m=50 | m=75 | m=100 | m=150 | m=200 | m=250 |
|-----|----------|----------|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2 | 13,82 | 23,03 | 20,55 | 19,12 | 16,67 | 15,62 | 15,14 | 14,67 | 14,45 | 14,32 |
| 3 | 16,2663 | 30,723 | 26,534 | 23,431 | 20,421 | 18,864 | 18,156 | 17,488 | 17,169 | 16,982 |
| 4 | 18,4669 | 39,621 | 33,027 | 29,532 | 24,082 | 21,934 | 20,974 | 20,080 | 19,655 | 19,408 |
| 5 | 20,515 | 50,3239 | 40,3141 | 35,2714 | 27,7711 | 24,9390 | 23,6955 | 22,5497 | 22,0107 | 21,6976 |
| 10 | 29,5884 | 174,6383 | 101,1845 | 76,0434 | 48,4106 | 40,2955 | 37,0585 | 34,2403 | 32,9644 | 32,2380 |
| 20* | 45,31 | — | 2535,4468 | 467,7077 | 116,3801 | 78,5969 | 66,9283 | 57,9897 | 54,2742 | 52,2426 |

*p=20 olduğunda $\text{ÜKL} = \chi_{\alpha,p}^2$ değerinin gerçekte hesaplanması gereken kontrol limiti olarak kullanılabilmesi için $m > 250$ olması önerilmektedir.

Tablo 2.2 incelendiğinde, değişken sayısı arttıkça χ^2 yaklaşımıyla elde edilen ÜKL'lerinin gerçekte olması gereken kontrol limiti değerlerinden uzaklaştığı görülmektedir. Örneğin değişken sayısının 3, 4 ve 5 olması durumunda χ^2 değerinin, II. Aşamada $n=1$ durumunda hesaplanan ÜKL'ne yakın bir değer alabilmesi için çekilecek örnek sayısının en az 150 ($m \geq 150$), değişken sayısı büyük olduğunda ($p=10-20$) ise, örnek sayısının en az 250 ($m \geq 250$) olması önerilmektedir. II. Aşamada $n > 1$ durumunda χ^2 yaklaşımının oldukça hatalı üst kontrol limitlerinin hesaplanmasına neden olduğu söylenebilmektedir. Bu durum Tablo 2.3 ve 2.4'te örnek büyüklüğünün 5 ve 10 olması durumunda;

$\text{ÜKL} = \frac{p(m+1)(n-1)}{(mn-m-p+1)} F_{0,001,p,mn-m-p+1}$ formülüyle hesaplanan kontrol limitiyle χ_p^2 kritik değerine eşit olan kontrol limiti arasındaki değerlerin farklılığı gösterilerek desteklenmektedir.

Tablo 2.3: n=5 Durumu için p=2,3,4,5,10,20;

$$\hat{ÜKL}=[p(m+1)(n-1)/(mn-m-p+1)]F_{0,001,p,mn-m-p+1}$$

| p | χ^2 | m=20 | m=25 | m=30 | m=50 | m=75 | m=100 | m=150 | m=200 | m=250 |
|----|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2 | 13,82 | 16,0527 | 15,5747 | 15,2650 | 14,6659 | 14,3761 | 14,2337 | 14,0928 | 14,0230 | 13,9812 |
| 3 | 16,2663 | 19,3436 | 18,6758 | 18,2461 | 17,4214 | 17,0258 | 16,8321 | 16,6411 | 16,5463 | 16,4897 |
| 4 | 18,4669 | 22,4475 | 21,5707 | 21,0101 | 19,9430 | 19,4351 | 19,1871 | 18,9433 | 18,8227 | 18,7510 |
| 5 | 20,515 | 25,4732 | 24,3649 | 23,6613 | 22,3320 | 21,7040 | 21,3984 | 21,0986 | 20,9507 | 20,8625 |
| 10 | 29,5884 | 40,7491 | 38,0709 | 36,4273 | 33,4390 | 32,0782 | 31,4279 | 30,7964 | 30,4877 | 30,3044 |
| 20 | 45,31 | 77,5714 | 68,6138 | 63,5347 | 55,0324 | 51,4483 | 49,7949 | 48,2258 | 47,4702 | 47,0261 |

Tablo 2.4: n=10 Durumu için p=2,3,4,5,10,20;

$$\hat{ÜKL}=[p(m+1)(n-1)/(mn-m-p+1)]F_{0,001,p,mn-m-p+1}$$

| p | χ^2 | m=20 | m=25 | m=30 | m=50 | m=75 | m=100 | m=150 | m=200 | m=250 |
|----|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2 | 13,82 | 15,1649 | 14,8865 | 14,7034 | 14,3428 | 14,1652 | 14,0071 | 13,9893 | 13,9456 | 13,9193 |
| 3 | 16,2663 | 18,0328 | 17,6657 | 17,4252 | 16,9526 | 16,7210 | 16,6063 | 16,4919 | 16,4351 | 16,4011 |
| 4 | 18,4669 | 20,6626 | 20,2037 | 19,9032 | 19,3157 | 19,0287 | 18,8869 | 18,7454 | 18,6754 | 18,6338 |
| 5 | 20,515 | 23,1592 | 22,6029 | 22,2402 | 21,5323 | 21,1874 | 21,0172 | 20,8480 | 20,7644 | 20,7143 |
| 10 | 29,5884 | 34,8330 | 33,6963 | 32,9640 | 31,5589 | 30,8843 | 30,5539 | 30,2276 | 30,0664 | 29,9703 |
| 20 | 45,31 | 57,8476 | 54,9686 | 53,1643 | 49,8052 | 48,2399 | 47,4845 | 46,7439 | 46,3813 | 46,1654 |

II. Aşamada örnek büyüklüğünün 10 ve 10'dan büyük olması durumunda ($n \geq 10$), χ^2 kontrol limitinin, II. Aşama için hesaplanan $\hat{ÜKL}$ 'ine yaklaşması için örnek sayısının (m) 50 veya 50'nin altında olması yeterli kabul edilmektedir.

Bilindiği gibi I.Aşamada $n=1$ durumunda, F dağılımına dayanan kontrol limitlerinin hesaplanması kontrol aşamasında hatalı sonuçların elde edilmesine neden olmaktadır. Bu durumda β dağılımına dayanan kontrol limitlerinin hesaplanması tercih edilmektedir¹²⁵. χ^2 yaklaşımıyla hesaplanan üst kontrol limitinin, değişken

¹²⁵Tracy, Young, Mason, (1997), a.g.e., s. 84.

sayısı arttıkça I.Aşamada örnek büyüklüğünün bir ($n=1$) olması durumunda hesaplanan ÜKL'inden uzaklaştığı görülmektedir. Ancak $\chi_{\alpha,p}^2$ değeriyle temsil edilen ÜKL'nin, F dağılımına dayanan kontrol limiti değerine göre gerçekte hesaplanması gereken kontrol limitine daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. I.Aşama $n>1$ durumunda da F dağılımı yaklaşımıyla hesaplanan kontrol limiti yerine $\chi_{\alpha,p}^2$ değeri yaygın olarak kullanılmaktadır¹²⁶.

2.5.5 Güçlü (Robust) T^2 İstatistiklerinin Hesaplanması

$n>1$ olan m tane örnek ile çalışıldığında hesaplanan S_p matrisi prosesin ortalamasında oluşan değişime karşı duyarlı olmamaktadır¹²⁷. Bu nedenle tahmin edilen ortalama vektörünün prosesdeki değişimlere duyarlı olabilmesi için, güçlü (robust) olması gerekmektedir. Proses ortalamasının tahmin edilmesinde çeşitli tahmin ediciler kullanılmaktadır. Bunlardan en sık kullanılanı w - tahmin edicisidir¹²⁸. w -tahmin edicisine göre prosesin ortalaması aşağıdaki adımlar izlenerek hesaplanmaktadır:

$$1- \bar{x}_i, S_p \text{ ve } T_i^2 = (\bar{x}_i - \bar{x})' S_p (\bar{x}_i - \bar{x}) \text{ elde edilir.}$$

2- $w(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$ fonksiyonu tanımlanarak $p_i = w(T_i^2)$ değerleri hesaplanır¹²⁹.

3- Proses ortalamasının güçlü tahmin edicisi aşağıdaki gibidir:

¹²⁶C.A. Lowry, D.C. Montgomery, "A review of multivariate control charts", **IIE Transactions**, C.XXVII, 1995, s. 803.

¹²⁷ Niang, a.g.e., s. 155.

¹²⁸ Güçlü ortalama ve varyans tahmininin yapılabilmesi için birçok (M-, L-, S-, R-,W-) tahmin edici geliştirilmiştir (Bkz. Hampel v.d.(1986)). Bunlardan biri W tahmin edicileridir Tuckey (1970) tarafından geliştirilmiştir.Gözlemlerin ağırlıklandırılmış ortalamaları olarak tanımlanmaktadır (Bkz. N.Niang, "Multidimensional Methods for Statistical Process Control: Some Contributions of Robust Statistics", ed. C.Laura, J. Antoch, V.E. Vizi, G. Sapota, **Multivariate Total Quality Control Foundations and Recent Advances**, 2002, s. 152-153.)

¹²⁹ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$$\hat{\bar{X}} = \bar{x}_r = \frac{\sum_{i=1}^m p_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m p_i} \quad (2.66)$$

Bu durumda T^2 istatistiği;

$$T_r^2 = (\bar{x}_i - \bar{x}_r)' S_p (\bar{x}_i - \bar{x}_r) \quad (2.67)$$

şeklinde formüle edilmektedir. Alt(1973) çalışmasında $\frac{k_1^2 n}{k_3} (\bar{x}_i - \bar{x}_r)' S_p (\bar{x}_i - \bar{x}_r)$

istatistiklerinin $\frac{pm(n-1)}{mn-m-p+1} F_{p, mn-m-p+1}$ şeklinde F dağılımı gösterdiğini belirtmektedir¹³⁰. Dolayısıyla ÜKL;

$$\text{ÜKL} = \frac{pm(n-1)}{mn-m-p+1} F_{p, mn-m-p+1} \quad (2.68)$$

değerine eşittir.

$$\left(k_1 = \sum_{i=1}^m p_i, \quad k_2 = \sum_{i=1}^m p_i^2 \quad \text{ve} \quad k_3 = k_1^2 + k_2 \right)$$

Robust (güçlü) yöntemler, kontrol diyagramlarının ortalamalardaki değişimlere karşı duyarlılıklarını ve genel etkinliklerini arttırmak için kullanılmaktadır¹³¹.

Bu bölümde Hotelling T^2 istatistiğinin istatistik uzaklığa dayandığı, istatistik uzaklık kavramı açıklanarak belirtilmiş ve tek değişkenli t- istatistiğiyle, Hotelling T^2 istatistiği arasındaki ilişki ispatlanarak gösterilmiştir. Hesaplanan T^2 istatistiklerinin

¹³⁰ Niang, a.g.e., s. 156.

¹³¹ Niang, a.g.e., s. 161.

F ve β dağılımı gösterdikleri belirtilerek hangi dağılımın hangi koşullar altında temel alınacağı t, χ^2 , F, β dağılımları arasındaki ilişkilere değinilerek açıklanmıştır. Son olarak T^2 istatistiğinin kontrol istatistiği olarak kullanılabilmesi için gerekli olan varsayımlar incelenmiştir. Prosesin kontrol aşamasında doğru incelenmesini sağlayan “Geçmiş Veri Kümesi”nin oluşturulması aşamaları ve aykırı gözlemlerin veri kümesinden ayıklanması olarak da bilinen I. Aşama diyagramlarının önemi üzerinde durulmuş ve prosesin kontrol süreci olan II. Aşamadaki sonuçların, I.Aşamadaki bulgulara dayandığı vurgulanmıştır. Daha öncede belirtildiği gibi uygulamada genellikle, anakütle parametrelerinin bilindiği varsayılarak T^2 istatistiklerinin χ^2 dağılımı gösterdiği kabul edilmektedir. Gerçekte hesaplanması gereken kontrol limiti değerleri ile χ^2 değerleri karşılaştırmalı olarak incelenmiş ve yapılan hatalar tablolar yardımıyla gösterilmiştir. Hatalı kontrol limitlerinin hesaplandığı belirtilerek Statgraphics programı ile T^2 diyagramı çizilebileceğine değinilmiştir. Bu programın dışında Minitab, Statistica, Dataplot, QualStat programları ile de çok değişkenli kontrol diyagramları çizilebilmektedir. Prosesin ortalamasındaki küçük değişimlere karşı duyarlılığının az olduğu iddia edilen T^2 diyagramlarının bu özelliği dikkate alınarak güçlü (robust) yaklaşımlardan biri açıklanmıştır. 3. bölümde yine çok değişkenli kontrol diyagramlarının dezavantajlarından olan kontrol dışındaki gözlem vektöründe kontrol dışı olan değişken(ler)in belirsizliğinin, geliştirilen ayrıştırma yöntemleriyle nasıl giderildiği incelenmektedir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

KONTROL DIŞI DEĐIŐKENLERİN SAPTANMASINDA, YORUMLANMASINDA KULLANILAN MYT AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ VE DİĞER YÖNTEMLER

Tek değişken ile çalışıldığında, kontrol dışı durum, \bar{x} ve R diyagramının çizilmesi ile belirlenebilmektedir. Çünkü tek değişkenli kontrol diyagramlarındaki bir uyarı ortalamadaki ve/veya deđiŐkenlikteki deđiŐimlerden kaynaklanmaktadır. Ancak çok değişkenli durumda, prosesin kontrolü oldukça karmaŐıktır. Çok değişkenli bir kontrolün “iyi” sonuç verebilmesi için ;

- Kontrol dışı duruma hangi değişkenlerin neden olduğunun belirlenmesi
- Kontrol dışında olan değişkenlerin ortalamadaki değişimi ne ölçüde etkilediğinin hesaplanması gerekmektedir¹.

T^2 istatistiği uyarı verdiğinde karŐılaŐılan en büyük sorun , uyarıya neden olan değişken(ler)in saptanması aşamasıdır. Son yıllarda hangi değişkenlerin kontrol dışına çıktığını araştıran birçok yeni çok değişkenli kontrol yöntemi geliştirilmiştir. Genellikle bu yöntemler T^2 istatistiğinin ayrıŐtırılmasından oluşan çeşitli fonksiyonlara dayanmaktadır. Bu yöntemlerden sadece “Step-Down Süreçleri” olarak adlandırılan yöntem değişkenlerin önceden düzenlenmiŐ alt gruplara ayrıldığını varsayarken diğerleri böyle bir varsayıma sahip deđildir². Bu bölümde ayrıştırma yöntemleri arasında diğer birçok yöntemi kapsadığı ve prosesin ortalama değerinde oluşan bir değişime oldukça hassas olduğu için MYT (Mason, Young, Tracy) ayrıştırma yöntemi üzerinde durulmaktadır.

¹ N.H. Timm, “Multivariate Quality Control Using Finite Intersection Tests”, *Journal of Quality Technology*, Cilt: XXIX, No:2, 1996, s. 233.

3.1 MYT Ayrıştırma Yöntemi

MYT, proseste meydana gelen sorunun hangi değişkenlerden veya hangi değişkenler arasındaki ilişkiden kaynaklandığını saptamak amacıyla T^2 istatistiğinin ayrıştırılmasını temel alan yöntemlerden biridir. Mason, Young ve Tracy tarafından geliştirilmiştir. Yöntem, T^2 uyarılarının yorumlanabilmesi amacıyla geliştirilen pek çok yöntemi (Roy (1958), Murphy (1987), Hawkins (1991,1993) ve Doğanaksoy, Faltin, Tucker (1991)) kapsamaktadır. Kourti ve MacGregor(1996), Wierda (1994), Champ, Tracy, Wierda, Young (1997) çalışmalarının bir değerlendirilmesi yapıldığında, MYT ayrıştırma yönteminin çok değişkenli istatistik proses kontrol yöntemlerine bir alternatif olabileceği ve literatürde yer alabileceği sonucuna varılmaktadır³. Bu yöntem, aykırı gözlemlerin belirlenmesi ve yorumlanması için geliştirilmiş bir yöntem olarak da kullanılabilir⁴.

Bilindiği gibi MCUSUM ve MEWMA gibi çok değişkenli kontrol diyagramları prosesteki hassas değişimleri saptayabilmek için geliştirilmiştir. Ancak dikkatli gözlemler ve çalışmalar yapıldığında MYT ayrıştırma yönteminin T^2 istatistiğinin hassas değişimlere karşı duyarlılığını arttırdığı kanıtlanabilmektedir. Bu yaklaşımın başarılı olarak kabul edilmesinin en önemli nedenlerinden biri yöntemin, değişkenler arasındaki doğrusal ilişkilerin değişimine karşı oldukça duyarlı olmasıdır⁵. MYT ayrıştırma yöntemi, T^2 istatistiğini eşit ağırlıklandırılmış olan ve koşullu, koşulsuz terim olarak bilinen, 2 ortogonal (dikey) bileşene ayırmaktadır.

³ R.L. Mason, J.C. Young, "Improving the Sensitivity of the T^2 Statistic in Multivariate Process Control", *Journal of Quality Technology*, C.XXX1, No: 2, 1999, s. 155.

⁴ N.D.Tracy, J.C.Young, R.L.Mason, "Some Aspects of Hotelling's T^2 Statistic for Multivariate Quality Control" , *Statistics of Quality Statistics, Textbook and Monographs*, Ed. W.R.Schucany, W.B. Smith, G.Subir, C:MLIII, NewYork, Marcel Dekker,Inc., 1996

⁵ R.L. Mason, N.D.Tracy, J.C. Young, "A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals", *Journal of Quality Technology*, C.XXIX, No:4, 1997, s. 406.

2 değişkenli bir proseste $x'=(x_1, x_2)$ gözlem vektöründen hesaplanan T^2 istatistiği MYT yöntemi uygulanarak bileşenlerine aşağıdaki gibi ayrılmaktadır⁶:

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 \quad (3.1)$$

T_1^2 koşulsuz terimdir ve

$$T_1^2 = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{s_1^2} \quad (3.2)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. $T_{2,1}^2$ x_1 'e koşullu olan terimdir ve

$$T_{2,1}^2 = \frac{(x_2 - \bar{x}_{2,1})^2}{s_{2,1}^2} \quad (3.3)$$

formülü ile elde edilmektedir. $\bar{x}_{2,1}$; x_2 değişkenine ait koşullu ortalamanın, x_1 değeri kullanılarak tahmin edildiğini göstermektedir (yani x_1 değerine bağlı olan tahmini x_2 değeridir). $s_{2,1}^2$ ise x_1 değerleri ile tahmin edilen x_2 değerlerinin tahmini varyansı olduğu için T^2 istatistiğinin bileşenlere ayırımı aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir⁷:

$$T^2 = \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{s_1^2} + \frac{(x_2 - \bar{x}_{2,1})^2}{s_{2,1}^2} \quad (3.4)$$

T^2 istatistiği;

$$T^2 = T_2^2 + T_{1,2}^2 \quad (3.5)$$

⁶ R.L. Mason, J.C. Young, **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, Virginia, American Statistical Association (ASA), 2002, s. 126.

⁷ R.L. Mason, N.D. Tracy, J.C. Young, "A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Signals", **Journal of Quality Technology**, C. XXIX, No: 4, 1997, s. 398.

şeklinde de ayrıştırılabilmektedir. Yine T_2^2 koşulsuz terimdir ve

$$T_2^2 = \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{s_2^2} \quad (3.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. $T_{1,2}^2$ x_2 'ye koşullu olan terimdir.

$$T_{1,2}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x}_{1,2})^2}{s_{1,2}^2} \quad (3.7)$$

formülü ile elde edilmektedir. $\bar{x}_{1,2}$; x_1 değişkenine ait koşullu ortalamanın, x_2 değeri kullanılarak tahmin edildiğini göstermektedir. $s_{1,2}^2$ ise x_2 değerleri ile tahmin edilen x_1 değerlerinin tahmini varyansını göstermektedir. x_1 ve x_2 değişkenleri arasında doğrusal bir korelasyon olduğunda $T_{1,2}^2 \neq T_{2,1}^2$ eşitsizliği söz konusudur. $\bar{x}_{i,j}$, x_j değerine bağlı tahmini x_i değeridir ve aşağıdaki formülle hesaplanabilmektedir.

$$\bar{x}_{i,j} = \bar{x}_i + b(x_j - \bar{x}_j) \quad (3.8)$$

\bar{x}_i ve \bar{x}_j "Geçmiş Veri Kümesi" 'nden tahmin edilen örnek ortalamalarıdır. b , x_1 değişkeninin bağımlı x_2 değişkeninin bağımsız olarak kabul edildiği regresyon denkleminin regresyon katsayısıdır.

$$e_{i,j} = (x_i - \bar{x}_{i,j}) \quad (3.9)$$

Denklem (3.7)'deki koşullu varyansın ($s_{i,j}^2$) formülü aşağıdaki gibidir ⁸:

⁸ Mason, Young, a.g.e., s. 129.

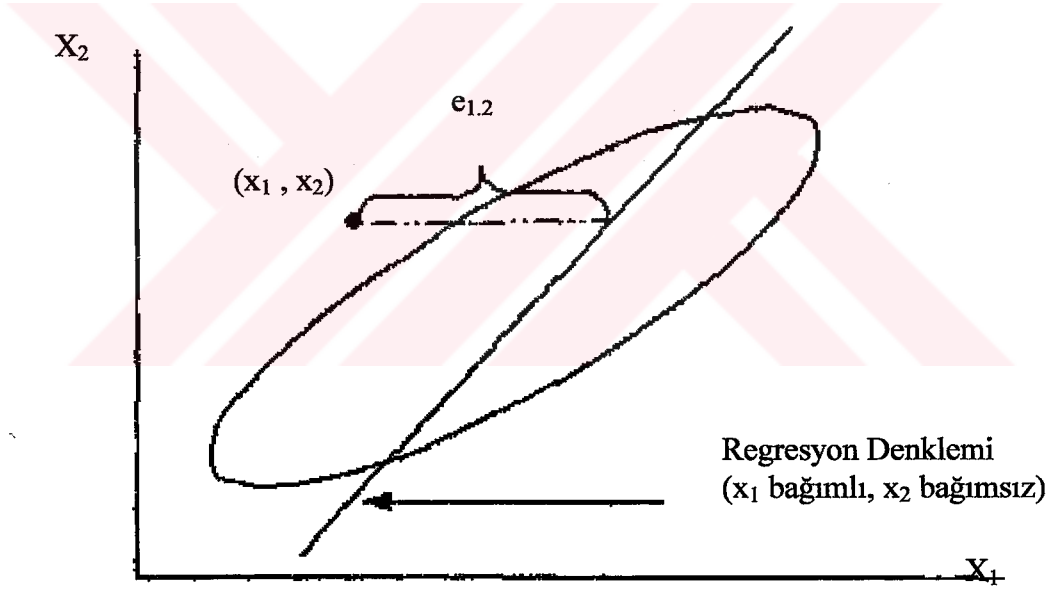
$$s_{i,j}^2 = s_i^2(1 - R_{i,j}^2) \quad (3.10)$$

$R_{i,j}$; x_i ile x_j arasındaki çoklu korelasyon katsayısıdır. Buna göre koşullu terim;

$$T_{i,j}^2 = (e_{i,j} / s_i)^2 / (1 - R_{i,j}^2) \quad (3.11)$$

şeklinde de yazılabilmektedir.

Grafik 3.1: Gözlem Vektörü (x_1, x_2)'nin Regresyon Denklemine Uzaklığı



Grafik 3.1'de $e_{1,2}$; (x_1, x_2) noktasının, x_1 'in bağımlı x_2 'nin bağımsız olarak ele alındığı regresyon denklemine x_2 'nin yerine koyulmasıyla elde edilen x_1 tahmini değerinin ($\bar{x}_{1,2}$), x_1 'den uzaklığını göstermektedir.

Koşulsuz ve koşullu terimlerin formülleri p tane değişken için genelleştirildiğinde ilgili T^2 değerleri aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \quad j=1,2,\dots,p \quad (3.12)$$

$$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1})^2}{s_{j,1,2,\dots,j-1}^2} \quad j=1,2,\dots,p \quad (3.13)$$

Koşullu ortalama $\bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}$, j. değişkenin ilk j-1 değişkeninden tahmin edilen değeridir ve aşağıdaki regresyon denkleminde elde edilebilmektedir:

$$\bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{j-1}x_{j-1} \quad (3.14)$$

$s_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ ise ilk j-1 değişkeninden tahmin edilen j değerlerinin varyansıdır. Regresyon artığı ve koşullu varyans $s_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$e_{j,1,2,\dots,j-1} = (x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}) \quad (3.15)$$

$$s_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = s_j^2(1 - R_{j,1,2,\dots,j-1}^2) \quad (3.16)$$

Elde edilen koşullu terim formülü;

$$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = \frac{(e_{j,1,2,\dots,j-1})^2}{s_j^2(1 - R_{j,1,2,\dots,j-1}^2)} \quad (3.17)$$

standardize edilmiş artığın karesi olarak yorumlanabilmektedir⁹. Koşullu terimin büyüklüğü j. değişkenin diğer değişkenlerle (1,2,...,j-1) arasındaki ilişkiyi gösteren

⁹ Mason, Tracy, Young, 1997, a.g.e., s. 400.

çoklu korelasyon katsayısına bağlıdır¹⁰. $R_{j,1,2,\dots,j-1}$ değerinin düşük olması, değişkenler arasında ilişki olmamasından veya ilişkinin doğrusal olmamasından kaynaklanmaktadır.

3.1.1 Ani ve Küçük Proses Değişimlerine Karşı T^2 İstatistiğinin Duyarlılığının Arttırılması

Modeli tanımlamada yapılan hataların en aza indirgenmesi T^2 istatistiğinin etkinliğini arttırmaktadır. Bu durum ani proses değişimlerine karşı duyarlılığı arttırıcı bir etki göstermektedir. Böylece ani proses değişimlerinin saptanması kısmen de olsa mümkün olabilmektedir. Ancak T^2 istatistiği, değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olmasını gerektirdiğinden doğrusal olmayan modellerin kurulması konusu tartışılmaktadır¹¹.

T^2 istatistiği kareli bir değer olduğundan küçük proses değişimlerine karşı çok duyarlı değildir. Bu problemin giderilebilmesi için koşullu terimlerin karekökü alınarak;

$$T_{j,1,2,\dots,j-1} = \frac{x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}}{s_{j,1,2,\dots,j-1}} \quad (3.18)$$

eğilimin grafik üzerinde incelenmesi çözüm olarak önerilmektedir. Grafiğin alt ve üst limitleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır¹²:

$$T_{j,1,2,\dots,j-1} \pm \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)}} \cdot t_{(\alpha/2, n-k-1)} \quad k=j-1 \quad (3.19)$$

¹⁰ A.C. Rencher, "The Contribution of Individual Variables to Hotelling's T^2 Wilk's Λ and R^2 ", *Biometrics*, C.XLIX, 1993, s. 488.

¹¹ Mason, Young, a.g.e., (1999), s. 158.

¹² Mason, Young, a.g.e., 1999, s. 163.

$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ terimi aşağıdaki formül ile de elde edilebilmektedir:

$$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 = (x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1})^2 / \sqrt{\frac{(n-p-1)}{(n-1)} \text{OHK}} \quad (3.20)$$

OHK: j'nin bağımlı 1,2,...,j-1 değişkenlerinin bağımsız olduğu bir regresyon denkleminde hesaplanan ortalama hata karedir. Formüldeki $\frac{(n-p-1)}{(n-1)}$ sabiti çıkarıldığında $T_{j,1,2,\dots,j-1}$ terimi standardize edilmiş artıkları göstermektedir. Bu durumda $T_{j,1,2,\dots,j-1}$ teriminin grafiğini çizmek yerine standardize edilmiş artıklar hesaplanarak;

$$SA_{j,1,2,\dots,j-1} = \frac{x_j - \bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}}{\sqrt{\text{OHK}}} \quad (3.21)$$

artıklarla tek değişkenli Shewhart diyagramının çizilmesi tercih edilmektedir. Artığın 0 çizgisinin üzerinde olması uyarı veren gözlem vektöründe j. değişkenin değerinin "Geçmiş Veri Kümesi" ne göre büyük olduğu anlamına gelirken, 0 çizgisinin altında olması ise "Geçmiş Veri Kümesi" 'ndeki değerine göre küçük olduğunu göstermektedir.

3.1.2 Koşullu ve Koşulsuz Terimlerin Dağılımı

Proseste bir sorun olmadığı sürece koşulsuz ve koşullu terimlerin F dağılımı gösterdikleri kabul edilmektedir.¹³

$$T_j^2 \cong \left(\frac{n+1}{n} \right) F_{(\alpha,1,n-1)} \quad (3.22)$$

¹³ R.Mason, N.D.Tracy, J.C.Young, "Decomposition of T^2 for Multivariate Control Interpretation", *Journal of Quality Technology*, C.XXVII, No:2, 1995, s. 102.

$$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2 \cong \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)} \right) F_{(\alpha,1,n-k-1)} \quad (3.23)$$

k: $T_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ teriminde j'nin dışında yer alan değişken sayısını (Koşullandırılmış değişken sayısı) belirtmektedir. n: "Geçmiş Veri Kümesi" 'ndeki birim sayısıdır.

Koşullu ve/veya koşulsuz terimlerin prosesin kontrol dışına çıkmasına neden olup olmadığı ÜKL'leriyle belirlenmektedir¹⁴. Koşulsuz terimler;

$$\text{ÜKL} = \left(\frac{(n+1)}{n} \right) F_{(\alpha,1,n-1)}, \quad (3.24)$$

koşullu terimler ise;

$$\text{ÜKL} = \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)} \right) F_{(\alpha,1,n-k-1)} \quad (3.25)$$

değeriyle karşılaştırılmaktadır. $T_j^2 > \left(\frac{(n+1)}{n} \right) F_{(\alpha,1,n-1)}$ durumunda processte j değişkeninden kaynaklanan bir uyarı olduğu j değişkeni processte bir uyarının varlığını, $T_{i,j}^2 > \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n(n-k-1)} \right) F_{(\alpha,1,n-k-1)}$ durumunda ise i ve j değişkenlerinin birlikte prosesin uyarı vermesine neden olduğu anlaşılmaktadır.

¹⁴ Mason, Young, (1999), a.g.e., s. 156.

3.1.3 p Değişkenli Bir Prosesin Olası Tüm Koşullu ve Koşulsuz Terimlerinin Hesaplanması

p değişkenli proseste MYT yöntemi genel olarak aşağıdaki şekilde uygulanmaktadır:

$T^2 = (x - \bar{x})' S^{-1} (x - \bar{x})$ formülündeki $(x - \bar{x})' = [(x^{p-1} - \bar{x}^{p-1}) (x^p - \bar{x}^p)]$ olarak ayrıştırıldığında $x^{(p-1)'} = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$, $\bar{x}^{(p-1)'} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{p-1})$, $x^p = (x_p)$ ve $\bar{x}^p = (\bar{x}_p)$ şekline dönüşmekte ve benzer şekilde varyans-kovaryans matrisi de aşağıdaki gibi ayrıştırılabilmektedir¹⁵.

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xx} \\ S_{xx} & S_p^2 \end{bmatrix}$$

S_{xx} : İlk (p-1) tane değişkenin kovaryans matrisidir. (p-1)×(p-1) boyutludur.

S_{xx} : p değişkeni ile diğer değişkenler arasındaki kovaryansları gösteren (p-1) boyutlu bir vektördür.

S_p^2 : p. değişkeninin varyans değeridir.

Bu durumda T^2 istatistiği aşağıdaki gibi iki bağımsız bölüme ayrıştırılabilmektedir:

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p,1,2,\dots,p-1}^2 \quad (3.26)$$

$$T_{p-1}^2 = (x^{(p-1)} - \bar{x}^{(p-1)})' S_{xx}^{-1} (x^{(p-1)} - \bar{x}^{(p-1)}) \quad (3.27)$$

¹⁵ Mason, Young, (1999), a.g.e., s. 148.

$$T_{p-1,2,\dots,p-1}^2 = (\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}_{p-1,2,\dots,p-1})^2 / s_{p-1,2,\dots,p-1}^2 \quad (3.28)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{p-1,2,\dots,p-1} = \bar{\mathbf{x}}_p + \mathbf{B}'_p (\mathbf{x}^{(p-1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(p-1)}) \quad (3.29)$$

$$s_{p-1,2,\dots,p-1}^2 = S_p^2 - S_{\mathbf{x}\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{-1} S_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{B}'_p = S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{-1} S_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \quad (3.31)$$

\mathbf{B}_p : \mathbf{x}_p bağımlı, diğer değişkenler bağımsız olmak üzere oluşturulan regresyon denkleminin katsayılarının tahmini değerlerini içeren $(p-1)$ boyutlu bir vektördür. T_{p-1}^2 , koşulsuz terimi de bir T^2 istatistiği olduğundan kendi içinde koşulsuz ve koşullu terim olmak üzere iki bileşene ayrıştırılabilmektedir¹⁶:

$$T_{p-1}^2 = T_{p-2}^2 + T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2 \quad (3.32)$$

Burada T_{p-2}^2 , \mathbf{x} vektörünün ilk $(p-2)$ tane değişkeni için hesaplanan T^2 istatistiğidir.

$$T_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2 = \frac{(\mathbf{x}_{p-1} - \bar{\mathbf{x}}_{p-1,1,2,\dots,p-2})^2}{s_{p-1,1,2,\dots,p-2}^2} \quad (3.33)$$

$\mathbf{x}' = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)$ vektörünün tüm alt vektörleri için T^2 değerleri hesaplanabilmektedir. Buna göre $[T_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)}^2, T_{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{p-1})}^2, \dots, T_{(\mathbf{x}_1)}^2]$ terimlerinin hesaplanabilmesi için kullanılan genelleştirilmiş formül aşağıdaki gibidir:

¹⁶ Mason, Tracy, Young, (1995), a.g.e., s. 101.

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_p)}^2 = (x_j - \bar{x}_j)' S_{jj}^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \quad (3.34)$$

$x_p = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ve $x_{p-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ vektörü için hesaplanan T^2 değeri aşağıdaki şekilde koşulsuz ve koşullu bileşenlerine ayrıştırılabilmektedir¹⁷:

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_p)}^2 = T_1^2 + T_{2.1}^2 + T_{3.1,2}^2 + \dots + T_{p.1,2, \dots, p-1}^2 \quad (3.35)$$

$$T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2 = T_1^2 + T_{2.1}^2 + T_{3.1,2}^2 + \dots + T_{p-1.1,2, \dots, p-2}^2 \quad (3.36)$$

Sadece x_1 değişkenini içeren alt vektör $x_1 = (x_1)$ için hesaplanan T^2 değeri ($T_{x_1}^2$), x_1 değişkeninin koşulsuz terimine eşit olmaktadır ($T_{x_1}^2 = T_1^2$). Koşullu terimler, $[T_{(x_1, x_2, \dots, x_p)}^2, T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2, \dots, T_{x_1}^2]$ terimleri kullanılarak da hesaplanabilmektedir¹⁸:

$$\begin{aligned} T_{p.1,2, \dots, p-1}^2 &= T_{(x_1, x_2, \dots, x_p)}^2 - T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2 \\ T_{p-1.1,2, \dots, p-2}^2 &= T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})}^2 - T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-2})}^2 \\ T_{p-2.1,2, \dots, p-3}^2 &= T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-2})}^2 - T_{(x_1, x_2, \dots, x_{p-3})}^2 \\ &\vdots \\ T_{2.1}^2 &= T_{(x_1, x_2)}^2 - T_{x_1}^2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.1.4 MYT Ayrıştırma Yönteminin Özellikleri Ve Uygulanmasında İzlenen Adımlar

İncelenen p boyutlu x vektörü $x_p = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ olarak tanımlansın. p vektöründeki elemanların yer değiştirmesi [örneğin $x_p = (x_4, x_2, \dots, x_p)$ gibi]

¹⁷ Mason, Young, (2002), a.g.e., s. 149.

¹⁸ Mason, Young, (2002), a.g.e., s. 150.

hesaplanacak T^2 istatistiğinin değerini etkilememektedir. Gözlem vektörünün elemanları $p!$ kadar farklı diziliş¹⁹ gösterebilmektedir. T^2 istatistiği de $p!$ kadar farklı şekilde ayrıştırılabilmektedir. $p=3$ olduğunda $3!=3 \times 2 \times 1=6$ farklı ayrıştırma şekli bulunmaktadır²⁰:

$$\begin{aligned}
 T^2 &= T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 \\
 T^2 &= T_1^2 + T_{3,1}^2 + T_{2,1,3}^2 \\
 T^2 &= T_2^2 + T_{3,2}^2 + T_{1,2,3}^2 \\
 T^2 &= T_2^2 + T_{1,2}^2 + T_{3,1,2}^2 \\
 T^2 &= T_3^2 + T_{1,3}^2 + T_{2,1,3}^2 \\
 T^2 &= T_3^2 + T_{2,3}^2 + T_{1,2,3}^2
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Yukarıdaki her satır gözlem vektörünün farklı dizilişlerinden elde edilmektedir. İlk satır gözlem vektörünün orjinal diziliş şekline ilişkindir (x_1, x_2, x_3) . 2. satırda gözlem vektörü (x_1, x_3, x_2) ve son satırda (x_3, x_2, x_1) şeklinde dizilmiştir. Her bir ayrıştırmadaki terimler birbirinden bağımsızdır ve p tanedir. Uyarı veren T^2 istatistiğinin değerlendirilmesinde $(p \times p!)$ kadar terim incelenmektedir. Ancak bu terimlerin hepsi birbirinden farklı değildir. Tüm mümkün ayrıştırmalar içerisinde $p \times 2^{(p-1)}$ tane birbirinden farklı terim bulunmaktadır. Hesaplanan bir T^2 değeri uyarı verdiğinde, sorunun kaynağının araştırılması bu $p \times 2^{(p-1)}$ tane terimin incelenmesini gerektirmektedir. Ancak değişken sayısı arttıkça ayrıştırılmış terimlerin incelenmesi güçleşmektedir.

T^2 değeri uyarı verdiğinde yapılacak hesaplamaları indirgeyen bir plan aşağıda verilmektedir²¹:

- Uyarı veren gözlem vektörünün her bileşeni için koşulsuz terimler(T_i^2) hesaplanır ve uyarı veren değişken(ler) gözlem vektöründen çıkarılır. Çünkü koşulsuz

¹⁹ $p! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times (p-(p-1))$

²⁰ Mason, Tracy, Young, a.g.e., (1995), s. 102.

²¹ Mason, Tracy, Young, a.g.e., (1997) s. 405.

terimi uyarı veren değişken(ler)in tek değişkenli Shewhart diyagramında da uyarı verdiği bilinmekte yani kendi minimum ve maximum değerlerinin dışına çıkmaktadır. Dolayısıyla diğer değişkenlerle nasıl bir ilişki içersinde olduğunun önemi olmamaktadır. Bu aşamada incelenen gözlem vektöründe sorunlu olan x değişkeninin “Geçmiş Veri Kümesi” ’ndeki maximum ve minimum değerleri belirlenmekte, bu aralık “Operasyonel Aralık (Operational Range)” olarak bilinmektedir. Değişkenin gözlem vektöründeki değerinin (x_i), maximum değerin üzerinde mi yoksa minimum değerin altında mı olup olmadığına bakılmaktadır. Minimum değerin altında ise değeri arttırılmalı, maximum değerin üzerinde ise azaltılmalıdır. Ancak ne kadar arttırılacağı veya azaltılacağı önemlidir. Bu aşamada x_i , gözlem vektörünün diğer değerleri kullanılarak tahmin edilmektedir. Tahmini değer, gözlem vektöründe çıkarılan x_i değerinin yerini aldığında hesaplanan T^2 değerinin uyarı verip vermediği araştırılmaktadır. Uyarı vermiyorsa procesteki sorunun giderilmiş olduğu kabul edilmektedir.

- Tahmini değer alınmadığında ve sorunlu değişken(ler) gözlem vektöründen çıkarıldığında, kalan değişkenlerden oluşan gözlem vektörüyle T^2 değeri hesaplanır. Uyarı vermiyorsa, sorunun çıkarılan değişken(ler)den kaynaklandığı sonucuna varılmaktadır. Ancak yeni T^2 değeri uyarı veriyorsa tüm $T_{i,j}^2$ koşullu terimleri hesaplanır ve uyarı veren $T_{i,j}^2$ ’nin değişkenleri (i ve j) gözlem vektöründen çıkarılır. Bu durum iki değişkenli ilişkilerde “Aykırı İlişki (countercorrelation)” olduğu anlamına gelmektedir. Kalan gözlem vektörü için yeniden T^2 değeri hesaplanır ve uyarı vermediği durumda sorunun, değişkenin ikili ilişkilerinden ve değişkenlerin kendi kontrol alanlarının dışına çıkmalarından kaynaklandığı söylenebilmektedir.

- Ancak kalan değişkenlerden oluşan alt vektör için hesaplanan T^2 değeri halen uyarı veriyorsa tüm $T_{i,j,k}^2$ koşullu terimleri hesaplanır ve anlamlı $T_{i,j,k}^2$ ’lara ilişkin (x_i , x_j ve x_k değişkenleri) gözlem vektöründen çıkarılır. Kalan alt vektör için T^2 değeri elde edilir ve uyarı verip vermediği araştırılır. Uyarı veriyorsa daha yüksek

mertebeli koşullu terimler hesaplanarak anlamlı olanlar belirlenir. Bu işlem kalan alt vektörden hesaplanan T^2 değeri uyarı vermeyinceye kadar devam ettirilmektedir.

Uygulamada genellikle gözlem vektörünün öncelikle koşulsuz terimleri hesaplanır, koşulsuz terimi kontrol dışında olan değişkenler belirlenir ve gözlem vektörü, koşulsuz terimleri kontrolde ve kontrol dışında olan değişkenler olmak üzere ikiye ayrılır. Kontrolde olan değişkenler için T^2 değeri hesaplanır ve uyarı verip vermediği araştırılır. Uyarı vermiyorsa kontrol dışı durumun diğer değişkenlerden kaynaklandığı söylenebilir.

