T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
İktisat Anabilim Dalı
Doktora Tezi

EKSİK PİYASALARDA DENGE VARLIĞINA İDEAL DEĞERLİ KOHOMOLOJİ İNDEKS TEORİSİ TABANLI YAKLAŞIM

Murat Beşer
2502050149

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Seyhun DOĞAN

İstanbul
2014

T.C. İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
1982

D O K T O R A

T E Z O N A Y I

ÖĞRENCİNİN

Adı ve Soyadı **: MURAT BEŞER** Numarası **: 2502050149**

Anabilim/Bilim Dalı **: İKTİSAT** Danışman **: PROF. DR. SEYHUN DOĞAN**

Tez Savunma Tarihi **: 18.04.2014** Tez Savunma Saati **: 15:00**

Tez Başlığı **:"EKSİK PİYASALARDA DENGE VARLIĞINA İDEAL DEĞERLİ KOHOMOLOJİ İNDEKS TEORİSİ TABANLI YAKLAŞIM"**

TEZ SAVUNMA SINAVI, Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin **50. Maddesi** uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **KABULÜ'NE** OYBİRLİĞİ / ~~OYÇOKLUĞU~~YLA karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1-PROF. DR. SEYHUN DOĞAN		KABUL
2-PROF. DR. SAHİR KARAKAYA	Karakaya	kabul
3-DOÇ. DR. MUSTAFA TEKİN		
4-DOÇ. DR. OĞUZHAN ÖZÇELEBİ		Kabul
5-YRD. DOÇ. DR. HAKAN METE TAŞTAN		KABUL

YEDEK JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1-PROF. DR. HÜSEYİN BİLGİN		
2-YRD. DOÇ. DR. OSMAN ZEKİ ÇETİNKAYA		Kabul

ÖZ

Murat BEŞER

Bu çalışma, teorik tabanlı olup, iki dönemli, arbitraj seçeneğinin olmadığı stokastik yapılı eksik piyasalarda denge varlığı sorununa cebirsel topolojinin önemli alt başlıklarından olan karakteristik sınıflar ve genelleştirilmiş Borsuk-Ulam teoremleri yardımı ile yaklaşmış, denge noktalarının meydana getirdiği psödo denge manifoldunun topolojik değişmezi, spektral diziler yardımı ile hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eksik Piyasalar, Stiefel-Whitney Karakteristik Sınıfları, İdeal Değerli Kohomoloji İndeks Teorisi, Psödo Denge Manifoldu

ABSTACT

Murat BEŞER

This work which is theoretically based approaches the problem of existence of equilibrium in incomplete markets with two period, stochastic based and no arbitrage condition through characteristic classes which is an important aspect of algebraic topology and through the generalized Borsuk-Ulam theorem. Topological invariants of pseudo manifold which is generated by equilibrium points is calculated with the help of spectral sequences.

Anahtar Kelimeler: Incomplete markets, Stiefel-Whitney charcteristic classes, Ideal valued cohomology index theory, Pseudo-equilibrium manifold

İÇİNDEKİLER

EKLER

GİRİŞ

İktisatta Genel Denge teorisinin soyut, felsefi bir tartışmadan ilerisine taşınarak bilimsel formasyonda incelenmeye başlanması ile birlikte karşımıza iki önemli tarihi dönem çıkmaktadır. İlk dönem 1871 yılında Javons'un ve 1874 yılında Walras'ın birbirlerinden bağımsız şekilde gerçekleştirdikleri çalışmalarla başladığı kabul edilir. Javons 2 kişi ve 2 mallı bir ekonomide denge fiyat düzeyinin varlığını ispatladığı çalışmasının daha genel şekli Walras tarafından bağımsız olarak genelleştirilmiş, bu sayede bir değiş-tokuş ekonomisinde arz ve talebin eşitliğini sağlayan piyasa fiyat düzeyinin varlığının matematiksel olarak gösterimi yapılmıştır. Her ne kadar günümüzden bakıldığında oldukça basit bir çalışma olarak gözükse de iktisat biliminin 19. yüzyıl fizik bilimine yakınsamasına çalışılması bu sayede bilimsel bir formasyon kazanması açısından oldukça önemli bir adım olmuştur. Edgeworth'un 1881 yılında ki *Mathematical Physics* ve Pareto'nun 1909 yılındaki *Manuel d'Economie Politique* eserleri genel denge çalışmalarında önemli basamakları oluşturmuşlardır. Özellikle Pareto'nun eserinde ortaya koyduğu optimal nokta - refah ekonomisi teorilerinde ve matematiğin diğer bazı alanlarında Pareto optimum noktası olarak adlandırılacaktır – genel denge analizlerinde önemli bir sonuç olarak ortaya çıkmış, nümerik olarak elde edilen denge noktalarının birbirleri ile mukayese edilebilinirliği ve piyasada kaynakların dağılımın etkin şekilde yapılıp yapılmadığının incelenmesi konusunda kriter olmuştur. Bowley'in 1924 yılındaki eseri *The Mathematical Groundwork of Economics*, Hicks'in sırasıyla 1937 yılındaki *Theorie Mathematique de la Valuer en Regime de Libre Concurrence*, 1946 yılındaki *Value and Capital* ve Samuelson'un *Foundations of Economic Analysis* eserleri ile iktisadi genel denge çalışmalarına ait birinci dönemin kapandığı üzerinde anlaşılır. Bu dönemin çalışmalarının temel yapısı, gerçek dünyadan soyut bir iktisadi hayat modelleri üzerinde belirsizlik varsayımlarından bağımsız, dönemin revaçta matematiksel yöntemlerinden kısıt altında optimizasyon ve matris denklem sistemleri çözümü odaklı somut çözümlemeler elde etmek çabası olarak gösterebiliriz. Diğer bir değişle klasik mekanik bakış açısı ile idealize edilmiş bir iktisadi dünya üzerinde tüm analizler gerçekleştirilmekteydi. Bu durum iktisadi genel denge çalışmalarının gerçek dünyaya yakınsamasını engellemekte, elde edilen sonuçlar ile gerçek sonuçlar arasında ciddi sapmaların meydana gelmesine yol açmaktaydı. Bunun dışında genel denge teorisine ait herhangi bir aksiyomatik çalışma yapılmamış olması da bilimsel anlamda önemli eksikliklerden biriydi.

İktisatta Genel Denge teorisinin ikinci aşaması, diğer bir ifade ile modern genel denge teorisi dönemi, dengenin varlık sorunsalını incelemeye başlamış ve varlık için gerekli koşulları ve aksiyomları ortaya koymuştur. 19. yüzyıla ait matematiksel yaklaşımlardan yeni matematiksel yöntemlerinden uygulanmasına geçilmiştir. En dikkat çekici değişim fayda fonksiyonlarının türevlenebime özellikleri zayıflatılması, talep fonksiyonları yerine küme değerli dönüşümlerin analizlerde kullanılmaya başlanılması ve sabit nokta teoremlerinin uygulanması olmuştur. Her ne kadar tarihsel olarak birinci dönem sınırları içinde kalsa da von Neumann'ın 1937 yılındaki *Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* çalışması, Brouwer sabit nokta teoremini kullanarak denge varlığı analizi yapılmış olmasıdır ki modern genel denge analizi çalışmalarının önemli başlangıç noktasından biri sayılmaktadır. 1954 yılında sırası ile McKenzie 'nin *On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems*, Arrow ve Debreu'nun *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy* çalışmaları hem genel denge çalışmalarının aksiyomlarının ortaya konması aynı zamanda analiz konularından bağımsız olarak sabit nokta teoremleri yardımı dengenin varlığının ispatı açısından büyük öneme sahiptir. Debreu'nun 1959 yılında yayınlanan *Theory of Value* kitabı modern genel denge teorisine ait sonuçların toplandığı temel referans eser olarak ortaya çıkmıştır. 1950 ve 1960'lar da genel denge analizi çalışma ağırlığını dengenin tekilliğinin çıkarsaması üzerine kurmuştur. Ancak bu sonuç modellerde ki varsayımlar üzerinde aşırı kısıtlama yapılması sayesinde elde edilmesi, gerçek dünyadan kopma tehlikesini ortaya çıkarmıştır. Debreu'nun 1970 yılındaki *Economies with Finite Set of Equilibria* çalışması bu sorunu en azından lokal olarak ortadan kalkmasına sebep verecek gelişmelere yol açmış ve matematiksel bir özelliği içeren regüler ekonomiler kavramını ortaya koymuştur. Özellikle diferansiyel geometri ve diferansiyel topoloji konularının genel denge teorisinde uygulanmaya başlanması genel denge çalışmalarına yeni yaklaşımları da ortaya çıkarmıştır. G. Debreu, E. Dierker, S. Schecter, Y. Balasko'nun 1970'li yıllarda ki makaleleri konunun öncülerinden sayılabilmektedir. 1985 yılında Duffie ve Shafer'in Journal of Mathematical Economics dergisinde yayınlanan *Equilibrium in Incomplete Markets* makalesi, iki dönemli finansal piyasalardaki denge manifoldu yapısının tanımını yapması ve diferansiyel topolojik metotları eksik finansal piyasalar çalışmasına adapte etmesi açısından oldukça önemli bir yerde durmaktadır. Eksik piyasalara cebirsel topolojik metotlar ile yaklaşım ilk defa S.Y. Husseini, J. Lasry, M.J.P. Magill'in *Existence of Equilibrium with Incomplete Markets* makalesinde rastlanmaktadır. 1996 yılında G. Chichilnisky ve G. Heal, *On the Existence and the Structure of the Pseudo-Equilibrium Manifold* makalesinde diferensiyel ve cebirsel topolojik metotlardan yararlanarak psödo denge manifoldlarının fiber demetleri üzerinde çalışmışlardır., 1997 yılında Y. Zhou *The Structure of the Pseudo-equilibrium Manifold in Economies with Incomplete Markets* çalışmasında psödo-denge manifoldlarının yapısını, P. Bich 2005 yılında ki *On the Orientability of The Asset Equilibrium Manifold* makalesinde denge manifoldlarının belli şartlar altında yönlendirilebildiğini göstermiştir.

Yukarıda ifade edilen tarihsel açıdan bakıldığında tam ve eksik piyasalar üzerinde denge analizi çalışmaları teorik matematiğin gelişmesi ile birlikte varlık, teklik, denge noktalarının geometrisi gibi konularda önemli ilerleme kaydetmiş, Walras'ın basit matris çözümlemeye dayalı yaklaşımından günümüz cebirsel-differansiyel topolojik metotlara evrilmiştir. Her ne kadar genel denge analizlerinin topolojik temelleri ile ilgili çalışmalar ilk göze çarpan yaklaşımlar olsada optimal kontrol teorisi, oyun teorik (özellikle işbirliğine dayalı ve Bayesyen yapılı olanlar) yaklaşımlar ve ağ analizleri de yaygın olarak kullanılan yaklaşımlar olmuştur

Bu çalışma yapılmasındaki temel amaç, yukarıda belirtilen tarihsel perspektif göz önüne alındığında yeni matematiksel metodların denge analizinde kullanılıp kullanılamayacağını test etmek olarak da ifade edilebilir. Diferansiyel topoloji son 30 yıldır denge analizlerinde yaygın olarak kullanılan matematiksel araçlardan biri olmasına rağmen cebirsel topolojik yaklaşımların genel denge analizleri yanı sıra teorik iktisadi çalışmalarda da oldukça kısıtlı olarak kullanıldığı görülmektedir. Bunun en önemli sebeplerinden biri bu disiplinin yapısı gereği oldukça soyut ve oldukça derin olması yüzünden iktisatçılar tarafından pek rağbet görmemiş olmasıdır (literatürde C. Chichilnisky, G. Heal'in *"Necessary and Sufficient Conditions for a Resolution of the Social Choice Paradox"*, S.Y. Husseini, J. Lasry, M.J.P. Magill'in *"Existence of Equilibrium with Incomplete Markets"*, S. Weinberger'in *"On the Topological Social Choice Model"*çalışmaları cebirsel topolojik metotlar kullanılarak yazılmış teorik çalışmalar örnekleri olarak verilebilir). Bu çalışmada cebirsel topolojinin önemli alt başlıkları olan karakteristik sınıflar (Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları), kohomoloji teorileri, ideal değerli kohomoloji indeks teorisi, genelleştirilmiş Borsuk-Ulam teorisi, ek bölümünde regüler ekonomilerin oluşturduğu geometrik yapının topolojik değişmezleri için homoloji ve homotopi teorisi kullanılmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde ilk olarak eksik piyasalar kavramı genel denge bakış açısı tabanlı tanımlanmış daha sonra çalışmanın ikinci bölümünde başvurulacak olan vektör demetleri ve Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarına ait tanımlar ve çeşitli teoremler verilmiştir. İkinci bölümde eksik piyasalarda denge varlığına yeni bir yaklaşım olan ideal değerli kohomoloji indeks teorisine ait tanımlar birinci bölümde elde edilen bilgiler yardımı ile tanımlanmış ve eksik piyasalarda denge varlığını elde etmek için ne şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir. Üçüncü bölümde ise Leray-Serre spektral diziler yardımı ile ikinci bölümde elde edilen psödo denge manifoldu üzerinde kurulan denge denklik sınıfının topolojik değişmezleri incelenmektedir.

BİRİNCİ BÖLÜM
EKSİK PİYASALAR VE VE VEKTÖR DEMETLERİNİN TOPOLOJİSİ

Bu bölümde genelleştirilmiş Borsuk-Ulam Teoreminin tam olmayan finansal piyasalarda denge analizi için kullanılırken gerekli olacak önemli teoremler ve tanımlar verilecektir. İlk olarak (her ne kadar ikinci bölümde Alexander-Spanier kohomolojisi ile çalışılacak olsa da) genel kohomoloji teorileri ve özellikleri gösterilecek, daha sonra vektör demetleri ve Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarının tanımları yapılacaktır. Somut yapılar üzerinden çalışıldığından topolojik grup G tanımı ve bunun total uzaydaki hareketi, başka bir tabirle genelleştirilmiş demetler teorilerine değinilmemiştir.

Sonuç 1.1'de verilecek olan "$\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demeti B bağlantılı bir uzayı üzerinde tanımlansın. Keyfi X topolojik uzayı için geri çekme sayesinde $[X, B]$ homotopi sınıfları kümesinden $\mathrm{Vect}_n(X)$ izomorfizma sınıfları kümesine giden fonksiyon tanımlayabilir ve bu fonksiyon $\rho_E : [X, B] \to \mathrm{Vect}_n(X)$ şeklinde gösterilir" ifadesi ve bu özelliği sağlayacak Milnor metodu ile kurulan $\omega_G = (EG, \pi, BG)$ evrensel demet yapısı bu bölümün önemli sonuçlarından birini oluşturmaktadır. Bu yapı yardımı ile vektör demetleri kategorisi sınıflandırılabilmektedir.

$\mathrm{Vect}_n(X)$ notasyonu ile gösterilen izomorfizma sınıflarının Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları olarak adlandırılan kohomoloji sınıfları ile ifade edilmesi bu bölümün önemli sonuçlarından birini oluşturmaktadır. Bu sonuca ulaşılmak için $\mathbb{Z}_2$ katsayı cismi üzerinde tanımlı Thom izomorfizma teoremi ve vektör demetlerine ait Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarının elde edilmesinde oldukça kullanışlı olan Gysin dizisi tanıtılacak, bunlar yardımı ile her izomorfizma sınıfını ifade edecek kohomoloji halkasının oluşturulması ile ilgili sonuçlar verilecektir.

1.1 Eksik Piyasalar

Klasik iktisat teorisinin Adam Smith'den itibaren gelişme süreci incelendiğinde piyasa sisteminin, kendi menfaatlerini maksimize etme çabasında olan ve gerek fiyatlar gerek mallar hakkında tam bilgiye sahip olan rasyonel bireylerin bir araya geldiği mekanizma olarak tanımlandığı görülmektedir. Bu felsefi temelli tasarımın aksiyomatik ifadesi Arrow-Debreu-Mc Kenzie'nin 1950'lerde yapmış olduğu genel denge çalışmaları ile ortaya konulmuştur. Ancak bu çalışmalar başlangıç itibari ile statik ve bireylerin piyasa fiyatları üzerinde tam bilgiye sahip olduğu güçlü varsayımlar üzerine kurulduğundan dolayı modern iktisadi ilişkileri kavrama yeteneği oldukça eksik kalmıştır. Debreu, *Theory of Value* kitabının son bölümünde genel denge analizine zaman ve belirsizlik özelliklerini katarak genel denge analizini bir basamak daha genişletmiş oldu. Arrow tipi menkul kıymet analizi, Arrow-Debreu modelinde, tek dönem bütçe kısıtının olduğu ve sadece dönem başı ticaretin yapıldığı yapıyı her dönem ticaretin yapıldığı ve geleceğe dair beklentinin oluşması halinde birim gelir elde edilen nominal menkul kıymet piyasası şeklinde incelemekteydi. Ancak bu analiz de bireylerin rasyonelliği ve piyasada bilgi akışının tam olduğu varsayımlarından dolayı reel ve nominal finansal varlıklar ayrım yapamamaktaydı. Bunun en önemli sebeplerinden biri, bireyin gelir yanılgısına düşmeyip her durumda reel kazancının ne olduğunun farkında olan yapıda olmasıydı. Böylelikle iki tip finansal varlık Arrow-Debreu modellerinde ayrım içermemekteydi. Finansal piyasalar üzerinde yeni kısıtların eklenmesi modellerin gerçekliğe biraz daha yaklaşmasını sağlarken, denge varlık problemlerinin Brouwer veya Kakutani tipi sabit nokta teoremleri yardımı ile çözümlerinin elde edilmesinden de uzaklaşılmaktaydı. Bu noktada diferansiyel topolojik metotlar giderek kullanım yoğunluğu olarak artmaya başlamıştır.

Radner, "*Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets*" çalışmasında açıktan satış kısıtı altında bireylerin her dönem piyasalarda ticaret yapabileceğini ancak geleceğin belirsizliği karşısında riski dağıtacak şekilde işlem yapması önünde sınırların olduğunu ortaya koyarak dönemsel arası işlemlerde zaman ve belirsizlik kavramını daha da detaylandırmıştır. O. Hart, "*On the Optimality of Equilibrium When The Market Structure is Incomplete*" çalışmasında eksik piyasa yapısının her zaman dengede olamayacağını göstermiştir. Hart noktaları olarak tanımlanan bu dengesizlik noktaları matematiksel olarak menkul kıymet getiri matrisinin rankının fiyat vektöründeki değişime göre derecesinin finansal varlık sayısından düşük olduğu noktaları tanımlamak için kullanılmıştır. Bu noktalarda bütçe kümesinin üst yarı-süreklilik özelliğini kaybetmesi de ortaya çıkan diğer önemli sorun olmuştur. 80'ler ile birlikte eksik piyasa yapılarında denge arayışları nominal ve reel finansal varlık yapıları üzerinden yoğun şekilde incelenmiştir. Y. Balasko, D. Cass, "*The Structure of Financial Equilibrium with Exogenous Yields: The Case of Incomplete Markets*" ve J. Werner'in, "*Equilibrium in Econmies with Incomplete Financial Markets*" nominal finansal varlık yapılı eksik finans yapılarında denge varlığını ispatlarken, D. Duffie and W. Shafer, "*Equilibrium in Incomplete Markets: A Basic Model of Generic Existence*" çalışmasında reel finansal varlık yapılı eksik finans yapılarında Grassmann manifoldlarını yardımı ile psödo-denge noktalarının Hart noktaları olmadığını ispat ederek piyasa denge varlığını göstermişlerdir. Reel finansal varlık piyasalarında denge analizi ile ilgili diğer önemli çalışmalar, S.Y. Husseini, J.M. Lasry, M. Magill'in "*Existence of Equilibrium with Incomplete Markets*", B. Cornet, P. Bich'in "*Existence of Pseudo-Equilibria in Financial Economy*" olarak gösterilebilir. Reel finansal varlık piyasa analizlerinde karşılaşılan en önemli zorluklardan biri tüketici talep fonksiyonunun üst yarı-sürekli olma özelliğini yitirmesidir. Bu problemden kurtulmak için piyasada arbitraj seçeneğinin olmadığı varsayımı yapılmıştır.

