

T.C.

İstanbul Üniversitesi

Sosyal Bilimler Enstitüsü

İşletme Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Lagrange Gevşetmesi ile Küçük Portföylerin Elde
Edilmesi ve İMKB'ye Uygulanması

Gökhan TURAN

2502070274

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Erhan ÖZDEMİR

İstanbul – 2013



DOKTORA

TEZ ONAYI

ÖĞRENCİNİN

Adı ve Soyadı : GÖKHAN TURAN Numarası : 2502070274

Anabilim/Bilim Dalı : SAYISAL YÖNTEMLER Danışman : PROF.DR. ERHAN ÖZDEMİR

Tez Savunma Tarihi : 29.05.2013 Tez Savunma Saati : 10:00

Tez Başlığı : LAGRANGE GEVŞETMESİ İLE KÜÇÜK PORTFÖYLERİN ELDE EDİLMESİ VE İMKB'YE UYGULANMASI

TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin 50. Maddesi uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin KABULÜ'NE OYBİRLİĞİ / ÖYÇOKLUĞUYLA karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1-PROF.DR. ERHAN ÖZDEMİR		Kabul
2-PROF.DR ÖNER ESEN		Kabul
3-PROF.DR İBRAHİM DOĞAN		Kabul
4-PROF.DR MÜFİT GİRESUNLU		Kabul
5-PROF.DR MEHPARE TİMOR		Kabul

YEDEK JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1- PROF.DR MEHMET AHLATÇIOĞLU		
2- DOÇ.DR ERGÜN EROĞLU		

ÖZ

Modern portföy teorisinin kurucusu olarak bilinen Harry M. Markowitz, gerçekçi bir yatırımcı için beklenen faydayı maksimize ederken, beklenen getiri ve getirilerin varyansını dikkate alan, optimal portföyün seçimini göstermiştir.

Bu tezde, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline bir tamlık kısıtı eklenerek, seçilecek portföydeki hisse senedi sayısı sınırlanmıştır. Buna ilave olarak, model tamlık kısıtlı kuadratik programlama problemi olarak düzenlenmiş ve Lagrange Gevşetmesi yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu yöntemde, tamlık kısıtlı kuadratik programlama problemi, iki alt probleme ayrılıp, bu problemler birbirleri ile dual değişkenler yardımı ile ilişkilendirilmiştir.

Veriler, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasından (İMKB) tedarik edilmiştir. İMKB-30 endeks verileri kullanılarak Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli ve Lagrange Gevşetmesinin sonuçları kıyaslanmıştır. Son olarak, Lagrange Gevşetmesi yöntemi kullanılarak optimal küçük portföyler elde edilmiştir.

ABSTRACT

Harry M. Markowitz is often known as the founder of modern portfolio theory. For a rational investor, Markowitz has suggested an optimal portfolio that considers both expected return and variance of return while maximizing the expected utility.

In this dissertation, a cardinality constraint is added to the Markowitz's Mean-Variance model. The number of securities in the chosen portfolio is restricted to a certain limit. In addition, the model is prepared as a cardinality-constrained quadratic programming problem and solved by using Lagrangian relaxation method. This method involves splitting the cardinality-constrained quadratic programming model into two models that are connected to each other with dual variables.

The data set was provided by the Istanbul Stock Exchange (ISE). The ISE-30 data were first used in order to compare the Markowitz's Mean-Variance model and the Lagrangian relaxation results and then, to obtain small portfolios using Lagrangian relaxation.

ÖNSÖZ

Modern portföy teorisinin temellerini 1952 yılında yazdığı “*Portfolio Selection*” isimli makalesi ile atan Harry M. Markowitz, portföy riskinin, portföyü oluşturan menkul kıymetlerin risklerinden bağımsız olarak düşürülebileceğini kanıtlamıştır.

Gelişen, değişen ve küreselleşen dünyamızda artık bir yatırımcı hisse senedi piyasalarını anlık olarak takip etme şansına sahiptir. Piyasa hareketlerinin çok hızlı olduğu bu ortamda yatırımcılar daha kısa sürede karar vermek zorundadırlar. Bu nedenle, bir yatırımcıya tavsiye edilecek olan portföyün büyüklüğüne ilave olarak, zaman önemli bir parametre olarak karşımıza çıkmaktadır. Bundan dolayı, portföy seçimi problemlerinde optimal yada optimale yakın sonuçları kısa sürede veren *sezgisel (heuristic)* yöntemler geliştirilmiştir.

Bu yöntemlerden biri de *Lagrange Gevşetmesidir*. Bu yöntem, *Dal-Sınır* tabanlı bir algoritma ile birleştirilerek sezgisel bir yaklaşımla, **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde yer alan hisse senetleri üzerinde uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar Markowitz’in *Ortalama-Varyans* modeli ile karşılaştırılmıştır.

Ayrıca belirli bir hisse senedi sayısına göre çözüm geliştirebilmek için; uygulamada kullandığımız modele, *tamlık kısıtı* eklenerek optimal küçük portföy seçimi yapılmış ve yatırımcılar için yeni alternatifler üretilmiştir.

Buna ilave olarak, her bir portföy içinde bir *üst sınır (upper bound)* elde edilmiştir.

Çalışma süresi boyunca, benden hiçbir desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Erhan ÖZDEMİR’e, değerli hocam Sayın Prof. Dr. İ.Müfit GİRESUNLU’ya, Dr. Neslihan FİDAN’a ve İnş. Yük. Müh. Soner GÖNCÜ’ye teşekkürlerimi arz ederim. Bununla birlikte her zaman yanımda olan annem Yüksel TURAN ve babam Münir TURAN’a daima minnet borçluyum.

Çalışmanın araştırmacılara yararlı olmasını dilerim.

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
GRAFİKLER LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
GİRİŞ	1
1. KARAR TEORİSİ VE TEMEL MATEMATİK KAVRAMLAR.....	4
1.1. KARAR TEORİSİ.....	4
1.2. OPTİMİZASYON PROBLEMİ VE TEMEL MATEMATİK KAVRAMLAR.....	5
1.2.1. Ekstramum Noktalar	6
1.2.2. Konvekslik ve Konkavlık.....	9
1.2.3. Kuadratik Formlar ve Sylvester Teoremi.....	11
2. PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ	13
2.1. PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ TANIMI.....	13
2.2. GETİRİ VE RİSK KAVRAMLARI	15
2.3. ETKİN SINIR VE ÜZERİNDEKİ PORTFÖYLER.....	28
3. LAGRANGE GEVŞETMESİ.....	36
3.1. MÜMKÜN LAGRANGE ÇÖZÜMÜ VE GEOMETRİK GÖSTERİMİ.....	39
3.2. LAGRANGE GEVŞETMESİ VE PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ.....	47
3.3. LAGRANGİAN SEZGİSELLERİ VE PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ	52

4. LAGRANGE GEVŞETMESİ İLE PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİNİN İMKB'YE UYGULANMASI.....	59
4.1. MARKOWİTZ'İN ORTALAMA-VARYANS MODELİNE GÖRE OPTİMAL PORTFÖY SEÇİMİ UYGULAMASI	62
4.2. LAGRANGE GEVŞETMESİNE GÖRE OPTİMAL PORTFÖY SEÇİMİ UYGULAMASI.....	71
4.3. LAGRANGE GEVŞETMESİNE GÖRE OPTİMAL KÜÇÜK PORTFÖYLERİN SEÇİMİ.....	83
SONUÇLAR	96
KAYNAKÇA	99
EKLER.....	104
ÖZGEÇMİŞ.....	160

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2-1.Fayda Matrisi.....	20
Tablo 4-1.Çalışmada Kullanılan Hisse Senetleri ve Kodları	61
Tablo 4-2.Günlük Ortalama Getiriler (02/01/2006-03/01/2011)	62
Tablo 4-3.Varyans-Kovaryans Matrisinin Asal Minörlerinin Determinantları	63
Tablo 4-4.Ortalama-Varyans Modeline Göre Amaç Fonksiyonu Değerleri.....	64
Tablo 4-5. $2 \leq \lambda \leq 2.7$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler	66
Tablo 4-6. $2.8 \leq \lambda \leq 3.5$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler.....	67
Tablo 4-7. $3.6 \leq \lambda \leq 4$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler	68
Tablo 4-8. $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında oluşturulmuş portföylerin getirisi ve riski.....	70
Tablo 4-9.Sistemik ve Sistemik Olmayan Riskler	74
Tablo 4-10.Sistemik Risklerin Asal Minörlerinin Determinantları	75
Tablo 4-11. $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ Matrisinin Asal Minörlerinin Determinantları.....	77
Tablo 4-12.Lagrange Gevşetmesine Göre Amaç Fonksiyonu Değerleri.....	81
Tablo 4-13. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri	83
Tablo 4-14. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Optimal Küçük Portföyler.....	84
Tablo 4-15. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri	85
Tablo 4-16. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Optimal Küçük Portföyler.....	86
Tablo 4-17. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri	87
Tablo 4-18. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Optimal Küçük Portföyler.....	88
Tablo 4-19. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri	89
Tablo 4-20. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri	90
Tablo 4-21. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri	90
Tablo 4-22. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri.....	92
Tablo 4-23. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri.....	93
Tablo 4-24. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri.....	93
Tablo 4-25. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri.....	93
Tablo 4-26. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri.....	94
Tablo 4-27. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri.....	94

Tablo 4-28. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri.....	94
Tablo 4-29. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri.....	95
Tablo 4-30. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri.....	95

GRAFİKLER LİSTESİ

Grafik 4-1.Etkin Sınır ve Üzerindeki Portföyler.....	71
Grafik 4-2.Etkin Sınır ve Üzerindeki Portföyler.....	82

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1-1.Ekstramum Noktalar.....	7
Şekil 1-2.Semer Noktası.....	8
Şekil 1-3.Konveks ve Konveks Olmayan Küme.....	9
Şekil 1-4.Konveks Fonksiyon	10
Şekil 2-1.Sistematik ve Sistematik Olmayan Risk.....	17
Şekil 2-2.Konkav Fayda Fonksiyonu	19
Şekil 2-3.Konveks Fayda Fonksiyonu	19
Şekil 2-4.Konkav-Konveks Fayda Fonksiyonu	20
Şekil 2-5.İki Alternatifli Kararın Karakteristiği.....	22
Şekil 2-6.Kayıtsızlık Eğrileri	23
Şekil 2-7.Portföyün Geometrik Gösterimi	29
Şekil 2-8.Eş Ortalama Doğruları.....	30
Şekil 2-9.Eş Varyans Eğrileri.....	32
Şekil 2-10.Çeşitli Tiplerdeki Eş Varyans Eğrileri.....	33
Şekil 2-11.Kritik Doğru	33
Şekil 2-12.Etkin Sınır Eğrisi	34
Şekil 2-13.Etkin Sınır ve Kayıtsızlık Eğrileri	35
Şekil 3-1.Lagrange Gevşetmesi ile Mümkün Çözümlerin Geometrik Gösterimi.....	41
Şekil 4-1. Uygulamanın Akış Şeması	60
Şekil 4-2. Q Matrisinin Ayrıştırılmasının İş Akışı	72

GİRİŞ

John Burr Williams, *The Theory of Investment Value* adlı eserinde bir varlığın bugünkü değerinin, aynı varlığın gelecekte getireceği kar miktarının bugünkü değerine eşit olması gerektiğini öneren bir yaklaşım ortaya koymuştur. Ancak, kar kesin olmadığı için, bir varlığın gelecekte getireceği kar miktarının üzerinden yapılan indirim miktarının beklenen değerini, eldeki varlığın değeri olarak dikkate alınması düşüncesi Harry M. Markowitz tarafından geliştirilmiştir. Bir yatırımcının sadece hisse senetlerinin getirilerinin beklenen değeri ile ilgilenmesi, yatırımcının sadece portföyün getirisinin beklenen değeri ile ilgilendiği anlamına gelir. Bir portföyün sadece getirisinin beklenen değerinin maksimize edilmesini dikkate alan (beklenen değer tek bir hisse senedi yada birleştirilmiş birkaç hisse senedi için olabilir) bu yaklaşım gerçekçi yatırımcı davranışı olarak görülmemektedir.¹

Markowitz, portföyün risk ile getirisini birlikte dikkate alarak kurduğu modelde, özellikle küçük yatırımcılar için, portföy kombinasyonlarının varyansı ve getirilerinin beklenen değerlerinin oluşturduğu etkin sınır yardımıyla, yatırımcıya hangi portföyleri tercih etmesi gerektiğini göstermiştir. Finansal ekonomi teorisine yaptığı bu öncü çalışmalar ile yaptığı katkıdan dolayı, William F. Sharpe, Merton H. Miller ile birlikte 1990 yılında Nobel Ekonomi ödülüne layık görülmüştür.

Belirsizlik altında karar verme probleminde, yatırımcının beklenen karı ya da kazancını maksimize etmeye çalışması makul bir davranış olarak kabul edilir. Bu yaklaşıma iki temel itiraz vardır. Bunlardan birincisi, sıradan bir yatırımcının olaylar karşısında sadece beklenen sonuçlara odaklanması ve olaylar defalarca tekrar etse bile ortalama sonucu dikkate almamasıdır.

¹Harry M. Markowitz, "Foundations of Portfolio Theory," **The Journal of Finance**, June, 1991, s.470, (Çevrimiçi) <http://www.jstor.org/stable/2328831>, 21 Mayıs 2010.

İkincisi ise, beklenen getirinin maksimize edilmesi için varlıkların çeşitlendirilmesi, kaynakların geniş bir yelpazede yer alan bu varlıklara dağıtılmasını tam olarak açıklayamamaktadır.²

Modern portföy teorisinin babası olarak kabul edilen Markowitz kadar bu övgüyü hak edecek bir isim olan A.D. Roy'da tıpkı Markowitz gibi ortalama ve standart sapmayı temel alan bir model önermiştir.

Roy ve Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli arasındaki iki temel fark aşağıdaki gibidir:³

- i. Ortalama-Varyans modelinde pozitiflik koşulu var iken, Roy tüm yatırımın içerdiği hisse senetleri için pozitiflik koşuluna yer vermemiştir.
- ii. Markowitz yatırımcıya etkin sınır üzerinde yer alan portföylerden herhangi bir tanesini seçebilmeyi önermiş iken, Roy yatırımcıya portföyler arasından sadece özellikli olan tek bir portföy önermiştir.

1963 yılında Sharpe, 1966 yılında Cohen & Frederick, Markowitz'in Ortalama-Varyans modelinin daha basit şekilde formüle edildiği indeks modelleri geliştirmişlerdir. Sharpe 1971 yılında yazdığı makalesinde "Eğer portföy analizi probleminin özü, lineer(doğrusal) programlama yöntemlerine uygun olabilseydi, pratik uygulamalar için gerçekten büyük umutlara sahip olunacaktı."⁴ şeklinde bir görüş belirtmiştir.

Gerçekten, uygulamada varlıkların sayısı büyük bir önem arz etmekle birlikte, belirli bir limite bağlı olarak belirlenen varlıklar tarafından oluşturulan portföy seçimi problemlerinin çözümü zordur.

²A.D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets," **Econometrica**, July, 1952, s.431, (Çevrimiçi) <http://www.jstor.org/stable/1907413>, 15 Ekim 2010.

³Harry M. Markowitz, "The Early History of Portfolio Theory:1600-1960," **Financial Analysis Journal**, June, 1991, s.5.

⁴Bernell K. Stone, "A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem," **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, September, 1973, s.621, (Çevrimiçi) <http://www.jstor.org/stable/2329828>, 10 Ağustos 2009.

Bu zorluktan dolayı genellikle tercih edilen yaklaşım, tam sonuç yerine optimal nokta/lar civarında çözüm değerlerine ulaştıran sezgisel çözüm yöntemleridir. İlerleyen yıllar içerisinde çok sayıda sezgisel çözüm yöntemi portföy seçimi problem için geliştirilmiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümü, belirsizlik halinde karar problemi olarak çözümlenmesi gereken *Portföy Seçimi* probleminin çözümünde yer alan temel matematik kavramlar ve karar teorisine ayrılmıştır.

İkinci bölümde, portföy seçimi probleminin tanımı yapılarak, getiri, risk ve etkin sınır kavramları birlikte Markowitz tarafından geliştirilen Ortalama-Varyans modeli açıklanacaktır.

Üçüncü bölüm, Lagrange gevşetmesinin içeriğine ve bu konu ile ilgili temel bilgilere ve Lagrangian sezgisellerine ayrılmıştır.

Dördüncü bölüm ise; ilk üç bölümde ifade edilen temel kavramlar ve Lagrange Gevşetmesi yardımı ile, **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde yer alan şirketlere ait hisse senetleri kullanılarak, yatırımcılara önerilebilecek olan portföylerin oluşturulmasına yönelik uygulamayı içermektedir.

1. KARAR TEORİSİ VE TEMEL MATEMATİK KAVRAMLAR

Bu bölümde karar teorisi ve bu çalışmaya esas olacak optimizasyon ile ilgili temel matematik kavramlar açıklanacaktır.

1.1. Karar Teorisi

Mümkün iki ya da daha fazla davranış biçimi arasından herhangi birinin seçimi “*karar*” olarak adlandırılır. Bir karar eyleminin elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

- i. **Karar Verici:** Mevcut seçenekler içerisinde seçim yapan kişi ya da grubu yansıtır.
- ii. **Amaç:** Karar verici/vericilerin faaliyetleri ile ulaşılabilecek amaçlardır.
- iii. **Karar Kriteri:** Karar verici/vericilerin seçimini oluşturmada kullanacağı değerler sistemidir.
- iv. **Seçenekler:** Karar verici/vericilerin seçebileceği alternatifler olup, kontrol edilebilir değişkenlerdir.
- v. **Olaylar:** Kontrol edilemeyen değişkenler olup, karar verici/vericilerin seçimlerini etkileyen çevre şartlarıdır.
- vi. **Sonuç:** Her bir seçenek ve olaydan ortaya çıkan değeri yansıtır.

Sonuçların oluşturduğu matrise *karar matrisi* adı verilir.

Kararlar; *belirlilik*, *risk*, *belirsizlik*, *kısmi bilgi haline* ve *rekabet (oyun teorisi)* durumlarında karar alıcılar tarafından alınır.¹

Belirlilik halinde karar verme durumunda, ortaya çıkacak olay kesin olarak bilinir ve karar matrisinde yer alan olay sadece bir adettir.

¹Osman Halaç, **Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması)**, İstanbul, Evrim Basım Yayın Dağıtım, Türkiye, 1991, s.27.

Risk halinde karar verme durumunda, olay sayısı birden fazla ve meydana gelebilecek olayların olasılık dağılımları bilinmektedir.

Belirsizlik halinde karar verme durumunda, meydana gelebilecek olan olayların olasılık dağılımları bilinmemektedir.

Kısmi bilgi halinde karar verme durumunda, olayların gerçekleşme olasılıklarının yalnızca dağılımı ve merkezi eğilim ölçülerinin (ortalama, mod, medyan, v.b) bazıları bilinmektedir.

Oyun teorisi ise, rekabete dayalı problemleri içermektedir. Karar matrisinin sütunları rakip oyuncunun seçeneklerini gösterir ve matris elemanlarına ödeme adı verilir.

1.2. Optimizasyon Problemi ve Temel Matematik Kavramlar

Bir optimizasyon problemi, belirli koşullar altında mümkün olan alternatifler arasında en iyi çözümün nasıl bulunacağı ile ilgilidir. Zaman, maliyet gibi bilinen nedenlerden dolayı bu tür problemlerin çözümüne ve bu tür problemlere ait çözümlerin geliştirilmesine ilgi artarak devam etmektedir.²

Eğer bir optimizasyon probleminin çözümü zamanla değişmiyorsa, bu tür optimizasyon problemlerine *statik optimizasyon* ya da *doğrusal olmayan programlama (non-linear programming)* adı verilir. Bu tür problemler cebirsel ya da cebirsel olmayan denklemlerle, matematiksel bir model olarak ifade edilirler. Bu denklem, *amaç fonksiyonu (objective function)* olarak adlandırılır. *Amaç fonksiyonu*, doğrusal bir denklemden oluşuyorsa, bu modele *doğrusal programlama (linear programming)* modeli adı verilir.

²D.A. Wismer and R.Chattergy, **Introduction to Nonlinear Optimization**, New York, Elsevier North Holland, 1978, s.1.

Eğer bir optimizasyon probleminin çözümü zamanın bir fonksiyonu olarak değişiyorsa bu problemlere *dinamik optimizasyon* problemleri adı verilir. Bu tür problemler ise, genellikle diferensiyel denklemlerden oluşan ve amaç fonksiyonu bazen bir toplam olarak da ifade edilebilen problemlerdir.

Dinamik ya da *statik* yapılara sahip olduğuna bakılmaksızın, *maksimum* ya da *minimum* olarak ifade edilen bir *amaç fonksiyonuna* sahip ve *kısıtlarla* ifade edilen optimizasyon problemlerine, *kısıtlı optimizasyon (constrained optimization)* problemi denir. Bu tür problemlerde *kısıtlar*, *eşitlik (equality)* ve/veya *eşitsizlik (inequality)* olarak ifade edilirler. Eğer sadece bir *amaç fonksiyonuna* sahip bir optimizasyon problemi söz konusu ise, bu takdirde optimizasyon problemi *kısıtsız optimizasyon (unconstrained optimization)* problemi olarak adlandırılır.³

Bir optimizasyon probleminde bilinmesi gerekli temel matematik kavramları aşağıdaki başlıklar altında açıklayabiliriz.

12.1. Ekstramum Noktalar

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $\mathbf{x} \in X$ olmak üzere ve $X \subset E^n$ (n-boyutlu Öklid uzayı) içerisinde tanımlı ve sürekli olsun. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun birden çok *yerel maksimum* ve *minimum* noktası olabilir. Ancak bu noktalardan sadece bir tanesi *mutlak maksimum* ve bir tanesi de *mutlak minimum*dur.

Mutlak maksimum ve *mutlak minimum* noktaları aynı zamanda yereldir. Bu noktalar dışında kalan noktalar ise, sadece *yerel maksimum* ve *yerel minimum* noktalarıdır.

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta, tek bir ekstramum noktasına sahipse, $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu tek *maksimumlu* veya *minimumludur*.

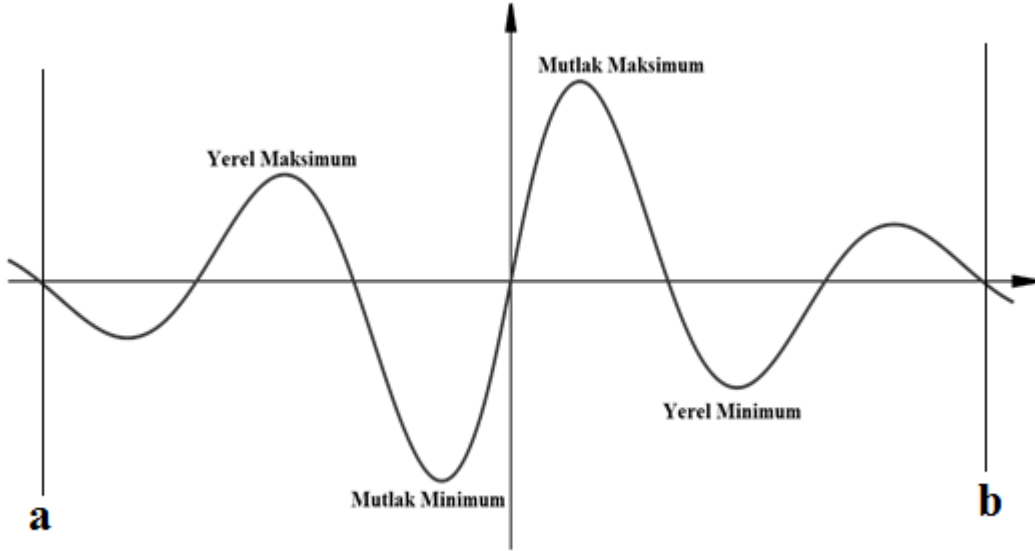
³A.e., s.2.

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $X \subset E^n$ içerisindeki bir \mathbf{x}^* noktasının δ komşuluğundaki bütün noktalarda tanımlı olsun.

Eğer, $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ ve $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$ şartlarını sağlayan tüm \mathbf{x} noktaları için, $0 < \varepsilon < \delta$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa \mathbf{x}^* noktasına *yerel minimum* noktası denir. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ olması durumunda ise, \mathbf{x}^* noktası *yerel maksimum*dur.

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu tanımlı olduğu, $X \subset E^n$ kapalı kümesinde $\forall \mathbf{x} \in X$ için $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$ şartını sağlıyorsa, \mathbf{x}^* noktasına *mutlak minimum* denir.⁴ Eğer, $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$ ise, \mathbf{x}^* noktasına *mutlak maksimum* denir.

Şekil 1-1'de, $[a, b] \subset E^1$ kümesinde tanımlanmış tek değişkenli bir fonksiyon için, *ekstramum* noktalar gösterilmektedir.



Şekil 1-1.Ekstramum Noktalar

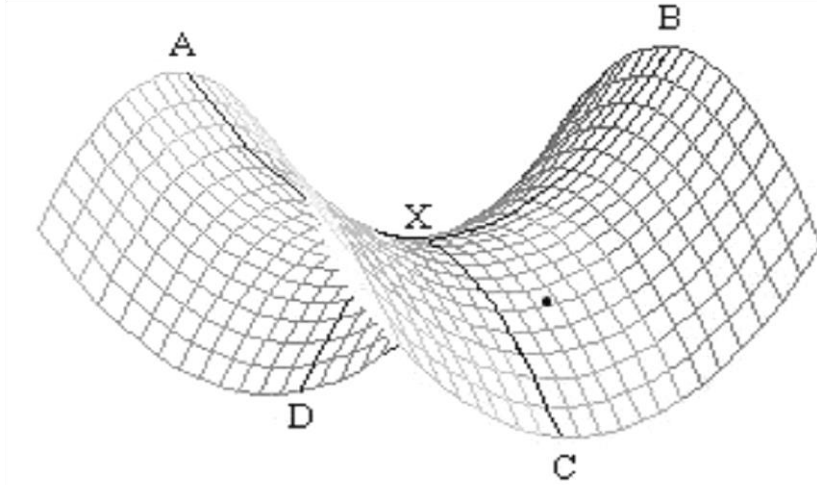
⁴A.e., s.33.

Eğer bir fonksiyon çok değişkenli ise, yukarıda ifade edilen maksimum ve minimum noktalara ilave olarak *semer(eyer) noktası*ndan bahsetmek gereklidir.

İki değişkenli bir $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fonksiyonun, $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ noktasında *semer(eyer) noktası*na sahip olabilmesi için; $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon$ olacak şekildeki bütün \mathbf{x} ve \mathbf{y} değerleri için, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leq f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ şartları sağlanmalıdır.⁵

Buradan da anlaşılacağı üzere, f fonksiyonun, x değişkene göre maksimum y değişkene göre minimum olan değer aldığı bu nokta, *semer(eyer) noktası*dır.

Şekil 1-2'de *semer(eyer) noktası* gösterilmektedir.



Şekil 1-2.Semer Noktası

⁵A.e., s.38.

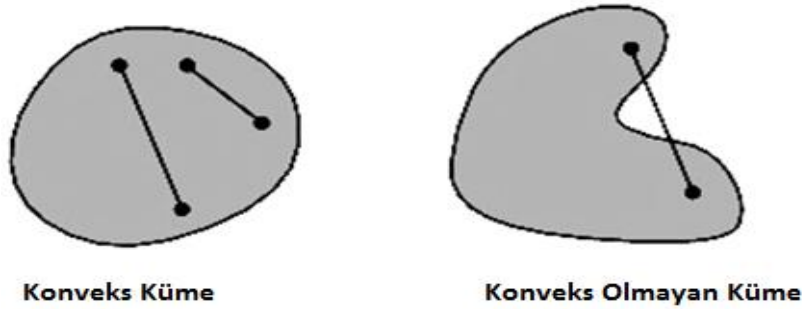
1.2.2. Konvekslik ve Konkavlık

Matematikteki konvekslik ve konkavlık kavramları, optimizasyon teorisi içerisinde önemli bir yer tutar.

Herhangi bir $\mathbf{x} \in E^n$ vektörü, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vektörleri ile, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olmak üzere, $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, \mathbf{x} vektörüne $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vektörlerinin bir *konveks kombinasyonu* adı verilir.

$X \subset E^n$ ve $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ olmak üzere, X kümesi içerisinde yer alan, $\forall \mathbf{x}_1$ ve $\forall \mathbf{x}_2$ nokta çiftinin herhangi bir *konveks kombinasyonu*, yine bu X kümesi içerisinde yer alıyorsa, bu kümeye *konveks küme* denir.⁶ Eğer, bu nokta çiftlerinin *konveks kombinasyonu* oluşturulan en az bir nokta X kümesi içerisinde yer almazsa, bu kümeye de *konveks olmayan küme* denir.

Şekil 1-3'de $X \in E^2$ de tanımlanmış olan, *konveks* ve *konveks olmayan* kümeler gösterilmektedir.



Şekil 1-3. Konveks ve Konveks Olmayan Küme

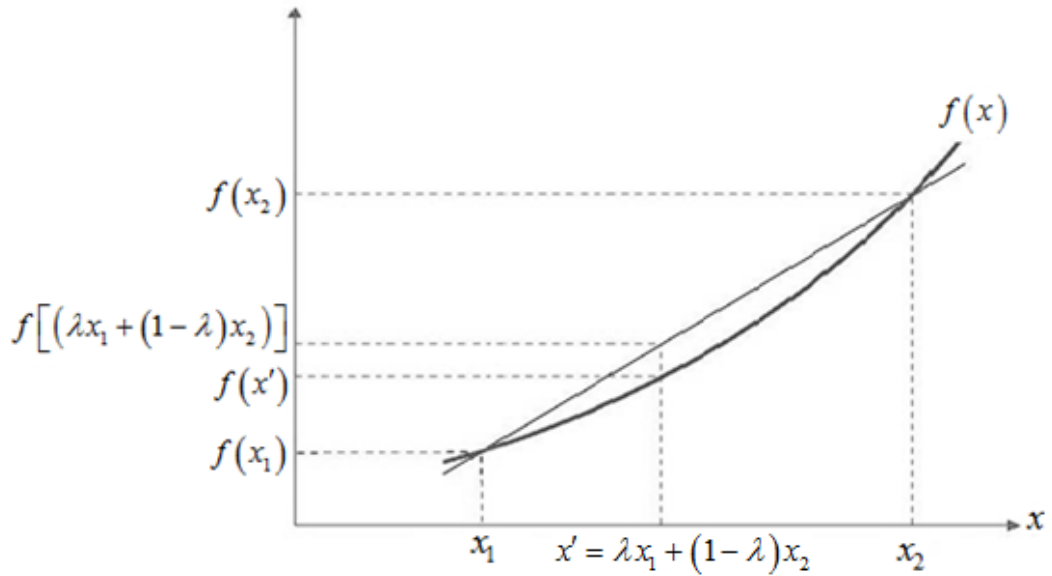
⁶H.İ. Sezginman, **Lineer Programlama ve Problemleri**, İstanbul, Yıldız Üniversitesi Yayınları, Sayı:187, 1986, s.41.

$X = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_2 + (1-\lambda) \mathbf{x}_1, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ şeklinde tanımlanan noktaların kümesi; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ noktaları arasındaki *doğru parçası*dır. X kümesinin içerisinde yer alan $\forall \mathbf{x}_1$ ve $\forall \mathbf{x}_2$ nokta çifti için, elde edilen *doğru parçasının* her noktası X kümesine ait ise, X kümesine *konveks küme* denir.⁷

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X \subset E^n$ ve $f : x \rightarrow E^1$ için, $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere:

- i. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $f(\lambda \mathbf{x}_2 + (1-\lambda) \mathbf{x}_1) \leq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1)$ şartını sağlıyorsa, *konveks* bir fonksiyondur.
- ii. $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu, $f(\lambda \mathbf{x}_2 + (1-\lambda) \mathbf{x}_1) \geq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1)$ şartını sağlıyorsa, *konkav* bir fonksiyondur.

Şekil 1.4'de tek değişkenli *konveks* bir fonksiyon gösterilmektedir.



Şekil 1-4. Konveks Fonksiyon

⁷A.e., s.42.

1.2.3. Kuadratik Formlar ve Sylvester Teoremi

Doğrusal olmayan optimizasyonda önemli kavramlardan biri de, *kuadratik formlardır*.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \text{ ve } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ simetrik bir matris}$$

olmak üzere, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, n değişkenli fonksiyonuna bir *kuadratik form* denir.⁸

Buna göre;

- i. $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > \mathbf{0}$ ise *kuadratik form* pozitif definit,
- ii. $\forall \mathbf{x}$ için, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ve bazı $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ değerleri için, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ise *kuadratik form* pozitif yarı definit,
- iii. $-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pozitif definit ise, *kuadratik form* negatif definit,
- iv. $-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ pozitif semidefinit ise, *kuadratik form* negatif yarı definit,
- v. Eğer *kuadratik form*, bazı \mathbf{x} değerleri için pozitif, bazı \mathbf{x} değerleri için negatif değerler alıyorsa bu takdirde *indefinit*dir.

Türetilbilir bir $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun, n -boyutlu birinci merteye kısmi türevlerine *gradient vektör* denir.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right]^T \text{ olarak ifade edilen bu vektörün yönü,}$$

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun en hızlı değer kazandığı, tersi de en hızlı değer kaybettiği yöndür.

⁸H.A. Taha, **Operations Research: An Introduction**, New Jersey, Pearson Prentice Hall, 2007, Ek D., s.158.

Bir kuadratik formun pozitif definit olup olmadığı *Sylvester Teoremi* yardımı ile belirlenir.

Sylvester Teoremi: $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ kuadratik formu için, \mathbf{H} matrisinin ardışık ana minörlerinin tamamı pozitif ise, kuadratik form pozitif definittir. Aynı şekilde, $-\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ pozitif definit ise, $\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$ kuadratik formu negatif definittir.

Burada \mathbf{H} , $n \times n$ boyutlu, en az ikinci mertebeden türetilen sürekli kısmi türevlere sahip $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun, ikinci kısmi türevlerinin oluşturduğu simetrik *Hessian* matristir.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Burada $[\mathbf{H}]_{n \times n}$ ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere, $\mathbf{H} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ eşitliğini sağlayan \mathbf{x} vektörüne *özvektör*, λ skalerine de bu vektöre karşı gelen *özdeğer* denir. Bir kuadratik formun pozitif definit olabilmesi için, ancak ve ancak $[\mathbf{H}]_{n \times n}$ matrisinin bütün özdeğerleri pozitif olmalı, kuadratik formun pozitif yarı definit olabilmesi için ise, ancak ve ancak $[\mathbf{H}]_{n \times n}$ matrisinin bütün özdeğerlerinin pozitif ya da sıfır olması gerekir.⁹

⁹Erhan Özdemir, “**Nonlinear Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Seçimi Problemine Uygulanması**,” (Doktora Tezi), y.y., İstanbul, 1983, s.19.

2. PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİ

Portföy seçimi problemi iki aşamada incelenebilir. Birinci aşama, gözlem ile deneyimlerden oluşur ve varlıkların gelecekteki performansları ile ilgilenir. İkinci aşama ise, portföyün gelecekteki performansını dikkate alan ve doğrudan portföyün seçimine odaklanan aşamadır.¹

İyi bir portföy, bono ve hisse senetlerinden oluşturulmuş iyi ve uzun bir listeden daha fazlasıdır. Bir portföy seçimi süreci, hisse senetlerine ilişkin bilgilerin toplanmasıyla başlar ve bütün olarak bütün hisse senetlerine ilişkin sonuçlarla biter. Portföy seçiminde hisse senetlerine ait iki temel kaynak kullanılır:

Bunlardan birincisi, bireysel olarak bir hisse senedinin geçmiş performansına bakılmasıdır.

İkinci olarak, hisse senedinin gelecekteki performansıdır. Analistler geçmiş performans verilerini girdi olarak kullanırlarsa portföy analizinin çıktıları geçmişteki performans hakkında bilgi verir. Gelecekteki oluşması beklenen iyi ve kötü portföyler belirlenmek isteniyorsa, bu takdirde analistler geleceğe yönelik verileri girdi olarak kullanırlar.²

Portföy seçimi probleminin tanımı ile birlikte, getiri, risk ve etkin sınır kavramları aşağıda açıklanmıştır.

2.1. Portföy Seçimi Problemi Tanımı

Hisse senedi yatırımlarının temel özelliklerinden biri belirsizliktir. Tahmin yapılırken şüphe ya da hataların ötesindeki diğer ekonomik güçler kolayca anlaşılabilir. Örnek olarak; Deprem, sel ve kuraklık gibi doğal afetler ya da siyasi ve askeri hareketlilikler gibi beklenmeyen değişiklikler hisse senedi değerleri üzerinde

¹Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection," *The Journal of Finance*, 1952, s.77.

²Harry M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, 1959, s.3.

büyük etkiler oluşturabilirler. Bundan dolayı bir yatırımcı bir hisse senedinin değerinin artması veya azalması ile ilgili bir tahmine daima ihtiyaç duyar.

Bu tahmini gerçekleştirecek olan analist ise, bütün bilgi ve verileri derleyerek yatırımcıya uygun ve kullanılabilir bir bilgiyi sunmaya çalışır. Analist bazı geçerli düşüncelerden yola çıkarak çeşitli tahminlerde bulunabilir. Örnek olarak; A hissesinin getirisin, B hissesinden daha net olarak bilinmesi ya da C hissesinin getirisinin, D hissesinin getirisine göre daha az spekülatif olması gibi...

Hisse senedi yatırımlarına ilişkin bir diğer özellik ise, hisse senetlerinin getirileri arasındaki ilişkidir. Eğer hisse senedi getirileri arasında ilişki yoksa, çeşitlendirme yapılarak sistematik olmayan risk ortadan kaldırılabılır. Eğer hisse senetleri getirileri arasında mükemmel bir ilişki var ise, o takdirde riski ortadan kaldırmak mümkün değildir. Ama bu ilişki katsayısı mükemmel değil de, yüksek ise o takdirde riskin bir kısmının ortadan kaldırılabilceği varsayılır.³

Yatırım yapılacak olan portföylerin tercihi, hiç şüphesiz yatırımcının risk algılamasına göre farklılık göstermektedir. Buna karşın iki temel amaç hiç değişiklik göstermez ve genel olarak tüm yatırımcı tiplerine uyarlanabilir. Bunlar:

- 1) Her yatırımcı yüksek getiri ister. Buradaki getiri yatırımcıdan yatırımcıya göre çeşitlilik gösterse de daima yüksek olan düşük olana tercih edilir.
- 2) Yatırımcı getirisinin güvenilir, düzenli ve belirsizlikten uzak olmasını ister. Gerçekten yatırımcılar eşit şartlar altında belirlilik halini belirsizliğe tercih ederler.

³A.e., s.4.

2.2. Getiri ve Risk Kavramları

En geniş anlamıyla risk, beklenen sonucu elde etmede var olan belirsizlik şeklinde tanımlanabilir. Bu çerçevede menkul kıymetlerde söz konusu olan risk, beklenen getiri düzeyinin elde edilmesindeki belirsizliktir.⁴

Risk ve belirsizlik genellikle birbirleri ile karıştırılan veya eş anlamlı olarak kullanılan iki ayrı kavramdır. Riskte gelecekteki olaylara ait alternatif sonuçların olasılıkları bilindiği halde, belirsizlikte böyle bir olasılık dağılımından bahsetmek mümkün değildir.

Yatırımcıların karşı karşıya olduğu riski temelde iki bölümde inceleyebiliriz:

1) Sistemik Risk

Sistemik risk, kaçınılması mümkün olmayan menkul kıymetin bulunduğu finansal yapıdan kaynaklanan risktir. Sistemik riskin temel kaynakları ekonomik, politik ve sosyal değişimlerdir.