3.1.5 Uyarı Veren Bir MYT Teriminin Yorumlanması

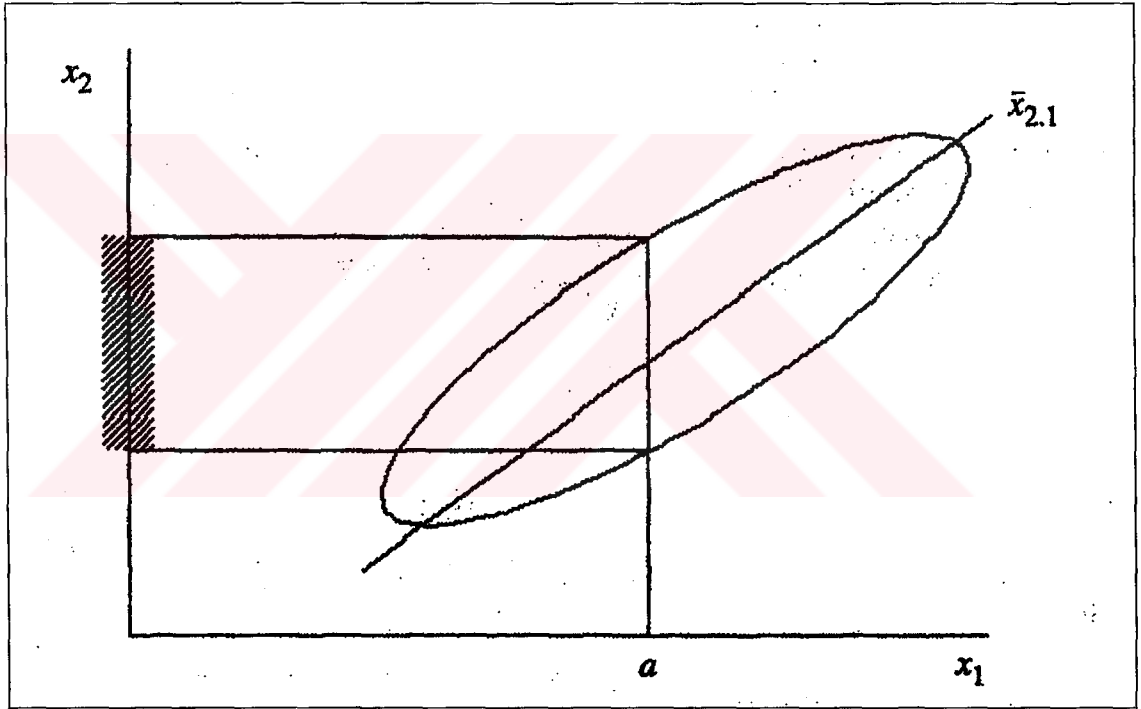
Koşulsuz terim tek örnek t değerinin karesidir ve x_i 'nin \bar{x}_i değerinden olan istatistik uzaklığını göstermektedir. X_i değişkeninin gözlenen değeri güven aralığının dışında ise yani tek değişkenli kontrol diyagramı uyarı veriyorsa, koşulsuz terimde de bir uyarı söz konusudur. Koşullu terim ise herhangi bir i değişkenin değerinin, diğer değişkenlerin değerleri kullanılarak tahmin edilen i . değişkenin ortalama değerinden istatistik olarak uzaklığını belirtmektedir. Koşullu terim $T_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ üç durumda uyarı vermektedir²²:

- x_j değeri ile $\bar{x}_{j,1,2,\dots,j-1}$ tahmini değeri arasındaki fark büyük olduğunda yani değişkenler arasında doğrusal ilişkinin olmaması durumunda
- Değişkenler arasındaki korelasyonun beklenen yönde olmaması durumunda
- Değişkenler arasında çoklu doğrusal bağlantı olması durumunda

²² R. Mason, J.C.Young, "Interpretive Features of a T^2 Chart In Multivariate SPC", *Quality Progress*, 2000, s. 85.

Grafik 3.2'de x_1 'in değeri değıştikçe $\bar{x}_{2,1}$ değerin de değıştiği görölmektedir. x_1 değışkeni a değerin aldığında ($x_1=a$) prosesin kontrol altında kabul edilebilmesi için, x_2 değışkeninin x_1 'e bağlı olarak tahmin edilen değerin ($\bar{x}_{2,1}$) grafikteki taralı alanda olması gerekmektedir. Taralı alanın dışındaki bir değeri $T_{2,1}^2$ koşullu teriminin uyarı vermesine neden olmaktadır²³.

Grafik 3.2: $T_{2,1}^2$ Bileşenin Yorumu



$T_{j,1,2,\dots,j-1}^2$ koşullu teriminin uyarı vermesi x_j değışken değerin , x_1, x_2, \dots, x_{j-1} değeri göre alması gereken tahmini değeri farklı olduğu anlamına gelmektedir. Bu durum "Geçmiş Veri Kümesi" 'nde x_j değışkeni ile diğer değışkenler arasında "aykırı ilişki" olduğunu göstermektedir. Uyarı veren noktanın ortak kontrol alanının dışında ancak x_i ve x_j 'nin kontrol alanında olduğu

²³ J.Young, T.Alloway, R. Schmotzer, **Introduction To Multivariable Statistical Process Control And Its Application In The Process Industries**, NPRA 2000 Computer Conference, Palmer House Hilton Hotel, 2000, s. 9.

varsayıldığında, T_i^2 ve T_j^2 kontrol altında iken $T_{i,j}^2$ ve $T_{j,i}^2$ uyarı vermektedir. x_i ile x_j değişkeni arasındaki doğrusal korelasyon katsayısı hesaplanır. Örneğin doğrusal korelasyon katsayısının yüksek ve pozitif bir değer alması her iki değişkenin artış yönünde birlikte hareket ettiği anlamına gelmektedir. Bu durumda uyarı veren gözlem vektörü $x' = (x_i, x_j)$ olarak kabul edildiğinde x_i 'nin tahmini değeri \bar{x}_i , x_i değerinden küçük ise, \bar{x}_j değerinin de x_j 'den küçük olması beklenmektedir. Yine x_i 'nin tahmini değeri \bar{x}_i , x_i değerinden büyük ise, \bar{x}_j değerinin de x_j 'den büyük olması beklenmektedir. Bu koşulların sağlanamaması "Geçmiş Veri Kümesi" 'nde "Aykırı İlişki" 'ye yani $T_{i,j}^2, T_{j,i}^2$ değerlerinin uyarı vermesine neden olmaktadır. Prosesin tekrar kontrol altına alınabilmesi için \bar{x}_i , x_i değerinden büyük ve \bar{x}_j x_j 'den küçük ise, x_i değeri düşürülmeli veya x_j değeri arttırılmalıdır. \bar{x}_i , x_i değerinden küçük ve \bar{x}_j x_j 'den büyük olması durumunda ise x_i değeri arttırılmalı veya x_j değeri düşürülmelidir. x_i ve x_j değişkenlerinden hangisinin değerinde değişiklik yapılacağına karar verebilmek için T_i^2 ve T_j^2 koşulsuz terimleri incelenir ve daha büyük olanı seçilir. Seçilen değişkenin uyarı veren gözlem vektöründeki değerinin tek değişkenli Shewhart kontrol limitlerinin dışına çıktığına karar verilir ve değişkenin değeri diğer değişkene göre arttırılır veya azaltılır. Bu değişiklik proses ile ilgili uzmanlar tarafından gerçekleştirilmektedir²⁴.

MYT yöntemi proseste oluşan bir uyarının hangi değişkenden kaynaklandığını belirlerken, sorunun değişkenin ortalamasındaki bir değişimden mi yoksa değişkenliğinde meydana gelen bir değişimden mi kaynaklandığını saptayamamaktadır. Ancak genellikle Hotelling T^2 istatistiğine dayanan çok değişkenli kontrol diyagramındaki uyarılar dikkate alınarak MYT ayırıştırma yöntemi uygulandığından, sorunun ortalamadaki bir değişimden kaynaklandığını varsaymak mümkündür.

²⁴ Mason, Young, (2002), a.g.e., s. 161.

3.2 Kontrol Dışı Uyarıların Nedeninin Saptanmasında Kullanılan Diğer Yöntemler

MYT ayrıştırma yönteminin dışında, prosesteki uyarının hangi değişken(ler)den kaynaklandığının saptanmasını sağlayan yöntemler; çok değişkenli ve tek değişkenli kontrol diyagramlarının birlikte çizilmesi yaklaşımı, Step-Down Süreci, Grafik Gösterim, Bonferroni Eşitsizliği Yaklaşımı, M-İstatistiği, D-İstatistiği yöntemleri ve Temel Bileşenler Analizi olarak sıralanabilmektedir.

3.2.1 Çok Değişkenli Ve Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Birlikte Çizilmesi

Çok değişkenli bir kontrol diyagramı uyarı verdiğinde, uyarının hangi değişkenden kaynaklandığının saptanabilmesi için uygulamada en sık kullanılan yöntem tek değişkenli kontrol diyagramlarının çizilmesidir. Ancak p tane değişken için eşanlı olarak kontrol diyagramının çizilmesinde kullanılan anlamlılık düzeyi, her bir değişkenin diyagramının ayrı ayrı çizilmesinde kullanılan anlamlılık düzeyinden farklıdır.²⁵ Bu durum kontrol limitlerinin yanlış hesaplanmasına neden olabilmektedir. Böyle bir hatanın oluşmaması için eşanlı olarak incelenen ve birbirlerinden bağımsız olduğu bilinen değişkenler için ortalamadaki değişimin izlenmesini sağlayan \bar{x} - diyagramlarının herbirinin I. tip hataları daha öncede belirtildiği gibi α yerine $\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^p$ olarak alınmaktadır²⁶.

Bazen çok değişkenli kontrol diyagramları uyarı verirken ilgili tek değişkenli kontrol diyagramlarının tümünün kontrol altında olduğu durumlar ile de karşılaşılabilir²⁷. Bu durum Grafik 3.3'de A bölgesi ile

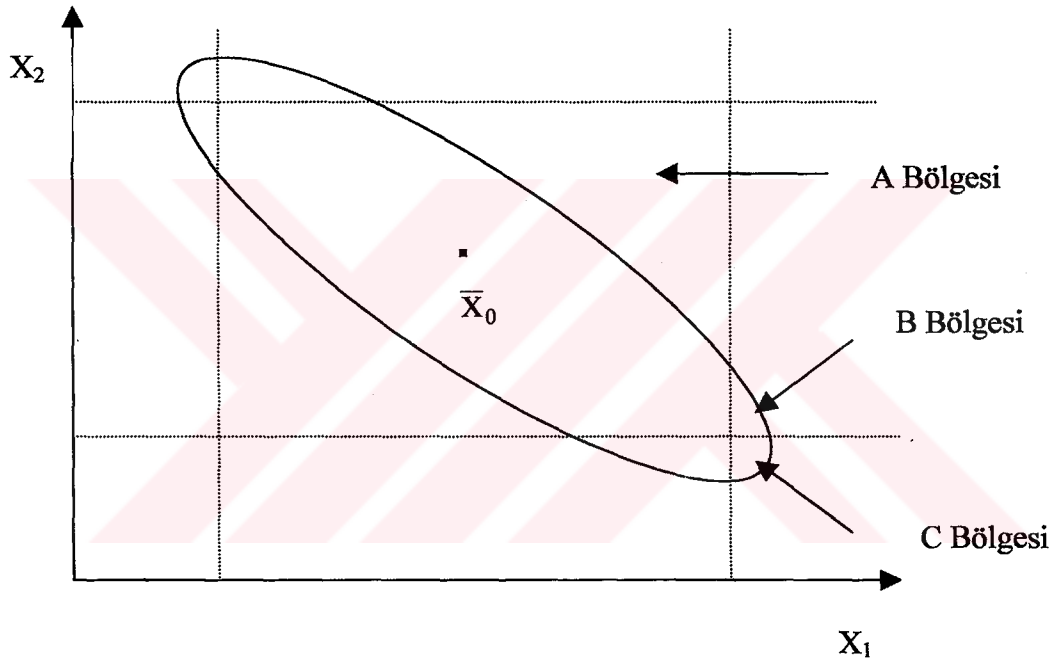
²⁵ D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 4. baskı, New York, John Wiley&Sons, Inc., 2001, s. 509.

²⁶ Montgomery, a.g.e., s. 509.

²⁷ A. Wierda, "Multivariate Statistical Process Control: Recent Results and Directions for Future Research", *Statistica Neerlandica*, C. XXVIII, 1994, s. 148.

örneklendirilmektedir²⁸. B bölgesinde, X_1 ve X_2 'den oluşan proses kontrol altındayken, değişkenlerin tek değişkenli kontrol diyagramları çizildiğinde X_1 değişkeni kontrol dışındaymış gibi görülmektedir yani yanlış bir uyarı söz konusudur. C bölgesinde ise, proses kontrol altında olmasına rağmen tek değişkenli kontrol diyagramları çizildiğinde, değişkenler kontrol dışındaymış gibi görülmektedir²⁹.

Grafik 3.3 A, B Ve C Bölgelerine Göre Prosesin Durumu



Bazen çok değişkenli ve tek değişkenli diyagramların sorunun kaynağının belirlemek amacıyla birlikte kullanılmaları etkin sonuç vermemektedir.

Çizilen T^2 diyagramındaki bir gözlem vektörü (x) kontrol limitlerinin dışında bulunuyorsa, alternatif bir tek değişkenli kontrol diyagramı yaklaşımı şöyledir: ...

²⁸ Grafik 3.3'de çok değişkenli kontrol alanı elips ile gösterilmektedir.

²⁹ N.Niang, "Multidimensional Methods for Statistical Process Control: Some Contributions of Robust Statistics", **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, Ed. C.Laura, J.Antoch, V.E. Vinzi, G.Saporta, New York, Physica-Verlag, 2002, s. 138.

Uyarı veren gözlem vektöründeki değerlerin her biri yerine standardize edilmiş değerleri kullanılmaktadır.³⁰

$$n \geq 30 \quad Z = \frac{x_j - \bar{X}_j}{s_j}$$

$$n < 30 \quad t = \frac{x_j - \bar{X}_j}{s_j}$$

Her gözlem vektörü için ayrı bir grafik çizilir. Grafikte ± 3 değerini aşan Z değerleri, uyarının hangi değişken(ler)den kaynaklandığına ilişkin bir fikir verir. Z değeri ± 3 aralığını aşan değişken aynı zamanda tek değişkenli kontrol diyagramında da kontrol dışında bulunmaktadır.

T^2 diyagramında, değişkenler arasında yüksek derecede ilişki olduğu durumda uyarı veren gözlem vektörü için çizilen bu grafiklerde, ± 3 aralığını aşan değerlerin olmadığı bir durumla da karşılaşılabilir. Böyle bir durumda bu yaklaşım standardize edilmiş değerler (Z) yerine standardize edilmiş skorlar $\left(\frac{t_i}{s_i} \right)$ kullanılarak da uygulanmaktadır³¹. T^2 istatistiği temel bileşenler cinsinden yazıldığında;

$$T^2 = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{s_i^2} \quad (4.39)$$

λ_i : S matrisinin özdeğerleri

³⁰ T. Kourti, J.F. MacGregor, "Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring", *Journal of Quality Technology*, C.XXVIII, No:4, 1996, s. 413.

³¹ Kourti, MacGregor, a.g.e., s. 414.

t_i : Temel bileşenler dönüşümünden elde edilen skorlar

s_i^2 : t_i değerlerinin (yani temel bileşenlerin) varyansı olarak tanımlanmaktadır. Standardize edilmiş skorlar diyagramı için Bonferroni limitleri³² kullanılmaktadır³³.

3.2.2 Step-Down Süreci

“Step-Down Süreci” ilk olarak Roy (1958) tarafından geliştirilmiştir. Roy, ortalama vektörünü, p tane (değişken sayısı kadar) alt gruba ayırmış ve her alt grupta bir değişken yer alacak şekilde düzenlemiştir. Subbaiah ve Mudholkar (1978), q tane alt grubun her birine en az bir değişken gelecek şekilde düzenleme yapmayı tercih etmişlerdir.³⁴ Wierda (1994) çalışmasında “Step-Down Süreci” ’yle gerçekleştirilen proses kontrolünün performansının T^2 kontrol diyagramı ile çok benzer sonuçlara sahip olduğunu, “Step-Down Süreci” ’nin ve T^2 kontrol diyagramının tek değişkenli kontrol diyagramlarından elde edilen sonuçlara göre çok daha etkin olduğunu iddia etmektedir³⁵.

$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ gözlem vektörünün anakütle ortalaması \bar{X}_x ve varyans-kovaryans matrisi Σ olsun. “Geçmiş Veri Kümesi” nin bilinmeyen varyans-kovaryans matrisi de Σ olarak alındığında hesaplanan T^2 istatistiğinin uyarı verdiği varsayalım. “Step Down Süreci”, daha öncede belirtildiği gibi değişkenlerden oluşan alt gruplar arasında öncelikli sıralar olduğunu kabul etmektedir. Alt grupların kontrol edilmesi sırasında \bar{X}_x ve Σ bölünerek incelenmekte ve aşama aşama kontrol edilmektedir. p tane değişken q tane alt gruba ayrıldığında \bar{X}_x ;

³² Bonferroni limitleri, “Bonferroni Eşitsizliği Yaklaşımı” başlığı altında bu bölümde açıklanmaktadır. Daha detaylı bilgi için Bkz. Alt (1985) ve Doğanaksoy, Faltin, Tucker (1991)

³³ Kourti, MacGregor, a.g.e., s. 410.

³⁴ C.Fuchs, R.S. Kenett, **Multivariate Quality Control: Theory and Applications**, New York, Marcel Dekker, Inc., 1998, s. 86.

³⁵ Wierda, a.g.e., s. 158.

$$\bar{X}_x = \begin{bmatrix} \bar{X}_{x1} \\ \bar{X}_{x2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_{xq} \end{bmatrix} \quad q \text{ tane alt grup ayrı ayrı incelenebilmektedir.}$$

“Geçmiş Veri Kümesi” ’ne ait ortalama vektörü de (\bar{X});

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{X}_q \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde gruplara ayrılabilir.}$$

\bar{X}_{xj}^* ve \bar{X}_j^* , 1’den j. alt grup dahil tüm değişkenleri içeren gruplar olarak tanımlandığında p_j : j. alt gruptaki değişken sayısı olmak üzere $\sum_{j=1}^q p_j$ değişken sayısına (p) eşittir. [$\sum_{k=1}^j p_k = q_k$; \bar{X}_{xj}^* ve \bar{X}_j^* ’deki değişken sayısıdır (j=1,2,...,q)]

Step-Down sürecinin uygulanması için aşağıdaki hipotezlerin sırasıyla test edilmesi gerekmektedir³⁶:

$$H_0^1 : \bar{X}_{x1} = \bar{X}_1$$

$$H_1^1 : \bar{X}_{x1} \neq \bar{X}_1$$

($\bar{X}_{x1} = \bar{X}_1$) eşitliğinin sağlanması (yani H_0^1 hipotezinin kabul edilmesi) koşuluyla aşağıdaki hipotez test edilmektedir:

$$H_0^2 : \bar{X}_{x_2} = \bar{X}_2$$

$$H_1^2 : \bar{X}_{x_2} \neq \bar{X}_2$$

$\bar{X}_{x_2}^* = \bar{X}_2^*$ eşitliği (yani H_0^1 ve H_0^2 hipotezlerinin kabul edilmesi) koşuluyla H_0^3 ve H_1^3 hipotezleri test edilir.

$$H_0^3 : \bar{X}_{x_3} = \bar{X}_3$$

$$H_1^3 : \bar{X}_{x_3} \neq \bar{X}_3$$

.

.

$\bar{X}_{x_{(q-1)}}^* = \bar{X}_{2(q-1)}^*$, ($H_0^1, H_0^2, \dots, H_0^{q-1}$ hipotezlerinin kabul edilmesi) durumunda son olarak aşağıdaki hipotez test edilmektedir:

$$H_0^q : \bar{X}_{x_q} = \bar{X}_q$$

$$H_1^q : \bar{X}_{x_q} \neq \bar{X}_q$$

Step-down süreci q tane alt gruptan ($j=1,2,\dots,q$) oluştuğundan T_j^2 değerlerinin hesaplanması gerekmektedir:

$$T_j^2 = (x - \bar{x})'_{(j)} S_{(j)}^{-1} (x - \bar{x})_{(j)} \quad (3.40)$$

Hesaplanan T_j^2 istatistiği q_j tane değişkenin testini içermektedir. j . hipotezin testinde G_j^2 istatistiği kullanılmaktadır³⁷:

$$G_j^2 = \frac{T_j - T_{j-1}}{1 + T_{j-1}^2 / (n-1)}, \quad j=1,2,\dots,q, \quad T_0^2 = 0 \quad (3.41)$$

G_j^2 istatistiklerinin dağılımı F dağılımına uymaktadır:

³⁶ Fuchs, Kenett, a.g.e., s. 84.

$$G_j^2 \sim \frac{(n-1)p_j}{(n-q_j)} F_{(p_j, n-q_j)} \quad (3.42)$$

n, “Geçmiş Veri Kümesi” ’ndeki örnek büyüklüğünü göstermektedir. j. hipotez için hesaplanan ÜKL;

$$\text{ÜKL}_j = \frac{(n-1)p_j}{(n-q_j)} F_{(\alpha_j, p_j, n-q_j)} \quad j=1,2,\dots,q \quad (3.43)$$

α_j , anlamlılık düzeyinin her hipotez için eşit olması gerekmemektedir. Tüm j değerleri için ($j=1,2,\dots,q$) $G_j^2 \leq \text{ÜKL}_j$ ise $H_0 : \bar{X}_x = \bar{X}$ hipotezi kabul edilmektedir. En az bir G_j^2 değerinin ÜKL_j değerini aşması durumunda prosesin kontrol dışında olduğuna karar verilmekte ve sorunun kaynağı araştırılmaktadır. “Step-Down Süreci” ’nde G_j istatistiğinin dışında test istatistikleri de kullanılabilir³⁸. Ancak birçok alternatif test istatistiğinin denenmesi sonucunda en etkin sonucun G_j istatistiği ile elde edildiği iddia edilmektedir.³⁹

Step-Down süreci, uygulamada, T^2 - kontrol diyagramlarını destekleyen bir yöntem olmakla birlikte alternatif bir yöntem olarak da kullanılmaktadır. Ancak değişkenlerin öncelik sıralarını oluşturmak uygulamada oldukça güçtür. Öncelik sıralaması konusunda eksik bilgi varsa “Step-Down Süreci” ’nin uygulanması önerilmemektedir. Bu durumda Wierda tek değişkenli kontrol diyagramlarıyla birlikte T^2 kontrol diyagramının çizilmesi yaklaşımını desteklemektedir⁴⁰.

³⁷ Fuchs, Kenett, a.g.e., s. 85.

³⁸ Örneğin $W_j = T_j^2 - T_{j-1}^2$ istatistiği de “Step-Down Süreci”nde kullanılabilir.

³⁹ J.I. Marden, M.D. Perlman, “On the Inadmissibility of Step-Down Procedures for the Hotelling T^2 Problems”, *Annals of Statistics*, C. XVII, 1990, s. 172-190.

⁴⁰ Wierda, a.g.e., s. 159.

3.2.3 Grafik Gösterim

Çok değişkenli veri kümesi ile çalışıldığında tek değişkenli veya çok değişkenli diyagramlar prosese ilişkin tam bilgi verememektedir. Çünkü tek değişkenli diyagramlar değişkenler arasında korelasyon olması durumunda hatalı sonuçlar verirken çok değişkenli diyagramlar ilk bakışta prosesteki sorunun hangi değişken(ler)den kaynaklandığını saptayamamaktadır. Ancak yeni geliştirilen grafik yöntemler değişkenlerin hedeflerinden sapmalarına ilişkin bilgilerin birlikte sunulmasını sağlamaktadır⁴¹.

3.2.3.1 Yıldız Grafiği (Starplot)

“Yıldız Grafiği”, çok değişkenli veri kümesinin görsel olarak sunumunu sağlayan bir yöntemdir⁴². T²-diyagramında, T² istatistiklerini gösteren noktaların her biri yıldız şeklinde gösterilebilmektedir. Yıldızlar ışıklardan oluşmaktadır. Prosesteki değişkenlerin her biri, hedef değerlerinden ne kadar uzaklaştığını gösteren bu ışıklar ile tanımlanmaktadır. Işıkların uzunluklarının anlamlı olabilmesi için değişkenlerin büyüklüklerinden ve birimlerinden arındırılması gerekmektedir. Bunun için;

$$Z_j^{(k)} = \frac{\bar{x}_j^{(k)} - \bar{X}^{(k)}}{s_k} \text{ dönüşümü gerçekleştirilmektedir.}$$

$x_{ij}^{(k)}$: k. değişkenin, j. gruptaki i. gözlemi ($\bar{x}_j^{(k)} = \sum x_{ij}^{(k)} / n$), $\bar{X}^{(k)}$: k. değişkenin hedef değeri ve s_k : k. değişkenin standart sapmasıdır. Alternatif olarak standartlaştırma işlemi;

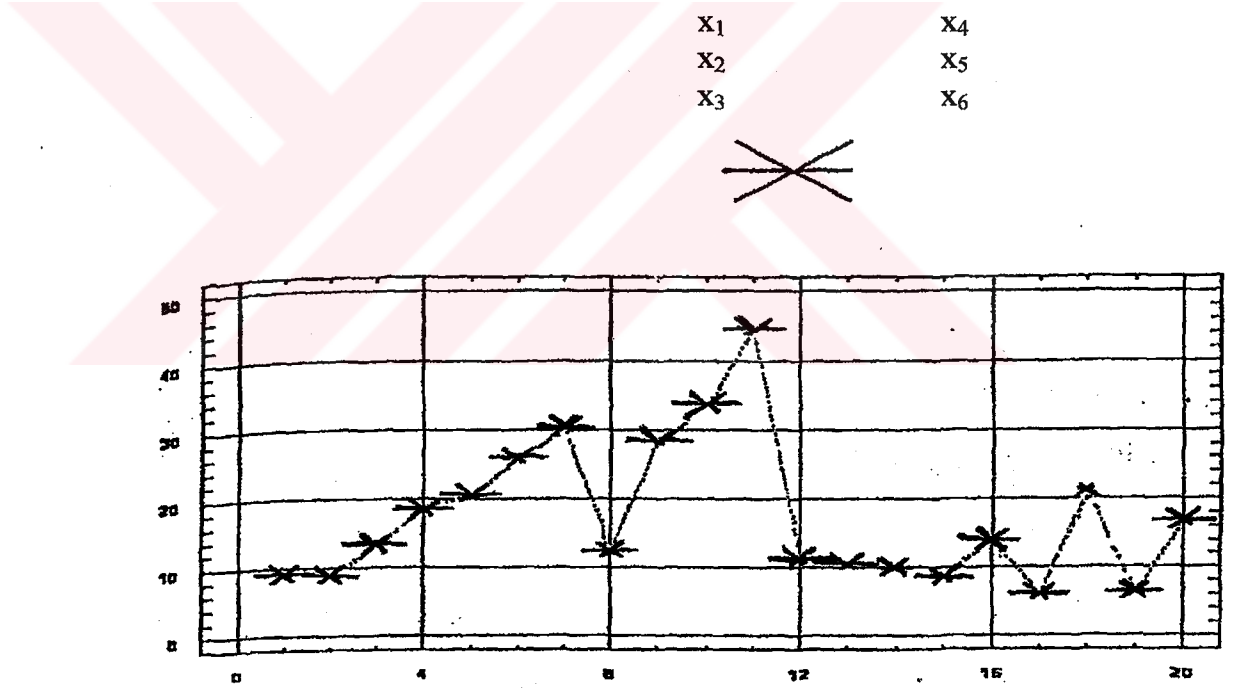
⁴¹C.Fuchs, Y.Benjamini, “Multivariate Profile Charts for Statistical Process Control”, *Technometrics*, C.XXVI, No:2, 1994, s. 182.

⁴²J.M. Chambers v.d., *Graphical Methods for Data Analysis*, Belmont, CS:Wadsworth, 1983, s. 158-162.

$$h_j^k = \frac{\bar{X}_j^k}{s_k} \quad (3.44)$$

şeklinde de yapılabilmektedir⁴³. Z_j^k değerleri yerine h_j^k değerleri kullanıldığında orta uzunluktaki ışınlar, prosesin kontrol altında olduğunu göstermektedir. Değişkenin aldığı değer ortalamasından küçük ise ışın en düşük değerine ulaşana kadar kısalmaktadır.”Yıldız Grafiği” ’nin kullanılmasının en büyük sakıncası ışın uzunluklarının istatistiki anlamlılık belirtmemesidir. Bu gösterime Statgraphics programında yer verilmektedir⁴⁴.

Grafik 3.4: Altı Değişkenli Bir Proseste T^2 Grafiğinin “Yıldız Grafiği” ile Birlikte Gösterimine İlişkin Bir Örnek



⁴³ Fuchs, Kenett, a.g.e., s. 128.

⁴⁴ Fuchs, Kenett, a.g.e., s. 129.

3.2.3.2 Çok Değişkenli Profil Diyagramları (Multivariate Profile (MP) Charts)

Değişkenler arasında orta veya yüksek düzeyde korelasyon olabileceğinden prosesin kontrol altında olup olmadığının saptanabilmesi için çizilen çok değişkenli ve tek değişkenli diyagramlar proses hakkında kısmen bilgi verebilmektedir. Bu problemi ortadan kaldırabilmek amacı ile Fuchs ve Benjamini (1991) tek değişkenli ve çok değişkenli yaklaşımın tek bir diyagramda gösterilmesini sağlayan ve “Çok Değişkenli Profil Diyagramı (Multivariate Profile (MP) Chart) olarak adlandırılan yeni bir diyagram geliştirilmiştir. “MP Diyagramı”, “Yıldız Grafiği” ’ne ve literatürde yer alan diğer diyagramlara bir alternatif olarak önerilmektedir.

MP diyagramlarının çizilebilmesi için öncelikle her değişken farklı büyüklük, değişkenlik ve birimlerde olduğundan standardize edilmektedir⁴⁵:

$$Z_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij} - \bar{X}_i}{\sigma_{\bar{x}_i}}$$

$$i=1,2,\dots,p$$

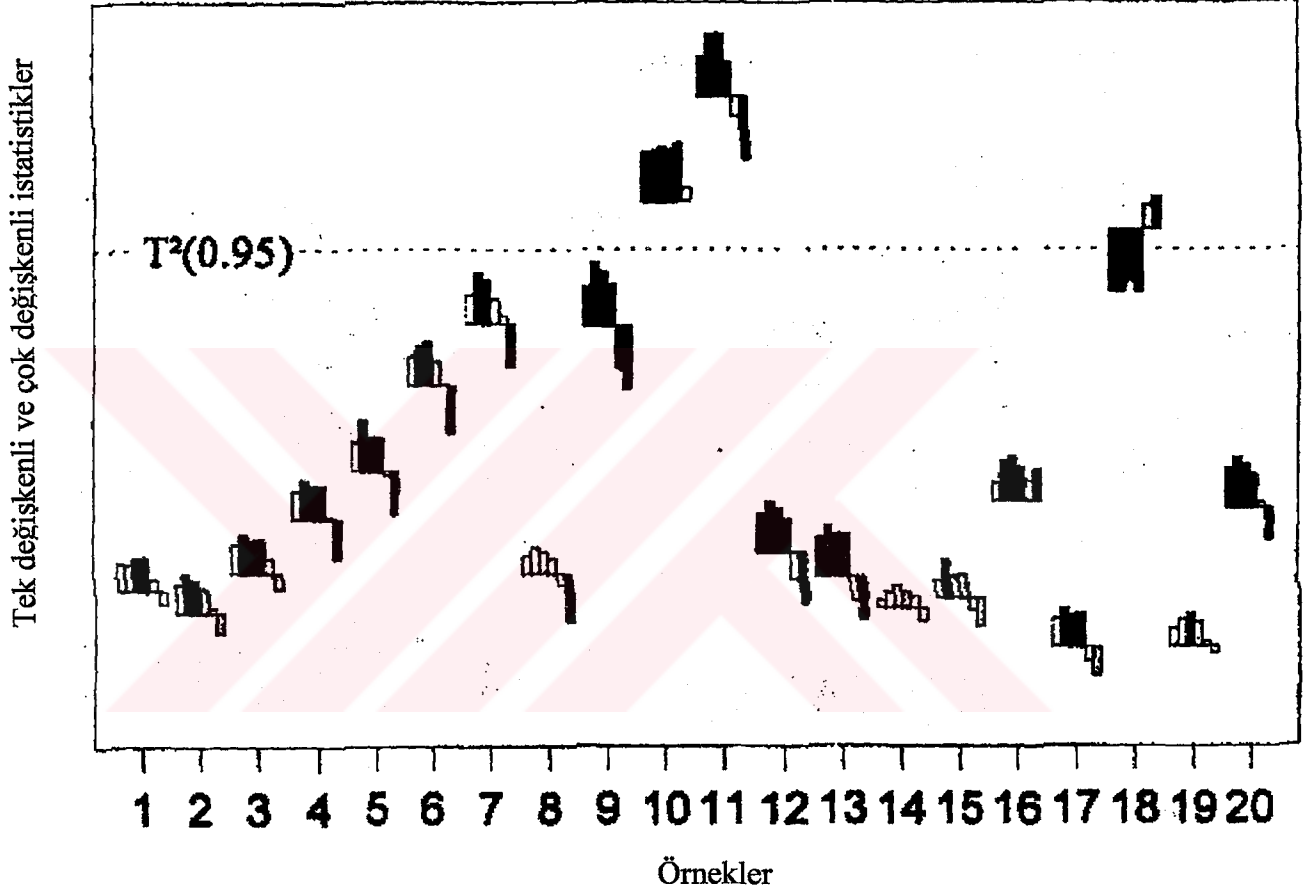
$$j=1,2,\dots,m$$

Grafik 3.5’de görüldüğü gibi, MP-diyagramı T²-diyagramında her T² istatistiğinin bulunduğu konumda yatay bir çizgi ile gösterilmektedir. Her yatay çizginin üzerine tüm değişkenler için birer sütun oluşturulmaktadır. Çizilen sütunlar yatay çizginin altında veya üzerinde yer almaktadır. Bu durum ortalamadaki sapmanın pozitif veya negatif olmasına bağlı olmaktadır. Sütunların uzunluğu ise sapmanın büyüklüğüne bağlı olarak 2 ile 4 değeri arasında değişmektedir. Standardize edilmiş sapma 2’nin üzerinde ise ilgili sütunun rengi gri, 3’ün üzerinde

⁴⁵Fuchs, Benjamini, a.g.e., s. 183.

ise siyah ile gösterilmektedir. İncelenen tüm değişkenlerin ortama değerleri standartlara uyuyorsa sütunlar yatay çizginin etrafında toplanmaktadır⁴⁶.

Grafik 3.5: “MP- Diyagramı” Örneği



“MP- Diyagramı” ’nın, incelenen “Yıldız Grafiği” ve bu bölümde incelenecek olan “Çokgen Grafiği” ile ortak yönleri eşanlı olarak tek değişkenli ve çok değişkenli diyagramların tek bir diyagramda gösterilebilmesidir. “Yıldız Grafiği” ’nde, prosesin kontrol altında olduğu orta büyüklükteki ışınlarla gösterilirken “MP- Diyagramı” ’nda düz bir çizgi ile “Çokgen Grafiği” ’nde ise minimum düzeydeki ışınlarla gösterilmektedir. “MP-Diyagramı” ’nda, tek değişkenli diyagram kontrol dışına çıktığında incelenen değişkenin ilgili sütunu koyulaşırken, “Yıldız Grafiği”

⁴⁶Fuchs, Benjamini, a.g.e., s. 183.

'nde ışınların boyu, pozitif sapma olduğunda uzamakta, negatif sapma olduğunda ise dikkat çekmeyecek düzeyde kısalmaktadır. Buna göre “MP-Diyagramları” ’nın diğer grafiklere göre görsel bir üstünlük gösterdiği söylenebilmektedir⁴⁷.

3.2.3.3 Çokgen Grafiği (Polyplot)

“Çokgen Grafiği”, her değişkenin ayrı çizgilerle gösterildiği değişken sayısı kadar kenarı olan bir çokgen şeklindedir. Çokgenin her bir kenarı eşit uzunluktadır. Çokgenin her bir köşesi ve ilgili çizgisi bir değişkeni temsil etmektedir. Çizginin uzunluğu gözlem değerine bağlı olarak değişmektedir. Köşeler değişkenlerin ortalama değerlerini göstermektedir. Değişkenler standardize edilmektedir. Gözlem değerleri ortalamalardan oluştuğundan gerekli standardizasyon işlemi aşağıdaki gibi yapılmaktadır⁴⁸:

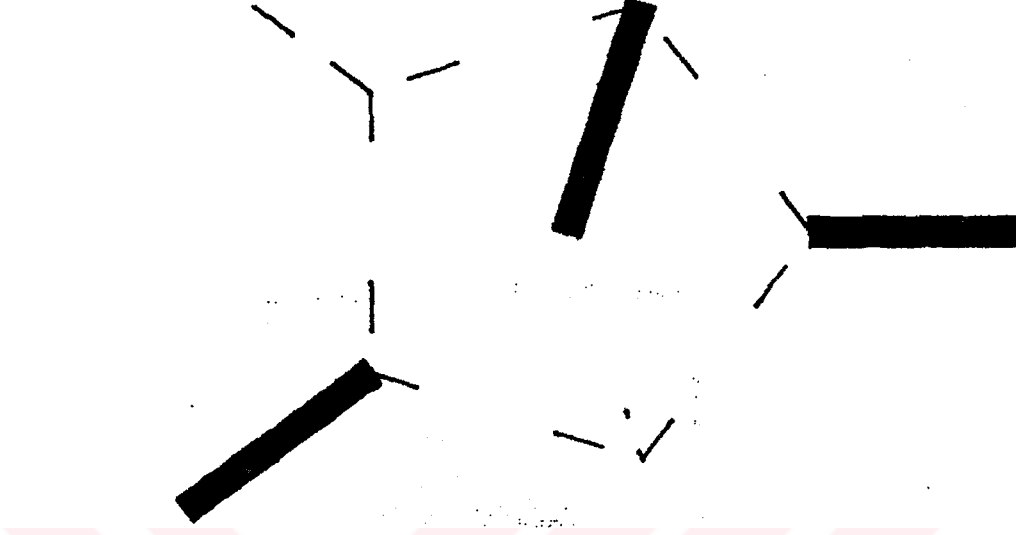
$$Z_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}}{s_i / \sqrt{n_i}}$$

Z_i değeri, i. örneğin ortalamasının (\bar{x}_i), proses ortalamasından (\bar{x}) kaç standart hata uzakta olduğunu göstermektedir. Örnek ortalaması (gözlem değeri), proses değerinden küçük olan gözlemlerde ışın köşeden çokgenin merkezine doğrudur. Örnek ortalaması, proses ortalamasından büyük olması durumunda ise köşeden başlayarak merkezden uzaklaşmaktadır. Çokgenin merkezi ile köşesi arasındaki uzaklık 4 standart hatadır ($Z=4$). Işınlar; $Z \leq 2$ olduğunda nokta, $2 < Z < 3$ olduğunda kesik çizgi, $Z \geq 3$ olduğunda ise düz çizgi ile gösterilmektedir. Renkler ile gösterim yapıldığında; $Z \leq 2$ olduğunda mavi, $2 < Z < 3$ olduğunda yeşil, $Z \geq 3$ olduğunda ise kırmızı ile gösterim tercih edilmektedir. Her “Çokgen Grafik” belirli bir zaman birimindeki durumu göstermektedir.

⁴⁷ Fuchs, Benjamini, a.g.e., s. 195.

⁴⁸ L.W. Blazek, B.Novic ve M.D.Scott, “Displaying Multivariate Data Using Polyplots”, *Journal of Quality Technology*, C.XIX, No.2, 1987, s. 70.

Grafik 3.6: 5 Değişkenli Bir “Çokgen Grafiği” Örneği



3.2.4 Bonferroni Eşitsizliği Yaklaşımı (Bonferroni Yöntemi)

“Bonferroni Eşitsizliği Yaklaşımı” ’nda p tane değişkenin herbiri için, 1.tip hatası α/p olan tek değişkenli kontrol diyagramları çizilmektedir. Ancak bu yaklaşım, T^2 - diyagramının bir alternatifi olarak kabul edilmemektedir çünkü tek değişkenli diyagramlarda tüm değişkenler kontrol altındaymış gibi görünse bile proses değişkenleri arasındaki etkileşimden dolayı kontrol dışı bir durum ile karşılaşılabilir⁴⁹.

Her değişken için hesaplanabilen Bonferroni aralıkları aşağıdaki gibidir⁵⁰:

⁴⁹ F.B. Alt, “Multivariate Statistical Quality Control”, *The Encyclopedia of Statistical Sciences*, C:VI, 1984, s. 113.

⁵⁰ R. A. Johnson, D.W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 4. baskı, New Jersey, Prentice Hall, 1998, s. 250.

$$\begin{aligned}
& P \left[\bar{X}_1 - t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \bar{X}_1 \leq \bar{X}_1 + t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{p} \\
& P \left[\bar{X}_2 - t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \bar{X}_2 \leq \bar{X}_2 + t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{p} \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& P \left[\bar{X}_p - t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \leq \bar{X}_p \leq \bar{X}_p + t_{n-1,(\alpha/2p)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{p}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

T^2 - diyagramında uyarı veren bir gözlem vektörü olduğunda, Alt'ın (1985) önerdiği şekilde hesaplanan Bonferroni aralıkları çok geniş olabileceğinden, sorunun hangi değişken(ler)den kaynaklandığının belirlenmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Bu durumda güven aralığının daraltılması bir çözüm gibi görünse de bunun karşılığında α olasılığının (hatalı uyarı verme olasılığı) arttırıldığı göz ardı edilmemelidir.

Bonferroni aralıklarına alternatif olarak tek değişkenli t - istatistiğine dayanan farklı bir yaklaşım önerilmektedir. Buna göre T^2 - diyagramında uyarı veren gözlem vektörünün bileşenleri, aşağıda formülü verilen t -istatistiğine göre küçükten büyüğe sıralanır. En küçük t değerine sahip bileşenin uyarıya en az, en büyük t değerine sahip bileşenin ise en fazla katkısı olduğu sonucuna varılabilmektedir. Ancak kesin bir yargıya varabilmek için daha fazla proses bilgisine sahip olmak gerekmektedir.⁵¹

$$t = \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_{i,geçmiş})}{\left[s_{ii} \left[\frac{1}{n_{yeni}} + \frac{1}{n_{geçmiş}} \right] \right]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.46}$$

⁵¹ N. Doğanaksoy, F.W. Faltin, W.T. Tucker, "Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment", *Commun. Statist.-Theory Meth.*, C.XX, No:9, 1991, s. 2781.

\bar{x}_i = i. değişkenin örnek ortalaması

$\bar{x}_{i,geçmiş}$ = i.değişkenin "Geçmiş Veri Kümesi" 'ndeki ortalaması

s_{ii} = i. değişkenin tahmini varyansı

3.2.5 M-İstatistiği Yaklaşımı

$x' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$, anakütle ortalaması \bar{X} , varyans-kovaryans matrisi Σ olan bir tesadüfi gözlem vektörü ve $C_{R,\alpha}$ değişkenler arasındaki korelasyon yapısına bağlı olan bir kritik nokta olarak tanımlandığında, maksimumu ifade eden M istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır⁵².

$$M = \max_{1 \leq i \leq p} \frac{|x_i - \bar{X}_i|}{\sigma_i} \quad (3.47)$$

x_i = Gözlem vektörünün i.bileşen değeri

\bar{X}_i = i. değişkenin anakütle ortalaması

σ_i = i.değişkenin anakütle standart sapması

Her bir çok değişkenli vektör için bir M istatistiği hesaplanıp grafiği çizildiğinde, $C_{R,\alpha}$ değeri ÜKL olarak alınmakta ve uyarı veren gözlem vektörünün bileşenleri için aşağıdaki güven aralığı hesaplanmaktadır:

⁵² A.J. Hayter, K.L. Tsui, "Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems *Journal of Quality Technology*, C.XXVI, No:3, 1994, s. 199.

$$P(x_i - \sigma_i C_{R,\alpha} \leq \mu_i \leq x_i + \sigma_i C_{R,\alpha}) = 1 - \alpha \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.48)$$

Hesaplanan güven aralıklarının, anakütle ortalama değerlerini (\bar{X}_i) kapsayıp kapsamadığı araştırılır. Güven aralığı, kendi anakütle ortalama değerini içermiyorsa, prosesteki uyarının bu bileşenden kaynaklandığı söylenebilir. $p=2$ için çeşitli r ve α 'ya bağlı $C_{R,\alpha}$ değerleri geliştirilmiştir⁵³. Ancak $p \geq 3$ durumunda $C_{R,\alpha}$ değerleri simülasyon yöntemiyle tahmin edilebilmektedir.⁵⁴ Bu durumda $C_{R,\alpha}$ değeri aşağıdaki adımlar izlenerek tahmin edilebilmektedir⁵⁵:

- Çok değişkenli normal dağılan bir anakütleden büyük bir örnek seçilerek, standartlaştırma işlemi gerçekleştirilmekte ve ortalama vektörü sıfır, varyans-kovaryans matrisi, korelasyon matrisi (R) olan bir veri kümesi elde edilmektedir.