Eksik piyasa tabanlı genel denge analizi her ne kadar Arrow-Debreu modelinin daha gelişmiş bir yapısını oluşturmuş olsa da, yöntem olarak aynı varsayımları sürdürmektedir. Bunları sıralamak gerekirse:

1. Bireylerin fayda maksimizasyonu çabası
2. Bireylerin beklentilerinin rasyonel yapısı
3. Piyasa dengesi

şeklinde gösterilebilir. Buna karşılık Arrow-Debreu modelinde tüm bireylerin ticarete katılma durumu gerçeklikle bağdaşmadığından dolayı gevşetilmiştir. Bunun dışında finans piyasasında tüm finansal varlıkların ticaretinin aynı anda yapılamama sorunu da modelde yer bulmuştur. Bu sorunu yaratan sebepler aşağıdaki şekilde gösterilir.

1. Asimetrik bilgi akışı
2. Piyasalara katılımcıların girişindeki sorunlar (finansal kısıt, ticaret yapma becerisine sahip olamama (ilgili dönem içinde daha doğmamış birey sorunu)
3. İşlem maliyetinin elde edilecek reel getiriyi karşılayamaması
4. Sınırlı rasyonellik

Matematiksel bir yaklaşım ile bakıldığında eksik piyasalarda finansal varlık sayısının, geleceğe dair gerçekleşebilecek senaryolar sayısından küçük olması risk faktörünün veri finansal varlıkların germiş olduğu vektör uzayında her zaman ifade edilemeyeceği sorununu ortaya çıkarmaktadır. Bu durum bireylerin zaman içinde tam risk transferi yapmasını engellemektedir. Her ne kadar gelişmiş piyasalarda yeni finansal varlıkların sayısı günden güne artsa da bu durum yukarıda belirtildiği şekli ile risk faktörünü tam kapsayıcı yapı oluşturamamakta sadece portföy riskinin gerçekleşme oranını düşürmektedir. Bireylerin ellerinde ki portföylerin risk içerdiği bilgisi ve finansal varlıklar hakkında eksik bilgi sorunu, bu riski dağıtmak için zaman içinde yapılan alım-satımlar piyasa içinde ki fiyat dalgalanmalarının da ana sebebi olmaktadır. L. Calvet, "*Incomplete Markets and Volatility*" çalışması bireylerin eksik piyasalarda kendi yatırımlarını korumak ve riski dağıtmak için dönemler arası yapmış olduğu işlemlerin piyasada yaratmış olduğu fiyat dalgalanmalarını göstermesi açısından oldukça dikkat çekicidir.

Eksik piyasaların diğer bir özelliği, denge noktasının Pareto etkin seviyesinde gerçekleştiği tam piyasaların aksine, denge noktasının Pareto etkin olma zorunluluğu olmamasıdır ki diğer bir ifade ile 1. ve 2. refah teorileri gerçekleşememektedir. Bu durum piyasa içinde ki fayda dağılımının tüm bireyler için refah arttırıcı seviyede gerçekleşmeyeceğini göstermekte, geleceğe dair belirsizlik ve fiyat dalgalanmaları faktörlerinin negatif faydaya sebep olabileceğini ifade etmektedir.

Eksik piyasa yapıları iktisat literatüründe birbirini tamamlayıcı 3 temel başlık altında incelenmektedir.

1. Finans Piyasalarında Denge Varlığı
2. Portföy Optimizasyon Modelleri
3. Türev Piyasaları

Birinci başlık eksik piyasaları teorik tabanlı incelemekte ve temel sorun olan piyasa da hangi koşullar altında denge varlığının gerçekleşeceği ve dengenin kardinalitesi üzerine yoğunlaşmaktadır. Diğer iki çalışma alanı literatürde daha çok uygulamalı kısmı oluşturmaktadır.

1.2 Genelleştirilmiş Kohomoloji Teorileri

Tanım 1.2.1: Top_2, $A \subset X$ özelliğine sahip topolojik uzay çiftlerini (X, A), Grup_A ise Abel gruplarının kategorisini tanımlasın. Top_2 üzerinde tanımlı (h^*, δ) kohomoloji teorisi Top_2'den Grup_A'ya giden kontravariant funktorlar kümesidir.

- $h^* : \mathrm{Top}_2 \to \mathrm{Grup}_A$
- $R : \mathrm{Top}_2 \xrightarrow{(X,A) \mapsto (A,\varnothing)} \mathrm{Top}_2$ için $\delta^q : h^q \circ R \to h^{q+1}$

Top_2 üzerinde tanımlı (h^*, δ) kohomoloji teorisi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Homotopi: $q \in \mathbb{Z}$ ve $f_0, f_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Top}_2}\left((X,A),(Y,B)\right)$ için iki morfizma homotopik ise $f_0^* = f_1^* : h^q(Y,B) \to h^q(X,A)$ eşitliği geçerlidir.

Kesinlik: Her $(X,A) \in \mathrm{Top}_2$ için $i:(X,\varnothing) \to (X,A)$ ve $j:(A,\varnothing) \to (X,\varnothing)$ içerme dönüşümleri için $\cdots \xrightarrow{\delta^{q-1}} h^q(X,A) \xrightarrow{i^*} h^q(X,\varnothing) \xrightarrow{i^*} h^q(A,\varnothing) \xrightarrow{\delta^q} h^{q+1}(X,A) \to \cdots$ uzun tam dizisi elde edilir.

Kesim: $(X,A) \in \mathrm{Top}_2$ ve $U \subset A$ alt topolojik uzayı $\bar{U} \subset \text{iç}(A)$ özelliğine sahip olsun. $j:(X-U, A-U) \to (X,A)$ içerme dönüşümü h^* kontravariant funktoru altında $h^q(X,A) \cong h^q(X-U, A-U)$ izomorfizması geçerlidir.

Tanım 1.2.2: Top_*, $x_0 \in X$ özelliğine sahip topolojik uzay çiftlerini (X, x_0), Grup_A ise Abel gruplarının kategorisini tanımlasın. Top_* üzerinde tanımlı (k^*, δ) kohomoloji teorisi Top_*'den Grup_A'ya giden kontravariant funktorlar kümesidir ve indirgenmiş kohomoloji teorisi olarak tanımlanır.

- $k^* : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Grup}_A$
- $S : \mathrm{Top}_* \xrightarrow{(X,x_0) \mapsto \left((X \times I / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I), *\right)} \mathrm{Top}_*$ için $s^q : k^q \circ S \to k^{q+1}$

İndirgenmiş kohomoloji teorisi de yukarıda belirtilen homotopi, kesinlik ve excision özelliklerine sahiptir.

Yukarıda tanımlanan aksiyomlardan hareketle kohomoloji teorilerine ait diğer özellikler elde edilebilir.

Öneri 1.2.1: h kohomoloji teori ve $i : A \to X$ homotopi denklik dönüşümü olsun. $h^*(i) \in \mathrm{Isom}\left(h^*(X), h^*(A)\right)$ izomorfizmdir ve $h^q(X,A) = 0$'dır.

Öneri 1.2.2: h kohomoloji teori ve X topolojik uzayı $x_0 \in X$ noktasına büzülebiliyorsa her $q \in \mathbb{Z}$ için $h^q(X, x_0) = 0$ 'dır.

Tanım 1.2.2: Top_2 , $A \subset X$ ve $B \subset Y$ özelliğine sahip topolojik uzay çiftlerini (X, A) ve (Y, B), Halka ise komutatif halka kategorisini tanımlasın. Top_2 üzerinde tanımlı (h^*, δ) kohomoloji teorisi Top_2 'den Halka 'ya giden kontravariant funktorlar kümesidir.

$\Delta : (X, A) \to (X \times X, A \times A) \subset (X \times X, X \times A \bigcup A \times X)$ diagonal dönüşümü ve $h^q(X, A) \oplus h^p(Y, B) \to h^{p+q}(X \times Y, X \times B \bigcup A \times Y)$ morfizması için

$$h^q(X, A) \oplus h^p(X, A) \to h^{p+q}(X \times X, X \times A \bigcup A \times X) \xrightarrow{\Delta^*} h^{p+q}(X, A)$$ [1]

şeklinde tanımlanır.

1.3 Vektör Demetleri ve Stiefel-Whitney Karakteristik Sınıfları

Tanım 1.3.1: B bağlantılı bir uzay, $\tilde{b} \in B$ ilgili uzayın baz noktası ve $\pi : E \to B$ dönüşümü sürekli için aşağıda verilen şartlar F lifine sahip yerel trivial lif demeti için gerekli özellikleri göstermektedir.[2]

a) $\pi^{-1}(\tilde{b}) = F$

b) $\pi : E \to B$ üzerine fonksiyondur

[1] Edgar H. Brown, Jr., Cohomology Theories**, The Annals of Mathematics**, Cilt. 75, No. 3. 1962, s. 467-484.

[2] Örnek olarak, $\mathbb{S}^n$ üzerinde $\mathbb{Z}_2$ hareketini $x \mapsto (-x)$ şeklinde tanımlayalım. $\mathbb{S}^n$ 'in orbit uzayı $\mathbb{R}P^n$ reel projektif uzay olacağı bilinmektedir. Böylece $(\mathbb{S}^n, \pi, \mathbb{R}P^n)$ ayrık lif demeti yapısına sahip olur.

c) Her $x \in B$ elemanı için öyle bir $U_x \subset B$ açık komşuluğu vardır ki $\text{Homeo}\left(\pi^{-1}(U_x), U_x \times F\right)$ kümesi boş değildir.

Yukarıda tanımlanan özelliklerden “c” maddesini aşağıdaki kommutatif diagram yardımı ile ifade edebiliriz. Burada $\psi_{U_x} \in \text{Homeo}\left(\pi^{-1}(U_x), U_x \times F\right)$

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_x) \arrow[rr, "\psi_{U_x}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_x \times F \arrow[dl, "\text{izdüşüm}"] \\
& U_x &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1

F lifine sahip $\pi : E \to B$ lif demeti için E bütün uzay, B taban uzayı olarak adlandırılır ve kısaca $\xi_F = (E, \pi, B)_F$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.2: $\xi^1_{F_1} = (E_1, \pi_1, B_1)_{F_1}$ ve $\xi^2_{F_2} = (E_2, \pi_2, B_2)_{F_2}$ lif demetleri verilsin. Bu demetler arasında $\Phi \in \text{Mor}\left(\xi^1_{F_1} = (E_1, \pi_1, B_1)_{F_1}, \xi^2_{F_2} = (E_2, \pi_2, B_2)_{F_2}\right)$ morfizmasının tanımlanması için, taban noktasını koruyan $\overline{\varphi} : E_1 \to E_2$ ve $\varphi : B_1 \to B_2$ sürekli dönüşümlerinin $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \overline{\varphi}$ eşitliğini sağlaması gerekmektedir. Özel olarak yukarıda verilen Φ morfizması $\Phi \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Phi = 1_{\xi^1_{F_1} = (E_1, \pi_1, B_1)_{F_1}}$ eşitliğini sağlıyorsa izomorfizmadır.

Yukarıdaki sonuçlardan tüm lif demetleri kümesinden kategori yapısı meydana getirebiliriz. BUN[3] ile ifade edilecek olan ilgili kategoride özel olarak BUN_B alt kategorisini, taban uzayı aynı olan tüm lif demetleri kümesi olarak tanımlayabiliriz.[4]

Tanım 1.3.3: $\xi_F = (E,\pi,B)_F$ lif demeti ve $A \subset B$ alt uzayı verilsin. E total uzayının A alt uzayına kısıtlanmasını $E\big|_A = \pi^{-1}(A)$ şeklinde gösteririz.

Yukarıda ki tanım alt topolojik uzay üzerinde lif demet yapısının tanımlanması göstermektedir. $A \xrightarrow{i} B$ içerme fonksiyonunu $X \xrightarrow{f} B$ fonksiyonuna genelleştirerek, X topolojik uzayı üzerinde tanımlı lif demeti yapısını $\xi_F = (E,\pi,B)_F$ lif demeti yardımı ile elde etmiş oluruz. “Geri çekme” olarak adlandırılan bu yönteme göre X uzayının f fonksiyonuna göre total uzayı $f^*(E) = \{(x,v) \in X \times E : f(x) = \pi(v)\}$ şeklinde yazılır.

Lif demetleri üzerinde Kartezyen çarpım tanımlayabiliriz. $\xi^1_{F_1} = (E_1,\pi_1,B_1)_{F_1}$ ve $\xi^2_{F_2} = (E_2,\pi_2,B_2)_{F_2}$ lif demetleri için $\xi^1_{F_1} \times \xi^2_{F_2} = (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, B_1 \times B_2)_{F_1 \times F_2}$ ifadesi ilgili Kartezyen çarpımı gösterir. Özel olarak $B = B_1 = B_2$ alalım. $\Delta : B \xrightarrow{x \mapsto (x,x)} B \times B$ diagonal dönüşümü taban uzayları arasında bir morfizma ve $\xi^1_{F_1} \times \xi^2_{F_2} = (E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, B \times B)_{F_1 \times F_2}$, $B \times B$ taban uzayının lif demeti olsun. “Geri çekme” yardımı ile B üzerinde oluşturulan total uzay $\Delta^*(E_1 \times E_2) = E_1 \oplus E_2$ şeklinde gösterilir ve Whitney toplamı olarak adlandırılır.

---

[3] BUN kategorisi, Abel kategorisi özelliğine sahip değildir. $\varphi : \xi^1_{F_1} = (E_1,\pi_1,B)_{F_1} \to \xi^2_{F_2} = (E_2,\pi_2,B)_{F_2}$ aynı taban uzayı üzerinde lif demetleri arasında tanımlanmış morfizma için, $\ker\varphi$ ve $\operatorname{coker}\varphi$ yapıları yerel trivial özelliğini genelde sağlamazlar.

[4] Dale Husemoller, **Fibre Bundles**, New York, Springer Verlag, 1994, s. 15, kategori teorisi için Masaki Kashiwara, Pierre Schappira, **Categories and Sheaves**, New York, Springer Verlag, 2010, s. 1-40.

Tanım 1.3.4: $\xi_F = (E,\pi,B)_F$ lif demetinde $F = \mathbb{R}^n$ alırsak, reel sayılar cismi üzerinde n boyutlu yerel trivial vektör demetini tanımlamış oluruz.

Teorem 1.3.1: $\xi_F = (E,\pi,B)_F$ lif demeti ve $f_0, f_1 \in \mathrm{Map}(X,B)$ sürekli fonksiyonları verilsin. f_0 ve f_1 fonksiyonları homotopik[5] $(f_0 \simeq f_1)$ ise bu fonksiyonlara ait geri çekmeler izomorftur $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$.

İspat: Vektör demetlerinin homotopi özellikleri ile olan teoremin ispatında kullanılan önemli yardımcı teoremler için bkz. Husemoller (31) s. 28–30.

Sonuç 1.3.1: $\xi_n = (E,\pi,B)_n$ vektör demeti B bağlantılı bir uzayı üzerinde tanımlansın. Keyfi X topolojik uzayı için geri çekme sayesinde $[X,B]$ homotopi sınıfları kümesinden $\mathrm{Vect}_n(X)$ izomorfizma sınıfları kümesine giden fonksiyon tanımlayabiliriz ve bu fonksiyonu $\rho_E : [X,B] \to \mathrm{Vect}_n(X)$ şeklinde gösteririz.

Sonuç 1'de tanımlanan ρ_E fonksiyonu $\rho_E \in \mathrm{Map}([X,B],\mathrm{Vect}_n(X))$ bire-bir ve örten şartını sağlarsa X topolojik uzayı üzerinde tanımlı tüm n vektör demetlerinin izomorfizma sınıfını, X'den B'ye giden sürekli dönüşümlerin homotopi denklik sınıfları aracılığı ile tanımlamış oluruz. Burada en önemli nokta veri X topolojik uzayı için elimizde öyle bir vektör demeti olmalıdır ki geri çekme işlemi ile ρ_E fonksiyonu bire-bir ve örten şartını sağlasın. Milnor yapısı[6] olarak adlandırılan ve lif demetinin üzerinde tanımlandığı topolojik grubun sonsuz

[5] $f, g \in C^0(X,Y)$ topolojik uzayları arasında tanımlı iki sürekli fonksiyon için $H : X \times [0,1] \to Y$ sürekli dönüşümü $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ şartını sağlıyorsa bu iki fonksiyona homotopik denir. Diğer bir değişle $t \in [0,1]$ zaman parametresi için ilk fonksiyonun patikasının ikinci fonksiyonun patikasına sürekli şekilde dönüştürülmesi olarak ifade edilebilir.

[6] John W. Milnor, "Construction of Universal Bundles II", **Annals of Mathematics**, C.63, No:3, 1956, s. 430-436.

birleştirme metodu[7] ile elde edilen *evrensel demet* yapısı $\omega_G = (EG, \pi, BG)$ olarak gösterilir. Burada EG evrensel demet, $EG/G = BG$ orbit uzayı ise sınıflama uzayı olarak adlandırılır.

EG ve BG alt uzay filtrelemesine sahiptir. $\cdots \subset EG(n) \subset EG(n+1) \subset \cdots$ ve $\cdots \subset BG(n) \subset BG(n+1) \subset \cdots$ filtrelemelerinin limit değerleri sırasıyla $\lim_{\rightarrow} EG(n) = EG$ evrensel demete ve $\lim_{\rightarrow} BG(n) = BG$ sınıflama uzayına yakınsar[8].

Tanım 1.3.5: X topolojik uzayının k. homotopi grubunu[9] π_k ile gösterelim. Buna göre X topolojik uzayının $K(G,n)$ sınıfı Eilenberg–MacLane uzayı olması için $\pi_k(X) = \begin{cases} G : k = n \\ 0 \ : k \neq n \end{cases}$ şartını sağlaması gerekmektedir.

G topolojik grubu ayrık ise BG sınıflama uzayı $K(G,1)$ tipi Eilenberg-Maclane uzayıdır. Bu özelliği $\mathbb{R}P^\infty = BO(1) = B\mathbb{Z}_2$'ye uygularsak $\mathbb{R}P^\infty = K(\mathbb{Z}_2, 1)$ elde ederiz.