Sistemik risk unsurları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- i. Piyasa Riski
- ii. Faiz Oranı Riski
- iii. Satın Alma Gücü Riski

Piyasa riski, yatırımcıların gelecekteki beklentilerinden etkilenen, ulusal ve uluslararası piyasalardaki genel ekonomik eğilimlere dayanan risk çeşididir.

Faiz oranı riski, piyasa faiz oranlarındaki değişimler sonucu ortaya çıkar. Sabit getirili varlıkların daha çok etkilendiği faiz oranları, gelecekte beklenen nakit akımlarının beklenen değeri olarak hesaplanan, hisse senedi fiyatları için de sistemik bir risk çeşididir.

⁴Mustafa Özçam, "Varlık Fiyatlama Modelleri Aracılığıyla Dinamik Portföy Yönetimi," Ankara, 1997, s.9.

Satın alma gücü riski, enflasyon ve deflasyon ile ilgilidir. Eğer yatırım ertelenen tüketim olarak tanımlanırsa, enflasyon veya deflasyon oranları yatırımcıların gelecekte elde edecekleri mal ve hizmetlerin reel tutarlarını, dolayısıyla cari menkul kıymet fiyatlarını etkileyecektir. Piyasadaki genel fiyat düzeyi arttıkça hisse senedi performansı düşerken bu bir risk faktörü olarak ortaya çıkmaktadır.

2) Sistemik Olmayan Risk

Sistemik olmayan risk ise, menkul kıymetin ait olduğu işletmenin kendisinden veya bu işletmenin ait olduğu endüstriden kaynaklanan ve kaçınılması mümkün olan risk çeşididir. Sistemik olmayan risk unsurlarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- i. İş Riski
- ii. Finansal Risk
- iii. Likidite Riski
- iv. Yönetim Riski

İş riski, işletmenin faaliyet alanındaki nakit akışı belirsizliği ile ilgilidir. Faaliyet gelirlerinin dağılımı, satışların ve faaliyet kaldırıcının bir fonksiyonu olup, iş riskinin temel belirleyicileri satış hacmi ve üretim fonksiyonu olmaktadır.

Eğer faaliyet gösterilen alanda sabit varlık miktarının artması ile birlikte satışta yükseliyorsa, bu durumda karlılık azalacağı için hisse senedi fiyatı bu durumdan etkilenecektir.

Finansal risk, işletme faaliyetlerinin finansman şeklinden kaynaklanmaktadır. Eğer bir işletme öz kaynaklarının yardımıyla finansmanın yanı sıra borçlanmaya giderse, belli bir zaman aralığında sabit finansman giderlerine katlanmak zorundadır. Bu zaman aralığında işletme, gerekli beklenen getiriyi elde edemezse, temettü dağıtamayacağı gibi borçlarını da ödeyemeyebilir. Bu durum hisse senedi fiyatını etkileyeceği için bir risk unsuru olarak dikkate alınır.

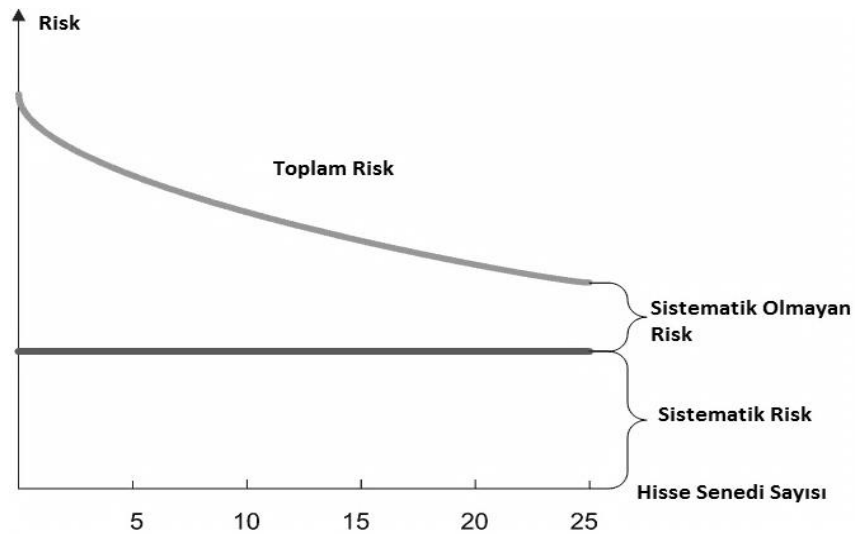
Likidite riski, yatırım araçlarının ikinci el piyasası ile ilgilidir. Hisse senedi piyasada fazla maliyete katlanmadan anlık olarak işlem görme imkanına sahip ise, bu durum hisse senedinin likiditesinin yüksek olduğunu gösterir.

Eğer bu şartlar sağlanmıyor ve ya ileride sağlanıp sağlanmayacağı belirsizlik taşıyor ise, yatırımcı likidite riski taşıyor demektir.

Yönetim riski, adından da anlaşılacağı üzere işletmenin yönetim kadrosu ve bu kadronun kararları doğrultusunda ortaya çıkan risk çeşididir. İşletmelerin zaman içerisinde karşılaşılabilecekleri fırsatları değerlendirebilecek güçlü bir yönetim kadrosu yoksa, beklenen getirilerde önemli azalmalar olabilir. Bu durum işletmeler için yönetim riskine bir örnektir.

Buna göre bir menkul kıymetin riski, sistematik ve sistematik olmayan risklerin toplamıdır. Sistematik olmayan risk menkul kıymetin çeşitlendirmesi yolu ile azaltıldığı halde, sistematik risk azaltılamaz. Bu durumda bir portföyün riskinin en az olduğu yer, sistematik olmayan riskinin sıfır olduğu ve yalnızca sistematik riskin olduğu noktadır.

Şekil 2-1'de görüldüğü gibi, sistematik olmayan risk sonsuzda, sistematik riske teğet olmaktadır. Bu durumda sadece sistematik riskin olduğu ve çeşitlendirmenin en iyi yapıldığı portföye ulaşılır.



Şekil 2-1.Sistematik ve Sistematik Olmayan Risk

Yatırımcı riskten kaçınamayacağı durumlarda riski yok sayarak tüm riski üstlenebileceği gibi, riski çeşitlendirmenin yollarını da aramayı tercih edebilir. Bununla birlikte riskten kaçınmak için dikkate alınan bir yaklaşım ise *fadadır*.

Fayda, belirsizlik halinde karar verme durumlarında elde edilen varlığın yarattığı tatmin düzeyi olarak tanımlanabilir. Faydanın ölçülebilir olması için elde edilmiş veya edilecek olan çıktıların kıyaslanabilir olması gerekmektedir.

Theory of Games and Economic Behavior adlı eserde von Neumann ve Morgenstern faydanın ölçülebilmesi için temel aksiyomlar ortaya koymuşlardır. İlerleyen zamanlar içerisinde araştırmacılar bu aksiyomları 3 temel başlık halinde ifade etmeye başlamışlardır.⁵

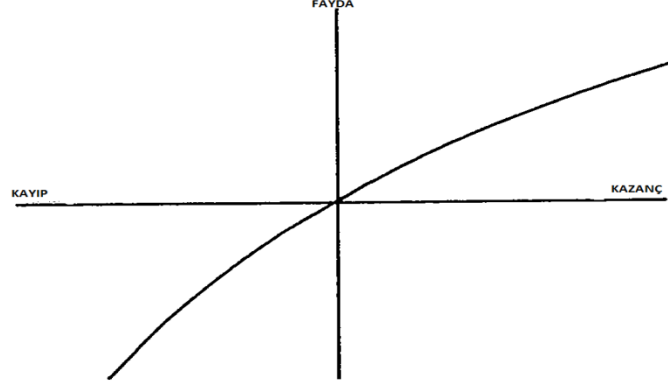
P,Q ve R gibi üç olay için aksiyomlar aşağıdaki gibidir:

- i. $P > Q$ veya $Q > P$ dir. P ve Q eşit oranda tercih edilme derecesine sahipse, $P \sim Q$ olup, buna *geçişme (transitive)* aksiyomu denir. Başka bir ifadeyle, $P > Q$ ve $Q > R$ ise, $P > R$ dir. Ayrıca, $P \sim Q$ ve $Q \sim R$ ise, $P \sim R$ olur.
- ii. Eğer $P > Q$ ise, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere, her R için $\lambda P + (1 - \lambda)R > \lambda Q + (1 - \lambda)R$ dir. Buna *independence (bağımsızlık)* aksiyomu adı verilir.
- iii. Bu aksiyom *fayda fonksiyonu* U ile ilgilidir. $P > Q$ için, $U(P) > U(Q)$ olur.

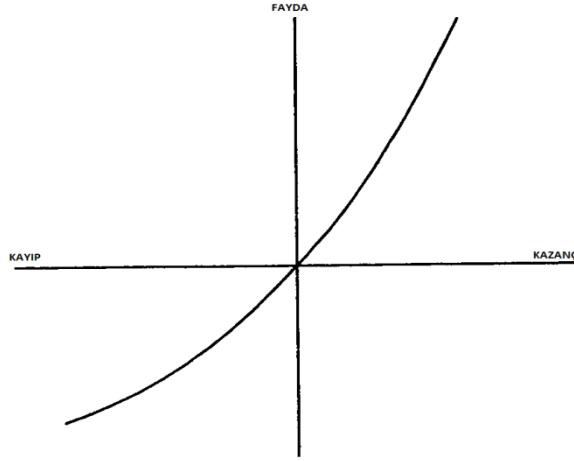
Eğer, U fayda fonksiyonu doğrusal ise, bu iki olayın fayda fonksiyonları arasında $U(\lambda P + (1 - \lambda)Q) = \lambda U(P) + (1 - \lambda)U(Q)$ ilişkisi vardır.

⁵David E. Bell, Peter H. Farquhar, "Perspectives on Utility Theory," **Operations Research**, C.34, No:1, 1991, s.180.

Şekil 2-2, 2-3 ve 2-4'de çeşitli tiplerdeki fayda fonksiyonları görülmektedir.⁶

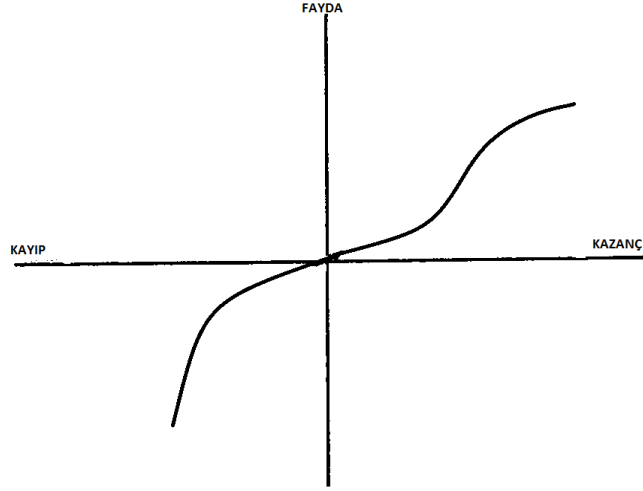


Şekil 2-2.Konkav Fayda Fonksiyonu



Şekil 2-3.Konveks Fayda Fonksiyonu

⁶Harry M. Markowitz, **Portfolio Selection** (Doktora Tezi), 1955, s.26.



Şekil 2-4. Konkav-Konveks Fayda Fonksiyonu

Belirsizlik halinde karar verme problemlerinde *Tablo 2-1*'deki fayda matrisi dikkate alınır.

	O_1	...	O_j	...	O_n
d_1	U_{11}		U_{1j}		U_{1n}
\vdots					
d_i	U_{i1}		U_{ij}		U_{in}
\vdots					
d_m	U_{m1}		U_{mj}		U_{mn}

Tablo 2-1. Fayda Matrisi

Bu matrise göre, d_1 kararının alınması durumunda O_1 olayının sonucu için U_{11} değeri bize faydayı göstermektedir. Burada herhangi bir, d_i kararı için elde edilen O_j olayına karşılık gelen U_{ij} değeri herhangi bir kayıp ya da kazancı ifade etmeyip sadece bir değer olarak faydayı ölçer. Eğer, O_j olayına bağlı olarak oluşan fayda için, bir olasılık söz konusu ise, bu takdirde faydanın beklenen değeri, $U = p_1u_{i1} + p_2u_{i2} + \dots + p_nu_{in}$ olarak hesaplanır.⁷

Burada, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ dir.

⁷A.e., s.34.

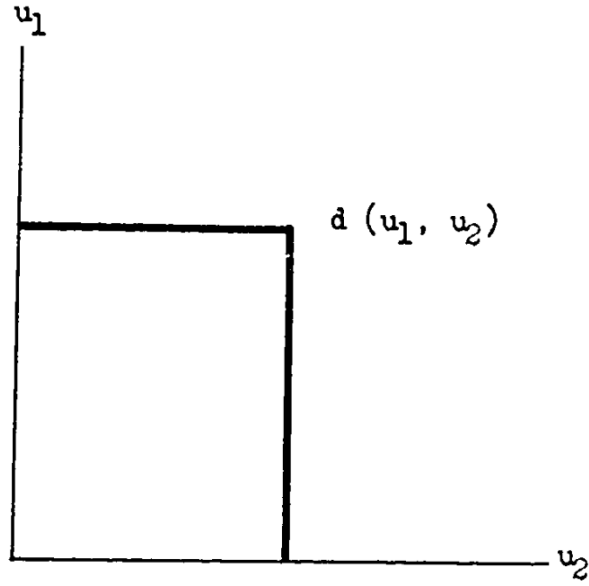
Fakat olasılık dağılımının bilinmediği durumlarda ise, çeşitli alternatif yöntemler önerilmiştir. Bunlar sırasıyla:

- i. Tam eşlik kuralları
- ii. Minimaks risk
- iii. Kişisel olasılık inançları

Tam eşlik kuralına göre elde edilecek olan O_j sonucu tam olarak sadece yatırımcı tarafından bilinir ve genel geçer tüm yaklaşımlar bu kurala göre reddedilir. Nicel olarak bu kurala göre bütün olasılık dağılımı ve sonuçları yatırımcı tarafından bilinmekte olup fayda bu değerlere göre hesap edilmektedir.

Minimaks risk, kötülerin içinden en az kötüyü seçmek olarak tanımlanabilir. Bir yatırımcı için, ₺1.000'lık yatırımı karşılığında iki adet alternatif önerilmektedir. Birinci alternatif, normal piyasa şartlarında %100'lük bir kar, piyasa şartlarının iyi gitmemesi durumunda %20'lik bir zarar olsun. İkinci alternatif ise, %19,9'luk zarar olsun. Görüldüğü gibi ilk alternatif ikincisinden daima iyidir. Ve böylece minimaks kuralı da işletilmiş olur.

Kişisel olasılık inançlarına göre ise, alternatifler arasında hiçbir üstünlüğün olmadığı ve tüm ihtimallerin birbirine eş olduğu sayılır. Böyle geniş ve esnek bir hareket alanı içerisinde, herhangi bir O_j için herhangi bir p_j olasılığına kişisel inançları doğrultusunda karar verir. O_1 ve O_2 gibi sadece iki mümkün getiri değeri için, herhangi bir d_i kararı ile elde edilen fayda u_{i1} ve u_{i2} Şekil 2-5'deki gibi olur.



Şekil 2-5.İki Alternatifli Kararın Karakteristiği

Eğer burada, p_1 ve p_2 gibi olasılık değerine sahip olunursa bu takdirde, $U = p_1u_1 + p_2u_2$ olarak faydanın maksimize edilmesine çalışılır. Burada, $p_1 + p_2 = 1$ ve $p_1, p_2 \geq 0$ olur. Bu yaklaşım, ikiden fazla O_j değeri olduğu durumda da geçerli olup beklenen faydayı maksimize etmeye çalışır.

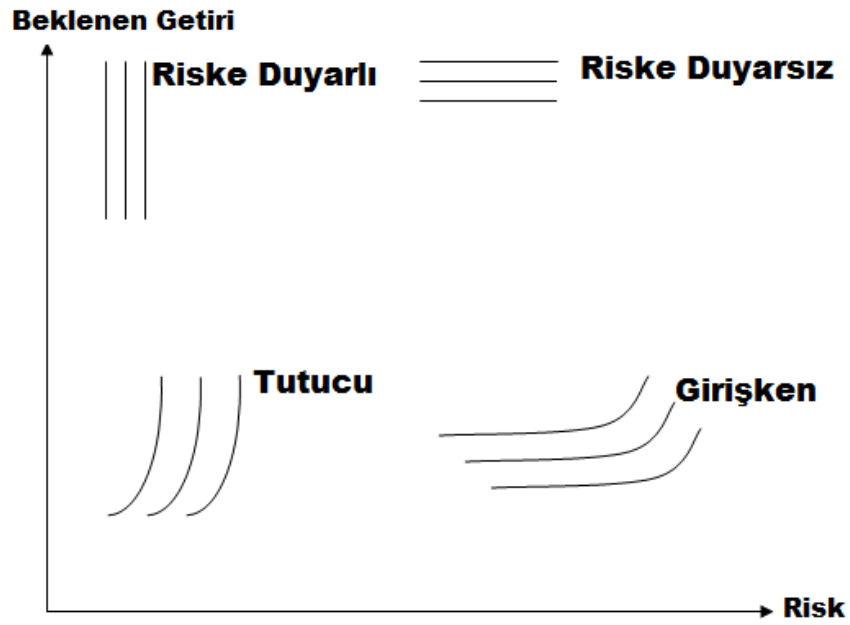
Bir yatırımın fayda fonksiyonu $U(x)$ ve bu fonksiyonun birinci türevi $U'(x)$, ikinci türevi $U''(x)$ olmak üzere, $R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ ifadesi *riskten kaçınma katsayısı* olarak bilinir. Bir birim riske katlanma sonucunda elde edilecek beklenen getiriyi temsil eden riskten kaçınma katsayısı, yatırımcının risk tercihine göre değişiklik gösterir. Riskten kaçınma katsayısı genellikle λ ile gösterilir.

Riskten kaçınma katsayısı ile ilgili bir diğer temel kavram ise, kayıtsızlık eğrileridir. Kayıtsızlık eğrileri, yatırımcının bir birim riske katlanması durumunda elde edeceği beklenen getiri miktarını göstermektedir.

Yatırımcılar risk tercihlerine göre:

- i. Riske tamamen duyarlı
- ii. Tutucu
- iii. Girişken
- iv. Riske tamamen duyarsız

olarak sınıflandırılabilirler. Şekil 2-6’da kayıtsızlık eğrileri görülmektedir.



Şekil 2-6. Kayıtsızlık Eğrileri

Kayıtsızlık eğrilerinin eğimleri incelenecek olursa, riske karşı tamamen duyarlı olan bir yatırımcı için, eğri beklenen getiri eksenine paralel, riske tamamen duyarsız olan bir yatırımcı için, eğri risk eksenine paralel olarak hareket eder.

Aynı şekilde tutucu ve girişken iki yatırımcı için eğrilerin eğimlerine bakıldığında, girişken bir yatırımcının kayıtsızlık eğrisinin eğimi, tutucu bir yatırımcıya göre daha küçüktür. Buradan tutucu bir yatırımcının bir birimlik risk artışında beklediği getirinin girişken bir yatırımcıdan daha fazla olacağı sonucuna varılır.

Bir hisse senedinin belirli bir zaman periyodundaki getirisi (2.1) eşitliğinde olduğu gibi hesaplanır.

$$R_{i,t} = \frac{p_i^t - p_i^{t-1}}{p_i^{t-1}} \quad (2.1)$$

$R_{i,t}$: **i**. hisse senedinin **t** periyodundaki getirisi

p_i^{t-1} : **i**. hisse senedinin **t-1** anındaki fiyatı

p_i^t : **i**. hisse senedinin **t** anındaki fiyatı

olup, $d_{i,t}$: **i**. hisse senedinin **t** periyodunda yatırımcısına ödediği temettü olmak üzere, (2.1) eşitliğine $d_{i,t}$ ilave edilerek getiri için (2.2) deki eşitliğe ulaşılır.

$$R_{i,t} = \frac{p_i^t - p_i^{t-1} + d_{i,t}}{p_i^{t-1}} \quad (2.2)$$

Markowitz'in ortalama varyans modeline göre beklenen getiri ⁸ (2.3) eşitliğinde olduğu gibidir.

$$E(R_i) = E\left(\sum_{j=1}^n R_{ij} p_j\right) = \sum_{j=1}^n E(R_{ij}) p_j \quad (2.3)$$

(2.3) eşitliğinde;

$E(R_i)$ = **i**. varlığın beklenen getiri oranı

R_{ij} : **i**. varlığın **j** durumundaki getiri oranı

p_j : **j** durumunun gerçekleşme olasılığı

dır.

⁸Hiroshi Konno, Hiroaki Yamazaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market," **Management Science**, C.37, No:5, May, 1991, s.520.

Gerçekleşmiş getiriler üzerinden hesaplandığında menkul kıymetin ortalama getirisi (2.4) eşitliğinde olduğu gibidir.

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.4)$$

Bir menkul kıymetin riski, menkul kıymetin beklenen getirisinden sapma olarak tanımlanır ve standart sapma ile ölçülür. (2.5) eşitliği bir menkul kıymetin riskinin nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

$$\sigma_i = \sqrt{E \left[\left\{ \sum_{j=1}^n R_{ij} p_j - E \left(\sum_{j=1}^n R_{ij} p_j \right) \right\}^2 \right]} \quad (2.5)$$

(2.5) eşitliğini, p_j ortak terim parantezine alırsak ifade (2.6) eşitliğine dönüşür.

$$\sigma_i = \sqrt{E \left[p_j \left\{ \sum_{j=1}^n R_{ij} - E \left(\sum_{j=1}^n R_{ij} \right) \right\}^2 \right]} \quad (2.6)$$

Her bir durumun gerçekleşme olasılığının eşit olması durumunda (2.6) eşitliğine $\frac{1}{n}$ çarpanı eklenerek (2.7) eşitliğine ulaşılır.

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n} E \left[\left\{ \sum_{j=1}^n R_{ij} - E \left(\sum_{j=1}^n R_{ij} \right) \right\}^2 \right]} \quad (2.7)$$

Bu eşitliklerde;

σ_i : **i.** varlığın standart sapması

$E(R_i)$ = **i.** varlığın beklenen getiri oranı

R_{ij} : **i.** varlığın **j** durumundaki getiri oranı

p_j : **j** durumunun gerçekleşme olasılığı

olup, beklenen getirinin yüksek olması ile birlikte standart sapma değerinin de küçük olması beklenir.

Ayrıca sapmanın bir diğer ölçüsü olan varyans ise, (2.6) ve (2.7) ifadelerin karelerinin alınması ile hesap edilebilir.

Bir portföyün beklenen getirisi (2.8) eşitliği ile hesaplanır.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \quad (2.8)$$

$E(R_p)$: Portföyün beklenen getirisi

x_i : **i.** varlığın portföydeki ağırlığı

$E(R_i)$: **i.** varlığın beklenen getirisi

olmak üzere, (2.8) eşitliğinde görüleceği gibi, portföyün beklenen getirisi portföyü oluşturan varlıkların beklenen getiri oranları ve portföydeki ağırlıklarının ağırlıklı ortalamasıdır.

Şekil 2-1'deki sistematik ve sistematik olmayan risk kavramlarından bahsederken bir portföy çeşitlendirmesi ile beklenen getirisi yüksek ve riski düşük portföyler elde edebileceğimizi ifade etmiştik. İki ya da daha fazla menkul kıymetin getirilerinin birbirleri ile olan etkileşimleri *kovaryans* yardımıyla hesaplanır. Buna göre menkul kıymet getirileri arasındaki kovaryans (2.9) daki eşitlik yardımıyla hesaplanır.

$$\sigma_{i,k} = \sum_{j=1}^n p_j [(R_{ij} - E(R_i))(R_{kj} - E(R_k))] \quad (2.9)$$

Bu eşitlikte:

$\sigma_{i,k}$: **i.** ve **k.** varlıkların beklenen getirileri arasındaki kovaryans

p_j : **j** durumunun gerçekleşme olasılığı

R_{ij} : **j** durumunda **i.** varlığın getiri oranı

$E(R_i)$: **i.** varlığın beklenen getiri oranı

R_{kj} : **j** durumunda **k.** varlığın getiri oranı

$E(R_k)$: **k.** varlığın beklenen getiri oranı

dır.

Her bir durumun gerçekleşme olasılığı eşit kabul edilirse (2.9) eşitliğine $\frac{1}{n}$ çarpanı eklenerek (2.10) eşitliğine ulaşılır.

$$\sigma_{i,k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(R_{ij} - E(R_i))(R_{kj} - E(R_k))] \quad (2.10)$$

Bu durumda varlıkların getiri oranları arasındaki kovaryans dikkate alındığında bir portföyün riski (2.11) eşitliğindeki gibi olur.

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \sigma_{i,k}} \quad (2.11)$$

Bu eşitlikte,

σ_p : Portföyün standart sapması(riski)

$\sigma_{i,k}$: **i.** ve **k.** varlıkların beklenen getirileri arasındaki kovaryans

x_i : **i.** varlığın portföydeki ağırlığı

x_k : **k.** varlığın portföydeki ağırlığı

olup, bu ifadenin karesi (2.12) deki portföyün varyansını vermektedir.

$$\sigma_p^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \sigma_{i,k}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_i x_k \sigma_{i,k} \quad (2.12)$$

2.3. Etkin Sınır ve Üzerindeki Portföyler

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ portföyü oluşturan hisse senetlerinin $n \times 1$ boyutlu sütun vektörü, \mathbf{c} ,

$m \times n$ boyutlu matris ve \mathbf{b} , $m \times 1$ boyutlu sütun vektör, $\mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ kısıtları

altında, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ beklenen getirilerin oluşturduğu $n \times 1$ boyutlu sütun vektör ve

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$ $n \times n$ boyutlu pozitif definit kovaryans matrisi olmak üzere,

herhangi bir portföyün beklenen getirisi $\mathbf{E} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}$ ve varyansı $\mathbf{V} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ olmak üzere, bir $\mathbf{E}^0 = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x}^0$ ve $\mathbf{V} = \mathbf{x}^{0T} \mathbf{A} \mathbf{x}^0$ kombinasyonunu oluşturalım.

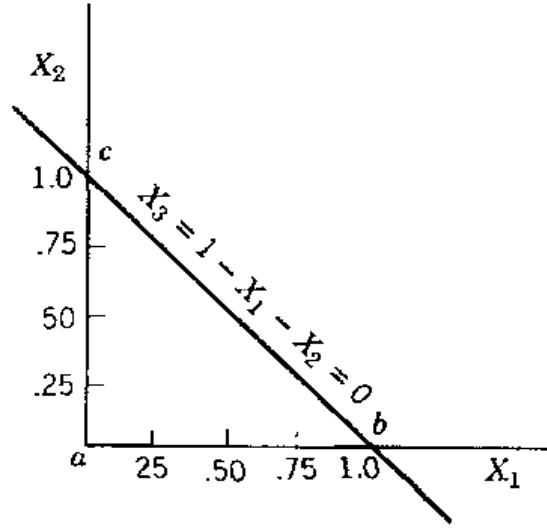
Eğer, bu kombinasyondan başka bir $\mathbf{E}^1 > \mathbf{E}^0$ ve $\mathbf{V}^1 \leq \mathbf{V}^0$ veya $\mathbf{E}^1 \geq \mathbf{E}^0$ ve $\mathbf{V}^1 < \mathbf{V}^0$ şeklinde bir kombinasyon yoksa, $(\mathbf{E}^0, \mathbf{V}^0)$ etkin sınır üzerinde yer alan portföyü temsil eder.⁹

Şimdi yukarıda belirttiğimiz bu ifadeyi üç adet hisse senedinden oluşturulmuş bir portföy için uygulayalım.

X_1, X_2 ve X_3 üç adet menkul kıymetten meydana gelmiş bir portföyün içindeki oranları göstermek üzere sırasıyla, **0.75**, **0.25** ve **0** olsun.

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$ olmak üzere; X_3 'ü X_1 ve X_2 cinsinden, $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ olarak yazabiliriz. $X_1, X_2, X_3 \geq 0$ olmak üzere, yatay eksen X_1 ve düşey eksen X_2 olmak üzere X_1, X_2 ve X_3 geometrik olarak Şekil 2-7'deki gibi ifade edilir.

⁹Markowitz, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, s.309-310.



Şekil 2-7.Portföyün Geometrik Gösterimi

Şekil 2-7’de X_1 ekseninin altında herhangi bir nokta seçilirse, bu takdirde X_2 negatif bir değer alır. Buradan elde edilen portföy içerisinde yer alan X_2 değeri $X_2 \geq 0$ şartını sağlayamayacağı için elde edilen portföy, uygun bir portföy değildir.

Aynı şekilde, X_2 ekseninin solunda bir nokta seçilirse, bu takdirde X_1 negatif bir değer alır. Buradan elde edilen portföy içerisinde yer alan X_1 değeri, $X_1 \geq 0$ şartını sağlayamayacağı için uygun bir portföy değildir.

Ayrıca, $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ düzleminin altından bir nokta seçilirse buradaki portföy ise, $X_3 \geq 0$ şartını sağlayamayacağı için uygun bir portföy olmayacaktır. Buradaki uygun set sadece abc üçgeni ile ifade edilen bölgenin içerisinde olacaktır.

Şekil 2-7’de gösterilen üç varlığın beklenen değerleri (2.13) deki gibi olsun.

$$E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + X_3\mu_3 \quad (2.13)$$

(2.13) de $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ yazarsak (2.14) eşitliğini elde ederiz.

$$E = X_1\mu_1 + X_2\mu_2 + (1 - X_1 - X_2)\mu_3 \quad (2.14)$$

(2.14) eşitliğindeki parantez içerisindeki ifadeyi açarsak (2.15) eşitliğini elde ederiz.

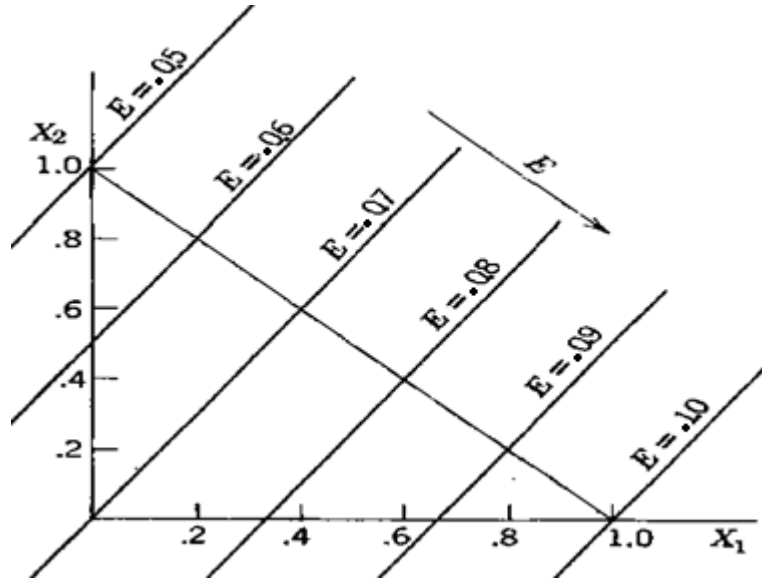
$$E = X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3 \quad (2.15)$$

$\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.05$, $\mu_3 = 0.07$ olmak üzere, portföyün beklenen değeri $E = 0.03X_1 - 0.02X_2 + 0.07$ olur.¹⁰

Beklenen değer $E = 0.08$ olmak üzere, $0.01 = 0.03X_1 - 0.02X_2$ ifadesinde $(X_1, X_2) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ve $(X_1, X_2) = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$ noktalarından geçen doğru, $E = 0.08$ değeri için, eş ortalama (iso-mean line) doğrusudur.

$(X_1, X_2) = (1, 0)$ noktası için beklenen değer **E = 0.1** olurken, $(X_1, X_2) = (0, 1)$ noktası için beklenen değer **E = 0.05** olur.

Şekil 2-8'de eş ortalama doğruları görülmektedir.



Şekil 2-8.Eş Ortalama Doğruları

¹⁰A.e., s.133.

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ olduğu durumda ise, doğrular E nin artış yönünde olacak şekilde birbirlerine paralel hareket ederler.

Böyle bir durumda bütün beklenen getiriler, birbirlerine eşit olduğu için sadece en küçük varyans değerine sahip portföy etkin sınır üzerindeki portföydür.

Yukarıda beklenen getirilerini hesapladığımız X_1, X_2 ve X_3 menkul kıymetlerinin varyansları (2.16) daki gibidir.

$$V = X_1^2\sigma_{11} + X_2^2\sigma_{22} + X_3^2\sigma_{33} + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1X_3\sigma_{13} + 2X_2X_3\sigma_{23} \quad (2.16)$$

(2.16) da $X_3 = 1 - X_1 - X_2$ yazarsak (2.17) eşitliğini elde ederiz.

$$V = X_1^2\sigma_{11} + X_2^2\sigma_{22} + \sigma_{33}(1 - X_1 - X_2)^2 + 2X_1X_2\sigma_{12} + 2X_1(1 - X_1 - X_2)\sigma_{13} + 2X_2(1 - X_1 - X_2)\sigma_{23} \quad (2.17)$$

(2.17) de gerekli düzenlemeler yapılarak (2.18) eşitliğine ulaşırız.

$$V = X_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \quad (2.18)$$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0.01$, $\sigma_{33} = 0.04$, $\sigma_{12} = 0.005$ ve $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ olması durumunda üç menkul kıymet için portföyün varyansı (2.19) denklemindeki gibidir.

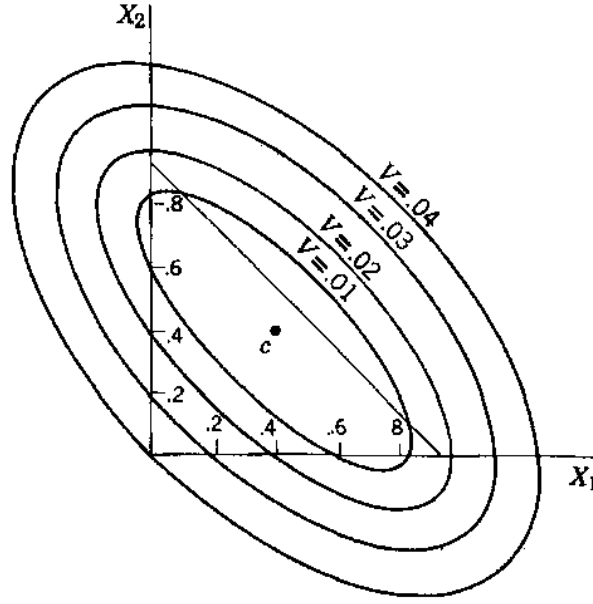
$$V = 0.05X_1^2 + 0.05X_2^2 + 0.09X_1X_2 - 0.08X_1 - 0.08X_2 + 0.04 \quad (2.19)$$

(2.19) denkleminde $V = 0.01$ yazarsak (2.20) denkleminde ulaşırız.

$$0.05X_1^2 + 0.05X_2^2 + 0.09X_1X_2 - 0.08X_1 - 0.08X_2 + 0.03 = 0 \quad (2.20)$$

(2.20) denkleminin çözüm değerleri koordinat ekseninde bir elips oluşturur ve bu elipse eş varyans (*iso-variance*) eğrisi denir.

Şekil 2-9'da yukarıdaki örneğimiz için çeşitli varyans değerleri için çizilmiş olan eş varyans eğrileri görülmektedir.



Şekil 2-9.Eş Varyans Eğrileri

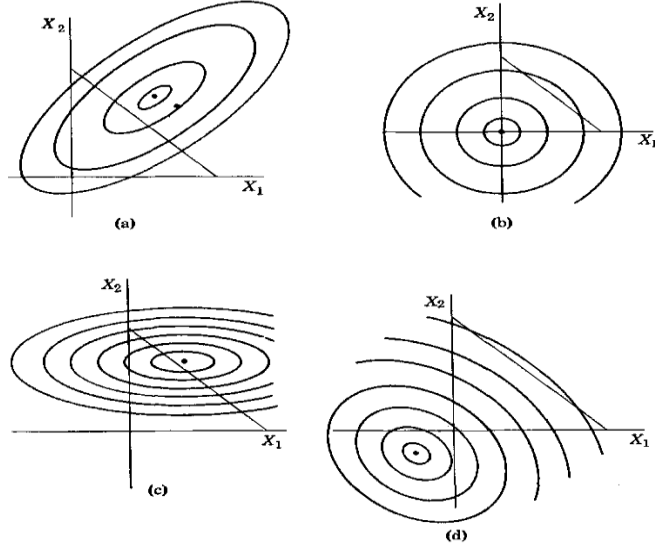
Şekil 2-9'da **c** ile işaretlenen nokta eş varyans eğrilerinin merkezidir. Bu noktaya karşılık gelen, X_1 ve X_2 değerlerinin oluşturduğu varyans değerinden daha düşük değerli bir varyans değeri için eş varyans eğrisi çizilmesi mümkün değildir. Bu durumda **c** den daha küçük varyans değerine sahip bir portföy oluşturulması mümkün değildir.

Ayrıca **c** den büyük her değer için eş varyans eğrileri çizilebilmesine rağmen, varyans arttıkça, eğrilerde genişlemeye başlar. Böyle bir durumda eş varyans eğrileri elips formatından uzaklaşır.

Bir eş varyans eğrisinin elips formatından uzaklaşması için, aşağıdaki şartların bir yada bir kaç tanesinin bir arada bulunması gerekir.

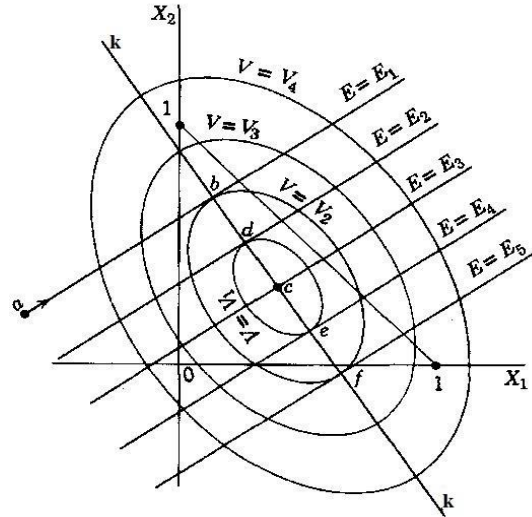
- i. $\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33} = 0$ ve $\text{var}(X_1 - X_3) = 0$
- ii. $\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} = 0$ ve $\text{var}(X_2 - X_3) = 0$
- iii. $(X_1 - X_3)$ ve $(X_2 - X_3)$ arasındaki korelasyon 1 veya -1

Şekil 2-10'da çeşitli tiplerdeki eş varyans eğrileri görülmektedir.



Şekil 2-10.Çeşitli Tiplerdeki Eş Varyans Eğrileri

Eş varyans eğrileri ve eş varyans doğrularını aynı düzlemde birleştirirsek Şekil 2-11'de çizilmiş olan kritik doğruya ulaşırız.



Şekil 2-11.Kritik Doğru

Şekil 2-11'de beklenen değerler E ve varyanslar V olmak üzere a noktasından başlayan $E = E_1$ beklenen değerli doğrunun üzerindeki tüm noktalarda $E = E_1$ dir. Bu doğru varyansları sırasıyla, V_2, V_3 ve V_4 olan eğrilerden geçer. Sadece varyansı V_2 olan eğriye teğet olduğu b noktası Şekil 2-11'de açıkça görülmektedir.

Bunun anlamı aynı beklenen değer için, en küçük varyansa sahip olan eğrinin V_2 varyanslı eğri olduğudur.