- $x^i = (x_1^i, \dots, x_p^i)$ $i=1, \dots, n$ vektörleri için M istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$M^i = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j^i| \quad (3.49)$$

- $\{M^1, \dots, M^n\}$ örneğinin kümülatif olasılıkları hesaplanarak $(1-\alpha)$. yüzdeler kısmına karşılık gelen M değeri, $C_{R,\alpha}$ değeri olarak kabul edilmektedir. Simülasyonun doğru sonuçlar verebilmesi için oldukça büyük örneklerle çalışılması gerekmektedir. Bu nedenle M-istatistiği ile yaklaşım uygulamada yaygın olarak kullanılamamaktadır.⁵⁶

⁵³ R.E. Bechhofer, C.W. Dunnet, "Percentage Points of Multivariate Student t Distributions", **Selected Tables in Mathematical Statistics**, C. XI, American Mathematical Society, Providence, R.I.

⁵⁴ A.M. Law, W.D. Kelton, **Simulation Modelling and Analysis**, New York, McGraw-Hill, 1982, s. 505.

⁵⁵ Hayter, Tsui, a.g.e., s. 203.

⁵⁶ Hayter, Tsui, a.g.e., s. 199.

3.2.6 D-İstatistiği Yaklaşımı

T_i^2 : i. değişken olmadan hesaplanan T^2 değeri olarak tanımlandığında, D_i istatistiği aşağıdaki gibi elde edilmektedir⁵⁷:

$$D_i = T^2 - T_i^2 \quad (3.50)$$

Tüm değişkenler için D_i değerleri elde edilmekte ve kısmen büyük değere sahip olanların proseste uyarıya neden olduğu düşünülmektedir. D_i 'lerin dağılımı, χ^2 dağılımına uygun olduğundan, $\chi_{\alpha,1}^2$ tabii değeriyle karşılaştırılmaktadır. $D_i > \chi_{\alpha,1}^2$ durumunda i. değişken prosesten çıkarılmaktadır. Bu yaklaşım diğer çok değişkenli kontrol diyagramları için de kullanılabilecek bir proses uyarı ölçüsü olarak kabul edilmektedir⁵⁸. Ancak en büyük dezavantajı değişken sayısı arttıkça oluşabilecek olası seçimlerin artmasıdır.

(Runger, Alt, Montgomery, 1996) geliştirdiği bu ayrıştırma yönteminin dışında bu yönteme benzeyen birçok ayrıştırma yöntemi bulunmaktadır. Murph (1987)'nin yaklaşımı bunlar arasında en çok kullanılanlardan biridir. Yönteme göre \bar{x}^* proseste uyarı veren ortalama vektörü olarak tanımlandığında ($T^2(\bar{x}^*) > \text{ÜKL}$), \bar{x}^* vektöründeki hangi değişken(ler)in uyarı verdiğinin araştırılması gerekmektedir. Bu amaçla \bar{x}^* vektörü $\bar{x}^* = (\bar{x}^{*(1)}, \bar{x}^{*(2)})$ olmak üzere 2 bölüme ayrılmaktadır⁵⁹.

⁵⁷ G.C. Runger, F.B. Alt, D.C. Montgomery, "Contributors to a Multivariate Statistical Process Control Chart Signal", *Commun. Statistic.-Theory Meth.*, Vol.XXV, No:10, 1996, s. 2209.

Montgomery, *a.g.e.*, s. 521.

⁵⁸ Runger, Alt, Montgomery, *a.g.e.*, s. 2210.

⁵⁹ Gözlenen ortalama vektörüyle (\bar{x}^*) birlikte prosesin ortalama vektörü (\bar{X}) ve varyans-kovaryans matrisi $\text{de}(\Sigma)$ bölümlere ayrılmaktadır: $\bar{X} = (\bar{X}^{(1)} \bar{X}^{(2)})$, $\bar{X}^{(1)}$: p_1 tane değişkenin proses ortalamalarını gösteren ortalama vektörü, $\bar{X}^{(2)}$: p_2 tane değişkenin proses ortalamalarını gösteren ortalama vektörüdür. Σ_{11} : p_1 tane değişkenin varyans-kovaryans matrisi, Σ_{22} : p_2 tane değişkenin varyans-kovaryans matrisidir.

($p=p_1+p_2$). $\bar{x}^{*(1)}$ uyarı vereceği düşünülen değişkenlerden oluşan vektördür ve değişken sayısı p_1 'e eşittir. $\bar{x}^{*(2)}$ ise \bar{x}^* vektöründen, $\bar{x}^{*(1)}$ 'deki değişkenler çıkarıldıktan sonra kalan değişkenlerden oluşan ortalama vektörüdür ve değişken sayısı p_2 'dir. Örnek büyüklüğü birden büyük ($n>1$) olan m tane örnek çekildiğinde p değişken için hesaplanan T^2 istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$T_p^2 = T^2(\bar{x}^*) = n(\bar{x}^* - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x}^* - \mu) \quad (3.51)$$

Uyarı vereceği düşünülen değişken grubu (p_1) için hesaplanan T^2 istatistiği ise;

$$T_{p_1}^2 = T^2(\bar{x}^{*(1)}) = n(\bar{x}^{*(1)} - \bar{X}^{(1)})' \Sigma_{11}^{-1} (\bar{x}^{*(1)} - \bar{X}^{(1)}) \quad (3.52)$$

formülleriyle elde edilmektedir. T^2 istatistikleri arasındaki fark Murphy'nin D istatistiğini belirtmektedir⁶⁰. D istatistiği aşağıdaki hipotezlerin test edilebilmesi için hesaplanmaktadır:

H_0 : Uyarı vereceği düşünülen değişken grubu (p_1) proseste uyarıya neden olmamaktadır.

H_1 : Uyarı vereceği düşünülen değişken grubu (p_1) proseste uyarıya neden olmaktadır.

$$D = T_p^2 - T_{p_1}^2 \quad (3.53)$$

D istatistiğinin büyük bir değer alması durumunda p_1 değişkenden oluşan değişken grubunun proseste uyarıya neden olmadığına, küçük olması durumunda ise prosesteki problemin kaynağı olabileceği sonucuna varılmaktadır. D istatistiğinin

⁶⁰ B.J. Murphy, "Selecting out of Control Variables with the T^2 Multivariate Quality Control Procedure", *The Statistician*, C.XXVI, 1987, s. 574.

büyüklüğüne, $\chi_{p2,\alpha}^2$ kritik değeriyle karşılaştırma yapılarak karar verilmektedir⁶¹. $D > \chi_{p2,\alpha}^2$ olması durumunda D'nin büyük olduğuna (H_0 kabul), $D \leq \chi_{p2,\alpha}^2$ olması durumunda ise küçük olduğuna (H_0 red) karar verilmektedir. Anakütle parametrelerinin bilinmemesi durumunda D istatistiği F testi ile test edilmektedir⁶².

3.2.7 Temel Bileşenler Analizi Yaklaşımı İle Kontrol Dışındaki Değişkenin Belirlenmesi

T^2 diyagramında kontrol dışı bir durum belirlendiğinde uyarının hangi değişken(ler)den kaynaklandığının saptanmasında Temel Bileşenler Analizi kullanılabilir⁶³. Bu yaklaşımın uygulanabilmesi için T^2 -diyagramında kontrol dışına çıkan örneğe ilişkin temel bileşenler hesaplanmaktadır. Anlamlı temel bileşenler için tek değişkenli kontrol diyagramları çizilmektedir. Kontrol dışına çıkan temel bileşen(ler)in, prosesi daha çok etkiledikleri söylenebilmektedir. Ancak hangi değişken(ler)in bu etkiyi oluşturdukları doğrudan belirlenmemektedir. Bileşenlerin ağırlıklarına bakılarak tahminler yapılmaktadır. Bu yaklaşımda değişkenler yerine bileşenler önemli olduğundan prosese ilişkin eksik bilgiler verebilmektedir⁶⁴.

Bu bölümde ilk olarak MYT Ayırıştırma Yöntemi'nin avantajları açıklanmış, ayırıştırma sonucunda elde edilen koşulsuz ve koşullu terimlerin hesaplanması ve yorumlanması üzerinde durulmuştur. Kontrol dışı uyarıların nedeninin saptanmasında, çok değişkenli ve tek değişkenli kontrol diyagramlarının birlikte çizilmesi yaklaşımının en sık kullanılan yaklaşımlardan biri olduğu belirtilmiş ancak uygulamada dikkat edilecek noktalara yer verilmiştir. "Step Down Süreci" nin diğer yöntemlerden farkına değinilmiş ve T^2 -diyagramlarını destekleyici bir yöntem olarak

⁶¹ Murphy, a.e., s. 575.

⁶² Uygun F istatistiği Seber (1984)'de belirtilmektedir.

⁶³ J.E. Jackson, R.H. Morris, "An Application of Multivariate Quality Control to Photographic Processing", *Journal of American Statistical Assoc.*, 1957, s. 186-199.

J.E. Jackson, "Multivariate Quality Control", *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, C.XIX, No:11, 1985, s. 2675.

⁶⁴ A. Nijhuis, S.Jong, B.G.M. Vandeginste, "The Application of Multivariate Quality Control in Gas Chromatography", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, C.XLVII, 1999, s. 107-125.

açıklanmıştır. Grafik Gösterim başlığı altında yer alan grafik yöntemlerin birbirlerine olan benzerlikleri ve farklılıkları vurgulanarak nasıl yorumlanacakları üzerinde durulmuştur. T^2 diyagramında uyarı veren bir gözlem vektöründe sorunun kaynağının, vektörü oluşturan değişkenler için Bonferroni aralıklarının hesaplanması ile ortaya çıkarılabileceği belirtilmiştir. M-istatistiği ve D-istatistiği yaklaşımları alternatif ayrıştırma yöntemleri olarak sunulmuş ve son olarak Temel Bileşenler Analizi'nin prodesteki sorunun kaynağının belirlenmesinde de uygulanabilen bir analiz olduğuna değinilmiştir.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

CAM SANAYİNDE HOTELLING T² DİYAGRAMININ ÇİZİLMESİ VE MYT AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ'NİN UYGULANMASI

Uygulama alanı olarak imalat sektörünün taş ve toprağa dayalı sanayiinin (cam ve cam ürünleri, seramik ve seramikten eşya, çimento) cam ve cam ürünleri seçilmiştir. Bunun en önemli nedeni bu alanda üretilen yüksek kalitedeki ürünlerin uluslararası pazarlarda tercih edilmesi ve kalitenin bazen gözle bile görülebilecek kadar (ürünlerde baloncuk, kalınlık veya kırık olması) kolay saptanabilir olmasıdır. Özellikle kalitenin kolay gözlenmesi bu tür ürünlerde kalite kontrolünün çok daha özenle yapılmasını gerektirmektedir.

Taş ve toprağa dayalı sanayi grubunun gelişimi, üretilen ürünlerin tüketildiği başta inşaat sektörü olmak üzere hizmetler, enerji ve otomotiv sanayinin gelişimi dolayısıyla da ekonominin genel durumu ile yakından ilişkilidir. 1997-1998 yıllarında yaşanan küresel kriz sonrasında 2000 yılında %4,7 oranında büyüyen Dünya ekonomisinin 2001 yılında başta A.B.D olmak üzere gelişmiş ülkelerin durgunluğa girmesi ile bir yavaşlama döneminin yaşanması taş ve toprağa dayalı sanayi grubunun gelişimini olumsuz, 2002 ve 2003 yıllarında gerek Dünya gerek Türk ekonomisinde yaşanan büyüme ise olumlu yönde etkilemiştir.

Dünya cam üretimi yaklaşık toplam 110 milyon ton olup, bunun 58 milyon tonu (%53) cam ambalajı, 32 milyon tonu (%29) düz cam, 5,5 milyon tonu (%5) cam ve cam eşyası, 2,5 milyon tonu (%3) cam lifi-cam yünü ve 12 milyon tonu (%10) ise diğer cam ürünlerinden oluşmaktadır. Cam üretiminin %33,8'i Avrupa'da, %33,6'sı Asya'da, %29,4'ü Amerika'da ve %3,2'si diğer ülkelerde gerçekleşmektedir.

Türkiye'de cam sanayiinin temelleri Şişecam ile birlikte 1934 yılında Paşabahçe'de atılmış, 1935 yılında üretime başlanmıştır. 1936 yılında üretim 3000 tona ulaşmıştır. Çekme düzcam üretimine 1961 yılında Çayırova Cam Sanayiinde,

cam üretiminde kullanılan kalıpların, makine ve teçhizatın üretimine ise 1970 yılında Camiș Makine Kalıp Fabrikası'nda başlanmıştır. 1984 yılında otomatik züccaciye üretimi için Kırklareli Cam Sanayii A.Ş., 1987 yılında ise cam ev eşyası ürünlerinde kullanılacak kağıt karton ambalajları üretecek Camiș Ambalaj Sanayi A.Ş. kurulmuştur. Şişecam'da yönetim düzcam, ambalaj, cam ev eşyası ve kimyasallar olmak üzere dört grupta, üretilen ürünler ise; cam ambalaj, cam elyaf, cam ev eşyası, düzcam, kağıt karton ambalaj, krom kimyasalları, soda ve vitamin K₃ olmak üzere 8 grupta toplanmaktadır. Araştırmada incelenen ürün, cam ev eşyasıdır. Cam ev eşyalarının üretimi, pazarlaması ve ambalajı; Paşabahçe Cam San. ve Tic. A.Ş., Paşabahçe Eskişehir Cam San. ve Tic. A.Ş., Paşabahçe Mağazaları A.Ş. Camiș Ambalaj San. A.Ş., Paşabahçe Glas GmbH kuruluşları tarafından gerçekleştirilmektedir. Cam ev eşyaları, ayaklı bardaklar, ayaksız bardaklar, masaüstü hediyelik eşya ve mutfak eşyası, ısıya dayanıklı ürünler (borcamlar) olmak üzere dört farklı kategoride üretilmektedir.

Ülkemizde yılda ortalama 1 milyar dolar olan toprak sanayi ürünleri ihracatının toplam ihracat içerisindeki payı %3,2'dir. Sanayi grubu ihracatının %41'ini cam ve cam ürünleri, %33'ünü seramik, seramikten eşya ve %26'sını çimento oluşturmaktadır. Sanayideki ihracat içerisinde ilk sırayı alan cam ve cam ürünleri ihracatı 2003 yılında yaklaşık 411 milyon dolardır.

4.1 Araştırmanın Amacı ve Yöntemi

Daha önce de belirtildiği gibi araştırmanın amacı, çok değişkenli istatistik proses kontrol araçlarından biri olan Hotelling T² ve örnek ortalamalarındaki değişimin tek değişkenli kontrol diyagramlarında gösterimini sağlayan \bar{x} -diyagramlarını çizerek, Hotelling T² diyagramlarının sağladığı kolaylıkları ve üstünlükleri cam sanayiinde gerçekleştirilecek bir uygulamayla göstermektir. Bu bölümde Hotelling T² diyagramında uyarı veren gözlem vektörlerinde uyarının hangi değişken(ler)den kaynaklandığını belirlemek amacıyla diğer ayrıştırma yöntemlerinin birçoğunu kapsadığı iddia edilen MYT Ayrıştırma Yöntemi uygulanarak, elde edilen sonuçların tek değişkenli kontrol diyagramlarında uyarı veren noktalardan farklı olup olmadığı araştırılmaktadır.

4.2 Araştırmanın Değişkenleri ve Verilerin Toplanması

Araştırma konusu olan ürün ayaksız bardaklar grubunda yer alan “İstanbul” serisinin bira bardağıdır. Bardağın kalite kontrolünde; yükseklik (X_1), ağız çapı (X_2), dip çapı (X_3), et kalınlığı (cidar) (X_4), dip yüksekliği (X_5) ve köpük payı (X_6) olmak üzere 6 kalite değişkeni mm. cinsinden incelenmektedir. Bardağın şekli (Ek: 1)’de gösterilmektedir.

Araştırmanın verileri, işletmenin “Ürün Ölçü ve Hacim Kontrol Raporları” ’ında yer alan tesadüfi örneklerden oluşmaktadır. Büyüklüğü 12 ($n=12$) bardaktan oluşan örnekler işletmede sekiz saatte bir çekilmektedir. Araştırmada I. Aşama diyagramlarının çizilebilmesi için 12 birimlik 87 (fabrika tarafından prosesin kontrol altında olduğu iddia edilen süreçte seçilen örnek sayısıdır), II. Aşama diyagramlarının çizilebilmesi için ise 30 (prosesin kontrol sürecinde kaydedilen örnek sayısıdır¹) örnek olmak üzere öncelikle 117 örnek incelenmiştir. Daha sonra çizilen II. Aşama diyagramında çok fazla kontrol dışı noktanın olması ayrıştırma yönteminin uygulanmasını güçleştirdiği için yeniden 30 örnekten oluşan bir veri kümesi ile ikinci kez II. Aşama diyagramlarının çizilmesine karar verilmiştir. Böylece toplam 1764 ($(117+30) \times 12$) bardağın incelenmesine dayanan kontrol işlemi gerçekleştirilmiştir.

4.3 Varsayımların Araştırılması

Kontrol diyagramlarının çizilebilmesi için öncelikle teorik kısımda belirtilen varsayımların sağlanıp sağlanmadığının araştırılması gerekmektedir. Bu amaçla “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin oluşturulması için 12 birimlik 87 örnekten oluşan veri kümesinin bu varsayımlara uygunluğunun incelenmesi gerekmektedir².

¹ Birinci bölümde de ayrıntılı olarak belirtildiği gibi Shewhart, \bar{x} - diyagramlarının çizilebilmesi için örnek büyüklüğü 5 olan en az 25 örnekle çalışılmasını önermektedir. Çalışmada \bar{x} -diyagramları ile birlikte çok değişkenli kontrol diyagramının da çizileceği dikkate alındığında örnek büyüklüğü 12 olan 30 örneğin tesadüfi olarak kontrol amaçlı seçilmesinin uygulamayı anakütle sonuçlarına yaklaştıracığı düşünülmektedir.

² Doğrusallık, normallik ve varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımlarının geçerliliği, Excel 2000 ve SPSS 10.0 yazılımları yardımıyla araştırılmaktadır.

4.3.1 Doğrusallık Varsayımı

Değişkenler arasında doğrusallığın sağlanıp sağlanmadığının araştırılmasında doğrusal korelasyon katsayıları ve bu katsayıların anlamlılıkları önemlidir. 6 kalite değişkeni ve 87 örnekle hesaplanan doğrusal korelasyon katsayıları Tablo 4.1'deki korelasyon matrisinde gösterilmektedir

Tablo 4.1 Kalite Değişkenlerinin Korelasyon Matrisi

| | | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPUK |
|----------|--------------------|----------|---------|--------|-------|--------|-------|
| YUKSEKLI | Pearson Korelasyon | 1,000 | -,045 | -,023 | ,066 | ,118 | -,120 |
| | Anlamlılık | , | ,680 | ,834 | ,541 | ,274 | ,270 |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |
| AGIZCAP | Pearson Korelasyon | -,045 | 1,000 | ,071 | ,313 | -,137 | ,042 |
| | Anlamlılık | ,680 | , | ,513 | ,003 | ,207 | ,701 |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |
| DIPCAP | Pearson Korelasyon | -,023 | ,071 | 1,000 | ,118 | -,258 | ,235 |
| | Anlamlılık | ,834 | ,513 | , | ,275 | ,016 | ,028 |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |
| ETKAL | Pearson Korelasyon | ,066 | ,313 | ,118 | 1,000 | -,174 | -,061 |
| | Anlamlılık | ,541 | ,003 | ,275 | , | ,106 | ,577 |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |
| DIPYUK | Pearson Korelasyon | ,118 | -,137 | -,258 | -,174 | 1,000 | -,516 |
| | Anlamlılık | ,274 | ,207 | ,016 | ,106 | , | ,000 |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |
| KOPUK | Pearson Korelasyon | -,120 | ,042 | ,235 | -,061 | -,516 | 1,000 |
| | Anlamlılık | ,270 | ,701 | ,028 | ,577 | ,000 | , |
| | N | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 | 87 |

Matris incelendiğinde katsayılar büyükten küçüğe, dip yüksekliği ile köpük payı arasında (-0,516), ağız çapı ile et kalınlığı arasında (0,313), dip çapı ile dip yüksekliği arasında (-0,258), dip çapı ile köpük payı arasında (0,235), et kalınlığı ile dip yüksekliği arasında (-0,174), ağız çapı ile dip yüksekliği arasında (-0,137), yükseklik ile köpük payı arasında (-0,120), yükseklik ile dip yüksekliği arasında (0,118), dip çapı ile et kalınlığı arasında (0,118), ağız çapı ile dip çapı arasında (0,071), yükseklik ile et kalınlığı arasında (0,066), et kalınlığı ile köpük payı arasında (-0,061), yükseklik ile ağız çapı arasında (-0,045), ağız çapı ile köpük payı arasında (0,042) ve yükseklik ile dip çapı arasında ise (-0,023) olduğu görülmektedir. Katsayıların anlamlılıkları incelendiğinde, dip yüksekliği ile köpük payı arasındaki ilişkinin (-0,516), ağız çapı ile et kalınlığı arasındaki ilişkinin (0,313), dip çapı ile dip

yüksekliği (-0,258) arasındaki ilişkinin ve dip çapı ile köpük payı arasındaki ilişkinin (0,235) anlamlı olduğu anlaşılmaktadır yani aralarında doğrusal bir ilişkinin varlığından söz edilebilmektedir. Diğer korelasyon katsayılarının anlamsız olması, değişkenlerin birbirinden bağımsız olmasından, doğrusal olmayan ilişkilerin varlığından kaynaklanabileceği düşünülmektedir.

Anlamlı olan katsayılar, değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin varlığını desteklemektedir. Hesaplanan korelasyon katsayılarının değerleri yüksek değildir. Ancak anlamlı olanlar, değişkenlerin birbirinden bağımsız olmadıklarını göstermektedir. Aralarındaki korelasyon katsayısı anlamsız olan değişkenler için daha üst dereceden fonksiyonlar denenerek var olabilecek doğrusal olmayan ilişkilerin ortaya çıkarılması gerekmektedir. Bu durumda öncelikle 2. derece fonksiyonlar ile hesaplanan çoklu korelasyon katsayılarının, basit korelasyon katsayılarından büyük olup olmadıkları incelenecektir. $r_{yxx^2} > r_{yx}$ ve r_{yxx^2} anlamlı ise ya fonksiyonun derecesi yükseltilerek daha üst dereceden fonksiyonlar denenebilir veya değişkenlere teorik kısımda önerilen ($\log X$, X^2 , $-1/X$, \sqrt{X}) dönüşümler uygulanabilir.

Anlamsız olan basit korelasyon katsayılarıyla (r_{yx}), 2. derece fonksiyonlara ait çoklu korelasyon katsayıları aşağıda karşılaştırmalı olarak incelenerek r_{yxx^2} 'lerin anlamlılık düzeyleri belirtilmektedir:

| Değişkenler | Karşılaştırma | Anlamlılık |
|--------------------------|--|------------|
| Yükseklik-Ağız çapı | $r_{yx} = -0,045 > r_{yxx^2} = -0,040 $ | (0,680) |
| Yükseklik-Dip çapı | $r_{yx} = -0,023 < r_{yxx^2} = -0,03 $ | (0,834) |
| Yükseklik-Dip yüksekliği | $r_{yx} = 0,118 = r_{yxx^2} = 0,118 $ | (0,274) |
| Yükseklik-Köpük payı | $r_{yx} = -0,12 > r_{yxx^2} = -0,118 $ | (0,270) |

| | | |
|------------------------------|---|---------|
| Yükseklik-Et kalınlığı | $r_{yx} = 0,066 > r_{yxx^2} = 0,063 $ | (0,528) |
| Ağız çapı-Dip çapı | $r_{yx} = 0,071 > r_{yxx^2} = 0,070 $ | (0,513) |
| Ağız çapı-Dip yüksekliği | $r_{yx} = -0,137 = r_{yxx^2} = -0,137 $ | (0,438) |
| Ağız çapı-Köpük payı | $r_{yx} = 0,042 < r_{yxx^2} = 0,054 $ | (0,887) |
| Dip çapı- Et kalınlığı | $r_{yx} = 0,118 < r_{yxx^2} = 0,2144 $ | (0,137) |
| Et kalınlığı- Dip yüksekliği | $r_{yx} = -0,174 < r_{yxx^2} = -0,176 $ | (0,187) |
| Et kalınlığı- Köpük payı | $r_{yx} = -0,061 < r_{yxx^2} = -0,1264 $ | (0,508) |

Sonuçlar bazı değişkenler arasındaki, r_{yxx^2} değerlerinin r_{yx} 'den yüksek ancak tüm r_{yxx^2} 'lerin anlamsız olduğunu göstermektedir. Herhangi bir r_{yxx^2} 'nin anlamlı olması halinde, kısmi korelasyon katsayılarının ($r_{yx \cdot x^2}$ ve $r_{yx^2 \cdot x}$) da anlamlılıklarının incelenmelidir. Bu durumda dönüşümün yapılması gerekli görülmemektedir. Analize değişkenlerin orijinal halleriyle devam edilecektir.

4.3.2 Normallik Varsayımı

Veri kümesinin, çok değişkenli normal dağılım gösterebilmesi için öncelikle her kalite değişkeninin tek değişkenli normal dağılması gerekmektedir. Bu nedenle Kolmogorov- Smirnov testi ile tek değişkenli normalliğin sağlanıp sağlanmadığı araştırılmış ve Tablo 4.2-4.3-4.4-4.5-4.6'daki sonuçlar elde edilmiştir:

Tablo 4.2 Yükseklik Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları

Tek Örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | YUKSEK |
|----------------------|----------------|----------|
| N | | 87 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 150,3347 |
| | Standart Sapma | 1,2038 |
| Farklar | Mutlak | ,391 |
| | Pozitif | ,323 |
| | Negatif | -,391 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 3,652 |
| Anlamlılık | | ,000 |

Tablo 4.3: Ağız Çapı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları

Tek Örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | AGIZCAP |
|----------------------|----------------|---------|
| N | | 87 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 68,3464 |
| | Standart Sapma | ,1571 |
| Farklar | Mutlak | ,112 |
| | Pozitif | ,095 |
| | Negatif | -,112 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 1,049 |
| Anlamlılık | | ,221 |

Tablo 4.4: Et Kalınlığı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi

Sonuçları

Tek Örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | ETKAL |
|----------------------|----------------|---------|
| N | | 87 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 1,7353 |
| | Standart Sapma | 6,3E-02 |
| Farklar | Mutlak | ,111 |
| | Pozitif | ,060 |
| | Negatif | -,111 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 1,036 |
| Anlamlılık | | ,234 |

Tablo 4.5: Dip Yüksekliği Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları

Tek Örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | DIPYUK |
|----------------------|----------------|---------|
| N | | 87 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 14,6172 |
| | Standart Sapma | ,3854 |
| Farklar | Mutlak | ,110 |
| | Pozitif | ,110 |
| | Negatif | -,049 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | 1,023 |
| Anlamlılık | | ,246 |

Tablo 4.6: Köpük Payı Değişkeninin Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları

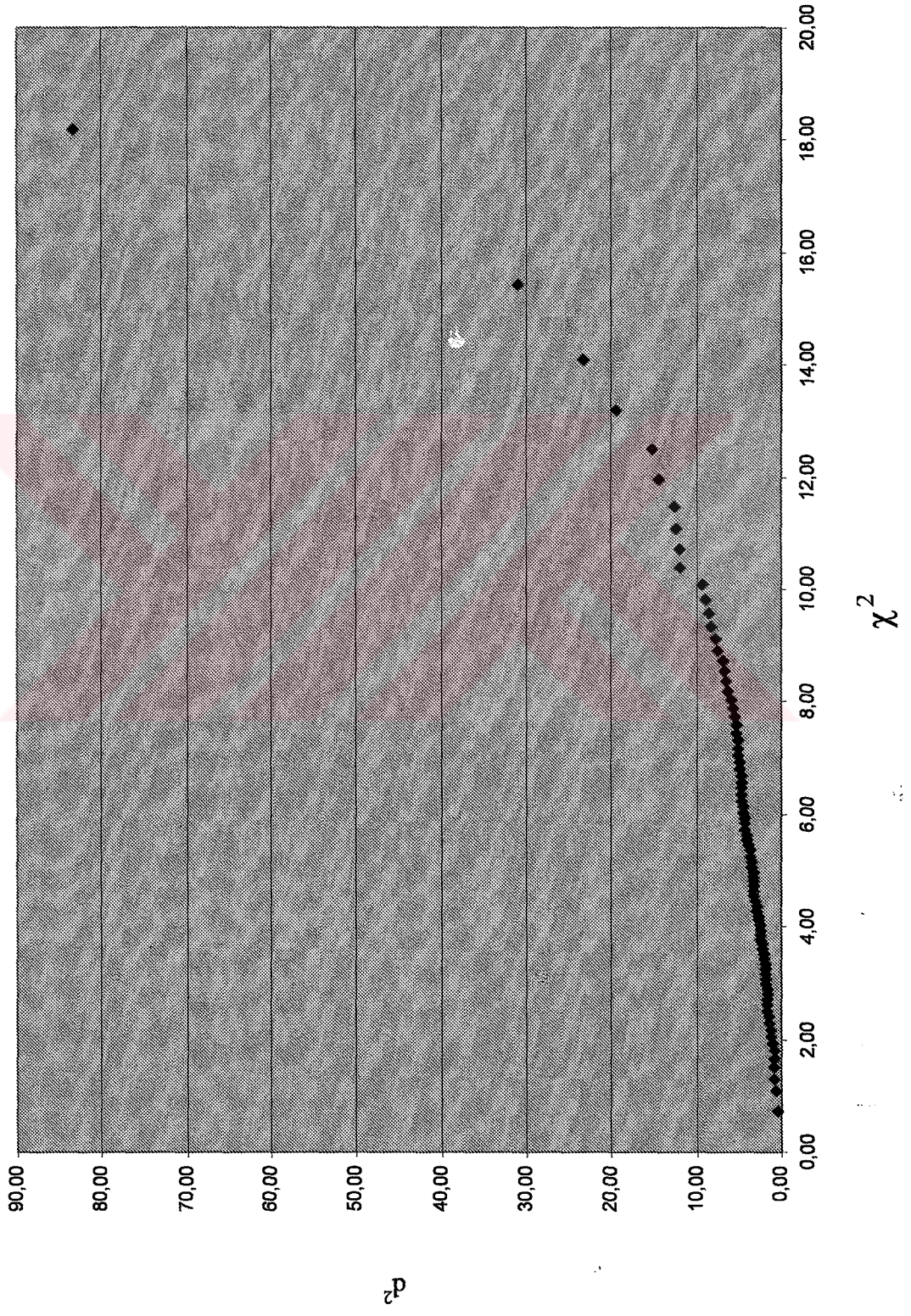
Tek Örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | KOPUK |
|----------------------|----------------|---------|
| N | | 87 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 26,2640 |
| | Standart Sapma | ,5863 |
| Farklar | Mutlak | ,077 |
| | Pozitif | ,077 |
| | Negatif | -,065 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | ,722 |
| Anlamlılık | | ,674 |

Tablolar incelendiğinde sıfır hipotezinin, yükseklik değişkeninde (%0) red, ağız çapı (%22,1), et kalınlığı (%23,4), dip yüksekliği (%24,6) ve köpük payında ise (%67,4) kabul edildiği anlaşılmaktadır. Bu sonuçlara göre yükseklik dışındaki değişkenler normal dağılmaktadır.

Teoriye göre veri kümesinin bu durumda çok değişkenli normal dağılımı mümkün değildir. Çizilen χ^2 - grafiği ile bu teori desteklenmektedir (Grafik 4.1).

Grafik 4.1: χ^2 -Grafığı (6 Değişken 87 Örnek)



Grafik 4.1'de doğrusal bir çizgi oluşması beklenmektedir. Ancak bu görünüm sağlanamamaktadır. Tüm kalite değişkenleri ve 87 örnekle hesaplanan Mahalinobis (d^2) ve χ^2 uzaklıkları arasındaki korelasyon katsayısı 0,7598'dir. Bu değer 1'e çok yakın bir değer olmadığı görülmektedir. Çok değişkenli normalliğin yükseklik değişkeninden dolayı sağlanmadığı bilinmektedir. Yükseklik dışındaki değişkenlerle (5 değişken 12 birimlik 87 örnekle), çok değişkenli normallik varsayımının sağlanıp sağlanamayacağı araştırılmış ve 5 değişken ve 87 örnekten oluşan veri kümesiyle hesaplanan d^2 ve χ^2 değerleri arasındaki korelasyon katsayısının 0,9443383 olduğu saptanmıştır. Katsayının önemli ölçüde yükseldiği görülmektedir. 5 değişken 87 örnekle çizilen χ^2 -grafığı incelendiğinde (Grafik 4.2) birkaç aykırı örneğin varlığı dikkat çekmektedir. Bu durum aykırı örnekler, veri kümesinden çıkarılarak 6 değişkenli χ^2 -grafığını (Grafik 4.3) çizme gereğini ortaya çıkarmaktadır. Grafik 4.1 incelendiğinde en aykırı örneğin 84. örnek olduğu anlaşılmaktadır. 84. örnek dışındaki örneklerle (86 örnekle) çizilen 6 değişkenli χ^2 -grafığındaki doğrusal ilişkinin derecesi, 0,7598'den 0,965968'e yükselmektedir. Bu durum artık yükseklik değişkeninin de 84. örnekteki yükseklik değeri çıkarıldıktan sonra normal dağıldığını göstermektedir (Tablo 4.7).

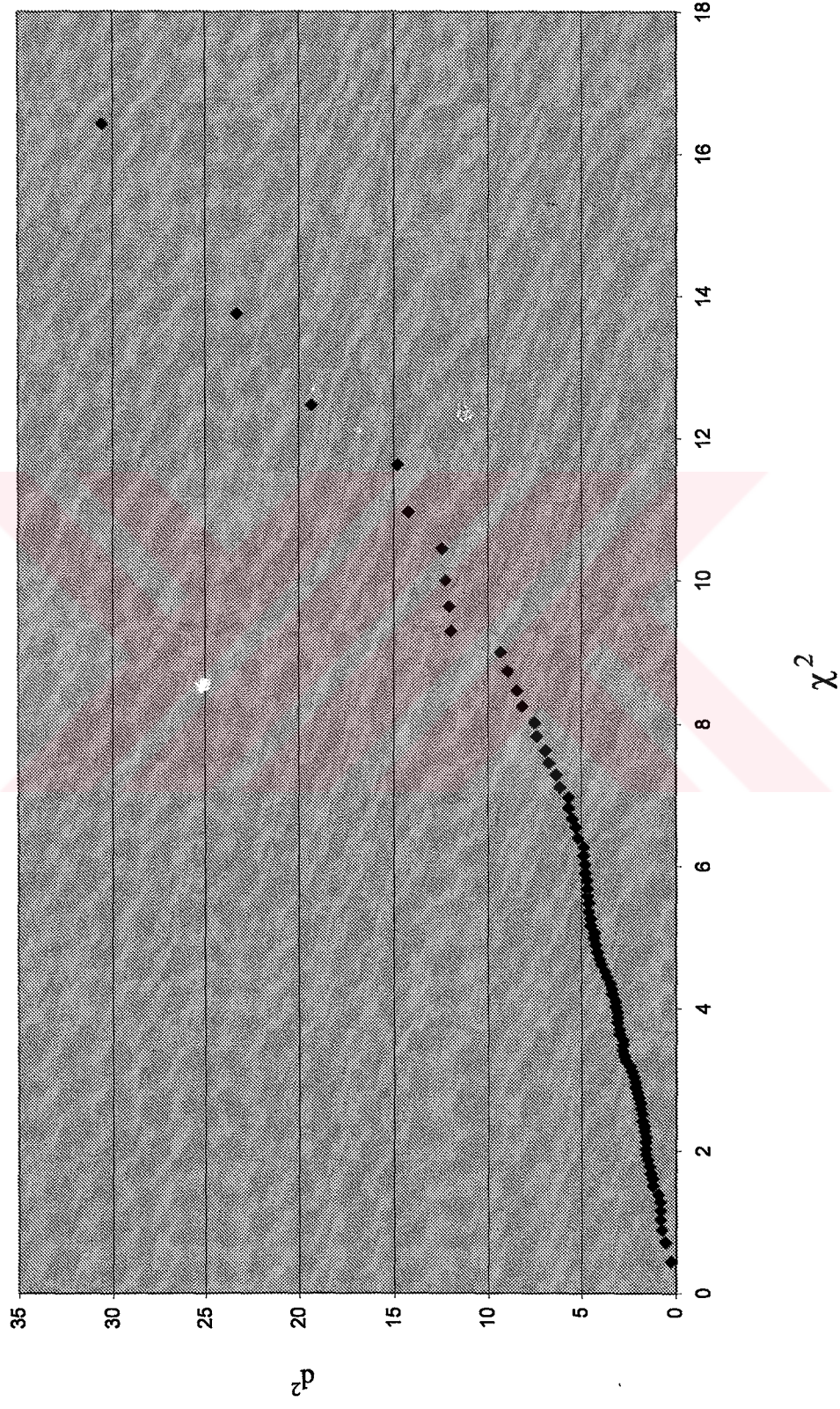
Tablo 4.7: Yüksek Değişkeninin 84. Birimi Çıkarıldığında Elde Edilen

Kolmogorov-Smirnov Testi Sonuçları

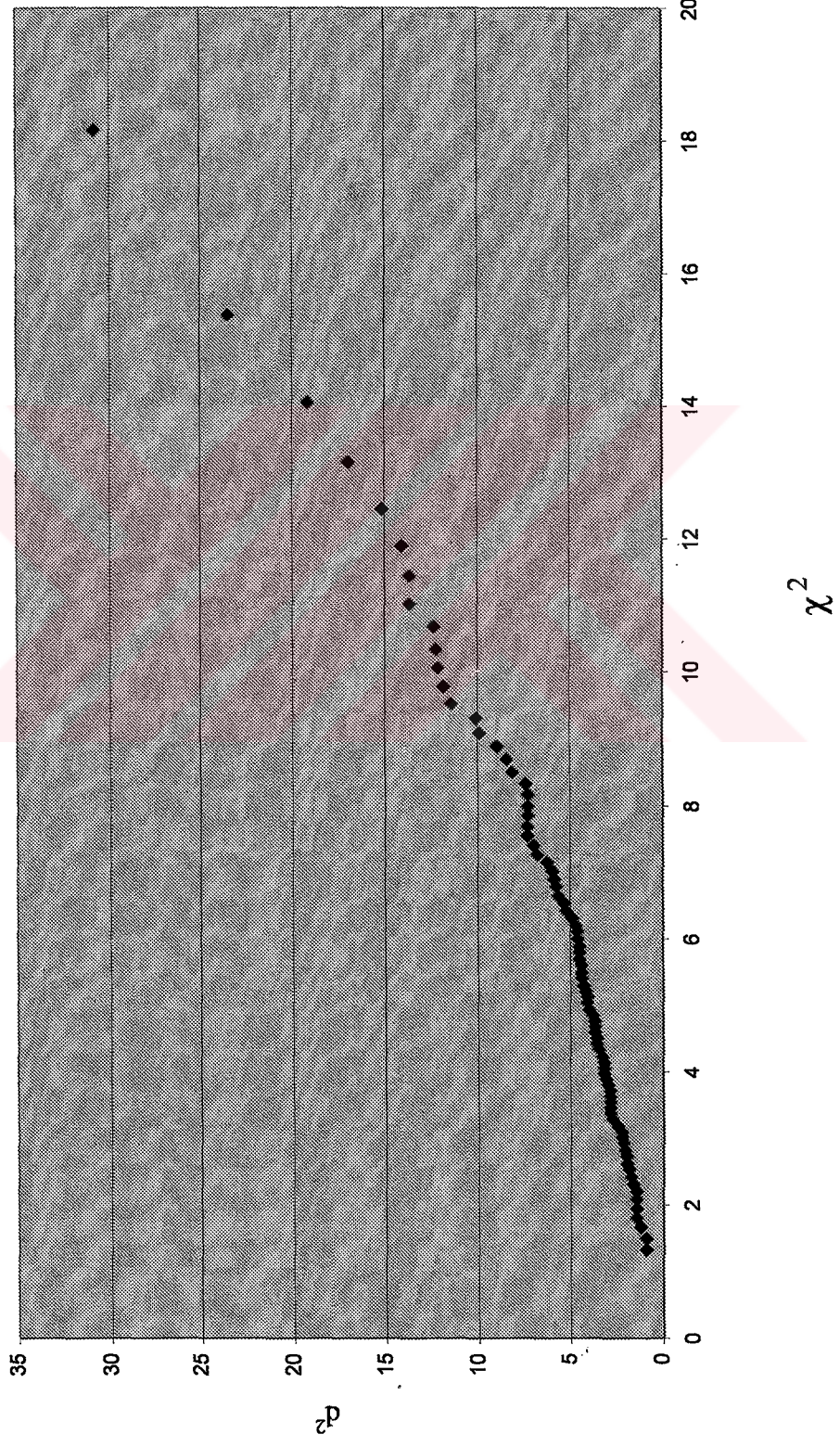
Tek örnek Kolmogorov-Smirnov Testi

| | | YUKSEK |
|----------------------|----------------|----------|
| N | | 86 |
| Normal Parametreler | Ortalama | 150,4621 |
| | Standart Sapma | ,1970 |
| Farklar | Mutlak | ,071 |
| | Pozitif | ,055 |
| | Negatif | -,071 |
| Kolmogorov-Smirnov Z | | ,660 |
| Anlamlılık | | ,777 |

Grafik 4.2: χ^2 -Grafığı (5 Değişken 87 Örnek)



Grafik 4.3: χ^2 -Grafığı (6 Değişken 86 Örnek)



4.3.3 Eş- Varyanslılık Varsayımı

Doğrusallık ve çok değişkenli normallik varsayımları sağlandıktan sonra eş-varyanslılığın irdelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla aşağıdaki hipotezlerin geçerliliği Box-M testiyle araştırılmış ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

$$H_0: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_{86}$$

H_1 : En az bir varyans-kovaryans matrisi farklıdır.

Tablo 4.8: Orjinal Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları

| | |
|--------|----------|
| BOX M | 3762,843 |
| F | 1,660 |
| sd1 | 1785 |
| sd2 | 100585 |
| Anlam. | ,000 |

Tablo 4.8 incelendiğinde sıfır hipotezinin red edildiği yani 86 varyans-kovaryans matrisinden en az birinin farklı olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumda “Değişkenlere Dönüşüm Uygulanması” başlığı altında eş-varyanslılığın sağlanması için önerilen dönüşümlerin (logaritmik, hiperbolik ve kare) uygulanması gerekmektedir. Değişkenlerin logaritmalarıyla hesaplanan Box-M test istatistiği Tablo 4.9’da görülmektedir.

Tablo 4.9: Logaritmik Dönüşüm Uygulanmış Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları

| | |
|--------|----------|
| Box M | 7328,910 |
| F | 3,233 |
| sd1 | 1785 |
| sd2 | 100585 |
| Anlam. | ,000 |

Logaritmik dönüşüm de etkili olmamakta yani sıfır hipotezi red edilmektedir.

Daha sonra değişkenlere hiperbolik ($1/X$) ve kare (X^2) dönüşüm uygulanmış ve Tablo 4.10-4.11’deki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4.10: Hiperbolik Dönüşüm Uygulanmış Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları

| | |
|--------|----------|
| Box M | 6347,924 |
| F | 2,800 |
| sd1 | 1785 |
| sd2 | 100585 |
| Anlam. | ,000 |

Tablo 4.11: Kare Dönüşüm Uygulanmış Değişkenlerin Box-M Testi Sonuçları

| | |
|--------|---------|
| Box M | 20929,7 |
| F | 9,232 |
| sd1 | 1785 |
| sd2 | 100585 |
| Anlam. | ,000 |

Hiperbolik ve kare dönüşümlerle elde edilen Box-M istatistikleri sıfır hipotezinin hala red edildiğini göstermektedir.