Teorem 1.3.2: G Abelyen topolojik grup için $\operatorname{Isom}\left(H^n\left(K(G,n);G\right), Hom(G,G)\right)$ kümesi boş değildir.

İspat: $H^n\left(K(G,n);G\right)$ ve $Hom(G,G) = End(G)$ yapılarının halka özelliği taşıdığı ve aralarında en az bir halka izomorfizması tanımlandığı ifade edilmektedir, Bkz. Cohen (15) s.57.

---

7 John W. Milnor, James D. Stacheff, **Characteristic Classes**, New Jersey, Princeton University Press, 1974, s. 60-65; Husemoller, **Fibre Bundles**, s. 54-56.

8 Örnek olarak $G = O(1) = \mathbb{Z}_2$ alırsak n. basamak için $EO(1)(n) = \mathbb{S}^n$ ve $BO(1)(n) = \mathbb{R}P^n$ uzaylarını elde ederiz. Limit değerleri olarak $\mathbb{S}^\infty$ ve $\mathbb{R}P^\infty$ uzaylarıdır.

9 Taban noktalı topolojik uzaylar kategorisi için $C^0\left(S^n, x; X, y\right)/H$ homotopi denklik sınıfları kümesi $\pi_n(X)$ homotopi grubunu meydana getirir.

$\phi : H^n\left(K(G,n);G\right) \xrightarrow{\cong} Hom(G,G)$ izomorfizma fonksiyonu ve $1_G \in Hom(G,G)$ özdeşlik fonksiyonu için $\phi^{-1}(1_G) = \tau \in H^n\left(K(G,n);G\right)$ kohomoloji sınıfı "temel sınıf" olarak adlandırılır. $f : X \to K(G,n)$ dönüşümü üzerinde tanımlanan kontravaryant kohomoloji funktoru $H^*(-,G)$, ilgili dönüşümü dualine dönüştürmektedir. Böylece ilgili dönüşüm $H^*(f,G) = f^* : H^*\left(K(G,n),G\right) \to H^*(X,G)$ şeklinde yazılacaktır.

X topolojik uzayı CW-kompleks[10] kategorisindeki bir objeye homotopik ise, yukarıda tanımlanan notasyonlar aracılığı ile $f \mapsto f^*(\tau)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $\left[X, K(G,n)\right]$ ve $H^n(X;G)$ kümeleri arasında bire-bir ve örtenlik sağlamaktadır.

Tanım 1.3.6: $\mathbb{R}^n$'de tanımlı ve $(v_1,\cdots,v_k) \in \left(\mathbb{S}^{n-1}\right)^k$ için $\left\langle v_j, v_l \right\rangle = \delta_{ij}$ şartını sağlayan ortonormal vektörlerin oluşturduğu küme Stiefel manifoldu olarak adlandırılır ve $V_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ şeklinde gösterilir. $A, B \in V_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ için $A = B \cdot C$ şartını sağlayan $C \in GL(k;\mathbb{R})$ elemanı varsa $A \sim B$ şeklinde gösteririz ve bu iki eleman aynı denklik sınıfında olur. $V_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ Stiefel manifoldunun ilgili denklik sınıfı altındaki orbit uzayı $V_k\left(\mathbb{R}^n\right)/GL(k;\mathbb{R})$ Grassmann manifoldu olarak adlandırılır ve $G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ şeklinde gösterilir.

$\mathrm{Vect}_k(X)$, X bağlantılı - CW-kompleks kategorisindeki bir objeye homotopik - uzay üzerinde tanımlı k boyutlu vektör demetlerinin izomorfizma sınıfını göstersin. $GL(k;\mathbb{R})$ topolojik grubuna ait evrensel demetin sınıflama uzayı

---

[10] CW kompleks yapısı ile ilgili olarak bkz. Rudolf Fritsch, Renzo A. Piccinini, **Cellular Structures in Topology**, New York, Cambridge University Press, 1990; Ross Geoghegan, **Topological Methods in Group Theory**, New York, Springer Verlag, 2007.

$BGL(k;\mathbb{R}) = BO(k) = G_k(\mathbb{R}^\infty)$'dır. $\mathrm{Vect}_k(X) \cong [X, BGL(k;\mathbb{R})] \cong [X, G_k(\mathbb{R}^\infty)]$ izomorfizması verilen eşitlikten elde edilir.

Tanım 1.3.7: $\mathrm{Vect}_k : \mathrm{TOP}_{\simeq CW} \xrightarrow{[-,G_k(\mathbb{R}^\infty)]} \mathrm{SET}$ dönüşümü CW-kompleks kategorisindeki bir objeye homotopik topolojik uzaylar kategorisinden küme kategorisine giden funktor olarak gösterilebilir.

Teorem 1.3.3: Katsayı kümesi $\mathbb{Z}_2$ cismi için sonsuz boyutlu reel projektif uzayın kohomoloji halkası, $w \in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)$ birinci dereceden kohomoloji sınıfını üreteç olarak alınırsa, $\mathbb{Z}_2[w]$ polinomu ile ifade edilir. Bu ifade $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w]$ şekliyle gösterilir.

İspat: $w = e(L) \in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)$ Euler sınıfı olarak alarak oluşturulan ispat için bkz. Aguilar $(1)_,$ s. 362.

$\mathrm{Vect}_1(X) \cong [X, BO(1)] \cong [X, \mathbb{R}P^\infty] \cong [X, K(\mathbb{Z}_2, 1)] \cong H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ ifadesi, X topolojik uzayı üzerinde tanımlı bir boyutlu vektör demetinin izomorfizma sınıfının, X topolojik uzayının $\mathbb{Z}_2$ cisim katsayısı altında birinci dereceden kohomoloji sınıfına izomorf olduğunu göstermektedir. Böylece her bir izomorfizma sınıfını bir kohomoloji sınıfı ile ifade edebiliriz.

Teorem 1.3.4: $f : X \to \mathbb{R}P^\infty$ dönüşümünün $H^*(-,\mathbb{Z}_2)$ kontravariant funktoru altındaki duali $f^* : H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2) \to H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ için $w \in H^1(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}_2)$ üreticisinin görüntüsü $w_1 = f^*(w) \in H^1(X;\mathbb{Z}_2)$ kohomoloji sınıfıdır ve $[f] \in [X, \mathbb{R}P^\infty]$ homotopi denklik sınıfını represente eden $\mathrm{Vect}_1(X)$ deki izomorfizma sınıfını temsil eder. w_1 elemanı ilgili izomorfizma sınıfına ait Stiefel-Whitney karakteristik sınıfı olarak adlandırılır.

İspat: Bkz Aguilar (2002), s. 337., Whitehead (1978), s. 308. Teoremin ispatında en önemli nokta, tanım kümesi CW kompleks kategorisine ait topolojik uzaydan $\mathbb{R}P^{\infty}$ uzayına giden sürekli dönüşümlerin homotopi sınıfının, ilgili uzayın birinci dereceden kohomoloji sınıfına eşit olmasıdır.

Teorem 1.3.4'ü aşağıdaki kommütatif diagramla ifade edersek:

$$\begin{tikzcd}
w \in H^1\left(\mathbb{R}P^{\infty};\mathbb{Z}_2\right) \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr] & \\
w_1 = f^*(w) \in H^*(X;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\cong"'] & \operatorname{Vect}_1(X)
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.2

X topolojik uzayı üzerinde tanımlı n vektör demetlerinin izomorfizma sınıfını $\operatorname{Vect}_n(X)$ şeklinde gösterelim. Aşağıda tanımları verilecek olan Thom izomorfizması ve Gysin dizisi yardımı ile her izomorfizma sınıfını ifade edecek kohomoloji halkası oluşturabiliriz.

$\mathbb{S}^{n-1}$ küresi $\mathbb{R}^n - \{0\}$ delinmiş uzayının güçlü deforme geri çekmesidir. Buradan $\tilde{H}^{i-1}\left(\mathbb{S}^{n-1};R\right) \xrightarrow[\cong]{r^*} \tilde{H}^{i-1}\left(\mathbb{R}^n - \{0\};R\right) \xrightarrow[\cong]{\delta} \tilde{H}^{i-1}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\};R\right)$ dizisinde, R katsayı halkası için kohomoloji gruplarının izomorfizmalarını elde ederiz.[11]

[11] Aguilar, Marcelo, Samuel Gitler ve Carlos Prieto, **Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint**, , New York, Springer Verlag, 2002, s. 349.

$$\tilde{H}^i\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\};R\right)\cong\begin{cases}R: i=n\\ 0: i\neq n\end{cases}$$ için $\tilde{H}^n\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-\{0\};R\right)$, g_n olarak tanımlanan üreteç tarafından meydana getirilir. Lineer cebirden, V vektör uzayı n boyutlu için $\mathbb{R}^n\cong V$ uzayına izomorf olduğu açıktır. Böylece $i=\text{boy}(V)$ için $\tilde{H}^i\left(V,V-\{0\};R\right)$ kohomoloji grubu g_V olarak göstereceğimiz kohomoloji sınıfı üreticisi ile meydana getirilebilir.

Tanım 1.3.8: $\xi_n=(E,\pi,B)_n$, n boyutlu vektör demetini, $E_0\subset E$ sıfır kesitlerinin tümleyenler kümesini göstersin. Eğer her $x\in B$ için $j_x:\left(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(x)-0\right)\to(E,E_0)$ içerme dönüşümünün kohomoloji funktoru altında ki görüntüsü olan $j_x^*:H^n(E,E_0;R)\to H^n\left(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(x)-0;R\right)$ dönüşümü $t_E\in H^n(E,E_0;R)$ kohomoloji sınıfını $j_x^*(t_E)\in H^n\left(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(x)-0;R\right)$ üreteç kohomoloji sınıfına taşıyorsa, t_E kohomoloji sınıfına, $\xi_n=(E,\pi,B)_n$ demetinin R halkası için Thom sınıfı denir. Bu sınıf tektir.

$n=0$ için Thom sınıfı $t_E=1\in H^0(E,E_0;R)=H^0(B;R)$ olarak alınır. E_0', E total uzayda boyları bir birim olan vektörlerin kümesi için $(E,E_0')\to(E,E_0)$ dönüşümünün içerme olduğu açıktır. $T(E)=E_0/E_0'$ ile gösterilen bölüm uzayı $\xi_n=(E,\pi,B)_n$ demeti için Thom uzayı olarak adlandırılır.

Thom sınıfları için doğallık koşulları geçerlidir. Buna göre R katsayı halkasına göre yönlendirilebilir $\xi_n'=(E',\pi,B')_n$ vektör demeti için, $f:B\to B'$ fonksiyonu sürekli olsun. B baz uzayı üzerinde tanımlı total uzayı ilgili vektör demetinin geri çekmesi olarak alalım ve E şeklinde gösterelim. Bu yeni $\xi_n=(E,\pi,B)_n$ vektör demeti de R katsayı halkasına göre yönlendirilebilir olacaktır ve $\xi_n'=(E',\pi,B')_n$ vektör demetine ait Thom sınıfının $t_{E'}$ geri çekme altındaki görüntüsü de $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetine ait Thom sınıfını meydana getirir. Böylece $f_!^*(t_{E'}) = t_E \in H^n(E, E_0; R)$ kohomoloji sınıfına sahip oluruz.

Whitney toplamları üzerinde Thom sınıflarının özellikleri göstermek için cebirsel topolojide tanımlı önemli bir teoremi verelim.

Teorem 1.3.5 (Künneth Teorem)[12]: (X, A) topolojik çift ve (Y, B) sınırlı kohomoloji tipinde topolojik çift için çapraz çarpım izomorfizmasını $\times : H^*(X, A) \otimes H^*(Y, B) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ şeklinde tanımlayabiliriz.

İspat: [Hausmann, s. 131.]

$\xi_n = (E, \pi, B)_n$ ve $\xi_{n'} = (E', \pi', B)_{n'}$ aynı baz uzayı üzerinde farklı boyutlarda tanımlanmış vektör demetleri olsun. Aşağıda gösterilen bileşke altında Whitney toplamına ait Thom sınıfını $t_{E \oplus E'} = \tilde{\Delta}^*(t_E \times t_{E'})$ elde ederiz.

$$\begin{array}{ccc}
H^n(E, E_0) \otimes H^{n'}(E', E_0') & \xrightarrow{\times} & H^{n+n'}(E \times E', E \times E_0' \cup E_0 \times E') \\
 & & \Big\downarrow = \\
H^{n+n'}\left(E \times E', (E \times E')_0\right) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} & H^{n+n'}\left(E \oplus E', (E \oplus E')_0\right)
\end{array}$$

Aşağıdaki tanım vektör demetleri için oldukça önemli bir kohomoloji sınıfını vermektedir. Euler sınıfı olarak adlandırılan kohomoloji sınıfı, Teorem 3'de katsayısı $\mathbb{Z}_2$ cismi olarak alınan $\mathbb{R}P^\infty$ topolojik uzayının kohomoloji halkasının hesaplanmasında kullanılmıştı.

---

12 $A, B = \varnothing$ ve Y sınırlı kohomoloji tipinde topolojik uzay için çapraz çarpım izomorfizmasını $\times : \left(H^*(X) \otimes H^*(Y), +, \bullet\right) \xrightarrow{\cong} \left(H^*(X \times Y), +, \cup\right)$ şeklinde tanımlarız.

Tanım 1.3.9: $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demeti ve $t_E \in H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ Thom sınıfı. $\upsilon : B \to E$ sıfır kesit ve $\mu : (E, \varnothing) \to (E, E_0)$ içerme dönüşümü verilsin. Kohomoloji funktoru altında ilgili dönüşümlerin birleşimi $\upsilon^* \circ \mu^*(t_E) = e(\xi_n) \in H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ Euler sınıfı olarak adlandırılır.

$\xi_n = (E, \pi, B)_n$ ve $\xi_{n'} = (E', \pi', B)_{n'}$ aynı baz uzayı üzerinde farklı boyutlarda tanımlanmış vektör demetleri olsun. Whitney toplamlarına ait Euler sınıfı, Euler sınıflarının kap çarpımı ile tanımlanır. Bu ifadeyi $e(E \oplus E') = e(E) \cup (E')$ şeklinde gösteririz.

Trivial vektör demetlerinin ve hiçbir yerde sıfır kesitine sahip olmayan vektör demetlerinin Euler sınıfı sıfıra eşittir.

Aşağıdaki teorem, vektör demetlerinin Gysin dizisinin tanımı için oldukça önemlidir.

Teorem 1.3.6 ($\mathbb{Z}_2$- Katsayılı Thom izomorfizm): $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demeti ve $H^n(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji grubuna ait t_E Thom sınıfı verilsin. $\kappa \in H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ sınıfını $H^*(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{(-\cup t_E)} H^{*+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ morfizması altında $\pi^*(\kappa) \cup t_E \in H^{*+n}(E, E_0; \mathbb{Z}_2)$ sınıfına döndüren dönüşüm Thom izomorfizması olarak adlandırılır.

İspat: [Osborn (1983), s.199, Aguilar (2002), s. 358-60]

Teorem 1.3.7 (Gysin dizisi): $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demeti verilsin. Aşağıda gösterilen kohomoloji dizisi "tam" yapılıdır ve Gysin dizisi olarak adlandırılır.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q+n-1}(E_0;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"'] & H^{q}(B;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\cup e(E)"] & H^{q+n}(B;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p_0^*=p^*|E_0"] & H^{q+n}(E_0;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \cdots \\
& H^{q+n}(E,E_0;\mathbb{Z}_2) \arrow[ur, "\cong \text{Thom izomorfizm}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

İspat: [Osborn (1983), s. 200, Aguilar (2002), s. 361]

Gysin dizisi, vektör demetlerine ait Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır. Aşağıdaki tanım ile elde edilen sonuçları Gysin dizisi ile birleştirdiğimizde veri reel vektör demetine ait Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarının elde edilmesi gösterilecektir.

Tanım 1.3.10: $\xi_n = (E,\pi,B)_n$ vektör demeti verilsin. $E_0 \subset E$ sıfır kesitlerinin tümleyeni üzerinde tanımlı $(n-1)$ boyutlu vektör demeti $\xi_{n-1} = \left(\tilde{E},\pi,E_0\right)_{n-1}$ aşağıdaki şekilde kurulur.

$\tilde{E}' = \left\{(v,e)\in E_0 \times E \middle| \pi(v) = \pi(e)\right\} \to E_0$ vektör demetini için $\tilde{E}'$ üzerindeki alt çizgi demetini $L = \left\{(v,e)\in \tilde{E}' \middle| e = \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ şeklinde oluşturabiliriz. Demetler kategorisinde demet bölümü işlemi tanımlanabildiğinden $\pi : \tilde{E}'/L \to E_0$ ifadesi $(n-1)$ boyutlu vektör demetidir. $\tilde{E}'/L$ bölüm demetini $\tilde{E}$ ile gösterirsek $\xi_{n-1} = \left(\tilde{E},\pi,E_0\right)_{n-1}$ elde etmiş oluruz.[13]

[13] Aguilar, **a.g.e. s.** 368, Osborne, H., **Vector Bundles: Foundations Stiefel-Whitney Classes**, New York, Academic Press, 1983, s.201-204.

Teorem 1.3.8: $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetinin B baz uzayı CW-kompleks yapısına sahip olsun. $\tilde{E}$ uzayının Euler sınıfı $e(\tilde{E})$, $p_0^* : H^{n-1}(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{n-1}(E_0;\mathbb{Z}_2)$ morfizmasının görüntü kümesi içinde yer alır.

İspat: [Aguilar (2002), s. 367-68.]