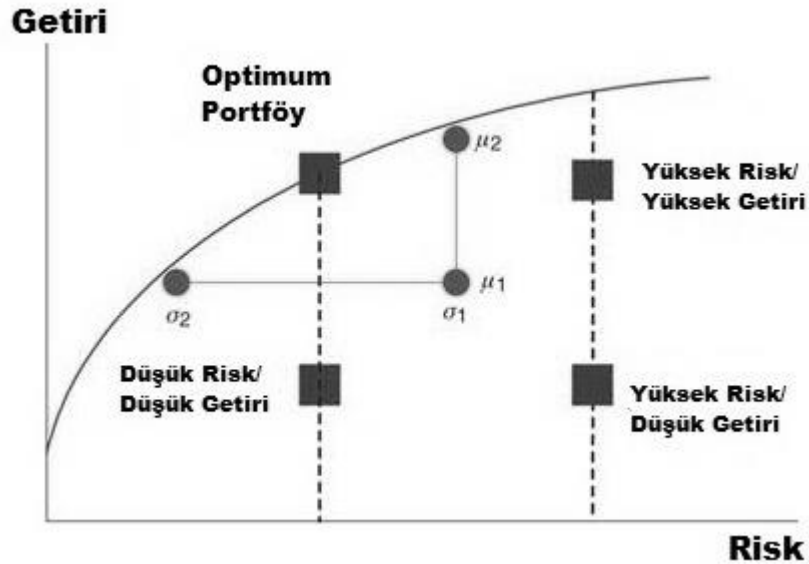
Yine aynı şekilden görüleceği üzere, $E = E_2$ için **d**, $E = E_3$ için **c**, $E = E_4$ için **e** ve portföyün mümkün olması ya da olmaması dikkate alınmadan bakıldığında $E = E_5$ için **f** noktası en küçük varyansa sahip noktalardır.

Eş varyans eğrilerinin merkezi olan **c** noktasından geçen **k** doğrusu ise *kritik doğru* olarak adlandırılır.

Bu doğru, mümkün portföyler setinden bazen geçer bazen geçmeyebilir ancak aynı beklenen değere sahip portföyler arasında en az varyansa sahip olanı bu doğru üzerinde yer alır ya da başka bir ifade ile aynı varyans değerine sahip portföyler arasından beklenen değeri en yüksek olanı tercih edilir.¹¹

Bütün bu açıklamalar ışığında (E, V) düzlemine aktarılan portföyler *etkin sınır* üzerinde yer alır.

Şekil 2-12'de etkin sınır eğrisi görülmektedir.

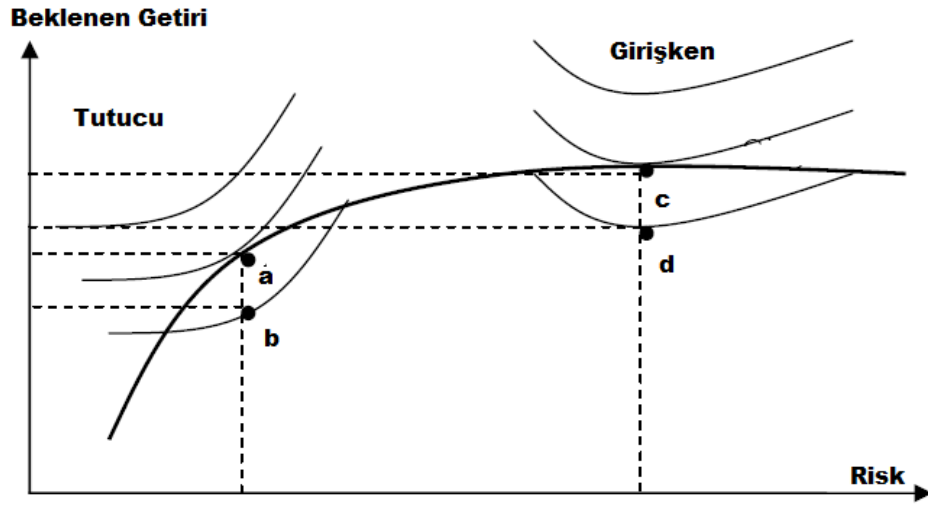


Şekil 2-12. Etkin Sınır Eğrisi

¹¹A.e, s.135-139.

Bu portföylerin hangisinin tercih edileceği ise, yatırımcının kayıtsızlık eğrileri ile ilgilidir.

Yatırımcının tutumuna göre, kayıtsızlık eğrilerinin etkin sınıra teğet olduğu noktada optimal portföy oluşur. Şekil 2-13’de yatırımcı tercihinine göre oluşturulmuş etkin sınır ve kayıtsızlık eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 2-13.Etkin Sınır ve Kayıtsızlık Eğrileri

Şekil 2-13’de görüleceği gibi tutucu bir yatırımcı için, **a** ve **b** gibi aynı risk düzeyine sahip iki adet portföyden kayıtsızlık eğrisine teğet olan ve getirisi yüksek olan **a** portföyü tercih edilecektir. Girişken bir yatırımcı ise, risk düzeyi daha yüksek olan **c** ve **d** portföyleri içinden getirisi daha yüksek olan **c** portföyü seçilecektir.

3. LAGRANGE GEVŞETMESİ

Tümleşik optimizasyon (combinatorial optimization) problemleri genel olarak iki tipte karşımıza çıkar. Bunlardan birincisi, az sayıda kolayca çözülebilen alt problemlere ayrıştırılabilen ve polinomiyal olarak değişim gösteren bir zaman sınırı içinde çözülebilen problemlerdir. İkinci tip problemler ise, çok büyük ölçekli ve çözüm için üssel bir değişim gösteren zaman sınırı içerisinde bütün bilinen algoritmalara ihtiyaç duyan çözümü zor problemlerdir.¹

1970’li yılların ilk yarısında, Hunt-Wesson Foods için bir dağıtım sistemi dizayn etmek üzere, Arthur M. Geoffrion ve Glenn Graves, Benders Ayrıştırması yardımıyla Karma Tamsayılı Doğrusal Programlamayı kullanarak, Hunt-Wesson Foods dağıtım sistemi bir çözüm geliştirdiler. Daha sonraki zamanlarda Graves ceza terimlerini dikkate alarak Doğrusal Programlama temelli Dal-Sınır Algoritması yardımı ile yeni bir çözüm geliştirdi. Bu çözüm, Geoffrion tarafından Lagrange Çarpanları yardımı ile kesikli optimizasyon problemlerinin çözümü için uygulanan algoritmaya ve doğrusal olmayan programlama içerisindeki dualite teorisine çok benzemektedir.²

Genel anlamda bir optimizasyon probleminin kısıtlarından herhangi birinin, Lagrange çarpanları yardımıyla amaç denklemine eklenmesi sonucunda elde edilen yeni modele, Lagrange Gevşetmesi ile elde edilmiş model adı verilir. Bu modelin çözüm kümesi ve portföy seçimi problemine uygulanmasından önce nasıl elde edildiğini ifade etmek yararlı olacaktır.

¹ Marshall L. Fischer, “The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems,” **Management Science**, C.27, No:1, 1986, s.1.

² A.M. Geoffrion, “Lagrangian Relaxation for Integer Programming,” **50 Years of Integer Programming 1958-2008**, Ed. By M. Jünger et al., Berlin, Springer-Verlag, 2010, s.243.

Tamsayı Doğrusal Programlama probleminin en genel hali aşağıdaki gibidir.³

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq & \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \geq & \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \in & \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (3.1)$$

olmak üzere; $\mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ ve \mathbf{d} sırasıyla, $1 \times n$, $n \times 1$, $m \times 1$ ve $k \times 1$ boyutlu vektörler olup, \mathbf{A} ve \mathbf{B} ise, sırasıyla $m \times n$ ve $k \times n$ boyutlu matrislerdir. (3.1) deki modelde yer alan ilk kısıt, negatif olmayan bir λ vektörü ile çarpılarak (3.1) deki modelin amaç denklemine eklenirse (3.2) deki model elde edilir.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \geq & \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \in & \mathbb{Z}^+ \\ \lambda \geq & \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2) modelinde yer alan λ vektörü *Lagrange Çarpanları* olarak adlandırılır. (3.1) modelini P_{\min} ve (3.2) modelini RP_{\min} olarak tanımlayalım. RP_{\min} , P_{\min} 'in Lagrange çarpanı ile gevşetilmiş hali olarak karşımıza çıkar. Buradan aşağıdaki sonuçlara varılır:⁴

- i. RP_{\min} 'in mümkün çözüm setleri, P_{\min} 'in mümkün çözüm setlerini kapsar.
- ii. Herhangi bir \mathbf{x} değeri için bu iki modelin amaç fonksiyonu değerleri arasında, $RP_{\min} \leq P_{\min}$ ilişkisi vardır.

³A.M. Geoffrion, "Lagrangian Relaxation for Integer Programming," **Mathematical Programming Study 2**, 1974, s.82.

⁴Monique Guignard, "Lagrangian Relaxation," **Sociedad de Estadística e Investigación Operativa**, C.11, No:2, 2003, s.154.

Eğer (3.1) modeli bir maksimizasyon problemi olursa bu takdirde gevşetilmiş olan model ile ana model arasında ilişki için aşağıdaki sonuçlara varılır:

- i. RP_{\max} 'in mümkün çözüm setleri, P_{\max} 'in mümkün çözüm setlerini kapsar.
- ii. Herhangi bir \mathbf{x} değeri için bu iki modelin amaç fonksiyonu değerleri arasında, $RP_{\max} \geq P_{\max}$ ilişkisi vardır.

Şimdi (3.1)'deki modelimizin birinci kısıtını eşitlik, ikinci kısıtını küçük eşit olarak ifade edelim. Bu takdirde (3.1) modeli aşağıdaki (3.3) modeline dönüşecektir.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3) deki eşitlik kısıtı, (3.4) modelinde olduğu gibi eşitsizlik halinde iki kısıt olarak yazılır.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & -\mathbf{A}\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\
 & \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ olmak üzere (3.4) modeli aşağıdaki (3.5) halini alır.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mathbf{v}(-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\
 & \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^+
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$\lambda = \mu - \nu$ olmak üzere model (3.6) ifadesine dönüşür.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \leq & \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \in & \mathbb{Z}^+ \\ \lambda \in & \mathfrak{R} \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6) modelinde λ nın negatif olmama şartı yoktur ve *reel sayılar* kümesinin bir elemanı olarak tanımlanabilir.⁵

3.1. Mümkün Lagrange Çözümü ve Geometrik Gösterimi

(3.1) modelindeki kısıtları \leq olarak yazarsak (3.7) modeline ulaşırız.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \leq & \mathbf{d} \\ \mathbf{x} \in & X \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) modelinde X ; \mathbf{x} için işaret ve tamlık kısıtlamaları içeren bir kümedir. (3.7) modelinde birinci kısıtın gevşetilmesi ile (3.8) deki modele ulaşırız.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{B}\mathbf{x} \leq & \mathbf{d} \\ \lambda \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \in & X \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8) deki modelin çözümünden elde edilen $\mathbf{x}(\lambda)$ noktası, (3.8) modeli için optimal çözüm noktası olup, aynı zamanda da *Lagrangian Çözüm* değerleri olarak adlandırılırlar.

⁵A.e., s.156.

(3.8) modelinin optimal çözüm değeri $\mathbf{cx}(\lambda) + \lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}]$ ve $\mathbf{cx}(\lambda)$ arasında değişirken,

- i. $\mathbf{cx}(\lambda)$ optimal değer olursa, (3.7) modeli için bir *üst sınır*,
- ii. $\mathbf{cx}(\lambda) + \lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}]$ optimal değer olursa (3.7) modeli için bir *alt sınır*dir.

Karşıt dolgusallık (complementary slackness) kurallarına göre, optimal halde $\lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}] = 0$ olur ki, bu durumda $\mathbf{cx}(\lambda) + \lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}] = \mathbf{cx}(\lambda)$ dir.

Böylece $\mathbf{x}(\lambda)$ değeri, (3.7) için bir optimal çözüm değeridir.

Bu açıklamaların ışığında, (3.7) modelini P_{\min} ve (3.8) modelini RP_{\min} olarak ifade edersek aşağıdaki sonuçlara ulaşırız.⁶

- i. Eğer, $\mathbf{x}(\lambda)$ herhangi bir $\lambda \geq \mathbf{0}$ değeri için, RP_{\min} için optimal bir çözüm ise, $\mathbf{cx}(\lambda) + \lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}] \leq P_{\min}$ dir.
- ii. Eğer, $\mathbf{x}(\lambda)$ noktası P_{\min} için mümkün bir çözüm ise, bu takdirde $\mathbf{cx}(\lambda) + \lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}] \leq P_{\min} \leq \mathbf{cx}(\lambda)$ dir.
- iii. Eğer, $\lambda[\mathbf{Ax}(\lambda) - \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ ise, $\mathbf{x}(\lambda)$ noktası, P_{\min} için bir optimal çözüm olup, $P_{\min} = \mathbf{cx}(\lambda)$ olur.

(3.7) modelindeki kısıtlardan birini eşitlik kısıtı halinde yazarsak bu takdirde (3.9) modeline ulaşırız.

$$\begin{aligned}
 &\min \mathbf{cx} \\
 &\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 &\mathbf{Bx} \leq \mathbf{d} \\
 &\mathbf{x} \in X
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

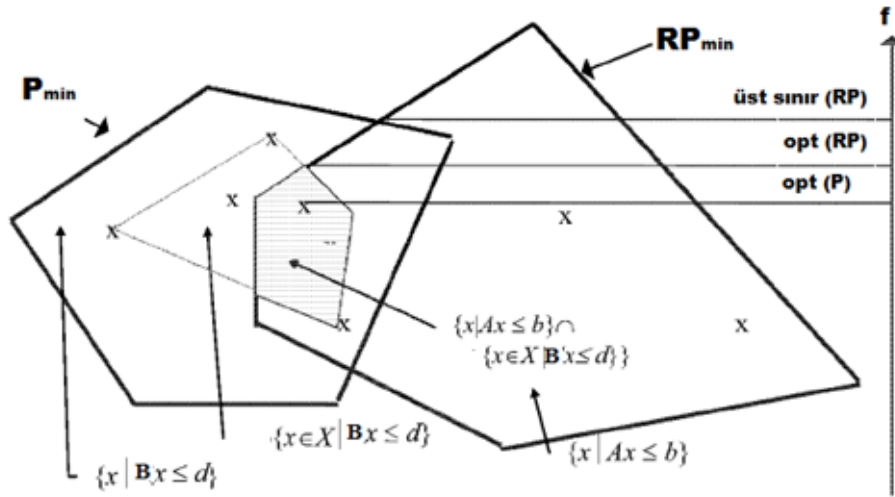
⁶A.e., s.157.

(3.9) modelinde olduğu gibi eşitlik kısıtı içeren bir model olması durumunda, $\mathbf{x}(\lambda)$ (3.9) modeli için bir mümkün çözüm ise, *karşıt dolgusallık* kurallarına göre, $P_{\min} = \mathbf{c}\mathbf{x}(\lambda)$ için $\mathbf{x}(\lambda)$ noktası bir optimal çözümdür.

Şekil 3-1'de görüleceği gibi, (3.7) modelinde gevşetilmemiş olan, $\mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{d}$ kısıtı, $\mathbf{x} \in X$ olacak şekilde bir şarta bağlı olarak tanımlanırsa bu takdirde,

- Bu iki kısıtın kesişimlerinin oluşturduğu bölgenin içerisinde orijinal model için optimal bir nokta,
- Gevşetilmiş haldeki modelin, bu kısıt kümesinin köşe noktalarının herhangi birinde gevşetilmiş model için optimal bir nokta,
- Eğer bu gevşetilmiş model için, bir tam sayı şartı varsa bu takdirde de çözüm değeri için bir üst sınırdan bahsedilir.

Aşağıdaki şekilde Lagrange Gevşetmesi ile elde edilen çözüm değerleri gösterilmektedir.



Şekil 3-1. Lagrange Gevşetmesi ile Mümkün Çözümlerin Geometrik Gösterimi

Verilmiş olan bir problemin Lagrange gevşetmesi yardımı ile tekrar kurgulamak ve çözüm değerlerine ulaşmak mümkündür.

Lagrange gevşetmesini temel alarak oluşturulan bu yeni modelleri oluştururken üç ana soruya cevap vermek gerekir.

Bu üç soru aşağıdaki sorulardır:⁷

- i. Hangi kısıt/lar gevşetilecektir?
- ii. En iyi λ değeri nasıl hesaplanacaktır?
- iii. Gevşetilmiş problemin çözüm değerine bakarak, orijinal problem için bu değer optimal olup olmadığı nasıl anlaşılacaktır?

Eğer problem önemli ölçüde kolaylaştırılmış ise, uygun kısıt gevşetilmiş demektir. En iyi λ değeri için, genellikle kullanılan *subgradyent* yöntemler ve daha iyi sonuç veren *heuristic(sezgisel)* yöntemler arasından biri seçilir. Bu durumda problem daha spesifik bir hal alır. Eğer problemin spesifikleşmesi ile birlikte çözüm değeri de spesifik bir hal alırsa, bu takdirde çözüm değeri orijinal problem için kullanılabilir.

Verilmiş olan bir problemi Lagrange gevşetmesi ile yeniden oluştururken birçok yöntemden yararlanır. Biz bu yöntemlerden, karmaşık modeller, sezgisel ve kısıtların etkileşimini etkin bir şekilde sağlayan ve gevşetme düzeneklerini içerisinde barındıran sıklıkla kullanılanlarını göstereceğiz⁸. Bu yöntemler:

- i. Alt problemlerden özel yapıda olan ve üzerinde çeşitli özel algoritmaların uygulanabildiği bir tanesinin genel modelden ayrı tutularak geri kalan kısıtların gevşetilmesini temel alan kullanımdaki en genel yaklaşımdır.

Üçüncü bölümde belirttiğimiz gibi, alt problemlere ayrıştırarak daha kolay bir yapı ve daha kısa bir zaman dilimi içerisinde çözümün bulunması için gerekli olan bu tür yaklaşımların nasıl gerçekleştiği ve alt problem kavramı aşağıdaki başlıkta daha detaylı olarak ifade edilmiştir.

⁷Marshall L. Fisher, "An Applications Oriented Guide to Lagrangian Relaxation," **Interfaces**, C.15, No:2, 1985, s.11.

⁸Guignard, **Sociedad de Estadística e Investigación Operativa**, s.166.

- ii. İki veya daha fazla sayıda ortak değişkene sahip alt problem varsa, bu problemlerden, önce herhangi bir tanesi ayrıştırılır daha sonra kopya kısıt yardımı ile diğer problemleri gevşetmek.

Bu yöntem, 1977 yılında Soenen tarafından *Lagrangian ayrıştırma*, 1985 yılında Nasberg vd. tarafından *Değişken ayrıştırma* ve 1988 yılında Glover ve Klingmann tarafından, *Değişken tabakalandırma* olarak tanımlanmıştır. Bu yöntemte, değişken ayrıştırma kullanılarak model tekrar yazılır ve adı değiştirilmiş olan yeni değişken bulunduğu kısıt için bağımsız bir değişkenmiş gibi davranır.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{x} \in X
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) ifadesinde yeni bir $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ değişkeni tanımlayarak modeli aşağıdaki (3.11) ifadesine dönüştürürüz.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \in X \\
 & \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{y} \in X \\
 & \mathbf{x} = \mathbf{y}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.10) modelini P , (3.11) modelini P' olarak ifade edelim. P 'nin optimal çözüm noktası \mathbf{x}^* iken, P' için optimal nokta, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ olmaktadır.

P' için ifade edilen, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ şartından dolayı her iki modelin çözüm değerleri birbirlerinin aynısıdır. Buradaki $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kopya kısıt olarak adlandırılır.⁹

⁹A.e., s.167

(3.11) modelindeki, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kısıtını gevşetecek olursak, (3.12) modeline ulaşılır.

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{c}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \in X \\
 & \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{y} \in X
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.12) modelini, \mathbf{x} ve \mathbf{y} değişkenlerine bağlı olarak iki ayrı alt probleme ayrıştırdığımız takdirde, \mathbf{x} değişkenine bağlı olarak (3.13) modelindeki alt probleme ulaşırız.

$$\begin{aligned}
 & \min (\mathbf{c} - \lambda)\mathbf{x} \\
 & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \in X \\
 & \lambda \in \mathfrak{R}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ayrıştırılan (3.12) modeli \mathbf{y} değişkenine bağlı olarak, (3.14) modelindeki alt probleme dönüşür.

$$\begin{aligned}
 & \min \lambda\mathbf{y} \\
 & \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{d} \\
 & \mathbf{y} \in X \\
 & \lambda \in \mathfrak{R}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.13) ve (3.14) modelleri, (3.12) de ifade edilmiş olan, gevşetilmiş modelin alt problemlere ayrıştırılmış halleridir. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer özellik ise, λ 'nın pozitiflik koşuluna ihtiyaç duymamasıdır.

iii. Bağlantı kısıtlarından herhangi birini gevşetmek.

Bağlantı kısıtı, \mathbf{x} ve daha sonra tanımlanan \mathbf{y} değişkenlerinin birbirleri ile olan ilişkilerini gösteren *kopya kısıt*dır. Bu kısıt yardımıyla, bağımsız bir hale dönüşmüş olan problemler alt problemlere ayrıştırılarak çözüme ulaşılmaya çalışılır.

(3.15) modeli bağlantı kısıtı içeren bir model olup aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \min \mathbf{fx} + \mathbf{gy} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in X \\ \mathbf{Cy} \leq \mathbf{d} \\ \mathbf{y} \in X \\ \mathbf{Ex} + \mathbf{Fy} \leq \mathbf{h} \end{aligned} \quad (3.15)$$

(3.15) modelindeki bağlantı kısıtı $\mathbf{Ex} + \mathbf{Fy} \leq \mathbf{h}$ olup, bu kısıtın gevşetilmesi sonucu (3.16) modeline ulaşılır.

$$\begin{aligned} \min \mathbf{fx} + \mathbf{gy} - \lambda(\mathbf{Ex} + \mathbf{Fy} - \mathbf{h}) \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in X \\ \mathbf{Cy} \leq \mathbf{d} \\ \mathbf{y} \in X \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.16) modelinin \mathbf{x} ve \mathbf{y} değişkenlerine bağlı olarak alt problemlere ayrıştırılması ile çözüme ulaşılır. Bu ayrıştırma sonucunda \mathbf{x} değişkenine bağlı olarak (3.17) modeline ulaşırız.

$$\begin{aligned} \min \mathbf{fx} - \lambda \mathbf{Ex} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (3.17)$$

\mathbf{y} değişkenine bağlı olarak ise, (3.18) modeli elde edilir.

$$\begin{aligned} \min \mathbf{gy} - \lambda(\mathbf{Fy} - \mathbf{h}) \\ \mathbf{Cy} \leq \mathbf{d} \\ \mathbf{y} \in X \end{aligned} \quad (3.18)$$

Andalaft vd. 2003 yılında, coğrafi olarak birbirinden ayrı olan bölgelerde bulunan orman arazilerinden ürün tedarik etme ve bu arazilerin birbirleri ile bağlantısını sağlayan yolların inşa edilmesini içeren bir problem için çözüm geliştirmişlerdir.

Bu çözümde, talep kısıtını gevşeterek her alandan elde edilen ürün miktarını maksimize eden bir alt problem ve elde edilen bu ürünlerin satışını maksimize eden iki alt probleme sahip olmuşlardır. Böyle bir durumda gevşetilmiş problemin alt problemlerinin çözümü ile sonuca ulaşılması ilk haldeki problemin çözümünden daha kolaydır¹⁰.

Eğer bu kısıtların herhangi birine tamsayı şartı eklenirse, bu takdirde Lagrange Gevşetmesi çözüm için daha sağlam bir üst sınır ortaya koyar.

- iv. Herhangi bir değişkenin kopyası yerine, bütün değişkenleri gevşetmek.

Bu bölümde açıklanacak olan son gevşetme yaklaşımında ise, kopya değişkenin yerine modele direkt olarak eklenen yeni bir değişkenin tanımlanmasıdır.

(3.10) modelimizde yazdığımız ikinci kısıt olan $\mathbf{Bx} \leq \mathbf{d}$ yerine, $\mathbf{By} \leq \mathbf{d}$ yazarak (3.19) modeline ulaşılır.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ \mathbf{Ax} \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in & X \\ \mathbf{By} \leq & \mathbf{d} \\ \mathbf{y} \in & X \\ \mathbf{x} = & \mathbf{y} \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19) den de görüleceği üzere bu model (3.11) ile aynıdır. (3.10) modelinde $\mathbf{Bx} = \mathbf{Dy}$ olarak tanımlanır ise, model (3.20) haline dönüşür.

¹⁰Nicolas Andalaft, Pablo Andalaft, Monique Guignard, Adrian Magendzo, Alexis Wainer, Andres Weintraub, "A Problem of Forest Harvesting and Road Building Solved Through Model Strengthening and Lagrangian Relaxation," **Operations Research**, C.51, No:4, 2003, s.621.

$$\begin{aligned}
& \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
& \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in X \\
& \mathbf{D} \mathbf{y} \leq \mathbf{d} \\
& \mathbf{y} \in X \\
& \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{y} \\
& \mathbf{x} = \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Buradan da görüleceği gibi, gevşetilmiş haldeki kopya kısıtta $\mathbf{D} \mathbf{y} = \mathbf{B} \mathbf{x}$ durumu vardır fakat bu kısıt, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kısıtından genellikle daha zayıf bir kısıttır.

Eğer kopya kısıt bir eşitlik kısıtı olması halinde ise, optimal çözüm değeri, tamsayılı programlama problemi için de optimal çözüm değeridir.

3.2. Lagrange Gevşetmesi ve Portföy Seçimi Problemi

Portföy Seçimi problemi aslında bir kuadratik programlama problemidir. Lagrange Gevşetmesi ile Portföy Seçimi probleminin çözümünü anlatmadan önce bir Kuadratik Programlama probleminin Lagrange Gevşetmesi yardımı ile nasıl çözüldüğünü inceleyelim. (3.21) modeli genel bir kuadratik programlama problemidir.

$$\begin{aligned}
& \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
& \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

\mathbf{Q} ($n \times n$) boyutlu simetrik matris ve $\lambda \geq \mathbf{0}$ olmak üzere (3.21) ifadesini Lagrange Gevşetmesi ile (3.22) de olduğu gibi yazabiliriz.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \lambda (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) \tag{3.22}$$

(3.22) ifadesinde \mathbf{x} içeren doğrusal terimleri, \mathbf{x} parantezine alırsak (3.23) ifadesini elde ederiz.

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{c}^T - \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{b} \quad (3.23)$$

(3.23) ifadesi \mathbf{x} in kısıtsız olması durumunda maksimize edilirse aşağıdaki şartlar oluşur¹¹.

- 1) Eğer \mathbf{Q} pozitif definit ise, $\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda})$ noktası *mutlak(tek) maksimum* noktasıdır. Buradan dual fonksiyon, (3.24) deki gibi oluşturulur.

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{c})^T\boldsymbol{\lambda} + \frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c} \quad (3.24)$$

(3.24) ifadesi $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ şartında konveks ve minimumdur.

- 2) Eğer \mathbf{Q} pozitif semidefinit ise, $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$ denkleminin çözüm değeri sonlu bir *maksimuma*, sadece $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}$ nin \mathbf{Q} değişim aralığında bulunması durumunda sahiptir. Bunun anlamı gevşetilmiş probleme ilave edilmiş olan doğrusal bir kısıtın ifadesidir.
- 3) Eğer \mathbf{Q} indefinite ise, *maksimum* değer, bütün $\boldsymbol{\lambda}$ değerleri için $\theta(\boldsymbol{\lambda}) = +\infty$ olup, gevşetilmiş problem $+\infty$ dan daha iyi bir üst sınır veremez.

Markowitz tarafından geliştirilmiş olan Ortalama-Varyans modelini (3.25) deki gibi ifade edebiliriz.¹²

¹¹Claude Lemarechal, "Lagrangian Relaxation," **Computational Combinatorial Optimization**, Ed. by. M. Jünger, D. Naddef, Berlin, Springer-Verlag, 2001, s.116.

¹²Norbert J. Jobst, Micheal D. Horniman, Cormac Lucas, Guatam Mitra, "Computational aspects of alternative portfolio selection model in the presence of discrete asset choice constraints," **Quantitative Finance**, C.1, No:5, 2001, s.491.

$$\begin{aligned}
\min Z &= \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^N x_i \mu_i \quad i, j = 1, 2, \dots, N \\
\sum_{i=1}^N x_i &= 1 \\
x_i &\geq 0 \\
0 \leq \lambda &\leq 1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

(3.25) modelinde:

- x_i = **i.** varlığın portföydeki ağırlığı
- x_j = **j.** varlığın portföydeki ağırlığı
- μ_i = **i.** varlığın beklenen getirisi
- σ_{ij} = **i.** ve **j.** varlıkların getirileri arasındaki kovaryans
- λ = Riskten Kaçınma Katsayısı

$$R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \lambda \text{ biçiminde tanımlanan riskten kaçınma katsayısı}^{13},$$

- i. $0 \leq R_A \leq 2$ aralığında ise, bu katsayıda en küçük bir değişim olması durumunda bile optimal portföy bileşiminde ciddi değişimler görülebilir.
- ii. $2 \leq R_A \leq 4$ aralığında ise, katsayı değiştikçe makul ölçülerde riskli portföyler elde edilir ve eldeki portföy bileşimi de makul şekilde değişim gösterir.
- iii. $R_A \geq 4$ ise, bu takdirde düşük varyanslı ve riskten uzak portföyler oluşturulabilir. Bu katsayıdaki çok büyük değişiklikler bile, optimal portföy bileşiminde ancak küçük değişimlere sebep olur.

¹³Jarl G. Kallberg, William T. Ziemba, "Comparison of Alternative Utility Functions in Portfolio Selection Problems," **Management Science**, C.29, No:11, 1983, s.1266.

Bir maksimizasyon problemi olarak ise, Ortalama-Varyans modeli (3.26) daki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \sum_{i=1}^N x_i &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \\ x_i &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

(3.26) modelinde:

- \mathbf{x} = Portföydeki Varlıkların Ağırlık Vektörü
- \mathbf{c} = Portföydeki Varlıkların Beklenen Getiri Vektörü
- \mathbf{Q} = Varyans-Kovaryans Matrisi
- λ = Riskten Kaçınma Katsayısı

Aktif fon yöneticileri, bir yatırım portföyü oluşturacakları zaman kabul edilebilir bir risk karşılığında, getiriye maksimize edecek bir tavır gösterirler. Buna karşın daha temkinli davranan ikinci bir grup fon yöneticisi grubu vardır ki; grupta yer alan fon yöneticileri, genel olarak pazarın temel parametrelerini(borsa endeksi vb.) göz önünde bulundurarak bir yatırım portföyü oluştururlar.¹⁴

Temkinli olan bu tip fon yöneticileri takip ettikleri pazarın durumuna göre, çeşitli kıyas ölçülerini de dikkate alarak, portföyün kendi içinde belirli sayıda varlıktan oluşan bir alt set oluşturur iken, aktif fon yöneticileri için bu yaklaşım olağandışı bir yaklaşım olarak algılanmamalıdır.

Belirli bir sayıda varlığa göre oluşturulacak bir portföy için, (3.26) modeline $mnz(\mathbf{x}) = K$ kısıtını ekleyerek (3.27) modeli elde edilir. Burada K , bir tamsayı olup portföyde yer alacak varlıkların sayısını göstermektedir. Bu kısıt, *tamlık* kısıtıdır.

¹⁴Dong X. Shaw, Shucheng Liu, Leonid Kopman, "Lagrangian Relaxation Procedure for Cardinality-Constrained Portfolio Optimization," **Optimization Methods&Software**, C.23, No:3, 2008, s.411.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
\sum_{i=1}^N x_i &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \\
nnz(\mathbf{x}) &= K \\
l \leq x &\leq u \\
x_i &\geq 0 \\
\lambda &\geq 0 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$l \leq x \leq u$ kısıtındaki alt ve üst sınırları temsil eden l ve u portföy seçimi problemi için sırasıyla **0** ve **1** dir.

İlave edilen kısıtın eşitlik kısıtı olarak tercih edilmesinin nedeni, herhangi bir eşitsizlik kısıtında olduğu gibi çözüm esnasında bir alt ve üst sınıra ihtiyaç duymamasıdır. Bu durum modelin çözümünü kolaylaştırıcı bir etkidir.¹⁵

Eğer $nnz(\mathbf{x}) = K$ kısıtını, bir eşitsizlik kısıtı olarak ifade etmek istersek, $K = K_T, K_T + 1, \dots, K_U$ olmak üzere, $K_T \leq nnz(\mathbf{x}) \leq K_U$ şeklinde ifade edebiliriz.

Cardinality Constrained Quadratic Portfolio Optimization problemi olarak bilinen (3.27) modelini varlık sayısını göz önünde bulundurduğu için, *Tamlık Kısıtlı Kuadratik Programlama* problemi olarak tanımlayabiliriz.

Bu çalışmanın uygulama aşamalarından biri olan *optimal küçük portföylerin seçimi* ifadesindeki, *küçük portföylerin* elde edilmesinde, *Tamlık Kısıtlı Kuadratik Programlama* problemi olarak kurgulanan modelin belirli bir *riskten kaçınma katsayısı* ile çözümü sonucu seçilmiş küçük portföyler elde edilmiştir. Bu kısım bir sonraki bölümde detayları ile anlatılacaktır.

¹⁵Tyrone -J. Chang, Nigel Meade, John E. Beasley, Yazid M. Sharaiha, "Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation," **Computers&Operations Research**, C.27, No:3, 2000, s.1276.

3.3. Lagrangian Sezgiselleri ve Portföy Seçimi Problemi

Doğrusal olmayan bir amaç denklemi ve/veya kısıta sahip olan optimizasyon problemlerinin çözümü oldukça güçtür. Bundan dolayı, bu tür problemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biri olan Lagrange Gevşetmesi, yıllar içinde gelişen bilgisayar teknolojisi ve bu teknolojilerin uygulamaları sayesinde son derece sık kullanılır olmuştur.

Bu yöntemlerin kullanılması sonucunda, çözülmesi zor olan gerçek modellerin yerine yaklaşık bu modellere benzeyen modellerin çözümlerini baz alan çalışmalar yapılırken, artık gerçek modellerin çözümüne odaklanan çalışmalarda çoğalmıştır.

Lagrange Gevşetmesi, 1970'lerden günümüze kadar; Gezen Satıcı (Travelling Salesman), Zaman Planlama (Scheduling), Tam Sayılı Programlama (Integer Programming), Yer Seçimi (Location), Atama (Assignment), Birleştirme ve Ayırıştırma (Set Covering-Partitioning) problemlerinde yaygın olarak kullanılmıştır.¹⁶

Lagrange Gevşetmesi, özellikle primal modelin ayrıştırılabildiği durumlarda çözüme son derece yatkındır. Ancak Markowitz'in ortalama-varyans modeli, farklı risk düzeylerindeki varlıkların getirileri arasındaki korelasyondan dolayı köşegen olmayan bir kovaryans matrisine sahip olduğu için ayrıştırılamaz. Bu çözümün zorluğundan dolayı modele ilave edilen bir yardımcı değişken, problemi hem ayrıştırılabilir, hem de çözüm için bir sınır değeri bulunabilir hale getirir.¹⁷

Lagrange Gevşetmesinin, çeşitli sezgisel algoritmalar ile birlikte kullanılmasına *Lagrangian Sezgiselleri* adı verilir.

Markowitz kendi ortalama-varyans modelinde, varlıkların getirilerinin *çok değişkenli normal* dağılıma uyduğunu varsaymıştır. Bu durumda bir portföydeki varlığın getirisini beklenen getiri ve risk ile tamamen açıklamış ve kuadratik

¹⁶Marshall L. Fischer, **Management Science**, s.5.

¹⁷Duan Li, Xiaoling Sun, Jun Wang, "Optimal Lot Solution to Cardinality Constrained Mean-Variance Formulation for Portfolio Selection," **Mathematical Finance**, C.16, No:1, 2006, s.85.

programlama problemi olarak kurguladığı modeli doğrusal bir kısıt yardımı ile çözmüştür.

Bu yaklaşımın temelde iki zayıf yanı bulunmaktadır. Bunlar,¹⁸

- i. Çok değişkenli normal dağılım sürdürülebilir değildir. Bireysel olarak bir varlığın getirisi, uç değerlerin yüksek olasılıkları ile birlikte normale yaklaşır.
- ii. Portföyde yer alacak varlık sayısının tanımlandığı *tamlık* kısıtı kolayca modele eklenemez.

(3.27) modelindeki $nnz(\mathbf{x}) = K$ kısıtının yardımıyla, *Tamlık Kısıtlı Kuadratik Programlama* problemi olarak ifade edilen, portföy seçimi problemini elde ederiz. $nnz(\mathbf{x}) = K$ *tamlık* kısıtının ilavesi ile birlikte mümkün çözüm bölgesi daraltılarak çözüm elde edilir.

Değişken sayısının en fazla 1000 olduğu, K değerinin 20 ile 50 arasında değiştiği *Tamlık Kısıtlı Kuadratik Programlama* problemi, *Dal-kesme(branch and cut)* algoritması ile çözülebilir. Bu değerler büyüdükçe çözüm değeri optimal değerden uzaklaşır.¹⁹ Bu çalışma, bu tip modellerin çözümündeki ilk Lagrangian sezgiselidir.

(3.27) modelindeki N adet varlığı, S adet sektöre dağıtarak bu sektörlerin içerisindeki yeni portföy ağırlığını x , eski portföy ağırlığını x^0 olarak kabul edelim. Varlıkların alışı ve satışlarının eşit olduğu bir durumda, (3.27) modeline

¹⁸Chang, Meade, Beasley, Sharaiha, “Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimisation,” **Computers&Operations Research**, s.1272.

¹⁹Daniel Bienstock, “Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems,” **Mathematical Programming**, C.74, No:2, 1996, s.124.

$\sum_{i=1}^N c_i (x_i - x_i^0)^2$ kuadratik ifadesi eklenerek, *Dal-sınır(branch and bound)* algoritması temelli bir Lagrangian sezgiseli geliştirilmiştir.²⁰

(3.27) modelinde risk terimini, kabul edilebilir risk düzeyi (σ) için eşitsizlik kısıtı olarak yazalım. Aynı şekilde portföyde yer alacak olan varlık sayısını gösteren *tamlık* kısıtını, $nnz(\mathbf{x}) = K$ şeklinde yazarsak (3.28) modeli elde edilir.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} &\leq \sigma \\
\sum_{i=1}^N x_i &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, N \\
nnz(\mathbf{x}) &= K \\
x_i &\leq K \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{3.28}$$

(3.28) modelinin çözümünü sağlayan *Dal-sınır(branch and bound)* algoritması temelli bir Lagrangian sezgiseli geliştirilmiştir.²¹

Getirilerin varyans-kovaryans matrisini dikkate alarak, matematiksel optimizasyon yöntemleri yardımı ile *sapma hatasını (tracking error)* minimize etmeyi amaçlayan *çeşitlendirme yöntemi (diversity method)* adlı bir sezgisel yöntem geliştirilmiştir.²²

Bu yöntemde, S&P 100 endeksinde yer alan hisse senetlerinden 20 tanesini bir tamlık kısıtı olarak ifade edilerek model çözülmeye çalışılmıştır. (3.29) da bu model görülmektedir.

²⁰Dimitris Bertsimas, Romy Shioda, “Algorithm for Cardinality Constrained Quadratic Optimization,” **Computational Optimization Applications**, C.43, No:1, 2009, s.8.

²¹Juan P. Vielma, Shabbir Ahmed, George L. Nemhauser, “A Lifted Linear Programming Branch-and-Bound Algorithm for Mixed Integer Conic Quadratic Programs,” **INFORMS Journal of Computing**, C.20, No:3, 2008, s.439.

²²Roel Jansen, Ronald van Dijk, “Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios,” **The Journal of Portfolio Management**, C.28, No:2, 2002, s.35.

$$\begin{aligned}
\min Z &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) \\
\sum_{i=1}^{100} x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &= 20
\end{aligned} \tag{3.29}$$

(3.29) modelindeki tamlık kısıtı $nnz(\mathbf{x}) = 20$ bütün hisse senetleri içerisinde, portföydeki ağırlığı *sıfır* olmayan hisse senedi sayısını göstermektedir.