Uygulanan dönüşümlerin eş-varyanslılığı sağlayamadığı görülmektedir. Ancak literatürde T^2 istatistiğinin “varyans-kovaryans matrislerinin eşit olması” varsayımının gerçekleşmemesine karşı güçlü (robust) olduğu iddiası temel alınarak, orijinal değişkenlerle analize devam edilecektir.

4.3.4 Zamana Bağlı Gözlem Değerlerinin Bağımsızlık

(Otokorelasyon Olmaması) Varsayımı

Farklı zamanlardaki örneklerle saptanan kalite değişkenlerinde otokorelasyon olup olmadığı aşağıdaki hipotezlerin testine dayanan Birim Kök Analizi ile araştırılmıştır³.

H_0 : Birim kök var

H_1 : Birim kök yok.

Yükseklik değişkeninin otokorelasyon yapısı önce korelogram (Ek:2) yardımıyla

³ Birim Kök Analizi Eviews yazılımıyla gerçekleştirilmiştir.

incelendiğinde otokorelasyon olmadığı sonucuna varılmaktadır. Ancak bu sonucun geçerliliği Birim Kök Analizi ile irdelemek amacıyla teorik bölümde tahmin edilmesi önerilen modellerden [$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ (trend ve sabit yok), $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ (sabit var, trend yok), $\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \varepsilon_t$ (sabit ve trend var)] en uygunu seçilerek test gerçekleştirilecektir. Yükseklik değişkeni için sabit ve trend değişkeni ile tahmin edilen modelde trend değişkeninin anlamsız olduğu görülmektedir (Ek:3). Bu nedenle sadece sabiti olan model temel alınmaktadır:

$$\Delta \text{yükseklik} = 116,7718 - 0,776069 \text{yükseklik} \quad (-1) \quad (4.1)$$

Dickey-Fuller (DF) test istatistiği (-7,237669), MacKinnon kritik değeri ise 0,01-0,05 ve 0,10 anlamlılık düzeylerinde sırasıyla [(-3,5082), (-2,8955), (-2,5846)] olduğu için (Ek:4) H_0 hipotezi red edilmektedir. Birim kök olmadığının bir diğer göstergesi, (4.1) denkleminin hataları için çizilen korelogramda anlamlı otokorelasyon katsayısının bulunmamasıdır (Ek:5). Yükseklik değişkeninde birim kök (otokorelasyon) yoktur ve değişken durağandır.

Dip yüksekliği değişkeninin korelogramı incelendiğinde (Ek:6) 1., 6. ve 7. otokorelasyon katsayılarının anlamlı olduğu görülmektedir. Ancak otokorelasyonun varlığının gözardı edilebilir olup olmadığı Birim Kök Testi ile incelenmiştir.

$$\Delta \text{dip yüksekliği} = 11,32150 - 0,763123 \text{dipyüksekliği} \quad (-1) - 0,004022t \quad (4.2)$$

(4.2) denklemi için hesaplanan DF istatistiği (-7,206550), MacKinnon tablo değeri 0,01 için (-4,0686), 0,05 için (-3,4626) ve 0,10 için ((-3,1574)'dür (Ek:7). H_0 hipotezi tüm anlamlılık düzeylerinde red edilmektedir. (4.2) denkleminin hatalarının korelogramı* (Ek:8) incelendiğinde de dip yüksekliği değişkenindeki anlamlı otokorelasyonların gözardı edilebileceği anlaşılmaktadır.

Ağız çapı değişkeninin korelogramında (Ek:9) birkaç otokorelasyonun anlamlı olduğu görülmektedir. Birim Kök Testi için tahmin edilen model aşağıdaki gibidir:

$$\Delta \text{ağız çapı} = 53,795 - 0,787886 \text{ağız çapı} \quad (-1) + 0,001263t \quad (4.3)$$

DF istatistiği (-7,292253) ve MacKinnon tablo değerleri 0,01-0,05 ve 0,10 anlamlılık düzeyleri için sırasıyla [(-4,0686), (-3,4626), (-3,1574)] olduğundan (Ek:10) H_0 hipotezi tüm anlamlılık düzeylerinde red edilmektedir. (4.3) denkleminin hatalarının da anlamlı otokorelasyon içermediği görülmektedir (Ek:11).

Dip çapı değişkeninin korelogramı incelendiğinde (Ek:12) özellikle 1. otokorelasyon katsayısının anlamlılığı dikkat çekmektedir. Tahmin edilen model;

$$\Delta \text{ dip çapı} = 43,30147 - 0,694096 \text{ dip çapı}(-1) + 0,002918t \quad (4.4)$$

şeklindedir.

Hesaplanan DF istatistiği (-6,656279), MacKinnon değerleriyle karşılaştırıldığında [0,01 için (-4,0686), 0,05 için (-3,4626), 0,10 için (-3,1574)] (Ek:13) H_0 hipotezi red edilmektedir. (4.4) denkleminin hatalarında da anlamlı otokorelasyon görülmemektedir (Ek:14).

Et kalınlığının korelogramında (Ek:15) yine 1. otokorelasyon katsayısı anlamlıdır. Sabit ve trend değişkeni ile tahmin edilen modelde trend değişkeninin anlamsız olduğu görülmektedir (Ek:16). Bu nedenle sadece sabiti olan model temel alınmaktadır:

$$\Delta \text{ et kalınlığı} = 0,996685 - 0,573595 \text{ et kalınlığı}(-1) \quad (4.5)$$

DF=-5,893610 > MacKinnon kritik değerleri [0,01 için (-3,5082), 0,05 için (-2,8955), 0,10 için (-2,5846)] olduğundan (Ek:17) et kalınlığı değişkeninin durağan, olduğu söylenebilmektedir. (4.5) denkleminin hataları arasında da otokorelasyon olmaması (Ek:18) bu sonucu desteklemektedir.

Son olarak köpük payı değişkeninin otokorelasyon analizi yapıldığında bu değişkenin korelogramında 1. otokorelasyon katsayısının anlamlı olduğu görülmektedir (Ek:19). Bu katsayının göz ardı edilebilir olup olmadığını saptamak için, Birim Kök Testi'yle aşağıdaki model oluşturulmuştur:

$$\Delta \text{ köpük payı} = 19,22894 - 0,741326 \text{ köpük payı}(-1) + 0,005647t \quad (4.6)$$

$DF=(-6,942382)>[0,01 \text{ için } (-4,0686), 0,05 \text{ için } (-3,4626), 0,10 \text{ için } (-3,1574)]$ olduğundan (Ek:20) köpük payı değişkeninin de durağan olduğu ve (4.6) denkleminin hatalarının da aynı özelliği taşıdığı gözlenmektedir (Ek:21).

Böylece veri kümesinde otokorelasyon sorunu olmadığı saptanmıştır. Yöntemin varsayımlarına uygunluğu kesinleştikten sonra “Geçmiş Veri Kümesi” nin oluşturulması amacıyla I. Aşama kontrol diyagramlarının çizimine geçilmektedir.

4.4 “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin Oluşturulması ve I. Aşama Kontrol Diyagramları

Uygulamada yararlanılan SPSS (10.0), Minitab (13.0) yazılımlarında T^2 istatistiklerini doğrudan hesaplayan bir komut bulunmamaktadır⁴. Bu nedenle T^2 istatistikleri Minitab’ta aşağıdaki komutlar yardımıyla hesaplanacaktır:

```
MTB> READ C1-C6
```

```
MTB> COPY C1-C6 M1
```

(M1 Varyans-kovaryans matrisi olarak tanımlanmaktadır)

```
MTB> READ C7
```

```
MTB> COPY C7 M2
```

(M2 Örnek ortalamaları vektörüdür)

```
MTB> READ 6 1 M3
```

(Proses ortalamaları vektörüdür)

```
MTB> SUBTRACT M3 M2 M4
```

(M4: M3 ile M2 arasındaki farktır)

```
MTB> INVERT M1 M5
```

(M5: M1 matrisinin tersidir)

MTB> TRANS M4 M6

(M6: M4'ün transpozsidir)

MTB> MULT M6 M5 M7

(M7: M6 İLE M7'nin çarpımıdır)

MTB> MULT M7 M4 M8

(M8: M7 ile M4'ün çarpımıdır)

(Hesaplanan M8 değeri örnek birim sayısı (n) çarpılmaktadır)

T^2 istatistiklerinin hesaplanabilmesi için öncelikle varyans-kovaryans matrisinin (S_p) ve proses ortalama vektörünün (\bar{x}) tahmin edilmesi gerekmektedir. Tablo 4.12'de gösterilen S_p matrisi SPSS yazılımında aşağıdaki adımlar izlenerek elde edilmiştir: Analyze → Classify → Discriminant → Grouping Variable (Birimlere örnek numaralarının verildiği değişken) → Define Range: Min:-Max:1-86 → Independents: Kalite değişkenleri → Statistics → Matrices → Within-groups covariance → OK

Tablo 4.12: 86 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPIK | |
|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Kovaryans | YUKSEKLI | ,111 | -2,E-03 | 1,2E-03 | 8,0E-04 | 2,2E-03 | 3,4E-02 |
| | AGIZCAP | -2,5E-03 | 9,5E-02 | 2,2E-03 | 1,6E-04 | 1,4E-03 | -5,E-03 |
| | DIPCAP | 1,18E-03 | 2,2E-03 | 6,8E-02 | -6,E-06 | -4,E-03 | 1,1E-02 |
| | ETKAL | 7,96E-04 | 1,6E-04 | -6,E-06 | 7,9E-03 | -2,E-03 | 1,3E-03 |
| | DIPYUK | 2,22E-03 | 1,4E-03 | -4,E-03 | -2,E-03 | ,234 | -7,E-02 |
| | KOPIK | 3,40E-02 | -5,E-03 | 1,1E-02 | 1,3E-03 | -7,E-02 | ,391 |

Tablo 4.13'deki proses ortalama vektörü ise (\bar{x}), 12'şerli 86 örnekten oluşan örnek ortalamalarının ortalaması hesaplanarak elde edilmiştir.

⁴ Statistica, Statgraphics yazılımlarında da doğrudan hesaplayan bir komut yoktur. Sadece QualStat programında bu özellik bulunmaktadır. Ancak bu programda da örnek büyüklüğünün bir olması (n=1) kısıtı vardır.

Tablo 4.13: 12 Birimden Oluşan 86 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 86 | 150,4621 |
| AGIZCAP | 86 | 68,3450 |
| DIPCAP | 86 | 62,5581 |
| ETKAL | 86 | 1,7353 |
| DIPYUK | 86 | 14,6232 |
| KOPUK | 86 | 26,2542 |
| N | 86 | |

(Ek:22a)'da yer alan T^2 istatistiklerinin $\bar{ÜKL} = \left[\frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1) - p + 1} \right] F_{\alpha, p, mn-m-p+1}$

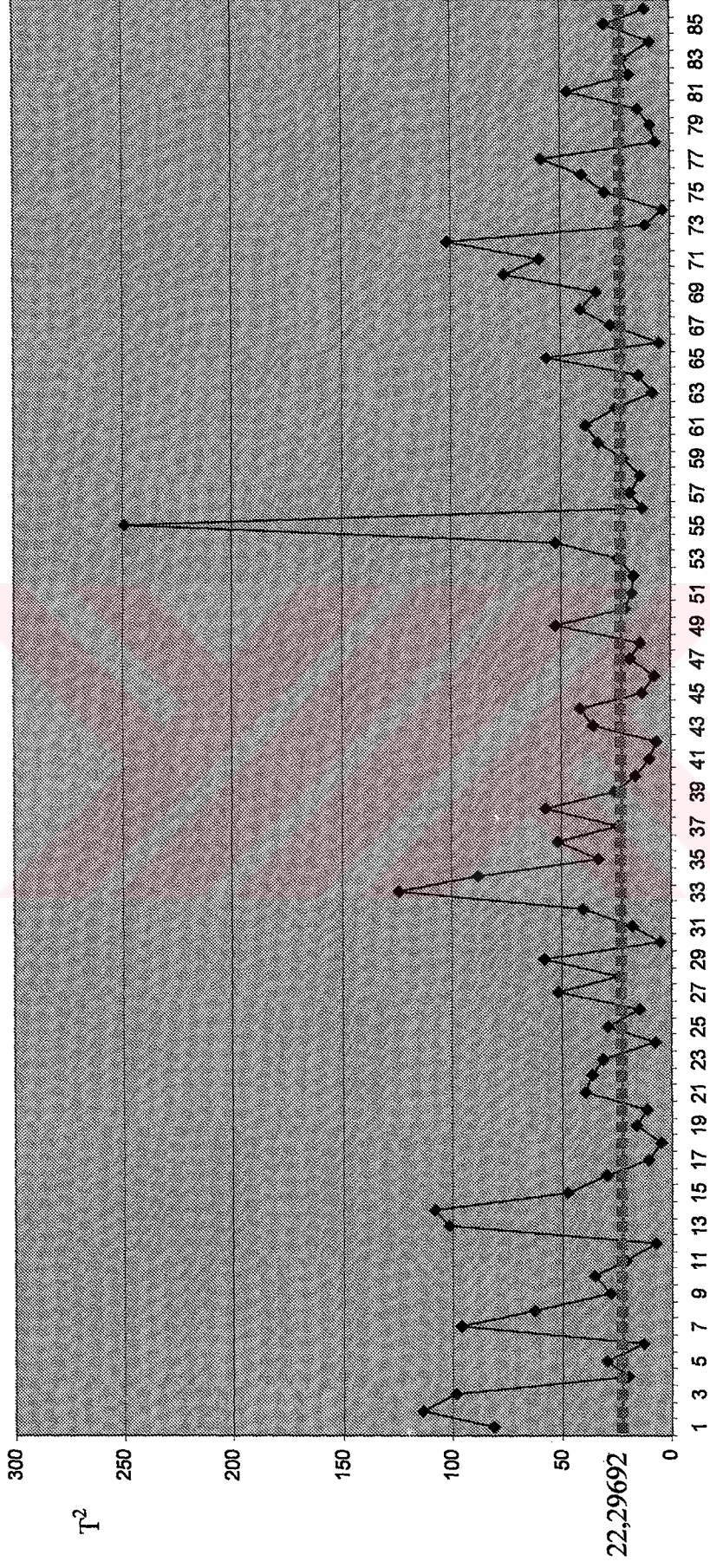
formülüyle oluşturulan üst kontrol limitiyle karşılaştırılması gerekmektedir ($\alpha = 0,001$).⁵

$$\bar{ÜKL} = \frac{6.(86-1).(12-1)}{86.(12-1) - 6 + 1} 3,74 = 22,29692$$

I.Aşama Diyagramı (1. Adım) incelendiğinde (Grafik 4.4) 48 örneğin $\bar{ÜKL}$ 'ni (22,29692) aştığı görülmektedir. Bu durumda T^2 değeri 22,29692'yi aşan örnekler veri kümesinden çıkarılarak (86-48) kalan 38 örneğin varyans-kovaryans matrisinin ve proses ortalama vektörünün değerleri hesaplanmıştır (Tablo 4.14 ve 4.15).

⁵ Benzer uygulamalarda genellikle anlamlılık düzeyi (α) 0,001 olarak alındığından, uygulamama da bu değer seçilmiştir.

Grafik 4.4: I.Aşama T^2 Diyagramı (1. Adım)



Örnek Numarası

Tablo 4.14: 38 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPUK |
|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEKLI | ,105 | -4,E-03 | 1,2E-04 | 1,7E-03 | -4,E-03 | 4,0E-02 |
| | AGIZCAP | -4,0E-03 | 4,6E-02 | -2,E-03 | 2,5E-04 | -4,E-03 | -8,E-03 |
| | DIPCAP | 1,20E-04 | -2,E-03 | 5,7E-02 | 1,4E-03 | 7,5E-04 | 1,1E-02 |
| | ETKAL | 1,70E-03 | 2,5E-04 | 1,4E-03 | 6,0E-03 | -2,E-04 | -6,E-02 |
| | DIPYUK | -4,0E-03 | -4,E-03 | 7,5E-04 | -2,E-04 | ,220 | 8,2E-05 |
| | KOPUK | 4,00E-02 | -8,E-03 | 1,1E-02 | 8,2E-05 | -6,E-02 | ,395 |

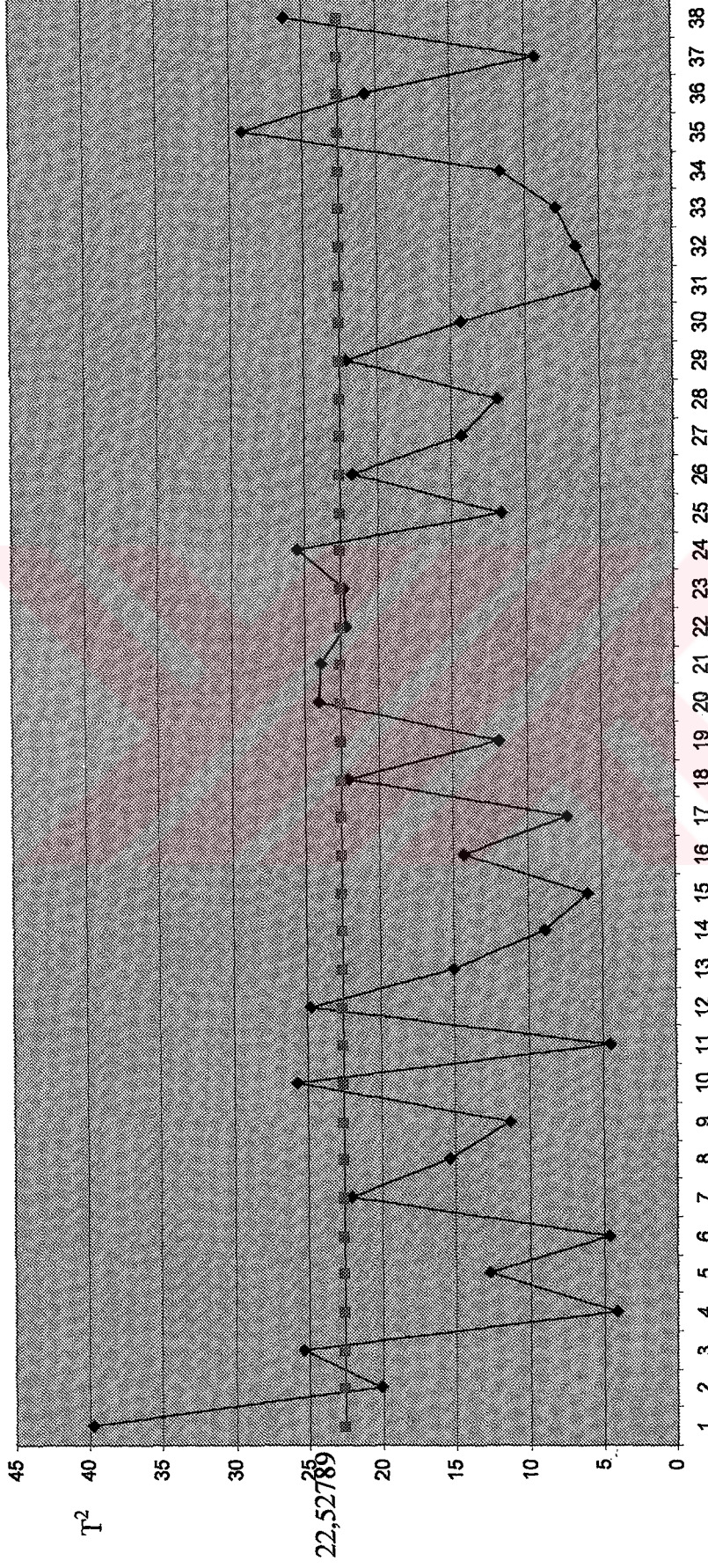
Tablo 4.15: 12 Birimden Oluşan 38 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 38 | 150,4621 |
| AGIZCAP | 38 | 68,3450 |
| DIPCAP | 38 | 62,5581 |
| ETKAL | 38 | 1,7353 |
| DIPYUK | 38 | 14,6232 |
| KOPUK | 38 | 26,2542 |
| N | 38 | |

Bu örneklerle hesaplanan T² istatistikleriyle (Ek:22b) çizilen I. Aşama diyagramının (Grafik 4.5)'te gösterilmektedir. Grafiğin ÜKL'i 22,52789'dur.

$$\text{ÜKL} = \frac{6(38-1)(12-1)}{38(12-1) - 6 + 1} \cdot 3,81 = 22,52789$$

Gratik 4.5: I. Aşama T^2 Diyagramı (2. Adım)



Örnek Numarası

Grafik 4.5'te 9 örnek ÜKL'ni aştığından veri kümesinden çıkarılmış kalan örneklerle (38-9=29) hesaplanan, yeni varyans-kovaryans matrisi ve proses ortalama vektörü elde edilmiştir.

Tablo 4.16: 29 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPIK | |
|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEKLI | ,105 | -3,E-03 | -2,E-03 | 2,9E-03 | -5,E-03 | 3,8E-02 |
| | AGIZCAP | -3,0E-03 | 4,5E-02 | -5,E-04 | -4,E-05 | -2,E-03 | -1,E-02 |
| | DIPCAP | -2,0E-03 | -5,E-04 | 5,4E-02 | 1,7E-03 | -2,E-03 | 1,6E-02 |
| | ETKAL | 2,90E-03 | -4,E-05 | 1,7E-03 | 6,1E-03 | -5,E-04 | -2,E-03 |
| | DIPYUK | -5,0E-03 | -2,E-03 | -2,E-03 | -5,E-04 | ,217 | -5,E-02 |
| | KOPIK | 3,80E-02 | -1,E-02 | 1,6E-02 | -2,E-03 | -5,E-02 | ,357 |

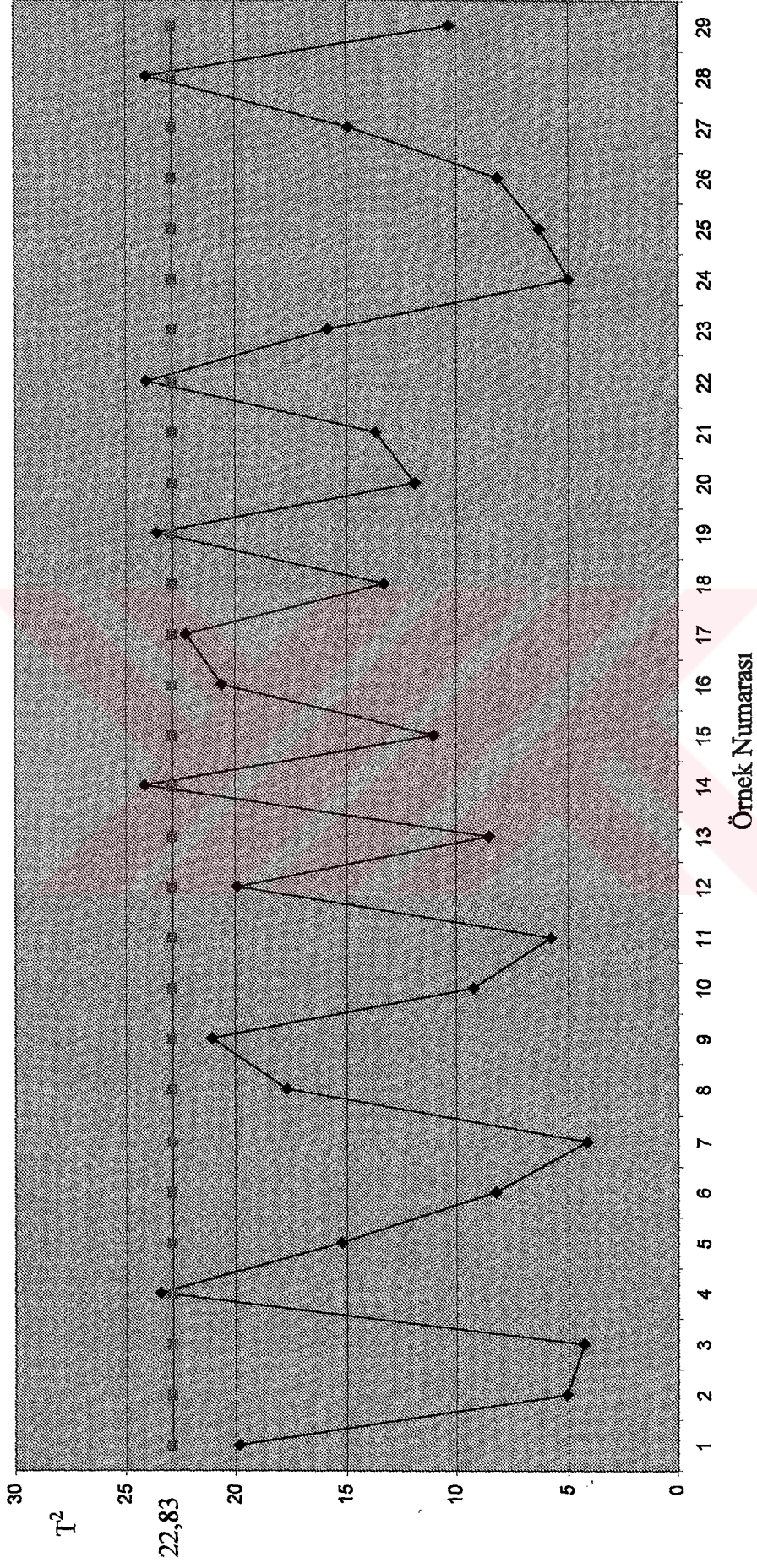
Tablo 4.17: 12 Birimden Oluşan 29 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 29 | 150,4879 |
| AGIZCAP | 29 | 68,4175 |
| DIPCAP | 29 | 62,5790 |
| ETKAL | 29 | 1,7415 |
| DIPYUK | 29 | 14,5670 |
| KOPIK | 29 | 26,2609 |
| N | 29 | |

$$\bar{ÜKL} = \frac{6(29-1)(12-1)}{29(12-1)-6+1} 3,88 = 22,83 \text{ işleminin sonucu çizilecek I. Aşama (3. Adım)}$$

diyagramının ÜKL'ni oluşturmaktadır. Tablo 4.16 ve 4.17'deki veriler dikkate alınarak hesaplanan T^2 istatistiklerinin (Ek:22c) diyagramı (Grafik 4.6) çizilmiştir.

Grafik 4.6: I. Aşama T² Diyagramı (3. Adım)



Grafik 4.6’da 5 örneğin 22.83 olan ÜKL’i değerini aştığı görülmektedir. Bu örnekler veri kümesinden çıkarılarak (29-5=24) yeniden I. Aşama diyagramı çizilecektir. Kalan 24 örnek için hesaplanan varyans-kovaryans matrisi ve proses ortalama vektörü aşağıdaki tablolarda verilmektedir:

Tablo 4.18: 24 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPUK |
|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEKLI | 9,40E-02 | -2,E-03 | -2,E-03 | 3,2E-03 | 7,3E-04 | 2,9E-02 |
| | AGIZCAP | -2,0E-03 | 4,1E-02 | -3,E-03 | 2,1E-04 | -3,E-03 | -6,E-03 |
| | DIPCAP | -2,0E-03 | -3,E-03 | 5,6E-02 | 2,0E-03 | -2,E-04 | 1,6E-02 |
| | ETKAL | 3,20E-03 | 2,0E-04 | 2,0E-03 | 6,3E-03 | -9,E-04 | -3,E-03 |
| | DIPYUK | 7,30E-04 | -3,E-03 | -2,E-04 | -9,E-04 | ,219 | -4,E-02 |
| | KOPUK | 2,90E-02 | -6,E-03 | 1,6E-02 | -3,E-03 | -4,E-02 | ,346 |

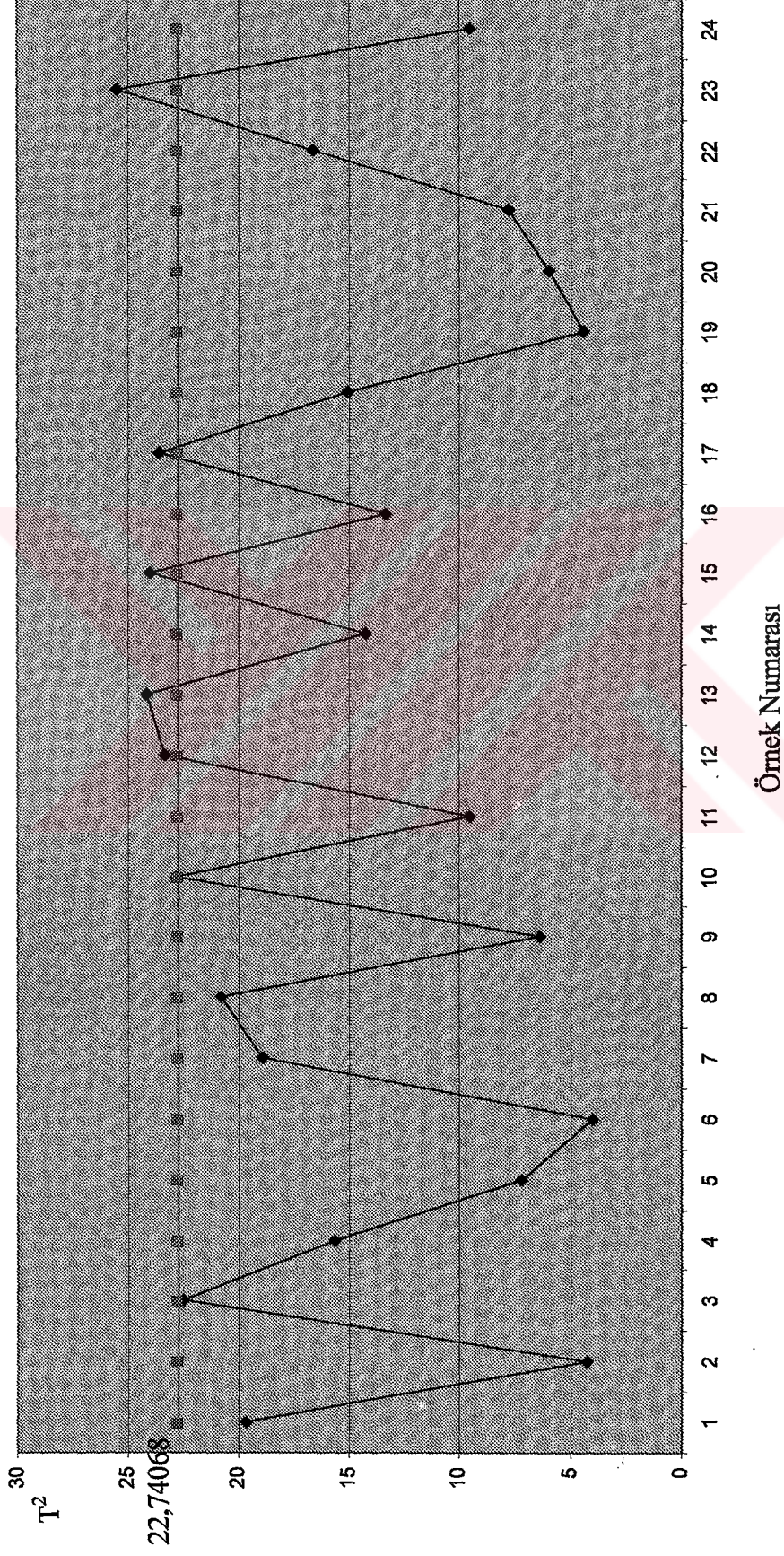
Tablo 4.19: 12 Birimden Oluşan 24 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 24 | 150,4851 |
| AGIZCAP | 24 | 68,4160 |
| DIPCAP | 24 | 62,5753 |
| ETKAL | 24 | 1,7395 |
| DIPYUK | 24 | 14,5601 |
| KOPUK | 24 | 26,2281 |
| N | 24 | |

Bu aşamada kalan 24 örnekle hesaplanan T^2 istatistiklerinin (Ek:22d) I. Aşama (4. adım) diyagramının ÜKL’i ise aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\text{ÜKL} = \frac{6(24-1)(12-1)}{24(12-1) - 6 + 1} \cdot 3,88 = 22,74068$$

Grafik 4.7: I. Aşama T² Diyagramı (4. Adım)



Grafik 4.7'den açıkça görüldüğü gibi bu kez de ÜKL'yi aşan 5 örnek bulunmaktadır. Bu örnekler veri kümesinden çıkarılarak kalan örneklerle (24-5=19) yeniden varyans-kovaryans matrisi ve proses ortalama vektörünün elemanları hesaplanmıştır.

Tablo 4.20: 19 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

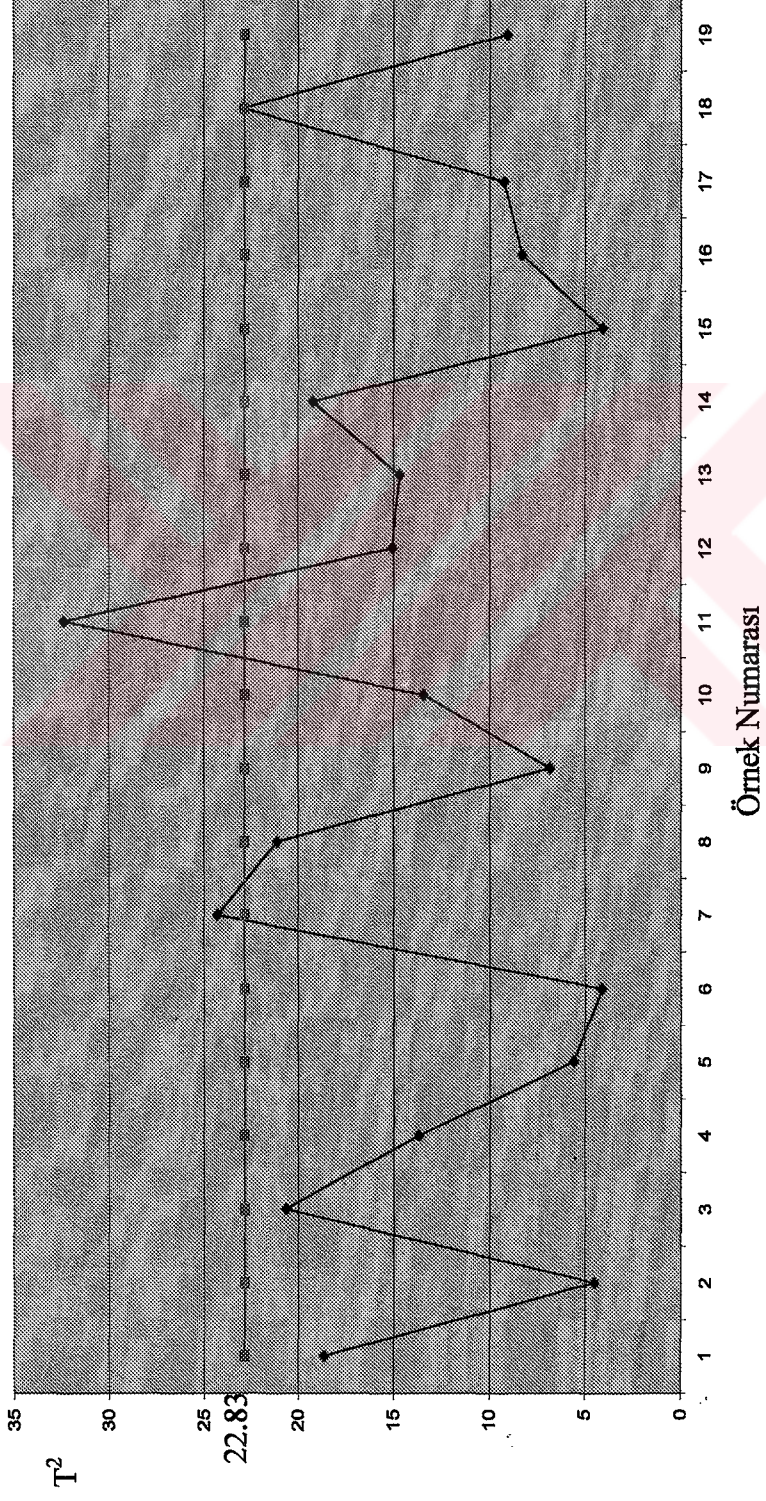
| | | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPUK |
|-----------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEKLI | 8,20E-02 | -2,E-04 | -3,E-03 | 2,6E-03 | 5,9E-03 | 2,7E-02 |
| | AGIZCAP | -2,0E-04 | 3,9E-02 | -2,E-03 | -5,E-04 | 1,2E-04 | -3,E-03 |
| | DIPCAP | -3,0E-03 | -2,E-03 | 4,6E-02 | 2,0E-03 | -7,E-04 | 1,2E-02 |
| | ETKAL | 2,60E-03 | -5,E-04 | 2,1E-03 | 6,6E-03 | -3,E-04 | -2,E-03 |
| | DIPYUK | 5,90E-03 | 1,2E-04 | -7,E-04 | -3,E-04 | ,212 | -4,E-02 |
| | KOPUK | 2,70E-02 | -3,E-03 | 1,2E-02 | -2,E-03 | -4,E-02 | ,352 |

Tablo 4.21: 12 Birimden Oluşan 19 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 19 | 150,4711 |
| AGIZCAP | 19 | 68,4206 |
| DIPCAP | 19 | 62,5522 |
| ETKAL | 19 | 1,7357 |
| DIPYUK | 19 | 14,5939 |
| KOPUK | 19 | 26,1789 |
| N | 19 | |

Grafik 4.8'de yeni veri kümesiyle hesaplanan T^2 istatistiklerinden (Ek:22e) 2 tanesinin, $\left[\frac{6(19-1)(12-1)}{19(12-1)-6+1} \cdot 3,92 = 22,83 \right]$ işlemiyle elde edilen ÜKL değerinden büyük olduğu görülmektedir.

Grafik 4.8: I. Aşama T^2 Diyagramı (5. Adım)



Kalan 17 örnekle tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi ve proses ortalama vektörü Tablo 4.22 ve 4.23’de gösterilmektedir.

Tablo 4.22: 17 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | | YUKSEKLI | AGIZCAP | DIPCAP | ETKAL | DIPYUK | KOPUK |
|-----------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEKLI | 7,30E-02 | -2,E-03 | -4,E-03 | 1,90E-03 | 1,2E-02 | 3,2E-03 |
| | AGIZCAP | -2,0E-03 | 4,1E-02 | -2,E-03 | -1,0E-03 | -5,E-04 | -2,E-03 |
| | DIPCAP | -4,0E-03 | -2,E-03 | 4,7E-02 | 1,50E-03 | 4,2E-03 | 8,0E-03 |
| | ETKAL | 1,90E-03 | -1,E-03 | 1,5E-03 | 6,80E-03 | -5,E-05 | -5,E-03 |
| | DIPYUK | 1,20E-02 | -5,E-04 | 4,2E-03 | -5,0E-05 | ,204 | -2,E-02 |
| | KOPUK | 3,20E-03 | -2,E-03 | 8,0E-03 | -5,0E-03 | -2,E-02 | ,303 |

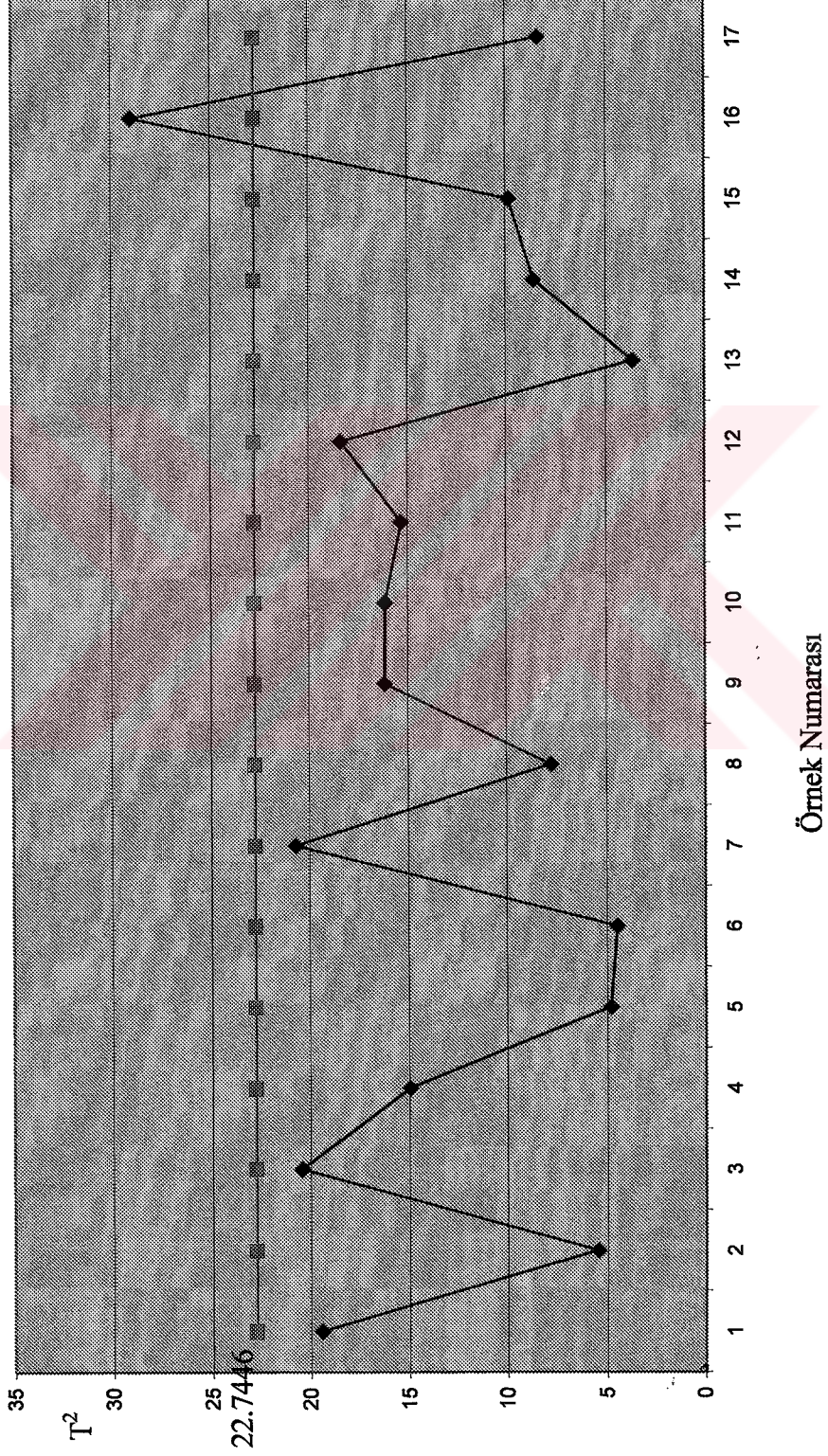
Tablo 4.23: 12 Birimden Oluşan 17 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 17 | 150,4613 |
| AGIZCAP | 17 | 68,4152 |
| DIPCAP | 17 | 62,5475 |
| ETKAL | 17 | 1,7308 |
| DIPYUK | 17 | 14,6000 |
| KOPUK | 17 | 26,1652 |
| N | 17 | |

17 örnek için hesaplanan T^2 değerleriyle (Ek:22f) çizilen I. Aşama T^2 Diyagramı (6. Adım) Grafik 4.9’daki gibidir. Diyagramın ÜKL’i 22,7446’dır.

$$\text{ÜKL} = \left[\frac{6(17-1)(12-1)}{12(17-1) - 6 + 1} \cdot 3,92 \right] = 22,7446$$

Grafik 4.9: I. Aşama T^2 Diyagramı (6. Adım)



Grafikten açıkça anlaşıldığı üzere 17 örnekten sadece 1 tanesi ÜKL değerini aşmaktadır. Bu örnek de veri kümesinden çıkarılarak kalan 16 örnekle tahmin edilen aşağıdaki varyans-kovaryans matrisine ulaşılmaktadır:

Tablo 4.24: 16 Örnek İçin Hesaplanan S_p Matrisi

| | | YUKSEK | AGİZCAP | DİPCAP | ETKAL | DİPYUK | KOPUK |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| kovaryans | YUKSEK | 7,3E-02 | -1,E-03 | -5,E-03 | 1,9E-03 | 1,5E-02 | 2,3E-03 |
| | AGİZCAP | -1,E-03 | 4,2E-02 | -2,E-03 | -1,E-03 | 2,5E-04 | -4,E-03 |
| | DİPCAP | -5,E-03 | -2,E-03 | 4,8E-02 | 1,5E-03 | 4,5E-03 | 7,2E-03 |
| | ETKAL | 1,9E-03 | -1,E-03 | 1,5E-03 | 7,0E-03 | -1,E-03 | -5,E-03 |
| | DİPYUK | 1,5E-02 | 2,5E-04 | 4,5E-03 | -1,E-03 | ,206 | -2,E-02 |
| | KOPUK | 2,3E-03 | -4,E-03 | 7,2E-03 | -5,E-03 | -2,E-02 | ,303 |

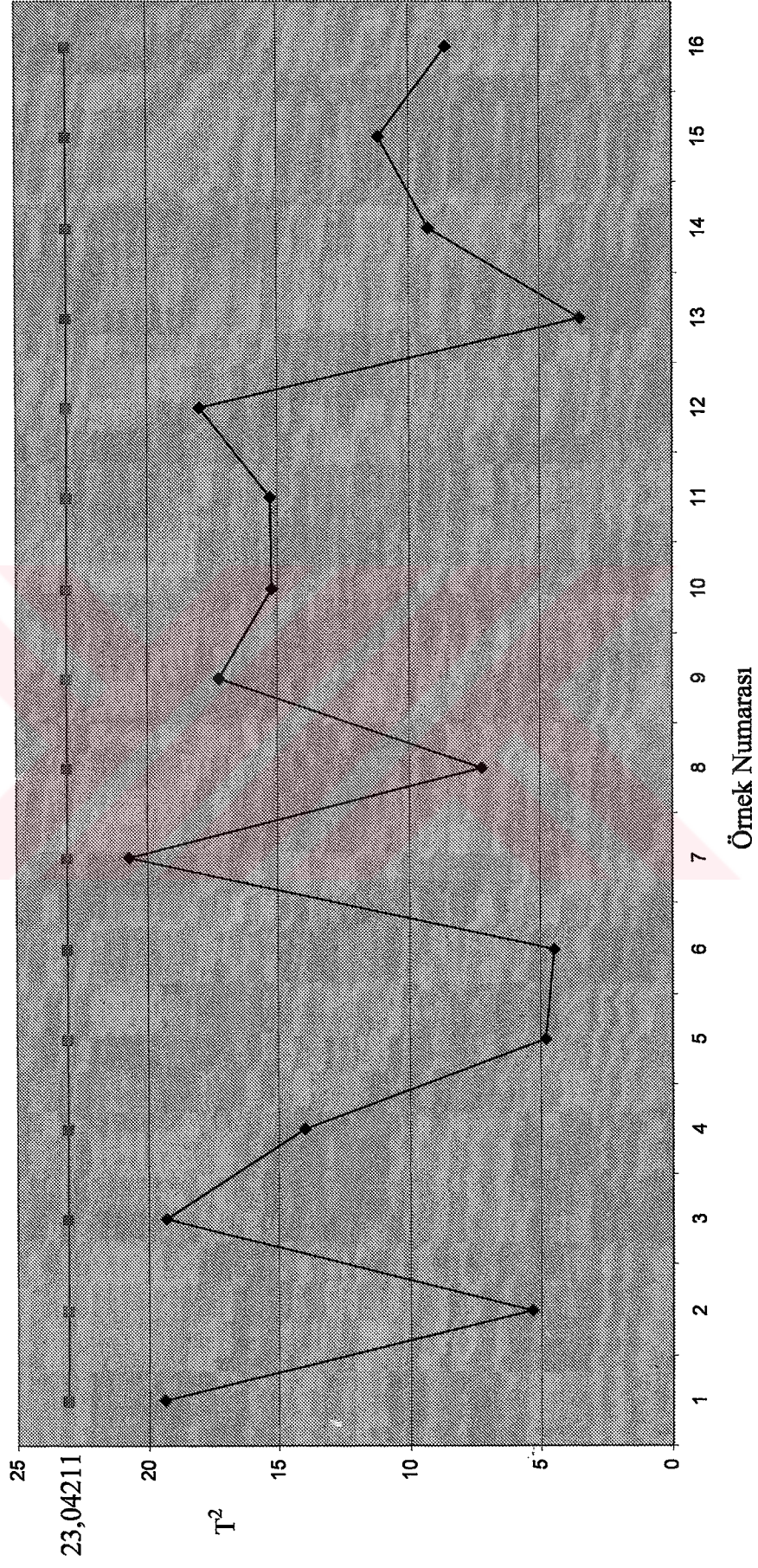
Tablo 4.25: 12 Birimden Oluşan 16 Örneğin Proses Ortalama Vektörü (\bar{x})

| | N | Ortalama |
|----------|----|----------|
| YUKSEKLI | 16 | 150,4635 |
| AGIZCAP | 16 | 68,4167 |
| DIPCAP | 16 | 62,5453 |
| ETKAL | 16 | 1,7319 |
| DİPYUK | 16 | 14,6214 |
| KOPUK | 16 | 26,1495 |
| N | 16 | |

Hesaplanan T^2 istatistiklerinin (Ek:22g) karşılaştırıldığı ÜKL değeri aşağıdaki gibi hesaplandıktan sonra çizilen I.Aşama T^2 Diyagramı (7. Adım), Grafik 4.10'da gösterilmektedir.

$$\text{ÜKL} = \frac{6(16-1)(12-1)}{12(16-1) - 6 + 1} \cdot 3,98 = 23,04211$$

Grafik 4.10: I. Aşama T^2 Diyagramı (7. Adım)



Grafik 4.10'daki tüm örneklerin ÜKL'i olan 23,04211'den daha düşük değerler aldığı görülmektedir. Diğer adımlara ve özellikle 7. Adım sonuçlarına dayanarak "Geçmiş Veri Kümesi" 'nin 12 birimlik 16 örnekten oluşması gerektiğine karar verilebilmektedir.