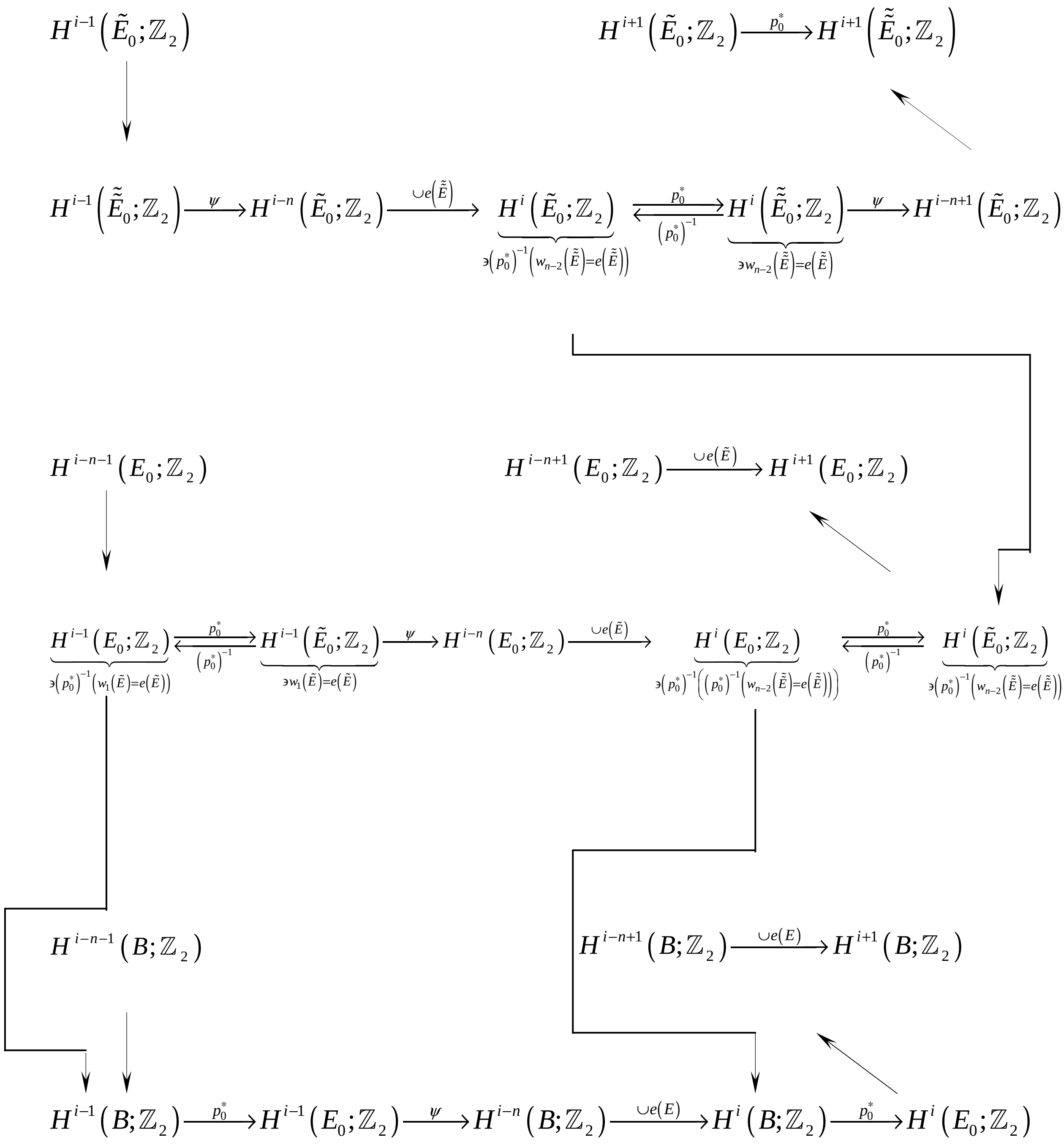
Tanım 1.3.11: $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetinin B baz uzayı CW-kompleks yapısına sahip olsun. $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetinin Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$H^{i-n}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cup e(E)} H^i(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_0^*} H^i(E_0;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\psi} H^{i-n+1}(B;\mathbb{Z}_2)$ Gysin dizisi parçası için, $i \leq n-2$ durumunda uç kohomoloji grupları sıfıra eşit olacağından p_0^* izomorfizma olacaktır. $i = n-1$ için sol uç kohomoloji grubu sıfır olacak, kısa tam dizi özelliğinden p_0^* monomorfizma özelliğine sahip olacaktır. Teorem 8'den hareketle $e(\tilde{E}) \in \operatorname{im}(p_0^*)$ olacaktır. Tümevarım yöntemi ile $w_n(E) = e(E)$ elde ederiz. $i \leq n-1$ için $w_i(E) = (p_0^*)^{-1}(w_i(\tilde{E}))$ vektör demetinin diğer Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarını elde etmekte kullanılır.[14]

Şekil 1.3, $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetinin $w_n(E)$, $w_{n-1}(E)$ ve $w_{n-2}(E)$ Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarının nasıl hesaplanacağını göstermektedir.

---

[14] Aguilar, **a.g.e.** , s.368.



Şekil 1.3

$\mathbb{Z}_2$ katsayı cismi üzerinde tanımlı Grassmann manifoldlarının kohomoloji sınıflarına ait teoremleri aşağıdaki teoremler yardımı ile rahatlık ile elde edebiliriz.

Çalışmanın 2. bölümünde kullanacağımız Stiefel manifoldlarının kohomoloji sınıfları ise 3. bölümde spektral diziler yardımı ile bulunacaktır.

Tanım 1.3.12: $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demeti için i. boyutun karakteristik sınıfı, parakompakt baz uzayı üzerinde tanımlı $\xi_n = (E, \pi, B)_n$ vektör demetine $c(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji sınıfını atayan c dönüşümüdür. İlgili kohomoloji sınıfı izomorfizma sınıfları altında değişmezlik özelliğine sahiptir. C_n^* notasyonu ile gösterilen ifade karakteristik sınıflar kümesini oluşturmaktadır.

Teorem 1.3.8: Derecelendirilmiş halkalar arasında $c \in C_n^*$ için $\varphi(c) = c\left(E_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right)$ şartını sağlayan $\varphi : C_n^* \cong H^*\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right); \mathbb{Z}_2\right)$ izomorfizması mevcuttur.

İspat: [Aguilar (2002), s. 371.]

Lemma 1.3.1 : $n > 1$ için $E_n\left(\mathbb{R}^\infty\right) \to G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ ve $E_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right) \to G_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ evrensel demetleri olsun. $f : G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right) \to G_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ dönüşümü $\left(\varepsilon^1 \oplus E_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right), \pi, G_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right)$ demeti için sınıflama dönüşümüdür. Bu durumda aşağıdaki dizi, uzun tam dizidir.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^q\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right) \arrow[r, "-\cup e\left(E_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right)"] & H^{q+n}\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right) \arrow[r, "f^*"] & H^{q+n}\left(G_{n-1}\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right) \arrow[d] \\
 & & & H^{q+1}\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right) \to \cdots
\end{tikzcd}$$

Teorem 1.3.9: $\mathbb{Z}_2$ katsayı cismi üzerinde $w_i = w_i\left(E_n\left(\mathbb{R}^\infty\right)\right) \in H^i\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right);\mathbb{Z}_2\right)$ Stiefel-Whitney kohomoloji sınıfları için $H^*\left(G_n\left(\mathbb{R}^\infty\right);\mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}_2\left[w_1,\cdots,w_n\right]$ polinomu tanımlıdır.

İspat: [Whitehead (1978), s. 362.]

İKİNCİ BÖLÜM
İDEAL DEĞERLİ KOHOMOLOJİ İNDEKS TERORİSİ, EKSİK PİYASALAR VE PSÖDO DENGE MANİFOLDU

Bu bölümün birinci alt bölümünde, ikinci alt bölümde tanımı ve analizi yapılacak olan tam olmayan piyasalarda denge varlığını için gerekli olan matematiksel ifadeler ve teoremler bir önceki bölümde çıkarsaması yapılan sonuçlar yardımı ile verilmiştir. Öncelikle, G kompakt Lie grubu ve X topolojik uzay için serbest harekete sahip yapı tanımlanmış, bu ifade yardımı ile Borel eş değişim kohomoloji tanımı verilmiştir. Bu kohomoloji yapısı yardımı ile çalışmamızda $\mathrm{Ind}^{G} X = \mathrm{Ker}\left({}_{AS}H_{G}^{\mathrm{Borel}}\left(c_X\right) : {}_{AS}H_{G}^{\mathrm{Borel}}\left(\{*\}\right) \rightarrow {}_{AS}H_{G}^{\mathrm{Borel}}\left(X\right)\right)$ notasyonu ile ifade edilecek olan ideal yapısı oluşturulmuştur. X topolojik uzayı üzerinde özel olarak $G = \mathbb{Z}_2$ grubunun hareketi ve $\mathrm{Ind}^{\mathbb{Z}_2} X$ ideali yardımı ile Stiefel-Whitney yüksekliği tanımlanmıştır. Bu tanım özellikle ikinci alt bölümde piyasa denge varlığının ispatlanmasında önemli bir yer tutmaktadır.

İkinci alt bölümde, dönemler arası servet transferi yapılabilmesine imkan sağlayan arbitraj seçeneğinin olmadığı ve finansal varlık sayısının geleceğe dair belirsizlik senaryolarından daha az olduğu piyasa modeli incelenecektir. Konu hakkında çeşitli matematiksel metotlar yardımı ile denge analizi çözümü (en ilgi çeken yaklaşım olarak diferensiyel topolojik çözümlemeleri gösterebiliriz) Grassmann manifoldları varlığı üzerinden yapılmıştır. Bu alt bölümde genelleştirilmiş Borsuk-Ulam teoremlerinin uygulanması için fiyat simpleksleri, üzerinde $\left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}_2 = \{-1,1\} \right\}$ hareketi tanımladığımız küre üzerine taşınmıştır. Veri mal ve finans piyasalarının denge şartının varlığını inceleyeceğimiz sıfırlar kümesi birinci bölümde tanımlanan Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları ve ikinci bölümün birinci alt bölümünde tanımlanan genelleştirilmiş Borsuk-Ulam teoremleri yardımı ile elde edilmiştir.

1.4 İdeal Değerli Kohomoloji İndeks Teorisi

1.4.1 Borsuk-Ulam Teoremi

$\mathbb{S}^n$, $n+1$ boyutlu Öklid uzayda birim küre olsun. Klasik Borsuk-Ulam teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem (Borsuk-Ulam) 2.1.1: $n \geq 1$ için $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonu verilsin. $f(\tilde{x}) = f(-\tilde{x})$ eşitliğini sağlayan $\tilde{x} \in \mathbb{S}^n$ elemanı vardır. Eğer f fonksiyonu tek fonksiyon ise $f^{-1}(0)$ boş küme değildir.

İspat: [Spanier (1994), s. 266.]

Teorem 2.1.2: $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ sürekli dönüşümü ve $A_f = \{x \in \mathbb{S}^n : f(x) = f(-x)\}$ sıfırlar kümesi verilsin. $k \leq n$ için A_f kümesi boş değildir.

İspat: Yang (1954), s. 262-264, Borsuk-Ulam teoreminden elde edilecek sonuçlar için Matousek (2003), s. 23.

Borsuk-Ulam teoremi çeşitli matematiksel yöntemlerle genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu yöntemler arasında en önemlilerinden biri olarak ideal değerli kohomoloji indeks teorisini gösterebiliriz. E. Fadell, S. Husseini ve J. Jaworowski birbirlerinden ayrı olarak ideal değerli kohomoloji indeks teorisini göstermişler ve Borsuk-Ulam teoremini bu teorem yardımı ile Stiefel manifoldlarına genişletmişlerdir.

1.4.2 İdeal Değerli İndeks

G, kompakt Lie grubu, X topolojik uzayı üzerinde sürekli harekete sahip olsun. $Gx = \{x \in G : gx = x\}$ stabilizer alt grubu her $x \in X$ için tek elemanlı ise, G grubu X uzayı üzerinde serbest harekete sahiptir denir. Bu ifade basitlik amacı ile $G \circlearrowright X$ şeklinde gösterilecektir. Birinci bölümde tanımlanan Milnor yapısından hareketle her kompakt Lie grubunun, üzerinde serbestçe hareket edebildiği büzülebilir bir topolojik uzay olarak EG 'yi oluşturabileceğimiz açıktır.

Tanım 2.1.2.1: G kompakt Lie grubu için $G \circlearrowright X$ verilsin. Homotopi bölümü olarak da adlandırılan Borel yapısı $X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/\sim$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2.2: H kohomoloji teorisi ve yukarıda tanımlandığı şekliyle $G \circlearrowright X$ verilsin. $H_G(X) = H(X/G)$ eşitliği ile tanımlanan yapı, eş değişim (equivariant), $H_G^{\text{Borel}}(X) = H(X_G) = H(EG \times_G X) = H((EG \times X)/\sim)$ yapısı ise Borel eş değişim kohomolojisi olarak adlandırılır.

İkinci bölümün geri kalanında ${}_{AS}H$ Alexander-Spanier kohomolojisi[15] kullanılacaktır. Tanım 2.2.1.2'de genel yapısı verilen teorinin, Alexander-Spanier kohomolojisi altında ki önemli izomorfizmaları ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(X) \cong {}_{AS}H^{\text{Borel}}(X/G)$[16], ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(EG) \cong {}_{AS}H^{\text{Borel}}(BG)$ ve ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\}) \cong {}_{AS}H^{\text{Borel}}(BG)$ şeklinde gösteririz.

$\varphi : X \to EG$, $\gamma : \{*\} \to EG$ ve $c_X : X \to \{*\}$ dönüşümlerinin ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(-)$ kohomoloji funktoru altındaki görüntüsü aşağıda Şekil 1'de gösterilmiştir.

---

[15] Alexander-Spanier kohomolojisi için bkz. Glen E. Bredon**, Sheaf Theory**, New York, Springer Verlag,1997, s. 24, 25

[16] $EG \times_G X \simeq \{*\} \times_G X = X/G$ homotopik olduğundan, her iki uzayın kohomoloji halkası izomorftur.

${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(EG) \cong {}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\})$ izomorfizmasından ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(c_X)$ ve ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\varphi)$ dönüşümlerinin eşit olduğunu ortaya çıkar.

$$\begin{tikzcd}
H_G^{\text{Borel}}(X) & & {}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(EG) \arrow[ll, "{}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\varphi)"'] \arrow[dll, "{}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(c_X)"] \\
{}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\}) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.1

Tanım 2.1.2.3: G kompakt Lie grubu ve X topolojik uzayı için $G \circlearrowright X$ verilsin. $\text{Ind}^G X$ olarak tanımlanan X topolojik uzayının indeks yapısı, G eş değişim kohomoloji indeksinin çekirdeğidir ve ilgili eşitlik ile gösterilir $\text{Ind}^G X = \text{Ker}\left({}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(c_X) : {}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\}) \to {}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(X)\right)$. Cebirsel olarak ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(-)$ kohomoloji funktorunun görüntü kümesi, halka kategorisinde olduğundan, çekirdek $\text{Ker}\left({}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(c_X)\right) \lhd_{\text{ideal}} {}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\})$, ${}_{AS}H_G^{\text{Borel}}(\{*\})$ halkasının bir idealidir.

G kompakt Lie grubunu $\mathbb{Z}_2$ olarak alırsak ${}_{AS}H_{\mathbb{Z}_2}^{\text{Borel}}(\{*\}) \cong {}_{AS}H^{\text{Borel}}(\mathbb{R}P^\infty)$ izomorfizmasını elde ederiz. Birinci bölümde, $w_1 \in {}_{AS}^{\text{Borel}}H_{\mathbb{Z}_2}^1(\{*\}) \cong {}_{AS}^{\text{Borel}}H^1(\mathbb{R}P^\infty)$ Stiefel-Whitney karakteristik sınıfı aracılığı ile ${}_{AS}H^{\text{Borel}}(\mathbb{R}P^\infty)$ halkasının, $\mathbb{Z}_2[w_1]$ polinomu ile represente edildiği gösterilmişti.

$$
\begin{tikzcd}
{}_{AS}H^{\text{Borel}}_{\mathbb{Z}_2}\left(\{*\}\right) \arrow[r, "{}_{AS}H^{\text{Borel}}_{\mathbb{Z}_2}(c_X)"] \arrow[d, "\cong"] & {}_{AS}H^{\text{Borel}}_{\mathbb{Z}_2}\left(X\right) \arrow[d, "\cong"] \\
{}_{AS}H^{\text{Borel}}\left(\mathbb{R}P^{\infty}\right) \arrow[r, "{}_{AS}H^{\text{Borel}}(c_X)"] & {}_{AS}H^{\text{Borel}}\left(X/\mathbb{Z}_2\right)
\end{tikzcd}
$$

Yukarıda ki komutatif diagramdan $w_1 \in {}^{\text{Borel}}_{AS}H^1\left(\mathbb{R}P^{\infty}\right)$ için ${}_{AS}H^{\text{Borel}}\left(c_X\right)\left(w_1\right) \in {}^{\text{Borel}}_{AS}H^1\left(X/\mathbb{Z}_2\right)$ ifadesi $\mathbb{Z}_2 \circlearrowright X$ için karakteristik sınıf tanımlar.

Tanım 2.1.2.4: $t_1, \cdots, t_m \in H^1\left(X;\mathbb{Z}_2\right)$ kohomoloji sınıflarının kap $t_1 \cup \cdots \cup t_m \neq 0$ çarpımlarını sıfıra eşit yapmayan en büyük m sayısı kap_1-uzunluk olarak tanımlanır ve $cup_1\left(X\right)$ şeklinde gösterilir. $t_1, \cdots, t_m$ kohomoloji sınıfları keyfi derecelere sahip ise kap-uzunluk olarak tanımlanır ve $cup\left(X\right)$ şeklinde gösterilir, ayrıca iki yapı arasında $cup_1\left(X\right) \leq cup\left(X\right)$ sıralaması vardır. $cup_1\left(X\right) \geq 0$ ifadesinin, ilgili topolojik uzayın boş olmadığını gösterdiği açıktır ki bu özellik bir sonraki alt bölümde piyasa denge varlığının ispatlanmasında kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2.5: $\mathbb{Z}_2 \circlearrowright X$ ve $w_1 \in {}^{\text{Borel}}_{AS}H^1_{\mathbb{Z}_2}\left(\{*\}\right) \cong {}^{\text{Borel}}_{AS}H^1\left(\mathbb{R}P^{\infty}\right)$ verilsin. Öyle bir $n \in \mathbb{Z}_{++}$ tam sayısı vardır ki ${}_{AS}H^{\text{Borel}}\left(c_X\right)\left(w_1^n\right) \neq 0$ için ${}_{AS}H^{\text{Borel}}\left(c_X\right)\left(w_1^{n+1}\right) = 0$ şartını sağlar[17]. Bu $n \in \mathbb{Z}_{++}$ tam sayısı Stiefel-Whitney yüksekliği olarak adlandırılır ve $\text{Ind}^{\mathbb{Z}_2} X$ değeri ilgili sayı ile ifade edilebilir.

[17] Dönüşümün çekirdeği w_1^{n+1} kohomoloji sınıfı tarafından oluşturulmaktadır.

Teorem 2.1.2.1: X parakompakt G uzay ve W keyfi G uzay için $f: X \to W$ eş değişim dönüşümü olsun. $\tilde{W} \subset W$ kapalı invaryant alt kümesi için $\left(\mathrm{Ind}^G f^{-1}\tilde{W}\right) \cdot \left(\mathrm{Ind}^G W - \tilde{W}\right) \subset \mathrm{Ind}^G X$ kapsaması geçerlidir.

İspat: [Jaworowski (1989), s: 273, Fadell (1988), s: , Komiya (1993), s:613.]

X topolojik uzayını özel olarak $V_m\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ Stiefel manifoldu olarak alalım. $G = O(m)$ ortogonal grubu, $V_m\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ üzerinde $O(m) \circlearrowright V_m\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ serbestçe hareket etmektedir. $V_m\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ Stiefel manifoldunun $O(m)$ eş değişim kohomolojisi ${}_{AS}H^{\mathrm{Borel}}_{O(m)} V_m\left(\mathbb{R}^\infty\right) = {}_{AS}H^{\mathrm{Borel}} G_m\left(\mathbb{R}^\infty\right)$ Grassmann manifoldunun kohomoloji halkasıdır ve birinci bölümde verildiği gibi $\mathbb{Z}_2\left[w_1, \cdots, w_m\right]$ polinomları ile represente edilir. $V_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ için $O(m) \circlearrowright V_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ sağlanmakta ve $O(m)$ eş değişim kohomolojisi ${}_{AS}H^{\mathrm{Borel}}_{O(m)} V_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right) = {}_{AS}H^{\mathrm{Borel}} G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ elde edilmektedir.