(3.29) modelindeki tamlık kısıtı, bir Lagrange çarpanı yardımı ile amaç denklemine eklenmiş olup, buradan (3.30) ulaşılarak, modelin çözümü yapılmıştır.

$$\begin{aligned}
\min Z &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \lambda (nnz(\mathbf{x}) - 20) \\
\sum_{i=1}^{100} x_i &= 1
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(3.29) deki modeli temel alan ve bu çözümü, 0-1 programlama olarak ifade edip aynı veri seti ile daha iyi sonuçlar alınmıştır.²³ Burada model geliştirilerek (3.31) haline getirilerek çözüm sağlanmıştır. Bu modellerde,

\mathbf{x} : Portföydeki varlıkların ağırlık vektörü
 \mathbf{x}_b : Kıyas varlıklarının ağırlık vektörü

olarak ifade edilir.

$$\begin{aligned}
\min Z &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) \\
\sum_{i=1}^N x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &= K \\
x_i &\leq K
\end{aligned} \tag{3.31}$$

(3.27) modelindeki \mathbf{Q} matrisi $\mathbf{Q} = \mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}$ olarak ifade edilirse, bu takdirde, (3.32) modeline ulaşılır.

²³Françoise Charpin, Dominique Lacaze, "Using Binary Variables to Obtain with Small Portfolios," **The Journal of Portfolio Management**, C.33, No:4, 2002, s.69.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T (\mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}) \mathbf{x} \\
\sum_{i=1}^N x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &\leq K \\
\mathbf{l} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\
x_i &\geq 0 \\
\lambda &\geq 0 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}$ ifadesi aslında hisse senedi getirilerinin kovaryansının çoklu faktör modeli olarak ifadesinin vektör matris notasyonları ile ifade edilmesidir. Burada, \mathbf{D} köşegen matris, \mathbf{F} faktörlerin kovaryans matrisi, \mathbf{A} ise faktör yükleme matrisidir.

Çoklu faktör modeli, bir hisse senedinin oynaklığını etkileyen birçok faktörün bulunduğu ve bu faktör değerlerinin bilindiği varsayımına dayanır. Bu faktör değerleri bilindiği zaman her bir hisse senedine yüklenecek olan değerlerin tahmin edilmesi kolaydır.²⁴

Bunun anlamı, faktörlerin getirinin bir bileşeni olarak gösterilebilmesidir. Çoklu faktör modeli, gerçek piyasa ve piyasa hareketlerinin doğal bir gösterimidir. Bu modelde her bir hisse senedinin getirisi, genel faktörlerin oluşturduğu yükleme değerlerinin getirisi ve varlığın spesifik getirisi olarak iki parçaya ayrılır.²⁵

²⁴Barr Rosenberg, "Extra-Market Components of Covariance in Security Returns," **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, C.8, No:4, 1974, s.265.

²⁵Leonid Kopman, Shucheng S. Lui, Dong Shaw, "Using Lagrangian Relaxation to Obtain Small Portfolios," **The Journal of Portfolio Management**, C.35, No:2, 2009, s.75.

Bu iki parçalı yapıyı (3.33) deki gibi gösterebiliriz.

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{u} \quad (3.33)$$

(3.33) eşitliğinde:

- \mathbf{r} : Risksiz faiz oranı
- \mathbf{f} : Faktör getirileri vektörü
- \mathbf{A} : Faktör yükleme matrisi
- \mathbf{u} : Spesifik varlık getirileri vektörü

Yukarıda açıklanan son üç çalışmanın tamamında *Dal Sınır* algoritmasını temel alarak, portföy seçimi probleminin çözümüne yardımcı olan sezgisel yöntemler kullanılmışlardır.

Bizim çalışmamıza temel olan kısım ise, $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}^T + \mathbf{D}$ ifadesidir. Dördüncü bölümde aşamaların detaylı olarak anlatacağımız bu çalışmada, elde ettiğimiz pozitif definit varyans kovaryans matrisini bir parçası köşegen, diğer parçası ise pozitif definit olmak üzere iki parçaya ayırarak çözümler elde etmeye çalışacağız. Ayrıca bu matrisler yardımı ile, yatırımcıya optimal portföy adedinden daha küçük sayılarda varlıklar içeren portföyler oluşturacağız.

Yani elde edeceğimiz \mathbf{D} köşegen matrisi, pozitif definit \mathbf{Q} matrisinden çıkardığımız zaman $\mathbf{Q} - \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}^T$ ifadesine eşittir. Aslında elde edilen $\mathbf{Q} - \mathbf{D}$ ifadesi, \mathbf{F} faktörlerin kovaryans matrisinin, faktör yükleme matrisi \mathbf{A} 'nın kendisi ile önden, elde edilen yeni $\mathbf{A}\mathbf{F}$ matrisinin de \mathbf{A} 'nın transpozesi ile önden çarpımından elde edilecek matrisin aynısıdır. Çalışmamızın uygulama kısmında kullanacağımız $\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}^T$ ifadesini, bundan sonra bir karışıklığa meydan vermemek için, bundan sonra \mathbf{B} olarak ifade edeceğiz. Yani $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}^T$ dir.

Lagrangian sezgiselleri, klasik optimizasyon yöntemlerine nazaran daha alternatif yaklaşımlar ortaya koymaktadırlar. Bu durumda daha zengin çözüm setleri, sadece sürekli çözüm değerleri değil, aynı zamanda sürekli çözüm setleri geliştirirler.

Bütün bu avantajlarına rağmen, Lagrangian sezgiselleri klasik yöntemlere oranla daha az kullanılır. Bunun temel nedenleri ise şunlardır:²⁶

- 1) Lagrangian sezgiselleri modelleri detaylı analiz ederler ve optimize edilecek alt problemlerin çözümlerini araştırırlar. Bu yaklaşım zaman zaman optimizasyon problemini değiştirmek ve çözümü geliştirmek için spesifik programlara ve kodlarına ihtiyaç duyarlar. Buna karşın standart çözüm yöntemlerinin, standart programları ve kodları vardır.
- 2) Lagrangian sezgisellerinin genel olarak kabul gördüğü kodlar sağlamlık, etkinlik, kolay kullanım ve standardizasyondan uzaktır.
- 3) Lagrangian sezgiselleri ile yapılan çözümler son derece zorlayıcı ve göz korkutucudur. Yetersiz kodlar ve problemin gerçek yapısının zorluğu da buna etki etmektedirler.

Bunların sonucunda, Lagrangian yöntemler, hem sınırlı olmaları, hem de bu yöntemlerin kendi iç yapılarının zorluğu ve diğer teknolojik etkenlere rağmen, kolay kod kullanımı nedeniyle son derece zor optimizasyon problemlere başarı ile uygulanabilmektedir.

²⁶Antonio Frangioni, "About Lagrangian Methods in Integer Optimization," **Annals of Operations Research**, C.139, No:1, 2005, s.190.

4. LAGRANGE GEVŞETMESİ İLE PORTFÖY SEÇİMİ PROBLEMİNİN İMKB'YE UYGULANMASI

Bu çalışmada **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB) bünyesinde faaliyet gösteren İMKB-30 endeksinde yer alan hisse senetleri kullanılmıştır.

İMKB 30 endeksinin kapsamına ilişkin yapılan periyodik gözden geçirme sonucunda endekslerin kapsamında yapılan dönemsel değişikliklerin geçerli olacağı dönem ifade eden, *endeks dönemi*, Ocak-Mart, Nisan-Haziran, Temmuz-Eylül ve Ekim-Aralık olmak üzere dört dönemdir.

Bu *endeks dönemleri* içerisinde, Sermaye Piyasası Kurulu (SPK) tarafından **23.07.2010 tarih ve 21/657 kararı**¹ ile, A ve B listeleri içerisinde yer alan hisse senetleri içerisinde seçilenler, endekslerde yer alırlar.

Hisse senetleri, değerlendirme dönemi sonu itibariyle fiili dolaşımdaki paylarının **piyasa değerleri** ve değerlendirme dönemindeki **günlük ortalama işlem hacimlerine** göre büyükten küçüğe doğru sıralanmaktadır.

Her iki listede, birinci sırada yer alan hisse varsa nihai listede ilk sıraya yerleştirilir. Her iki listede, birinci sırada yer alan hisse yoksa, ilk iki sıra içinde yer alan hisse olup olmadığı araştırılır. Nihai listede ilk sırada yer alacak hisse senedi belirleninceye kadar bu işlemler tekrarlanır. Nihai listede ilk sıraya yerleştirilecek hisse senedinin belirlenmesinden sonra yukarıdaki işlem takip eden sıralar için tekrar edilir. Her iki listede ilk **n** sıra içinde olma şartını sağlayan iki hisse senedinin bulunması halinde piyasa değeri büyük olan nihai listede daha üst sıraya yerleştirilir.²

¹SPK, **23.07.2010 tarih ve 21/657 sayılı Karar**, t.y., (Çevrimiçi), <http://spk.gov.tr/apps/mevzuat/>, 23 Ağustos 2011.

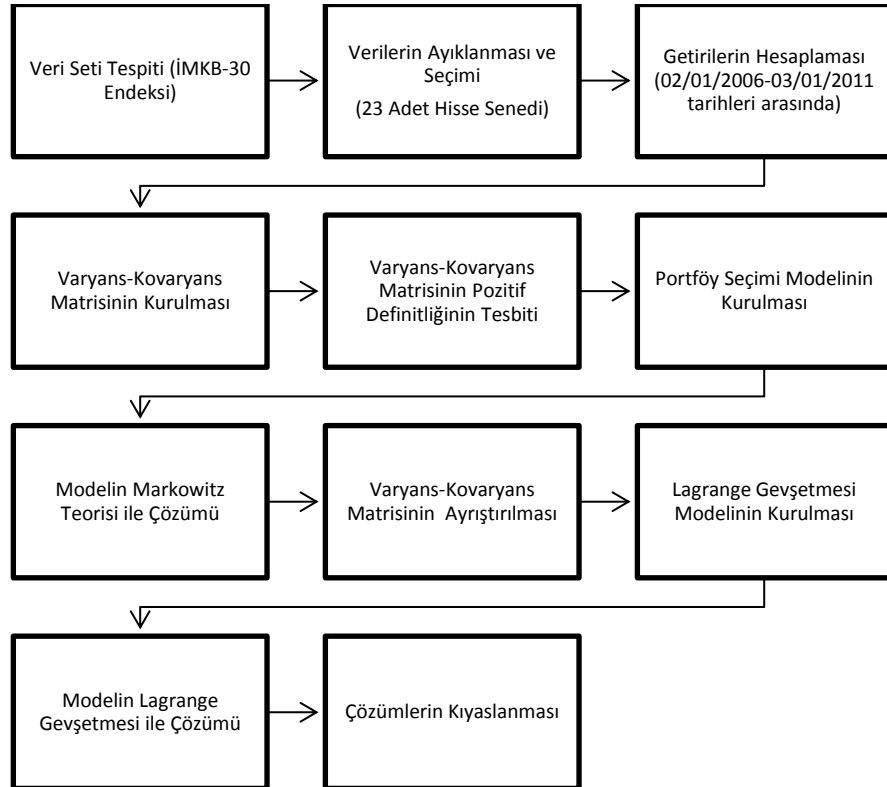
²İMKB, **Seçim ve Endekse Alınma Kriterleri**, t.y., (Çevrimiçi), http://www.imkb.gov.tr/Indexes/StockIndexesHome/index_criteria.aspx, 23 Ağustos 2011.

Yapılan nihai sıralamada en üst sırada yer alan hisse senetlerinden başlanarak ve endekslere alınmak veya çıkarılmak için gereken üst ve alt sıralar da gözetilmek suretiyle endekslere seçim yapılmaktadır.

Bu çalışmada, İMKB-30 endeksinden seçilen yirmi üç adet hisse senedinin günlük getirileri hesaplanırken 1253×23 boyutlu bir matris inşa edilmiştir. Daha sonra, 23×23 boyutlu, varyans-kovaryans matrisi kurularak, bu matrisin pozitif definitliği test edilmiştir.

Problemin modeli kurulup, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline göre çözümü tamamlandıktan sonra, varyans-kovaryans matrisi ayrıştırılıp kurulan yeni model Lagrange Gevşetmesi ile çözülerek, elde edilen çözümler, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli ile kıyaslanmıştır.

Uygulamanın akışı ve aşamaları *Şekil 4-1*'de verilmiştir.



Şekil 4-1. Uygulamanın Akış Şeması

Belirtilen dönemler içerisinde, **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde sürekli olarak yer alan yirmi üç adet hisse senedi ve bu senetlere ait kodlar *Tablo 4-1*'de verilmiştir.

HİSSE SENEDİ	KODU
AKBANK	AKBNK
AK ENERJİ	AKENR
ARÇELİK	ARCLK
DOĞAN HOLDİNG	DOHOL
DOĞAN YAYIN HOLDİNG	DYHOL
ECZACIBAŞI İLAÇ	ECILC
ENKA İNŞAAT	ENKAI
EREĞLİ DEMİR ÇELİK FAB.	EREGL
GARANTİ BANKASI	GARAN
İŞ BANKASI C TERTİBİ	ISCTR
KOÇ HOLDİNG	KCHOL
KOZA ALTIN	KOZAA
KARDEMİR DEMİR ÇELİK FAB.	KRDMD
PETKİM	PETKM
SABANCI HOLDİNG	SAHOL
ŞİŞE CAM	SISE
ŞEKERBANK	SKBNK
TURKCELL	TCELL
TÜRK EKONOMİ BANKASI	TEBNK
TÜRK HAVA YOLLARI	THYAO
TÜPRAŞ	TUPRS
VAKIFBANK	VAKBN
YAPI VE KREDİ BANKASI	YKBNK

Tablo 4-1.Çalışmada Kullanılan Hisse Senetleri ve Kodları

Bu bilgilere ilave olarak, çalışmada yazılım olarak LINGO 12.0 kullanılmıştır. İterasyonlar, 2 GB RAM, Intel Core2 2.4GHz işlemci ile, Windows 7 işletim sistemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Bu uygulamanın temel amacı, Lagrange Gevşetmesi ile küçük portföyler oluşturabilmektir. Bunun için, riskten kaçınma katsayısının $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında değiştiği ve tamlık kısıtı kullanılarak, olası yatırımcılara çeşitli sayılarda hisse senetlerinden oluşmuş portföyler tavsiye edilmiştir.

4.1. Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeline Göre Optimal Portföy Seçimi Uygulaması

Lagrange Gevşetmesine göre yapılacak olan uygulamaya dair bir kıyas ölçüsü olması açısından öncelikli olarak, **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde sürekli olarak yer alan yirmi üç adet hisse senedinin, günlük kapanış fiyatlarını dikkate alarak oluşturduğumuz veri setimizi Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli ile çözmek yararlı olacaktır.

(4.1) modeli bu çalışmanın Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline göre kurulmuş halidir.

$$\begin{aligned} \max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ \sum_{i=1}^{23} x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0 \\ 2 &\leq \lambda \leq 4 \end{aligned} \quad (4.1)$$

(4.1) modelinde:

- \mathbf{x} = Portföydeki Hisse Senetlerinin Ağırlık Vektörü
- \mathbf{c} = Portföydeki Hisse Senetlerinin Ortalama Getiri Vektörü
- \mathbf{Q} = 23×23 Boyutlu Varyans-Kovaryans Matrisi
- λ = Riskten Kaçınma Katsayısı

olup, hisse senetlerine ait **ortalama günlük getiriler** aşağıdaki *Tablo 4-2'* de verilmiştir.

HİSSE SENEDİ	GÜNLÜK GETİRİ	HİSSE SENEDİ	GÜNLÜK GETİRİ	HİSSE SENEDİ	GÜNLÜK GETİRİ
AKBNK	0.000945	GARAN	0.001304	SKBNK	0.000905
AKENR	0.001253	ISCTR	0.000572	TCELL	0.000839
ARCLK	0.000610	KCHOL	0.001077	TEBNK	0.000755
DOHOL	0.000466	KOZAA	0.001899	THYAO	0.001447
DYHOL	0.000027	KRDMD	0.001083	TUPRS	0.001100
ECILC	0.000905	PETKM	0.000634	VAKBN	0.000636
ENKAI	0.001141	SAHOL	0.000794	YKBNK	0.001053
EREGL	0.000973	SISE	0.000678		

Tablo 4-2. Günlük Ortalama Getiriler (02/01/2006-03/01/2011)

Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli, belirli bir risk düzeyi için beklenen getiriye maksimize etmeye odaklanan bir model olduğu için; getirilerin oluşturduğu varyans-kovaryans matrisini kurmak gereklidir. *Ek-1*'de varyans-kovaryans matrisi görülmektedir.

Getirilerin varyans-kovaryans matrisi kurulduktan sonra, matrisin pozitif definitliğini incelemek gerekir. Matrisin asal minörlerin tamamının determinant değerleri sıfırdan büyük olup, matris **pozitif definit** bir matristir.

Tablo 4-3'de matrisin pozitif definitliğini gösteren determinant değerleri görülmektedir.

BOYUT	DETERMİNANT
1x1	8.96E-04
2x2	6.45E-07
3x3	3.70E-10
4x4	2.65E-13
5x5	1.93E-16
6x6	9.04E-20
7x7	4.85E-23
8x8	2.26E-26
9x9	8.15E-30
10x10	1.81E-33
11x11	5.15E-37
12x12	5.60E-40
13x13	2.84E-43
14x14	9.75E-47
15x15	3.00E-50
16x16	8.11E-54
17x17	5.05E-57
18x18	2.15E-60
19x19	1.03E-63
20x20	4.75E-67
21x21	1.90E-70
22x22	4.86E-74
23x23	1.23E-77

Tablo 4-3.Varyans-Kovaryans Matrisinin Asal Minörlerinin Determinantları

23×23 boyutlu pozitif definit varyans-kovaryans matrisini (4.1) deki ana modele, diğ er parametreler ile birlikte eklendikten sonra riskten kaçınma katsayısı $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında değı ştirilerek optimal portföy bileşimleri oluşturulmuştur.

Riskten kaçınma katsayısı aralığı, **0.1** lik dilimlere bölünerek portföy bileşimleri araştırılmıştır.

Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline göre çözüm için geliştirilen ana modelin LINGO ekranına yazılmış olan hali *Ek-2'*deki gibidir.

$2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında (4.1) modelinin çözülmesi ile elde edilen amaç denklemini **max Z*** değerleri *Tablo 4-4'*de gösterilmiştir.

λ	max Z*	İterasyon	Süre (sn)
2.0	0.0006212637	15	<1
2.1	0.0005835315	18	<1
2.2	0.0005463033	20	<1
2.3	0.0005095133	17	<1
2.4	0.0004731067	17	<1
2.5	0.0004370375	18	<1
2.6	0.0004012668	18	<1
2.7	0.0003657615	18	<1
2.8	0.0003304937	20	<1
2.9	0.0002954705	22	<1
3.0	0.0002606846	23	<1
3.1	0.0002261128	23	<1
3.2	0.0001917353	22	<1
3.3	0.0001575343	21	<1
3.4	0.0001234942	21	<1
3.5	0.0000896012	21	<1
3.6	0.0000558433	24	<1
3.7	0.0000222151	23	<1
3.8	-0.000011292	24	<1
3.9	-0.000044688	24	<1
4.0	-0.000077982	23	<1

Tablo 4-4.Ortalama-Varyans Modeline Göre Amaç Fonksiyonu Değ erleri

Bu modelin, $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığındaki riskten kaçınma katsayılarına bağlı olarak türetilen çözümlerinin ekran çıktıları *Ek-3*'deki gibidir.

Hesaplanan bu amaç denklemleri değerleri, aynı veri setini kullanarak çözüm geliştiren Lagrange Gevşetmesine göre yapılan çözümlerin kıyaslanmasında kullanılacaktır.

Tablo 4-5, *Tablo 4-6* ve *Tablo 4-7*'de $2 \leq \lambda \leq 4$ için, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline göre çözülmüş olan optimal portföy bileşimleri gösterilmektedir.

Riskten kaçınma katsayısı ile ilgili olarak, *Altbaşlık 2.2* ve *Altbaşlık 3.2*'de çeşitli açıklamalarda bulunmuştuk. Bu açıklamalara ilave olarak, riskten kaçınma katsayısını $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında neden seçtiğimizi tekrar hatırlatalım.

Kallberg & Ziemba (1983) çalışmalarında, $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında değişen riskten kaçınma katsayısı ile ilgili olarak, katsayı değiştikçe belirli ölçülerde riskli portföyler elde edildiğini ve eldeki portföy bileşiminin makul ve gözlenebilir bir şekilde değişim gösterdiğini belirtmiştir. Bu çalışmada, $2 \leq \lambda \leq 4$ arasında değişen riskten kaçınma katsayısının tercih edilmesinin temel nedeni budur.

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI							
	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
AKENR	16.53%	16.45%	16.38%	16.31%	16.25%	16.20%	16.15%	16.10%
ENKAI	16.43%	16.64%	16.84%	17.02%	17.18%	17.33%	17.47%	17.59%
KOZAA	16.91%	16.13%	15.43%	14.78%	14.19%	13.65%	13.14%	12.68%
TCELL	1.57%	2.61%	3.56%	4.43%	5.22%	5.95%	6.63%	7.26%
THYAO	34.07%	33.46%	32.91%	32.40%	31.94%	31.51%	31.12%	30.75%
TUPRS	14.49%	14.70%	14.89%	15.06%	15.21%	15.36%	15.49%	15.62%
Portföy Riski	0.0380%	0.0375%	0.0370%	0.0366%	0.0362%	0.0359%	0.0356%	0.0354%
Portföy Getirisi	0.1381%	0.1370%	0.1360%	0.1351%	0.1343%	0.1335%	0.1328%	0.1321%

Tablo 4-5. $2 \leq \lambda \leq 2.7$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI							
	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
AKENR	16.05%	15.94%	15.84%	15.75%	15.67%	15.59%	15.51%	15.44%
ECILC	0.07%	0.50%	0.90%	1.27%	1.62%	1.95%	2.26%	2.55%
ENKAI	17.70%	17.74%	17.77%	17.80%	17.83%	17.86%	17.89%	17.91%
KOZAA	12.24%	11.79%	11.38%	10.99%	10.62%	10.28%	9.96%	9.65%
TCELL	7.83%	8.29%	8.73%	9.13%	9.51%	9.87%	10.21%	10.53%
THYAO	30.40%	30.01%	29.64%	29.30%	28.98%	28.68%	28.40%	28.13%
TUPRS	15.71%	15.73%	15.74%	15.75%	15.76%	15.77%	15.78%	15.79%
Portföy Riski	0.0351%	0.0349%	0.0347%	0.0345%	0.0343%	0.0341%	0.0340%	0.0338%
Portföy Getirisi	0.1315%	0.1308%	0.1301%	0.1295%	0.1289%	0.1283%	0.1278%	0.1273%

Tablo 4-6. $2.8 \leq \lambda \leq 3.5$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI				
	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
AKENR	15.37%	15.29%	15.21%	15.14%	15.07%
ECILC	2.82%	3.06%	3.28%	3.49%	3.70%
ENKAI	17.93%	17.93%	17.93%	17.94%	17.94%
EREGL	0.05%	0.19%	0.32%	0.44%	0.56%
KOZAA	9.36%	9.08%	8.81%	8.56%	8.32%
TCELL	10.82%	11.08%	11.33%	11.56%	11.78%
THYAO	27.87%	27.62%	27.37%	27.14%	26.92%
TUPRS	15.79%	15.77%	15.75%	15.73%	15.71%
Portföy Riski	0.0337%	0.0336%	0.0335%	0.0333%	0.0332%
Portföy Getirisi	0.1269%	0.1264%	0.1260%	0.1256%	0.1252%

Tablo 4-7. $3.6 \leq \lambda \leq 4$ aralığında oluşturulmuş optimal portföyler

Bu çözümlere göre, yirmi üç adet hisse senedi içerisinde $2 \leq \lambda \leq 2.7$ aralığında, altı adet hisse senedi portföye girerek çözümü oluşturmuşlardır. Aynı şekilde, $2.8 \leq \lambda \leq 3.5$ aralığında yedi adet hisse senedi portföye girmiştir. $3.6 \leq \lambda \leq 4$ aralığında ise, portföy sekiz adet hisse senedinden oluşmaktadır.

Büyük aracı kurumlarda hesapları olan yatırımcılar arasında yapılan bir araştırmada optimal portföy büyüklüğü demografik yapıya bağlı olarak 9.4 ile 12.1 arasında değişmektedir.¹

Seçim yapılan hisse senedi adedine bakıldığı zaman ise, portföyün iyiye yakın derecede çeşitlendirilmiş bir portföy olduğu kolaylıkla söylenebilir ve buna ilave olarak riskten kaçınma katsayısı yükseldikçe portföyde yer alan hisse senedi sayısı da artmaktadır.

$2 \leq \lambda \leq 2.7$ aralığında, AKENR, ENKAI, KOZAA, TCELL, THYAO ve TUPRS hisse senetleri portföyü oluşturmuştur. Portföy içerisindeki payları inceleyecek olursak riskten kaçınma katsayısı yükseldikçe, ENKAI, TCELL ve TUPRS hisse senetlerinin portföy içerisindeki payları yükselmektedir.

$2.8 \leq \lambda \leq 3.5$ aralığında oluşturulan portföyde yedinci hisse senedi olarak, ECILC portföye girmeye başlamıştır. AKENR, KOZAA ve THYAO portföy içerisindeki payları riskten kaçınma katsayısı yükseldikçe azalmaktadır. ECILC, ENKAI, TCELL ve TUPRS hisse senetlerine ait portföy payları ise artmaktadır.

$3.6 \leq \lambda \leq 4$ aralığında portföye sekizinci hisse senedi olarak EREGL girmektedir. THYAO, %27-%34 aralığındaki oranlarla portföydeki ağırlığı en fazla olan hisse senedir. EREGL ise, %1'den düşük oranlarla portföy ağırlığı en az olan hisse senedir.

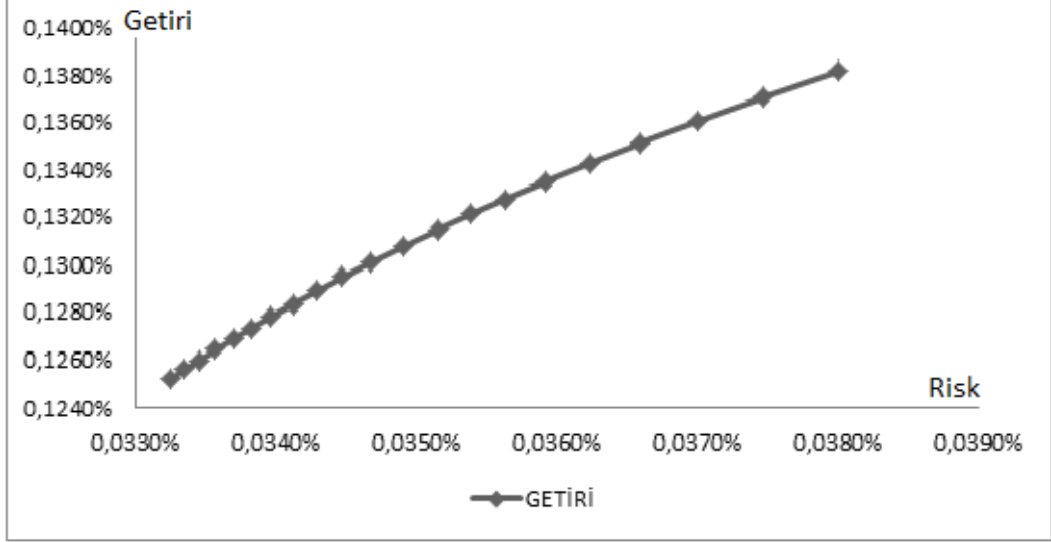
¹Mire Statman, "How Many Stocks Make a Diversified Portfolio?", **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, C.22, No:3, 1987, s.361.

Tablo 4-8'de riskten kaçınma katsayılarına göre portföylerin getirileri ve riskleri gösterilmiştir.

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI	RİSK	GETİRİ
2.0	0.000380093	0.001381449
2.1	0.000374682	0.001370364
2.2	0.000369992	0.001360285
2.3	0.000365900	0.001351083
2.4	0.000362309	0.001342647
2.5	0.000359143	0.001334895
2.6	0.000356331	0.001327728
2.7	0.000353826	0.001321092
2.8	0.000351499	0.001314691
2.9	0.000349005	0.001307584
3.0	0.000346753	0.001300942
3.1	0.000344713	0.001294724
3.2	0.000342865	0.001288904
3.3	0.000341181	0.001283432
3.4	0.000339644	0.001278282
3.5	0.000338236	0.001273426
3.6	0.000336921	0.001268759
3.7	0.000335663	0.001264170
3.8	0.000334504	0.001259821
3.9	0.000333433	0.001255701
4.0	0.000332440	0.001251779

Tablo 4-8. $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında oluşturulmuş portföylerin getirisi ve riski

Grafik 4-1'de Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline göre çözüm sonucu oluşan etkin sınır ve üzerindeki portföyler görülmektedir.



Grafik 4-1.Etkin Sınır ve Üzerindeki Portföyler

4.2. Lagrange Gevşetmesine Göre Optimal Portföy Seçimi Uygulaması

Lagrange Gevşetmesine göre yapacağımız uygulamada da, yine **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde sürekli olarak yer alan yirmi üç adet hisse senedinin, günlük kapanış fiyatlarını dikkate alarak oluşturduğumuz veri seti kullanılacaktır.

Lagrange Gevşetmesi ile yapacağımız uygulama iki aşamalı bir uygulamadır. Uygulamanın ilk aşamasında, varyans-kovaryans matrisi, bir parçası pozitif definitliği sabit kalmak koşulu simetrik bir matris ve diğeri köşegen bir matris olmak üzere, iki matrisin toplamı olarak yazılacaktır. Bu iki matrisin oluşturduğu yeni model, $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında tekrar çözülerek sonuçlar Markowitz'in Ortalama-Varyans modelinin sonuçları ile kıyaslanacaktır.

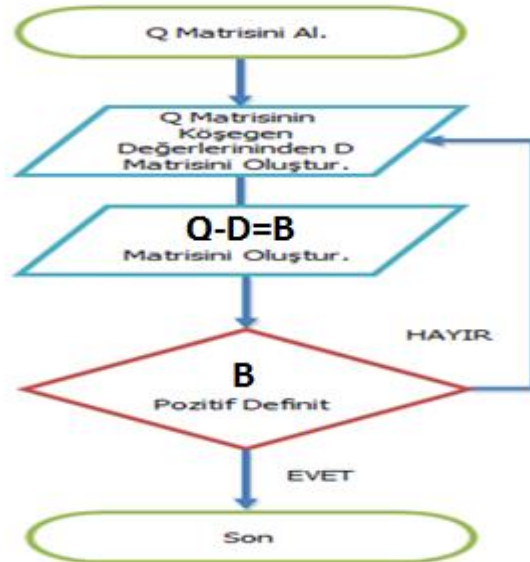
İkinci aşamada ise, çeşitli sayılarda hisse senetleri adetleri belirlenerek bir tamlık kısıtı yardımıyla $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında yeni küçük portföyler oluşturulacaktır.

(3.30) modelindeki pozitif definit \mathbf{Q} matrisi, $\mathbf{Q} = \mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}$ şeklinde ifade edilmiştir.

$\mathbf{Q} = \mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}$ ifadesinde, \mathbf{D} matrisi, $N \times N$ boyutlu köşegen matris olup, \mathbf{A} matrisi, $N \times M$ boyutlu bir matris, \mathbf{F} matrisi, $M \times M$ boyutlu matris olmak üzere, $M > N$ varsayımı altında köşegenleştirme işlemi için gerçekten son derece kullanışlı ve kolay anlaşılır bir işlemdir.² Burada yukarıda da belirttiğimiz gibi $\mathbf{B} = \mathbf{AFA}^T$ olup, \mathbf{B} matrisi pozitif definit bir matristir.

Bu ayrıştırma işlemi için geliştirilmiş olan bir başka yöntem ise, \mathbf{Q} matrisinin minimum özdeğeri (e_{\min}) hesaplanarak, $\mathbf{D} = e_{\min}$ olmak üzere bir ayrıştırma gerçekleştirilebilir.³

Bizim çalışmamızda elde ettiğimiz 23×23 boyutlu pozitif definit \mathbf{Q} matrisi, köşegen \mathbf{D} ve pozitif definit $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisine ayrıştırılırken, Şekil 4-2'deki iş akışı takip edilmiştir.



Şekil 4-2. \mathbf{Q} Matrisinin Ayrıştırılmasının İş Akışı

²Harry M. Markowitz, Andre F. Perold, "Portfolio Analysis with Factors and Scenarios", *The Journal of Finance*, C.36, No.14, 1981, s.875.

³Antonio Frangioni, Claudio Gentile, "Perspective cuts for a class of convex 0-1 mixed integer programs," *Mathematical Programming*, C.106, No:2, 2006, s.234.

Yukarıdaki iş akış tablosuna göre, pozitif definit **B** matrisini ve köşegen **D** matrisini elde etmek için ilk düşünülen alternatif sistematik ve sistematik olmayan riskleri ayırarak elde etmeye çalışalım. Bu durumda Sharpe'ın geliştirdiği endeks modelinden faydalanacağız. Sharpe'ın modelinin temel karakteristik özelliği, çeşitli varlıklarının getirilerinin sadece bazı temel faktörler ile ilişkilendirilmesi varsayımına dayanmasıdır. Bu modelim iki temel avantajı vardır. Bunların birincisi varlıkların arasındaki ilişkiyi yok sayan yaklaşımı dikkate almadan kolayca kurulabilmesi, ikincisi ise, elde edilen sonuçların büyük oranda bu ilişkiyi açıklayabilmesidir.⁴ Aradaki bu doğrusal ilişki bir regresyon denklemi olarak (4.2) de olduğu gibidir.

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + \varepsilon_i \quad (4.2)$$

Bu eşitlikte:

R_{it} : **i.** varlığın **t.** zamanındaki getirisi

α_i : Regresyon sabiti

β_i : Beta katsayısı (Sistematik Risk)

R_{mt} : Pazarın **t.** zamanındaki getirisi

ε_i : Hata terimi (Sistematik Olmayan Risk)

olup, geçmiş veriler dikkate alınarak elde edilmiş olan sistematik ve sistematik olmayan riske değerlerine ait *Tablo 4-9* aşağıdaki gibidir.

⁴William F. Sharpe, "A simplified Model for Portfolio Analysis," **Management Science**, C.9, No:2, 1963, s.281.

HİSSE SENEDİ	SİSTEMATİK RİSK	SİSTEMATİK OLMAYAN RİSK
AKBNK	0.000657273	0.000238486
AKENR	0.000186753	0.000647258
ARCLK	0.000268686	0.000506244
DOHOL	0.000358692	0.000608324
DYHOL	0.000373482	0.000986359
ECILC	0.000242131	0.000442774
ENKAI	0.000190920	0.000522978
EREGL	0.000342735	0.000413445
GARAN	0.000750882	0.000192892
ISCTR	0.000646649	0.000179126
KCHOL	0.000423669	0.000274597
KOZAA	0.000355934	0.001120462
KRDMD	0.000352117	0.000542083
PETKM	0.000231973	0.000367268
SAHOL	0.000467608	0.000307145
SISE	0.000350955	0.000282492
SKBNK	0.000462594	0.000621715
TCELL	0.000268930	0.000376454
TEBNK	0.000531826	0.000497590
THYAO	0.000226305	0.000487611
TUPRS	0.000256497	0.000389579
VAKBN	0.000639045	0.000256022
YKBNK	0.000525268	0.000257297

Tablo 4-9.Sistematik ve Sistematik Olmayan Riskler

Sistematik risklerin oluşturduğu $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisi *Ek-4'*de ve sistematik olmayan risklerin oluşturduğu köşegen \mathbf{D} matrisi ise, *Ek-5'*de görülmektedir.

*Ek-6'*da ise, bu değerlerin hesaplandığı ekran çıktıları görülmektedir.

*Ek-4'*de sistematik risklerin oluşturduğu $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisine ait asal minörlerin determinant değerleri *Tablo 4-10'*da gösterilmiştir.

BOYUT	DETERMİNANT
1×1	6.57E-04
2×2	2.10E-08
3×3	-2.49E-12
4×4	-7.65E-17
5×5	4.52E-19
6×6	-5.67E-23
7×7	8.56E-28
8×8	-7.01E-33
9×9	-7.46E-37
10×10	-8.30E-41
11×11	1.64E-45
12×12	5.61E-49
13×13	-2.05E-52
14×14	1.05E-56
15×15	-7.34E-61
16×16	2.75E-65
17×17	9.93E-70
18×18	1.02E-73
19×19	-2.99E-77
20×20	-2.46E-81
21×21	6.20E-86
22×22	-2.51E-90
23×23	-1.15E-93

Tablo 4-10.Sistematik Risklerin Asal Minörlerinin Determinantları

Yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere, sistematik olmayan risklerden oluşturduğumuz $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisi pozitif definit olmadığı için algoritma çalışmayacaktır.

Bunu gidermek için, *Şekil 4-2*'deki iş akışı dikkate alınarak, hem pozitif definit $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisini hem de köşegen \mathbf{D} matrisini elde etmeye yarayan bir Excel Makrosu geliştirilmiştir. Dilim aralığını 1/10.000 olarak geliştirilen yazılım ile elde ettiğimiz, pozitif definit $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisi *Ek-7*'de, köşegen \mathbf{D} matrisi ise, *Ek-8*'de görülmektedir.

Yazdığımız makronun kodu aşağıdaki gibidir:

Sub iterasyon()

Dim a As Single

Dim b As Single

a = 1

b = 0

For b = 0 To 10 Step 0.0001

Range("a27") = a

If Range("g27"). Value > 0 And Range("g28"). Value > 0 And Range("g29"). Value > 0 And Range("g30"). Value > 0 And Range("g31"). Value > 0 And Range("g32"). Value > 0 And Range("g33"). Value > 0 And Range("g34"). Value > 0 And Range("g35"). Value > 0 And Range("g36"). Value > 0 And Range("g37"). Value > 0 And Range("g38"). Value > 0 And Range("g39"). Value > 0 And Range("g40"). Value > 0 And Range("g41"). Value > 0 And Range("g42"). Value > 0 And Range("g43"). Value > 0 And Range("g44"). Value > 0 And Range("g45"). Value > 0 And Range("g46"). Value > 0 And Range("g47"). Value > 0 And Range("g48"). Value > 0 And Range("g49"). Value > 0 Then

Range("a27") = a

Else

a=a + b

End If

Next b

MsgBox " Katsayısı = " & a

End Sub

Tablo 4-11'de $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ matrisinin asal minörlerinin determinant değerleri görülmektedir.