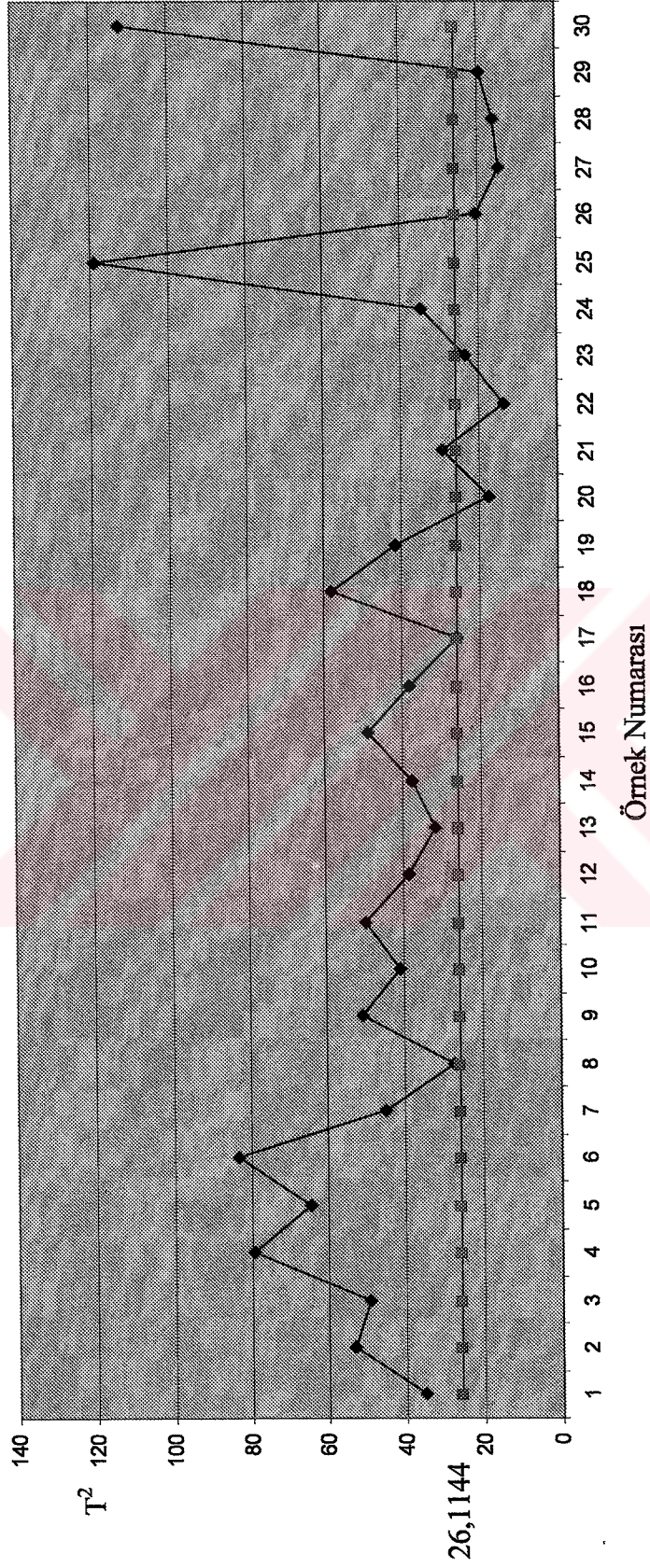
4.5 II. Aşama Kontrol Diyagramları

İkinci bölümde ayrıntılı olarak ele alındığı gibi II. Aşama kontrol aşamasıdır. Prosesi kontrol etmek amacıyla "yeni" örnekler tesadüfi olarak çekilmekte ve "Geçmiş Veri Kümesi" 'nin varyans-kovaryans matrisi ve proses ortalama vektörü bu "yeni" örneklerin T^2 istatistiklerinin elde edilmesinde kullanılmaktadır (Tablo 4.28 ve 4.29). Araştırmanın bu bölümünde proses kontrolü için, prosesten tesadüfi olarak çekilen 30 örnekle T^2 istatistikleri hesaplanarak (Ek:23), 0,001 anlamlılık

düzeyinde $\left[\frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha,p,mn-m-p+1} \right]$ formülüyle hesaplanan ÜKL ile karşılaştırılmaktadır:

$$\text{ÜKL} = \frac{6 \cdot (16+1) \cdot (12-1)}{16 \cdot 12 - 16 - 6 + 1} \cdot 3,98 = 26,1144$$

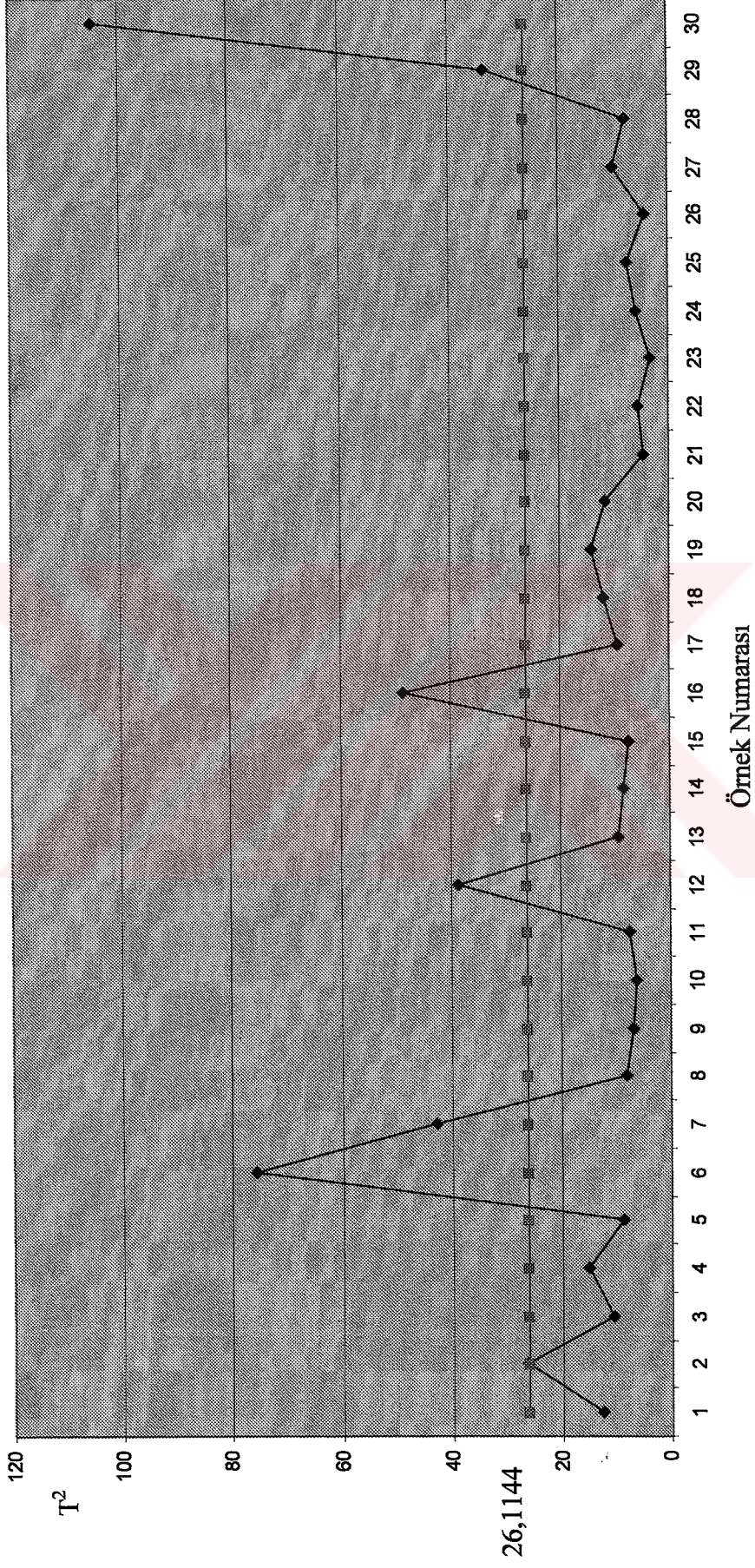
Grafik 4.11: II. Aşama T² Diyagramı (1)



Grafik 4.11 incelendiğinde 30 örnekten 22'sinin kontrol dışında olduğu görülmektedir. Sorunun hangi kalite değişken(ler)inden kaynaklandığını saptamak amacıyla, MYT Ayırıştırma Yöntemi uygulanmak istendiğinde ve uyarı veren her T^2 istatistiğinin, $(6 \times 2^{(6-1)} = 192)$ birbirinden farklı terime⁶ ayrıştırılabildiği düşünüldüğünde, prosesteki sorunun belirlenebilmesi amacıyla $(22 \times 192 = 4224)$ terimin incelenmesi gerekmektedir. Tüm bu hesaplamaları yapan bir yazılım henüz bulunmadığından 4224 terimin incelenmesi mümkün görünmemektedir. Hesaplama yapılabilir olsa bile prosesteki soruna ilişkin sonuçların kolay anlaşılabilir olmayacağı açıktır. Belirli periyotlarla yapılan kalıp değişikliklerinin, araştırmanın yapıldığı fabrikada uygulanan Toplam Kalite Yönetimi'nin ve ürünlerin ihraç edildiği ülkelerin kalite kavramına olan duyarlılıklarının dikkate alındığı kabul edilerek, proseste iyileşme olabileceği düşünülmektedir. Bu nedenle yaklaşık birbuçuk yıl aradan sonra fabrikadan tesadüfi olarak seçilen 12'şer birimlik 30 örneğe ilişkin "Ürün Ölçü ve Hacim Kontrol Raporları" yeniden talep edilmiştir. Elde edilen veri kümesinden hesaplanan T^2 istatistikleri (Ek:24), $\bar{U}KL=26,1144$ karşılaştırılarak değerlendirildiğinde sadece 6 örneğin kontrol dışında olduğu görülmektedir (Grafik 4.11). Dolayısıyla prosesin halen kontrol dışında olduğu ancak dikkate değer bir iyileşmenin gerçekleştiği söylenebilmektedir. 6 örneğin kontrol dışında olma nedenleri MYT Ayırıştırma Yöntemi uygulanarak araştırılmaya çalışılacaktır.

⁶Üçüncü bölümde de belirtildiği gibi her uyarı veren T^2 istatistiği, $p \times 2^{(p-1)}$ tane farklı terime ayrıştırılabilmektedir.

Grafik 4.12: II. Aşama T² Diyagramı (2)



4.6 MYT Ayırıştırma Yönteminin Uygulanması

Bu alt bölümde prosesin kontrol dışında olmasının nedenlerini belirlemek amacıyla diğer ayırıştırma yöntemlerini kapsadığı iddia edilen MYT Ayırıştırma Yöntemi uygulanmaktadır. Daha öncede değinildiği gibi uyarı veren 6 değişkenli her T^2 istatistiği 192 farklı terime ayırıştırılabilmektedir. Uygulamanın daha pratik bir şekilde gerçekleştirilmesi amacıyla teorik kısımda “MYT Yönteminin Özellikleri ve Uygulanmasında İzlenen Adımlar”, başlığı altında yer alan indirgeme planı dikkate alınmıştır. İkinci 30 örneğin II. Aşama diyagramında kontrol dışında olan 6 T^2 istatistiği sırasıyla aşağıdaki gibi ayırıştırılmaktadır:

Bilindiği gibi koşulsuz terim $T^2 = \frac{(\bar{x} - \bar{x})^2}{s^2}$ formülüyle hesaplanmaktadır.

Formül $n > 1$ durumunda m tane örnek için genelleştirildiğinde;

$$T^2 = \frac{n(\bar{x} - \bar{x})^2}{\bar{s}^2}$$

şeklini almaktadır. Ayırıştırma gerçekleştirilirken öncelikle tüm koşulsuz terimler ($T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2, T_5^2, T_6^2$), Tablo 4.28-4.29 yardımıyla hesaplanmaktadır: Kontrol Dışındaki 1. vektörün ($\bar{x}' = [150,78 \ 68,21 \ 62,87 \ 1,71 \ 14,29 \ 26,61]$) (Ek:27) koşulsuz terimleri aşağıdaki gibidir:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,78 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 16,4666$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,21 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 12,2071$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,87 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 26,35$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,71 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 0,8221$$

$$T_5^2 = \frac{12 (14,29 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 6,3976$$

$$T_6^2 = \frac{12 (26,61 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 8,3984$$

Daha öncede değinildiği gibi $n > 1$ durumunda II. Aşama için ÜKL değeri;

$$\text{ÜKL} = \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1) - p + 1} F_{\alpha, p, (mn-m-p+1)}$$

formülüyle, koşulsuz terim için ise ÜKL değişken sayısı (p) 1 alınarak hesaplanmaktadır.

$$\text{ÜKL}_{\text{koşulsuz}} = \frac{(m+1)(n-1)}{m(n-1)} F_{\alpha, 1, mn-m-p+1}$$

Bu durumda “Geçmiş Veri Kümesi” ’ni oluşturan 12 birimlik 16 örnek temel alınarak elde edilen $\text{ÜKL}_{\text{koşulsuz}}$;

$$\text{ÜKL}_{\text{kosulsuz}} = \frac{17 \cdot 11}{16 \cdot 11} \cdot 11,15$$

$$\bar{ÜKL}_{\text{koşulsuz}} = 11,8468$$

değerini almaktadır.

Koşulsuz terimler $\bar{ÜKL}$ 'i ile karşılaştırıldığında; T_1^2 , T_2^2 , T_3^2 istatistiklerinin kontrol dışında olduğu görülmektedir. Bu durum yükseklik (X_1), ağız çapı (X_2) ve dip çapı (X_3) değişkenlerinin kendi kontrol aralıklarını aştıkları anlamına gelmektedir. Yükseklik (X_1), ağız çapı (X_2) ve dip çapı (X_3) değişkenleri veri kümesinden çıkarılarak ayrıştırma işlemine devam edilir.

Uyarı veren 1. gözlem vektöründen ilgili değişkenlerin değerleri çıkarıldıktan sonra

$\bar{x}' = [1,71 \ 14,29 \ 26,61]$ vektörüyle hesaplanan T^2 istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$T^2_{(x_4, x_5, x_6)} = 14,1696$$

Elde edilen 14,1696 değerinin anlamlı olup olmadığı araştırılacaktır. $\bar{ÜKL}$ 'nin formülünde $[\bar{ÜKL} = \frac{p \cdot (m + 1) \cdot (n - 1)}{m(n - 1) - p + 1} F_{\alpha, p, mn - m - p + 1}]$ yer alan p, 3 değerini almaktadır.

$$\bar{ÜKL}_{(x_4, x_5, x_6)} = \frac{3 \cdot 17 \cdot 11}{16(12 - 1) - 3 + 1} 5,71$$

$$\bar{ÜKL}_{(x_4, x_5, x_6)} = 18,4096$$

14,1696 < 18,4096 olduğundan T^2 istatistiğinin artık uyarı vermediği ve sorunun yükseklik (X_1), ağız çapı (X_2) ve dip çapı (X_3) değişkenlerinin kontrol dışında olmasından kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Bu durumda koşullu terimlerin hesaplanması gerekmemektedir.

Kontrol dışındaki 2. vektör aşağıdaki gibidir (Ek:27):

$$\bar{x}' = [150,82 \ 68,29 \ 62,57 \ 1,7 \ 14,3 \ 26,56]$$

Vektörün koşulsuz terimleri şöyledir:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,82 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 20,8919$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,29 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 4,5865$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,57 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 0,1525$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,70 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 1,7444$$

$$T_5^2 = \frac{12 (14,3 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 6,0173$$

$$T_6^2 = \frac{12 (26,56 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 6,6736$$

Değerler $\bar{X}_{L_{\text{koşulsuz}}}=11,8468$ ile karşılaştırıldığında ilk koşulsuz terimin ($T_1^2 = 20,8919$), 11,8468'den büyük olduğu görülmektedir. Bu durumda vektörden yükseklik (X_1) değeri çıkarılarak yeniden T^2 istatistiği hesaplanır.

$$\bar{x}' = [68,29 \ 62,57 \ 1,7 \ 14,3 \ 26,56]$$

$$\bar{x}' = [68,4167 \ 62,5453 \ 1,7319 \ 14,6214 \ 26,1495]$$

$$S_{P, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6} = \begin{bmatrix} 0,0420 & -0,0020 & -0,0010 & 0,0003 & -0,0040 \\ -0,0020 & 0,0480 & 0,0015 & 0,0045 & 0,0072 \\ -0,0010 & 0,0015 & 0,0070 & -0,0010 & -0,0050 \\ 0,0003 & 0,0045 & -0,0010 & 0,2060 & -0,0200 \\ -0,0040 & 0,0072 & -0,0050 & -0,0200 & 0,3030 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki parametre tahminleriyle hesaplanan T^2 istatistiğinin değeri 17,6844'dür ($T^2_{(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)} = 17,6844$). ÜKL'i aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\text{ÜKL}_{(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)} = \frac{5.17.11}{16(12-1) - 5 + 1} 4,35$$

$$\text{ÜKL}_{(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)} = 23,646$$

17,6844 < 23,646 olduğundan uyarı veren 2. gözlem vektöründeki sorun yükseklik (X_1) değişkeninden kaynaklanmaktadır. $T^2_{(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)}$ anlamsız olduğundan koşullu terimlerin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmamaktadır.

Kontrol dışındaki 3. gözlem vektörü ($\bar{x}' = [150,21 \ 68,38 \ 62,78 \ 1,69 \ 14,23 \ 26,58]$) (Ek: 27) ayrıştırılacaktır:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,21 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 10,5630$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,38 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 0,3847$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,78 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 13,77$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,69 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 3$$

$$T_5^2 = \frac{12 \cdot (14,23 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 8,9239$$

$$T_6^2 = \frac{12 \cdot (26,58 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 7,3398$$

Sadece $T_3^2 = 13,77 > \text{ÜKL}_{\text{koşulsuz}} = 11,8468$ olduğundan dip çapı (X_3) değişkeninin değeri vektörden çıkarılarak işlemlere devam edilir. Kalan vektör $\bar{x}' = [150,21 \ 68,38 \ 1,69 \ 14,23 \ 26,58]$ şeklindedir. $T_{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)}^2$ istatistiğinin hesaplanabilmesi için tahmin edilen parametreler aşağıdaki gibidir:

$$\bar{x}' = [150,4635 \ 68,4167 \ 1,7319 \ 14,6214 \ 26,1495]$$

$$S_{P, x_1, x_2, x_4, x_5, x_6} = \begin{bmatrix} 0,073 & -0,001 & 0,0019 & 0,015 & 0,0023 \\ -0,001 & 0,042 & -0,001 & 0,00025 & -0,004 \\ 0,0019 & -0,001 & 0,007 & -0,001 & -0,005 \\ 0,015 & 0,00025 & -0,001 & 0,206 & -0,02 \\ 0,0023 & -0,004 & -0,005 & -0,02 & 0,303 \end{bmatrix}$$

$T_{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)}^2$ istatistiğinin değeri 22,9668 ilgili ÜKL'i ile karşılaştırıldığında;

$$\text{ÜKL}_{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)} = \frac{5 \cdot 17 \cdot 11}{16 \cdot (12 - 1) - 5 + 1} \cdot 4,35$$

$$\dot{U}KL_{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)} = 23,6466$$

$T_{(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)}^2$ istatistiğinin kontrol altında olduğu görülmektedir. Bu durumda vektördeki sorunun sadece dip çapı (X_3) değişkeninden kaynaklandığı söylenebilir.

Kontrol dışındaki 4. gözlem vektörünün (Ek:27);

$$\bar{x}' = [150,21 \ 68,38 \ 62,78 \ 1,69 \ 14,23 \ 26,58]$$

koşulsuz terimleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,73 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 11,6749$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,49 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 1,5351$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,53 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 0,0585$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,6 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 29,82$$

$$T_5^2 = \frac{12 (14,52 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 0,5989$$

$$T_6^2 = \frac{12 (26,36 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 1.7549$$

$T_4^2 = 29,82 > \text{ÜKL}_{\text{koşulsuz}} = 11,8468$ olduğundan uyarı veren vektörden et kalınlığı (X_4) değişkeninin değeri çıkarılır ($\bar{x}' = [150,73 \ 68,49 \ 62,53 \ 14,52 \ 26,36]$). Tahmini proses ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\bar{x}' = [150,4635 \ 68,4167 \ 62,5453 \ 14,6214 \ 26,1495]$$

$$S_{p, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6} = \begin{bmatrix} 0,073 & -0,001 & -0,005 & 0,015 & 0,0023 \\ -0,001 & 0,042 & -0,002 & 0,00025 & -0,004 \\ 0,0019 & -0,001 & 0,048 & -0,001 & -0,005 \\ 0,015 & 0,00025 & 0,0045 & 0,206 & -0,02 \\ 0,0023 & -0,004 & 0,0072 & -0,02 & 0,303 \end{bmatrix}$$

Bu tahmini parametrelerle hesaplanan $T_{(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6)}^2$ 16,3308'dir. 16,3308;

$$\text{ÜKL}_{(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6)} = \frac{5.17.11}{16(12-1) - 5 + 1} . 4,35$$

$$\text{ÜKL}_{(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6)} = 23,646$$

olduğundan uyarı veren 4. gözlem vektöründeki sorunun et kalınlığından (X_4)'den kaynaklandığı anlaşılmaktadır.

Kontrol dışındaki 5. gözlem vektörüne ($\bar{x}' = [150,18 \ 68,36 \ 62,58 \ 1,64 \ 14,3 \ 26,44]$) (Ek:27) ilişkin ayrıştırma işlemi aşağıdaki gibi gerçekleştirilmektedir:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,18 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 13,21$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,36 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 0,9185$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,58 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 0,3010$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,64 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 14,4781$$

$$T_5^2 = \frac{12 (14,3 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 6,0173$$

$$T_6^2 = \frac{12 (26,44 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 3,3421$$

Koşulsuz terimler $\bar{U}KL_{koşulsuz}=11,8468$ ile karşılaştırıldığında T_1^2 ve T_4^2 'nin kontrol dışında olduğu görülmektedir. Vektörden yükseklik (X_1) ve et kalınlığı (X_4) değerleri çıkarılarak ($\bar{x}' = [68,36 \ 62,58 \ 14,3 \ 26,44]$), aşağıdaki parametre tahminleriyle

$T_{(x_2, x_3, x_5, x_6)}^2$ istatistiği hesaplanır:

$$\bar{x}' = [68,4167 \ 62,5453 \ 14,6214 \ 26,1495]$$

$$S_{p, x_2, x_3, x_5, x_6} = \begin{bmatrix} 0,042 & -0,002 & 0,00025 & -0,004 \\ -0,002 & 0,048 & 0,0045 & 0,0072 \\ 0,00025 & 0,0045 & 0,206 & -0,02 \\ -0,004 & 0,0072 & -0,02 & 0,303 \end{bmatrix}$$

$T^2_{(x_2, x_3, x_5, x_6)} = 9,768$ değeri $p=4$ olduğu durum için hesaplanan ÜKL ile karşılaştırılmaktadır:

$$\text{ÜKL}_{x_2, x_3, x_5, x_6} = \frac{4 \cdot 17 \cdot 11}{16(12-1) - 4 + 1} \cdot 4,88$$

$$\text{ÜKL}_{x_2, x_3, x_5, x_6} = 21,0991$$

$T^2_{(x_2, x_3, x_5, x_6)} < \text{ÜKL}_{x_2, x_3, x_5, x_6}$ olduğundan vektördeki sorunun yükseklik (X_1) ve et kalınlığı (X_4) değişkenlerinden kaynaklandığı sonucuna varılmaktadır.

Uyarı veren son vektör ($\bar{x}' = [150,69 \ 68,23 \ 62,93 \ 1,69 \ 14,15 \ 27,07]$) (Ek:27) bileşenlerine aşağıdaki gibi ayrıştırılmaktadır:

$$T_1^2 = \frac{12 (150,69 - 150,4635)^2}{0,073}$$

$$T_1^2 = 8,4332$$

$$T_2^2 = \frac{12 (68,23 - 68,4167)^2}{0,042}$$

$$T_2^2 = 9,9591$$

$$T_3^2 = \frac{12 (62,93 - 62,5453)^2}{0,048}$$

$$T_3^2 = 36,9985$$

$$T_4^2 = \frac{12 (1,69 - 1,7319)^2}{0,007}$$

$$T_4^2 = 3$$

$$T_5^2 = \frac{12 (14,15 - 14,6214)^2}{0,206}$$

$$T_5^2 = 12,9447$$

$$T_6^2 = \frac{12 (27,07 - 26,1495)^2}{0,303}$$

$$T_6^2 = 33,5572$$

T_3^2 , T_5^2 , T_6^2 istatistiklerinin $\text{ÜKL}_{\text{koşulsuz}}=11,8468$ 'den büyük olduğu görülmektedir. Dip çapı (X_3), dip yüksekliği (X_5) ve köpük payı (X_6) değişkenlerinin değerleri sorunlu vektörden çıkarılarak ($\bar{x}' = [150,69 \ 68,23 \ 1,69]$) $T_{(x_1, x_2, x_4)}^2$ istatistiği hesaplanmalıdır. Bunun için yine tahmini parametrelerin düzenlenmesi gerekmektedir:

$$\bar{x}' = [150,4635 \ 68,4167 \ 1,7319]$$

$$S_{p, x_1, x_2, x_4} = \begin{bmatrix} 0,073 & -0,001 & 0,0019 \\ -0,001 & 0,042 & -0,001 \\ 0,0019 & -0,001 & 0,007 \end{bmatrix}$$

$$T_{(x_1, x_2, x_4)}^2 = 22,7604$$

$p=3$ durumunda $\text{ÜKL}_{(x_1, x_2, x_4)}$ aşağıdaki gibidir:

$$\text{ÜKL}_{(x_1, x_2, x_4)} = \frac{3 \cdot 17 \cdot 11}{16 \cdot 11 - 3 + 1} = 5,71$$

$$\bar{U}KL_{(x_1, x_2, x_4)} = 18,4$$

Görüldüğü gibi $T^2_{(x_1, x_2, x_4)}$, $\bar{U}KL_{(x_1, x_2, x_4)}$ 'den büyüktür. Dolayısıyla sorunun sadece yükseklik (X_1), dip yüksekliği (X_5) ve köpük payı (X_6) değişkenlerinden kaynaklanmadığı anlaşılmaktadır. Bu durumda koşullu terimlerin incelenmesi gerekmektedir. Öncelikle $T^2_{i,j}$ ($i \neq j$ $i = 1, 2, 4$) terimlerinin incelenmesi önerilmektedir. Bunlardan kontrol dışında olanlara ait olan i ve j değişkenlerinin değerleri, X_1 , X_2 ve X_4 değişkenlerinden oluşan $\bar{x}' = [150,69 \ 68,23 \ 1,69]$ vektöründen çıkarılır. Kalan değişken değerleriyle T^2 istatistiği hesaplanarak kontrol dışında olup olmadığına karar verilir. İlk olarak $T^2_{2,1}$ koşullu terimi hesaplanacaktır:

$T^2_{2,1} = T^2_{(x_1, x_2)} - T^2_{(x_1)}$ formülündeki $T^2_{(x_1, x_2)}$ aşağıdaki vektörler ve matris yardımıyla hesaplanmaktadır:

$$\bar{x}' = [150,69 \ 68,23]$$

$$\bar{x}' = [150,4635 \ 68,4167]$$

$$S_{p, x_1, x_2} = \begin{bmatrix} 0,073 & -0,001 \\ -0,001 & 0,042 \end{bmatrix}$$

$T^2_{(x_1, x_2)} = 18,0672$, $T^2_{(x_1)}$ aynı zamanda T^2_1 olduğundan 8,4332'dir. Buna göre $T^2_{2,1}$ 9,634 ($18,0672 - 8,4332 = 9,634$) değerine eşittir. Koşullu terimleri karşılaştırıldığı

$\bar{U}KL_{\text{koşullu}}$, $\left(\frac{(m+n)(m-1)}{mn(m-k-1)} \right) F_{(\alpha, 1, m-k)}$ aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\bar{U}KL_{\text{koşullu}} = \frac{(16+12)(16-1)}{16 \cdot 12 \cdot (16-2)} \cdot 16,59$$

$$\bar{U}KL_{\text{koşullu}} = 0,1562$$

9,634, $\bar{ÜKL}_{koşullu}$ 'dan büyüktür. $T_{2,1}^2$ anlamlıdır. Yükseklik (X_1) ile ağız çapı (X_2) arasında aykırı ilişki (counter correlation) olduğuna karar verilmektedir. Yani X_1 'in değerine (150,69) göre X_2 'nin 68,3483 ($\bar{x}_{2,1}$) olması beklenmektedir. X_2 'nin vektördeki değerinin ise 68,23 olduğu görülmektedir. $T_{2,1}^2$ 'in uyarı vermesi, aradaki farkın (0,1183) anlamlı olduğunu göstermektedir. $\bar{x}' = [150,69 \ 68,23 \ 1,69]$ vektöründen X_1 ve X_2 'nin değerleri çıkarılarak yeniden kalan vektöre $\bar{x}' = [1,69]$ ilişkin T^2 istatistiği T_4^2 istatistiğine eşittir. T_4^2 'nin kontrol altında olduğu bilinmektedir. Bu durumda diğer koşullu terimlerin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Sonuç olarak vektörün $\bar{x}' = [150,69 \ 68,23 \ 62,93 \ 1,69 \ 14,15 \ 27,07]$ kontrol dışında olma nedeni dip çapı (X_3), dip yüksekliği (X_5), köpük payı (X_6) değişkenlerinin kendi kontrol aralıklarının dışında olmasından ve yükseklik (X_1) ile ağız çapı (X_2) değişkenleri arasındaki aykırı ilişkiden (counter correlation) kaynaklanmaktadır.

4.7 Tek Değişkenli Kontrol Diyagramlarının Çizilmesi

Hotelling T^2 diyagramının, ortalamadaki değişimleri gösteren tek değişkenli kontrol diyagramlarıyla (x veya \bar{x} diyagramları) birlikte değerlendirilmesinin gereği teorik kısımda sıkça vurgulanmıştır. Bu nedenle 6 kalite değişkeninin \bar{x} -diyagramları incelenecektir. Bilindiği gibi diyagramın kontrol limitleri aşağıdaki formüller yardımıyla hesaplanmaktadır. $\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\bar{ÜKL} &= \bar{x} + 3 \frac{\bar{R}/d_2}{\sqrt{n}} \\ \text{OÇ} &= \bar{x} \\ \text{AKL} &= \bar{x} - 3 \frac{\bar{R}/d_2}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

d_2 örnek büyüklüğüne göre değişen tablo değeridir (Ek:25). Ancak \bar{R} 'nin her değişken için hesaplanması gerekmektedir. Tek değişkenli kontrol diyagramlarında da limitlerin "Geçmiş Veri Kümesi" temel alınarak hesaplanması önerilmektedir. Bu

nedenle örnek büyüklüğü 12 (n=12), örnek sayısı 16 (m=16) olan “Geçmiş Veri Kümesi” ’ndeki veriler temel alınarak \bar{x} ve \bar{R} değerleri hesaplanacaktır. Kalite değişkenlerinin \bar{x} , \bar{R} istatistikleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\text{Yükseklik: } \bar{x} = 150,4635 \quad \bar{R} = 0,80625$$

$$\text{Ağız çapı: } \bar{x} = 68,4167 \quad \bar{R} = 0,6375$$

$$\text{Dip çapı: } \bar{x} = 62,5453 \quad \bar{R} = 0,61875$$

$$\text{Et kalınlığı: } \bar{x} = 1,7319 \quad \bar{R} = 0,2625$$

$$\text{Dip yüksekliği: } \bar{x} = 14,6214 \quad \bar{R} = 1,4$$

$$\text{Köpük payı: } \bar{x} = 26,1495 \quad \bar{R} = 1,70625$$

$d_2=3,258$ (n=12 durumunda)

Diyagramlar kontrol amacıyla incelenen 2. veri kümesindeki değişkenlerin değerleriyle çizilecektir. Kalite değişkenlerinin limitleri aşağıda kontrol diyagramları ise Grafik 4.13-4.14-4.15-4.16-4.17-4.18’de verilmektedir:

-Yükseklik;

$$\dot{ÜKL} = 150,67$$

$$OÇ = 150,4635 \quad (\text{Grafik 4.13})$$

$$AKL = 150,2493$$

-Ağız çapı;

$$\dot{ÜKL} = 68,5847$$

$$OÇ = 68,4167 \quad (\text{Grafik 4.14})$$

$$AKL = 68,2487$$

-Dip çapı;

$$\begin{aligned}\dot{U}KL &= 62,6953 \\ O\dot{C} &= 62,5453 \text{ (Grafik 4.15)} \\ AKL &= 62,3953\end{aligned}$$

-Et kalınlığı;

$$\begin{aligned}\dot{U}KL &= 1,8015 \\ O\dot{C} &= 1,7319 \text{ (Grafik 4.16)} \\ AKL &= 1,6623\end{aligned}$$

-Dip yüksekliği;

$$\begin{aligned}\dot{U}KL &= 14,9935 \\ O\dot{C} &= 14,6214 \text{ (Grafik 4.17)} \\ AKL &= 14,2494\end{aligned}$$

-Köpük payı;

$$\begin{aligned}\dot{U}KL &= 26,6 \\ O\dot{C} &= 26,1495 \text{ (Grafik 4.18)} \\ AKL &= 25,6962\end{aligned}$$

\bar{x} -diyagramları incelendiğinde tüm değişkenlerin kontrol dışında olduğu yani prosesin kontrol altında olmadığı anlaşılmaktadır. Hangi örneklerin kontrol dışında olduğu aşağıda özetlenmektedir:

Yükseklik değişkenine ilişkin diyagramda, 6., 7., 12., 16., 29. ve 30. örnekler kontrol dışında iken ağız çapında 6. ve 30., dip çapında 6. 12., 30., et kalınlığında 16., 29., dip yüksekliğinde 12., 30. ve köpük payında 2., 6. 30. örnekler kontrol dışındadır.

Çok değişkenli proseslerin kontrolünde T^2 diyagramının kullanılmasının avantajları diyagramın, \bar{x} -diyagramındaki sonuçlarla karşılıklı incelenmesi ile daha iyi anlaşılmaktadır. T^2 -diyagramının kontrol dışında olması \bar{x} - diyagramlarından en az birinin kontrol dışında olacağı hakkında fikir vermektedir. T^2 diyagramında 6.

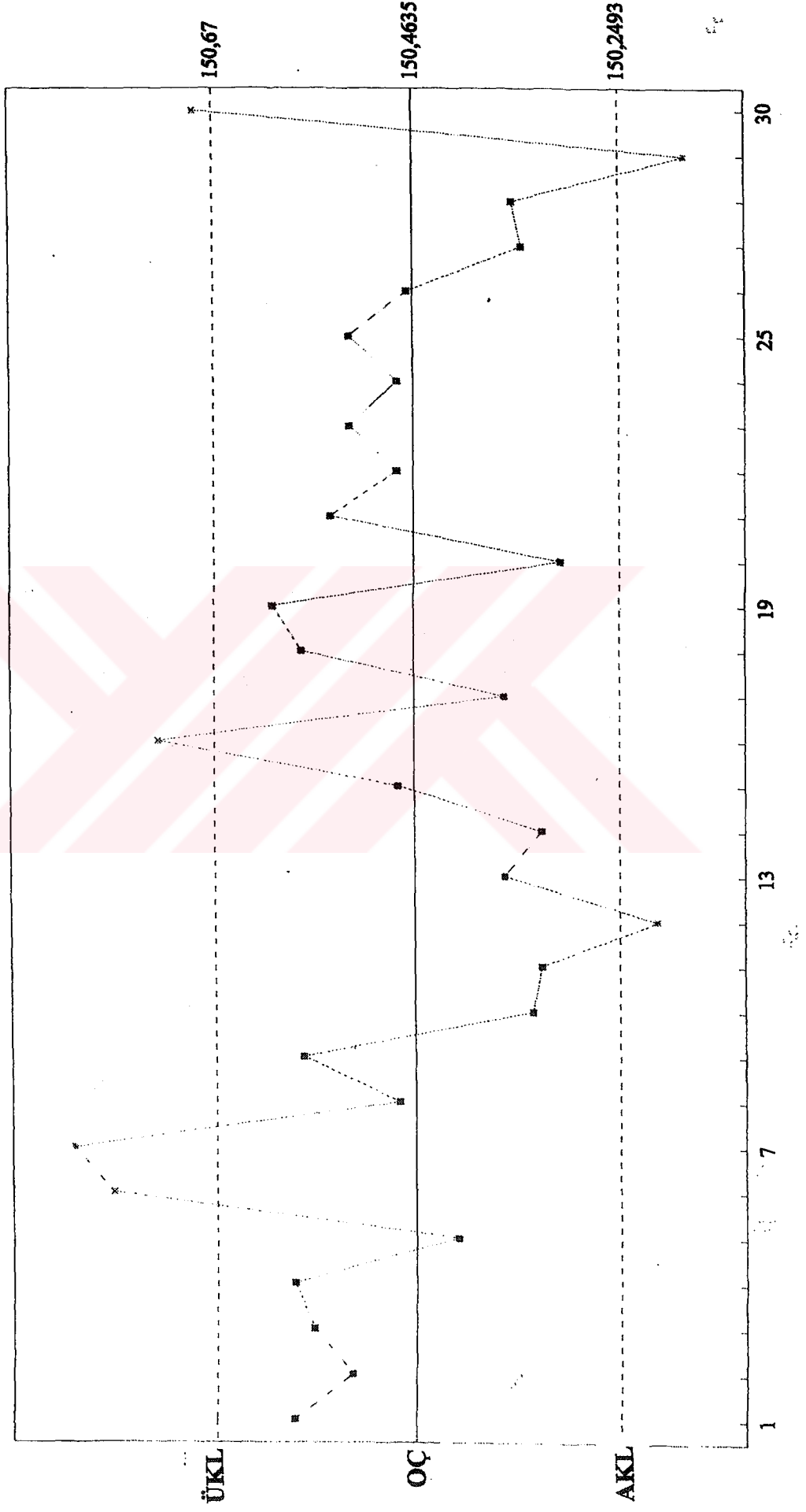
gözlem vektörü kontrol dışındaki ilk vektördür. Ayrıştırılmalar sonucunda bu vektördeki sorunun yükseklik, ağız çapı ve dip çapı değişkenlerinden kaynaklandığı belirlenmiştir. Paralel olarak bu değişkenlerin \bar{x} -diyagramlarında da 6. örneğin kontrol dışında olduğu görülmektedir. Ancak köpük payı değişkeni için çizilen \bar{x} -diyagramında 6. örnek kontrol dışındayken T^2 -diyagramında kontrol altındadır. Yani 6. örnekteki sorun köpük payından kaynaklanmamasına rağmen \bar{x} -diyagramında öyleymiş gibi görünmektedir. T^2 diyagramında uyarı veren ikinci vektör 7. gözlem vektörüdür. Ayrıştırma işlemi sonucunda problemin yükseklik değişkeninden kaynaklandığı saptanmıştır. Yükseklik değişkeninin \bar{x} -diyagramında da 7. örnek kontrol dışındadır. Üçüncü kontrol dışı vektör 12. örneğe aittir. Ayrıştırma sonucu sorunun sadece dip çapından kaynaklandığı anlaşılmıştır. Ancak 12. örnek yükseklik ve dip yüksekliği değişkenlerinin \bar{x} -diyagramlarında da kontrol dışında görülmektedir. Dolayısıyla bu örnek için kontrol altında olan yükseklik ve dip yüksekliği sadece \bar{x} -diyagramları ile değerlendirme yapıldığında kontrol dışındaymış gibi görülebilmektedir. Dördüncü kontrol dışındaki vektör 16. örneğin ortalama değerlerini göstermektedir. MYT yöntemi ile sorunun et kalınlığından kaynaklandığı belirlenmiştir. Değişkenin \bar{x} -diyagramı da bu sonucu desteklemektedir. Beşinci kontrol dışındaki vektör 29. örneğin ortalama değerlerini içermektedir. Ayrıştırılmış terimler sorunun yükseklik ve et kalınlığından kaynaklandığını göstermektedir. Aynı şekilde 29. örnek bu değişkenlerin \bar{x} -diyagramlarında da kontrol dışındadır. T^2 diyagramında son uyarı veren vektör 30. örneğe aittir. Uyarı dip çapı, dip yüksekliği ve köpük payı değişkenlerinin kendi kontrol aralıklarının dışında olmasından ve yükseklik ile ağız çapı değişkenlerinin aralarındaki aykırı ilişkiden kaynaklanmaktadır. Ancak 30. örnek tüm değişkenlerin \bar{x} -diyagramlarında uyarı vermektedir.