Tanım 2.1.2.6: $\xi = \left(G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right) \times \mathbb{R}^{m+n}, \pi, G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)\right)$ vektör demeti için $x \in V$ şartını sağlayan ikililerin kümesini $(V, x) \in G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right) \times \mathbb{R}^{m+n}$ şeklinde, $y \perp V$ ikililerinin kümesini de $(V, y) \in G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right) \times \mathbb{R}^{m+n}$ şeklinde gösterelim. Bu uzaylara ait Stiefel-Whitney sınıfları sırası ile $w(\xi)$ ve $w\left(\overline{\xi}\right)$ için $w(\xi) \cdot w\left(\overline{\xi}\right) = 1$ eşitliği geçerlidir.

$w(\xi)$ ve $w\left(\overline{\xi}\right)$ sınıfları yardımı ile ${}_{AS}H^{\mathrm{Borel}} G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ kohomoloji halkasını, $\mathbb{Z}_2\left[w_1, \cdots, w_m, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_n\right] / I(m, n)$ bölüm halkası olarak represente ederiz. $I(m, n)$ ideali $w(\xi) \cdot w\left(\overline{\xi}\right) = 1$ çarpımının homojen elemanları tarafından meydana getirilir. Çarpım değerinin 1'e eşit olması iki karakteristik sınıfın birbirinin tersi olduğunu gösteri ki, bu da $w(\overline{\xi})$'in $w(\xi)$ ile ifade edilebilmesine olanak tanır.[18] Böylelikle $\mathbb{Z}_2[w_1,\cdots,w_m,\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_n]/I(m,n)$ bölüm halkasının yeni ifadesini $\mathbb{Z}_2[w_1,\cdots,w_m]/J(m,n)$ şeklinde gösteririz ki burada $J(m,n)$ ideali aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,n} \\ \vdots \\ \alpha_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(\xi_m) & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ w_2(\xi_m) & 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 1 \\ w_m(\xi_m) & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_{1,n},\alpha_{2,n},\cdots,\alpha_{m,n}$, $w(\xi)\cdot w(\overline{\xi})=1$ çarpımına ait homojen elemanları, $w_j(\xi_m)$ ise $\xi=\left(G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)\times\mathbb{R}^{m+n},\pi,G_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)\right)$ vektör demetine ait j. Stiefel-Whitney karakteristik sınıfıdır.

Teorem 2.1.2.2: $\mathrm{Ind}^{O(m)}V_m\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)=J(m,n)$ eşitliği geçerlidir.

İspat: Tanım 2.1.2.3'de ki çıkarsamalardan ilgili sonuç elde edilir.

Lemma 2.1.2.1: $U_k\left(\mathbb{R}^l\right)=\left\{\left(\mathbb{R}^l\right)^k-T=\left\{A\in\left(\mathbb{R}^l\right)^k:\mathrm{Rank}[A]<k\right\}\right\}$ kümesi $V_k\left(\mathbb{R}^l\right)$ Stiefel manifolduna $O(k)$ eş değişim homotopiktir.

İspat: [Komiya (1993), s: 614]

---

[18] Milnor, JohnW., James D. Stasheff, **Characteristic Classes**, New Jersey, Princeton University Press, 1974, s. 40.

$J(k, l-k) \subset \mathrm{Ind}^{O(k)}\left(\mathbb{R}^l\right)^k - T \equiv \mathrm{Ind}^{O(k)} V_k\left(\mathbb{R}^l\right) \subset H^* BO(k)$ zinciri, Teorem 2.2.1.2 ve Lemma 2.2.1.1'den hareketle elde edilir.

Lemma 2.1.2.2: $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{Z}_{++}$ ve $l_1, \cdots, l_m \in \mathbb{Z}_+$ için $\bigotimes_{i=1}^{m} J(k_i, l_i - k_i) \subset \bigotimes_{i=1}^{m} H^* BO(k_i)$ geçerlidir.

İspat: [Komiya (1993), s: 616.]

Aşağıda verilecek olan teorem bir sonraki alt bölüm de, mal ve finans piyasaları denge manifoldlarının varlıklarının ispatlanmasında oldukça önemlidir.

Teorem 2.1.2.3: $k_1, \cdots, k_m \in \mathbb{Z}_{++}$ için $k_1 + \cdots + k_m \le n$ ve $l_1, \cdots, l_m \in \mathbb{Z}_+$ şartlarını sağlayan tam sayıları alalım. $f : V_{(k_1, \cdots, k_m)}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \left(\mathbb{R}^{l_1}\right)^{k_1} \times \cdots \times \left(\mathbb{R}^{l_m}\right)^{k_m}$ dönüşümü $O(k_1, \cdots, k_m) = \begin{pmatrix} O(k_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & O(k_m) \end{pmatrix}$ eş değişim özelliğine sahip olsun. Eğer $1 \le i \le m$ için $l_i < n - \sum_{r=i+1}^{m} k_r$ geçerli ise $a = mn - \sum_{i=1}^{m} (i-1) k_i - \sum_{i=1}^{m} \max\{k_i, l_i + 1\} \ge 0$ ve $T_i = \left\{ A \in \left(\mathbb{R}^{l_i}\right)^{k_i} : \mathrm{Rank}[A] < k_i \right\}$ için $cup_1\left(f^{-1}(T_1 \times \cdots \times T_m) / O(k_1, \cdots, k_m)\right) \ge a$.

İspat: [Komiya (1993), s: 618.]

1.5 Eksik Piyasalar

Bu alt bölümde, zaman ve belirsizlik kavramlarının eklendiği değiş-tokuş ekonomilerinde dengenin varlığı, ideal değerli kohomoloji indeks teorisi yardımı ile analiz edilecektir. İki dönemli Walrascı bir ekonomi varsayımı altında yapılacak ilgili analiz, hane halkının, geleceğe dair $\mathcal{S}=\{1,\cdots,S\}$ adet olayın gerçekleşebilme olasılığı ve her $s\in\mathcal{S}$ durumu için geçmişlerindeki deneyimlerden hareketle, gelecekte gerçekleşebileceğini umdukları olaylara belli bir gerçekleşebilme olasılığı atamaları ve bu olasılıklardan hareketle yatırımlarını hayata geçirmeleri üzerinden faydalarını maksimize etme çabası üzerine kuruludur. Böylelikle bireylerin faydalarını maksimize etme çabaları iki enstrüman yardımı ile gerçekleşir. Bunlardan birincisi sahip olduğu mal sepetini diğer hane halkları ile değiştirmesi, ikincisi ise cari dönemde sahip olduğu finansal varlıklar ile gelecekteki faydasını maksimize etme çabasıdır.

1.5.1 Zaman

Varsayım 1: İki dönemli bir ekonomi mevcuttur.

Varsayım 2: $\mathcal{S}=\{0,1,\cdots,S\}$ iki dönemdeki tüm olaylar kümesidir. $s=0$ cari dönem, $s\in\mathcal{S}=\{1,\cdots,S\}$ gelecek dönem olaylarını ifade eder.

1.5.2 Mal Uzayı

İktisadi mallar, karakteristik özelliklerine, piyasa da mevcut bulunduğu zaman ve yere göre sınıflandırılır.

Varsayım 1: Piyasada $C=\{0,1,\cdots,\mathrm{C}\}$ sayıda iktisadi mal vardır.

Varsayım 2: Her iktisadi mal keyfi bölünebilir (her iktisadi mal atomsuzdur).

Varsayım 3: $c \in \mathcal{C} = \{1, \cdots, C\}$ için $c \in \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{C}}$.

$\mathbb{R}_{++}^{\mathcal{G}=\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)}$ iktisadi mal uzayı olarak adlandırılır ve bu uzayın elemanı $x \equiv x^{s,c} \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{G}=\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)}$ şeklinde gösterilir.

1.5.3 Hane Halkı

Varsayım 1: $\mathcal{H} = \{1, \cdots, H\}$ sınırlı sayıda hane halkı vardır.

Varsayım 2: $\left(e_h^c\right)_{c \in \mathcal{C}}$, $h \in \mathcal{H} = \{1, \cdots, H\}$ hane halkının başlangıç mal vektörüdür.

Varsayım 3: Hane halkı, faydasını sürekli olarak maksimize etmeye çalışacaktır.

Varsayım 3'ü matematiksel olarak von Neumann-Morgenstein beklenti eklentili fayda fonksiyonu aracılığı ile aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$u_h : \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)} \xrightarrow{x_h \mapsto \sum_{s=1}^{S} \pi^s v_h^s\left(x_h^0, x_h^s\right)} \mathbb{R}_{++} \tag{1}$$ [19]

Burada π^s, $s \in \mathcal{S}$ durumunun gerçekleşme olasılığı ve $v_h^s\left(x_h^0, x_h^s\right)$ değeri, iki dönemli fayda fonksiyonudur.

---

[19] Fayda fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu varsayılacaktır.

- $u_h : \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)} \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}$ üzerinde C^{∞} sınıfından fonksiyon
- $U_h(x) = \left\{x' \in \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)} \middle| u_h(x') \geq u_h(x)\right\} \subset \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}, \ \forall x \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}$
- Her $x \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}$ için $\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_h}{\partial x_G}\right) \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}$
- Her $x \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}$ için $\sum_{j=1}^{G}\sum_{k=1}^{G} h_j h_k \frac{\partial^2 u_h(x)}{\partial x_j \partial x_k} < 0, \ \forall h \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{H}(\mathcal{S}+1)}, \ h \neq 0$

1.5.4 Fiyatlar

Varsayım 1: $p^{s,c}$, $s \in \mathcal{S}$ durumunda $c \in \mathcal{C}$ malının piyasa fiyatını gösterir.

Varsayım 2: $p^{s} \cdot e_h^s \in \mathbb{R}_{++}$, bireyin sahip olduğu malların piyasa değerini ve bu sayede bireyin talep yapısının kısıtı olan servetinin belirleyicisidir.

1.5.5 Finansal Piyasalar

Varsayım 1: Piyasada $\mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ adet finansal varlık vardır.

Varsayım 2: $q \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{I}}$ finansal varlıkların fiyat vektörüdür.

Varsayım 3: $b_h^i \in \mathbb{R}$, h . bireye ait $i \in \mathcal{I}$ finansal varlığın talebini, $b_h \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$, h . bireye ait portföyü göstermektedir.

$s = 0$ döneminde birey elindeki mal kümesinin bir alt kümesi ile tercih etmiş olduğu portföyü değiş-tokuş etmekte, bu sayede dönemler arası faydasını maksimize etmek için cari dönemdeki tüketimini gelecek dönem lehine kısmaktadır. Bir sonraki dönem elinde bulunan portföyüne karşılık gelen mal kümesini tüketim kümesine eklemektedir.

Tanım 2.2.5.1: $r^{si} : \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $i \in \mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ finansal varlığının $s \in \mathcal{S} = \{1, \cdots, S\}$ dönemi için getiri değerini göstermektedir.

Yukarıdaki tanımdan $i \in \mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ finansal varlığına ait değer ve getiri vektörünü $\begin{bmatrix} -q^i \\ r^{1i} \\ \vdots \\ r^{Si} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}+1}$ şeklinde gösterebiliriz. $-q^i$ değeri, finansal varlığa $s = 0$ döneminde sahip olmak için ödenmesi gereken piyasa fiyatını göstermektedir.

Tanım 2.2.5.2: $R:\mathbb{R}_{++}^{\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)} \rightarrow M_{S,I}$ fonksiyonu

$p \mapsto R(p) = \begin{pmatrix} r^{11}(p) & \cdots & r^{1I}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{S1}(p) & \cdots & r^{SI}(p) \end{pmatrix}$ şeklinde ifade edilir ve getiri matrisi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.5.3: Finansal varlığın $s=1$ döneminde ki getirisi iktisadi mal cinsinden ise reel finansal varlık olarak adlandırılır. $\left(y^{sic}\right)_{c=1}^{C} \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$, $i \in \mathcal{I} = \{1, \cdots, I\}$ finansal varlığın $s \in \mathcal{S} = \{1, \cdots, S\}$ döneminde yapacağı iktisadi mal ödemesini birim miktarda gösterir.

$p^{j} \in \mathbb{R}_{++}^{C}$ ve $y^{si} \in \mathbb{R}_{++}^{C}$ için getiri matrisini $R(p) = \begin{pmatrix} p^{1}y^{11} & \cdots & p^{1}y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^{S}y^{S1} & \cdots & p^{S}y^{SI} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Tanım 2.2.5.4: $\mathcal{E} = (e, y) \in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} \times \mathbb{R}_{++}^{CSI}$ ikilisi, reel finansal varlıklara sahip ekonomi modelini tanımlar.

Finans piyasası eklentili değiş-tokuş ekonomileri modellerinde, finansal varlık sayısı ile gelecek ile ilgili beklenti sayısı arasındaki ilişki, piyasanın yapısının belirlenmesi yönünde oldukça önemlidir. Aşağıda verilecek tanımlar reel finans piyasası modelimizin temelini oluşturması açısından oldukça önemlidir.

Tanım 2.2.5.5: Piyasadaki finansal varlık sayısı gelecek ile ilgili beklenti sayısından küçüktür $I < \mathcal{S}$.

Yukarıda tanımlanan durum, bireyin dönemler arasında istediği gibi servetini transfer etmesini engellemektedir[20]. Birey sadece $i \in \mathcal{I}$ finansal varlıklarının getiri

[20] Andreas Borglin, **Economic Dynamics and General Equilibrium**, New York, Springer, 2007, s. 80.

vektörü tarafından gerilen I boyutlu alt uzay içindeki gelir vektörlerine sahip olacaktır, bu alt uzayın ortogonal tümleyenlerini elde edemeyecektir.

Tanım 2.2.5.6: Finansal piyasada arbitraj seçeneği yoktur.

Yukarıda tanımlanan durumu matematiksel olarak, $R(p)$ finansal varlıkların piyasa fiyatları tabanlı olarak getiri matrisi ve $q \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ için $\begin{bmatrix} -q \\ R(p) \end{bmatrix} \cdot a > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ vektörünün olmaması ile ifade edebiliriz.[21]

Tanım 2.2.5.7: $\text{Rank}\left(\left[Y\right]_{S \times I}\right) = I$ geçerlidir.

Piyasadaki finansal varlıkların getiri vektörlerinin birbirlerinden bağımsız olduğunu ve I boyutlu bir uzay gerdiğini göstermektedir. Diğer bir değişle, hiçbir finansal varlığın getiri vektörü, diğer finansal varlıkların getiri vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılamaz.

1.5.6 İdeal Değerli Kohomoloji İndeks Teori Eklentili Eksik Piyasa Modeli

Her $h \in \mathcal{H} = \{1, \cdots, H\}$ hane halkının amacı, dönemler arası faydasını maksimize edecek şekilde tüketimini ayarlamaktır. Bu durum hane halkının toplam faydasını maksimize etmek adına cari dönem tüketiminden kısması anlamına gelebileceği gibi (hane halkı gelecek dönem tüketimini arttırmak adına cari dönemde, elindeki mal kümesinin bir kısmı ile gelecek dönem ödemesi yapılacak

---

21 $\begin{bmatrix} -q \\ R(p) \end{bmatrix} \cdot a > 0$ koşulunun gerçekleşmemesi durumunda aşağıdaki koşullar sağlanır.

- Öyle bir $\lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}+1}_{++}$ vektörü vardır ki $\lambda \cdot \begin{bmatrix} -q \\ R(p) \end{bmatrix} = 0$ eşitliği sağlanır.
- Öyle bir $\gamma \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}_{++}$ vektörü vardır ki $q = \gamma \cdot R(p)$ eşitliği sağlanır.

finansal varlık satın alabilir) tam tersi de olabilir (gelecek döneme ait mal kümesini teminat göstererek cari dönemde bütçesinin üzerinde mal kümesine sahip olması).

$h \in \mathcal{H} = \{1, \cdots, H\}$ hane halkına ait maksimizasyon problemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\max_{(x_h, b_h) \in \mathbb{R}_{++}^{\mathcal{C}(\mathcal{S}+1)} \times \mathbb{R}^I} u_h(x_h)$$

$$\text{kısıt} \quad \begin{aligned} p^0 x_h^0 + q b_h &= p^0 e_h^0 \\ p^s x_h^s &= p^s e_h^s + \left(p^s y^{si}\right)_{i=1}^{I} b_h \quad s \geq 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Bu ifadeyi matris formunda indirgeyerek gösterelim.

$\Phi(p) = \begin{pmatrix} p^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix}$, tüm dönemlere ait piyasa fiyat matrisi ve

$R(p, y) = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^S \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} y^{11} & \cdots & y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{S1} & \cdots & y^{SI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^1 y^{11} & \cdots & p^1 y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^S y^{S1} & \cdots & p^S y^{SI} \end{pmatrix}$[22], finansal varlıklara ait mal cinsinden getirilerin piyasa fiyatı türünden değerini gösteren matrisi için, (2) numaralı denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

[22] $\square$, Hadamard çarpımı olarak adlandırılır. $[p]_{S\times 1}$ ve $[Y]_{S\times I}$ matrisleri için $p_{j,1} \cdot y^{j,l}_{1\leq l\leq I}$ şeklinde tanımlanır.

$$\max_{(x_h,b_h)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^{I}} u_h\left(x_h\right)$$

$$\text{kısıt} \qquad -\Phi\left(p\right)\left(x_h-e_h\right)+\begin{bmatrix} -q \\ R\left(p,y\right)\end{bmatrix}b_h=0 \tag{3}$$

$h\in\mathcal{H}=\{1,\cdots,H\}$ hane halkının sahip olduğu $b_h\in\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ portföyü için fırsat kümesini,

$$O_{b_h}\left(p,q;e_h\right)=\left\{x\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}\,\middle|\, \begin{array}{c} p^0x_h^0-p^0e_h^0=-qb_h \\ p^sx_h^s-p^se_h^s=\left(p^sy^{si}\right)_{i=1}^{I}b_h \quad s\geq 1\end{array}\right\} \tag{4}$$

şeklindedir. Tüm $b_h\in\mathbb{R}^{\mathcal{I}}$ portföy kümesi için $O\left(p,q;e_h\right)=\bigcup_{b_h\in\mathbb{R}^{\mathcal{I}}} O_{b_h}\left(p,q;e_h\right)$, $h\in\mathcal{H}$ hane halkının bütçe kümesini meydana getirir.

Tanım 2.2.6.1: $\left(x_h,b_h,p,q\right)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^{I}\times\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^{I}$ vektörü aşağıda ki şartları sağlarsa, veri $\mathcal{E}=\left(e,y\right)\in\mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}\times\mathbb{R}_{++}^{CSI}$ ekonomisi için arbitrajın olmadığı denge olarak adlandırılır.