BOYUT	DETERMİNANT
1×1	7.28E-04
2×2	3.92E-07
3×3	1.54E-10
4×4	7.64E-14
5×5	2.68E-17
6×6	8.55E-21
7×7	3.31E-24
8×8	1.01E-27
9×9	1.23E-31
10×10	8.33E-37
11×11	1.01E-40
12×12	7.62E-44
13×13	2.37E-47
14×14	5.18E-51
15×15	6.90E-55
16×16	9.59E-59
17×17	3.50E-62
18×18	5.09E-66
19×19	1.28E-69
20×20	3.92E-73
21×21	1.01E-76
22×22	4.75E-81
23×23	6.85E-86

Tablo 4-11. $\mathbf{AFA}^T = \mathbf{B}$ Matrisinin Asal Minörlerinin Determinantları

Lagrange Gevşetmesine temel teşkil edecek olan modelimiz (4.3) de gösterilmiştir.⁵

⁵Leonid Kopman, Shucheng S. Lui, Dong Shaw, **The Journal of Portfolio Management**, C.35, No:2, 2009, s.76.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T (\mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}) \mathbf{x} \\
\sum_{i=1}^{23} x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &\leq K \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\
x_i &\geq 0 \\
2 &\leq \lambda \leq 4 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.3) modelini için daha önceki bölümde belirttiğimiz gevşetme yöntemlerini uygulayabilmemiz için yeni bir değişken tanımlamamız gerekmektedir. Bu değişken $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ değişkeni olup, modele girdiği takdirde modelimiz (4.4) deki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T (\mathbf{AFA}^T + \mathbf{D}) \mathbf{x} \\
\sum_{i=1}^{23} x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &\leq K \\
\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1} \\
x_i &\geq 0 \\
2 &\leq \lambda \leq 4 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Modelimizde $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ şeklinde bir kısıtın oluşmasına yardımcı olan bu değişken sayesinde $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ kısıtını $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ şeklinde yazarak bu ifadeyi de bir μ parametresi ile çarptıktan sonra amaç denklemine eklediğimiz zaman (4.5) modeline ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\max Z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T (\mathbf{AFA}^T) \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{Dy} - \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
\sum_{i=1}^{23} x_i &= 1 \\
nnz(\mathbf{x}) &\leq K \\
\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1} \\
x_i &\geq 0 \\
2 &\leq \lambda \leq 4 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) modelini iki eşit parçaya ayırsak, bu iki parça $\boldsymbol{\mu}$ nün bir fonksiyonu olarak (4.6) ve (4.7) da olduğu gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{\mu}) &= \max Z_1 = (\mathbf{c} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y}^T \mathbf{Dy} \\
nnz(\mathbf{x}) &\leq K \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{y} \leq \mathbf{1} \\
y_i &\geq 0 \\
2 &\leq \lambda \leq 4 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
f_2(\boldsymbol{\mu}) &= \max Z_2 = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T (\mathbf{AFA}^T) \mathbf{x} \\
\sum_{i=1}^{23} x_i &= 1 \\
\mathbf{0} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \\
x_i &\geq 0 \\
2 &\leq \lambda \leq 4 \\
K &\in \mathbb{Z}^+
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.6) ve (4.7) modellerinin çözümü sonucunda $f_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{max Z}_1$ ve $f_2(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{max Z}_2$ olmak üzere, (4.5) modelinin çözümünden elde edilen $\mathbf{max Z}^*$ değeri arasında, $\boldsymbol{\mu}$ nün bütün değerleri için, $f_1(\boldsymbol{\mu}) + f_2(\boldsymbol{\mu}) \geq \mathbf{max Z}^*$ ilişkisi vardır.⁶

Biz uygulamamızda, $f_1(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{max Z}_1$ ve $f_2(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{max Z}_2$ değerlerinin toplamı olarak $f_1(\boldsymbol{\mu}) + f_2(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{max Z}'$ ifadesini kullanacağız.

(4.7) modeli aslında bir portföy seçimi problemi olup, çözümü bilinen yöntemlerle hızla yapılabilir. Bu arada, (4.6) modelinin çözümü ise, daha da basittir. Bu iki parçalı çözüm için seçilecek olan K değeri, algoritmanın son derece hızlı bir şekilde sonuç vermesine yardımcı olur. Bu tip algoritmalara, sonuca çok hızlı ulaşmalarından dolayı *açgözlü, hırslı, doyumsuz* anlamlarına gelen (*greedy algorithm*) algoritmalar adı verilir.

Belirli bir sayıda hisse senedini dikkate alarak elde edilen küçük portföylerin elde edileceği portföy seçimi problemi için, (4.6) ve (4.7) modellerinin amaç denklemleri değerlerinin toplamı bir *üst sınır (upper bound)* verecektir.

Bu *üst sınır*'ın uygun \mathbf{K} değeri ve riskten kaçınma katsayısı λ ile birlikte tespit edilecek olan $\boldsymbol{\mu}$ ile birlikte hesaplanması işlemide bu çalışmanın uygulama basamaklarından biridir.

Bununla ilgili uygulama ve uygulamanın sonuçları Markowitz modeline ve Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen portföylerin amaç denklemlerinin bazı riskten kaçınma katsayılarına göre bir sağlama işlemi olarak düşünülerek, tezin son kısmında yer alacaktır.

⁶Leonid Kopman, Shucheng S. Lui, Dong Shaw, **The Journal of Portfolio Management**, C.35, No:2, 2009, s.77.

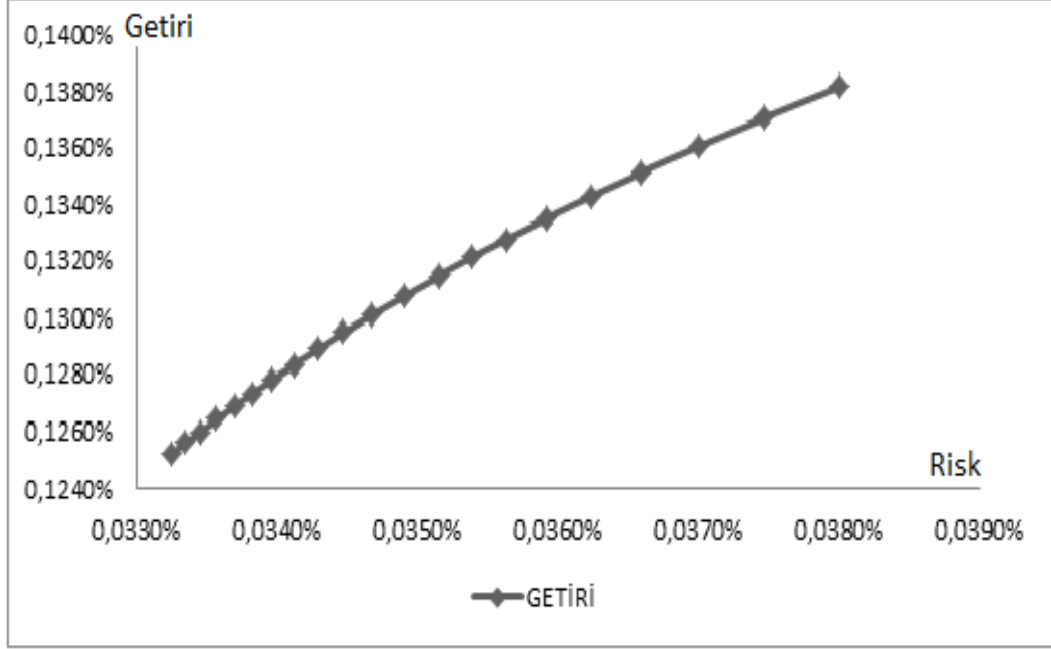
(4.5) modeli uygulamada kullanılacak olan gevşetilmiş modeldir. Burada, aynı veri seti ile, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli ile sonuçların kıyaslanması açısından $\mu = 0$ olmak üzere elde edilen model, portföye girecek hisse senedi sayısının üst sınırı tüm hisse adetleri olup, $K = 23$ olmak üzere, $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığında elde edilen amaç fonksiyonu değerleri *Tablo 4-12*'de görülmektedir.

λ	$\max Z^*$	İterasyon	Süre (sn)
2.0	0.0006212635	11	<1
2.1	0.0005835313	14	<1
2.2	0.0005463031	16	<1
2.3	0.0005095130	13	<1
2.4	0.0004731065	13	<1
2.5	0.0004370373	14	<1
2.6	0.0004012666	14	<1
2.7	0.0003657612	14	<1
2.8	0.0003304934	16	<1
2.9	0.0002954702	18	<1
3.0	0.0002606843	19	<1
3.1	0.0002261126	19	<1
3.2	0.0001917350	18	<1
3.3	0.0001575340	17	<1
3.4	0.0001234939	17	<1
3.5	0.0000896010	17	<1
3.6	0.0000558433	20	<1
3.7	0.0000222149	19	<1
3.8	-0.000011293	20	<1
3.9	-0.000044689	20	<1
4.0	-0.000077982	19	<1

Tablo 4-12. Lagrange Gevşetmesine Göre Amaç Fonksiyonu Değerleri

Tablo 4-4 ve *Tablo 4-12* incelendiği zaman tüm sonuçların birbirleri ile aynı olduğu görülmektedir. Burada dikkat çekici özellik, Lagrange Gevşetmesi ile elde edilen çözümlerdeki iterasyon adetlerinin, klasik Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli çözümündeki iterasyon adetlerinden daha az olmasıdır. Tüm sonuçlara, Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli **15-24** arasında değişen iterasyon sayıları ile ulaşırken, aynı sonuçlar Lagrange Gevşetmesi modeline göre **11-20** arasında iterasyon ile elde edilmiştir.

Lagrange Gevşetmesi ile elde edilmiş olan portföylerin oluşturduğu etkin sınır, *Grafik 4-2*'de gösterilmiştir.



Grafik 4-2.Etkin Sınır ve Üzerindeki Portföyler

Lagrange Gevşetmesine göre çözüm için geliştirilen ana modelin LINGO ekranına yazılmış olan hali *Ek-9*'da olduğu gibidir.

Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen sonuçların ekran çıktıları *Ek-10*'da görülmektedir.

43. Lagrange Gevşetmesine Göre Optimal Küçük Portföylerin Seçimi

Altbaşlık 4.1 ve *Altbaşlık 4.2*'de yapılan çözümler sonucunda seçilen portföyler için elde edilen, portföy bileşimleri ve bu bileşimlerin $2 \leq \lambda \leq 4$ aralığındaki riskten kaçınma katsayıları altındaki etkin sınır grafikleri çizilmiştir.

Markowitz'in Ortalama-Varyans modelinin ve Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen çözümler sonucunda, $\lambda = 2$ için altı, $\lambda = 3$ yedi ve $\lambda = 4$ için sekiz adet hisse senedinden oluşan portföylerden yukarıda bahsetmiştik. Elde ettiğimiz bu portföyler, en iyi çeşitlendirilmiş portföylerdir. Şimdi ise, bir *tamlık* kısıtı yardımıyla $\lambda = 2, 3, 4$ değerleri için küçük portföyler oluşturalım.

$\lambda = 2$ değeri için elde edilen portföylerin amaç fonksiyonu, iterasyon sayıları ve hesaplanma sürelerine göre oluşturulan küçük portföyler *Tablo 4-13*'de verilmiştir.

$\lambda = 2$	İşlemci: Intel Core2 2.4GHz	RAM: 2 GB		
K	max Z*	Sınır	İterasyon	Süre (sn.)
1	0.000019153	Opt.	1673	5
2	0.000391595	Opt.	9993	23
3	0.000529558	Opt.	3267	6
4	0.000519565	Opt.	10049	19
5	0.000583972	Opt.	892	2
6	0.000621263	Opt.	259	1

Tablo 4-13. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri

Tablo 4-14'de $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ değerleri için oluşturulmuş olan optimal portföy bileşimleri içindeki ağırlıklar görülmektedir.

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2					
	K					
	1	2	3	4	5	6
AKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKENR	0.00%	40.46%	28.66%	0.00%	20.64%	20.64%
ENKAI	0.00%	0.00%	0.00%	20.77%	21.61%	21.66%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.48%	0.48%
KOZAA	0.00%	0.00%	22.95%	19.97%	18.64%	18.63%
TCELL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
THYAO	100.00%	59.54%	48.39%	38.34%	38.63%	38.63%
TUPRS	0.00%	0.00%	0.00%	20.92%	0.00%	0.00%
RİSK	0.000713916	0.000488486	0.000482834	0.000410441	0.000412947	0.000412942
GETİRİ	0.001446987	0.001368566	0.001495225	0.001401277	0.001422934	0.001422923

Tablo 4-14. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Optimal Küçük Portföyler

Tablo 4-14'de görüleceği gibi, riskten kaçınma katsayısı ($\lambda = 2$) olduğu durumda. $K = 1$ değeri için elde edilecek getiri en yüksek olup, bu getiri için kabul edilen risk düzeyi en yüksek seviyededir. Aynı şekilde. $K = 6$ değeri için ise risk en düşük seviyededir ve bu portföyün getirisi de en düşük getiridir. Bu göstergeler çeşitlendirme ile riskin azaltıldığının bir kanıtı olarak sunulabilir.

$\lambda = 3$ değeri için elde edilen portföylerin amaç fonksiyonu, iterasyon sayıları ve hesaplanma sürelerine göre oluşturulan küçük portföyler, *Tablo 4-15*'de verilmiştir.

$\lambda = 3$	İşlemci: Intel Core2 2.4GHz		RAM: 2 GB	
K	max Z*	Sınır	İterasyon	Süre (sn.)
1	-0.000694764	Opt.	1431	4
2	-0.000078358	Opt.	13856	30
3	0.000009799	Opt.	2894	6
4	0.000180647	Opt.	4424	7
5	0.000124790	Opt.	4920	9
6	0.000210925	Opt.	10875	7
7	0.000260684	Opt.	317	1

Tablo 4-15. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri

Tablo 4-16'da $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ değerleri için oluşturulmuş olan optimal portföy bileşimleri içindeki ağırlıklar görülmektedir.

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3						
	K						
	1	2	3	4	5	6	7
AKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKENR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	15.84%
ECILC	0.00%	0.00%	22.30%	0.00%	11.64%	4.28%	0.90%
ENKAI	0.00%	0.00%	33.67%	23.48%	26.07%	20.24%	17.77%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.79%	0.00%	0.00%
KOZAA	0.00%	0.00%	0.00%	15.47%	15.22%	13.13%	11.38%
TCELL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	11.93%	8.73%
THYAO	100.00%	52.61%	44.03%	36.07%	37.27%	31.48%	29.64%
TUPRS	0.00%	47.39%	0.00%	24.98%	0.00%	18.95%	15.74%
RİSK	0.000713916	0.000453657	0.000395094	0.000414297	0.000365782	0.000364689	0.000346753
GETİRİ	0.001446987	0.001282612	0.001300220	0.001345227	0.001345332	0.001342199	0.001300945

Tablo 4-16. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Optimal Küçük Portföyler

Tablo 4-16'dan görüleceği gibi, riskten kaçınma katsayısı ($\lambda = 3$) olduğu durumda, $K = 3, 5, 6, 7$ değerleri için portföye ECILC hisse senedi girmektedir. ECILC $K = 3$ ve 5 değeri için portföye %10'un üzerinde oranlarda girerken, $K = 6$ ve 7 değerleri için bu oran %5'in altında yer almaktadır. Diğer değerlerde ise, portföye girmemektedir.

$\lambda = 4$ değeri için elde edilen portföylerin amaç fonksiyonu, iterasyon sayıları ve hesaplanma sürelerine göre oluşturulan küçük portföyler, *Tablo 4-17*'de verilmiştir.

$\lambda = 4$	İşlemci: Intel Core2 2.4GHz		RAM: 2 GB	
K	max Z*	Sınır	İterasyon	Süre (sn)
1	-0.01408681	Opt.	1195	4
2	-0.00053110	Opt.	7742	12
3	-0.00027950	Opt.	2969	6
4	-0.00029908	Opt.	4950	11
5	-0.00014806	Opt.	9358	7
6	-0.00026263	Opt.	9232	12
7	-0.00013676	Opt.	1370	3
8	-0.00007798	Opt.	287	1

Tablo 4-17. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Portföy Seçimi Modeli Amaç Değerleri

Tablo 4-18'de $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ değerleri için oluşturulmuş olan optimal portföy bileşimleri içindeki ağırlıklar görülmektedir.

HİSSE SENEDİ	RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=4							
	K							
	1	2	3	4	5	6	7	8
AKENR	0.00%	0.00%	27.97%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	15.07%
ECILC	0.00%	0.00%	0.00%	18.68%	0.00%	13.47%	6.43%	3.69%
ENKAI	0.00%	0.00%	31.56%	29.54%	21.80%	25.30%	19.89%	17.94%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.76%	3.05%	0.56%
KCHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	6.52%	0.00%	0.00%
KOZAA	0.00%	0.00%	0.00%	13.83%	10.90%	11.69%	9.77%	8.32%
TCELL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	16.44%	0.00%	14.37%	11.78%
THYAO	100.00%	51.03%	40.47%	37.95%	30.16%	33.28%	28.32%	26.92%
TUPRS	0.00%	48.97%	0.00%	0.00%	20.70%	0.00%	18.18%	15.71%
RİSK	0.000713916	0.000452059	0.000393950	0.000404480	0.000351514	0.000385469	0.000341877	0.000332441
GETİRİ	0.001446987	0.001277133	0.001296296	0.001318011	0.001257990	0.001279244	0.001230744	0.001251782

Tablo 4-18. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Optimal Küçük Portföyler

Tablo 4-18'de görüleceği gibi, riskten kaçınma katsayısı ($\lambda = 4$) olduğu durumda, en büyük pay THYAO hisse senedine aittir. KCHOL sadece $K = 6$ değeri için portföyde yer almıştır. ENKAI hisse senedi, $K = 1, 2$ değerleri dışındaki tüm değerlerde portföyde yüksek oranlarda yer alan bir diğer hisse senedir.

Ek-11'de optimal portföy bileşimlerini, amaç denklemleri değerlerini ve iterasyon sayılarını gösteren ekran çıktıları bulunmaktadır.

Yukarıda da görüldüğü gibi, $\lambda = 2$ için altı, $\lambda = 3$ yedi ve $\lambda = 4$ için sekiz adet hisse senedinden oluşan portföyleri oluşturmuş bulunuyoruz. (4.6) ve (4.7) modellerinde görüldüğü gibi ayrıştırılan bu modeller için, öncelikle $\mu = 0$ olarak elde ettiğimiz her bir portföy için bir *üst sınır* hesaplayalım.

$\lambda = 2$ ve $\mu = 0$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.00134903	-0.000573472	0.000756405	0.000019153	0.000737252
2	0.00252993	-0.000573472	0.001564863	0.000391595	0.001173268
3	0.00348216	-0.000573472	0.002379130	0.000529558	0.001849572
4	0.00442448	-0.000573472	0.003331443	0.000519565	0.002811878
5	0.00529970	-0.000573472	0.004142256	0.000583972	0.003558284
6	0.00615902	-0.000573472	0.004964285	0.000621263	0.004343022

Tablo 4-19. $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri

Tablo 4-19'da görüleceği gibi $\max Z' \geq \max Z^*$ eşitsizliği gerçekten $\mu = 0$ ve $\lambda = 2$ değerleri için sağlanmıştır. **K**'nın muhtelif değerleri için, $\max Z' = \max Z_1 + \max Z_2$ değeri bir *üst sınır* değeridir.

Burada dikkat edilecek konulardan biri de, $\max Z_2$ değeridir. Bu değer, λ ve μ 'nın sabit olduğu ve **K** değerlerinin değiştiği iterasyonlarda daima aynı amaç fonksiyonu değerine sahip olmaktadır.

Aynı şekilde, belirlenecek olan \mathbf{K} değeri elde edilmek istenen portföydeki hisse senedi sayısına yaklaştıkça optimal noktaya yaklaşmak daha kolay bir hal olacak olup, algoritmanın çözüme daha kısa sürede ve kolay olarak ulaşmasına yardımcı olur.

Tablo 4-20'de, $\mu = 0$ ve $\lambda = 3$ ve *Tablo 4-21*'de, $\mu = 0$ ve $\lambda = 4$ değerleri için, *üst sınır* değerleri görülmektedir. Her iki tablo içinde, bütün \mathbf{K} değerleri göz önüne alındığında, $\max \mathbf{Z}' \geq \max \mathbf{Z}^*$ eşitsizliği daima sağlanmaktadır.

$\lambda = 3$ ve $\mu = 0$					
\mathbf{K}	$\max \mathbf{Z}_1$	$\max \mathbf{Z}_2$	$\max \mathbf{Z}'$	$\max \mathbf{Z}^*$	$\max \mathbf{Z}' - \max \mathbf{Z}^*$
1	0.00107389	-0.00086028	0.00021361	-0.000694764	0.000908374
2	0.00212174	-0.00086028	0.00126146	-0.000078358	0.001339818
3	0.00290864	-0.00086028	0.00204836	0.000009799	0.002038561
4	0.00368499	-0.00086028	0.00282471	0.000180647	0.002644063
5	0.00442717	-0.00086028	0.00356689	0.000124790	0.003442100
6	0.00516609	-0.00086028	0.00430581	0.000210925	0.004094885
7	0.00585263	-0.00086028	0.00499235	0.000260684	0.004731666

Tablo 4-20. $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri

$\lambda = 4$ ve $\mu = 0$					
\mathbf{K}	$\max \mathbf{Z}_1$	$\max \mathbf{Z}_2$	$\max \mathbf{Z}'$	$\max \mathbf{Z}^*$	$\max \mathbf{Z}' - \max \mathbf{Z}^*$
1	0.000914807	-0.00114694	-0.00023213	-0.01408681	0.013854677
2	0.001734250	-0.00114694	0.00058731	-0.00053110	0.001118410
3	0.002365720	-0.00114694	0.00121878	-0.00027950	0.001498280
4	0.002984240	-0.00114694	0.00183730	-0.00029908	0.002136380
5	0.003593380	-0.00114694	0.00244644	-0.00014806	0.002594500
6	0.004197620	-0.00114694	0.00305068	-0.00026263	0.003313310
7	0.004754030	-0.00114694	0.00360709	-0.00013676	0.003743850
8	0.005229550	-0.00114694	0.00408261	-0.00007798	0.004160590

Tablo 4-21. $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri

Tablo 4-19, *Tablo 4-20* ve *Tablo 4-21*'de yer alan, $\max \mathbf{Z}_1$ ve $\max \mathbf{Z}_2$ değerlerinin hesaplandığı algoritmanın ekran çıktıları, *Ek-12*'de verilmiştir.

Bu ana kadar yaptığımız uygulamalara ilave olarak şimdi de çeşitli μ değerleri için, *üst sınırlar* hesaplayalım. *Tablo 4-1'de* uygulamada kullanacağımız **23** adet hisse senedine ait ortalama getirileri hesaplamıştık. Bu tabloya göre ortalama getirisi en yüksek olan hisse senedi **0.001899307**'lik değerle KOZAA, ortalama getiriş en düşük olan hisse senedi ise, **0.000026665**'lik değerle DYHOL'dir.

Lagrange Gevşetmesine göre *üst sınır* belirlenirken, (4.6) ve (4.7) modellerini hatırlayacak olursak (4.6) modeli için getirilerin oluşturduğu vektörden μ vektörünün çıkarıldığını görmekteyiz. Aynı şekilde çıkarılan bu μ vektörü (4.7) modelinin amaç fonksiyonunda yer alacaktır.

Bunun anlamı, $\mathbf{Q} = \mathbf{B} + \mathbf{D}$ şeklinde ayrılan pozitif definit varyans-kovaryans matrisine ilave olarak, getirilerin oluşturduğu vektöründe ayrıştırılarak algoritmanın çalıştırılmasından ibarettir.

μ değerini belirlerken en düşük getiriye sahip olan değerden daha küçük değerler tespit edilerek çeşitli \mathbf{K} değerleri için, *üst sınır* lar tespit edeceğiz. Burada μ 'nün **0.000026665**'den daha küçük seçilmesinin nedeni ise, yatırımcıların her hisse senedinden getiri beklentisidir. Eğer $\mu \geq 0.000026665$ olursa, elde edilecek portföye DYHOL hisse senedi asla giremez. Çünkü hisse senedinin getirisi sıfır yada negatif olacaktır.

Bu çalışma için μ değerleri, **0.000025**, **0.000015** ve **0.000005** olarak seçilmiştir.

Tablo 4-22, *Tablo 4-23* ve *Tablo 4-24*'de yer alan fark sütunlarını incelediğimiz zaman tüm değerlerin pozitif olduğunu görmekteyiz. $\max Z_1 + \max Z_2 \geq \max Z^*$ eşitsizliği $\mu = 0.000025$ için sağlanmaktadır. $\lambda = 2, 3, 4$ değerlerinin oluşturabileceği küçük portföylerin tamamı için bu algoritma çalıştırılmış ve elde edilen bütün küçük portföyler için eşitsizlik doğrulanmıştır. Bütün tablolar için, $\max Z' = \max Z_1 + \max Z_2$ değeri bir *üst sınır*dır.

Bu tablolardaki *Fark* sütunu incelendiği zaman gerçekten algoritmanın *açgözlü, hırslı, doyumsuz* anlamlarına gelen (*greedy algorithm*) algoritma olduğunu görmekteyiz. Gerçekten de fark değerleri genellikle binde birlik farklarla optimal nokta civarında sonuçlar vermektedir.

Tablo 4-22'te yer alan $K=4$ değeri için fark değerine, $K=3$ yazarsak ulaşacağımız yaklaşık sonuçla, $K=5$ yazarsak ulaşacağımız sonuç arasında da fark bulunmaktadır. $K=5$ değeri, $K=4$ değerinin optimal noktasına daha yakın bir değer olduğu aynı zamanda da bir *üst sınır* değeridir.

Tablo 4-22, *Tablo 4-23* ve *Tablo 4-24*'de $\mu = 0.000025$ ve $\lambda = 2, 3, 4$ için *üst sınır* değerleri görülmektedir.

$\mu = 0.000025$ ve $\lambda = 2$					
K	$\max Z_1$	$\max Z_2$	$\max Z'$	$\max Z^*$	$\max Z' - \max Z^*$
1	0.00132443	-0.000548472	0.000775958	0.000019153	0.000756805
2	0.00248032	-0.000573472	0.001906848	0.000391595	0.001515253
3	0.00340755	-0.000573472	0.002834078	0.000529558	0.002304520
4	0.00432487	-0.000573472	0.003751398	0.000519565	0.003231833
5	0.00517510	-0.000573472	0.004601628	0.000583972	0.004017656
6	0.00600942	-0.000573472	0.005435948	0.000621263	0.004814685

Tablo 4-22. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için *Üst Sınır Değerleri*

$\mu = 0.000025$ ve $\lambda = 3$					
K	$\max Z_1$	$\max Z_2$	$\max Z'$	$\max Z^*$	$\max Z' - \max Z^*$
1	0.00104929	-0.000835208	0.000214082	-0.000694764	0.000908846
2	0.00207214	-0.000835208	0.001236932	-0.000078358	0.001315290
3	0.00283403	-0.000835208	0.001998822	0.000009799	0.001989023
4	0.00358538	-0.000835208	0.002750172	0.000180647	0.002569525
5	0.00430256	-0.000835208	0.003467352	0.000124790	0.003342562
6	0.00501648	-0.000835208	0.004181272	0.000210925	0.003970347
7	0.00567803	-0.000835208	0.004842822	0.000260684	0.004582138

Tablo 4-23. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri

$\mu = 0.000025$ ve $\lambda = 4$					
K	$\max Z_1$	$\max Z_2$	$\max Z'$	$\max Z^*$	$\max Z' - \max Z^*$
1	0.000889807	-0.00112194	-0.000232133	-0.01408681	0.013854677
2	0.001688160	-0.00112194	0.000566220	-0.00053110	0.001097320
3	0.002294720	-0.00112194	0.001172780	-0.00027950	0.001452280
4	0.002888240	-0.00112194	0.001766300	-0.00029908	0.002065380
5	0.003472380	-0.00112194	0.002350440	-0.00014806	0.002498500
6	0.004053670	-0.00112194	0.002931730	-0.00026263	0.003194360
7	0.004585090	-0.00112194	0.003463150	-0.00013676	0.003599910
8	0.005038300	-0.00112194	0.003916360	-0.00007798	0.003994340

Tablo 4-24. $\mu = 0.000025$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri

Yukarıdaki ifadelerin tamamı, $\mu = 0.000015$ ve $\lambda = 2, 3, 4$ değerleri içinde geçerli olup, $\max Z_1 + \max Z_2 \geq \max Z^*$ eşitsizliğinin sağlandığı ve *üst sınır* değerlerinin gösterildiği *Tablo 4-25*, *Tablo 4-26* ve *Tablo 4-27* aşağıdaki gibidir.

$\mu = 0.000015$ ve $\lambda = 2$					
K	$\max Z_1$	$\max Z_2$	$\max Z'$	$\max Z^*$	$\max Z' - \max Z^*$
1	0.00133443	-0.000558472	0.000775958	0.000019153	0.000756805
2	0.00250032	-0.000558472	0.001941848	0.000391595	0.001550253
3	0.00343755	-0.000558472	0.002879078	0.000529558	0.002349520
4	0.00436487	-0.000558472	0.003806398	0.000519565	0.003286833
5	0.00522510	-0.000558472	0.004666628	0.000583972	0.004082656
6	0.00606942	-0.000558472	0.005510948	0.000621263	0.004889685

Tablo 4-25. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri

$\mu = 0.000015$ ve $\lambda = 3$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.00105929	-0.000845208	0.000214082	-0.000694764	0.000194929
2	0.00209214	-0.000845208	0.001246932	-0.000078358	0.000855337
3	0.00286403	-0.000845208	0.002018822	0.000009799	0.001489264
4	0.00362538	-0.000845208	0.002780172	0.000180647	0.002260607
5	0.00435256	-0.000845208	0.003507352	0.000124790	0.002923380
6	0.00507648	-0.000845208	0.004231272	0.000210925	0.003610009
7	0.00574803	-0.000845208	0.004902822	0.000260684	0.005039582

Tablo 4-26. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri

$\mu = 0.000015$ ve $\lambda = 4$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.000899807	-0.00114194	-0.00023213	-0.01408681	0.013854677
2	0.001706700	-0.00114194	0.000564760	-0.00053110	0.001095860
3	0.002323180	-0.00114194	0.001181240	-0.00027950	0.001460740
4	0.002926690	-0.00114194	0.001784750	-0.00029908	0.002083830
5	0.003520830	-0.00114194	0.002378890	-0.00014806	0.002526950
6	0.004111260	-0.00114194	0.002969320	-0.00026263	0.003231950
7	0.004652670	-0.00114194	0.003510730	-0.00013676	0.003647490
8	0.005114740	-0.00114194	0.003972800	-0.00007798	0.004050780

Tablo 4-27. $\mu = 0.000015$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri

Aynı şekilde, $\mu = 0.000025$ ve $\lambda = 2, 3, 4$ değerleri için, $\max Z_1 + \max Z_2 \geq \max Z^*$ eşitsizliğinin sağlandığı ve üst sınır değerlerinin gösterildiği *Tablo 4-28*, *Tablo 4-29* ve *Tablo 4-30* aşağıdaki gibidir.

$\mu = 0.000005$ ve $\lambda = 2$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.00134443	-0.000568472	0.000775958	0.000019153	0.000756805
2	0.00252032	-0.000568472	0.001951848	0.000391595	0.001560253
3	0.00346755	-0.000568472	0.002899078	0.000529558	0.002369520
4	0.00440487	-0.000568472	0.003836398	0.000519565	0.003316833
5	0.00527510	-0.000568472	0.004706628	0.000583972	0.004122656
6	0.00612942	-0.000568472	0.005560948	0.000621263	0.004939685

Tablo 4-28. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 2$ ve $K = 1, 2, \dots, 6$ için Üst Sınır Değerleri

$\mu = 0.000005$ ve $\lambda = 3$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.00106929	-0.000855208	0.000214082	-0.000694764	0.000908846
2	0.00211214	-0.000855208	0.001256932	-0.000078358	0.001335290
3	0.00289403	-0.000855208	0.002038822	0.000009799	0.002029023
4	0.00366538	-0.000855208	0.002810172	0.000180647	0.002629525
5	0.00440257	-0.000855208	0.003547362	0.000124790	0.003422572
6	0.00513648	-0.000855208	0.004281272	0.000210925	0.004070347
7	0.00581803	-0.000855208	0.004962822	0.000260684	0.004702138

Tablo 4-29. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 3$ ve $K = 1, 2, \dots, 7$ için Üst Sınır Değerleri

$\mu = 0.000005$ ve $\lambda = 4$					
K	max Z_1	max Z_2	max Z'	max Z^*	max $Z' - \max Z^*$
1	0.000909807	-0.00114194	-0.000232133	-0.01408681	0.013854677
2	0.001725280	-0.00114194	0.000583340	-0.00053110	0.001114440
3	0.002351750	-0.00114194	0.001209810	-0.00027950	0.001489310
4	0.002965270	-0.00114194	0.001823330	-0.00029908	0.002122410
5	0.003569410	-0.00114194	0.002427470	-0.00014806	0.002575530
6	0.004169030	-0.00114194	0.003027090	-0.00026263	0.003289720
7	0.004720440	-0.00114194	0.003578500	-0.00013676	0.003715260
8	0.005191450	-0.00114194	0.004049510	-0.00007798	0.004127490

Tablo 4-30. $\mu = 0.000005$, $\lambda = 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$ için Üst Sınır Değerleri

Tablo 4-22 ve *Tablo 4-30* arasındaki bütün tablolardaki üst sınır değerlerinin hesaplandığı algoritmanın ekran çıktıları, *Ek-13*'de verilmiştir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada kullanılan **02.01.2006** ve **03.01.2011** tarihleri arasında İMKB-30 endeksinde sürekli olarak yer alan yirmi üç adet hisse senedine ait sonuçlarını üç temel başlıkta incelememiz gerekecektir. Bu üç başlık sırası ile:

- i. Markowitz'in Ortalama-Varyans modeline ve Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen portföylerin sonuçlarının yorumu,
- ii. Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen. $K = 1, 2, \dots, 8$ değerleri için elde edilen küçük portföylerin yorumu,
- iii. Lagrange Gevşetmesine göre elde edilen portföyler için *üst sınır* bulunmasıdır.

Markowitz'in Ortalama-Varyans modeli ve Lagrange Gevşetmesine göre çözüm değerleri birbirleri ile aynı sonuçları vermiştir. Elde edilen portföy bileşimleri ve bu portföylerin oluşturdukları etkin sınır eğrileri birbirleri ile aynıdır. Burada dikkat çekici özellik, iterasyon sayısı açısından Lagrange Gevşetmesinin daha az sayıda iterasyonla sonuca ulaşmasıdır.

Bu sonuçlar incelendiğinde, elde edilen sekiz hisse senedine sahip portföylerde en büyük pay THYAO hisse senedine aittir. Bu pay %25-32 civarında olup tüm riskten kaçınma katsayıları için çok az değişiklik göstermektedir. Daha sonra sırasıyla, ENKAI %15-16, TUPRS %13-14, AKENR %11-14, KOZAA %8-16, AKBNK %7-11, TCELL %1-10 ve ECILC %1-3 civarında oranlarla portföye girmektedir.

Son derece küçük değişiklikler ile, portföy bileşiminin değişmesinin temel nedeni ise, varyans-kovaryans matrisinin pozitif definit olmasından kaynaklanmaktadır. Bunun anlamı, maksimum problem olarak çözülen modelin global bir maksimuma sahip olduğudur.

Ayrıca portföy içerisinde ağırlık olarak ilk dört sırada yer alan THYAO, ENKAI, TUPRS ve AKENR, hisse senetleri portföy bileşimlerinin tamamında yaklaşık %60 civarlarında pay almaktadırlar.

Ayrıca portföy içerisindeki paylara bakıldığında KOZAA ve AKBNK hisse senetlerinin paylarının değişim aralığının diğer hisse senetlerinden daha fazla olduğu söylenebilir.

Bu sonuç elde edilen küçük portföyler açısından incelenecek olursa, $\lambda = 4$ ve $K = 7$ değeri dışındaki tüm portföylerde THYAO portföye girmiştir.

Küçük portföyler oluşturulurken dikkat edilmesi gereken bir özellik ise, riskten kaçınma sayısı yükseldiği zaman portföye giren hisse senedi sayısının sekize yükselmesidir. Burada sekizinci hisse senedi ECILC'tır.

Küçük portföyler oluşturulurken, elimizdeki hisse senedi ne kadar çok olursa olsun küçük portföyün oluşacağı maksimum hisse senedi adedi riskten kaçınma katsayısına bağlı olarak daima Markowitz'in Ortalama-Varyans modelinden elde edilen portföyün içerdiği hisse senedi sayısına eşit olacaktır.

Dolayısıyla elde edilen küçük portföylerin içerdiği hisse senedi sayısı, $\lambda = 2$ için $1 \leq K \leq 6$, $\lambda = 3$ için $1 \leq K \leq 7$, $\lambda = 4$ için $1 \leq K \leq 8$ olur.

Tek hisse senedinden oluşmuş olan bütün portföylerin getirileri çok yüksek olup, aynı şekilde bu portföylerin riskleri de çok yüksektir. Küçük portföylerde çeşitlendirme arttıkça risk azalmaktadır.

Küçük portföyler elde edilirken kullanmış olduğumuz algoritmanın içerisinde Varyans-kovaryans matrisinin içerisinde köşegen bir matrisin ayrıştırılarak modelin bir parçası olarak yer alırken, diğer parça pozitif definitliği korunarak elde edilen ikinci matrisi içermektedir.

Lagrange Gevşetmesi ile küçük portföyler elde edilirken kullanmış olduğumuz algoritma içerisinde, varyans-kovaryans matrisini, pozitif definit $\mathbf{B} = \mathbf{AFA}^T$ ve köşegen \mathbf{D} şeklinde iki matris olarak ayırabilmek için geliştirdiğimiz bir Excel Makrosundan yararlanılmıştır. Bu Makro yardımı ile, ayrıştırmayı düşündüğümüz matris alanını, ayrıştırma işleminin iterasyon dilim aralıklarını belirleyerek, istediğimiz özelliklerdeki, $\mathbf{B} = \mathbf{AFA}^T$ ve \mathbf{D} matrislerine kolayca ulaşmak mümkün hale gelmiştir.

Bu çalışma ile ilgili üçüncü sonuç başlığı ise, *üst sınırların* elde edilmesidir. Küçük portföylerin elde edilmesinde, $\mu = \mathbf{0}$ için algoritmanın çalışması ile elde edilen sonuçlardan yararlandığımızı daha önceki bölümlerde belirtmiştik.

Üst sınır belirlenirken her hisse senedine ait getirilerin oluşturduğu getiri vektöründen çeşitli değerler çıkarılarak bir anlamda getiri vektörü de varyans-kovaryans matrisi gibi iki parçaya ayrılmıştır.

$\mu = \mathbf{0.00005, 0.000015, 0.000025}$ değerleri sırası ile, getirilerin oluşturduğu vektörden çıkarıldıktan sonra elde edilen, $\mathbf{max Z'} = \mathbf{max Z}_1 + \mathbf{max Z}_2$ değerlerinin tamamı $\mathbf{max Z'} \geq \mathbf{max Z}^*$ eşitsizliğini sağlamış ve her bir portföy için *üst sınır* oluşturmuştur.

Bu sonuçlar bize göstermektedir ki, elde edilen *üst sınır* değerlerinin tamamı, optimal noktaya çok yakın noktalar olarak dikkat çekmektedir. *Üst sınırlarla* ilgili bir diğer konu ise, belirlenecek olan \mathbf{K} değerleri ile ilgilidir. \mathbf{K} 'nın çözüm noktasına, $\mathbf{K}+1$ noktasından yaklaşan her değer, algoritmanın doğası gereği, $\mathbf{K}-1$ noktasından yaklaşan her değerden daha yaklaşık bir sonuç vermektedir.

KAYNAKÇA

- ANDALAFT. N.,
ANDALAFT. P.,
GUIGNARD. M.,
MAGENDZO. A.,
WAINER. A.,
WEINTRAUB. A.:2003 “A Problem of Forest Harvesting and Road Building Solved Through Model Strengthening and Lagrangian Relaxation”, **Operations Research**, Vol.51, No.4, 2003, pp.613-628.
- BELL. D.E.,
FARQHUAR. P.H.:1986 “Perspectives on Utility Theory”, **Operations Research**, Vol.34, No:1, 1991, pp.179-183.
- BERTSIMAS. D.,
SHIODA. R.:2009 “Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization”, **Computational Optimization and Applications**, Vol.43, No.1, pp.1-22.
- BIENSTOCK. D.:1996 “Computational Study of a Family of Mixed-Integer Quadratic Programming Problems”, **Mathematical Programming**, Vol.72, No:2, 1996, pp.121-140.
- CHANG. T.-J.,
MEADE. N.,
BEASLEY. J.E.,
SHARAIRA. Y.M.:2000 “Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation”, **Computers & Operations Research**, Vol. 27, No.13, pp.1271-1302.