T^2 -diyagramı çizilmeden sadece tek değişkenli kontrol diyagramlarıyla değerlendirme yapılmış olsaydı yükseklik ve ağız çapındaki uyarının örnek ortalamalarının kontrol limitlerini aşmasından kaynaklandığı düşünülecekti. 30. örnekte et kalınlığı değişkeni kontrol altında olmasına rağmen, bu örneğin et kalınlığı için çizilen tek değişkenli kontrol diyagramında uyarı verdiği görülmektedir. Yine aslında kontrol altında olan bir örnek kontrol dışındaymış gibi

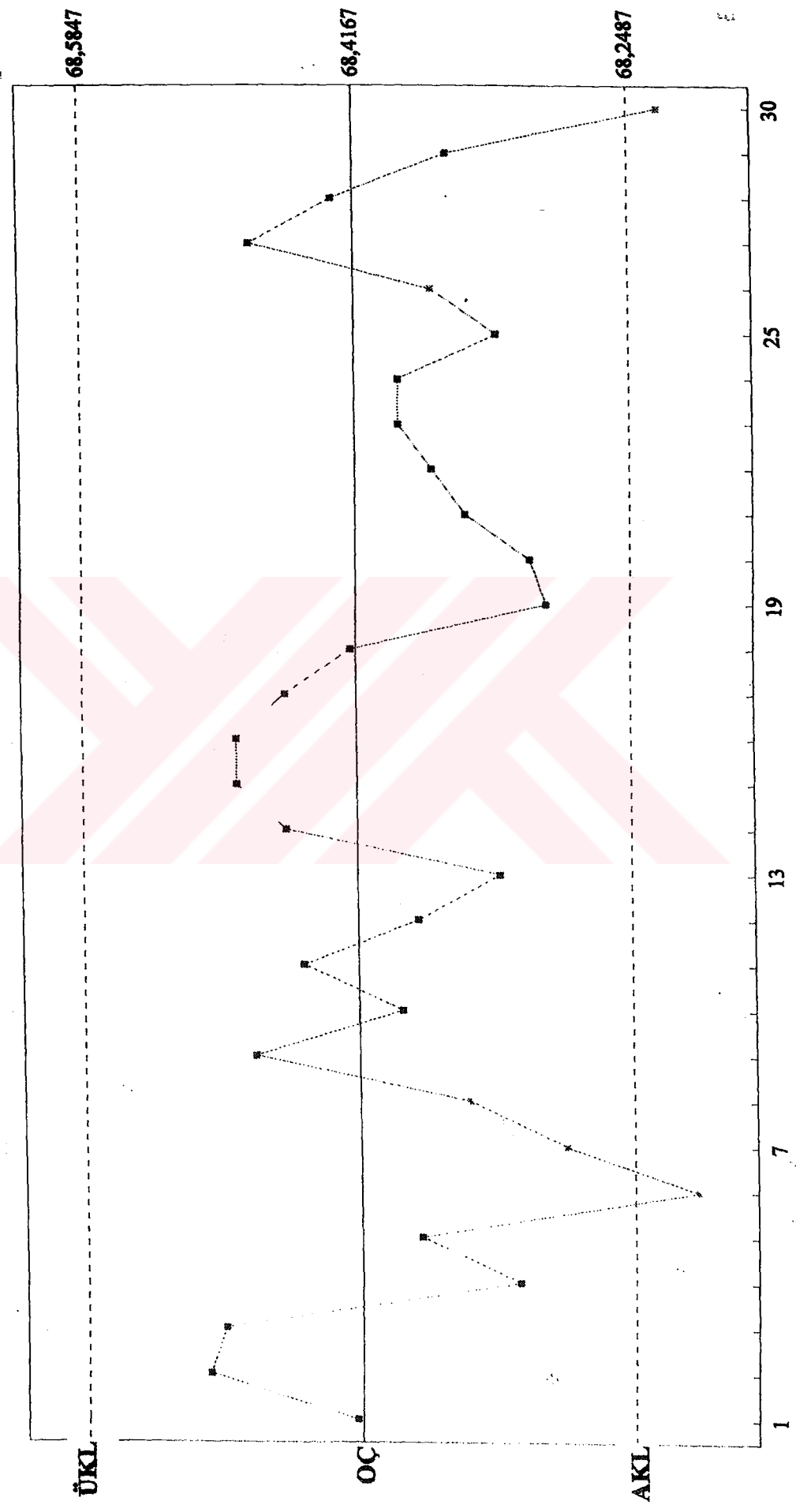
kabul edilmektedir. Bazı durumlarda T^2 -diyagramında tüm değişken değerleriyle kontrol altında olan bir örnek tek değişkenli kontrol diyagramlarında kontrol dışındaymış gibi görülebilmektedir. Örneğin uygulamada kontrol altında olan 2. örnek, köpük payının kontrolü amacıyla çizilen diyagramda kontrol dışındadır

Tek değişkenli kontrol diyagramları yapılan uygulamada Hotelling T^2 diyagramı ile genelde paralel sonuçlar vermiştir. Her iki tip diyagramda da proses kontrol dışındadır. Ancak \bar{x} -diyagramlarının yorumunda kontrolde olmama sadece örneklerin kendi aralıklarının dışına çıkması olarak algılandığından ve bazen Hotelling T^2 diyagramında kontrol dışında olan bir örnek, \bar{x} -diyagramlarında kontrol altındaymış gibi görüldüğünden veya tam tersi gerçekleşebildiğinden her iki tip diyagramın birlikte incelenmesi önerilmektedir.

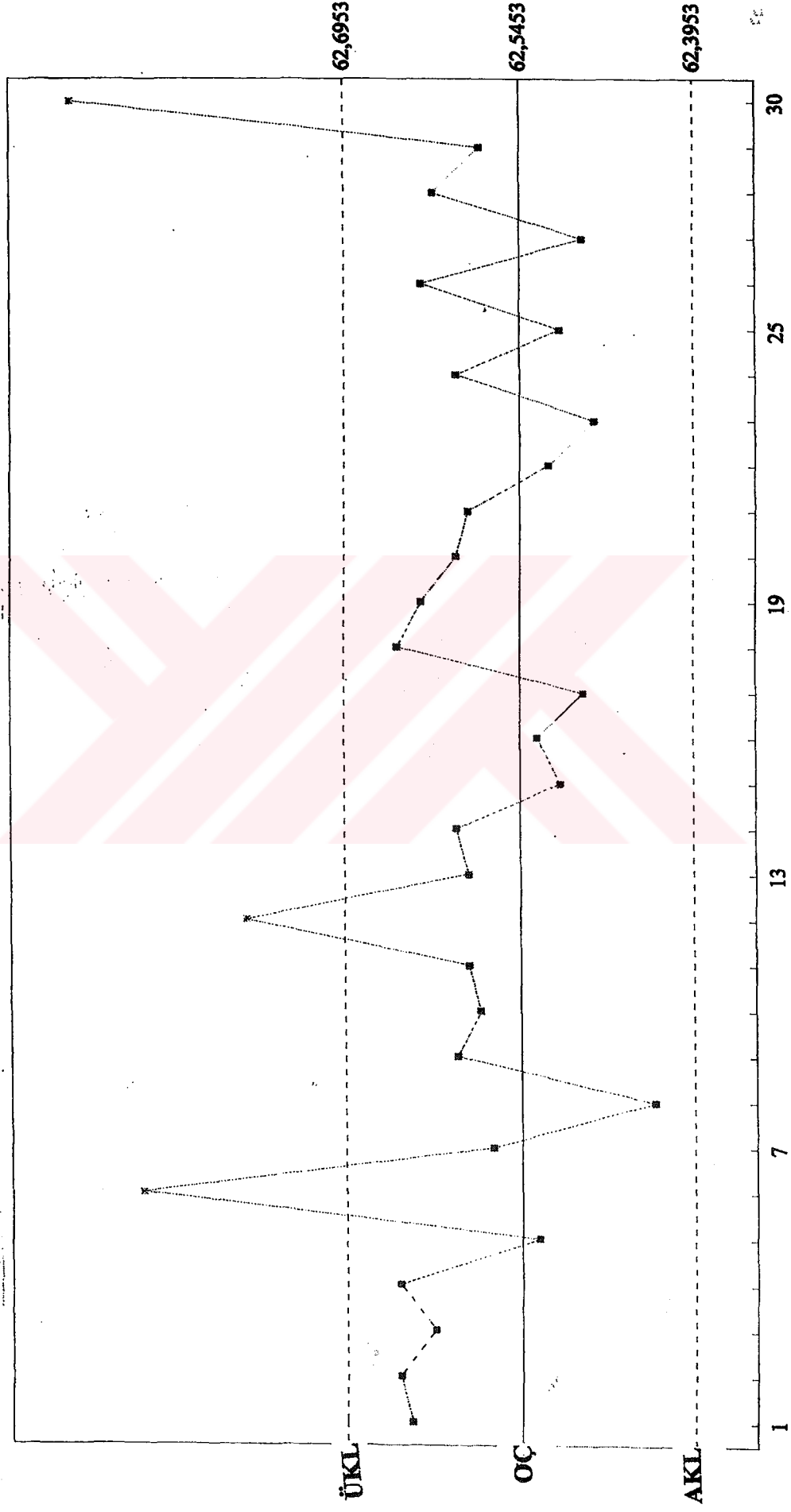
Grafik 4.13: Yükseklik Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



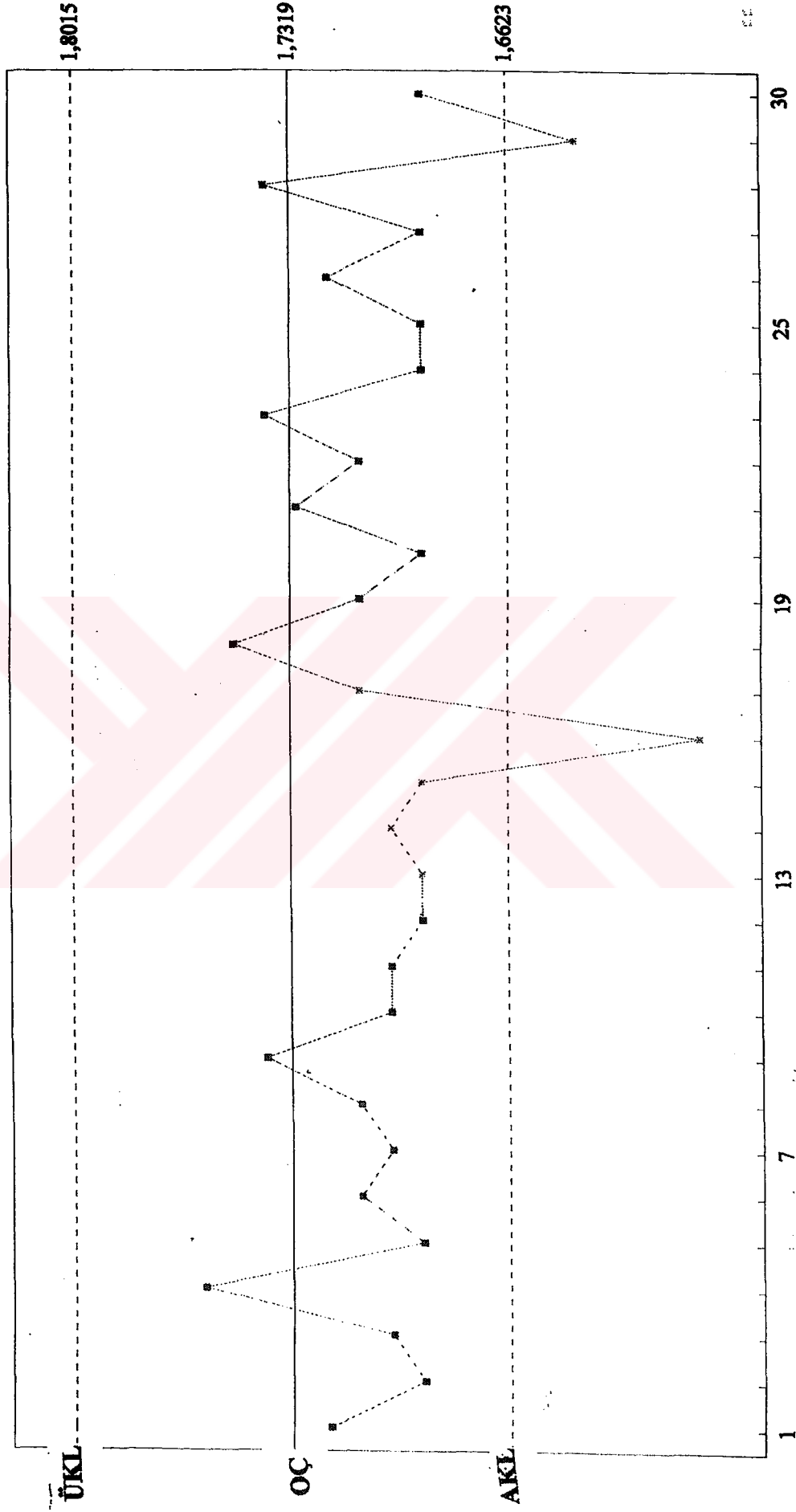
Grafik 4.14: Ağız çapı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



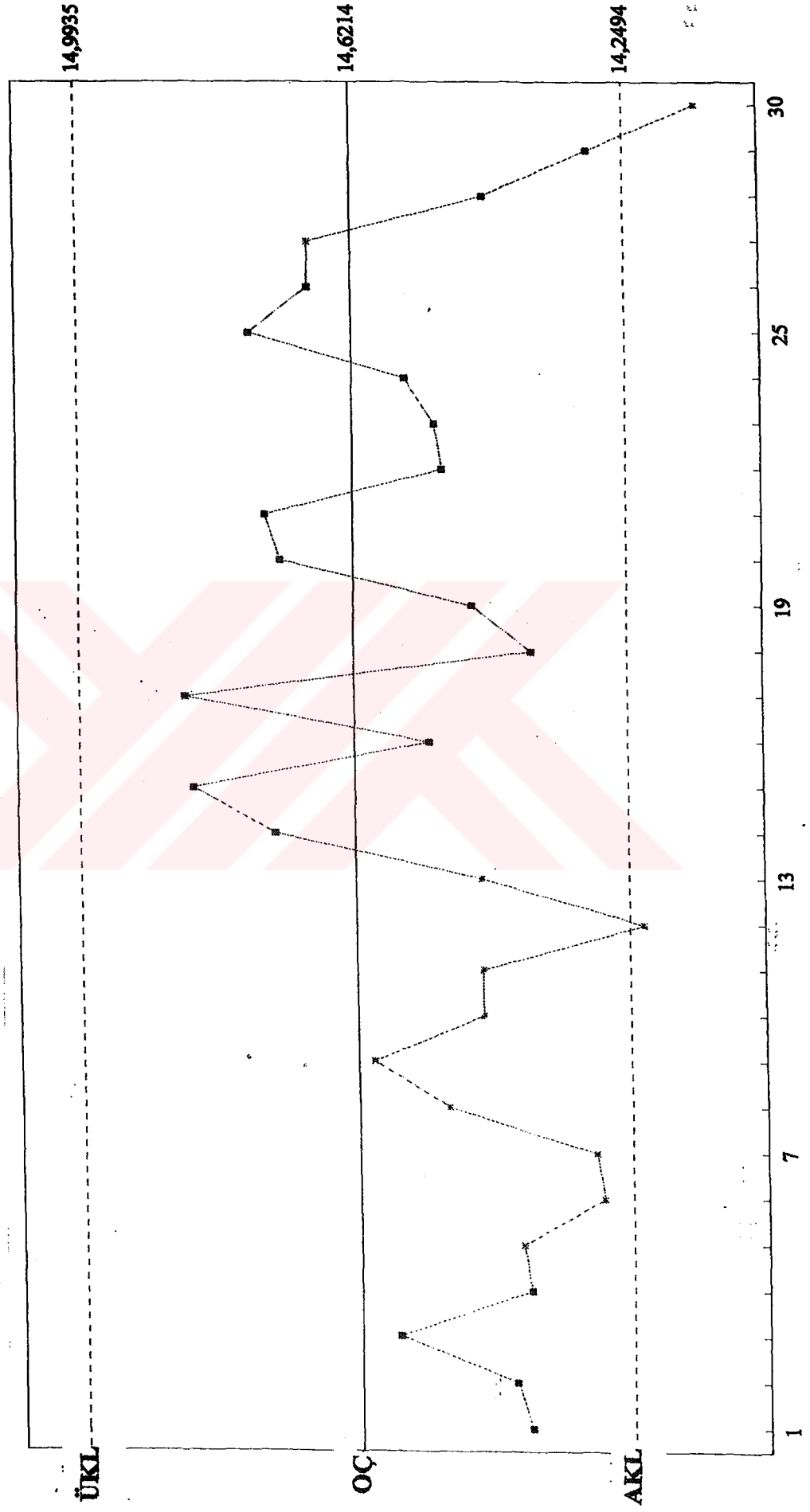
Grafik 4.15: Dip çapı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



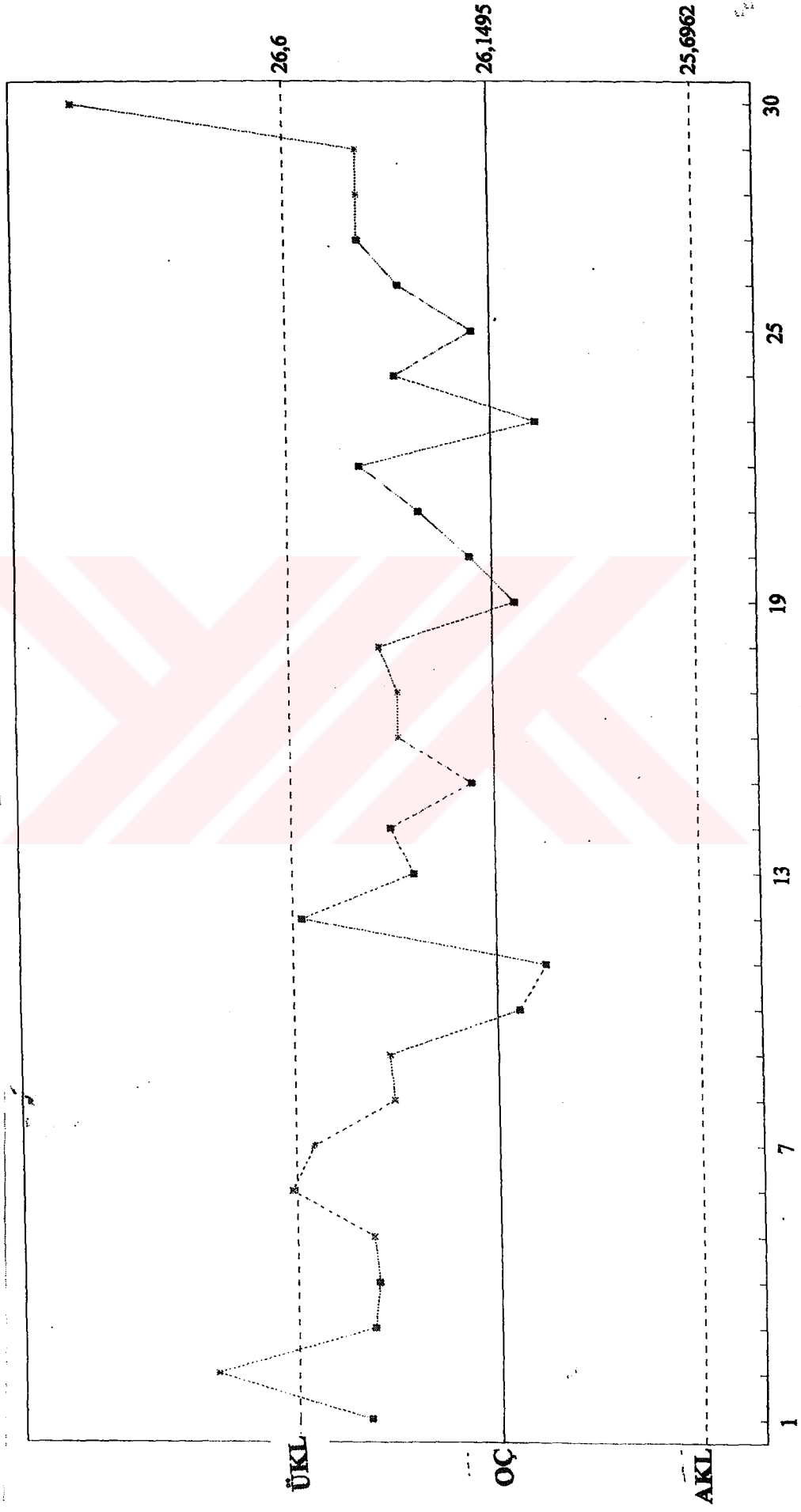
Grafik 4.16: Et kalınlığı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



Grafik 4.17: Dip yüksekliği Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



Grafik 4.18: Köpük payı Değişkeni \bar{x} -Diyagramı



SONUÇ

Bilindiği gibi rekabetin yoğun olduğu uluslararası piyasalarda tutunmanın ön koşullardan biri rakiplerden daha kaliteli mal üretmektir. Bu amaca uygun olarak istatistik yöntemlerin de desteğiyle kalite kontrolünün başarılı ve sürekli olarak gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Bilinen klasik istatistik kalite kontrol araçlarının kullanılmasının yanı sıra bu alandaki yeni yöntemlerin, teknolojinin de desteğiyle hayata geçirilmesi, daha az maliyetle üstün kalitede ürün üretilmesi açısından büyük önem taşımaktadır. Bu amaçla, çok değişkenli istatistik yöntemler arasında yer alan “Hotelling T^2 ” istatistiğinin, proses kontrolünde kullanılması önerilmektedir. Çalışmanın birinci bölümünde kalite, kalite kontrol, istatistik proses kontrol ve istatistik proses kontrolünde sıkça kullanılan tek değişkenli kontrol diyagramları özetlenerek, çok değişkenli istatistik kalite kontrol yöntemleri açıklanmıştır. İkinci bölümde T^2 istatistiğinin dağılım özellikleri ve varsayımları üzerinde durulmuş ve Hotelling T^2 istatistiğine dayalı diyagramların çizilmesi aşamaları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde T^2 istatistiğinin ayrıştırılmasını sağlayan yöntemler araştırılmış ve son bölümde de tüm bu teorik bilgilerle, cam sanayiinde kapsamlı bir uygulama gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın uygulama bölümünde öncelikle “Geçmiş Veri Kümesi” ’nin oluşturulması amacıyla cam bir bardağın kalite değişkenlerine ilişkin oniki birimlik seksenyedi örnekten oluşan veri kümesi elde edilmiştir. Analiz sonucunda bunlardan onaltısının “Geçmiş Veri Kümesi” ’ni oluşturduğu saptanmıştır.” “Geçmiş Veri Kümesi” nden tahmin edilen parametreler temel alınarak, kontrol amacıyla tesadüfi oniki birimlik otuz örnekten oluşan “yeni” veri kümesi ile T^2 -diyagramı (II. Aşama) çizilmiştir. Yirmi iki örneğin kontrol dışında olması, prosesin kontrol dışında olduğunu göstermektedir. Ancak amaç aynı zamanda kontrol dışı duruma neden olan sorunu T^2 -diyagramıyla belirlemek olduğundan yeniden ilgili fabrikanın kayıtlarından tesadüfi oniki birimlik otuz örnekten oluşan bir veri kümesi talep edilmiştir. Çizilen II. Aşama diyagramında bu kez sadece altı örneğin kontrol dışında olduğu saptanmıştır. İyileşmenin nedenlerini araştırmak amacıyla fabrikanın üretim müdürü ile görüşülmüştür. Yetkili kişi, uzun süredir var olan kalite problemi ile ilgili

çalışmalar yaptıklarını, sipariş üzerine ürettikleri ürünlere ait kalıpları çok daha sık değiştirdiklerini veya kirlenen kalıpları temizlediklerini belirtmiştir. Kontrol amacıyla talep edilen ikinci veri kümesinin ilkinden yaklaşık bir buçuk yıl aradan sonra elde edilmesi, fabrikada uzun süredir devam eden kaliteyle ilgili tetkiklerin tamamlanmasıyla “kraliyet damgasını basma yetkisi” adı verilen prestijli bir yetkinin alınması, bu iyileşmenin çok doğal olduğunu göstermektedir. Literatürde çok değişkenli kontrol diyagramlarının tek değişkenli diyagramlarla birlikte incelenmesi önerildiğinden ikinci veri kümesindeki değişkenlere ilişkin tek değişkenli \bar{x} -diyagramları da karşılaştırmalı analizlerin yapılabilmesi amacıyla çizilmiştir. Her iki tip diyagramda da prosesin kontrol dışında olduğu görülmüştür. Hotelling T^2 diyagramında kontrol dışı durumun hangi değişkenlerden veya değişkenler arasındaki ilişkilerden kaynaklandığı “MYT Ayrıştırma Yöntemi” ile belirlenmiştir.

Hotelling T^2 diyagramı ile \bar{x} -diyagramlarının karşılaştırmalı analiziyle elde edilen bulgulara göre, sadece \bar{x} -diyagramları incelenerek yapılan proses kontrolünün yetersiz sonuçlar verebildiği yani incelenen örnek kontrol altındayken kontrol dışındaymış gibi görülebildiği (değişen kontrol alanından dolayı) veya tam tersi bir durumla karşılaşılabilceği anlaşılmıştır. Özellikle kalite değişkenleri arasında anlamlı doğrusal ilişkiler söz konusu olduğunda tek değişkenli diyagramlar prosesle ilgili yanlış kararlar verilmesine neden olabilmektedir.

Sonuç olarak proseslerin çoğu çok değişkenli olduğundan, sadece tek değişkenli \bar{x} -diyagramlarının çizilmesi yetersiz kalmaktadır. Özellikle kalite değişkenleri arasında anlamlı doğrusal ilişkiler söz konusu olduğunda bu diyagramlar prosesle ilgili yanlış kararlar verilmesine neden olmaktadır. Karmaşık hesaplamalar nedeniyle sanayiideki uygulamalarda henüz yeterince dikkat çekmeyen çok değişkenli kontrol diyagramları, konuyla ilgili yazılımların geliştirilmesiyle birlikte, kalitede sürekli iyileştirme ilkesini benimseyerek büyümeyi hedefleyen işletmelerin temel kalite kontrol aracı olmaya adaydır. Böylece prosese daha hızlı müdahale edilerek, sorunun nedenleri doğru olarak saptanabilecek ve uluslararası pazarlarda rekabet edebilir yüksek kaliteli mallar üretilmesi mümkün olabilecektir.

KAYNAKÇA

Akın, F., **Ekonometri II Ders Notları**, İstanbul, M.S.Ü. Yayını, 1997

Aktan, C. C., **Değişim Çağında Yönetim**, İstanbul, Sistem Yayıncılık, 2003

Albayrak, A.S. ,**Türkiye’de İllerin Sosyo-Ekonomik Gelişmişlik Düzeylerinin Çok değişkenli İstatistik Yöntemlerle İncelenmesi**, Doktora Tezi, İstanbul, 2003

Alpar, R., **Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş 1**, 2.baskı, Ankara, Nobel Yayınevi, 2003

Alt, F.B., “Multivariate Quality Control: State of Art”, **ASQC Annual Quality Congress Transactions**, 1982, s. 886-893

Alt, F. B., “Multivariate Statistical Quality Control”, **The Encyclopedia of Statistical Sciences**, C:VI, 1984, s. 110-122.

Aparisi, F., “Hotelling’s T^2 Control Chart with Adaptive Sample Sizes”, **International Journal of Production Research**, C.XXIV, No:10, 1996, s.2853-2862

Atienza, O. O., L. C. Tang, B.W. Ang, “Quality Notes, Simultaneous Monitoring of Univariate and Multivariate SPC Information Using Boxplots”, **International Journal of Quality Science**, C. III, No: 2, 1998, s. 194-204.

Bechhofer, R.E., C.W. Dunnet, “Percentage Points of Multivariate Student t Distributions”, **Selected Tables in Mathematical Statistics**, C.XI, American Mathematical Society, Providence, R.I.,t.y.

Bendell, A., J. Disney, C. McCollin, “The future role of statistics in quality engineering and management”, **The Statistician**, C. XLVIII, No:3, s. 299-326.

Besterfield, D.H., **Quality Control**, 5.baskı, Ohio, Prentice Hall, 1998

“Beta Distribution”, **Engineering Statistics Handbook**, (çevrimiçi), www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda366h.htm, 23 Şubat 2004

“Beta Distribution”, **Statistical Distributions**, (çevrimiçi), <http://www.reascorp.com/beta.htm>, 23 Şubat 2004

Blazek, L.W., B. Novic, M.D. Scott, “Displaying Multivariate Data Using Polyplots”, **Journal of Quality Technology**, C.XIX, No.2, 1987, s. 69-74.

Bothe, D. R., **Measuring Process Capability Techniques and Calculation for Quality and Manufacturing Engineers**, U.S.A, Mc Graw-Hill, 1997

Bozkurt, R., **Kalite İyileştirme Araç ve Yöntemleri (İstatistiksel Teknikler)**, 3. baskı, Ankara, Milli Prodüktivite Merkezi Yayınları, No:630, 2003

Brockwell, P.J., R. A. Davis, **Introduction to Time Series and Forecasting**, U.S.A., Springer Verlag, 1996

Burnak, N., **Çokdeğişkenli Kalite Kontrolünde Maliyet Analizi**, Eskişehir, Anadolu Üniversitesi Yayınları, No:259, 1988

Burr, I.W., “The Effect of Non-Normality on Constants for x and R Charts”, **Industrial Quality Control**, 1967, s. 563-569.

Chambers, J.M., W.S. Cleveland, B. Kleine, P.A. Tukey, **Graphical Methods for Data Analysis**, Belmont, CS:Wadsworth, 1983, s. 158-162.

Chen, N.Y.Q., S.M. Erman, S. Vilbert, “Hotelling’s T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection”, **Proceedings of the 2000 IEEE Workshop on Information Assurance and Security United States Military Academy**, West Point, New York, 6-7 Haziran, 2000, s.180-186.

Cheng, A.Y., R.Y. Liu, J.T. Luxhoj, “Monitoring multivariate aviation safety data by data depth: control charts and threshold systems”, **III Transactions**, C.XXXII, 2000, s. 861-872.

Chou, Y.M., R.L. Mason, J.C. Young, " Power Comparisons for a Hotelling's T^2 Statistic", **Commun. Statist-Simula.**, C.XXIX, No:4, 1999, s.1031-1050

Cooley, W. W., P.R. Lohnes, **Multivariate Data Analysis.**, New York, Wiley, 1971

Cox, T.F., "Multidimensional scaling used in multivariate statistical process control", **Journal of Applied Statistics** , C. XXVIII, No: 4, s. 365-378.

Crosier, R.B., "Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes", **Technometrics**, C.XXX, No:3, 1988, s. 291-303.

"Cusum Control Charts", **Engineering Statistics Handbook**, (Çevrimiçi), <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc323.htm>, 3 Mart 2004

Daniel, W.W., J. C., Terrell, **Business Statistics, Basic Concepts and Methodology**, 4. baskı, U.S.A, Houghton Mifflin Company, 1986

Dillon, W.R., M. Goldstein, **Multivariate Analysis Methods and Applications**, New York, John Wiley&Sons, 1984

Doğanaksoy, N., F.W. Faltin, W.F. Tucker, "Identification of Out of Control Quality Characteristics in a Multivariate Manufacturing Environment", **Commun. Statist.-Theory Meth.**, C.XX, No:9, 1991, s.2775-2790.

Uğur, N., H. Çaltuğ, **İstatistik Kalite Kontrol**, 2. baskı, Ankara, KOSGEB Yayını, 1995

Deming, W. E., **Industrial Quality Control**, Wisconsin, American Society for Quality Control, 1956,

Enders, W., **Applied Econometric Time Series**, U.S.A., John Wiley&Sons, Inc., 1995

Feigenbaum, A. V., **Total Quality Control**, New York, McGraw-HillPublishing Co., Inc., 1961

Feigenbaum, A. V., **Total Quality Control**, 3. baskı, Singapore, McGraw-HillPublishing Co., Inc., 1987

Fuchs, C., Y. Benjamini, "Multivariate Profile Charts for Statistical Process Control", **Technometrics**, C.XXVI, No:2, 1994, s. 182-195.

Fuchs, C., R.S. Kenett, **Multivariate Quality Control: Theory and Applications**, New York, Marcel Dekker, Inc., 1998

Gitlow, H., A. Oppenheim, R. Oppenheim, **Quality Management, Tools and Methods for Improvement**, 2.baskı, U.S.A., Richard D. Irwin, Inc., 1995

Goulding, P.R., B. Lennox, D.J. Sandoz, K.J. Smith, O. Marjanovic, "Fault detection in continuous processes using multivariate statistical methods", **International Journal of Systems Science**, C. XXX1, No:11, 2000, s. 1459-1471.

Grant, E.L., R. S. Leavenworth, **Statistical Quality Control**, 6.baskı, U.S.A., McGraw-Hill, 1988

Gözlü, S., **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, İstanbul, İTÜ yayını, 1990

Gujarati, D.N., çev. Ü. Şenesen, G. Şenesen, **Temel Ekonometri**, İstanbul, Literatür Yayıncılık, 1995

Gürsakal, N., **İstatistik I Çözümlü Sorular**, Bursa, Marmara Kitabevi Yayını, 1996

Hair, J.F., R.E. Anderson, R.L. Tatham, W.C. Black, **Multivariate Data Analysis**, 5.baskı, New Jersey, Prentice Hall, 1998

Harris, R., **A Primer of Multivariate Statistics**, 3. baskı, Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 2001

Hawkins, D.M., "Multivariate Quality Control Based on Regression Adjusted Variables", **Technometrics**, C..XXXIII, No:1, 1991, s. 61-75.

Hawkins, D.M., "Regression Adjustment for Variables in Multivariate Quality Control", **Journal of Quality Technology**, C.XXV, No:3, s. 170-182.

Hawkins, D.M., Olwell D.H., **Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement**, New York , Springer –Verlag,, 1998, b.a.

Hawkins, D. M., P. Qiu, C. W. Kang, “The Change-point Model for Statistical Process Control”, **Journal of Quality Technology**, C. XXXV, No: 4, 2003, s. 355-366

Hayter, A.J., “Multivariate Quality Control Procedures”, **Statistical Process Monitoring and Optimization, Statistics, Textbooks and Monographs**, Ed. S.H. Park, G.G. Vining, NewYork, Marcel Dekker Inc., 2000

Hayter, A.J., K.L. Tsui, “Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems **Journal of Quality Technology**, C.XXVI, No:3, 1994, s.197-208.

Healy, J.D., “A note on Multivariate CUSUM Procedures”, **Technometrics**, C.XXIX, No:4, 1987, s. 409-412.

Hollander, M., D.A. Wolfe, **Nonparametric Statistical Methods**, 2. baskı, New York, John Wiley & Sons Inc., 1999

Holloway, L.N., O.J. Dunn, “The Robustness of Hotelling’s T^2 ”, **Journal of American Statistical Association**, C.LXII, 1967, s. 124-136.

Hotelling, H., **Techniques of Statistical Analysis**, y.y., 1947, s. 111-184.

“Hotelling’s T^2 as a Multivariate SPC Procedure-Statistical Distance”, (çevrimiçi) <http://www.incontroltech.com/mvspc/tutorial.html>, 21 Şubat 1999

Howarth, R.J., B.J. Coles, M.H. Ramsey, “The potential of multivariate quality control as a diagnostic tool in geoanalysis”, **Analyst**, C.MXXV, 2000, s. 2032-2037.

Hunter, J. S, “Statistical Process Control”, **Quality Progress**, Aralık 1999, s. 54.

Jackson, J. E., "Multivariate Quality Control", **Commun. Statist.-Theor. Meth.**, C.XIX, No:11, 1985, s. 2656-2688.

Jackson, J.E., "Multivariate Quality Control 40 Years Later", **Statistical Process Control in Manufacturing**, Ed. D. C. Montgomery, J.B. Keats, New York Milwaukee, Marcel Dekker, Inc., 1991

Jackson, J.E., R. H. Morris, "An Application of Multivariate Quality Control to Photographic Processing", **Journal of American Statistical Assoc.**, 1957, s.186-199.

Jaupi, L., "Multivariate Control Charts for Complex Processes", Ed. C. Laura, J. Antoch, V.Vinzi, G.Saporta, , **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, New York, Physica-Verlag Heidelberg, 2002

Jiang W., K.L. Tsui, "An economic model for integrated APC and SPC control charts" **IIIE Transactions**, C.XXXII, 2000, s. 505-513.

Johnson, R.A., D.W. Wichern, **Applied Multivariate Statistical Analysis**, 4 baskı, New Jersey, Prentice Hall, 1998

Juran, J. M. , **Quality Control Handbook**, 3. baskı , New York, Mc-Graw-Hill Book Company, 1974

Kano, M., S. Hasebe, I. Hashimoto, H. Ohno, "A new multivariate statistical process monitoring method using principal component analysis", **Computers and Chemical Engineering**, C. XXV, 2001, s. 1103-1113.

Kobu, B., **Endüstriyel Kalite Kontrolü**, 2.baskı, İstanbul, İ.Ü. Yayını, 1987

Kourti, T., J.F. MacGregor, "Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring", **Journal of Quality Technology**, C.XXVIII, No:4, 1996, s. 409-428.

Kresta J.V., J.F. MacGregor, "Multivariate Statistical Monitoring of Process Operating Performance", **Canadian Journal of Chemical Engineering**, C:LIX, 1991, s. 35-47

Kume, H., **Statistical Methods for Quality Improvement**, 8. baskı, Tokyo, AOTS, 1992.

Law, A.M., W.D. Kelton, **Simulation Modelling and Analysis**, New York, McGraw-Hill, 1982

Lawrence, J.A., B.A. Pasternack, **Applied Management Science**, U.S.A, John Wiley&Sons, Inc., 1998

Linna, K.W., W.H. Woodall, K.L. Busby, "The Performance of Multivariate Control Charts in the Presence of Measurement Error", **Journal of Quality Technology**, C. XXXIII, No:3, 2001, s. 349-355.

Liu, R.Y., "Control Charts for Multivariate Processes", **Journal of the American Statistical Association**, C. XM, No: 432, 1995, s. 1380-1387.

Looney, S., "How to Use Tests for Univariate Normality to Assess Multivariate Normality", **The American Statistician**, C.XLIX, No:1, 1995, s.64-70.

Lu, X.S., M. Xie, T.N. Goh, C.D. Lai, "Control Chart for Multivariate Attribute Processes", **Int. J. Prod. Res.**, C. XXXVI, No:12, 1998, s. 3477-3489.

Lowry C.A., D.C. Montgomery, "A review of multivariate control charts", **IIE Transactions**, C.XXIII, No: 6, 1995, s.800-811

Lowry, C.A., W.H. Woodall, C.W. Champ, "A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Charts", **Technometrics**, C.XXXIV, No: 1, 1992, s. 46-53.

Lucas, J.M., "Cumulative Sum (CUSUM) Control Schemes", **Commun. Statist.-Theor. Meth.**, C:XIV, N.14, 1985, s. 2689-2704

Marden, J.I., M.D. Perlman, "On the Inadmissibility of Step-Down Procedures for the Hotelling T^2 Problems", **Annals of Statistics**, C. XVII, 1990, s. 172-190.

Martin, E.B., A.J. Morris, C. Kiparissides, "Manufacturing Performance Enhancement Through Multivariate Statistical Process Control", **Annual Reviews in Control**, C.XXIII, 1999, s. 35-44.

Mason, R.L., "Book Reviews: Multivariate Quality Control: Theory and Applications", **Technometrics**, C.XLI, No:2, 1999, s. 168-170.

Mason, R.L., v.d., "Assesment of Multivarate Process Control Techniques", **Journal of Quality Technology**, C.XXIX, N:2, 1997, s. 140-143

Mason, R.L., C.W. Champ, N.D. Tracy, S.J. Wierda, J.C. Young, " Assessment of Multivariate Process Control Techniques", **Journal of Quality Technology**, C. XXIX, No: 2, 1997, s. 140-143.

Mason, R. L., Y.M. Chou, J.C. Young, "Applying Hotelling's T^2 Statistic to Batch Processes", **Journal of Quality Technology**, C.XXXIII, No:4, 2001, s. 466-479.

Mason, R.L., N.D. Tracy, J.C. Young, "Decomposition of T^2 for Multivariate Control Interpretation", **Journal of Quality Technology**, C.XXVII, No:2, 1995, s. 102.

Mason, R.L., N.D. Tracy, J.C. Young, "Monitoring a Multivariate Step Process", **Journal of Quality Technology**, C.XXIIIX, No:1, 1996, s.39-50.

Mason, R.L., N.D. Tracy, J.C. Young, "A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals", **Journal of Quality Technology**, C.XXIX, No:4, 1997, s. 396-406.

Mason, R.L., J.C. Young, "Why Multivariate Statistical Process Control ?", **Quality Progress**, C. XXX1, No: 12, 1998, s. 88-93.

Mason, R.L., J.C. Young, "Improving the Sensitivity of the T^2 Statistic in Multivariate Process Control", **Journal of Quality Technology**, C.XXX1, No: 2, 1999, s. 155-165.