1. Veri $\left(x_h,b_h,p,q\right)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^{I}\times\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^{I}$ vektörü için x_h aşağıdaki kısıt altındaki optimizasyon problemi için çözümdür.

$$\max_{x_h\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}} u_h\left(x_h\right)$$

$$p^0x_h^0=p^0e_h^0$$

$$\text{kısıt} \qquad \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S\end{pmatrix}\left(x_h^1-e_h^1\right)\in\left\langle R\left(p\right)\right\rangle$$

$\langle R(p) \rangle$, $R(p)$ matrisine ait sütunlar tarafından gerilen $\mathbb{R}^S$ uzayının alt uzayıdır.

2. Piyasada $\sum_{h=1}^{H}(x_h - e_h) = 0$ arz-talep eşitliği sağlanır.

3. $\sum_{h=1}^{H} b_h = 0$ finans piyasasında arz veya talep fazlalığı yoktur.

23 numaralı dipnottan hareketle, $\begin{bmatrix} -q \\ R(p) \end{bmatrix} \cdot a > 0$ için öyle bir $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_S) \in \mathbb{R}^{S+1}_{++}$ vektörü vardır ki $\tilde{\beta} = \left(\dfrac{\beta_1}{\beta_0}, \cdots, \dfrac{\beta_S}{\beta_0}\right) \in \mathbb{R}^S_{++}$ için $q = \left(\dfrac{\beta_1}{\beta_0}, \cdots, \dfrac{\beta_S}{\beta_0}\right) \cdot R(p)$ eşitliği sağlanır.[23] Bu vektörünü, denge fiyat düzeyi ile Hadamard çarparsak, elde edeceğimiz yeni fiyat vektörü de $\tilde{\beta} \square \overline{p} = p \in \mathbb{R}^{C(S+1)}_{++}$ denge fiyat vektörü olacaktır. Bu işlem gelecek döneme ait fiyat vektörlerinin tekrardan düzenlenmesine olanak sağlamakta ayrıca aşağıda gösterileceği gibi Tanım 2.2.6.1'de verilen denge şartlarını, $h = 1$ numaralı hane halkını Walrascı tüketici olarak, geri kalan hane halklarını Walrascı ve (1) numaralı kısıt dahilin de inceleyebilmemizi sağlamaktadır. $h = 1$ numaralı hane halkına ait optimizasyon problemini Lagrange fonksiyonu dahilinde yazarsak,

$$\mathcal{L}(x_1, b_1, \lambda_1) = u_1(x_1) - \lambda_1^0 \left[\overline{p}^0 x_h^0 - \overline{p}^0 e_h^0 + \overline{q} b_1 \right] - \sum_{s=1}^{S} \lambda_1^s \left[\overline{p}^s x_1^s - \overline{p}^s e_1^s + \overline{p}^s R_s b_1 \right] \tag{5}$$

İlgili eşitliği $\dfrac{1}{\lambda_1^0}$ ile çarparsak,

$$\mathcal{L}(x_1, b_1, \lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1^0} u_1(x_1) - \left[\overline{p}^0 x_h^0 - \overline{p}^0 e_h^0 + \overline{q} b_1 \right] - \sum_{s=1}^{S} \frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^0} \left[\overline{p}^s x_1^s - \overline{p}^s e_1^s + \overline{p}^s R_s b_1 \right] \tag{6}$$

[23] Gale 1960 s:49, Husseini, S.Y., J. Lasry, M.J.P. Magill, Existence of Equilibrium with Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Vol.19, 1990, s.44.

elde edilir. Denklemin en sağ kısmındaki $-\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^0}\left[\overline{p}^s x_1^s - \overline{p}^s e_1^s + \overline{p}^s R_s b_1\right]$ ifadesini açık şekilde $-\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^0}\left(\overline{p}^s x_1^s - \overline{p}^s e_1^s\right) - \sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^0}\overline{p}^s R_s b_1$ yazalım. $-\sum_{s=1}^{S}\frac{\lambda_1^s}{\lambda_1^0}\overline{p}^s R_s b_1$ kısmı $\overline{q}b_1$ değerine eşittir. Bu ifadeyi (6) numaralı denkleme yerleştirirsek, $h=1$ numaralı hane halkına ait optimizasyon probleminin indirgenmiş biçimini elde ederiz.

$$\mathcal{L}\left(x_1, b_1, \lambda_1\right) = \frac{1}{\lambda_1^0}u_1\left(x_1\right) - \sum_{s=0}^{S}\tilde{\lambda}\left[\overline{p}^s x_1^s - \overline{p}^s e_1^s\right] \quad (7)$$

[24]

Yukarıdaki sonuçtan hareket ederek Tanım 2.2.6.1'in 1 numaralı maddesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz ki buna göre $h=1$ numaralı hane halkı Walrascı tüketici olmaya indirgenmiş olup sadece $px_1 = pe_1$ eşitliğini sağlamaktadır. $h \neq 1$ için hem Walrascı kısıtı hem de dönemler arası optimizasyon problemi için verilen

$$\max_{(x_h, b_h)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times\mathbb{R}^I} u_h\left(x_h\right)$$

$$\text{kısıt} \qquad -\Phi\left(p\right)\left(x_h - e_h\right) + \begin{bmatrix} -q \\ R\left(p, y\right)\end{bmatrix} b_h = 0$$

şartını sağlamak zorundadır.

[24] $\tilde{\lambda} = \left(1, \frac{\lambda_1^1}{\lambda_1^0}, \cdots, \frac{\lambda_1^S}{\lambda_1^0}\right)$

$$
\begin{cases}
h=1 & \begin{cases} \max\limits_{x_h \in \mathbb{R}^{C(S+1)}_{++}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \qquad p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \end{cases} \\
h \neq 1 & \begin{cases} \max\limits_{x_1 \in \mathbb{R}^{C(S+1)}_{++}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \qquad \begin{array}{l} p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \\ \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix} \left(x_h^1 - e_h^1\right) \in \left\langle R(p) \right\rangle \end{array} \end{cases}
\end{cases}
\tag{8}
$$

$\text{Rank}\left(R(p)\right)$, fiyat vektöründeki değişime göre $r \in \{0, \cdots, I\}$ değerini alacaktır. Bu özellik piyasada denge noktalarının var olmaması gibi bir tehlikeye sebep olabilmektedir.[25] Bu sorundan kurtulmak için her fiyat seviyesi için $\left\langle R(p) \right\rangle$ alt vektör uzayını kapsayacak bir alt vektör uzayı oluştururuz ki bu noktada $\mathbb{R}^S$ uzayı içinde tüm I boyutlu alt vektör uzaylarının kümesi olarak Grassmann manifoldları kullanılır. Yeni varsayım altında $\mathcal{E} = (e, y) \in \mathbb{R}^{HC(S+1)}_{++} \times \mathbb{R}^{CSI}_{++}$ ekonomisi için aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 2.2.6.2: $(x, p, L) \in \mathbb{R}^{HC(S+1)}_{++} \times \mathbb{R}^{C(S+1)}_{++} \times G_{I,S}$ vektörü aşağıdaki şartları sağlarsa, veri $\mathcal{E} = (e, y) \in \mathbb{R}^{HC(S+1)}_{++} \times \mathbb{R}^{CSI}_{++}$ ekonomisi için psödo-denge olarak adlandırılır.

---

[25] Hart, O., On the Optimality of Equilibrium When the Market Structure is Incomplete, **Journal of Economic Theory**, Cilt.11, 1975, s. 418-443, Magill, M., W. Shafer, **Theory of Incomplete Markets**, , Cambridge , MIT Press, 1996, Geanakoplos, J., An Introduction to General Equilibrium with Incomplete Asset Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 19, 1990, s. 1-38, Nagata, Ryo. 2004. **Theory of Regular Economies**. Singapore: World Scientific.

1. Veri $(p, L, e) \in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} \times G_{I,S} \times \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ için x_h vektörü aşağıdaki kısıt altındaki optimizasyon problemi için çözümdür.

$$\begin{cases} h = 1 & \begin{cases} \max\limits_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \qquad p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \end{cases} \\ h \neq 1 & \begin{cases} \max\limits_{x_1 \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \qquad \begin{array}{l} p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \\ \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix} (x_h^1 - e_h^1) \in \langle R(p) \rangle \subseteq L \in G_{I,S} \end{array} \end{cases} \end{cases}$$

2. Piyasada $\sum_{h=1}^{H} (x_h - e_h) = 0$ denge şartı sağlanır.

3. $R(p, y) = \begin{pmatrix} p^1 y^{11} & \cdots & p^1 y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^S y^{S1} & \cdots & p^S y^{SI} \end{pmatrix} \subseteq L \in G_{I,S}$

(3) numaralı madde de $R(p, y) = \begin{pmatrix} p^1 y^{11} & \cdots & p^1 y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^S y^{S1} & \cdots & p^S y^{SI} \end{pmatrix} = L \in G_{I,S}$ eşitliği geçerli ise ilgili ekonomi etkin olarak adlandırılır.

Bölüm 1'de Grassmann manifoldlarının Stiefel manifoldlarının orbit uzayı olduğu gösterilmişti. İdeal değerli kohomoloji indeks teorisinin uygulanabilmesi aynı zamanda bölüm 3'de gösterilecek olan denge manifoldlarının spektral diziler yardımı ile kohomoloji gruplarının hesaplanabilmesi için $G_{I,S}$ Grassmann manifoldunu, Stiefel manifoldu cinsinden ifade etmek büyük kolaylık sağlayacaktır. Bunun için her $L \in G_{I,S}$ elemanı için aşağıda gösterildiği şekliyle yeniden parametrizasyona gerek vardır.

$[A]_{(S-I)\times S}$ ortonormal matrisi için $\langle A^t \rangle$ ifadesi $\mathbb{R}^S$ uzayının $(S-I)$ boyutlu alt vektör uzayını meydana getirecektir. $\mathbb{R}^S = \langle A^t \rangle \oplus \langle A^t \rangle^{\perp}$ direkt toplamından $\langle A^t \rangle^{\perp}$ uzayının I boyutlu olduğunu elde ederiz. $V_{(S-I)}(\mathbb{R}^S) = \{A \in \mathbb{R}^{(S-I)S} : AA^t = I_{(S-I)}\}$ kümesi $(S-I)\times S$ tipinde tüm ortonormal matrislerin kümesidir ve yukarıda tanımlanan yöntem yardımı ile tüm $\mathbb{R}^I$ boyutlu vektör uzaylarını meydana getirirler. Ancak birden fazla Stiefel noktası aynı vektör uzayını meydana getireceği açıktır. Aynı alt vektör uzayını meydana getiren Stiefel noktalarını $O(S-I)$ ortogonal matrisi ile kümeleyebiliriz. Buna göre her $g \in O(S-I)$ için $\langle A^t \rangle = \langle (gA)^t \rangle$ eşitliği geçerli olur. Bu yeni parametrizasyon yardımı ile aşağıdaki tanımı verebiliriz.[26]

Tanım 2.2.6.3: $(x, p, Q) \in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} \times \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times V_{(S-I)}(\mathbb{R}^S)$ vektörü aşağıdaki şartları sağlarsa, veri $\mathcal{E} = (e, y) \in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} \times \mathbb{R}_{++}^{CSI}$ ekonomisi için Stiefel Manifoldu üzerinde tanımlı psödo-denge olarak adlandırılır.

$$1.\quad \begin{cases} h=1 & \begin{cases} \max\limits_{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \quad p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \end{cases} \\ h \neq 1 & \begin{cases} \max\limits_{x_1 \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}} u_h(x_h) \\ \text{kısıt} \quad \begin{array}{l} p^0 x_h^0 = p^0 e_h^0 \\ \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix} (x_h^1 - e_h^1) \in \langle R(p) \rangle \subseteq \langle Q^t \rangle^{\perp} \end{array} \end{cases} \end{cases}$$

[26] Husseini, **a.g.e.** ,s: 47.

$\left(p,Q,e\right)\in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)\times \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ için x_h vektörü kısıt altında optimizasyon problemi için çözümdür.

2. Piyasada $\sum_{h=1}^{H}\left(x_h-e_h\right)=0$ denge şartı sağlanır.

3. $R\left(p,y\right)=\begin{pmatrix} p^1y^{11} & \cdots & p^1y^{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p^Sy^{S1} & \cdots & p^Sy^{SI} \end{pmatrix}\subseteq\left\langle A^t\right\rangle^{\perp}\in V_I\left(S\right)$

$\mathcal{E}=\left(e,y\right)\in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}\times \mathbb{R}_{++}^{CSI}$ ekonomisinin denge durumu, mal değiş-tokuşlarının gerçekleştiği piyasalarda ve finansal piyasalarda incelenir. Buradaki amaç her iki piyasanın da dengede olduğunu göstermektir. Bu koşul sağlandığı durumda $\mathcal{E}=\left(e,y\right)$ ekonomisinin dengede olduğunu söyleyebiliriz.

$$\begin{cases} F_1\left(p,pe_1\right)=\underset{x_1\in\left\{x_1\in\mathbb{R}^{C(S+1)}:p\left(x_h-e_h\right)=0\right\}}{\arg\max}u_1\left(x_1\right) \\ F_{h:h\neq 1}\left(p,Q,e_h\right)=\underset{x_h\in\left\{x_h\in\mathbb{R}^{C(S+1)}:\left\{\begin{matrix} x_1\in p^0x_h^0=p^0e_h^0 \\ \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix}\left(x_h^1-e_h^1\right)\in\left\langle R\left(p\right)\right\rangle\subseteq\left\langle Q^t\right\rangle^{\perp} \end{matrix}\right.\right\}}{\arg\max}u_h\left(x_h\right) \end{cases} \tag{9}$$

fonksiyonlarından hareketle, değiş tokuş piyasasında tanımlı toplam talep fazlası fonksiyonunu aşağıda ki şekilde ifade edilir.

$$Z\left(p,Q,e\right)=F_1\left(p,pe_1\right)-e_1+\sum_{h=2}^{H}F_h\left(p,Q,e_h\right)-e_h \tag{10}$$

Tanım2.2.6.4: $\Omega=\left\{\left(p,Q,e\right)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)\times\mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}:Z\left(p,Q,e\right)=0\right\}$ sıfırlar kümesi mal piyasalarında denge manifoldudur.

Ω kümesinin boş olmadığını iktisat literatüründe çeşitli matematiksel yöntemlerle gösterilmiştir. Bu çalışmada ideal değerli kohomoloji indeks teorisi yardımı ile ilgili kümenin boş olmadığı ispatlanacaktır.

$p\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ kesin pozitif fiyat vektörlerini, $\mathbb{R}^{C(S+1)}$ uzayına ait vektörlerin orbit uzayı olarak yazabiliriz. $O\left(C\left(S+1\right)\right)$ Lie grubunun, $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix}\mathbb{Z}_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{Z}_2\end{pmatrix}_{C(S+1)\times C(S+1)}:\mathbb{Z}_2=\{-1,1\}\right\}$ alt grubu için $\Xi_p=\left\{g\cdot p\middle|g\in\Gamma\right\}$ kümesi $p\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ vektörünün denklik sınıfını meydana getirmekte ve $\bigcup_{p\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}}\Xi_p=\left\{g\cdot p\middle|g\in\Gamma\right\}=\mathbb{R}^{C(S+1)}$ eşitliği sağlanmaktadır. Her denklik sınıfını $\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ kümesindeki bir vektörle ifade edebileceğimizden, $\mathbb{R}^{C(S+1)}/\Gamma=\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ eşitliğini yazabiliriz.

Lemma 2.2.6.1: $\overset{\circ}{\mathbb{D}^n}$ açık yuvar ve $a\in\mathbb{S}^n$ vektörü için $\overset{\circ}{\mathbb{D}^n}\approx\mathbb{S}^n-\{a\}$ homeomorfizması vardır. $\xi:\overset{\circ}{\mathbb{D}^n}\xrightarrow{y/(1-\|y\|)}\mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlı dönüşüm homeomorfizma olduğundan, $\mathbb{S}^n-\{a\}\approx\mathbb{R}^n$ geçerlidir. $\mathbb{R}^n$'e $\{\infty\}$ ekleyerek tek nokta kompaklaştırması gerçekleştirir ve $\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}\approx\mathbb{S}^n$ homeomorfizmasını oluşturabiliriz.

Verilen lemma yardımı ile $\mathbb{R}^{C(S+1)}$'e genişlettiğimiz fiyat uzayını, $\mathbb{S}^{C(S+1)}$ küresine taşıyabiliriz. (10) numaralı denklemle uyumluluk açısından aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$\theta : \mathbb{S}^{C(S+1)} \times \mathbb{S}^{C(S+1)} \xrightarrow{\sqrt{\tilde{p} \square \tilde{p}}} \mathbb{S}^{C(S+1)} \tag{11}$$

Yukarıda tanımlı fonksiyonun küre üzerinde ki her vektörü $\mathbb{S}^{C(S+1)}_{++}$'e taşıdığı açıktır.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{C(S+1)} \cup \{\infty\} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{S}^{C(S+1)} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Lambda"'] & \mathbb{S}^{C(S+1)} \times \mathbb{S}^{C(S+1)} \arrow[d, "\theta"] \\
& \mathbb{R}^{C(S+1)} \cup \{\infty\} & \mathbb{S}^{C(S+1)} \arrow[l, "Z_{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.2

$p = \left(p_1, \cdots, p_{C(S+1)}\right) \in \mathbb{R}^{C(S+1)}$ fiyat vektörü verilsin. $j \in \{1, \cdots, C(S+1)\}$ indislerinden en az biri için $p_j = 0$ gerçekleşirse toplam talep fazlasının norm değeri sonsuza yaklaşacaktır. Bu ifade bize, klasik fiyata bağlı talep yapısını modelimize katmamızı sağlar.

$\Lambda = Z_{\varphi} \circ \theta \circ \Delta$ dönüşümünden Γ eş-değişim özelliğini sağlayacak dönüşümü aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

$$\tilde{\Pi} : \Gamma \times \mathbb{S}^{C(S+1)} \xrightarrow{\tilde{\Pi}(gx) = g \cdot \Lambda(x)} \mathbb{R}^{C(S+1)} \tag{12}$$

$\tilde{\Pi}(gx) = g \cdot \Lambda(x) = g \cdot \tilde{\Pi}(x)$ özelliği, $\tilde{\Pi}$ eş değişim dönüşümünün Γ eş yapılı olduğunu göstermektedir. Çalışmanın bu aşamasından sonra $O\left(C(S+1)\right)$ Lie grubunun, $\hat{\Gamma}=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}_{C(S+1)\times C(S+1)},\begin{pmatrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{pmatrix}_{C(S+1)\times C(S+1)}\right\}\cong\mathbb{Z}_2$ alt Lie grubu ile çalışılacaktır.

$Z(p,Q,e)=F_1(p,pe_1)-e_1+\sum_{h=2}^{H}F_h(p,Q,e_h)-e_h$ dönüşümünde finansal varlık getiri uzayını temsil eden Stiefel noktasını ve hane halklarına ait mal vektörünü (Q,e) veri olarak alırsak $Z_{(Q,e)}:\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\to\mathbb{R}^{C(S+1)}$ dönüşümünün sıfırlar kümesi mal piyasasını dengeye getiren fiyat vektörü olacaktır. Aşağıdaki teoremde, ideal değerli kohomoloji indeks teorisi sonuçları kullanılarak $\Omega=\left\{(p,Q,e)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times V_{(S-I)}(S)\times\mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}:Z(p,Q,e)=0\right\}$ kümesinin boş olmadığı gösterilecektir.