- CHARPIN. F.,
LACAZE. D.:2007 “Using Binary Variables to Obtain Small Portfolios”, **The Journal of Portfolio Management**, Vol.33, No.4, pp.68-72.
- DUAN. L.,
XIAOLING. S.,
WANG. J.:2006 “Optimal lot solution to constrained mean-variance formulation for portfolio selection”, **Mathematical Finance**, Vol.16, No.1, pp.83-101.
- FISHER. M.L.:1981 “The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems”, **Manegement Science**, Vol.27, No:1, s.1-18.
- 1985 “An Applications Oriented Guide to Lagrangian Relaxation”, **Interfaces**, Vol.15, No:2, pp.82-114.
- FRANGIONI. A.:2005 “About Lagrangian Methods in Integer Optimization”, **Annals of Operations Research**, Vol.139, No:1, pp.163-193.
- FRANGIONI. .A..
GENTILE. C.:2006 “Perspective cuts for a class of convex 0-1 mixed integer programs”, **Mathematical Programming**, Vol.106, No.2, pp.225-236.
- GEOFFRION. A.M.:1974 “Lagrangian Relaxation for Integer Programming.” **Mathematical Programming Study 2**, pp.82-114.
- 2010 “Lagrangian Relaxation for Integer Programming,” **50 Years of Integer Programming 1958-2008**, pp.243-246.
- GUIGNARD. M.:2003 “Lagrangean Relaxation”, **Sociedad de Estadística e Investigacion Operativa**, Vol.11, No.2, pp.151-228.

- HALAÇ. O.:1991 **Kantitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması)**, Evrim Basım Yayım Dağıtım.
- JANSEN. R.,
VAN DIJK. R.:2002 “Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios”, **The Journal of Portfolio Management**, Vol.28, No.2, pp.33-39.
- JOBST. N.C.,
HORNIMAN. M.D.,
LUCAS. C.A.,
MITRA. G.:2001 “Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints”, **Quantitative Finance**, Vol.1, No.5, pp.489-501.
- KALLBERG. J.G.,
ZIEMBA. W.T.:1983 “Comparison of Alternative Utility Functions in Portfolio Selection Problems”, **The Journal of Portfolio Management**, Vol.29, No.11, pp.1257-1276.
- KONNO. H.,
YAMAZAKI. H.:1991 “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market”, **Management Science**, Vol. 37, No. 5, pp.519-531.
- KOPMAN. L.,
SHUCHENG. S.L.,
SHAW. D.:2009 “Using Lagrangian Relaxation to Obtain Small Portfolios”, **The Journal of Portfolio Management**, Vol.35, No:2, pp.75-79.

- LEMARECHAL. C.:2001 “Lagrangian Relaxation”, **Computational Combinatorial Optimization**, Ed. By. M. Jünger. D. Naddef, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp.112-156.
- MARKOWITZ. H.:1952 “Portfolio Selection”, **Journal of Finance**, Vol.7, No.1, pp.77-91.
- 1955 “**Portfolio Selection**”, (Ph.D. Thesis), The University of Chicago, 138 pages.
- 1959 “**Portfolio Selection:Efficient Diversification of Investment**”, Chapman&Hall Ltd.
- 1991 “Foundations of Portfolio Theory”, **The Journal of Finance**, Vol. 46, No. 2, pp.469-477.
- 1999 “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, **Financial Analysis Journal**, Vol. 55, No.4, pp.5-16.
- MARKOWITZ. H.
- PEROLD. A.:1991 “Portfolio Analysis with Factors and Scenarios”, **The Journal of Finance**, Vol. 36, No. 4, pp.871-877.
- ÖZÇAM. M.:1997 “**Varlık Fiyatlama Modelleri Aracılığıyla Dinamik Portföy Yönetimi**”, Ankara.
- ÖZDEMİR. E.:1983 “**Nonlinear Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Seçimi Problemine Uygulanması**”, İstanbul.
- ROSENBERG. B.:1974 “Extra-Market Components of Covariance in Security Returns”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.8, No.4, pp.263-274.
- ROY. A.D.:1952 “Safety First and the Holding of Assets”, **Econometrica**, Vol.20, No.3, pp.431-449.

- SEZGİNMAN. H. İ.:1986 “**Lineer Programlama ve Problemleri**”, Yıldız Üniversitesi Yayınları, Sayı:187.
- SHARPE. F.W.:1963 “A Simplified Model for Portfolio Analysis”. **Management Science**, Vol.9, No.2, pp.277-293.
- SHAW. D.,
SHUCHENG. S.L.,
KOPMAN. L.:2008 “Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization”, **Optimization Methods&Software**, Vol.23, No.3, pp.411-420.
- STATMAN. M.:1987 “How Many Stocks Make a Diversified Portfolio?”, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.22, No.3, pp.353-363.
- STONE. K. B.:1973 “A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Problem”, **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.8, No.4, pp.621-636.
- TAHA. A. H.:2007 “**Operations Research: An Introduction**”, Pearson Prentice Hall.
- VIELMA. J.P.,
SHABBIR. A.,
NEMHAUSER G.L.:2008 “A Lifted Linear Programming Branch-and-Bound Algorithm for Mixed Integer Conic Quadratic Programs”, **INFORMS Journal of Computing**, Vol.20, No.3, pp.438-450.
- WISMER. D.A.,
CHATTERGY. R.:1978 “**Introduction to Nonlinear Optimization A Problem Solving Approach**”, Elsevier North Holland.

EKLER

EK 1. GETİRİLERİN VARYANS-KOVARYANS MATRİSİ (*10⁻⁴)

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK
AKBNK	8,96	3,19	4,03	4,52	4,45	3,68	3,46	4,26	6,71	6,51	5,06	4,57	4,47	3,60	5,40	4,61	5,12	3,79	5,79	3,74	3,65	6,28	5,54
AKENR	3,19	8,34	2,63	2,51	2,64	2,79	2,29	3,00	3,65	3,47	3,24	3,66	3,06	2,77	2,89	2,86	3,15	2,38	3,55	2,05	2,56	3,42	3,01
ARCLK	4,03	2,63	7,75	3,02	3,39	3,02	2,37	3,12	4,08	4,08	3,96	3,73	3,27	2,75	3,88	3,05	3,85	2,46	3,90	2,78	2,54	4,10	3,87
DOHOL	4,52	2,51	3,02	9,67	7,68	3,19	2,79	3,58	4,90	4,83	4,28	3,92	3,99	3,26	4,33	4,09	4,04	2,93	4,60	3,12	2,80	4,86	4,39
DYHOL	4,45	2,64	3,39	7,68	13,60	3,09	2,72	3,90	5,00	4,77	4,04	4,12	4,30	3,15	4,55	4,14	4,26	2,95	4,65	2,91	2,88	5,13	4,28
ECILC	3,68	2,79	3,02	3,19	3,09	6,85	2,59	3,18	4,07	3,92	3,29	3,78	3,51	3,00	3,56	3,31	3,63	2,50	4,07	2,54	2,82	4,10	3,44
ENKAI	3,46	2,29	2,37	2,79	2,72	2,59	7,14	2,79	3,67	3,40	2,90	3,13	3,13	2,31	3,19	2,82	3,17	1,84	3,63	2,11	2,58	3,44	3,19
EREGL	4,26	3,00	3,12	3,58	3,90	3,18	2,79	7,56	4,53	4,18	4,04	3,85	4,50	3,23	4,12	3,78	4,30	2,80	4,26	2,66	3,16	4,38	4,22
GARAN	6,71	3,65	4,08	4,90	5,00	4,07	3,67	4,53	9,44	7,09	5,33	4,96	4,84	3,97	5,59	5,06	5,86	4,05	6,33	4,09	4,07	7,05	6,38
ISCTR	6,51	3,47	4,08	4,83	4,77	3,92	3,40	4,18	7,09	8,26	5,19	4,56	4,58	3,75	5,42	4,75	5,34	3,56	6,01	3,89	3,74	6,62	6,05
KCHOL	5,06	3,24	3,96	4,28	4,04	3,29	2,90	4,04	5,33	5,19	6,98	4,05	3,79	3,46	5,04	4,03	4,68	3,13	4,78	3,32	3,38	5,27	4,99
KOZAA	4,57	3,66	3,73	3,92	4,12	3,78	3,13	3,85	4,96	4,56	4,05	14,76	4,41	3,42	4,09	4,02	4,47	3,15	4,99	2,90	3,06	5,17	4,25
KRDMD	4,47	3,06	3,27	3,99	4,30	3,51	3,13	4,50	4,84	4,58	3,79	4,41	8,94	3,58	4,16	3,96	4,54	2,75	4,74	3,06	3,18	4,88	4,43
PETKM	3,60	2,77	2,75	3,26	3,15	3,00	2,31	3,23	3,97	3,75	3,46	3,42	3,58	5,99	3,47	3,21	3,32	2,45	3,54	3,10	2,46	3,80	3,54
SAHOL	5,40	2,89	3,88	4,33	4,55	3,56	3,19	4,12	5,59	5,42	5,04	4,09	4,16	3,47	7,75	4,30	4,74	3,25	5,12	3,23	3,51	5,37	4,99
SISE	4,61	2,86	3,05	4,09	4,14	3,31	2,82	3,78	5,06	4,75	4,03	4,02	3,96	3,21	4,30	6,33	4,13	2,91	4,49	3,14	3,10	4,81	4,30
SKBNK	5,12	3,15	3,85	4,04	4,26	3,63	3,17	4,30	5,86	5,34	4,68	4,47	4,54	3,32	4,74	4,13	10,84	3,01	5,67	3,65	3,44	5,45	4,92
TCELL	3,79	2,38	2,46	2,93	2,95	2,50	1,84	2,80	4,05	3,56	3,13	3,15	2,75	2,45	3,25	2,91	3,01	6,45	3,49	2,21	2,52	3,94	3,43
TEBNK	5,79	3,55	3,90	4,60	4,65	4,07	3,63	4,26	6,33	6,01	4,78	4,99	4,74	3,54	5,12	4,49	5,67	3,49	10,29	3,86	3,56	6,44	5,23
THYAO	3,74	2,05	2,78	3,12	2,91	2,54	2,11	2,66	4,09	3,89	3,32	2,90	3,06	3,10	3,23	3,14	3,65	2,21	3,86	7,14	2,23	3,86	3,47
TUPRS	3,65	2,56	2,54	2,80	2,88	2,82	2,58	3,16	4,07	3,74	3,38	3,06	3,18	2,46	3,51	3,10	3,44	2,52	3,56	2,23	6,46	3,71	3,33
VAKBN	6,28	3,42	4,10	4,86	5,13	4,10	3,44	4,38	7,05	6,62	5,27	5,17	4,88	3,80	5,37	4,81	5,45	3,94	6,44	3,86	3,71	8,95	6,11
YKBNK	5,54	3,01	3,87	4,39	4,28	3,44	3,19	4,22	6,38	6,05	4,99	4,25	4,43	3,54	4,99	4,30	4,92	3,43	5,23	3,47	3,33	6,11	7,83

EK 2. ORTALAMA-VARYANS MODELİNE GÖRE ÇÖZÜMÜN ANA MODELİ

MODEL :

MAX $Z = -\lambda * ($

0.000895759*AKBNK*AKBNK	+ 0.000318966*AKENR*AKBNK	+ 0.000403428*ARCLK*AKBNK	+ 0.000452464*DOHOL*AKBNK	+ 0.000445477*DYHOL*AKBNK	+
0.000318966*AKBNK*AKENR	+ 0.000834011*AKENR*AKENR	+ 0.000262572*ARCLK*AKENR	+ 0.000251294*DOHOL*AKENR	+ 0.000264237*DYHOL*AKENR	+
0.000403428*AKBNK*ARCLK	+ 0.000262572*AKENR*ARCLK	+ 0.000774930*ARCLK*ARCLK	+ 0.000301885*DOHOL*ARCLK	+ 0.000339088*DYHOL*ARCLK	+
0.000452464*AKBNK*DOHOL	+ 0.000251294*AKENR*DOHOL	+ 0.000301885*ARCLK*DOHOL	+ 0.000967016*DOHOL*DOHOL	+ 0.000768425*DYHOL*DOHOL	+
0.000445477*AKBNK*DYHOL	+ 0.000264237*AKENR*DYHOL	+ 0.000339088*ARCLK*DYHOL	+ 0.000768425*DOHOL*DYHOL	+ 0.001359841*DYHOL*DYHOL	+
0.000368052*AKBNK*ECILC	+ 0.000279300*AKENR*ECILC	+ 0.000302088*ARCLK*ECILC	+ 0.000318748*DOHOL*ECILC	+ 0.000308817*DYHOL*ECILC	+
0.000346450*AKBNK*ENKAI	+ 0.000228871*AKENR*ENKAI	+ 0.000236503*ARCLK*ENKAI	+ 0.000279289*DOHOL*ENKAI	+ 0.000272440*DYHOL*ENKAI	+
0.000426019*AKBNK*EREGL	+ 0.000300105*AKENR*EREGL	+ 0.000311888*ARCLK*EREGL	+ 0.000357884*DOHOL*EREGL	+ 0.000390151*DYHOL*EREGL	+
0.000671444*AKBNK*GARAN	+ 0.000364751*AKENR*GARAN	+ 0.000407928*ARCLK*GARAN	+ 0.000489710*DOHOL*GARAN	+ 0.000500358*DYHOL*GARAN	+
0.000650771*AKBNK*ISCTR	+ 0.000346929*AKENR*ISCTR	+ 0.000407568*ARCLK*ISCTR	+ 0.000482613*DOHOL*ISCTR	+ 0.000477493*DYHOL*ISCTR	+
0.000506319*AKBNK*KCHOL	+ 0.000323818*AKENR*KCHOL	+ 0.000395979*ARCLK*KCHOL	+ 0.000427605*DOHOL*KCHOL	+ 0.000404418*DYHOL*KCHOL	+
0.000457277*AKBNK*KOZAA	+ 0.000365918*AKENR*KOZAA	+ 0.000372873*ARCLK*KOZAA	+ 0.000391798*DOHOL*KOZAA	+ 0.000411873*DYHOL*KOZAA	+
0.000446994*AKBNK*KRDMD	+ 0.000306387*AKENR*KRDMD	+ 0.000326877*ARCLK*KRDMD	+ 0.000398941*DOHOL*KRDMD	+ 0.000430242*DYHOL*KRDMD	+
0.000360359*AKBNK*PETKM	+ 0.000276985*AKENR*PETKM	+ 0.000275468*ARCLK*PETKM	+ 0.000326188*DOHOL*PETKM	+ 0.000314739*DYHOL*PETKM	+
0.000540450*AKBNK*SAHOL	+ 0.000289249*AKENR*SAHOL	+ 0.000388400*ARCLK*SAHOL	+ 0.000433418*DOHOL*SAHOL	+ 0.000455044*DYHOL*SAHOL	+
0.000460830*AKBNK*SISE	+ 0.000286077*AKENR*SISE	+ 0.000305426*ARCLK*SISE	+ 0.000408763*DOHOL*SISE	+ 0.000413845*DYHOL*SISE	+
0.000512003*AKBNK*SKBNK	+ 0.000315189*AKENR*SKBNK	+ 0.000385014*ARCLK*SKBNK	+ 0.000404122*DOHOL*SKBNK	+ 0.000426330*DYHOL*SKBNK	+
0.000379492*AKBNK*TCELL	+ 0.000237983*AKENR*TCELL	+ 0.000245618*ARCLK*TCELL	+ 0.000292841*DOHOL*TCELL	+ 0.000294601*DYHOL*TCELL	+
0.000578921*AKBNK*TEBNK	+ 0.000354695*AKENR*TEBNK	+ 0.000389879*ARCLK*TEBNK	+ 0.000459768*DOHOL*TEBNK	+ 0.000464571*DYHOL*TEBNK	+
0.000373916*AKBNK*THYAO	+ 0.000205219*AKENR*THYAO	+ 0.000278323*ARCLK*THYAO	+ 0.000311533*DOHOL*THYAO	+ 0.000291489*DYHOL*THYAO	+
0.000364865*AKBNK*TUPRS	+ 0.000255607*AKENR*TUPRS	+ 0.000254299*ARCLK*TUPRS	+ 0.000280470*DOHOL*TUPRS	+ 0.000287663*DYHOL*TUPRS	+
0.000628435*AKBNK*VAKBN	+ 0.000341590*AKENR*VAKBN	+ 0.000410396*ARCLK*VAKBN	+ 0.000485655*DOHOL*VAKBN	+ 0.000512503*DYHOL*VAKBN	+
0.000554270*AKBNK*YKBNK	+ 0.000300775*AKENR*YKBNK	+ 0.000386574*ARCLK*YKBNK	+ 0.000438640*DOHOL*YKBNK	+ 0.000427569*DYHOL*YKBNK	+

0.000368052*ECILC*AKBNK	+ 0.000346450*ENKAI*AKBNK	+ 0.000426019*EREGL*AKBNK	+ 0.000671444*GARAN*AKBNK	+ 0.000650771*ISCTR*AKBNK	+
0.000279300*ECILC*AKENR	+ 0.000228871*ENKAI*AKENR	+ 0.000300105*EREGL*AKENR	+ 0.000364751*GARAN*AKENR	+ 0.000346929*ISCTR*AKENR	+
0.000302088*ECILC*ARCLK	+ 0.000236503*ENKAI*ARCLK	+ 0.000311888*EREGL*ARCLK	+ 0.000407928*GARAN*ARCLK	+ 0.000407568*ISCTR*ARCLK	+
0.000318748*ECILC*DOHOL	+ 0.000279289*ENKAI*DOHOL	+ 0.000357884*EREGL*DOHOL	+ 0.000489710*GARAN*DOHOL	+ 0.000482613*ISCTR*DOHOL	+
0.000308817*ECILC*DYHOL	+ 0.000272440*ENKAI*DYHOL	+ 0.000390151*EREGL*DYHOL	+ 0.000500358*GARAN*DYHOL	+ 0.000477493*ISCTR*DYHOL	+
0.000684905*ECILC*ECILC	+ 0.000258685*ENKAI*ECILC	+ 0.000318216*EREGL*ECILC	+ 0.000406910*GARAN*ECILC	+ 0.000391926*ISCTR*ECILC	+
0.000258685*ECILC*ENKAI	+ 0.000713898*ENKAI*ENKAI	+ 0.000279499*EREGL*ENKAI	+ 0.000366712*GARAN*ENKAI	+ 0.000340420*ISCTR*ENKAI	+
0.000318216*ECILC*EREGL	+ 0.000279499*ENKAI*EREGL	+ 0.000756180*EREGL*EREGL	+ 0.000453028*GARAN*EREGL	+ 0.000418403*ISCTR*EREGL	+
0.000406910*ECILC*GARAN	+ 0.000366712*ENKAI*GARAN	+ 0.000453028*EREGL*GARAN	+ 0.000943774*GARAN*GARAN	+ 0.000709167*ISCTR*GARAN	+
0.000391926*ECILC*ISCTR	+ 0.000340420*ENKAI*ISCTR	+ 0.000418403*EREGL*ISCTR	+ 0.000709167*GARAN*ISCTR	+ 0.000825775*ISCTR*ISCTR	+
0.000328843*ECILC*KCHOL	+ 0.000289549*ENKAI*KCHOL	+ 0.000404084*EREGL*KCHOL	+ 0.000533254*GARAN*KCHOL	+ 0.000518557*ISCTR*KCHOL	+
0.000378137*ECILC*KOZAA	+ 0.000312867*ENKAI*KOZAA	+ 0.000385274*EREGL*KOZAA	+ 0.000496433*GARAN*KOZAA	+ 0.000456017*ISCTR*KOZAA	+
0.000351310*ECILC*KRDMD	+ 0.000313309*ENKAI*KRDMD	+ 0.000450018*EREGL*KRDMD	+ 0.000484193*GARAN*KRDMD	+ 0.000457586*ISCTR*KRDMD	+
0.000299730*ECILC*PETKM	+ 0.000231376*ENKAI*PETKM	+ 0.000322731*EREGL*PETKM	+ 0.000397488*GARAN*PETKM	+ 0.000375446*ISCTR*PETKM	+
0.000356116*ECILC*SAHOL	+ 0.000319290*ENKAI*SAHOL	+ 0.000412389*EREGL*SAHOL	+ 0.000558888*GARAN*SAHOL	+ 0.000541639*ISCTR*SAHOL	+
0.000331332*ECILC*SISE	+ 0.000281645*ENKAI*SISE	+ 0.000378239*EREGL*SISE	+ 0.000506214*GARAN*SISE	+ 0.000475154*ISCTR*SISE	+
0.000362593*ECILC*SKBNK	+ 0.000317116*ENKAI*SKBNK	+ 0.000429731*EREGL*SKBNK	+ 0.000586152*GARAN*SKBNK	+ 0.000534121*ISCTR*SKBNK	+
0.000250386*ECILC*TCELL	+ 0.000184194*ENKAI*TCELL	+ 0.000279710*EREGL*TCELL	+ 0.000405467*GARAN*TCELL	+ 0.000355975*ISCTR*TCELL	+
0.000407178*ECILC*TEBNK	+ 0.000362594*ENKAI*TEBNK	+ 0.000426218*EREGL*TEBNK	+ 0.000632899*GARAN*TEBNK	+ 0.000600505*ISCTR*TEBNK	+
0.000253533*ECILC*THYAO	+ 0.000210634*ENKAI*THYAO	+ 0.000266113*EREGL*THYAO	+ 0.000408797*GARAN*THYAO	+ 0.000389268*ISCTR*THYAO	+
0.000282065*ECILC*TUPRS	+ 0.000257854*ENKAI*TUPRS	+ 0.000315910*EREGL*TUPRS	+ 0.000407273*GARAN*TUPRS	+ 0.000374106*ISCTR*TUPRS	+
0.000410357*ECILC*VAKBN	+ 0.000344120*ENKAI*VAKBN	+ 0.000438378*EREGL*VAKBN	+ 0.000705311*GARAN*VAKBN	+ 0.000662403*ISCTR*VAKBN	+
0.000343878*ECILC*YKBNK	+ 0.000318780*ENKAI*YKBNK	+ 0.000422309*EREGL*YKBNK	+ 0.000637655*GARAN*YKBNK	+ 0.000605401*ISCTR*YKBNK	+

0.000506319*KCHOL*AKBNK	+ 0.000457277*KOZAA*AKBNK	+ 0.000446994*KRDMD*AKBNK	+ 0.000360359*PETKM*AKBNK	+ 0.000540450*SAHOL*AKBNK	+
0.000323818*KCHOL*AKENR	+ 0.000365918*KOZAA*AKENR	+ 0.000306387*KRDMD*AKENR	+ 0.000276985*PETKM*AKENR	+ 0.000289249*SAHOL*AKENR	+
0.000395979*KCHOL*ARCLK	+ 0.000372873*KOZAA*ARCLK	+ 0.000326877*KRDMD*ARCLK	+ 0.000275468*PETKM*ARCLK	+ 0.000388400*SAHOL*ARCLK	+
0.000427605*KCHOL*DOHOL	+ 0.000391798*KOZAA*DOHOL	+ 0.000398941*KRDMD*DOHOL	+ 0.000326188*PETKM*DOHOL	+ 0.000433418*SAHOL*DOHOL	+
0.000404418*KCHOL*DYHOL	+ 0.000411873*KOZAA*DYHOL	+ 0.000430242*KRDMD*DYHOL	+ 0.000314739*PETKM*DYHOL	+ 0.000455044*SAHOL*DYHOL	+
0.000328843*KCHOL*ECILC	+ 0.000378137*KOZAA*ECILC	+ 0.000351310*KRDMD*ECILC	+ 0.000299730*PETKM*ECILC	+ 0.000356116*SAHOL*ECILC	+
0.000289549*KCHOL*ENKAI	+ 0.000312867*KOZAA*ENKAI	+ 0.000313309*KRDMD*ENKAI	+ 0.000231376*PETKM*ENKAI	+ 0.000319290*SAHOL*ENKAI	+
0.000404084*KCHOL*EREGL	+ 0.000385274*KOZAA*EREGL	+ 0.000450018*KRDMD*EREGL	+ 0.000322731*PETKM*EREGL	+ 0.000412389*SAHOL*EREGL	+
0.000533254*KCHOL*GARAN	+ 0.000496433*KOZAA*GARAN	+ 0.000484193*KRDMD*GARAN	+ 0.000397488*PETKM*GARAN	+ 0.000558888*SAHOL*GARAN	+
0.000518557*KCHOL*ISCTR	+ 0.000456017*KOZAA*ISCTR	+ 0.000457586*KRDMD*ISCTR	+ 0.000375446*PETKM*ISCTR	+ 0.000541639*SAHOL*ISCTR	+
0.000698266*KCHOL*KCHOL	+ 0.000404547*KOZAA*KCHOL	+ 0.000378903*KRDMD*KCHOL	+ 0.000346018*PETKM*KCHOL	+ 0.000503868*SAHOL*KCHOL	+
0.000404547*KCHOL*KOZAA	+ 0.001476396*KOZAA*KOZAA	+ 0.000441008*KRDMD*KOZAA	+ 0.000342118*PETKM*KOZAA	+ 0.000409019*SAHOL*KOZAA	+
0.000378903*KCHOL*KRDMD	+ 0.000441008*KOZAA*KRDMD	+ 0.000894201*KRDMD*KRDMD	+ 0.000358286*PETKM*KRDMD	+ 0.000415948*SAHOL*KRDMD	+
0.000346018*KCHOL*PETKM	+ 0.000342118*KOZAA*PETKM	+ 0.000358286*KRDMD*PETKM	+ 0.000599241*PETKM*PETKM	+ 0.000346817*SAHOL*PETKM	+
0.000503868*KCHOL*SAHOL	+ 0.000409019*KOZAA*SAHOL	+ 0.000415948*KRDMD*SAHOL	+ 0.000346817*PETKM*SAHOL	+ 0.000774753*SAHOL*SAHOL	+
0.000402848*KCHOL*SISE	+ 0.000402272*KOZAA*SISE	+ 0.000395726*KRDMD*SISE	+ 0.000320997*PETKM*SISE	+ 0.000429718*SAHOL*SISE	+
0.000467982*KCHOL*SKBNK	+ 0.000446846*KOZAA*SKBNK	+ 0.000454452*KRDMD*SKBNK	+ 0.000331919*PETKM*SKBNK	+ 0.000473589*SAHOL*SKBNK	+
0.000313489*KCHOL*TCELL	+ 0.000315026*KOZAA*TCELL	+ 0.000275248*KRDMD*TCELL	+ 0.000245300*PETKM*TCELL	+ 0.000324984*SAHOL*TCELL	+
0.000478101*KCHOL*TEBNK	+ 0.000498922*KOZAA*TEBNK	+ 0.000474338*KRDMD*TEBNK	+ 0.000354009*PETKM*TEBNK	+ 0.000511779*SAHOL*TEBNK	+
0.000331897*KCHOL*THYAO	+ 0.000289715*KOZAA*THYAO	+ 0.000306164*KRDMD*THYAO	+ 0.000309630*PETKM*THYAO	+ 0.000322950*SAHOL*THYAO	+
0.000337828*KCHOL*TUPRS	+ 0.000306036*KOZAA*TUPRS	+ 0.000317971*KRDMD*TUPRS	+ 0.000245777*PETKM*TUPRS	+ 0.000350921*SAHOL*TUPRS	+
0.000527301*KCHOL*VAKBN	+ 0.000516552*KOZAA*VAKBN	+ 0.000487903*KRDMD*VAKBN	+ 0.000380395*PETKM*VAKBN	+ 0.000536554*SAHOL*VAKBN	+
0.000498946*KCHOL*YKBNK	+ 0.000425276*KOZAA*YKBNK	+ 0.000443420*KRDMD*YKBNK	+ 0.000354491*PETKM*YKBNK	+ 0.000498646*SAHOL*YKBNK	+

0.000460830*SISE*AKBNK	+ 0.000512003*SKBNK*AKBNK	+ 0.000379492*TCELL*AKBNK	+ 0.000578921*TEBNK*AKBNK	+ 0.000373916*THYAO*AKBNK	+
0.000286077*SISE*AKENR	+ 0.000315189*SKBNK*AKENR	+ 0.000237983*TCELL*AKENR	+ 0.000354695*TEBNK*AKENR	+ 0.000205219*THYAO*AKENR	+
0.000305426*SISE*ARCLK	+ 0.000385014*SKBNK*ARCLK	+ 0.000245618*TCELL*ARCLK	+ 0.000389879*TEBNK*ARCLK	+ 0.000278323*THYAO*ARCLK	+
0.000408763*SISE*DOHOL	+ 0.000404122*SKBNK*DOHOL	+ 0.000292841*TCELL*DOHOL	+ 0.000459768*TEBNK*DOHOL	+ 0.000311533*THYAO*DOHOL	+
0.000413845*SISE*DYHOL	+ 0.000426330*SKBNK*DYHOL	+ 0.000294601*TCELL*DYHOL	+ 0.000464571*TEBNK*DYHOL	+ 0.000291489*THYAO*DYHOL	+
0.000331332*SISE*ECILC	+ 0.000362593*SKBNK*ECILC	+ 0.000250386*TCELL*ECILC	+ 0.000407178*TEBNK*ECILC	+ 0.000253533*THYAO*ECILC	+
0.000281645*SISE*ENKAI	+ 0.000317116*SKBNK*ENKAI	+ 0.000184194*TCELL*ENKAI	+ 0.000362594*TEBNK*ENKAI	+ 0.000210634*THYAO*ENKAI	+
0.000378239*SISE*EREGL	+ 0.000429731*SKBNK*EREGL	+ 0.000279710*TCELL*EREGL	+ 0.000426218*TEBNK*EREGL	+ 0.000266113*THYAO*EREGL	+
0.000506214*SISE*GARAN	+ 0.000586152*SKBNK*GARAN	+ 0.000405467*TCELL*GARAN	+ 0.000632899*TEBNK*GARAN	+ 0.000408797*THYAO*GARAN	+
0.000475154*SISE*ISCTR	+ 0.000534121*SKBNK*ISCTR	+ 0.000355975*TCELL*ISCTR	+ 0.000600505*TEBNK*ISCTR	+ 0.000389268*THYAO*ISCTR	+
0.000402848*SISE*KCHOL	+ 0.000467982*SKBNK*KCHOL	+ 0.000313489*TCELL*KCHOL	+ 0.000478101*TEBNK*KCHOL	+ 0.000331897*THYAO*KCHOL	+
0.000402272*SISE*KOZAA	+ 0.000446846*SKBNK*KOZAA	+ 0.000315026*TCELL*KOZAA	+ 0.000498922*TEBNK*KOZAA	+ 0.000289715*THYAO*KOZAA	+
0.000395726*SISE*KRDMD	+ 0.000454452*SKBNK*KRDMD	+ 0.000275248*TCELL*KRDMD	+ 0.000474338*TEBNK*KRDMD	+ 0.000306164*THYAO*KRDMD	+
0.000320997*SISE*PETKM	+ 0.000331919*SKBNK*PETKM	+ 0.000245300*TCELL*PETKM	+ 0.000354009*TEBNK*PETKM	+ 0.000309630*THYAO*PETKM	+
0.000429718*SISE*SAHOL	+ 0.000473589*SKBNK*SAHOL	+ 0.000324984*TCELL*SAHOL	+ 0.000511779*TEBNK*SAHOL	+ 0.000322950*THYAO*SAHOL	+
0.000633447*SISE*SISE	+ 0.000412876*SKBNK*SISE	+ 0.000290570*TCELL*SISE	+ 0.000448559*TEBNK*SISE	+ 0.000314430*THYAO*SISE	+
0.000412876*SISE*SKBNK	+ 0.001084309*SKBNK*SKBNK	+ 0.000301294*TCELL*SKBNK	+ 0.000566995*TEBNK*SKBNK	+ 0.000364871*THYAO*SKBNK	+
0.000290570*SISE*TCELL	+ 0.000301294*SKBNK*TCELL	+ 0.000645384*TCELL*TCELL	+ 0.000348681*TEBNK*TCELL	+ 0.000220592*THYAO*TCELL	+
0.000448559*SISE*TEBNK	+ 0.000566995*SKBNK*TEBNK	+ 0.000348681*TCELL*TEBNK	+ 0.001029416*TEBNK*TEBNK	+ 0.000385928*THYAO*TEBNK	+
0.000314430*SISE*THYAO	+ 0.000364871*SKBNK*THYAO	+ 0.000220592*TCELL*THYAO	+ 0.000385928*TEBNK*THYAO	+ 0.000713916*THYAO*THYAO	+
0.000309833*SISE*TUPRS	+ 0.000344300*SKBNK*TUPRS	+ 0.000251579*TCELL*TUPRS	+ 0.000356088*TEBNK*TUPRS	+ 0.000222527*THYAO*TUPRS	+
0.000481431*SISE*VAKBN	+ 0.000544953*SKBNK*VAKBN	+ 0.000394258*TCELL*VAKBN	+ 0.000644264*TEBNK*VAKBN	+ 0.000385984*THYAO*VAKBN	+
0.000429835*SISE*YKBNK	+ 0.000492096*SKBNK*YKBNK	+ 0.000342853*TCELL*YKBNK	+ 0.000523366*TEBNK*YKBNK	+ 0.000346543*THYAO*YKBNK	+

0.000364865*TUPRS*AKBNK	+ 0.000628435*VAKBN*AKBNK	+ 0.000554270*YKBNK*AKBNK	+
0.000255607*TUPRS*AKENR	+ 0.000341590*VAKBN*AKENR	+ 0.000300775*YKBNK*AKNER	+
0.000254299*TUPRS*ARCLK	+ 0.000410396*VAKBN*ARCLK	+ 0.000386574*YKBNK*ARCLK	+
0.000280470*TUPRS*DOHOL	+ 0.000485655*VAKBN*DOHOL	+ 0.000438640*YKBNK*DOHOL	+
0.000287663*TUPRS*DYHOL	+ 0.000512503*VAKBN*DYHOL	+ 0.000427569*YKBNK*DYHOL	+
0.000282065*TUPRS*ECILC	+ 0.000410357*VAKBN*ECILC	+ 0.000343878*YKBNK*ECILC	+
0.000257854*TUPRS*ENKAI	+ 0.000344120*VAKBN*ENKAI	+ 0.000318780*YKBNK*ENKAI	+
0.000315910*TUPRS*EREGL	+ 0.000438378*VAKBN*EREGL	+ 0.000422309*YKBNK*EREGL	+
0.000407273*TUPRS*GARAN	+ 0.000705311*VAKBN*GARAN	+ 0.000637655*YKBNK*GARAN	+
0.000374106*TUPRS*ISCTR	+ 0.00062403*VAKBN*ISCTR	+ 0.000605401*YKBNK*ISCTR	+
0.000337828*TUPRS*KCHOL	+ 0.000527301*VAKBN*KCHOL	+ 0.000498946*YKBNK*KCHOL	+
0.000306036*TUPRS*KOZAA	+ 0.000516552*VAKBN*KOZAA	+ 0.000425276*YKBNK*KOZAA	+
0.000317971*TUPRS*KRDMD	+ 0.000487903*VAKBN*KRDMD	+ 0.000443420*YKBNK*KRDMD	+
0.000245777*TUPRS*PETKM	+ 0.000380395*VAKBN*PETKM	+ 0.000354491*YKBNK*PETKM	+
0.000350921*TUPRS*SAHOL	+ 0.000536554*VAKBN*SAHOL	+ 0.000498646*YKBNK*SAHOL	+
0.000309833*TUPRS*SISE	+ 0.000481431*VAKBN*SISE	+ 0.000429835*YKBNK*SISE	+
0.000344300*TUPRS*SKBNK	+ 0.000544953*VAKBN*SKBNK	+ 0.000492096*YKBNK*SKBNK	+
0.000251579*TUPRS*TCELL	+ 0.000394258*VAKBN*TCELL	+ 0.000342853*YKBNK*TCELL	+
0.000356088*TUPRS*TEBNK	+ 0.000644264*VAKBN*TEBNK	+ 0.000523366*YKBNK*TEBNK	+
0.000222527*TUPRS*THYAO	+ 0.000385984*VAKBN*THYAO	+ 0.000346543*YKBNK*THYAO	+
0.000646076*TUPRS*TUPRS	+ 0.000370649*VAKBN*TUPRS	+ 0.000333305*YKBNK*TUPRS	+
0.000370649*TUPRS*VAKBN	+ 0.000895068*VAKBN*VAKBN	+ 0.000611115*YKBNK*VAKBN	+
0.000333305*TUPRS*YKBNK	+ 0.000611115*VAKBN*YKBNK	+ 0.000782564*YKBNK*YKBNK	+

AKBNK+AKENR+ARCLK+DOHOL+DYHOL+ECILC+
ENKAI+EREGL+GARAN+ISCTR+KCHOL+KOZAA+
KRDMD+PETKM+SAHOL+SISE+SKBNK+TCELL+
TEBNK+THYAO+TUPRS+VAKBN+YKBNK=1;

AKBNK >=0;
AKENR >=0;
ARCLK >=0;
DOHOL >=0;
DYHOL >=0;
ECILC >=0;
ENKAI >=0;
EREGL >=0;
GARAN >=0;
ISCTR >=0;
KCHOL >=0;
KOZAA >=0;
KRDMD >=0;
PETKM >=0;
SAHOL >=0;
SISE >=0;
SKBNK >=0;
TCELL >=0;
TEBNK >=0;
THYAO >=0;
TUPRS >=0;
VAKBN >=0;
YKBNK >=0;

END

EK 3. ORTALAMA-VARYANS MODELİNE GÖRE ÇÖZÜMÜN

EKRAN ÇIKTILARI

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.0

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6212637E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 15

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1652775	-0.4526667E-08
ENKAI	0.1642846	-0.4531389E-07
KOZAA	0.1691191	0.2903745E-07
TCELL	0.1565210E-01	0.3610813E-07
THYAO	0.3407340	0.000000
TUPRS	0.1449327	-0.1333361E-08

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.1

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5835315E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1644973	-0.4258361E-08
ENKAI	0.1664436	-0.2951341E-08
KOZAA	0.1613379	-0.7652422E-08
TCELL	0.2609103E-01	-0.4224478E-08
THYAO	0.3346362	0.000000
TUPRS	0.1469939	-0.4948748E-08

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.2

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5463033E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 20

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1637855	0.000000
ENKAI	0.1683857	0.000000
KOZAA	0.1542720	0.000000
TCELL	0.3559886E-01	0.000000
THYAO	0.3290891	0.000000
TUPRS	0.1488689	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.3

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5095133E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 17

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1631355	0.000000
ENKAI	0.1701594	0.000000
KOZAA	0.1478195	0.000000
TCELL	0.4427957E-01	0.000000
THYAO	0.3240258	0.000000
TUPRS	0.1505802	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.4

Local optimal solution found.

Objective value: 0.4731067E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 17

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1625397	0.000000
ENKAI	0.1717852	0.000000
KOZAA	0.1419048	0.000000
TCELL	0.5223693E-01	0.000000
THYAO	0.3193845	0.000000
TUPRS	0.1521488	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.5

Local optimal solution found.

Objective value: 0.4370375E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1619933	-0.7786814E-08
ENKAI	0.1732909	0.1722711E-07
KOZAA	0.1364641	-0.8623906E-08
TCELL	0.5953462E-01	-0.6227477E-07
THYAO	0.3151185	-0.3416213E-08
TUPRS	0.1535985	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.6

Local optimal solution found.

Objective value: 0.4012668E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1614865	-0.4802417E-08
ENKAI	0.1746693	0.1537495E-07
KOZAA	0.1314404	-0.7573097E-08
TCELL	0.6630099E-01	-0.3990148E-07
THYAO	0.3111751	-0.2430719E-08
TUPRS	0.1549277	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.7

Local optimal solution found.