Mason, R. L., J.C. Young, "Interpretive Features of a T^2 Chart In Multivariate SPC", **Quality Progress**, Nisan 2000, s. 84-89.

Mason, R.L., J.C. Young, "Implementing Multivariate Statistical Process Control Using Hotelling's T^2 Statistic", **Quality Progress**, C:XXXIV, N.4, 2001, s.71-73

Mason, R.L., J.C. Young, **Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications**, Virginia, American Statistical Association (ASA), 2001

Mason, R.L., J.C. Young, "Variation in SPC", **Quality Progress**, C:XXXV, No: 4, 2002, s. 79-99.

Mastrangelo, C.M., G.C. Runger, D.C. Montgomery, "Statistical Process Monitoring with Principal Component", **Quality and Reliability Engineering**, C.XII, 1996, s. 203-210

MacKinnon, J.G., "Critical Values of Cointegration Tests", R.e. Engle, C.W.J.Granger; **Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration**, 13. bölüm, Oxford University Pres, New York, 1991.

McClave, J.T., P.G. Benson, **A First Course in Business Statistics**, 5.baskı, New York, Macmillan Publishing Company, 1992

Mitra, A., **Fundamentals of Quality Control and Improvement**, 2. baskı, U.S.A., Prentice-Hall Inc., 1998

Montgomery, D.C., **Introduction to Statistical Quality Control**, 4. baskı, New York, John Wiley & Sons, Inc., 2001

Montgomery, D.C., C.M. Mastrangelo, "Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data", **Journal of Quality Technology**, C:XXIII, No. 3, 1991, s.179-193.

Montgomery, D.M., W.H. Woodall, "Research Issues and Ideas in Statistical Process Control", **Journal of Quality Technology**, C:XXXI, No:4, 1999, s. 376-386.

Morrison, D.F., **Multivariate Statistical Methods**, 2. baskı, U.S.A., McGraw-Hill, 1976

“Multivariate Shewhart Charts”,(çevrimiçi),
<http://www.sys.virginia.edu/edu/mqc/mqc/index2a.html>, 20.04.2003

Murphy, B.J., “Selecting out of control Avariables with the T^2 Multivariate Quality Control Procedure”, **Statistician**, C. XXVI, 1987, s. 571-583

Nedumaran, G., J.J. Pignatiello, “On Constructing T^2 Control Charts for Online Process Monitoring”, **IIE Transactions**, C. XXXI, No: 6, 1999, s. 529-537

Newbold, P., **İşletme ve İktisat için İstatistik**, çev. Ümit Şenesen, 4.baskı, İstanbul, Literatür Yayıncılık, 2001

Niang, N., “Multidimensional Methods for Statistical Process Control: Some Contributions of Robust Statistics”, Ed. C. Laura, J. Antoch, V.Vinzi, G.Saporta, , **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, New York, Physica-Verlag Heidelberg, 2002

Nijhuis, A., S. Jong, B.G.M. Vandeginste, “The Application of Multivariate Quality Control in Gas Chromatography”, **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, C.XLVII, No:1, 1999, s. 107-125.

Nomikos, P., J.F. MacGregor, “Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes”, **Technometrics**, C.XXXVII, No:1, 1995, s.41-59.

Nong, Y., v.d., “Hotelling’s T^2 Multivariate Profiling for Anomaly Detection”, **Proceedings of the 2000 IEE Workshop on Information Assurance and Security United States Military Academy**, New York, 2000, s. 180-186.

Oakland, J. S., **Statistical Process Control, A Really Practical Guide**, 3. baskı, Londra, Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1996

Oğuzlar, A., “Hotelling T^2 Grafiği ve Bir Uygulama”, **Uludağ Üniversitesi İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, C. XVII, No: 1-2, 1999, s. 2.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, “Süreç Kontrol İçin T^2 Diyagramları”, **İstatistik Araştırma Sempozyumu Bildiriler Kitabı**, 27-29 Kasım 2000, s. 217-227.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, **Multivariate Quality Control:A Historical Perspective, First International Joint Symposium on Business Administration, Challengees for Business Administrators in the New Millenium**, 1-3 Haziran 2000, Gökçeada, Türkiye

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, **Multivariate Statistical Process Control Methods and New Approaches**", **The 6'th World Congress for Total Quality Management, Proceedings, Volume 1, Saint Petersburg, Russia, 20-22 Haziran 2001**, s. 239-245.

Orhunbilge, N., **Örnekleme Yöntemleri ve Hipotez Testleri**, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 1997

Orhunbilge, **Zaman Serileri Analizi Tahmin ve Fiyat İndeksleri**, İstanbul, İşletme Fakültesi Yayını, 1999

Orhunbilge, N., **Tanımsal İstatistik Olasılık Dağılımları**, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 2000

Orhunbilge, N., **Uygulamalı Regresyon ve Korelasyon Analizi**, 2. baskı, İstanbul, İ.Ü. İşletme Fakültesi Yayını, 2002

Özdamar, K., **Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi (Çok Değişkenli Analizler) 2**, 2. baskı, Eskişehir, Kaan Kitabevi, 1999

Özevren, M., **Toplam Kalite Yönetimi Temel Kavramlar ve Uygulamalar**, İstanbul, Alfa Basım Yayım Dağıtım, 1997

Pekdemir, I. M., **İşletmelerde Kalite Yönetimi, Kavramlar, Kalite İyileştirme Süreci, Vak'alar**, İstanbul, Beta Yayım Dağıtım A.Ş., 1992

Pignatiello, J.J. and G.C. Runger, "Comparisons of Multivariate CUSUM Charts", **Journal of Quality Technology**, C.XXII, No:3, s. 173-186.

Prabhu, S. S., G.C. Runger, "Designing a Multivariate EWMA Control Chart", **Journal of Quality Technology**, C. XXIX, No:1, 1997, s. 8-15.

Qiu, P., D. Hawkins, "A Rank- Based Multivariate CUSUM Procedure", **Technometrics**, C.XLIII, No: 2, 2001, s. 120-123.

Rencher, A.C., "The Contribution of Individual Variables to Hotelling's T^2 Wilk's Λ and R^2 ", **Biometrics**, C.XLIX, 1993, s.479-489.

Rencher, A.C., **Methods of Multivariate Analysis**, U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1995

Reynolds, M.R., Z.G. Stoumbos, "A General Approach to modeling CUSUM charts for a Proportion", **IIE Transactions**, C.XXXII, 2000, s. 515-535.

Raini, M., A.C. Atkinson, "Robust Diagnostic Data Analysis: Transformations in Regression", **Technometrics**, C.XLII, No:4, 2000, s. 384-394.

Runger, G.C., F.B. Alt, D.C. Montgomery, "Contributors to a Multivariate Statistical Process Control Chart Signal", **Commun. Statistic.-Theory Meth.**, Vol.XXV, No:10, 1996, s. 2203-2213.

Runger, G.B., S. S. Prabhu, "A Markov Chain Model for the Multivariate Exponentially Weighted Moving Averages Control Chart", **Journal of the American Statistical Association**, C. XMI, No:436, s. 1701-1706.

Runger, G.C., T. H. Willemain, "Batch-means control charts for autocorrelated data", **IIE Transactions**, C. XXVIII, s. 483-487.

Ryan, T.P., **Statistical Methods for Quality Improvement**, 2. baskı, New York, John Wiley&Sons, Inc., 2000

Scepi, G., "Parametric and Non Parametric Multivariate Quality Control Charts", Ed. C. Lauro, J. Antoch, V.E. Vinzi, G. Saporta, **Multivariate Total Quality Control Foundation and Recent Advances**, Almanyaa, Physica-Verlag, 2002

Schilling, E.G., P.R. Nelson, "The Effect of Non-Normality on the Control Limits of \bar{x} Charts", **Journal of Quality Technology**, C.VIII, 1976, s. 183-188.

Sepulveda, A., J. A. Nachlas, "A Simulation Approach to Multivariate Quality Control", **Computers ind. Engng.**, C. XXXIII, No: 1-2, s. 113-116.

Sharma, S., **Applied Multivariate Techniques**, U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1996

Simoglou, A., E.B. Martin, A.J. Morris, "Multivariate Statistical Process Control of an Industrial Fluidised-bed reactor", **Control Engineering Practice**, C. VIII, 2000, s. 893-909.

Stamatis, D. H., **TQM Engineering Handbook**, New York, Marcel Dekker, Inc., 1997

Stevens, J., **Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences**, 4.baskı, New Jersey, Lawrence Erlbaum Assoc. Inc., 2002

Sullivan, J.H., W.H. Woodall, "A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations", **Journal of Quality Technology**, C.XXIX, No:4, 1996, s.398-408

Sullivan, J.H., W.H. Woodall, "Change-point detection of mean vector or covariance matrix shifts using multivariate individual observations", **IIE Transactions**, C.XXXII, 2000, s. 537-49.

Tabachnick, B.G., L.S. Fidell, **Using Multivariate Statistics**, 3. baskı, California, Haper Collins College Publisher, 1996

Tan, S., N. Peşkireloğlu, **Kalitesizliğin Maliyeti**, Ankara, Milli Prodüktivite Merkezi Yayını, 1991

Tacq, J., **Multivariate Techniques in Social Sciences**, Britanya, The Cromwell Press Ltd., 1997

Tatlıdil, H., **Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz**, Ankara, Akademi Matbaası, 1996

Timm, N.H., "Multivariate Quality Control Using Finite Intersection Tests", **Journal of Quality Technology**, C.XXVIII, No:2, 1996, s.233-243

Timm, N.H., **Applied Multivariate Analysis**, Springer Verlag, U.S.A., 2002

Tracy, N.D., J.C. Young, R.L. Mason, "Multivariate Control Charts for Individual Observations", **Journal of Quality Technology**, C.XXIV, No: 2, 1992, s. 88-95

Tracy, N.D., J.C. Young, R.L. Mason, "Some Aspects of Hotelling's T^2 Statistic for Multivariate Quality Control, Ed. G.Subir, W.R.Schucany, W.B. Smith, **Statistics of Quality, Textbooks and Monographs**, C. MLIII, New York, Marcel Dekker, Inc., 1996

Tracy, N.D., J.C. Young, R.L. Mason, "A Bivariate Control Chart for Paired Measurements", **Journal of Quality Technology**, C. XXVII, No:4, 1995, s. 370-376.

TSE, **Kalite Kontrolunda Kullanılan Terimler**, Ankara , Türk Standartları Enstitüsü, 1984

Turanlı, M., S. Güriş, A. Ayaydın, **İstatistik Temel Kavramlar ve Uygulamalar**, İstanbul, M.Ü. Nihad Sayar Eğitim Vakfı Yayınları No: 452/685, 1993

Wade, M.R., W.H. Woodall, "A Review and Analysis of Cause-Selecting Charts", **Journal of Quality Technology**, C:XXV, No.3, 1993, s.161-169

Weighell, M., E. B. Martin, A.J. Morris, "The statistical monitoring of a complex manufacturing process", **Journal of Applied Statistics**, C. XXVIII, N0:3, 2001, s. 409-425.

Wismer, D.A., R. Chattergy, **Introduction to Nonlinear Optimization A Problem Solving Approach**, U.S.A., Elsevier North Holland, Inc., 1978

"What are Control Charts", **Engineering Statistics Handbook**, (Çevrimiçi), <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc32.htm>, 27 Şubat 2004.

Wierda, A., "Multivariate Statistical Process Control: Recent Results and Directions for Future Research", **Statistica Neerlandica**, C. XXVIII, 1994, s.147-168.

Williams, R. L., **Essentials of Total Quality Management**, New York, AMACOM Boks, 1994

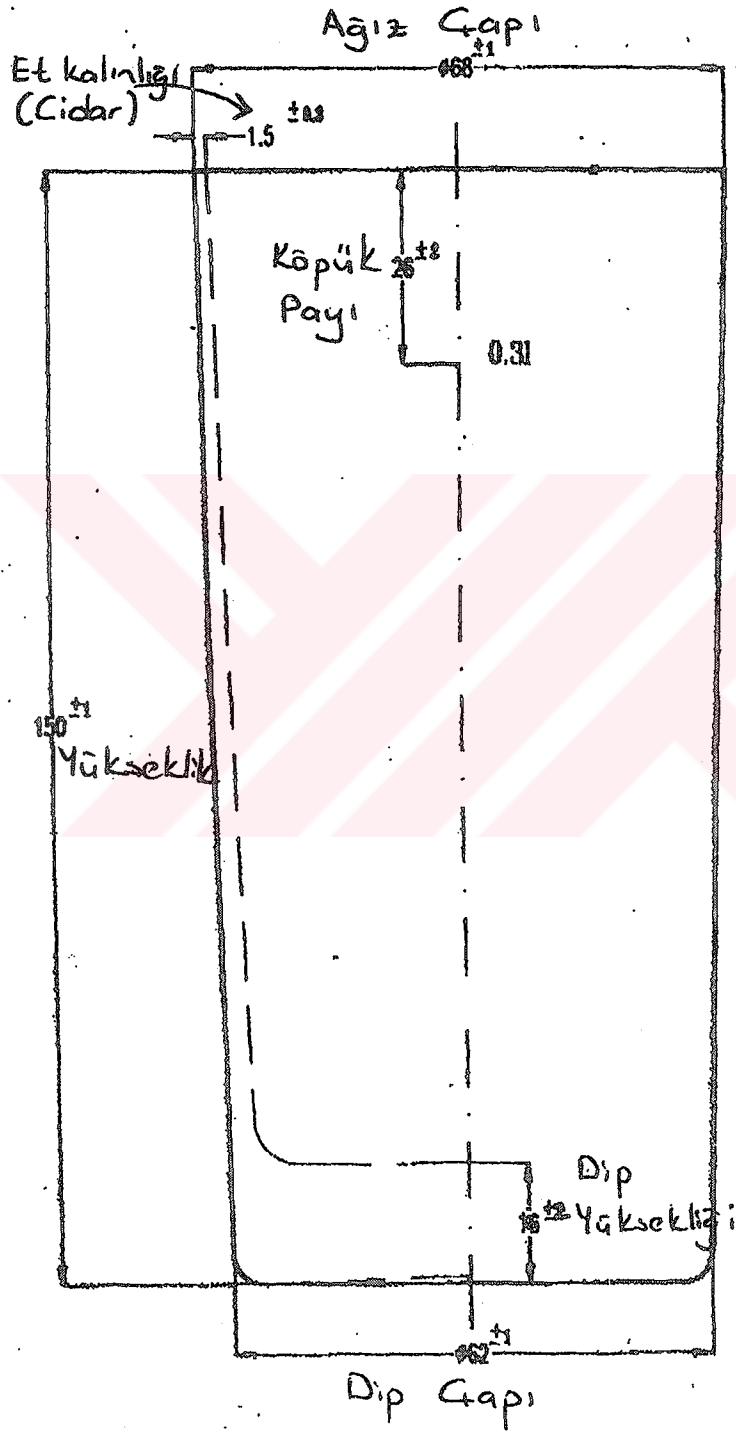
Woodall, W.H., D.C. Montgomery, Research Issues and Ideas in Statistical Process Control", **Journal of Quality Technology**, C. XXXI, No: 4, 1999, s. 376-385.

Woodall, W. H., M.M. Ncube, "Multivariate CUSUM Quality Control Procedures", **Technometrics**, C. XXVII, No: 3, 1985, s. 285-292

Young, J., T. Alloway, T. Schmotzer, "Introduction to Multivariable Statistical Process Control And Its Application In The Process Industries", **NPRA 2000 Computer Conference**, Chicago, Illinois, 13-15 Kasım 2000

EKLER

Ek 1: Uygulama Konusu Olan Bardağın Teknik Çizimi



Ek 2:Yükseklik Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of YUKSEKLIK

Date: 06/28/04 Time: 10:08
 Sample: 1 86
 Included observations: 86

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | 0.221 | 0.221 | 4.3299 | 0.037 |
| | | 2 | 0.117 | 0.072 | 5.5665 | 0.062 |
| | | 3 | 0.007 | -0.035 | 5.5712 | 0.134 |
| | | 4 | 0.085 | 0.086 | 6.2304 | 0.183 |
| | | 5 | -0.057 | -0.094 | 6.5372 | 0.257 |
| | | 6 | -0.081 | -0.071 | 7.1623 | 0.306 |
| | | 7 | -0.023 | 0.029 | 7.2131 | 0.407 |
| | | 8 | 0.227 | 0.248 | 12.224 | 0.141 |
| | | 9 | 0.028 | -0.069 | 12.299 | 0.197 |
| | | 10 | 0.068 | 0.041 | 12.763 | 0.237 |
| | | 11 | -0.085 | -0.119 | 13.485 | 0.263 |
| | | 12 | 0.128 | 0.130 | 15.157 | 0.233 |
| | | 13 | 0.067 | 0.074 | 15.624 | 0.270 |
| | | 14 | 0.025 | 0.003 | 15.688 | 0.333 |
| | | 15 | -0.027 | -0.025 | 15.765 | 0.398 |
| | | 16 | 0.086 | 0.018 | 16.560 | 0.415 |
| | | 17 | 0.063 | 0.050 | 17.001 | 0.454 |
| | | 18 | 0.103 | 0.084 | 18.190 | 0.443 |
| | | 19 | -0.035 | -0.010 | 18.328 | 0.501 |
| | | 20 | 0.054 | -0.028 | 18.665 | 0.544 |
| | | 21 | -0.021 | -0.052 | 18.715 | 0.603 |
| | | 22 | -0.011 | -0.026 | 18.730 | 0.662 |
| | | 23 | -0.170 | -0.114 | 22.191 | 0.509 |
| | | 24 | -0.086 | -0.037 | 23.103 | 0.514 |
| | | 25 | -0.051 | -0.028 | 23.427 | 0.553 |
| | | 26 | -0.059 | -0.105 | 23.863 | 0.584 |
| | | 27 | -0.024 | 0.060 | 23.934 | 0.634 |
| | | 28 | -0.043 | -0.085 | 24.178 | 0.672 |
| | | 29 | 0.016 | 0.041 | 24.211 | 0.718 |
| | | 30 | 0.051 | 0.013 | 24.570 | 0.746 |
| | | 31 | -0.064 | -0.043 | 25.126 | 0.762 |
| | | 32 | -0.030 | -0.010 | 25.248 | 0.796 |
| | | 33 | -0.111 | -0.094 | 27.015 | 0.759 |
| | | 34 | -0.059 | -0.023 | 27.513 | 0.777 |
| | | 35 | 0.013 | 0.091 | 27.539 | 0.811 |
| | | 36 | -0.020 | 0.028 | 27.599 | 0.841 |

Ek 3: Yükseklik Değişkeninin Birim Kök Testi (Sabit Ve Trend)

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on YUKSEKLIK

| ADF Test Statistic | -7.351559 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(YUKSEKLIK) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 11:18 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| YUKSEKLIK(-1) | -0.796181 | 0.108301 | -7.351559 | 0.0000 |
| C | 119.7539 | 16.28918 | 7.351745 | 0.0000 |
| @TREND(1) | 0.001023 | 0.000862 | 1.185896 | 0.2391 |
| R-squared | 0.397266 | Mean dependent var | | 0.004706 |
| Adjusted R-squared | 0.382565 | S.D. dependent var | | 0.245214 |
| S.E. of regression | 0.192682 | Akaike info criterion | | -3.258772 |
| Sum squared resid | 3.044362 | Schwarz criterion | | -3.172560 |
| Log likelihood | 20.88803 | F-statistic | | 27.02333 |
| Durbin-Watson stat | 1.963349 | Prob(F-statistic) | | 0.000000 |

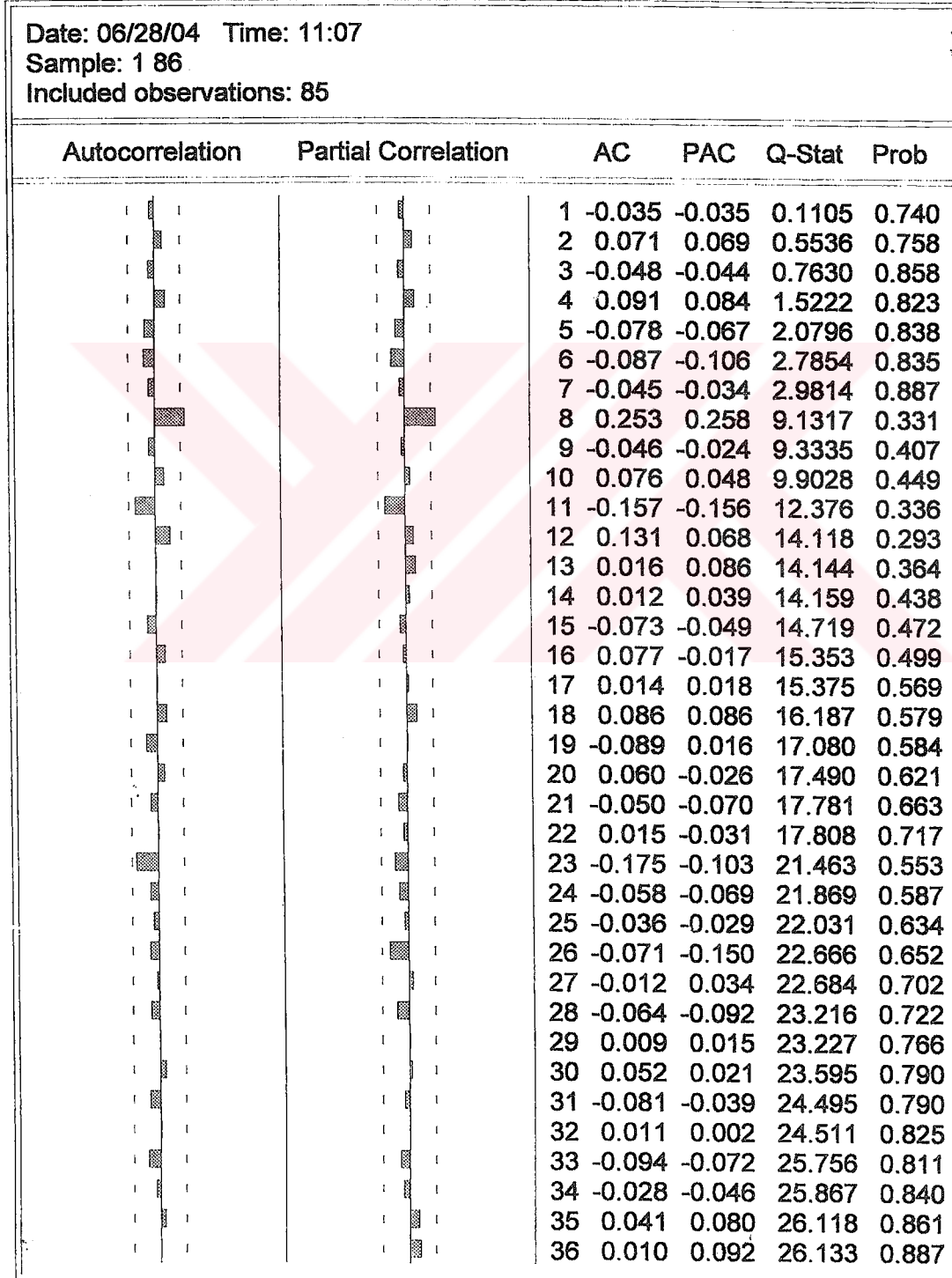
Ek 4: Yükseklik Değişkeninin Birim Kök Testi (Sabit)

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on YUKSEKLİK

| ADF Test Statistic | -7.237669 | 1% Critical Value* | -3.5082 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -2.8955 | |
| | | 10% Critical Value | -2.5846 | |
| *MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(YUKSEKLİK) | | | | |
| Date: 10/08/04 Time: 10:28 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| YUKSEKLİK(-1) | -0.776069 | 0.107226 | -7.237669 | 0.0000 |
| C | 116.7718 | 16.13326 | 7.237954 | 0.0000 |
| R-squared | 0.386928 | Mean dependent var | 0.004706 | |
| Adjusted R-squared | 0.379542 | S.D. dependent var | 0.245214 | |
| S.E. of regression | 0.193153 | Akaike info criterion | -3.265296 | |
| Sum squared resid | 3.096574 | Schwarz criterion | -3.207822 | |
| Log likelihood | 20.16531 | F-statistic | 52.38385 | |
| Durbin-Watson stat | 1.973308 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

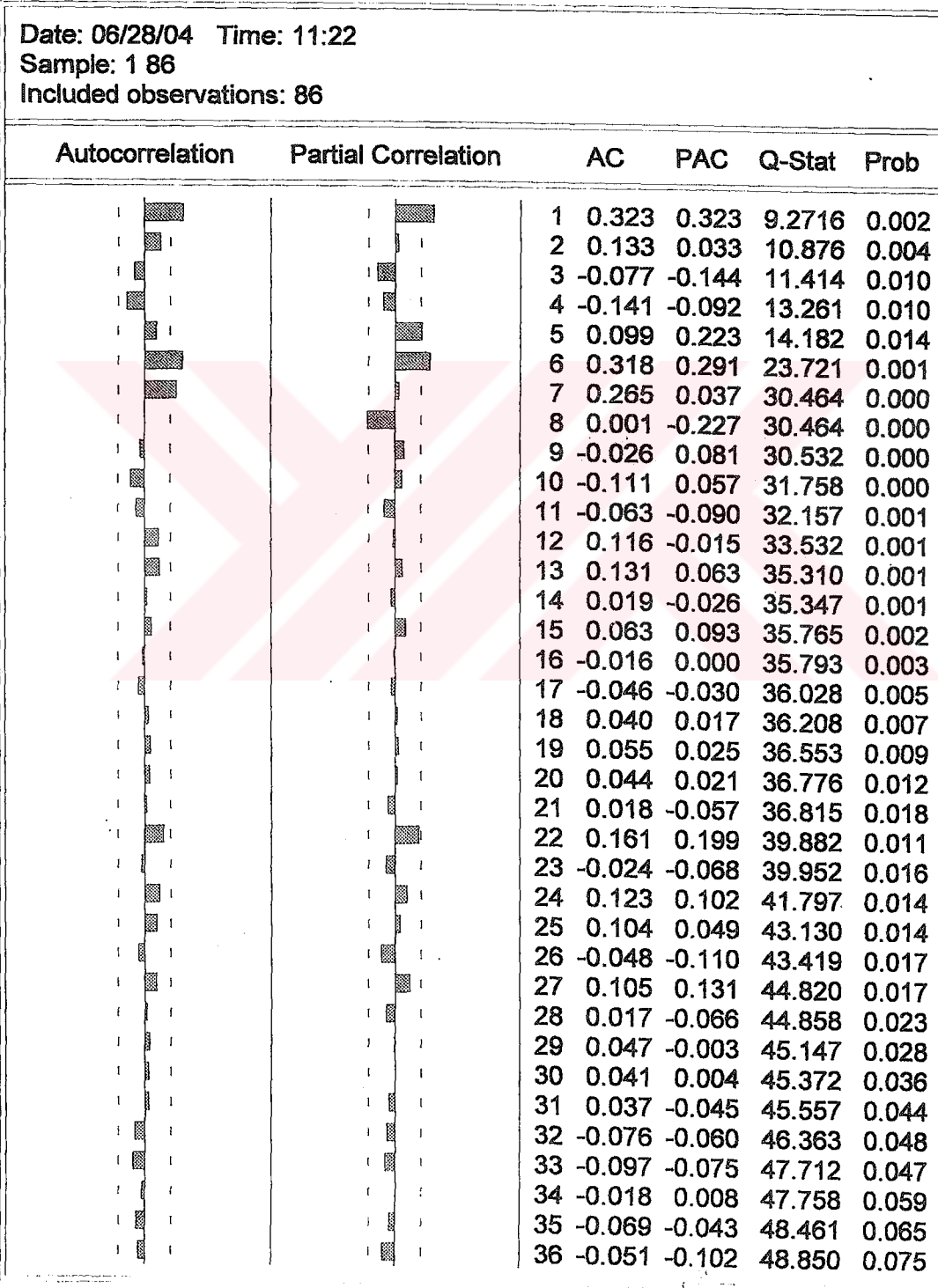
Ek 5: Yükseklik Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of YUKSEKLIKHATA



Ek 6: Dip Yüksekliği Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of DIPYUK



Ek 7: Dip Yüksekliği Değişkeninin Birim Kök Testi

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DIPYUK

| ADF Test Statistic | -7.206550 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(DIPYUK) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 12:00 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| DIPYUK(-1) | -0.763123 | 0.105893 | -7.206550 | 0.0000 |
| C | 11.32150 | 1.576461 | 7.181593 | 0.0000 |
| @TREND(1) | -0.004022 | 0.001635 | -2.460045 | 0.0160 |
| R-squared | 0.387871 | Mean dependent var | -0.016118 | |
| Adjusted R-squared | 0.372941 | S.D. dependent var | 0.435458 | |
| S.E. of regression | 0.344827 | Akaike info criterion | -2.094770 | |
| Sum squared resid | 9.750254 | Schwarz criterion | -2.008558 | |
| Log likelihood | -28.58206 | F-statistic | 25.97930 | |
| Durbin-Watson stat | 1.940066 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

Ek 8: Dip Yüksekliği Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of DIPYUKHATA

Date: 06/28/04 Time: 12:01
 Sample: 1 86
 Included observations: 85

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | 0.023 | 0.023 | 0.0467 | 0.829 |
| | | 2 | 0.027 | 0.027 | 0.1134 | 0.945 |
| | | 3 | -0.207 | -0.209 | 3.9845 | 0.263 |
| | | 4 | -0.251 | -0.252 | 9.7240 | 0.045 |
| | | 5 | 0.013 | 0.029 | 9.7394 | 0.083 |
| | | 6 | 0.238 | 0.239 | 15.044 | 0.020 |
| | | 7 | 0.196 | 0.120 | 18.692 | 0.009 |
| | | 8 | -0.136 | -0.258 | 20.464 | 0.009 |
| | | 9 | -0.070 | -0.023 | 20.945 | 0.013 |
| | | 10 | -0.193 | 0.025 | 24.635 | 0.006 |
| | | 11 | -0.094 | -0.086 | 25.513 | 0.008 |
| | | 12 | 0.071 | -0.110 | 26.025 | 0.011 |
| | | 13 | 0.133 | 0.047 | 27.828 | 0.010 |
| | | 14 | -0.102 | -0.123 | 28.913 | 0.011 |
| | | 15 | 0.003 | 0.003 | 28.913 | 0.017 |
| | | 16 | -0.128 | -0.073 | 30.665 | 0.015 |
| | | 17 | -0.105 | -0.069 | 31.863 | 0.016 |
| | | 18 | -0.022 | -0.113 | 31.914 | 0.023 |
| | | 19 | -0.001 | -0.105 | 31.914 | 0.032 |
| | | 20 | -0.024 | -0.082 | 31.980 | 0.044 |
| | | 21 | -0.086 | -0.140 | 32.835 | 0.048 |
| | | 22 | 0.177 | 0.148 | 36.516 | 0.027 |
| | | 23 | -0.138 | -0.126 | 38.776 | 0.021 |
| | | 24 | 0.125 | 0.021 | 40.671 | 0.018 |
| | | 25 | 0.073 | 0.102 | 41.334 | 0.021 |
| | | 26 | -0.097 | -0.102 | 42.516 | 0.022 |
| | | 27 | 0.109 | 0.088 | 44.036 | 0.021 |
| | | 28 | 0.001 | -0.034 | 44.036 | 0.028 |
| | | 29 | 0.041 | -0.012 | 44.254 | 0.035 |
| | | 30 | 0.022 | 0.029 | 44.321 | 0.045 |
| | | 31 | 0.061 | -0.021 | 44.831 | 0.052 |
| | | 32 | -0.070 | -0.040 | 45.510 | 0.057 |
| | | 33 | -0.091 | -0.121 | 46.684 | 0.058 |
| | | 34 | -0.006 | -0.069 | 46.688 | 0.072 |
| | | 35 | -0.040 | -0.058 | 46.929 | 0.086 |
| | | 36 | -0.049 | -0.138 | 47.290 | 0.099 |

Ek 9: Ağız Çapı Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of AGIZ

Date: 06/28/04 Time: 11:20
 Sample: 1 86
 Included observations: 86

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | 0.256 | 0.256 | 5.8573 | 0.016 |
| | | 2 | 0.044 | -0.024 | 6.0293 | 0.049 |
| | | 3 | 0.251 | 0.263 | 11.772 | 0.008 |
| | | 4 | -0.034 | -0.190 | 11.877 | 0.018 |
| | | 5 | 0.026 | 0.119 | 11.942 | 0.036 |
| | | 6 | 0.082 | -0.042 | 12.574 | 0.050 |
| | | 7 | 0.081 | 0.160 | 13.196 | 0.067 |
| | | 8 | -0.008 | -0.147 | 13.202 | 0.105 |
| | | 9 | 0.033 | 0.120 | 13.312 | 0.149 |
| | | 10 | 0.242 | 0.166 | 19.139 | 0.039 |
| | | 11 | 0.152 | 0.110 | 21.482 | 0.029 |
| | | 12 | 0.094 | -0.001 | 22.391 | 0.033 |
| | | 13 | 0.053 | -0.091 | 22.678 | 0.046 |
| | | 14 | -0.126 | -0.153 | 24.345 | 0.042 |
| | | 15 | -0.193 | -0.173 | 28.301 | 0.020 |
| | | 16 | -0.109 | -0.040 | 29.594 | 0.020 |
| | | 17 | 0.052 | 0.134 | 29.885 | 0.027 |
| | | 18 | 0.019 | 0.049 | 29.927 | 0.038 |
| | | 19 | -0.035 | -0.018 | 30.065 | 0.051 |
| | | 20 | 0.064 | 0.003 | 30.536 | 0.062 |
| | | 21 | -0.066 | -0.145 | 31.051 | 0.073 |
| | | 22 | -0.086 | -0.066 | 31.926 | 0.079 |
| | | 23 | 0.090 | 0.076 | 32.908 | 0.083 |
| | | 24 | -0.115 | -0.088 | 34.529 | 0.076 |
| | | 25 | -0.147 | 0.084 | 37.221 | 0.055 |
| | | 26 | -0.022 | 0.047 | 37.284 | 0.070 |
| | | 27 | 0.020 | 0.169 | 37.336 | 0.089 |
| | | 28 | 0.087 | 0.017 | 38.319 | 0.093 |
| | | 29 | 0.018 | -0.116 | 38.362 | 0.114 |
| | | 30 | 0.107 | 0.004 | 39.914 | 0.107 |
| | | 31 | 0.079 | 0.056 | 40.775 | 0.112 |
| | | 32 | -0.038 | 0.066 | 40.975 | 0.133 |
| | | 33 | 0.023 | -0.011 | 41.051 | 0.158 |
| | | 34 | -0.038 | -0.023 | 41.258 | 0.183 |
| | | 35 | -0.023 | 0.020 | 41.333 | 0.214 |
| | | 36 | -0.001 | -0.050 | 41.333 | 0.249 |

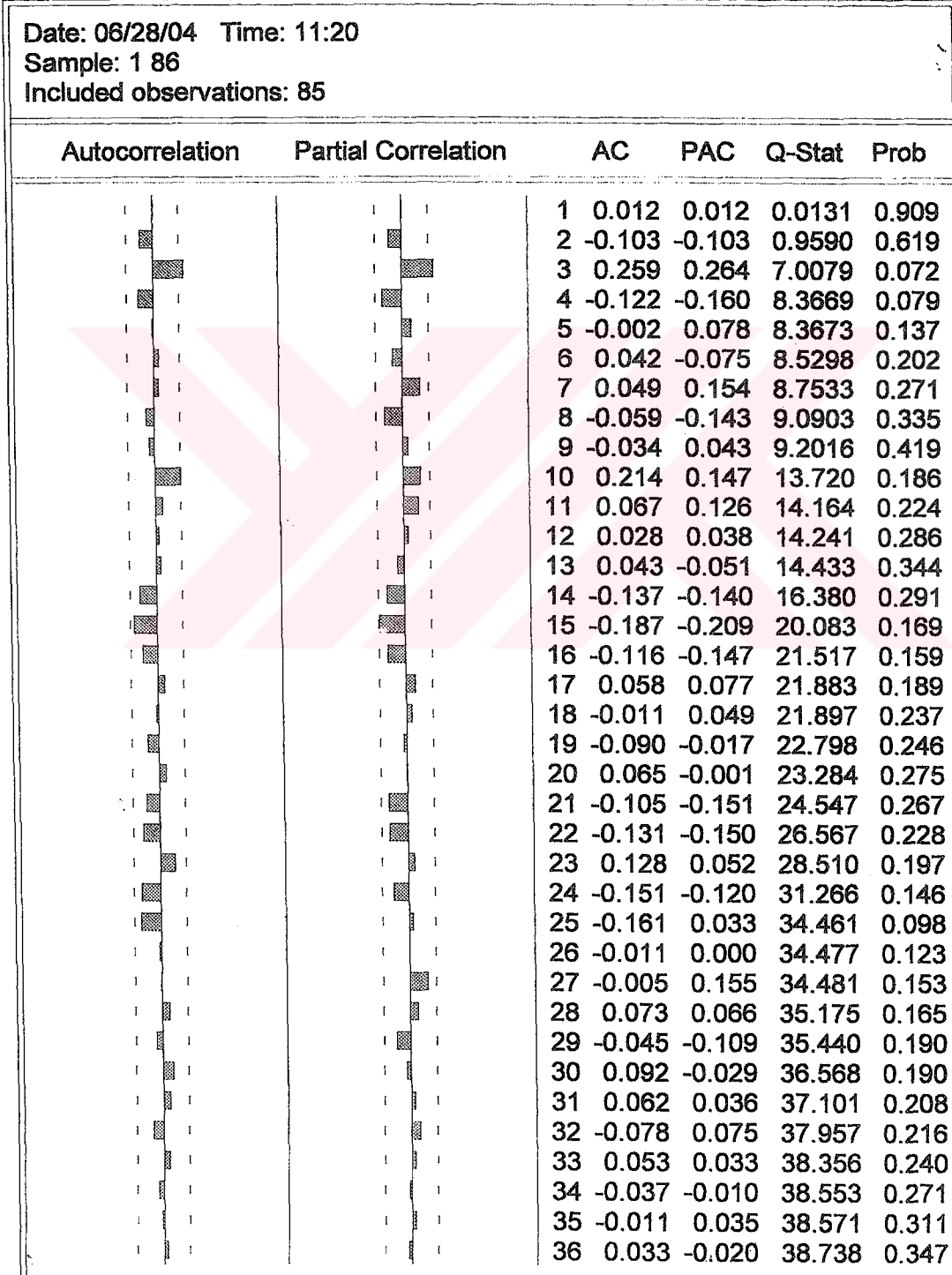
Ek 10: Ağız Çapı Değişkeninin Birim Kök Testi

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on AGIZ

| ADF Test Statistic | -7.292253 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(AGIZ) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 11:19 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| AGIZ(-1) | -0.787886 | 0.108044 | -7.292253 | 0.0000 |
| C | 53.79500 | 7.377233 | 7.292030 | 0.0000 |
| @TREND(1) | 0.001263 | 0.000690 | 1.829614 | 0.0709 |
| R-squared | 0.393444 | Mean dependent var | 0.002118 | |
| Adjusted R-squared | 0.378650 | S.D. dependent var | 0.192466 | |
| S.E. of regression | 0.151713 | Akaike info criterion | -3.736877 | |
| Sum squared resid | 1.887372 | Schwarz criterion | -3.650666 | |
| Log likelihood | 41.20752 | F-statistic | 26.59470 | |
| Durbin-Watson stat | 1.973415 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

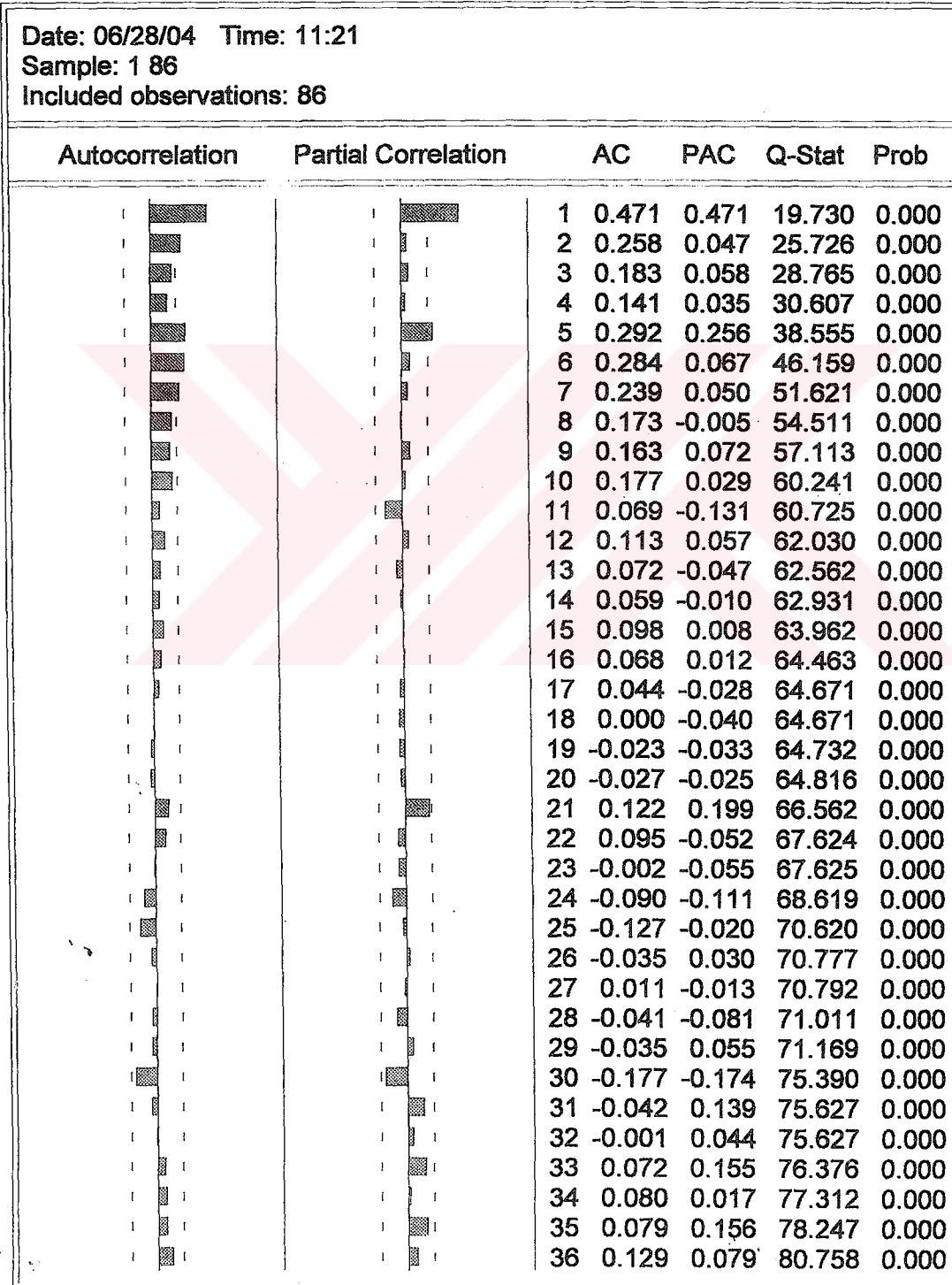
Ek 11: Ağız Çapı Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of AGIZHATA