Bunun için $\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ üzerinde tanımlı fiyat vektörünü Şekil 2.1 deki gibi homeomorf olduğu $\mathbb{S}_{++}^{C(S+1)}$ kısma taşımamız büyük kolaylık sağlayacaktır. $\overline{Z}_{(Q,e)}(p)$, $\mathbb{S}^{C(S+1)}$ üzerinde tanımlı ve $\mathbb{S}_{++}^{C(S+1)}$ tanım kümesi kısıtı altında $Z_{(Q,e)}(p)$ fonksiyonuna eşit olan diğer bir ifade ile $\overline{Z}_{(Q,e)}(p)\Big|_{\mathbb{S}_{++}^{C(S+1)}}\equiv Z_{(Q,e)}(p)$ özelliğini sağlayan Γ-eş değişim dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathbb{S}_{++}^{C(S+1)}$ üzerinde tanımlı Γ-eş değişim özelliğine sahip olan $\overline{Z}_{(Q,e)}(p)$ dönüşümünün sıfırlar kümesinin boş olmaması gösterildği taktirde $Z_{(Q,e)}(p)$ fonksiyonunun da sıfırlar kümesinin boş olmadığı sonucuna ulaşılmış olunur.

Teorem 2.2.6.1: $\mathbb{Z}_2$ eş- değişim yapılı $Z_{(Q,e)}(p)$ dönüşümü verilsin $Z_{(Q,e)}:\mathbb{Z}_2\times\mathbb{S}^{C(S+1)}\to\mathbb{R}^{C(S+1)}$. İlgili dönüşümün sıfırlar kümesi boş değildir $\left(Z_{(Q,e)}{}^{-1}(0)\neq\varnothing\right)$.

İspat: İlgili ispat Teorem 2.2.1.3'ün özel bir durumunu oluşturmaktadır. $Z_{(Q,e)}:\mathbb{Z}_2\times\mathbb{S}^{C(S+1)}\to\mathbb{R}^{C(S+1)}$ ifadesini $Z_{(Q,e)}:\mathbb{Z}_2\times V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)\to\mathbb{R}^{C(S+1)}$ şeklinde yazabiliriz.

$\mathrm{Ind}^{O(1)}\ Z_{(Q,e)}^{-1}\left(T=\left\{A\in\mathbb{R}^{C(S+1)}:\mathrm{Rank}\left[A\right]<1\right\}\right)\cdot J\left(1,C\left(S+1\right)-1\right)\subset\mathrm{Ind}^{O(1)}\ V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)$ idealinin $H^*BO(1)$ kohomoloji halkasının alt halkası olduğu Teorem 2.2.1.1 yardımı ile elde edilir. w_j ve $\overline{w}_j$ sırası ile $H^*BO(1)$ kohomoloji halkasının j. Stiefel-Whitney ve dual Stiefel-Whitney karakteristik sınıflarıdır. $\beta=0$ olarak alalım. (1) numaralı eşitlikten $\mathrm{Ind}^{O(1)}V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)=J\left(1,C\left(S+1\right)\right)$ idealinin, derecesi $C\left(S+1\right)$'den büyük olan Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları tarafından oluşturulduğu bilinmektedir. Böylelikle $\left(w_1\right)^{\beta}\cdot\overline{w}_{C(S+1)}\notin\mathrm{Ind}^{O(1)}V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)$ sonucuna ulaşılır. $\overline{w}_{C(S+1)}\in J\left(1,C\left(S+1\right)-1\right)$ idealinin elemanı olduğundan ve $\mathrm{Ind}^{O(1)}\ Z_{(Q,e)}^{-1}\left(T\right)\cdot J\left(1,C\left(S+1\right)-1\right)\subset\mathrm{Ind}^{O(1)}\ V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)$ özelliğinden hareketle $\left(w_1\right)^{\beta}\notin\mathrm{Ind}^{O(1)}\ \tilde{\Pi}^{-1}\left(T\right)$ sonucuna varılır.

Yukarıdaki özellikler sayesinde $cup_1\left(Z_{(Q,e)}^{-1}\left(0\right)/O\left(1\right)\right)\geq\beta=0$ elde edilir. $cup_1\left(Z_{(Q,e)}^{-1}\left(0\right)/O\left(1\right)\right)$ negatif olmaması, $Z_{(Q,e)}$ dönüşümünün sıfırlar kümesinin boş olmadığını gösterir. □

Sonuç: $\varphi\left(p\right)\in Z_{(Q,e)}^{-1}\left(0\right)$ için $Z_{(Q,e)}$ dönüşümü Γ eş değişim yapılı olmasından hareketle $Z_{(Q,e)}\left(g\cdot\varphi\left(p\right)\right)=g\cdot Z_{(Q,e)}\left(\varphi\left(p\right)\right)=0$ eşitliği elde edilir. Böylece $\Xi_{\varphi(p)}=\left\{g\cdot\varphi\left(p\right)\middle|g\in\Gamma\right\}$ kümesi sıfırlar kümesine aittir. $\varphi^{-1}\big|_{\Xi_{\varphi(p)}}\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}$ boş olmadığından, $Z_{(Q,e)}:\mathbb{R}^{C(S+1)}\to\mathbb{R}^{C(S+1)}$ için denge fiyat vektörü vardır. □

Yukarıdaki teoremde, hane halklarına ait mal kümesi ve piyasa fiyatı veri olarak kabul edilirse, dengeyi sağlayacak $Q \in V_{(S-I)}(S)$ noktasının var olup olmadığını inceleyebilmek için $Z_{(Q,e)}(p)$ sürekli fonksiyonu için yapılan Γ-eş değişim dönüşümünün $Z_{(p,e)}(Q)$ için de yapılması gerekmektedir. Bunun sonuç için aşağıdaki teorem büyük önem taşımaktadır.

Teorem 2.2.6.2: M ve N aynı boyutlu ve sınırlara sahip olmayan C^2 sınıfından manifoldlar için bu iki manifold arasında tanımlanan $M \xrightarrow{f,g} N$ fonksiyonları aşağıdaki dört özelliği sağlıyorsa $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ 'dir.

1. $f \in C^0$ ve $g \in C^1$ için
2. $y \in N$ için $A = \{x \in M : g(x) = y\}$ kümesinin elemanları, g fonksiyonunun Jacobian matrisindeki değerlerinin rankı, N manifoldunun boyutuna eşit ise (*Regüler değer şartı*)
3. $\mathrm{Mod}_2\left(g^{-1}(y)\right) \equiv 1$ ise
4. f ve g fonksiyonları arasında tanımlanan sürekli H homotopi fonksiyonunun $y \in N$ için $H^{-1}(y)$ görüntüsü kapalı ve sınırlı bir küme ise

İspat: [Villanacci (2002), s: 199-200.]

Teorem 2.2.6.3: $Z_{(p,e)}(Q) : O(S-I) \times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right) \to \mathbb{R}^{C(S+1)}$ dönüşümü $O(S-I)$ eş değişim yapılı için sıfırlar kümesi boş değildir $\left(Z_{(p,e)}{}^{-1}(0) \neq \varnothing\right)$.

İspat: $O(1,\cdots,1) \subset O(S-I)$ alt Lie grubu ve $f : V_{(1,\cdots,1)}\left(\mathbb{R}^{S}\right) \to_{O(1,\cdots,1)} \mathbb{R}^{\lambda} \times \cdots \times \mathbb{R}^{\lambda}$ dönüşümünü alalım. Teorem 2.2.6.1'in ispatından $\bigotimes_{r=1}^{S-I} w_1(r)^{I+r-1} \notin \operatorname{Ind}^{O(1,\cdots,1)} f^{-1}\left(T_1 \times \cdots \times T_{(S-I)}\right) = \operatorname{Ind}^{O(1,\cdots,1)} f^{-1}(0)$ sonucu $T_i = \left\{ A \in \mathbb{R}^{\lambda} \middle| \operatorname{Rank} \leq 0 \right\}$ için elde edilir ki bu sonuç $H^{*}BO(1)$ kohomoloji halkasının $(S-I)$ tanesinin tensör çarpımının alt halkasını oluşturur.

$$(w)^{a} = \left(\bigotimes_{r=1}^{S-I} w_1(r) \right)^{a} \notin \operatorname{Ind}^{O(1,\cdots,1)} f^{-1}\left(T_1 \times \cdots \times T_{(S-I)}\right) = \operatorname{Ind}^{O(1,\cdots,1)} f^{-1}(0)$$

ifadesinde $a = I - \lambda$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(0)/O(1,\cdots,1) \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & & BO(1) \times \cdots \times BO(1) \arrow[d, "\varepsilon"] \\
f^{-1}(0)/O(S-I) \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_2"'] & & BO(S-I) \\
f^{-1}\left(\Psi_1 = \left\{ A \in \left(\mathbb{R}^{\lambda}\right)^{(S-I)} \middle| \operatorname{Rank} A < 1 \right\} \right) / O(S-I) \arrow[urr, "\alpha_3"] & &
\end{tikzcd}$$

α_1, α_2 ve α_3 morfizmaları sınıflandırma β_1 ve ε morfizmaları $O(1,\cdots,1) \subset O(k)$ içerme, β_2 ise özdeşlik dönüşümleridir. $w_{(S-I)} \in H^{*}BO(S-I)$, $(S-I)$. Stiefel-Whitney karakteristik sınıfı için $H^{*}(\varepsilon)\left(w_{(S-I)}\right) = \bigotimes_{r=1}^{S-I} w_1(r)$ elde edilir.

$$H^*\left(\alpha_1^*\right)\circ H^*\left(\varepsilon^*\right)\left(w^a_{(S-I)}\right)=H^*\left(\alpha_1^*\right)\left(\left(\bigotimes_{r=1}^{S-I} w_1(r)\right)^a\right)\neq 0$$ eşitsizliğinden

hareketle, $$f^{-1}\left(\Psi_1=\left\{A\in\left(\mathbb{R}^{\lambda}\right)^{(S-I)}\middle|\text{Rank } A<1\right\}\right)/O(S-I)\supset H^*\left(\alpha_3^*\right)\left(w^a_{(S-I)}\right)\neq 0$$

sonucu elde edilir.

Böylece $$cup_k\left(f^{-1}\left(\Psi_1=\left\{A\in\left(\mathbb{R}^{\lambda}\right)^{(S-I)}\middle|\text{Rank } A<1\right\}\right)/O(S-I)\right)\geq I-\lambda$$

sonucuna varılır. □

Son iki teoremde, üç değişkenden iki tanesi dışsal olarak verilmiş, buna bağlı olarak sıfır eşitliğini sağlayan üçüncü değişkenin varlığı incelenmiştir. Aşağıdaki teorem, mal piyasasında hane halklarına ait mal kümesi veri iken $Z_e(p,Q)=0$ eşitliğini sağlayacak (p,Q) sıralı ikilisinin varlığını araştırmaktadır.

Teorem 2.2.6.4: $\Theta: O\left(1,(S-I)\right)\times V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)\to \mathbb{R}^{\lambda_1}\times\left(\mathbb{R}^{\lambda_2}\right)^{(S-I)}$

eş değişim dönüşümünü $\lambda_1+\lambda_2(S-I)=C(S+1),\, 0\leq\lambda_1<C(S+1)+1$ ve $0\leq\lambda_2<S$ için yukarıdaki teoremlerde ki şekliyle tanımlayalım. $cup_1\left(f^{-1}(T_1\times T_2)/O\left(1,(S-I)\right)\right)\geq C(S+1)+1+S-\sum_{i=1}^{2}\max\{k_i,l_i+1\}\geq 0$ ifadesi $T_i=\left\{A\in\left(\mathbb{R}^{\lambda_i}\right)^{k_i}\middle|\text{Rank } A<k_i\right\}$ varsayımı altında elde edilir.

İspat: Teorem 2.2.1.1, teorem 2.2.1.1 ve lemma 2.2.1.1'den hareketle $\text{Ind}^{O(1,(S-I))}\Theta^{-1}(T_1\times T_2)\cdot\left[J(1,\lambda_1-1)\otimes J\left(S-I,\lambda_2-(S-I)\right)\right]\subset \text{Ind}^{O(1,(S-I))}V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)$ ifadesi $H^*\left(BO(1)\right)\otimes H^*\left(BO(S-I)\right)$ kohomoloji halkalarının tensör çarpımı tarafından kapsanmaktadır.

$$a_1 = C(S+1)+1-\max\{1,\lambda_1+1\} \qquad \text{ve} \qquad a_2 = S-\max\{S-I,\lambda_2-(S-I)+1\}$$

katsayıları için $\bigotimes_{i=1}^{2} w_1(i)^{a_i}\ \overline{w}_{l_i-k_i+1}(i) \notin \operatorname{Ind}^{O(1,(S-I))} V_1\left(\mathbb{R}^{C(S+1)+1}\right)\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right)$ elde edilir. $w_1(1)^{a_1}\ \overline{w}_{l_1-k_1+1}(1)\otimes w_1(2)^{a_2}\ \overline{w}_{l_2-k_2+1}(2) \in \left[J(1,\lambda_1-1)\otimes J(S-I,\lambda_2-(S-I))\right]$ elemanı olduğundan $\bigotimes_{i=1}^{2} w_1(i)^{a_i} \notin \operatorname{Ind}^{O(1,(S-I))}\Theta^{-1}(T_1\times T_2)$ sonucu elde edilir. Bu sonuçlardan hareketle $cup_1\left(\Theta^{-1}(T_1\times T_2)/O(1,(S-I))\right) \geq C(S+1)+1+S-\sum_{i=1}^{2}\max\{k_i,l_i+1\} \geq 0$ sonucu elde edilir. □

Yukarıdaki ispatlar yardımı ile $\Omega = \{(p,Q,e) \mid Z(p,Q,e)=0\}$ mal piyasasında her $e \in \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}$ için psödo dengenin varlığı ispatlanmıştır. Finans piyasasında, denge noktalarının varlığı benzer metotlarla ispatlanacaktır.

$M_{m,n} \cong \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ izomorfizmasından $A \in M_{m,n}$ matrisinin çekirdeği, ilgili matrisi ifade eden $L \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ homomorfizmasının çekirdeğine eşittir. $S_n = \{1,\cdots,N\}$ için Σ_n notasyonu S_n üzerinde tanımlı permütasyonların kümesidir ve $\eta \in \Sigma_n$ için $\left[P_\eta\right]_{n,n}$ permütasyon matrisidir.

Lemma 2.2.6.2: $L \in G_{I,S}$ Grassmann manifoldunun bir elemanı için $\ker[I \mid E]P_{\overline{\eta}} = L$ olacak şekilde $\overline{\eta} \in \Sigma_n$ ve $E \in M_{S-I,I}$ matrisi vardır.

İspat: [Villanacci (2002), s: 390.]

Yukarıdaki Lemma yardımı ile Tanım 2.2.6.2’de ki $\begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix}\left(x_h^1-e_h^1\right) \in L \in G_{I,S}$ ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\ker\left[I \mid \psi_\eta(L)\right]\cdot P_\eta \begin{pmatrix} p^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p^S \end{pmatrix}\left(x_h^1 - e_h^1\right) = 0 \quad (14)$$ [27]

Tanım 2.2.6.3 ile birlikte Grassmann manifoldlarının elemanlarını Stiefel manifoldları yardımı ile elde edilebileceği gösterilmişti. $A \in \mathbb{R}^{(S-I)S}$ ve $A \in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right)$ için $\dim\left\langle A^t\right\rangle^\perp = I$ olduğu bilinmektedir. $g \in O(S-I)$ için $\left\langle A^t\right\rangle^\perp = \left\langle gA^t\right\rangle^\perp = L$ olarak alabileceğimiz $A \in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right)$ bulunmaktadır. Bu ifadeyi (14) numaralı eşitliğe yazarsak Stiefel manifoldları için ilgili tanımı yapmış oluruz.

Tanım 2.2.6.5: Sıfırlar kümesi finans piyasası için denge manifoldu oluşturur $\Upsilon = \left\{(p,Q,Y) \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right) \times M_{S,I}(\mathbb{R}) \middle| \left[I \mid \psi_\eta\left(\left\langle Q^t\right\rangle^\perp\right)\right] P_\eta \cdot R(p,Y) = 0\right\}$.[28]

Veri hane halkı mal vektörü için piyasayı dengeye getirecek (p,Q) çiftinin varlığı Teorem 2.2.6.3'de gösterilmişti. Mal piyasasında bu denge çiftini veri olarak alırsak finans piyasasında denge $Y \in M_{S,I}(\mathbb{R})$ varlığı, veri (e,Y) çifti için piyasayı dengeye getirecek (p,Q) çiftinin varlığını ispatlar.

$Y \in M_{S,I}(\mathbb{R})$: Rank $Y = I$ matrisini, Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu ile sütunları ortonormal vektörler olan matrislere döndürebiliriz. Böylece $M_{S,I}(\mathbb{R})$ kümesinin rankı I olan elemanlarını $V_I\left(\mathbb{R}^S\right)$ Stiefel manifolduna göndermiş oluruz. $\breve{Y} \in V_I\left(\mathbb{R}^S\right)$, $Y \in M_{S,I}(\mathbb{R})$ matrisinin Gram-Schmidt ortonormalleştirmesi için Tanım 2.2.6.5'i bu tabanda yazarsak $\Upsilon = \left\{\left(p,Q,\breve{Y}\right) \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right) \times V_I\left(\mathbb{R}^S\right) \middle| \left[I \mid \psi_\eta\left(\left\langle Q^t\right\rangle^\perp\right)\right] P_\eta \cdot R\left(p,\bar{G}S\left(\breve{Y}\right)\right) = 0\right\}$

[27] $\psi : G_{I,S} \to M_{S-I,I}$ homeomorfizma dönüşümüdür.

[28] Duffie, D., W. Shafer, Equilibrium in Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 14, 1985, s. 285-300.

elde ederiz. Burada $\overleftarrow{GS}\left(\breve{Y}\right)$ ifadesi Gram- Schmidt ortonormalleştirmesi ile $\breve{Y}\in V_I\left(\mathbb{R}^S\right)$ ortonormal matrisine dönüşen $Y\in M_{S,I}\left(\mathbb{R}\right):\text{Rank } Y=I$ matrislerinin kümesidir.

Yukarıdaki denklemi basitlik amacı ile $\Gamma=\left[I \;\middle|\; \psi_\eta\left(\left\langle Q^t\right\rangle^{\perp}\right)\right]P_\eta\cdot R\left(p,\overleftarrow{GS}\left(\breve{Y}\right)\right)$ şeklinde yazalım.

Teorem 2.2.6.5: $\tilde{\Phi}:O\left(S-I\right)\times V_I\left(\mathbb{R}^S\right)\longrightarrow\mathbb{R}^I$ dönüşümü $O\left(S-I\right)$ eş değişim yapılı için sıfırlar kümesi boş değildir.

İspat: Teorem 2.2.6.2 nin özel bir durumunu oluşturmakta ve ilgili teorem de ki ispat metodu ile sıfırlar kümesinin boş olmadığı elde edilir.