Objective value: 0.3657615E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1610180	-0.1422417E-08
ENKAI	0.1759437	0.7270074E-08
KOZAA	0.1267895	-0.4292860E-08
TCELL	0.7256451E-01	-0.2268726E-07
THYAO	0.3075247	0.000000
TUPRS	0.1561596	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.8

Local optimal solution found.

Objective value: 0.3304937E-03
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 20

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1604699	-0.5938995E-08
ECILC	0.7019103E-03	-0.1154300E-07
ENKAI	0.1770006	-0.6084890E-08
KOZAA	0.1223962	0.3811773E-08
TCELL	0.7828666E-01	0.8095342E-07
THYAO	0.3040030	-0.3327874E-08
TUPRS	0.1571418	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.9

Local optimal solution found.

Objective value: 0.2954705E-03
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 22

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1594272	0.000000
ECILC	0.4983613E-02	0.000000
ENKAI	0.1773697	0.000000
KOZAA	0.1179335	0.000000
TCELL	0.8291224E-01	0.000000
THYAO	0.3000957	0.000000
TUPRS	0.1572780	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.0

Local optimal solution found.

Objective value: 0.2606846E-03
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 23

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1584494	0.1007193E-08
ECILC	0.8970219E-02	-0.2231595E-08
ENKAI	0.1777121	0.3916919E-08
KOZAA	0.1137673	0.000000
TCELL	0.8725732E-01	0.000000
THYAO	0.2964438	0.000000
TUPRS	0.1573998	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.1

Local optimal solution found.

Objective value: 0.2261128E-03
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 23

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1575332	0.1179461E-07
ECILC	0.1271396E-01	0.4465018E-07
ENKAI	0.1780354	0.3206784E-07
KOZAA	0.1098672	0.000000
TCELL	0.9131907E-01	0.6935876E-08
THYAO	0.2930243	0.7103440E-08
TUPRS	0.1575070	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.2

Local optimal solution found.

Objective value: 0.1917353E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1566767	0.000000
ECILC	0.1619926E-01	0.000000
ENKAI	0.1783294	0.000000
KOZAA	0.1062164	0.000000
TCELL	0.9513218E-01	0.000000
THYAO	0.2898247	0.000000
TUPRS	0.1576214	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.3

Local optimal solution found.

Objective value: 0.1575343E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 21

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1558709	0.000000
ECILC	0.1948465E-01	0.000000
ENKAI	0.1786105	0.000000
KOZAA	0.1027841	0.000000
TCELL	0.9871198E-01	0.000000
THYAO	0.2868160	0.000000
TUPRS	0.1577219	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.4

Local optimal solution found.

Objective value: 0.1234942E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 21

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1551126	0.000000
ECILC	0.2257678E-01	0.000000
ENKAI	0.1788751	0.000000
KOZAA	0.9955373E-01	0.000000
TCELL	0.1020809	0.000000
THYAO	0.2839843	0.000000
TUPRS	0.1578166	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.5

Local optimal solution found.

Objective value: 0.8960125E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 21

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1543977	0.000000
ECILC	0.2549222E-01	0.000000
ENKAI	0.1791246	0.000000
KOZAA	0.9650796E-01	0.000000
TCELL	0.1052573	0.000000
THYAO	0.2813145	0.000000
TUPRS	0.1579058	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.6

Local optimal solution found.

Objective value: 0.5584355E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 24

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1536675	0.000000
ECILC	0.2817136E-01	0.000000
ENKAI	0.1792961	-0.3248638E-08
EREGL	0.4502333E-03	0.1532952E-08
KOZAA	0.9359887E-01	0.000000
TCELL	0.1081844	0.000000
THYAO	0.2787355	0.000000
TUPRS	0.1578959	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.7

Local optimal solution found.

Objective value: 0.2221515E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 23

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1528571	0.1904083E-07
ECILC	0.3055108E-01	0.4000388E-07
ENKAI	0.1793220	0.1594386E-07
EREGL	0.1853357E-02	0.3128633E-07
KOZAA	0.9077633E-01	0.2294376E-07
TCELL	0.1107944	0.1755188E-07
THYAO	0.2761712	0.2019179E-07
TUPRS	0.1576746	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.8

Local optimal solution found.

Objective value: -0.1129249E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 24

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1520937	-0.1053056E-07
ECILC	0.3279094E-01	-0.2945875E-07
ENKAI	0.1793490	-0.1909088E-07
EREGL	0.3174095E-02	-0.2950746E-07
KOZAA	0.8809822E-01	-0.6067458E-07
TCELL	0.1132678	-0.2646672E-07
THYAO	0.2737388	-0.3930794E-07
TUPRS	0.1574874	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.9

Local optimal solution found.

Objective value: -0.4468868E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 24

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1513630	0.2128173E-08
ECILC	0.3492587E-01	0.1506408E-08
ENKAI	0.1793720	0.1657002E-08
EREGL	0.4431720E-02	-0.8488850E-08
KOZAA	0.8556598E-01	0.000000
TCELL	0.1156157	0.1503643E-08
THYAO	0.2714383	0.1202023E-08
TUPRS	0.1572874	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=4.0

Local optimal solution found.

Objective value: -0.7798177E-04
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 23

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1506723	-0.3043755E-07
ECILC	0.3695377E-01	-0.2928013E-07
ENKAI	0.1793941	-0.3230556E-07
EREGL	0.5624559E-02	-0.5148764E-07
KOZAA	0.8315202E-01	-0.7117196E-07
TCELL	0.1178427	-0.4108522E-07
THYAO	0.2692445	-0.5373158E-07
TUPRS	0.1571161	0.000000

EK 4.SİSTEMATİK RİSKLERİN OLUŞTURDUĞU AFA^T = B MATRİSİ (*10⁻⁴)

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK
AKBNK	6,57	3,19	4,03	4,52	4,45	3,68	3,46	4,26	6,71	6,51	5,06	4,57	4,47	3,60	5,40	4,61	5,12	3,79	5,79	3,74	3,65	6,28	5,54
AKENR	3,19	1,87	2,63	2,51	2,64	2,79	2,29	3,00	3,65	3,47	3,24	3,66	3,06	2,77	2,89	2,86	3,15	2,38	3,55	2,05	2,56	3,42	3,01
ARCLK	4,03	2,63	2,69	3,02	3,39	3,02	2,37	3,12	4,08	4,08	3,96	3,73	3,27	2,75	3,88	3,05	3,85	2,46	3,90	2,78	2,54	4,10	3,87
DOHOL	4,52	2,51	3,02	3,59	7,68	3,19	2,79	3,58	4,90	4,83	4,28	3,92	3,99	3,26	4,33	4,09	4,04	2,93	4,60	3,12	2,80	4,86	4,39
DYHOL	4,45	2,64	3,39	7,68	3,73	3,09	2,72	3,90	5,00	4,77	4,04	4,12	4,30	3,15	4,55	4,14	4,26	2,95	4,65	2,91	2,88	5,13	4,28
ECILC	3,68	2,79	3,02	3,19	3,09	2,42	2,59	3,18	4,07	3,92	3,29	3,78	3,51	3,00	3,56	3,31	3,63	2,50	4,07	2,54	2,82	4,10	3,44
ENKAI	3,46	2,29	2,37	2,79	2,72	2,59	1,91	2,79	3,67	3,40	2,90	3,13	3,13	2,31	3,19	2,82	3,17	1,84	3,63	2,11	2,58	3,44	3,19
EREGL	4,26	3,00	3,12	3,58	3,90	3,18	2,79	3,43	4,53	4,18	4,04	3,85	4,50	3,23	4,12	3,78	4,30	2,80	4,26	2,66	3,16	4,38	4,22
GARAN	6,71	3,65	4,08	4,90	5,00	4,07	3,67	4,53	7,51	7,09	5,33	4,96	4,84	3,97	5,59	5,06	5,86	4,05	6,33	4,09	4,07	7,05	6,38
ISCTR	6,51	3,47	4,08	4,83	4,77	3,92	3,40	4,18	7,09	6,47	5,19	4,56	4,58	3,75	5,42	4,75	5,34	3,56	6,01	3,89	3,74	6,62	6,05
KCHOL	5,06	3,24	3,96	4,28	4,04	3,29	2,90	4,04	5,33	5,19	4,24	4,05	3,79	3,46	5,04	4,03	4,68	3,13	4,78	3,32	3,38	5,27	4,99
KOZAA	4,57	3,66	3,73	3,92	4,12	3,78	3,13	3,85	4,96	4,56	4,05	3,56	4,41	3,42	4,09	4,02	4,47	3,15	4,99	2,90	3,06	5,17	4,25
KRDMD	4,47	3,06	3,27	3,99	4,30	3,51	3,13	4,50	4,84	4,58	3,79	4,41	3,52	3,58	4,16	3,96	4,54	2,75	4,74	3,06	3,18	4,88	4,43
PETKM	3,60	2,77	2,75	3,26	3,15	3,00	2,31	3,23	3,97	3,75	3,46	3,42	3,58	2,32	3,47	3,21	3,32	2,45	3,54	3,10	2,46	3,80	3,54
SAHOL	5,40	2,89	3,88	4,33	4,55	3,56	3,19	4,12	5,59	5,42	5,04	4,09	4,16	3,47	4,68	4,30	4,74	3,25	5,12	3,23	3,51	5,37	4,99
SISE	4,61	2,86	3,05	4,09	4,14	3,31	2,82	3,78	5,06	4,75	4,03	4,02	3,96	3,21	4,30	3,51	4,13	2,91	4,49	3,14	3,10	4,81	4,30
SKBNK	5,12	3,15	3,85	4,04	4,26	3,63	3,17	4,30	5,86	5,34	4,68	4,47	4,54	3,32	4,74	4,13	4,63	3,01	5,67	3,65	3,44	5,45	4,92
TCELL	3,79	2,38	2,46	2,93	2,95	2,50	1,84	2,80	4,05	3,56	3,13	3,15	2,75	2,45	3,25	2,91	3,01	2,69	3,49	2,21	2,52	3,94	3,43
TEBNK	5,79	3,55	3,90	4,60	4,65	4,07	3,63	4,26	6,33	6,01	4,78	4,99	4,74	3,54	5,12	4,49	5,67	3,49	5,32	3,86	3,56	6,44	5,23
THYAO	3,74	2,05	2,78	3,12	2,91	2,54	2,11	2,66	4,09	3,89	3,32	2,90	3,06	3,10	3,23	3,14	3,65	2,21	3,86	2,26	2,23	3,86	3,47
TUPRS	3,65	2,56	2,54	2,80	2,88	2,82	2,58	3,16	4,07	3,74	3,38	3,06	3,18	2,46	3,51	3,10	3,44	2,52	3,56	2,23	2,56	3,71	3,33
VAKBN	6,28	3,42	4,10	4,86	5,13	4,10	3,44	4,38	7,05	6,62	5,27	5,17	4,88	3,80	5,37	4,81	5,45	3,94	6,44	3,86	3,71	6,39	6,11
YKBNK	5,54	3,01	3,87	4,39	4,28	3,44	3,19	4,22	6,38	6,05	4,99	4,25	4,43	3,54	4,99	4,30	4,92	3,43	5,23	3,47	3,33	6,11	5,25

EK 5. SİSTEMATİK OLMAYAN RİSKLERİN OLUŞTURDUĞU KÖŞEĞEN D MATRİSİ (*10⁻⁴)

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK
AKBNK	2,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AKENR	0,00	6,47	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ARCLK	0,00	0,00	5,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DOHOL	0,00	0,00	0,00	6,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	9,86	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ECILC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,43	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ENKAI	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,23	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,93	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ISCTR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,79	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KOZAA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	11,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KRDMD	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	5,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,82	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	6,22	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TCELL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,76	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TEBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,98	0,00	0,00	0,00	0,00
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,88	0,00	0,00	0,00
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,90	0,00	0,00
VAKBN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,56	0,00
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,57

EK 6. SİSTEMATİK VE SİSTEMATİK OLMAYAN RİSKLERİN HESAPLARININ EKLAN ÇIKTILARI

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL
Çoklu R	0,853651972	0,476871400	0,590468560	0,610903867	0,528983626	0,599606171	0,519603485	0,672992407
R Kare	0,728721689	0,227406332	0,348653121	0,373203534	0,279823677	0,359527561	0,269987782	0,452918779
Ayarlı R Kare	0,728504840	0,226788751	0,348132460	0,372702498	0,279247996	0,359015592	0,269404239	0,452481464
Standart Hata	0,015600909	0,025404371	0,022484550	0,024639221	0,031319178	0,020961014	0,022847040	0,020355666
Gözlem	1253	1253	1253	1253	1253	1253	1253	1253
	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE
Çoklu R	0,890858675	0,883339656	0,779219744	0,495728730	0,629965563	0,622971507	0,776148821	0,745020533
R Kare	0,793629178	0,780288948	0,607183409	0,245746974	0,396856611	0,388093498	0,602406992	0,555055595
Ayarlı R Kare	0,793464213	0,780113320	0,606869407	0,245144054	0,396374482	0,387604364	0,602089172	0,554699924
Standart Hata	0,013967063	0,013480427	0,016574951	0,033396957	0,023242062	0,019164181	0,017564989	0,016801762
Gözlem	1253	1253	1253	1253	1253	1253	1253	1253
	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK	
Çoklu R	0,654047603	0,644011235	0,719678952	0,564415163	0,632526053	0,844015208	0,819920342	
R Kare	0,427778267	0,414750471	0,517937793	0,318564477	0,400089207	0,712361671	0,672269367	
Ayarlı R Kare	0,427320855	0,414282645	0,517552452	0,318019764	0,399609662	0,712131744	0,672007392	
Standart Hata	0,024929039	0,019450307	0,022294305	0,022074097	0,019702978	0,016058251	0,016027484	
Gözlem	1253	1253	1253	1253	1253	1253	1253	

		ANOVA				
		<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Anlamlılık F</i>
AKBNK	Regresyon	1	0,817906646	0,817906646	3360,500262	0
	Fark	1251	0,304478838	0,000243388		
	Toplam	1252	1,122385484			
AKENR	Regresyon	1	0,237643324	0,237643324	368,2211402	3,86451E-72
	Fark	1251	0,807372977	0,000645382		
	Toplam	1252	1,045016301			
ARCLK	Regresyon	1	0,338537625	0,338537625	669,6355936	1,3213E-118
	Fark	1251	0,63244931	0,000505555		
	Toplam	1252	0,970986935			
DOHOL	Regresyon	1	0,452199914	0,452199914	744,8632002	4,6701E-129
	Fark	1251	0,759471124	0,000607091		
	Toplam	1252	1,211671038			
DYHOL	Regresyon	1	0,476786151	0,476786151	486,0746019	2,86344E-91
	Fark	1251	1,22709451	0,000980891		
	Toplam	1252	1,703880661			
ECILC	Regresyon	1	0,30854153	0,30854153	702,2456402	3,4735E-123
	Fark	1251	0,5496445	0,000439364		
	Toplam	1252	0,85818603			
ENKAI	Regresyon	1	0,241507806	0,241507806	462,6699475	1,41129E-87
	Fark	1251	0,653006031	0,000521987		
	Toplam	1252	0,894513837			
EREGL	Regresyon	1	0,429137508	0,429137508	1035,680575	4,7446E-166
	Fark	1251	0,51835579	0,000414353		
	Toplam	1252	0,947493298			
GARAN	Regresyon	1	0,938505565	0,938505565	4810,90346	0
	Fark	1251	0,244043654	0,000195079		
	Toplam	1252	1,182549219			
ISCTR	Regresyon	1	0,807361762	0,807361762	4442,841941	0
	Fark	1251	0,22733412	0,000181722		
	Toplam	1252	1,034695883			
KCHOL	Regresyon	1	0,531241358	0,531241358	1933,692371	4,2372E-256
	Fark	1251	0,34368597	0,000274729		
	Toplam	1252	0,874927328			
KOZAA	Regresyon	1	0,454613381	0,454613381	407,5946055	1,10623E-78
	Fark	1251	1,395311254	0,001115357		
	Toplam	1252	1,849924635			

KRDMD	Regresyon	1	0,444651409	0,444651409	823,1336523	1,6086E-139
	Fark	1251	0,675782008	0,000540193		
	Toplam	1252	1,120433417			
PETKM	Regresyon	1	0,291399729	0,291399729	793,4299838	1,3481E-135
	Fark	1251	0,459449566	0,000367266		
	Toplam	1252	0,750849295			
SAHOL	Regresyon	1	0,584795897	0,584795897	1895,4336	8,1655E-253
	Fark	1251	0,385969557	0,000308529		
	Toplam	1252	0,970765455			
SISE	Regresyon	1	0,440552536	0,440552536	1560,587215	3,1335E-222
	Fark	1251	0,35315631	0,000282299		
	Toplam	1252	0,793708846			
SKBNK	Regresyon	1	0,581196186	0,581196186	935,2154612	7,828E-154
	Fark	1251	0,777442695	0,000621457		
	Toplam	1252	1,358638882			
TCELL	Regresyon	1	0,335394598	0,335394598	886,5497757	1,0368E-147
	Fark	1251	0,473271387	0,000378314		
	Toplam	1252	0,808665985			
TEBNK	Regresyon	1	0,668066502	0,668066502	1344,100763	1,8912E-200
	Fark	1251	0,621792069	0,000497036		
	Toplam	1252	1,289858571			
THYAO	Regresyon	1	0,284967799	0,284967799	584,8303276	2,5591E-106
	Fark	1251	0,609569476	0,000487266		
	Toplam	1252	0,894537274			
TUPRS	Regresyon	1	0,323885287	0,323885287	834,3100419	5,557E-141
	Fark	1251	0,485647389	0,000388207		
	Toplam	1252	0,809532676			
VAKBN	Regresyon	1	0,798927916	0,798927916	3098,211743	0
	Fark	1251	0,322592161	0,000257867		
	Toplam	1252	1,121520077			
YKBNK	Regresyon	1	0,659195629	0,659195629	2566,159196	2,4842E-305
	Fark	1251	0,321357199	0,00025688		
	Toplam	1252	0,980552828			

EK 7. POZİTİF DEFINİT A MATRİSİ (*10⁻⁴)

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK
AKBNK	7,28	3,19	4,03	4,52	4,45	3,68	3,46	4,26	6,71	6,50	5,06	4,57	4,47	3,60	5,40	4,60	5,12	3,79	5,78	3,74	3,65	6,28	5,54
AKENR	3,19	6,78	2,62	2,51	2,64	2,79	2,29	3,00	3,64	3,47	3,24	3,66	3,06	2,77	2,89	2,86	3,15	2,38	3,54	2,05	2,55	3,41	3,01
ARCLK	4,03	2,62	6,30	3,02	3,39	3,02	2,36	3,12	4,08	4,07	3,96	3,73	3,27	2,75	3,88	3,05	3,85	2,45	3,90	2,78	2,54	4,10	3,86
DOHOL	4,52	2,51	3,02	7,86	7,68	3,18	2,79	3,58	4,89	4,82	4,27	3,91	3,99	3,26	4,33	4,08	4,04	2,93	4,59	3,11	2,80	4,85	4,38
DYHOL	4,45	2,64	3,39	7,68	11,06	3,09	2,72	3,90	5,00	4,77	4,04	4,12	4,30	3,14	4,55	4,14	4,26	2,94	4,64	2,91	2,87	5,12	4,27
ECILC	3,68	2,79	3,02	3,18	3,09	5,57	2,58	3,18	4,07	3,92	3,29	3,78	3,51	2,99	3,56	3,31	3,62	2,50	4,07	2,53	2,82	4,10	3,44
ENKAI	3,46	2,29	2,36	2,79	2,72	2,58	5,80	2,79	3,66	3,40	2,89	3,13	3,13	2,31	3,19	2,81	3,17	1,84	3,62	2,10	2,58	3,44	3,19
EREGL	4,26	3,00	3,12	3,58	3,90	3,18	2,79	6,15	4,53	4,18	4,04	3,85	4,50	3,22	4,12	3,78	4,29	2,79	4,26	2,66	3,16	4,38	4,22
GARAN	6,71	3,64	4,08	4,89	5,00	4,07	3,66	4,53	7,67	7,09	5,33	4,96	4,84	3,97	5,58	5,06	5,86	4,05	6,32	4,08	4,07	7,05	6,37
ISCTR	6,50	3,47	4,07	4,82	4,77	3,92	3,40	4,18	7,09	6,71	5,18	4,56	4,57	3,75	5,41	4,75	5,34	3,56	6,00	3,89	3,74	6,62	6,05
KCHOL	5,06	3,24	3,96	4,27	4,04	3,29	2,89	4,04	5,33	5,18	5,68	4,04	3,79	3,46	5,03	4,03	4,68	3,13	4,78	3,32	3,38	5,27	4,99
KOZAA	4,57	3,66	3,73	3,91	4,12	3,78	3,13	3,85	4,96	4,56	4,04	12,00	4,41	3,42	4,09	4,02	4,46	3,15	4,99	2,89	3,06	5,16	4,25
KRDMD	4,47	3,06	3,27	3,99	4,30	3,51	3,13	4,50	4,84	4,57	3,79	4,41	7,27	3,58	4,16	3,95	4,54	2,75	4,74	3,06	3,18	4,88	4,43
PETKM	3,60	2,77	2,75	3,26	3,14	2,99	2,31	3,22	3,97	3,75	3,46	3,42	3,58	4,87	3,47	3,21	3,32	2,45	3,54	3,09	2,46	3,80	3,54
SAHOL	5,40	2,89	3,88	4,33	4,55	3,56	3,19	4,12	5,58	5,41	5,03	4,09	4,16	3,47	6,30	4,29	4,73	3,25	5,11	3,23	3,51	5,36	4,98
SISE	4,60	2,86	3,05	4,08	4,14	3,31	2,81	3,78	5,06	4,75	4,03	4,02	3,95	3,21	4,29	5,15	4,13	2,90	4,48	3,14	3,10	4,81	4,29
SKBNK	5,12	3,15	3,85	4,04	4,26	3,62	3,17	4,29	5,86	5,34	4,68	4,46	4,54	3,32	4,73	4,13	8,82	3,01	5,67	3,65	3,44	5,45	4,92
TCELL	3,79	2,38	2,45	2,93	2,94	2,50	1,84	2,79	4,05	3,56	3,13	3,15	2,75	2,45	3,25	2,90	3,01	5,25	3,48	2,20	2,51	3,94	3,43
TEBNK	5,78	3,54	3,90	4,59	4,64	4,07	3,62	4,26	6,32	6,00	4,78	4,99	4,74	3,54	5,11	4,48	5,67	3,48	8,37	3,86	3,56	6,44	5,23
THYAO	3,74	2,05	2,78	3,11	2,91	2,53	2,10	2,66	4,08	3,89	3,32	2,89	3,06	3,09	3,23	3,14	3,65	2,20	3,86	5,80	2,22	3,86	3,46
TUPRS	3,65	2,55	2,54	2,80	2,87	2,82	2,58	3,16	4,07	3,74	3,38	3,06	3,18	2,46	3,51	3,10	3,44	2,51	3,56	2,22	5,25	3,70	3,33
VAKBN	6,28	3,41	4,10	4,85	5,12	4,10	3,44	4,38	7,05	6,62	5,27	5,16	4,88	3,80	5,36	4,81	5,45	3,94	6,44	3,86	3,70	7,28	6,11
YKBNK	5,54	3,01	3,86	4,38	4,27	3,44	3,19	4,22	6,37	6,05	4,99	4,25	4,43	3,54	4,98	4,29	4,92	3,43	5,23	3,46	3,33	4,97	6,36

EK 8. KÖŞEĞEN D MATRİSİ (*10⁻⁴)

	AKBNK	AKENR	ARCLK	DOHOL	DYHOL	ECILC	ENKAI	EREGL	GARAN	ISCTR	KCHOL	KOZAA	KRDMD	PETKM	SAHOL	SISE	SKBNK	TCELL	TEBNK	THYAO	TUPRS	VAKBN	YKBNK	
AKBNK	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
AKENR	0,00	1,55	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ARCLK	0,00	0,00	1,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DOHOL	0,00	0,00	0,00	1,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
DYHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	2,53	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ECILC	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ENKAI	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
EREGL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,41	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
GARAN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,76	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ISCTR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,54	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KCHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KOZAA	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KRDMD	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
PETKM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SAHOL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,44	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SISE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
SKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TCELL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
TEBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
THYAO	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,33	0,00	0,00	0,00	0,00
TUPRS	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,20	0,00	0,00	0,00
VAKBN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00
YKBNK	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,14	1,46	0,00

EK 9.LAGRANGE GEVŞETMESİ MODELİ

MODEL

MAX Z= $-\lambda * ($

0.000728826*AKBNK*AKBNK	+	0.000318966*AKENR*AKBNK	+	0.000403428*ARCLK*AKBNK	+	0.000452464*DOHOL*AKBNK	+	0.000445477*DYHOL*AKBNK	+
0.000318966*AKBNK*AKENR	+	0.000678586*AKENR*AKENR	+	0.000262572*ARCLK*AKENR	+	0.000251294*DOHOL*AKENR	+	0.000264237*DYHOL*AKENR	+
0.000403428*AKBNK*ARCLK	+	0.000262572*AKENR*ARCLK	+	0.000630515*ARCLK*ARCLK	+	0.000301885*DOHOL*ARCLK	+	0.000339088*DYHOL*ARCLK	+
0.000452464*AKBNK*DOHOL	+	0.000251294*AKENR*DOHOL	+	0.000301885*ARCLK*DOHOL	+	0.000786804*DOHOL*DOHOL	+	0.000768425*DYHOL*DOHOL	+
0.000445477*AKBNK*DYHOL	+	0.000264237*AKENR*DYHOL	+	0.000339088*ARCLK*DYHOL	+	0.000768425*DOHOL*DYHOL	+	0.001106423*DYHOL*DYHOL	+
0.000368052*AKBNK*ECILC	+	0.000279300*AKENR*ECILC	+	0.000302088*ARCLK*ECILC	+	0.000318748*DOHOL*ECILC	+	0.000308817*DYHOL*ECILC	+
0.000346450*AKBNK*ENKAI	+	0.000228871*AKENR*ENKAI	+	0.000236503*ARCLK*ENKAI	+	0.000279289*DOHOL*ENKAI	+	0.000272440*DYHOL*ENKAI	+
0.000426019*AKBNK*EREGL	+	0.000300105*AKENR*EREGL	+	0.000311888*ARCLK*EREGL	+	0.000357884*DOHOL*EREGL	+	0.000390151*DYHOL*EREGL	+
0.000671444*AKBNK*GARAN	+	0.000364751*AKENR*GARAN	+	0.000407928*ARCLK*GARAN	+	0.000489710*DOHOL*GARAN	+	0.000500358*DYHOL*GARAN	+
0.000650771*AKBNK*ISCTR	+	0.000346929*AKENR*ISCTR	+	0.000407568*ARCLK*ISCTR	+	0.000482613*DOHOL*ISCTR	+	0.000477493*DYHOL*ISCTR	+
0.000506319*AKBNK*KCHOL	+	0.000323818*AKENR*KCHOL	+	0.000395979*ARCLK*KCHOL	+	0.000427605*DOHOL*KCHOL	+	0.000404418*DYHOL*KCHOL	+
0.000457277*AKBNK*KOZAA	+	0.000365918*AKENR*KOZAA	+	0.000372873*ARCLK*KOZAA	+	0.000391798*DOHOL*KOZAA	+	0.000411873*DYHOL*KOZAA	+
0.000446994*AKBNK*KRDMD	+	0.000306387*AKENR*KRDMD	+	0.000326877*ARCLK*KRDMD	+	0.000398941*DOHOL*KRDMD	+	0.000430242*DYHOL*KRDMD	+
0.000360359*AKBNK*PETKM	+	0.000276985*AKENR*PETKM	+	0.000275468*ARCLK*PETKM	+	0.000326188*DOHOL*PETKM	+	0.000314739*DYHOL*PETKM	+
0.000540450*AKBNK*SAHOL	+	0.000289249*AKENR*SAHOL	+	0.000388400*ARCLK*SAHOL	+	0.000433418*DOHOL*SAHOL	+	0.000455044*DYHOL*SAHOL	+
0.000460830*AKBNK*SISE	+	0.000286077*AKENR*SISE	+	0.000305426*ARCLK*SISE	+	0.000408763*DOHOL*SISE	+	0.000413845*DYHOL*SISE	+
0.000512003*AKBNK*SKBNK	+	0.000315189*AKENR*SKBNK	+	0.000385014*ARCLK*SKBNK	+	0.000404122*DOHOL*SKBNK	+	0.000426330*DYHOL*SKBNK	+
0.000379492*AKBNK*TCELL	+	0.000237983*AKENR*TCELL	+	0.000245618*ARCLK*TCELL	+	0.000292841*DOHOL*TCELL	+	0.000294601*DYHOL*TCELL	+
0.000578921*AKBNK*TEBNK	+	0.000354695*AKENR*TEBNK	+	0.000389879*ARCLK*TEBNK	+	0.000459768*DOHOL*TEBNK	+	0.000464571*DYHOL*TEBNK	+
0.000373916*AKBNK*THYAO	+	0.000205219*AKENR*THYAO	+	0.000278323*ARCLK*THYAO	+	0.000311533*DOHOL*THYAO	+	0.000291489*DYHOL*THYAO	+
0.000364865*AKBNK*TUPRS	+	0.000255607*AKENR*TUPRS	+	0.000254299*ARCLK*TUPRS	+	0.000280470*DOHOL*TUPRS	+	0.000287663*DYHOL*TUPRS	+
0.000628435*AKBNK*VAKBN	+	0.000341590*AKENR*VAKBN	+	0.000410396*ARCLK*VAKBN	+	0.000485655*DOHOL*VAKBN	+	0.000512503*DYHOL*VAKBN	+
0.000554270*AKBNK*YKBNK	+	0.000300775*AKENR*YKBNK	+	0.000386574*ARCLK*YKBNK	+	0.000438640*DOHOL*YKBNK	+	0.000427569*DYHOL*YKBNK	+

0.000368052*ECILC*AKBNK	+ 0.000346450*ENKAI*AKBNK	+ 0.000426019*EREGL*AKBNK	+ 0.000671444*GARAN*AKBNK	+ 0.000650771*ISCTR*AKBNK	+
0.000279300*ECILC*AKENR	+ 0.000228871*ENKAI*AKENR	+ 0.000300105*EREGL*AKENR	+ 0.000364751*GARAN*AKENR	+ 0.000346929*ISCTR*AKENR	+
0.000302088*ECILC*ARCLK	+ 0.000236503*ENKAI*ARCLK	+ 0.000311888*EREGL*ARCLK	+ 0.000407928*GARAN*ARCLK	+ 0.000407568*ISCTR*ARCLK	+
0.000318748*ECILC*DOHOL	+ 0.000279289*ENKAI*DOHOL	+ 0.000357884*EREGL*DOHOL	+ 0.000489710*GARAN*DOHOL	+ 0.000482613*ISCTR*DOHOL	+
0.000308817*ECILC*DYHOL	+ 0.000272440*ENKAI*DYHOL	+ 0.000390151*EREGL*DYHOL	+ 0.000500358*GARAN*DYHOL	+ 0.000477493*ISCTR*DYHOL	+
0.000557267*ECILC*ECILC	+ 0.000258685*ENKAI*ECILC	+ 0.000318216*EREGL*ECILC	+ 0.000406910*GARAN*ECILC	+ 0.000391926*ISCTR*ECILC	+
0.000258685*ECILC*ENKAI	+ 0.000580857*ENKAI*ENKAI	+ 0.000279499*EREGL*ENKAI	+ 0.000366712*GARAN*ENKAI	+ 0.000340420*ISCTR*ENKAI	+
0.000318216*ECILC*EREGL	+ 0.000279499*ENKAI*EREGL	+ 0.000615259*EREGL*EREGL	+ 0.000453028*GARAN*EREGL	+ 0.000418403*ISCTR*EREGL	+
0.000406910*ECILC*GARAN	+ 0.000366712*ENKAI*GARAN	+ 0.000453028*EREGL*GARAN	+ 0.000767894*GARAN*GARAN	+ 0.000709167*ISCTR*GARAN	+
0.000391926*ECILC*ISCTR	+ 0.000340420*ENKAI*ISCTR	+ 0.000418403*EREGL*ISCTR	+ 0.000709167*GARAN*ISCTR	+ 0.000671884*ISCTR*ISCTR	+
0.000328843*ECILC*KCHOL	+ 0.000289549*ENKAI*KCHOL	+ 0.000404084*EREGL*KCHOL	+ 0.000533254*GARAN*KCHOL	+ 0.000518557*ISCTR*KCHOL	+
0.000378137*ECILC*KOZAA	+ 0.000312867*ENKAI*KOZAA	+ 0.000385274*EREGL*KOZAA	+ 0.000496433*GARAN*KOZAA	+ 0.000456017*ISCTR*KOZAA	+
0.000351310*ECILC*KRDMD	+ 0.000313309*ENKAI*KRDMD	+ 0.000450018*EREGL*KRDMD	+ 0.000484193*GARAN*KRDMD	+ 0.000457586*ISCTR*KRDMD	+
0.000299730*ECILC*PETKM	+ 0.000231376*ENKAI*PETKM	+ 0.000322731*EREGL*PETKM	+ 0.000397488*GARAN*PETKM	+ 0.000375446*ISCTR*PETKM	+
0.000356116*ECILC*SAHOL	+ 0.000319290*ENKAI*SAHOL	+ 0.000412389*EREGL*SAHOL	+ 0.000558888*GARAN*SAHOL	+ 0.000541639*ISCTR*SAHOL	+
0.000331332*ECILC*SISE	+ 0.000281645*ENKAI*SISE	+ 0.000378239*EREGL*SISE	+ 0.000506214*GARAN*SISE	+ 0.000475154*ISCTR*SISE	+
0.000362593*ECILC*SKBNK	+ 0.000317116*ENKAI*SKBNK	+ 0.000429731*EREGL*SKBNK	+ 0.000586152*GARAN*SKBNK	+ 0.000534121*ISCTR*SKBNK	+
0.000250386*ECILC*TCELL	+ 0.000184194*ENKAI*TCELL	+ 0.000279710*EREGL*TCELL	+ 0.000405467*GARAN*TCELL	+ 0.000355975*ISCTR*TCELL	+
0.000407178*ECILC*TEBNK	+ 0.000362594*ENKAI*TEBNK	+ 0.000426218*EREGL*TEBNK	+ 0.000632899*GARAN*TEBNK	+ 0.000600505*ISCTR*TEBNK	+
0.000253533*ECILC*THYAO	+ 0.000210634*ENKAI*THYAO	+ 0.000266113*EREGL*THYAO	+ 0.000408797*GARAN*THYAO	+ 0.000389268*ISCTR*THYAO	+
0.000282065*ECILC*TUPRS	+ 0.000257854*ENKAI*TUPRS	+ 0.000315910*EREGL*TUPRS	+ 0.000407273*GARAN*TUPRS	+ 0.000374106*ISCTR*TUPRS	+
0.000410357*ECILC*VAKBN	+ 0.000344120*ENKAI*VAKBN	+ 0.000438378*EREGL*VAKBN	+ 0.000705311*GARAN*VAKBN	+ 0.000662403*ISCTR*VAKBN	+
0.000343878*ECILC*YKBNK	+ 0.000318780*ENKAI*YKBNK	+ 0.000422309*EREGL*YKBNK	+ 0.000637655*GARAN*YKBNK	+ 0.000605401*ISCTR*YKBNK	+

0.000506319*KCHOL*AKBNK	+ 0.000457277*KOZAA*AKBNK	+ 0.000446994*KRDMD*AKBNK	+ 0.000360359*PETKM*AKBNK	+ 0.000540450*SAHOL*AKBNK	+
0.000323818*KCHOL*AKENR	+ 0.000365918*KOZAA*AKENR	+ 0.000306387*KRDMD*AKENR	+ 0.000276985*PETKM*AKENR	+ 0.000289249*SAHOL*AKENR	+
0.000395979*KCHOL*ARCLK	+ 0.000372873*KOZAA*ARCLK	+ 0.000326877*KRDMD*ARCLK	+ 0.000275468*PETKM*ARCLK	+ 0.000388400*SAHOL*ARCLK	+
0.000427605*KCHOL*DOHOL	+ 0.000391798*KOZAA*DOHOL	+ 0.000398941*KRDMD*DOHOL	+ 0.000326188*PETKM*DOHOL	+ 0.000433418*SAHOL*DOHOL	+
0.000404418*KCHOL*DYHOL	+ 0.000411873*KOZAA*DYHOL	+ 0.000430242*KRDMD*DYHOL	+ 0.000314739*PETKM*DYHOL	+ 0.000455044*SAHOL*DYHOL	+
0.000328843*KCHOL*ECILC	+ 0.000378137*KOZAA*ECILC	+ 0.000351310*KRDMD*ECILC	+ 0.000299730*PETKM*ECILC	+ 0.000356116*SAHOL*ECILC	+
0.000289549*KCHOL*ENKAI	+ 0.000312867*KOZAA*ENKAI	+ 0.000313309*KRDMD*ENKAI	+ 0.000231376*PETKM*ENKAI	+ 0.000319290*SAHOL*ENKAI	+
0.000404084*KCHOL*EREGL	+ 0.000385274*KOZAA*EREGL	+ 0.000450018*KRDMD*EREGL	+ 0.000322731*PETKM*EREGL	+ 0.000412389*SAHOL*EREGL	+
0.000533254*KCHOL*GARAN	+ 0.000496433*KOZAA*GARAN	+ 0.000484193*KRDMD*GARAN	+ 0.000397488*PETKM*GARAN	+ 0.000558888*SAHOL*GARAN	+
0.000518557*KCHOL*ISCTR	+ 0.000456017*KOZAA*ISCTR	+ 0.000457586*KRDMD*ISCTR	+ 0.000375446*PETKM*ISCTR	+ 0.000541639*SAHOL*ISCTR	+
0.000568138*KCHOL*KCHOL	+ 0.000404547*KOZAA*KCHOL	+ 0.000378903*KRDMD*KCHOL	+ 0.000346018*PETKM*KCHOL	+ 0.000503868*SAHOL*KCHOL	+
0.000404547*KCHOL*KOZAA	+ 0.001201257*KOZAA*KOZAA	+ 0.000441008*KRDMD*KOZAA	+ 0.000342118*PETKM*KOZAA	+ 0.000409019*SAHOL*KOZAA	+
0.000378903*KCHOL*KRDMD	+ 0.000441008*KOZAA*KRDMD	+ 0.000727559*KRDMD*KRDMD	+ 0.000358286*PETKM*KRDMD	+ 0.000415948*SAHOL*KRDMD	+
0.000346018*KCHOL*PETKM	+ 0.000342118*KOZAA*PETKM	+ 0.000358286*KRDMD*PETKM	+ 0.000487567*PETKM*PETKM	+ 0.000346817*SAHOL*PETKM	+
0.000503868*KCHOL*SAHOL	+ 0.000409019*KOZAA*SAHOL	+ 0.000415948*KRDMD*SAHOL	+ 0.000346817*PETKM*SAHOL	+ 0.000630371*SAHOL*SAHOL	+
0.000402848*KCHOL*SISE	+ 0.000402272*KOZAA*SISE	+ 0.000395726*KRDMD*SISE	+ 0.000320997*PETKM*SISE	+ 0.000429718*SAHOL*SISE	+
0.000467982*KCHOL*SKBNK	+ 0.000446846*KOZAA*SKBNK	+ 0.000454452*KRDMD*SKBNK	+ 0.000331919*PETKM*SKBNK	+ 0.000473589*SAHOL*SKBNK	+
0.000313489*KCHOL*TCELL	+ 0.000315026*KOZAA*TCELL	+ 0.000275248*KRDMD*TCELL	+ 0.000245300*PETKM*TCELL	+ 0.000324984*SAHOL*TCELL	+
0.000478101*KCHOL*TEBNK	+ 0.000498922*KOZAA*TEBNK	+ 0.000474338*KRDMD*TEBNK	+ 0.000354009*PETKM*TEBNK	+ 0.000511779*SAHOL*TEBNK	+
0.000331897*KCHOL*THYAO	+ 0.000289715*KOZAA*THYAO	+ 0.000306164*KRDMD*THYAO	+ 0.000309630*PETKM*THYAO	+ 0.000322950*SAHOL*THYAO	+
0.000337828*KCHOL*TUPRS	+ 0.000306036*KOZAA*TUPRS	+ 0.000317971*KRDMD*TUPRS	+ 0.000245777*PETKM*TUPRS	+ 0.000350921*SAHOL*TUPRS	+
0.000527301*KCHOL*VAKBN	+ 0.000516552*KOZAA*VAKBN	+ 0.000487903*KRDMD*VAKBN	+ 0.000380395*PETKM*VAKBN	+ 0.000536554*SAHOL*VAKBN	+
0.000498946*KCHOL*YKBNK	+ 0.000425276*KOZAA*YKBNK	+ 0.000443420*KRDMD*YKBNK	+ 0.000354491*PETKM*YKBNK	+ 0.000498646*SAHOL*YKBNK	+