Ek 12: Dip Çapı Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of DIPCAP



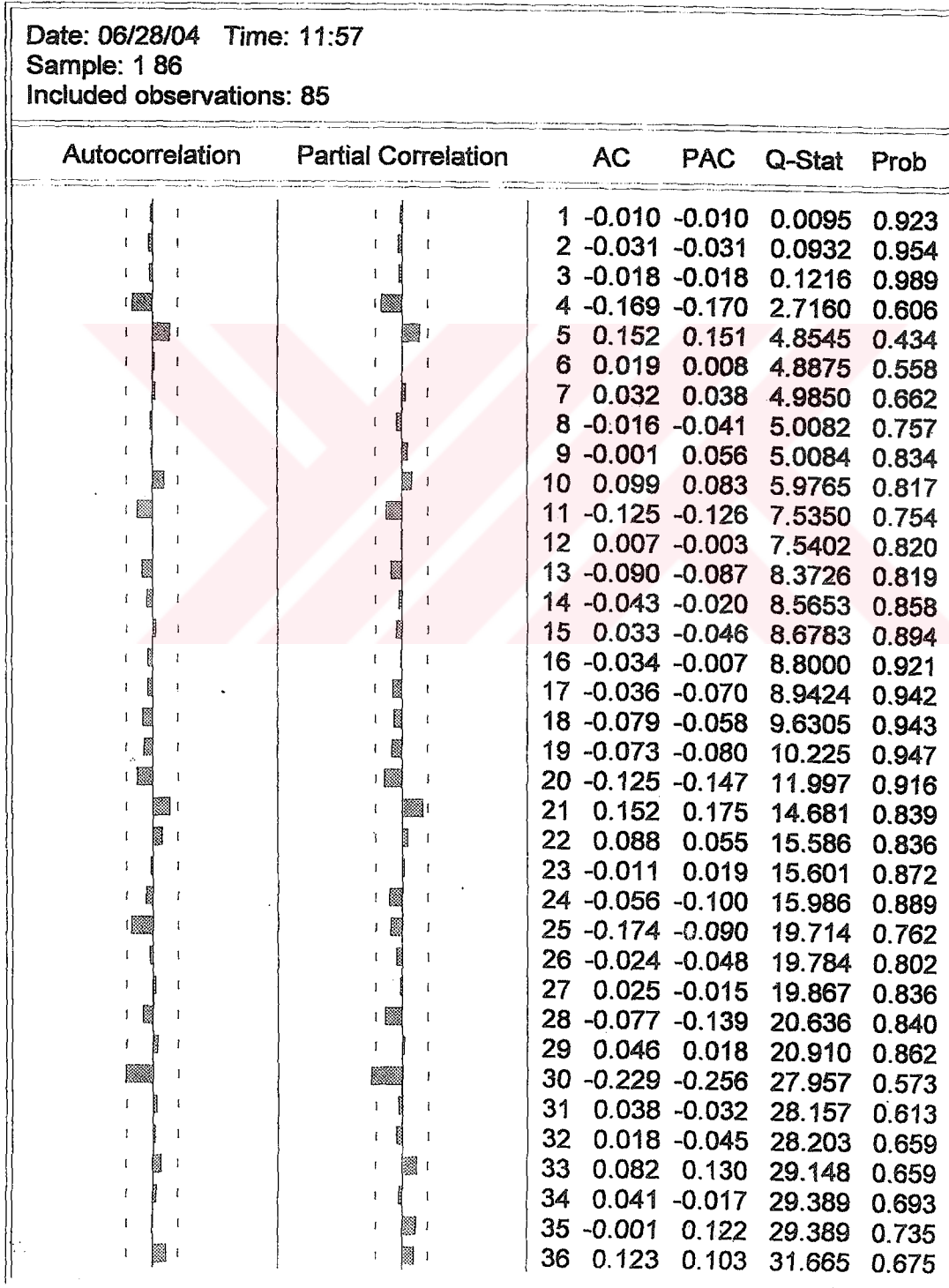
Ek 13: Dip Çapı Değişkeninin Birim Kök Testi

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on DIPCAP

| ADF Test Statistic | -6.656279 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(DIPCAP) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 11:21 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| DIPCAP(-1) | -0.694096 | 0.104277 | -6.656279 | 0.0000 |
| C | 43.30147 | 6.502982 | 6.658710 | 0.0000 |
| @TREND(1) | 0.002918 | 0.000931 | 3.134988 | 0.0024 |
| R-squared | 0.351250 | Mean dependent var | 0.006235 | |
| Adjusted R-squared | 0.335427 | S.D. dependent var | 0.222138 | |
| S.E. of regression | 0.181090 | Akaike info criterion | -3.382869 | |
| Sum squared resid | 2.689065 | Schwarz criterion | -3.296658 | |
| Log likelihood | 26.16218 | F-statistic | 22.19847 | |
| Durbin-Watson stat | 1.990519 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

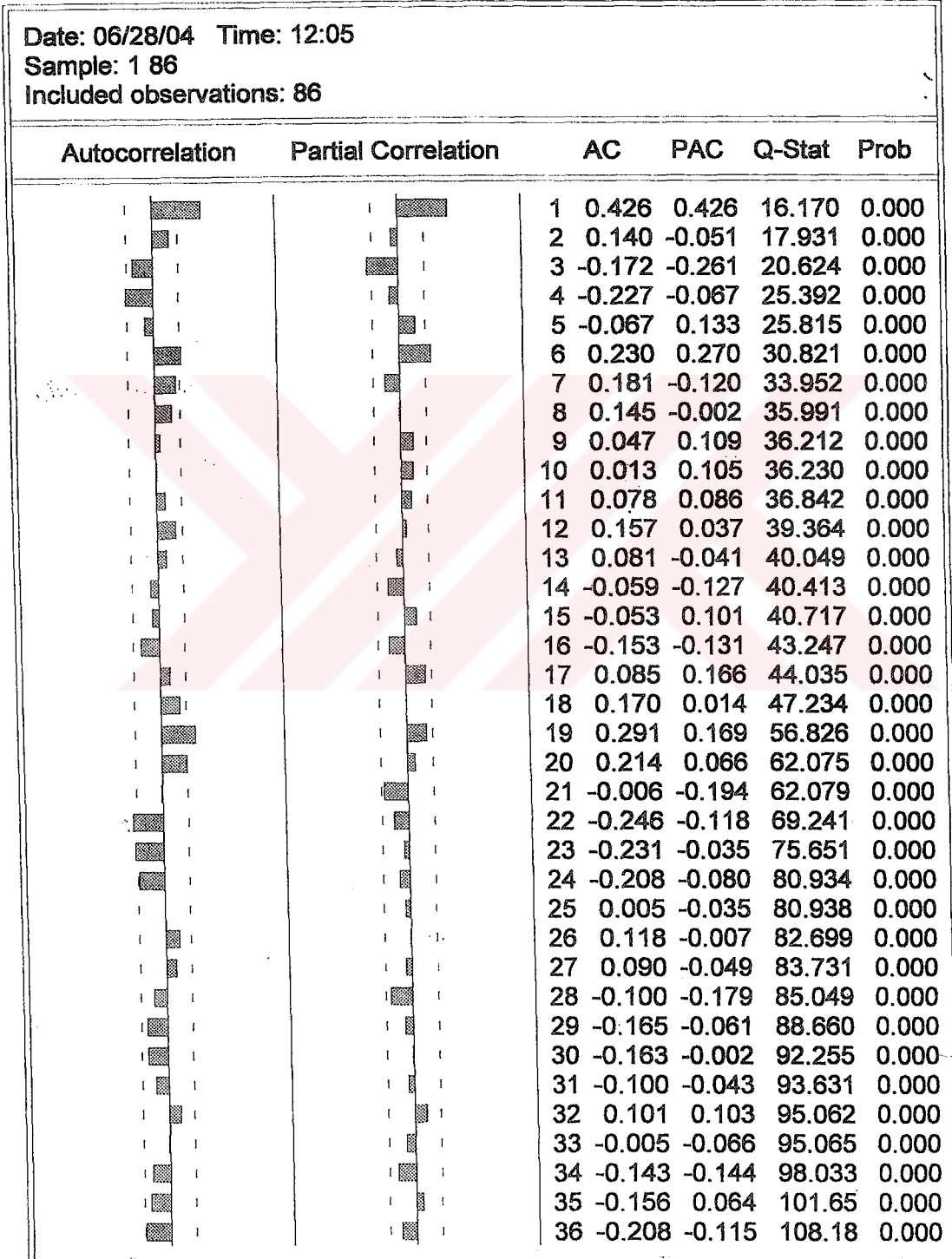
Ek 14: Dip Çapı Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of DIPCAPHATA



Ek 15: Et Kalınlığı Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of ETKAL



Ek 16: Et Kalınlığı Değişkeninin Birim Kök Testi (Sabit Ve Trend)

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on ETKAL

| ADF Test Statistic | -5.863775 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(ETKAL) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 12:05 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| ETKAL(-1) | -0.578991 | 0.098740 | -5.863775 | 0.0000 |
| C | 1.001628 | 0.170354 | 5.879699 | 0.0000 |
| @TREND(1) | 0.000103 | 0.000256 | 0.401309 | 0.6892 |
| R-squared | 0.296407 | Mean dependent var | 0.001059 | |
| Adjusted R-squared | 0.279246 | S.D. dependent var | 0.067666 | |
| S.E. of regression | 0.057446 | Akaike info criterion | -5.679157 | |
| Sum squared resid | 0.270605 | Schwarz criterion | -5.592946 | |
| Log likelihood | 123.7544 | F-statistic | 17.27230 | |
| Durbin-Watson stat | 1.989518 | Prob(F-statistic) | 0.000001 | |

Ek 17: Et Kalınlığı Değişkeninin Birim Kök Testi (Sabit)

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on ETKAL

| ADF Test Statistic | -5.893610 | 1% Critical Value* | -3.5082 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -2.8955 | |
| | | 10% Critical Value | -2.5846 | |
| *Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(ETKAL) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 12:05 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| ETKAL(-1) | -0.573595 | 0.097325 | -5.893610 | 0.0000 |
| C | 0.996685 | 0.169047 | 5.895909 | 0.0000 |
| R-squared | 0.295025 | Mean dependent var | 0.001059 | |
| Adjusted R-squared | 0.286531 | S.D. dependent var | 0.067666 | |
| S.E. of regression | 0.057155 | Akaike info criterion | -5.700724 | |
| Sum squared resid | 0.271137 | Schwarz criterion | -5.643250 | |
| Log likelihood | 123.6710 | F-statistic | 34.73464 | |
| Durbin-Watson stat | 1.996252 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

Ek 18: Et Kalınlığı Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of ETKALHATA

Date: 06/28/04 Time: 12:06
Sample: 1 86
Included observations: 85

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | -0.009 | -0.009 | 0.0073 | 0.932 |
| | | 2 | 0.114 | 0.114 | 1.1682 | 0.558 |
| | | 3 | -0.225 | -0.226 | 5.7351 | 0.125 |
| | | 4 | -0.210 | -0.236 | 9.7719 | 0.044 |
| | | 5 | -0.115 | -0.077 | 10.987 | 0.052 |
| | | 6 | 0.235 | 0.266 | 16.171 | 0.013 |
| | | 7 | 0.070 | 0.018 | 16.635 | 0.020 |
| | | 8 | 0.109 | -0.063 | 17.772 | 0.023 |
| | | 9 | -0.005 | 0.040 | 17.775 | 0.038 |
| | | 10 | -0.045 | 0.089 | 17.977 | 0.055 |
| | | 11 | 0.020 | 0.113 | 18.018 | 0.081 |
| | | 12 | 0.076 | 0.051 | 18.610 | 0.098 |
| | | 13 | 0.035 | 0.010 | 18.734 | 0.132 |
| | | 14 | -0.118 | -0.161 | 20.180 | 0.125 |
| | | 15 | 0.044 | 0.095 | 20.389 | 0.158 |
| | | 16 | -0.243 | -0.176 | 26.717 | 0.045 |
| | | 17 | 0.120 | 0.038 | 28.280 | 0.042 |
| | | 18 | 0.022 | 0.003 | 28.334 | 0.057 |
| | | 19 | 0.238 | 0.170 | 34.667 | 0.015 |
| | | 20 | 0.149 | 0.201 | 37.198 | 0.011 |
| | | 21 | 0.006 | -0.074 | 37.202 | 0.016 |
| | | 22 | -0.237 | -0.160 | 43.788 | 0.004 |
| | | 23 | -0.126 | -0.041 | 45.681 | 0.003 |
| | | 24 | -0.169 | -0.007 | 49.149 | 0.002 |
| | | 25 | 0.037 | -0.091 | 49.319 | 0.003 |
| | | 26 | 0.136 | -0.008 | 52.755 | 0.001 |
| | | 27 | 0.133 | 0.045 | 55.001 | 0.001 |
| | | 28 | -0.076 | -0.117 | 55.751 | 0.001 |
| | | 29 | -0.121 | -0.133 | 57.680 | 0.001 |
| | | 30 | -0.108 | -0.041 | 59.258 | 0.001 |
| | | 31 | -0.145 | -0.074 | 62.130 | 0.001 |
| | | 32 | 0.173 | 0.073 | 66.292 | 0.000 |
| | | 33 | -0.044 | -0.024 | 66.567 | 0.000 |
| | | 34 | -0.060 | -0.164 | 67.089 | 0.001 |
| | | 35 | -0.038 | 0.039 | 67.299 | 0.001 |
| | | 36 | -0.149 | -0.075 | 70.628 | 0.000 |

Ek 19: Köpük Payı Değişkeninin Korelogramı

Correlogram of KOPUK

Date: 06/28/04 Time: 12:07
 Sample: 1 86
 Included observations: 86

| Autocorrelation | Partial Correlation | AC | PAC | Q-Stat | Prob | |
|-----------------|---------------------|----|--------|--------|--------|-------|
| | | 1 | 0.330 | 0.330 | 9.7035 | 0.002 |
| | | 2 | 0.051 | -0.065 | 9.9374 | 0.007 |
| | | 3 | -0.081 | -0.087 | 10.534 | 0.015 |
| | | 4 | -0.099 | -0.046 | 11.446 | 0.022 |
| | | 5 | 0.043 | 0.106 | 11.620 | 0.040 |
| | | 6 | 0.217 | 0.188 | 16.089 | 0.013 |
| | | 7 | 0.212 | 0.079 | 20.406 | 0.005 |
| | | 8 | 0.013 | -0.103 | 20.422 | 0.009 |
| | | 9 | -0.071 | -0.020 | 20.915 | 0.013 |
| | | 10 | -0.196 | -0.137 | 24.751 | 0.006 |
| | | 11 | 0.022 | 0.157 | 24.799 | 0.010 |
| | | 12 | 0.150 | 0.065 | 27.111 | 0.007 |
| | | 13 | 0.096 | -0.065 | 28.062 | 0.009 |
| | | 14 | 0.092 | 0.059 | 28.947 | 0.011 |
| | | 15 | 0.048 | 0.079 | 29.191 | 0.015 |
| | | 16 | -0.096 | -0.071 | 30.192 | 0.017 |
| | | 17 | -0.107 | -0.054 | 31.449 | 0.018 |
| | | 18 | 0.010 | -0.006 | 31.460 | 0.025 |
| | | 19 | 0.096 | 0.080 | 32.501 | 0.027 |
| | | 20 | 0.144 | 0.063 | 34.879 | 0.021 |
| | | 21 | 0.130 | 0.070 | 36.848 | 0.018 |
| | | 22 | 0.035 | 0.018 | 36.990 | 0.024 |
| | | 23 | 0.065 | 0.112 | 37.501 | 0.029 |
| | | 24 | 0.028 | 0.014 | 37.599 | 0.038 |
| | | 25 | 0.092 | 0.086 | 38.657 | 0.040 |
| | | 26 | 0.068 | -0.097 | 39.237 | 0.046 |
| | | 27 | -0.054 | -0.161 | 39.612 | 0.056 |
| | | 28 | -0.104 | -0.042 | 41.036 | 0.053 |
| | | 29 | -0.012 | 0.103 | 41.055 | 0.068 |
| | | 30 | 0.050 | 0.033 | 41.388 | 0.081 |
| | | 31 | -0.006 | -0.087 | 41.393 | 0.101 |
| | | 32 | -0.096 | -0.186 | 42.691 | 0.098 |
| | | 33 | -0.108 | 0.024 | 44.370 | 0.089 |
| | | 34 | -0.126 | -0.044 | 46.690 | 0.072 |
| | | 35 | -0.047 | -0.004 | 47.019 | 0.084 |
| | | 36 | 0.041 | -0.029 | 47.277 | 0.099 |

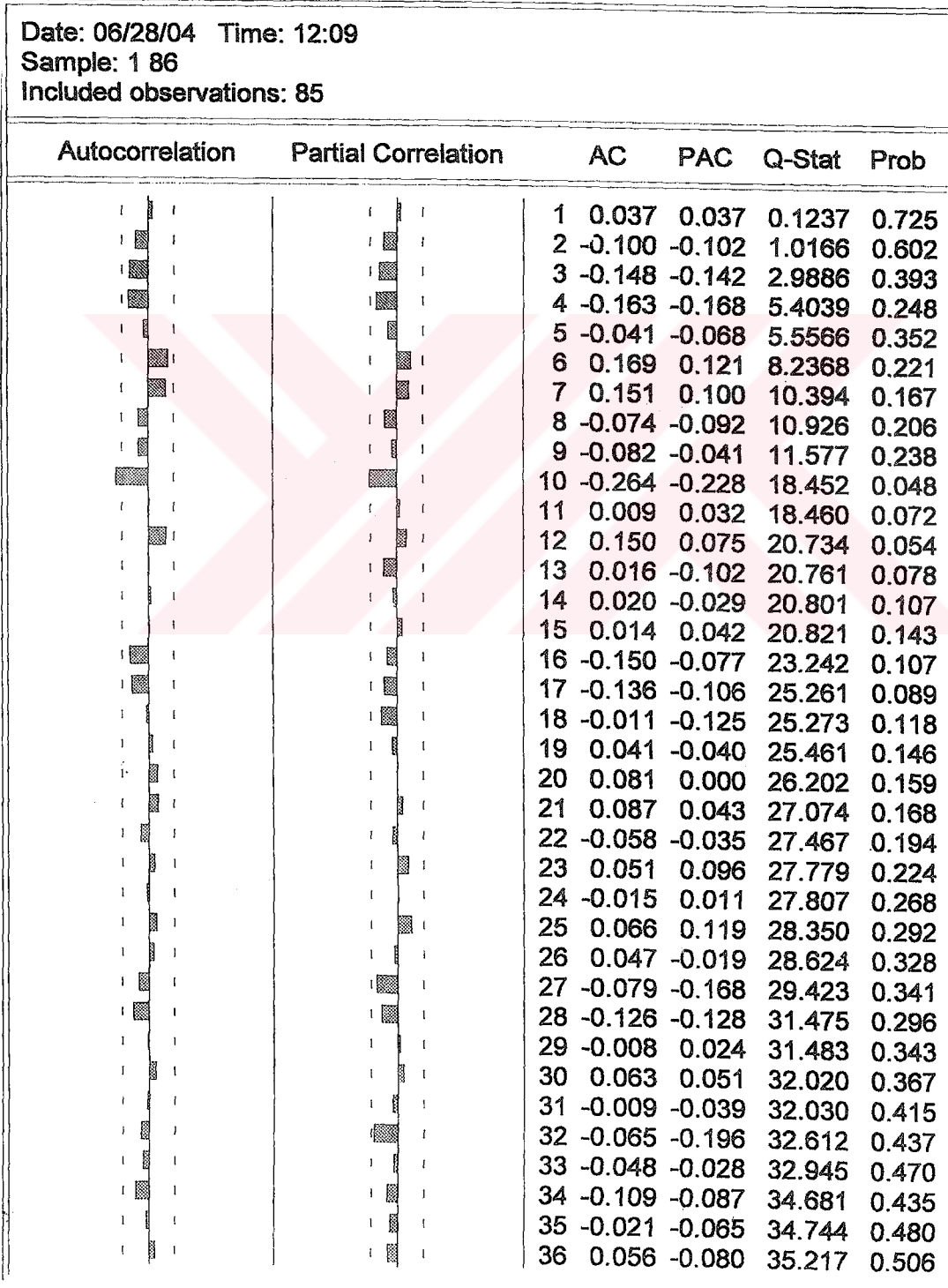
Ek 20: Köpük Payı Değişkeninin Birim Kök Testi

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on KOPUK

| ADF Test Statistic | -6.942382 | 1% Critical Value* | -4.0686 | |
|--|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| | | 5% Critical Value | -3.4626 | |
| | | 10% Critical Value | -3.1574 | |
| *Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root. | | | | |
| Augmented Dickey-Fuller Test Equation | | | | |
| LS // Dependent Variable is D(KOPUK) | | | | |
| Date: 06/28/04 Time: 12:07 | | | | |
| Sample(adjusted): 2 86 | | | | |
| Included observations: 85 after adjusting endpoints | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| KOPUK(-1) | -0.741326 | 0.106783 | -6.942382 | 0.0000 |
| C | 19.22894 | 2.770781 | 6.939900 | 0.0000 |
| @TREND(1) | 0.005647 | 0.002518 | 2.242825 | 0.0276 |
| R-squared | 0.370188 | Mean dependent var | 0.013882 | |
| Adjusted R-squared | 0.354827 | S.D. dependent var | 0.672147 | |
| S.E. of regression | 0.539886 | Akaike info criterion | -1.198138 | |
| Sum squared resid | 23.90111 | Schwarz criterion | -1.111927 | |
| Log likelihood | -66.68890 | F-statistic | 24.09884 | |
| Durbin-Watson stat | 1.915529 | Prob(F-statistic) | 0.000000 | |

Ek 21: Köpük Payı Değişkeninin Birim Kök Testi İçin Tahmin Edilen Modeldeki Hatalarının Korelogramı

Correlogram of KOPUKHATA



Ek 22: Hesaplanan T^2 İstatistiklerinin Değerleri

Ek 22a: 86 Örneğin T^2 Değerleri (I. Aşama 1. Adım)

| | | | | | | | | |
|----------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|----------|---------|
| 81,5076 | 20,682 | 39,582 | 17,544 | 9,48 | 17,2944 | 38,3112 | 59,6928 | 46,6704 |
| 113,0916 | 6,8856 | 35,8152 | 40,0056 | 6,756 | 16,6356 | 25,1196 | 101,1516 | 18,6648 |
| 97,872 | 101,238 | 31,2192 | 123,7428 | 35,016 | 24,5028 | 8,2524 | 11,412 | 21,678 |
| 20,4948 | 108,0324 | 6,8868 | 87,78 | 40,8636 | 51,9528 | 14,832 | 3,2544 | 8,6916 |
| 30,0156 | 47,1084 | 29,2428 | 32,832 | 13,2684 | 249,0528 | 56,2632 | 29,6904 | 30,0612 |
| 12,6564 | 29,484 | 14,694 | 51,7992 | 6,9912 | 12,7464 | 4,6548 | 40,5288 | 10,8972 |
| 95,6592 | 10,6788 | 51,2124 | 24,5016 | 18,3528 | 18,114 | 27,5952 | 58,5948 | - |
| 62,8776 | 5,0352 | 24,5184 | 57,1296 | 13,962 | 13,9704 | 41,268 | 6,1608 | - |
| 28,2732 | 16,206 | 58,2132 | 25,7448 | 52,3092 | 21,78 | 33,4224 | 8,592 | - |
| 35,6556 | 11,6184 | 4,5732 | 15,7644 | 20,6148 | 33,1032 | 75,3972 | 14,7048 | - |

Ek 22b: 38 Örneğin T^2 Değerleri (I. Aşama 2. Adım)

| | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| 39,822 | 4,4664 | 23,8872 | 5,2644 |
| 20,1552 | 24,7404 | 22,2432 | 6,5568 |
| 25,3872 | 15,0324 | 22,2636 | 7,836 |
| 4,1088 | 8,8956 | 25,5108 | 11,61 |
| 12,69 | 5,9892 | 11,6628 | 29,0856 |
| 4,6464 | 14,346 | 21,678 | 20,7432 |
| 22,1028 | 7,3356 | 14,3676 | 9,2436 |
| 15,366 | 22,08 | 11,946 | 26,148 |
| 11,2992 | 11,9088 | 22,026 | - |
| 25,7484 | 23,9832 | 14,3052 | - |

Ek 22c: 29 Örneğin T^2 Değerleri (I. Aşama 3. Adım)

| | | |
|---------|---------|---------|
| 19,8744 | 5,7672 | 13,6452 |
| 5,0664 | 19,9308 | 24,0288 |
| 4,2936 | 8,502 | 15,7824 |
| 23,3964 | 24,108 | 4,9488 |
| 15,1848 | 11,0124 | 6,3156 |
| 8,2056 | 20,604 | 8,1012 |
| 4,1352 | 22,2612 | 14,8512 |
| 17,658 | 13,2864 | 24,0288 |
| 21,0924 | 23,5608 | 10,3224 |
| 9,2232 | 11,8788 | - |

Ek 22d: 24 Örneğin T² Değerleri (I. Aşama 4. Adım)

| | | |
|----------------|----------------|---------------|
| 19,6764 | 9,5424 | 7,8192 |
| 4,2828 | 23,3832 | 16,5792 |
| 22,5336 | 24,1728 | 25,518 |
| 15,6168 | 14,2392 | 9,4968 |
| 7,2108 | 24,0252 | - |
| 4,044 | 13,3476 | - |
| 18,9192 | 23,5608 | - |
| 20,808 | 15,0264 | - |
| 6,402 | 4,4052 | - |
| 22,8096 | 6,018 | - |

Ek 22e: 19 Örneğin T² Değerleri (I. Aşama 5. Adım)

| | |
|----------------|----------------|
| 18,6228 | 32,3616 |
| 4,506 | 15,0456 |
| 20,658 | 14,7036 |
| 13,6752 | 19,2216 |
| 5,5632 | 4,0884 |
| 4,1028 | 8,3028 |
| 24,2964 | 9,2208 |
| 21,1128 | 22,92 |
| 6,7956 | 9,054 |
| 13,4316 | - |

Ek 22f: 17 Örneğin T² Değerleri (I. Aşama 6. Adım)

| | |
|---------|----------------|
| 19,4184 | 15,3228 |
| 5,4636 | 18,3648 |
| 20,424 | 3,636 |
| 14,9592 | 8,6004 |
| 4,8156 | 9,852 |
| 4,4784 | 29,0064 |
| 20,7012 | 8,3892 |
| 7,7772 | - |
| 16,1688 | - |
| 16,1376 | - |

Ek 22g: 16 Örneğin T² Değerleri (I. Aşama 6. Adım)

| | |
|---------|---------|
| 19,338 | 15,2964 |
| 5,3676 | 17,9568 |
| 19,3224 | 3,456 |
| 13,9968 | 9,2244 |
| 4,8252 | 11,0988 |
| 4,4604 | 8,5932 |
| 20,688 | - |
| 7,2192 | - |
| 17,2212 | - |
| 15,1908 | - |

Ek 23: Birinci 30 Örnekle Hesaplanan T² Değerleri (II. Aşama)

| | | |
|---------|---------|----------|
| 35,3664 | 50,0772 | 29,4396 |
| 53,5452 | 38,904 | 13,5504 |
| 49,3356 | 31,8564 | 23,5152 |
| 79,2696 | 37,5168 | 34,6572 |
| 64,5216 | 49,1004 | 118,9176 |
| 82,9872 | 38,412 | 20,562 |
| 45,1296 | 25,8948 | 14,7384 |
| 27,4584 | 58,1448 | 16,0956 |
| 50,6856 | 41,5248 | 19,3404 |
| 41,1648 | 17,5848 | 112,0944 |

Ek 24: İkinci 30 Örnekle Hesaplanan T² Değerleri (II. Aşama)

| | | |
|---------|---------|---------|
| 12,486 | 7,3428 | 4,5516 |
| 26,4396 | 38,6652 | 5,3796 |
| 10,7364 | 9,2988 | 3,21 |
| 15,0732 | 8,3856 | 5,9508 |
| 8,6496 | 7,2768 | 7,4496 |
| 75,6876 | 48,6516 | 4,1784 |
| 42,8004 | 9,4176 | 10,1256 |
| 8,1144 | 11,9796 | 7,7868 |
| 6,894 | 14,2176 | 33,5976 |
| 6,2712 | 11,508 | 105,03 |

Ek 25: Tek Değişkenli Kontrol Limitlerinin Hesaplanmasında Kullanılan Sabitler

| Number of Observations per Group, n | d_2 | d_3 | D_3 | D_4 |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| 2 | 1.128 | .853 | .000 | 3.267 |
| 3 | 1.693 | .888 | .000 | 2.574 |
| 4 | 2.059 | .880 | .000 | 2.282 |
| 5 | 2.326 | .864 | .000 | 2.114 |
| 6 | 2.534 | .848 | .000 | 2.004 |
| 7 | 2.704 | .833 | .076 | 1.924 |
| 8 | 2.847 | .820 | .136 | 1.864 |
| 9 | 2.970 | .808 | .184 | 1.816 |
| 10 | 3.078 | .797 | .223 | 1.777 |
| 11 | 3.173 | .787 | .256 | 1.744 |
| 12 | 3.258 | .778 | .283 | 1.717 |
| 13 | 3.336 | .770 | .307 | 1.693 |
| 14 | 3.407 | .762 | .328 | 1.672 |
| 15 | 3.472 | .755 | .347 | 1.653 |
| 16 | 3.532 | .749 | .363 | 1.637 |
| 17 | 3.588 | .743 | .378 | 1.622 |
| 18 | 3.640 | .738 | .391 | 1.608 |
| 19 | 3.689 | .733 | .403 | 1.597 |
| 20 | 3.735 | .729 | .415 | 1.585 |
| 21 | 3.778 | .724 | .425 | 1.575 |
| 22 | 3.819 | .720 | .434 | 1.566 |
| 23 | 3.858 | .716 | .443 | 1.557 |
| 24 | 3.895 | .712 | .451 | 1.548 |
| 25 | 3.931 | .709 | .459 | 1.541 |

Kaynak: J.A. Lawrence, B.A. Pasternack, Applied Management Science: A Computer –Integrated Managerial Approach, U.S.A., John Wiley & Sons, Inc., 1998, s.644.

Ek 26: $\alpha=0,001$ İçin F Değerleri

| Denominator DF | Numerator DF | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ∞ | | |
|-------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 200 | | 250 | 500 |
| 1 | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ | ++ |
| 2 | 998.4 | 998.8 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.3 | 999.5 |
| 3 | 167.1 | 148.5 | 141.1 | 137.1 | 134.6 | 132.8 | 131.6 | 130.6 | 129.9 | 129.2 | 128.3 | 127.4 | 126.4 | 125.9 | 125.4 | 124.4 | 124.2 | 124.0 | 123.9 | 123.7 | 123.7 | 123.6 | 123.5 |
| 4 | 74.13 | 61.25 | 56.17 | 53.43 | 51.72 | 50.52 | 49.65 | 49.00 | 48.47 | 48.05 | 47.41 | 46.76 | 46.10 | 45.77 | 45.43 | 44.75 | 44.51 | 44.40 | 44.33 | 44.27 | 44.22 | 44.14 | 44.05 |
| 5 | 47.18 | 37.12 | 33.20 | 31.08 | 29.75 | 28.83 | 28.17 | 27.65 | 27.24 | 26.91 | 26.42 | 25.91 | 25.39 | 25.13 | 24.87 | 24.33 | 24.15 | 24.06 | 24.00 | 23.95 | 23.92 | 23.85 | 23.78 |
| 6 | 35.51 | 27.00 | 23.71 | 21.92 | 20.80 | 20.03 | 19.46 | 19.03 | 18.69 | 18.41 | 17.99 | 17.56 | 17.12 | 16.90 | 16.67 | 16.21 | 16.06 | 15.98 | 15.93 | 15.89 | 15.86 | 15.80 | 15.75 |
| 7 | 29.25 | 21.69 | 18.77 | 17.20 | 16.21 | 15.52 | 15.02 | 14.63 | 14.33 | 14.08 | 13.71 | 13.32 | 12.93 | 12.73 | 12.53 | 12.12 | 11.98 | 11.91 | 11.87 | 11.82 | 11.80 | 11.75 | 11.70 |
| 8 | 25.41 | 18.49 | 15.83 | 14.39 | 13.48 | 12.86 | 12.40 | 12.05 | 11.77 | 11.54 | 11.19 | 10.84 | 10.48 | 10.30 | 10.11 | 9.73 | 9.60 | 9.53 | 9.49 | 9.45 | 9.43 | 9.38 | 9.33 |
| 9 | 22.86 | 16.39 | 13.90 | 12.56 | 11.71 | 11.13 | 10.70 | 10.37 | 10.11 | 9.89 | 9.57 | 9.24 | 8.90 | 8.72 | 8.55 | 8.19 | 8.06 | 8.00 | 7.96 | 7.93 | 7.90 | 7.86 | 7.81 |
| 10 | 21.04 | 14.90 | 12.55 | 11.28 | 10.48 | 9.93 | 9.52 | 9.20 | 8.96 | 8.75 | 8.45 | 8.13 | 7.80 | 7.64 | 7.47 | 7.12 | 7.00 | 6.94 | 6.91 | 6.87 | 6.85 | 6.81 | 6.76 |
| 12 | 18.64 | 12.97 | 10.80 | 9.63 | 8.89 | 8.38 | 8.00 | 7.71 | 7.48 | 7.29 | 7.00 | 6.71 | 6.40 | 6.25 | 6.09 | 5.76 | 5.65 | 5.59 | 5.56 | 5.52 | 5.50 | 5.46 | 5.42 |
| 15 | 16.59 | 11.34 | 9.34 | 8.25 | 7.57 | 7.09 | 6.74 | 6.47 | 6.26 | 6.08 | 5.81 | 5.54 | 5.25 | 5.10 | 4.95 | 4.64 | 4.53 | 4.48 | 4.44 | 4.41 | 4.39 | 4.35 | 4.31 |
| 20 | 14.82 | 9.95 | 8.10 | 7.10 | 6.46 | 6.02 | 5.69 | 5.44 | 5.24 | 5.08 | 4.82 | 4.56 | 4.29 | 4.15 | 4.00 | 3.70 | 3.60 | 3.54 | 3.51 | 3.48 | 3.46 | 3.42 | 3.38 |
| 24 | 14.03 | 9.34 | 7.55 | 6.59 | 5.98 | 5.55 | 5.24 | 4.99 | 4.80 | 4.64 | 4.39 | 4.14 | 3.87 | 3.74 | 3.59 | 3.29 | 3.19 | 3.14 | 3.10 | 3.07 | 3.05 | 3.01 | 2.97 |
| 30 | 13.29 | 8.77 | 7.05 | 6.12 | 5.53 | 5.12 | 4.82 | 4.58 | 4.39 | 4.24 | 4.00 | 3.75 | 3.49 | 3.36 | 3.22 | 2.92 | 2.81 | 2.76 | 2.73 | 2.69 | 2.67 | 2.63 | 2.59 |
| 60 | 11.97 | 7.77 | 6.17 | 5.31 | 4.76 | 4.37 | 4.09 | 3.86 | 3.69 | 3.54 | 3.32 | 3.08 | 2.83 | 2.69 | 2.55 | 2.25 | 2.14 | 2.08 | 2.05 | 2.01 | 1.99 | 1.94 | 1.89 |
| 90 | 11.57 | 7.47 | 5.91 | 5.06 | 4.53 | 4.15 | 3.87 | 3.65 | 3.48 | 3.34 | 3.11 | 2.88 | 2.63 | 2.50 | 2.36 | 2.05 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.77 | 1.72 | 1.66 |
| 120 | 11.38 | 7.32 | 5.78 | 4.95 | 4.42 | 4.04 | 3.77 | 3.55 | 3.38 | 3.24 | 3.02 | 2.78 | 2.53 | 2.40 | 2.26 | 1.95 | 1.83 | 1.77 | 1.73 | 1.68 | 1.66 | 1.60 | 1.54 |
| 150 | 11.27 | 7.24 | 5.71 | 4.88 | 4.35 | 3.98 | 3.71 | 3.49 | 3.32 | 3.18 | 2.96 | 2.73 | 2.48 | 2.35 | 2.21 | 1.89 | 1.77 | 1.70 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.53 | 1.47 |
| 200 | 11.15 | 7.15 | 5.63 | 4.81 | 4.29 | 3.92 | 3.65 | 3.43 | 3.26 | 3.12 | 2.90 | 2.67 | 2.42 | 2.29 | 2.15 | 1.83 | 1.71 | 1.64 | 1.60 | 1.55 | 1.52 | 1.46 | 1.39 |
| 250 | 11.09 | 7.10 | 5.59 | 4.77 | 4.25 | 3.88 | 3.61 | 3.40 | 3.23 | 3.09 | 2.87 | 2.64 | 2.39 | 2.26 | 2.12 | 1.80 | 1.67 | 1.60 | 1.56 | 1.51 | 1.48 | 1.42 | 1.34 |
| 500 | 10.96 | 7.00 | 5.51 | 4.69 | 4.18 | 3.81 | 3.54 | 3.33 | 3.16 | 3.02 | 2.81 | 2.58 | 2.33 | 2.20 | 2.05 | 1.73 | 1.60 | 1.53 | 1.48 | 1.43 | 1.39 | 1.32 | 1.23 |
| ∞ | 10.83 | 6.91 | 5.42 | 4.62 | 4.10 | 3.74 | 3.47 | 3.27 | 3.10 | 2.96 | 2.74 | 2.51 | 2.27 | 2.13 | 1.99 | 1.66 | 1.52 | 1.45 | 1.40 | 1.34 | 1.30 | 1.21 | 1.00 |

Kaynak: Mason, R.L., J.C. Young, Multivariate Statistical Process Control with Industrial Applications, Virginia, American Statistical Association (ASA), 2001, s. 246.

Ek 27: Kalite Kontrolü Gerçekleştirilen ve MYT Ayrıştırma Yönteminin Uygulandığı Veri Kümesi

| | yuksekl | agizcap | dipcap | etkalin | dipyuk | kopukpa |
|----|---------|---------|--------|---------|--------|---------|
| 1 | 150,59 | 68,42 | 62,64 | 1,72 | 14,39 | 26,44 |
| 2 | 150,53 | 68,51 | 65,65 | 1,69 | 14,41 | 26,78 |
| 3 | 150,57 | 68,50 | 62,62 | 1,70 | 14,57 | 26,43 |
| 4 | 150,59 | 68,32 | 62,65 | 1,76 | 14,39 | 26,42 |
| 5 | 150,42 | 68,38 | 62,53 | 1,69 | 14,40 | 26,43 |
| 6 | 150,78 | 68,21 | 62,87 | 1,71 | 14,29 | 26,61 |
| 7 | 150,82 | 68,29 | 62,57 | 1,70 | 14,30 | 26,56 |
| 8 | 150,48 | 68,35 | 62,43 | 1,71 | 14,50 | 26,38 |
| 9 | 150,58 | 68,48 | 62,60 | 1,74 | 14,60 | 26,39 |
| 10 | 150,34 | 68,39 | 62,58 | 1,70 | 14,45 | 26,10 |
| 11 | 150,33 | 68,45 | 62,59 | 1,70 | 14,45 | 26,04 |
| 12 | 150,21 | 68,38 | 62,78 | 1,69 | 14,23 | 26,58 |
| 13 | 150,37 | 68,33 | 62,59 | 1,69 | 14,45 | 26,33 |
| 14 | 150,33 | 68,46 | 62,60 | 1,70 | 14,73 | 26,38 |
| 15 | 150,48 | 68,49 | 62,51 | 1,69 | 14,84 | 26,20 |
| 16 | 150,73 | 68,49 | 62,53 | 1,60 | 14,52 | 26,36 |
| 17 | 150,37 | 68,46 | 62,49 | 1,71 | 14,85 | 26,36 |
| 18 | 150,58 | 68,42 | 62,65 | 1,75 | 14,38 | 26,40 |
| 19 | 150,61 | 68,30 | 62,63 | 1,71 | 14,46 | 26,10 |
| 20 | 150,31 | 68,31 | 62,60 | 1,69 | 14,72 | 26,20 |
| 21 | 150,55 | 68,35 | 62,59 | 1,73 | 14,74 | 26,31 |
| 22 | 150,48 | 68,37 | 62,52 | 1,71 | 14,50 | 26,44 |
| 23 | 150,53 | 68,39 | 62,48 | 1,74 | 14,51 | 26,05 |
| 24 | 150,48 | 68,39 | 62,60 | 1,69 | 14,55 | 26,36 |
| 25 | 150,53 | 68,33 | 62,51 | 1,69 | 14,76 | 26,19 |
| 26 | 150,47 | 68,37 | 62,63 | 1,72 | 14,68 | 26,35 |
| 27 | 150,35 | 68,48 | 62,49 | 1,69 | 14,68 | 26,44 |
| 28 | 150,36 | 68,43 | 62,62 | 1,74 | 14,44 | 26,44 |
| 29 | 150,18 | 68,36 | 62,58 | 1,64 | 14,30 | 26,44 |
| 30 | 150,69 | 68,23 | 62,93 | 1,69 | 14,15 | 27,07 |

ÖZGEÇMİŞ

Çiğdem ARICIGİL ÇİLAN

ccilan@istanbul.edu.tr

1.KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Tarihi: 28 Ağustos 1975

Doğum Yeri: Almanya

Medeni Durumu: Evli

2.EĞİTİM

2002- Bugüne: Araştırma Görevlisi, İstanbul Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı

2000 - : Doktora Öğrenimi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı, İstanbul, Türkiye

1998-2002: Araştırma Görevlisi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı

1997-2000:Yüksek Lisans Öğrenimi, Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü

1993-1997: Lisans Öğrenimi, Mimar Sinan Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü

3.YABANCI DİL: İngilizce, Almanca

4. BİLGİSAYAR DENEYİMİ: Office Programları, İstatistik Paket Programları (SPSS, Minitab, Statgraphics, Statistica, Microstat, Instat)

5. AKADEMİK ÇALIŞMALAR

Arıcıgil Çılan, Ç., Ekonomik Konjonktür ve Türk Emek Piyasası, M.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2000

Arıcıgil Çılan, Ç., "Türk Emek Piyasasına Ekonometrik Bir Yaklaşım", İktisat, İşletme ve Finans Dergisi, No:177, 2000, s. 64-78.

Arıcıgil Çılan, Ç., A. Demirhan “Türkiye’nin İllere Göre Sosyo-Ekonomik Yapısının Çok Boyutlu Ölçekleme Tekniği ve Kümeleme Analizi İle İncelenmesi”, **İşletme İktisadi Enstitüsü Yönetim Dergisi**, No:42, 2002, s.39-50.

Arıcıgil Çılan, Ç., “Türkiye’nin Sosyo-Ekonomik Yapısının Kanonik Korelasyon Analizi İle İncelenmesi”, **İstatistik Araştırma Dergisi**, C.III, No:1, 2004, s. 51-60.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, Multivariate Quality Control:A Historical Perspective, **First International Joint Symposium on Business Administration, Challengees for Business Administrators in the New Millenium**, 1-3 Haziran 2000, Gökçeada, Türkiye

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, “Süreç Kontrol İçin T² Diyagramları”, **İstatistik Araştırma Sempozyumu Bildiriler Kitabı**, 27-29 Kasım 2000, s. 217-227.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, Multivariate Statistical Process Control Methods and New Approaches”, **The 6’t World Congress for Total Quality Management, Proceedings, Volume 1, Saint Petersburg, Russia**, 20-22 Haziran 2001, s. 239-245.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, Kümeleme Analizinin Performans Değerlendirmede Kullanılmasına İlişkin Bir Uygulama”, **İktisat, İşletme ve Finans Dergisi**, No:184,2001, s. 4-17.

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, Türkiye’nin Sosyo-Ekonomik Yapısının İllere ve Bölgelere Göre Analizi”, **V. ODTÜ Ekonomi Kongresi**,10-13 Eylül 2001

Oktay Fırat, Ü., Ç. Arıcıgil Çılan, “Performans Değerlendirme Sonuçlarının Analizine Çok Değişkenli İstatistik Yaklaşım”, **8. Ulusal Yönetim ve Organizasyon Kongresi Bildiriler Kitabı**, 25-27 Mayıs 2000, s. 835-851.

Orhunbilge, N., Ç. Arıcıgil Çılan, “2001 Yılı Aylık Dolar Kurları Tahmin Edilebilir miydi?”, **İşletme Fakültesi Dergisi**, C. XXX, No:2, 2001, s. 53-64.