0.000460830*SISE*AKBNK	+ 0.000512003*SKBNK*AKBNK	+ 0.000379492*TCELL*AKBNK	+ 0.000578921*TEBNK*AKBNK	+ 0.000373916*THYAO*AKBNK	+
0.000286077*SISE*AKENR	+ 0.000315189*SKBNK*AKENR	+ 0.000237983*TCELL*AKENR	+ 0.000354695*TEBNK*AKENR	+ 0.000205219*THYAO*AKENR	+
0.000305426*SISE*ARCLK	+ 0.000385014*SKBNK*ARCLK	+ 0.000245618*TCELL*ARCLK	+ 0.000389879*TEBNK*ARCLK	+ 0.000278323*THYAO*ARCLK	+
0.000408763*SISE*DOHOL	+ 0.000404122*SKBNK*DOHOL	+ 0.000292841*TCELL*DOHOL	+ 0.000459768*TEBNK*DOHOL	+ 0.000311533*THYAO*DOHOL	+
0.000413845*SISE*DYHOL	+ 0.000426330*SKBNK*DYHOL	+ 0.000294601*TCELL*DYHOL	+ 0.000464571*TEBNK*DYHOL	+ 0.000291489*THYAO*DYHOL	+
0.000331332*SISE*ECILC	+ 0.000362593*SKBNK*ECILC	+ 0.000250386*TCELL*ECILC	+ 0.000407178*TEBNK*ECILC	+ 0.000253533*THYAO*ECILC	+
0.000281645*SISE*ENKAI	+ 0.000317116*SKBNK*ENKAI	+ 0.000184194*TCELL*ENKAI	+ 0.000362594*TEBNK*ENKAI	+ 0.000210634*THYAO*ENKAI	+
0.000378239*SISE*EREGL	+ 0.000429731*SKBNK*EREGL	+ 0.000279710*TCELL*EREGL	+ 0.000426218*TEBNK*EREGL	+ 0.000266113*THYAO*EREGL	+
0.000506214*SISE*GARAN	+ 0.000586152*SKBNK*GARAN	+ 0.000405467*TCELL*GARAN	+ 0.000632899*TEBNK*GARAN	+ 0.000408797*THYAO*GARAN	+
0.000475154*SISE*ISCTR	+ 0.000534121*SKBNK*ISCTR	+ 0.000355975*TCELL*ISCTR	+ 0.000600505*TEBNK*ISCTR	+ 0.000389268*THYAO*ISCTR	+
0.000402848*SISE*KCHOL	+ 0.000467982*SKBNK*KCHOL	+ 0.000313489*TCELL*KCHOL	+ 0.000478101*TEBNK*KCHOL	+ 0.000331897*THYAO*KCHOL	+
0.000402272*SISE*KOZAA	+ 0.000446846*SKBNK*KOZAA	+ 0.000315026*TCELL*KOZAA	+ 0.000498922*TEBNK*KOZAA	+ 0.000289715*THYAO*KOZAA	+
0.000395726*SISE*KRDMD	+ 0.000454452*SKBNK*KRDMD	+ 0.000275248*TCELL*KRDMD	+ 0.000474338*TEBNK*KRDMD	+ 0.000306164*THYAO*KRDMD	+
0.000320997*SISE*PETKM	+ 0.000331919*SKBNK*PETKM	+ 0.000245300*TCELL*PETKM	+ 0.000354009*TEBNK*PETKM	+ 0.000309630*THYAO*PETKM	+
0.000429718*SISE*SAHOL	+ 0.000473589*SKBNK*SAHOL	+ 0.000324984*TCELL*SAHOL	+ 0.000511779*TEBNK*SAHOL	+ 0.000322950*THYAO*SAHOL	+
0.000515398*SISE*SISE	+ 0.000412876*SKBNK*SISE	+ 0.000290570*TCELL*SISE	+ 0.000448559*TEBNK*SISE	+ 0.000314430*THYAO*SISE	+
0.000412876*SISE*SKBNK	+ 0.000882238*SKBNK*SKBNK	+ 0.000301294*TCELL*SKBNK	+ 0.000566995*TEBNK*SKBNK	+ 0.000364871*THYAO*SKBNK	+
0.000290570*SISE*TCELL	+ 0.000301294*SKBNK*TCELL	+ 0.000525111*TCELL*TCELL	+ 0.000348681*TEBNK*TCELL	+ 0.000220592*THYAO*TCELL	+
0.000448559*SISE*TEBNK	+ 0.000566995*SKBNK*TEBNK	+ 0.000348681*TCELL*TEBNK	+ 0.000837576*TEBNK*TEBNK	+ 0.000385928*THYAO*TEBNK	+
0.000314430*SISE*THYAO	+ 0.000364871*SKBNK*THYAO	+ 0.000220592*TCELL*THYAO	+ 0.000385928*TEBNK*THYAO	+ 0.000580872*THYAO*THYAO	+
0.000309833*SISE*TUPRS	+ 0.000344300*SKBNK*TUPRS	+ 0.000251579*TCELL*TUPRS	+ 0.000356088*TEBNK*TUPRS	+ 0.000222527*THYAO*TUPRS	+
0.000481431*SISE*VAKBN	+ 0.000544953*SKBNK*VAKBN	+ 0.000394258*TCELL*VAKBN	+ 0.000644264*TEBNK*VAKBN	+ 0.000385984*THYAO*VAKBN	+
0.000429835*SISE*YKBNK	+ 0.000492096*SKBNK*YKBNK	+ 0.000342853*TCELL*YKBNK	+ 0.000523366*TEBNK*YKBNK	+ 0.000346543*THYAO*YKBNK	+

0.000364865*TUPRS*AKBNK	+ 0.000628435*VAKBN*AKBNK	+ 0.000554270*YKBNK*AKBNK	+
0.000255607*TUPRS*AKENR	+ 0.000341590*VAKBN*AKENR	+ 0.000300775*YKBNK*AKENR	+
0.000254299*TUPRS*ARCLK	+ 0.000410396*VAKBN*ARCLK	+ 0.000386574*YKBNK*ARCLK	+
0.000280470*TUPRS*DOHOL	+ 0.000485655*VAKBN*DOHOL	+ 0.000438640*YKBNK*DOHOL	+
0.000287663*TUPRS*DYHOL	+ 0.000512503*VAKBN*DYHOL	+ 0.000427569*YKBNK*DYHOL	+
0.000282065*TUPRS*ECILC	+ 0.000410357*VAKBN*ECILC	+ 0.000343878*YKBNK*ECILC	+
0.000257854*TUPRS*ENKAI	+ 0.000344120*VAKBN*ENKAI	+ 0.000318780*YKBNK*ENKAI	+
0.000315910*TUPRS*EREGL	+ 0.000438378*VAKBN*EREGL	+ 0.000422309*YKBNK*EREGL	+
0.000407273*TUPRS*GARAN	+ 0.000705311*VAKBN*GARAN	+ 0.000637655*YKBNK*GARAN	+
0.000374106*TUPRS*ISCTR	+ 0.000662403*VAKBN*ISCTR	+ 0.000605401*YKBNK*ISCTR	+
0.000337828*TUPRS*KCHOL	+ 0.000527301*VAKBN*KCHOL	+ 0.000498946*YKBNK*KCHOL	+
0.000306036*TUPRS*KOZAA	+ 0.000516552*VAKBN*KOZAA	+ 0.000425276*YKBNK*KOZAA	+
0.000317971*TUPRS*KRDMD	+ 0.000487903*VAKBN*KRDMD	+ 0.000443420*YKBNK*KRDMD	+
0.000245777*TUPRS*PETKM	+ 0.000380395*VAKBN*PETKM	+ 0.000354491*YKBNK*PETKM	+
0.000350921*TUPRS*SAHOL	+ 0.000536554*VAKBN*SAHOL	+ 0.000498646*YKBNK*SAHOL	+
0.000309833*TUPRS*SISE	+ 0.000481431*VAKBN*SISE	+ 0.000429835*YKBNK*SISE	+
0.000344300*TUPRS*SKBNK	+ 0.000544953*VAKBN*SKBNK	+ 0.000492096*YKBNK*SKBNK	+
0.000251579*TUPRS*TCELL	+ 0.000394258*VAKBN*TCELL	+ 0.000342853*YKBNK*TCELL	+
0.000356088*TUPRS*TEBNK	+ 0.000644264*VAKBN*TEBNK	+ 0.000523366*YKBNK*TEBNK	+
0.000222527*TUPRS*THYAO	+ 0.000385984*VAKBN*THYAO	+ 0.000346543*YKBNK*THYAO	+
0.000525674*TUPRS*TUPRS	+ 0.000370649*VAKBN*TUPRS	+ 0.000333305*YKBNK*TUPRS	+
0.000370649*TUPRS*VAKBN	+ 0.000728264*VAKBN*VAKBN	+ 0.000611115*YKBNK*VAKBN	+
0.000333305*TUPRS*YKBNK	+ 0.000611115*VAKBN*YKBNK	+ 0.000636726*YKBNK*YKBNK	+

-λ*

(0.000166932*AKBNK*AKBNK+0.000155425*AKENR*AKENR+0.000144415*ARCLK*ARCLK
+0.000180212*DOHOL*DOHOL+0.000253418*DYHOL*DYHOL+0.000127638*ECILC*ECILC
+0.000133041*ENKAI*ENKAI+0.000140921*EREGL*EREGL+0.000175881*GARAN*GARAN
+0.000153890*ISCTR*ISCTR+0.000130128*KCHOL*KCHOL+0.000275139*KOZAA*KOZAA
+0.000166642*KRDMD*KRDMD+0.000111674*PETKM*PETKM+0.000144382*SAHOL*SAHOL
+0.000118048*SISE*SISE+0.000202070*SKBNK*SKBNK+0.000120273*TCELL*TCELL
+0.000191841*TEBNK*TEBNK+0.000133045*THYAO*THYAO+0.000120402*TUPRS*TUPRS
+0.000166804*VAKBN*VAKBN+ 0.000145838*YKBNK*YKBNK)

+0.000945347*AKBNK+0.001253171*AKENR+0.000610184*ARCLK+
0.000466475*DOHOL+0.000026665*DYHOL+0.000905188*ECILC+
0.001141305*ENKAI+0.000973492*EREGL+0.001303992*GARAN+
0.000571933*ISCTR+0.001076927*KCHOL+0.001899307*KOZAA+
0.001083048*KRDMD+0.000634060*PETKM+0.000794231*SAHOL+
0.000677595* SISE+0.000905372*SKBNK+0.000839428*TCELL+
0.000754758*TEBNK+0.001446987*THYAO+0.001100124*TUPRS+
0.000635823*VAKBN+0.001053358*YKBNK;

AKBNK+AKENR+ARCLK+DOHOL+DYHOL+ECILC+ENKAI+EREGL+GARAN+ISCTR+KCHOL+KOZAA+KRDMD+
PETKM+SAHOL+SISE+SKBNK+TCELL+TEBNK+THYAO+TUPRS+VAKBN+YKBNK=1;

AKBNK >=0;
AKENR >=0;
ARCLK >=0;
DOHOL >=0;
DYHOL >=0;
ECILC >=0;
ENKAI >=0;
EREGL >=0;
GARAN >=0;
ISCTR >=0;
KCHOL >=0;
KOZAA >=0;
KRDMD >=0;
PETKM >=0;
SAHOL >=0;
SISE >=0;
SKBNK >=0;
TCELL >=0;
TEBNK >=0;
THYAO >=0;
TUPRS >=0;
VAKBN >=0;
YKBNK>=0;

```
AKBNK <=1;
AKENR <=1;
ARCLK <=1;
DOHOL <=1;
DYHOL <=1;
ECILC <=1;
ENKAI <=1;
EREGL <=1;
GARAN <=1;
ISCTR <=1;
KCHOL <=1;
KOZAA <=1;
KRDMD <=1;
PETKM <=1;
SAHOL <=1;
SISE <=1;
SKBNK <=1;
TCELL <=1;
TEBNK <=1;
THYAO <=1;
TUPRS <=1;
VAKBN <=1;
YKBNK<=1;
```

```
@CARD( 'HISSE'. 23);
```

```
@CARD( 'HISSE'.AKBNK); @CARD( 'HISSE'. AKENR); @CARD( 'HISSE'. ARCLK);
@CARD( 'HISSE'.DOHOL); @CARD( 'HISSE'. DYHOL); @CARD( 'HISSE'.ECILC);
@CARD( 'HISSE'. ENKAI); @CARD( 'HISSE'. EREGL); @CARD( 'HISSE'. GARAN);
@CARD( 'HISSE'. ISCTR); @CARD( 'HISSE'.KCHOL); @CARD( 'HISSE'. KOZAA);
@CARD( 'HISSE'. KRDMD); @CARD( 'HISSE'. PETKM); @CARD( 'HISSE'. SAHOL);
@CARD( 'HISSE'. SISE); @CARD( 'HISSE'. SKBNK); @CARD( 'HISSE'. TCELL);
@CARD( 'HISSE'. TEBNK); @CARD( 'HISSE'. THYAO);@CARD( 'HISSE'. TUPRS);
@CARD( 'HISSE'. VAKBN); @CARD( 'HISSE'. YKBNK);
```

```
END
```

EK 10. LAGRANGE GEVŞETMESİNE GÖRE ÇÖZÜMÜN EKLAN ÇIKTILARI

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6212635E-03
Objective bound: 0.6212635E-03
Infeasibilities: 0.000000

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1652776	-0.4526430E-08
ENKAI	0.1642847	-0.4531458E-07
KOZAA	0.1691192	0.2903743E-07
TCELL	0.1565226E-01	0.3610847E-07
THYAO	0.3407334	0.000000
TUPRS	0.1449329	-0.1333211E-08

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.1

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5835313E-03
Objective bound: 0.5835313E-03
Infeasibilities: 0.000000

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1644974	-0.4258212E-08
ENKAI	0.1664437	-0.2951259E-08
KOZAA	0.1613380	-0.7652158E-08
TCELL	0.2609118E-01	-0.4224313E-08
THYAO	0.3346357	0.000000
TUPRS	0.1469940	-0.4948563E-08

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.2

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5463031E-03
Objective bound: 0.5463031E-03
Infeasibilities: 0.000000

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1637855	0.000000
ENKAI	0.1683858	0.000000
KOZAA	0.1542720	0.000000
TCELL	0.3559901E-01	0.000000
THYAO	0.3290886	0.000000
TUPRS	0.1488690	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.3

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5095130E-03
Objective bound: 0.5095130E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 13
Model Class: PINLP

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1631356	0.000000
ENKAI	0.1701595	0.000000
KOZAA	0.1478196	0.000000
TCELL	0.4427972E-01	0.000000
THYAO	0.3240253	0.000000
TUPRS	0.1505803	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.4

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4731065E-03
Objective bound: 0.4731065E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 13

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1625398	0.000000
ENKAI	0.1717853	0.000000
KOZAA	0.1419049	0.000000
TCELL	0.5223708E-01	0.000000
THYAO	0.3193840	0.000000
TUPRS	0.1521489	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.5

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4370373E-03
Objective bound: 0.4370373E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 14

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1619934	-0.7786733E-08
ENKAI	0.1732910	0.1722725E-07
KOZAA	0.1364642	-0.8623933E-08
TCELL	0.5953476E-01	-0.6227433E-07
THYAO	0.3151180	-0.3416187E-08
TUPRS	0.1535987	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.6

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4012666E-03
Objective bound: 0.4012666E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 14

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1614866	-0.4802336E-08
ENKAI	0.1746694	0.1537441E-07
KOZAA	0.1314404	-0.7572890E-08
TCELL	0.6630114E-01	-0.3989993E-07
THYAO	0.3111746	-0.2430720E-08
TUPRS	0.1549279	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.7

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3657612E-03
Objective bound: 0.3657612E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 14

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1610181	-0.1422203E-08
ENKAI	0.1759438	0.7269813E-08
KOZAA	0.1267895	-0.4292662E-08
TCELL	0.7256465E-01	-0.2268730E-07
THYAO	0.3075242	0.000000
TUPRS	0.1561597	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.8

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3304934E-03
Objective bound: 0.3304934E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 16

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1604700	-0.5939463E-08
ECILC	0.7020285E-03	-0.1153693E-07
ENKAI	0.1770007	-0.6090185E-08
KOZAA	0.1223963	0.3812381E-08
TCELL	0.7828678E-01	0.8095452E-07
THYAO	0.3040025	-0.3328111E-08
TUPRS	0.1571419	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=2.9

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2954702E-03
Objective bound: 0.2954702E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1594273	0.000000
ECILC	0.4983727E-02	0.000000
ENKAI	0.1773698	0.000000
KOZAA	0.1179335	0.000000
TCELL	0.8291236E-01	0.000000
THYAO	0.3000952	0.000000
TUPRS	0.1572781	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.0

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2606843E-03
Objective bound: 0.2606843E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 19

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1584495	0.1007120E-08
ECILC	0.8970332E-02	-0.2230677E-08
ENKAI	0.1777122	0.3916061E-08
KOZAA	0.1137673	0.000000
TCELL	0.8725744E-01	0.000000
THYAO	0.2964433	0.000000
TUPRS	0.1573999	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.1

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2261126E-03
Objective bound: 0.2261126E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 19

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1575332	0.1179461E-07
ECILC	0.1271407E-01	0.4465064E-07
ENKAI	0.1780355	0.3206739E-07
KOZAA	0.1098672	0.000000
TCELL	0.9131919E-01	0.6935787E-08
THYAO	0.2930238	0.7103481E-08
TUPRS	0.1575070	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.2

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1917350E-03
Objective bound: 0.1917350E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 18

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1566767	0.000000
ECILC	0.1619937E-01	0.000000
ENKAI	0.1783295	0.000000
KOZAA	0.1062164	0.000000
TCELL	0.9513230E-01	0.000000
THYAO	0.2898242	0.000000
TUPRS	0.1576215	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.3

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1575340E-03
Objective bound: 0.1575340E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 17

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1558710	0.000000
ECILC	0.1948476E-01	0.000000
ENKAI	0.1786106	0.000000
KOZAA	0.1027841	0.000000
TCELL	0.9871209E-01	0.000000
THYAO	0.2868155	0.000000
TUPRS	0.1577219	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.4

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1234939E-03
Objective bound: 0.1234939E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 17

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1551127	0.000000
ECILC	0.2257689E-01	0.000000
ENKAI	0.1788752	0.000000
KOZAA	0.9955376E-01	0.000000
TCELL	0.1020810	0.000000
THYAO	0.2839838	0.000000
TUPRS	0.1578166	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.5

Local optimal solution found.
Objective value: 0.8960098E-04
Objective bound: 0.8960098E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 17

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1543977	0.000000
ECILC	0.2549233E-01	0.000000
ENKAI	0.1791247	0.000000
KOZAA	0.9650799E-01	0.000000
TCELL	0.1052574	0.000000
THYAO	0.2813140	0.000000
TUPRS	0.1579059	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.6

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5584327E-04
Objective bound: 0.5584327E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 20

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1536675	0.000000
ECILC	0.2817146E-01	0.000000
ENKAI	0.1792962	-0.3249186E-08
EREGL	0.4503076E-03	0.1533209E-08
KOZAA	0.9359890E-01	0.000000
TCELL	0.1081845	0.000000
THYAO	0.2787351	0.000000
TUPRS	0.1578960	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.7

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2221487E-04
Objective bound: 0.2221487E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 19

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1528571	0.1904169E-07
ECILC	0.3055117E-01	0.4000505E-07
ENKAI	0.1793221	0.1594464E-07
EREGL	0.1853431E-02	0.3128763E-07
KOZAA	0.9077635E-01	0.2294473E-07
TCELL	0.1107945	0.1755271E-07
THYAO	0.2761707	0.2019267E-07
TUPRS	0.1576746	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.8

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1129278E-04
Objective bound: -0.1129278E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 20

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1520937	-0.1053077E-07
ECILC	0.3279103E-01	-0.2945951E-07
ENKAI	0.1793491	-0.1909138E-07
EREGL	0.3174167E-02	-0.2950822E-07
KOZAA	0.8809824E-01	-0.6067611E-07
TCELL	0.1132679	-0.2646740E-07
THYAO	0.2737383	-0.3930902E-07
TUPRS	0.1574875	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=3.9

Local optimal solution found.
Objective value: -0.4468897E-04
Objective bound: -0.4468897E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 20

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1513631	0.2128205E-08
ECILC	0.3492596E-01	0.1506426E-08
ENKAI	0.1793720	0.1657024E-08
EREGL	0.4431792E-02	-0.8489036E-08
KOZAA	0.8556600E-01	0.000000
TCELL	0.1156158	0.1503662E-08
THYAO	0.2714379	0.1202035E-08
TUPRS	0.1572875	0.000000

RİSKTEN KAÇINMA KATSAYISI=4.0

Local optimal solution found.
Objective value: -0.7798206E-04
Objective bound: -0.7798206E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 19

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1506723	-0.3043786E-07
ECILC	0.3695386E-01	-0.2928058E-07
ENKAI	0.1793942	-0.3230598E-07
EREGL	0.5624630E-02	-0.5148833E-07
KOZAA	0.8315204E-01	-0.7117287E-07
TCELL	0.1178428	-0.4108575E-07
THYAO	0.2692440	-0.5373233E-07
TUPRS	0.1571162	0.000000

**EK 11. LAGRANGE GEVŞETMESİNE GÖRE OLUŞTURULAN KÜÇÜK
PORTFÖYLERE AİT EKLAN ÇIKTILARI**

($\lambda = 2$ ve $K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1915300E-04
Objective bound: 0.1915300E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 7
Total solver iterations: 1673

Variable	Value	Reduced Cost
THYAO	1.000000	0.000000

($\lambda = 2$ ve $K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3915950E-03
Objective bound: 0.3915950E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 95
Total solver iterations: 9993

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.4046137	0.000000
THYAO	0.5953863	0.000000

($\lambda = 2$ ve $K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5295578E-03
Objective bound: 0.5295578E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 23
Total solver iterations: 3267

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.2866239	0.000000
KOZAA	0.2294614	0.000000
THYAO	0.4839147	0.000000

($\lambda = 2$ ve $K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5195648E-03
Objective bound: 0.5195648E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 69
Total solver iterations: 10049

Variable	Value	Reduced Cost
KOZAA	0.2764928	0.9531285E-08
KRDMD	0.7527163E-02	0.000000
THYAO	0.4127497	0.000000
TUPRS	0.3032303	0.3190431E-08

($\lambda = 2$ ve $K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5839722E-03
Objective bound: 0.5839722E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 2
Total solver iterations: 892

Variable	Value	Reduced Cost
ENKAI	0.1972216	0.1667302E-07
KOZAA	0.1917837	0.5087664E-07
TCELL	0.5660214E-01	0.1771001E-08
THYAO	0.3669368	0.000000
TUPRS	0.1874558	0.000000

($\lambda = 2$ ve $K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6212635E-03
Objective bound: 0.6212635E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 259

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1652803	-0.1743485E-07
ENKAI	0.1643105	-0.5837167E-08
KOZAA	0.1691084	-0.3353584E-07
TCELL	0.1562235E-01	-0.3399242E-07
THYAO	0.3407417	0.000000
TUPRS	0.1449368	-0.9917596E-08

($\lambda = 3$ ve $K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.6947640E-03
Objective bound: -0.6947640E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 7
Total solver iterations: 1431

Variable	Value	Reduced Cost
THYAO	1.000000	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.7835837E-04
Objective bound: -0.7835837E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 143
Total solver iterations: 13856

Variable	Value	Reduced Cost
THYAO	0.5261110	0.000000
TUPRS	0.4738890	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.9799792E-05
Objective bound: 0.9799792E-05
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 13
Total solver iterations: 2894

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.2230109	0.000000
ENKAI	0.3367448	0.000000
THYAO	0.4402443	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1806474E-03
Objective bound: 0.1806474E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 45
Total solver iterations: 4424

Variable	Value	Reduced Cost
ENKAI	0.2348203	0.000000
KOZAA	0.1546523	0.000000
THYAO	0.3606918	0.000000
TUPRS	0.2498355	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1247903E-03
Objective bound: 0.1247903E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 28
Total solver iterations: 4920

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.1164032	0.1502332E-07
ENKAI	0.2607271	0.3205987E-07
EREGL	0.9787671E-01	0.2196855E-07
KOZAA	0.1522580	0.1452718E-07
THYAO	0.3727350	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2109249E-03
Objective bound: 0.2109249E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 121
Total solver iterations: 10875

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.4275341E-01	-0.1054189E-07
ENKAI	0.2024004	0.1774660E-08
KOZAA	0.1313044	0.7127644E-07
TCELL	0.1193130	0.6142906E-08
THYAO	0.3147661	-0.1020486E-07
TUPRS	0.1894628	0.000000

($\lambda = 3$ ve $K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2606843E-03
Objective bound: 0.2606843E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 317

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1584411	-0.3436587E-07
ECILC	0.8972073E-02	-0.5738293E-08
ENKAI	0.1777110	-0.7625309E-08
KOZAA	0.1137673	-0.8845145E-08
TCELL	0.8726540E-01	0.1436108E-07
TEBNK	0.000000	-0.7795798E-03
THYAO	0.2964404	-0.1376153E-07
TUPRS	0.1574026	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1408681E-02
Objective bound: -0.1408681E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 7
Total solver iterations: 1195

Variable	Value	Reduced Cost
THYAO	1.000000	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.5311021E-03
Objective bound: -0.5311021E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 137
Total solver iterations: 7742

Variable	Value	Reduced Cost
THYAO	0.5103148	0.000000
TUPRS	0.4896852	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.2795022E-03
Objective bound: -0.2795022E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 15
Total solver iterations: 2969

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.2797028	0.000000
ENKAI	0.3156212	0.000000
THYAO	0.4046760	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.2999078E-03
Objective bound: -0.2999078E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 29
Total solver iterations: 4950

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.1868331	0.000000
ENKAI	0.2953626	0.000000
KOZAA	0.1382581	0.000000
THYAO	0.3795462	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1480648E-03
Objective bound: -0.1480648E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 123
Total solver iterations: 9358

Variable	Value	Reduced Cost
ENKAI	0.2180352	0.7458996E-07
KOZAA	0.1090239	0.000000
TCELL	0.1643686	-0.4276957E-07
THYAO	0.3015805	-0.2947756E-07
TUPRS	0.2069918	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.2626310E-03
Objective bound: -0.2626310E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 175
Total solver iterations: 9232

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.1346727	-0.4287319E-08
ENKAI	0.2529712	-0.5286968E-08
EREGL	0.9757143E-01	-0.4772134E-08
KCHOL	0.6515967E-01	0.000000
KOZAA	0.1168727	-0.2436690E-08
THYAO	0.3327523	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1367638E-03
Objective bound: -0.1367638E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 2
Total solver iterations: 1370
Model Class: PINLP

Variable	Value	Reduced Cost
ECILC	0.6431810E-01	-0.2983785E-08
ENKAI	0.1989033	0.000000
EREGL	0.3049713E-01	-0.1780441E-07
KOZAA	0.9768607E-01	0.1032410E-08
TCELL	0.1436774	0.000000
THYAO	0.2831537	0.1948369E-07
TUPRS	0.1817643	0.000000

($\lambda = 4$ ve $K = 8$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.7798206E-04
Objective bound: -0.7798206E-04
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 0
Total solver iterations: 287

Variable	Value	Reduced Cost
AKENR	0.1506710	0.2612085E-08
ECILC	0.3694980E-01	-0.3273196E-08
ENKAI	0.1793916	-0.7647901E-08
EREGL	0.5630714E-02	0.5783787E-08
KOZAA	0.8315597E-01	0.2488762E-08
TCELL	0.1178485	0.1706142E-07
THYAO	0.2692486	0.4113740E-08
TUPRS	0.1571039	0.000000

EK 12. $\mu = 0$, $\lambda = 2,3,4$ ve $K = 1,2,\dots,8$ DEĞERLERİ İÇİN ÜST SINIRLARA AİT

EKRAN ÇIKTILARI

$$\max Z_1$$
$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 1)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1349029E-02
Objective bound: 0.1349029E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 435

$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 2)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2529926E-02
Objective bound: 0.2529926E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 3896

$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 3)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3482156E-02
Objective bound: 0.3482156E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 49
Total solver iterations: 5644

$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 4)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4424477E-02
Objective bound: 0.4424477E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 83
Total solver iterations: 5890

$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 5)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5299700E-02
Objective bound: 0.5299700E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 147
Total solver iterations: 7634

$$(\mu = 0, \lambda = 2, K = 6)$$

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6159020E-02
Objective bound: 0.6159502E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 149
Total solver iterations: 11990

max Z_2
($\mu = 0, \lambda = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.5734719E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1
($\mu = 0, \lambda = 3, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1073890E-02
Objective bound: 0.1073890E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 30
Total solver iterations: 6181

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2121742E-02
Objective bound: 0.2121742E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 33
Total solver iterations: 1156

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2908638E-02
Objective bound: 0.2908638E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 40
Total solver iterations: 2753

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3684987E-02
Objective bound: 0.3684987E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 283
Total solver iterations: 12965

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4427169E-02
Objective bound: 0.4427169E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 478
Total solver iterations: 17546

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5166087E-02
Objective bound: 0.5166087E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 611
Total solver iterations: 22953

($\mu = 0, \lambda = 3, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5852630E-02
Objective bound: 0.5852630E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 435
Total solver iterations: 26041

max Z_2

($\mu = 0, \lambda = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.8602079E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.9148070E-03
Objective bound: 0.9148070E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 9
Total solver iterations: 1582

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1734249E-02
Objective bound: 0.1734249E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 45
Total solver iterations: 1073

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2365720E-02
Objective bound: 0.2365720E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 108
Total solver iterations: 5765

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2984236E-02
Objective bound: 0.2984236E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 349
Total solver iterations: 7673

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3593377E-02
Objective bound: 0.3593377E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 623
Total solver iterations: 18857

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4197619E-02
Objective bound: 0.4197619E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1108
Total solver iterations: 32184

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4754034E-02
Objective bound: 0.4754034E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1446
Total solver iterations: 37144

($\mu = 0, \lambda = 4, K = 8$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5229546E-02
Objective bound: 0.5229546E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1958
Total solver iterations: 50744

max Z_2

($\mu = 0, \lambda = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1146944E-02
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

EK 13. $\mu = 0.000005, 0.000015, 0.000025, \lambda = 2, 3, 4$ ve $K = 1, 2, \dots, 8$

İÇİN ÜST SINIRLARA AİT EKРАН ÇIKTILARI

max Z_1

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1344425E-02
Objective bound: 0.1344425E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 435

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2520322E-02
Objective bound: 0.2520322E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 3875

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3467552E-02
Objective bound: 0.3467552E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 77
Total solver iterations: 5967

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4404873E-02
Objective bound: 0.4404873E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 93
Total solver iterations: 5312

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5275096E-02
Objective bound: 0.5275096E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 161
Total solver iterations: 8758

($\mu = 0.000005, \lambda = 2, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6129416E-02
Objective bound: 0.6129416E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 163
Total solver iterations: 10177

max Z_2
($\mu = 0.000005, \lambda = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.5684719E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1
($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1069286E-02
Objective bound: 0.1069286E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 31
Total solver iterations: 6245

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2112138E-02
Objective bound: 0.2112138E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 36
Total solver iterations: 1457

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2894034E-02
Objective bound: 0.2894034E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 37
Total solver iterations: 2145

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3665383E-02
Objective bound: 0.3665383E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 246
Total solver iterations: 12554

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4402565E-02
Objective bound: 0.4402565E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 420
Total solver iterations: 20102

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5136483E-02
Objective bound: 0.5136483E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 492
Total solver iterations: 25375

($\mu = 0.000005, \lambda = 3, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5818026E-02
Objective bound: 0.5818026E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 434
Total solver iterations: 27737

max Z_2

($\mu = 0.000005, \lambda = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.8552079E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.9098070E-03
Objective bound: 0.9098070E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 8
Total solver iterations: 1578

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1725281E-02
Objective bound: 0.1725281E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 23
Total solver iterations: 1265

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2351752E-02
Objective bound: 0.2351752E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 109
Total solver iterations: 5726

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2965268E-02
Objective bound: 0.2965268E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 258
Total solver iterations: 9702

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3569409E-02
Objective bound: 0.3569409E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 605
Total solver iterations: 18140

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4169026E-02
Objective bound: 0.4169026E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1051
Total solver iterations: 34778

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4720441E-02
Objective bound: 0.4720441E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1319
Total solver iterations: 45222

($\mu = 0.000005, \lambda = 4, K = 8$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5191449E-02
Objective bound: 0.5191449E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1744
Total solver iterations: 55654

max Z_2

($\mu = 0.000005, \lambda = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1141944E-02
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1334425E-02
Objective bound: 0.1334425E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 435

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2500322E-02
Objective bound: 0.2500322E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 3886

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3437552E-02
Objective bound: 0.3437598E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 79
Total solver iterations: 5795

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4364873E-02
Objective bound: 0.4364873E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 101
Total solver iterations: 5347

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5225096E-02
Objective bound: 0.5225096E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 126
Total solver iterations: 8874

($\mu = 0.000015, \lambda = 2, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6069416E-02
Objective bound: 0.6069903E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 170
Total solver iterations: 10394

max Z_2

($\mu = 0.000015, \lambda = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.5584719E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1059286E-02
Objective bound: 0.1059286E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 33
Total solver iterations: 6394

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2092138E-02
Objective bound: 0.2092687E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 38
Total solver iterations: 1611

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2864034E-02
Objective bound: 0.2864034E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 44
Total solver iterations: 2047

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3625383E-02
Objective bound: 0.3625383E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 272
Total solver iterations: 12767

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4352565E-02
Objective bound: 0.4352565E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 440
Total solver iterations: 20563

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5076483E-02
Objective bound: 0.5076483E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 526
Total solver iterations: 25013

($\mu = 0.000015, \lambda = 3, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5748026E-02
Objective bound: 0.5748026E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 433
Total solver iterations: 26360

max Z_2

($\mu = 0.000015, \lambda = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.8452079E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.8998070E-03
Objective bound: 0.8998070E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 8
Total solver iterations: 1578

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1706696E-02
Objective bound: 0.1706696E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 33
Total solver iterations: 1406

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2323178E-02
Objective bound: 0.2323178E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 103
Total solver iterations: 5632

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2926694E-02
Objective bound: 0.2926694E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 243
Total solver iterations: 9728

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3520835E-02
Objective bound: 0.3520835E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 617
Total solver iterations: 18356

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4111255E-02
Objective bound: 0.4111255E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1103
Total solver iterations: 34342

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4652670E-02
Objective bound: 0.4652670E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1330
Total solver iterations: 44598

($\mu = 0.000015, \lambda = 4, K = 8$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5114736E-02
Objective bound: 0.5114736E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1593
Total solver iterations: 51599

max Z_2

($\mu = 0.000015, \lambda = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.1131944E-02
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1
($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1324425E-02
Objective bound: 0.1324425E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 435

($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2480322E-02
Objective bound: 0.2480322E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 3892

($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3407552E-02
Objective bound: 0.3407552E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 38
Total solver iterations: 5364

($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4324873E-02
Objective bound: 0.4324873E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 79
Total solver iterations: 4941

($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5175096E-02
Objective bound: 0.5175096E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 167
Total solver iterations: 8980

($\mu = 0.000025, \lambda = 2, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.6009416E-02
Objective bound: 0.6009416E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 181
Total solver iterations: 10321

max Z_2
($\mu = 0.000025, \lambda = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.5484719E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1049286E-02
Objective bound: 0.1049286E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 26
Total solver iterations: 6368

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2072138E-02
Objective bound: 0.2072138E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 45
Total solver iterations: 2116

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2834034E-02
Objective bound: 0.2834034E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 60
Total solver iterations: 2115

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3585383E-02
Objective bound: 0.3585383E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 277
Total solver iterations: 12106

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4302565E-02
Objective bound: 0.4302565E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 461
Total solver iterations: 17996

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5016483E-02
Objective bound: 0.5016483E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 588
Total solver iterations: 22094

($\mu = 0.000025, \lambda = 3, K = 7$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.5678026E-02
Objective bound: 0.5678026E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 567
Total solver iterations: 22038

max Z_2
($\mu = 0.000025, \lambda = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: -0.8352079E-03
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 22

max Z_1
($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 1$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.8898070E-03
Objective bound: 0.8898070E-03
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 8
Total solver iterations: 1578

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 2$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.1688156E-02
Objective bound: 0.1688156E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 46
Total solver iterations: 1456

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 3$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2294720E-02
Objective bound: 0.2294720E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 157
Total solver iterations: 4228

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 4$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.2888236E-02
Objective bound: 0.2888236E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 344
Total solver iterations: 7673

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 5$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.3472377E-02
Objective bound: 0.3472377E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 730
Total solver iterations: 14933

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 6$)

Local optimal solution found.
Objective value: 0.4053673E-02
Objective bound: 0.4053673E-02
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 1087
Total solver iterations: 32052

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 7$)

Local optimal solution found.

Objective value:	0.4585088E-02
Objective bound:	0.4585088E-02
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	1435
Total solver iterations:	37176

($\mu = 0.000025, \lambda = 4, K = 8$)

Local optimal solution found.

Objective value:	0.5038296E-02
Objective bound:	0.5038296E-02
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	1948
Total solver iterations:	50809

max Z_2

($\mu = 0.000025, \lambda = 4$)

Local optimal solution found.

Objective value:	-0.1121944E-02
Infeasibilities:	0.000000
Total solver iterations:	22

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan TURAN, 1975 yılında Erzurum’da doğdu. Karadeniz Teknik Üniversitesi Orman Fakültesi Orman Endüstrisi Mühendisliği Bölümünden 1996 yılında mezun oldu. 1999-2002 yılları arasında İ.Ü. T.B.M.Y.O bünyesinde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 2002 yılında “*İki Amaçlı Portföy Seçimi*” isimli yüksek lisans tezini tamamladı.

2007 yılından bu yana, Tuzla Belediyesi AB ve Dış İlişkiler Biriminde görev yapmaktadır. Buna ilave olarak, Hoca Ahmet Yesevi Üniversitesi TÜRTEP programlarında 2004-2009 yılları arasında, Matematik I, Matematik II ve Kesikli Matematiksel Yapılar derslerini yarı zamanlı Öğretim Görevlisi olarak vermiştir.

Yurt içi ve yurt dışında çeşitli dergi ve konferans bildiri kitaplarında yer alan eserler yayınlamış olan Gökhan TURAN, 2007 yılında Çek Cumhuriyeti Tomas Bata Üniversitesinde ERASMUS öğrencisi olarak bulunmuştur.

2010 yılında ise, Slovakya Cumhuriyeti Ulusal Burs Programından burs kazanarak Bratislava Ekonomi Üniversitesi bünyesinde misafir araştırmacı olarak çalışmıştır.

Gökhan TURAN iyi düzeyde İngilizce, temel düzeyde Çekce bilmektedir.