Yukarıdaki teorem yardımı ile finans piyasasında veri $\left(p,Q\right)$ ikilisi için denge $\breve{Y}\in V_I\left(\mathbb{R}^S\right)$ matrisinin varlığı ispatlanmış olmaktadır.

Tanım2.2.6.6: $\Omega=\left\{\left(p,Q,e\right)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right)\times\mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)}:Z\left(p,Q,e\right)=0\right\}$

$$\Upsilon=\left\{\left(p,Q,\breve{Y}\right)\in\mathbb{R}_{++}^{C(S+1)}\times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S\right)\times V_I\left(\mathbb{R}^S\right)\middle|\left[I \;\middle|\; \psi_\eta\left(\left\langle Q^t\right\rangle^{\perp}\right)\right]P_\eta\cdot R\left(p,\overleftarrow{GS}\left(\breve{Y}\right)\right)=0\right\}$$

sırası ile mal ve finans piyasalarına ait denge noktaları kümesini göstersin. Bu durumda $\tilde{\Phi}=\left\{\left(p,Q,e,\breve{Y}\right):\left(p,Q,e\right)\in\Omega,\left(p,Q,\breve{Y}\right)\in\Upsilon\right\}$ kümesi psödo denge manifoldunu meydana getirir[29].

[29] Zhou, Y., Generecity Analysis on the Pseudo-equilibrium Manifold, **Journal Economic Theory**, Cilt. 73, 1997, s. 84.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

LERAY-SERRE SPEKTRAL DİZİLER VE PSÖDO DENGE MANİFOLDUNUN TOPOLOJİSİ

Bu bölümün ilk alt bölümünde kohomoloji tipinde spektral dizilerin tanımı ve yakınsama kriterleri filtrasyon metodu kullanılarak gösterilmiştir. Tanımlar yapılırken üzerine inşa edildiği modül teorisi ve homoloji cebirine ait konular gereksiz uzatmalara sebep olacağı düşüncesinden dolayı verilmemiştir[30]. Daha sonra Serre fibrasyonu tabanlı olarak psödo denge manifoldunun kohomoloji halkasının hesaplanması için Stiefel manifoldlarının spektral dizi çözümlemesi yapılmıştır. İkinci alt bölümde ise mal ve finans piyasalarının her Stiefel manifoldunun her noktası üzerinde tanımlı denge vektörlerinin üzerinde denklik sınıfları kurulmuş ve taban uzayının fiber uzayı ilgili denklik kümesi olarak kabul edilmiştir. Bu durum sayılabilir fiber yapısına sahip taban manifoldları için geçerli olan total uzay kohomoloji halkasının, taban kohomoloji halkasının kendisi ile fiber kardinalitesinde ki sayı değeri kadar çarpımına eşitliği sonucunun uygulanmasına olanak sağlamıştır.

1.6 Spektral Diziler

Tanım 3.1.1: Ab, Abel kategorisi ve $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ ikilisi aşağıdaki özelliklere sahip ise kohomoloji tipinde spektral dizi olarak adlandırılır.

[30] Modül teorisi ile ilgili olarak Blyth, T. S**., Module Theory, An Approach to Linear Algebra**, New York, Claredon Press, 1990, Homoloji Cebiri ile ilgili olarak Weibel, Charles, **An Introduction to Homological Algebra**, Cambridge University Press, 1995, Rotman, Joseph J., **An Introduction to Homological Algebra**, New York, Springer Verlag, 2008.

1. $E_r \in \mathrm{Ab}$
2. $d_r^{p,q} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(E_r^{p,q}, E_{r+1}^{p+r,q-r+1}\right)$
3. $d_r^{p-r,q+r-1} \circ d_r^{p,q} = 0$
4. $H\left(E_r^{p,q}\right) = \ker d_r^{p,q} / \mathrm{im} d_r^{p-r,q+r-1} \cong E_{r+1}^{p,q}$

Yukarıda verilen tanımı aşağıda gösterilen diagram ile ifade edebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
E_{r+1}^{p-r-1,q+1} \arrow[drr] & & & & \\
& E_{r+1}^{p-r,q+r-1} & E_{r+1}^{p,q} \arrow[drr] & E_{r+1}^{p+r,q-r+1} & \\
& & \ker d_r^{p,q} / \mathrm{im} d_r^{p-r,q+r-1} \arrow[u] & & E_{r+1}^{p+r+1,q-r} \\
& & \ker d_r^{p,q} \arrow[u] \arrow[d] & & \\
& E_r^{p-r,q+r-1} \arrow[uuu] \arrow[r, "d"] & E_r^{p,q} \arrow[r, "d"] & E_r^{p+r,q-r+1} \arrow[uuu] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.1

Matematik literatüründe çeşitli metotlar yardımı ile spektral dizi özelliğini sağlayacak yapılar oluşturulabilmektedir. Aşağıda bunlardan biri olan filtrasyon metodu tanımlanacak ve ilgili metodun belli koşullar altında yakınsaklığı gösterilecektir.

Tanım 3.1.2: $\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}}$, objeleri Abel kategorisine ait derecelendirilmiş cebirsel yapıların kategorisi olsun. $F_j : \mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}} \to \mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}}$ funktoru, $H^* \in Obj\left(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}}\right)$ cebirsel yapısını alt cebirsel yapısına dönüştürme özelliğine sahip ise $H^* \supset \cdots \supset \mathcal{F}^n H^* \supset \mathcal{F}^{n+1} H^* \supset \cdots \supset \{0\}$ azalan zincir dizisini elde ederiz. Bu zincir dizisi $H^* \in Obj(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}})$'nin filtrelenmesini meydana getirir.

$H^* \in Obj(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}})$ objesi üzerinde tanımlanan filtreleme ile oluşturulan zincir üzerinde yeni bir filtrelemeyi bölüm funktoru ile elde ederiz. Aşağıdaki diagram derecelendirilmiş cebirsel yapının her indisi için filtrelemesini göstermektedir.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \subset & \mathcal{F}^{p+1} H^{p+1} & \subset & \mathcal{F}^{p} H^{p+1} & \subset & \mathcal{F}^{p-1} H^{p+1} & \subset \cdots \\
d_{p+1,p+q} & \downarrow & d_{p,p+q} & \downarrow & d_{p-1,p+q} & \downarrow & \\
\cdots \subset & \mathcal{F}^{p+1} H^{p} & \subset & \mathcal{F}^{p} H^{p} & \subset & \mathcal{F}^{p-1} H^{p} & \subset \cdots \\
d_{p+1,p+q-1} & \downarrow & d_{p,p+q-1} & \downarrow & d_{p-1,p+q-1} & \downarrow & \\
\cdots \subset & \mathcal{F}^{p+1} H^{p-1} & \subset & \mathcal{F}^{p} H^{p-1} & \subset & \mathcal{F}^{p-1} H^{p-1} & \subset \cdots
\end{array}$$

Şekil 3.2

Her satır üzerinde tanımlayacağımız bölüm işlemi ile oluşturacağımız diziyi aşağıdaki şekilde gösteririz

$$\mathcal{F}^0 H^j / \mathcal{F}^1 H^j \supset \mathcal{F}^1 H^j / \mathcal{F}^2 H^j \cdots \supset \cdots \supset \mathcal{F}^n H^j / \mathcal{F}^{n+1} H^j \supset \cdots \supset \{0\}$$

Basit gösterim açısından $E_0^{p,q} = \mathcal{F}^n H^{p+q} / \mathcal{F}^{n+1} H^{p+q}$ yazarsak, (?) ifadesi genel olarak

$$\cdots \to E_0^{p,q} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q+1} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q+2} \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q+3} \to \cdots \tag{15}$$

şeklinde yazılır. Bu yeni dizinin aşağıdaki şekilde homoloji funktoru altındaki görüntüsünü alırsak

$$\begin{aligned} \cdots \to & \operatorname{Ker}\left(d_0 : E^{p,q+1} \to E^{p,q+2}\right) / \operatorname{Im}\left(d_0 : E^{p,q} \to E^{p,q+1}\right) \\ & \to \operatorname{Ker}\left(d_0 : E^{p,q+2} \to E^{p,q+3}\right) / \operatorname{Im}\left(d_0 : E^{p,q+1} \to E^{p,q+2}\right) \to \cdots \end{aligned}$$

E_1 dizisini elde etmiş oluruz. Bu yapı Tanım 3.1.1'de verilen spektral dizi tanımına uymaktadır. $d_1 \in \operatorname{Hom}\left(E_1^{*,*}, E_1^{*,*}\right)$ morfizması $(1,0)$ dereceli bir yapıdadır. d_1 morfizması altında ki dönüşümler aşağıdaki diagramda verilmiştir.

$$\begin{array}{ccccc} E_1^{1,1} & E_1^{1,2} & E_1^{1,3} & & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & E_1^{2,1} & E_1^{2,2} & E_1^{2,3} \\ & & & \searrow & \searrow & \searrow \\ & & & & E_1^{3,1} & E_1^{3,2} & E_1^{3,3} \end{array}$$

Şekil 3.3

E_1 üzerinde E_0 üzerinde tanımladığımız şekliyle homoloji funktorunu tanımlarsak görüntü kümesi E_2'ye ait dizileri verecektir. $d_2 \in \operatorname{Hom}\left(E_2^{*,*}, E_2^{*,*}\right)$

morfizması $(2,-1)$ dereceli bir yapıdadır. d_2 morfizması altında ki dönüşümler aşağıdaki diagramda verilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc}
E_2^{1,1} & E_2^{1,2} & E_2^{1,3} & & & & \\
& \searrow & \searrow & \searrow & & & \\
& & E_2^{3,0} & E_2^{3,1} & E_2^{3,2} & & \\
& & & \searrow & \searrow & \searrow & \\
& & & & E_2^{5,-1} & E_2^{5,0} & E_2^{5,1}
\end{array}$$

Şekil 3.4

Yukarıda verilen yöntemle hareket edilirse $d_n \in \mathrm{Hom}\left(E_n^{*,*}, E_n^{*,*}\right)$ morfizmasının $(n, n-1)$ dereceden olduğu elde edilir. $E_n^{p,q}$ cebirsel yapısı üst indislerden en az biri sıfırdan küçük ise sıfıra eşittir. Bu yapıdaki spektral diziler birinci bölge spektral diziler olarak adlandırılır.

$\cdots \to E_n^{p-n,q+n-1} \xrightarrow{d_n} E_n^{p,q} \xrightarrow{d_n} E_n^{p+n,q-n+1} \to \cdots$ birinci bölge spektral dizisi için $\min\{p+n, q-n+1\} < 0$ olsun. Bu durumda $E_n^{p+n,q-n+1} = 0$ eşitliği açıktır. $E_n^{p,q} \xrightarrow{d_n} 0$ morfizmasının çekirdeği $E_n^{p,q}$ olacağından, $E_n^{p,q}$ merkezli homoloji grubu kendine izomorf olacaktır. Bu analiz $E_{n+k}^{*,*}$ bölgeleri için tekrarlandıkça aynı izomorfizma değeri elde edilir. Belli bir noktadan sonra aynı izomorfizma değerine sahip olan cebirsel yapılar genel olarak $E_\infty^{*,*}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.3: $\{E_n^{*,*}, d_n\}$ spektral dizisi ve $H^* \in Obj(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}})$ derecelenmiş cebirsel yapı olsun. $H^* \in Obj(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}})$'nin $E_\infty^{p,q} \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q} = E_0^{p,q}\left(H^*\right)$ izomorfizmasını sağlayacak filtrelemesi varsa $\{E_n^{*,*}, d_n\}$ spektral dizisi $H^* \in Obj(\mathrm{Grad}_{\mathrm{Ab}})$'ye yakınsıyor denir.

Teorem 3.1.1 : B yol bağlantılı topolojik uzay ve $F \subset E \xrightarrow{\pi} B$ Serre fibrasyon olsun. F homoloji n-küre için aşağıdaki özelliği sağlayan kesin dizi vardır ve $n = 0 \bmod (2)$ için $2z = 0$ eşitliği geçerlidir.

$$H^k(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[z \in H^{n+1}(B;\mathbb{Z}_2)]{z\cup} H^{n+k+1}(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+k+1}(E;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{q} H^{k+1}(B;\mathbb{Z}_2)$$

İspat: F fibresi homoloji n-küre olduğundan $m = 0, n$ için $H^m(F;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ diğer boyutlar için $H^{j:j\neq m}(F;\mathbb{Z}_2) \cong 0$ olacağı açıktır. $E_2^{p,q} \cong H_p\left(B; H_q(F;\mathbb{Z}_2)\right)$ izomorfizması için $d_{n+1} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+n+1,0}$ dönüşümü sıfır olmayan tek dönüşüm olacaktır ve böylece $E_2 \cong E_3 \cong \cdots \cong E_{n+1}$ ve $E_{n+2} = H(E_{n+1}, d_{n+1}) \cong E_\infty$ izomorfizmaları elde edilir. Bu özelliklerden aşağıdaki kısa tam dizi elde edilir.

$$0 \to E_\infty^{p,n} \to E_2^{p,n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{p+n+1,0} \to E_\infty^{p+n+1,0} \to 0$$

$E_\infty^{p,n} = H^{p+n} / F^{p+1}H^{p+n} \cong H^{p+n} / E_\infty^{p+n,0}$ izomorfizmasından aşağıdaki kısa tam dizi elde edilecektir

$$0 \to E_\infty^{p+n,0} \to H^{p+n} \to E_\infty^{p,n} \to 0$$

Yukarıda tanımlanan her iki kısa tam diziyi aşağıdaki şekliyle birleştiririz.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, dotted] & {} \arrow[d] & & & & \\
& H^{p+n-1} \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & & & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E_\infty^{p-1,n} \arrow[r] & E_2^{p-1,n} \arrow[r] & E_2^{p+n,0} \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & E_\infty^{p+n,0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & & H^{p+n} \arrow[d] \arrow[dr, dotted] & \\
& & & 0 \arrow[r] & E_\infty^{p,n} \arrow[r] \arrow[d] & E_2^{p,n} \\
& & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Böylece $\cdots \to H^{p+n+1} \to E_2^{p-1,n} \to E_2^{p+n,0} \to H^{p+n} \to E_2^{p,n} \to \cdots$ şeklinde tanımlanan tam dizi elde edilmiş olur.

$h \in H^n(F;\mathbb{Z}_2)$ kohomoloji grubunun üreticisi olsun bu durumda $E_2^{*,*} \cong E_{n+1}^{*,*} \cong H^*(B;\mathbb{Z}_2) \otimes [1 \oplus h] \cong \left(H^*(B;\mathbb{Z}_2) \otimes 1\right) \oplus \left(H^*(B;\mathbb{Z}_2) \otimes h\right)$ izomorfizması geçerli olacaktır. $d_{n+1} \in \mathrm{Hom}\left(E_{n+1}^{*,*}, E_{n+1}^{*,*}\right)$ için $d_{n+1}(1 \otimes h) = z \otimes 1$ şeklinde tanımlayalım. Bu özelliği kullanarak aşağıda verilen eşitlik elde edilir.

$$(-1)^{n\deg x} d_{n+1}(x \otimes h) = d_{n+1}\left((1 \otimes h) \cup (x \otimes 1)\right) = d_{n+1}(1 \otimes h) \cup (x \otimes 1) +$$
$$(-1)^n (1 \otimes h) \cup d_{n+1}(x \otimes 1) = (z \otimes 1) \cup (x \otimes 1) = (z \cup x) \otimes 1$$

$E_2^{k,n} = H^k(B;\mathbb{Z}_2) \otimes h$ ve $E_2^{k+n+1,0} = H^{k+n+1,0}(B;\mathbb{Z}_2) \otimes 1$ şeklinde tanımladığımız taktirde teoremde verilen tam dizi elde edilmiş olur. $n = 0 \bmod (2)$ için Leibniz kuralı ve $h \cup h = 0$ özelliğinden hareketle aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$0 = d_{n+1}\left(1\otimes\left(h\cup h\right)\right) = d_{n+1}\left(1\otimes h\right)\cup\left(1\otimes h\right) = \left(z\otimes 1\right)\cup\left(1\otimes h\right) + \left(-1\right)^{n}\left(1\otimes h\right)\cup\left(z\otimes 1\right)$$

$$= 2z\otimes h$$

elde edilir. $h \neq 0$ olduğundan $2z = 0$ sonucuna ulaşılır. □

Psödo denge manifoldunun kohomoloji grubunu Serre spektral dizileri yardımı ile hesaplayabilmek için ilgili manifoldun taban uzayını oluşturan Stiefel manifoldunun kohomoloji grubunu hesaplamak gerekmektedir.

Tanım 3.1.4: H^{*}, R komutatif halkası üzerinde tanımlı dereceli komutatif cebir ve $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ için $\left\{1, x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}\right\}$ elemanları H^{*} için baz elemanı oluşturuyorsa, ilgili elemanlar dereceli komutatif cebirin üreteç sistemini meydana getirmiş olur.

Teorem 3.1.2: H^{*}, R komutatif halkası üzerinde tanımlı dereceli komutatif cebir ve $E_0^{p,q} = F^{n}H^{p+q} / F^{n+1}H^{p+q}$ çift dereceli cebir yapısı birinci bölgede tanımlansın. Eğer $E_0^{*,*}$ cebir yapısı $\left\{\overline{x}_i\right\}$ üreteç sisteminden meydana geliyorsa ve H^{*}'nin $\left\{x_i\right\}$ elemanlarının $E_0^{*,*}$'deki projeksiyonları $\left\{\overline{x}_i\right\}$ elemanlarına denk geliyorsa, $\left\{x_i\right\}$ elemanları H^{*}'nin üreteç sistemini meydana getirmektedir.

İspat: [McClearly, (2002) s: 154.]

Stiefel manifoldlarının kohomoloji halkalarının analizi, psödo denge manifoldunun kohomoloji halkasını hesaplarken kullanılacak önemli sonuçlardan biridir. Aşağıda önce $V_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ tipindeki $\mathbb{Z}_2$ katsayılı Stiefel manifoldunun kohomoloji halkası gösterilecek, daha sonra $\mathbb{Z}_2$ katsayılı $SO\left(n\right)$ Lie grubunun kohomoloji halkası hesaplanacaktır. Son olarak bu iki sonuçtan hareketle $V_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ tipindeki $\mathbb{Z}_2$ katsayılı Stiefel manifoldunun kohomoloji halkası gösterilecektir.

- $H^*\left(V_2\left(\mathbb{R}^n\right),\mathbb{Z}_2\right)$

$\mathbb{S}^{n-2}\subset V_2\left(\mathbb{R}^n\right)\to V_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ Serre fibrasyonuna ait spektral dizinin E_2 terimini $E_2^{*,*}\cong H^*\left(V_1\left(\mathbb{R}^n\right),H^*\left(\mathbb{S}^{n-2}\right)\right)$ şeklinde ifade edebildiğimiz yukarıda gösterilmişti. $E_2^{*,*}$ terimleri arasında sıfır olmayan tek morfizma $d_{n-1}\in \mathrm{Hom}\left(E_2^{0,n-2},E_2^{n-1,0}\right)$ olduğu açıktır.

$\mathbb{S}^{n-1}$ küresi üzerinde tanımlı birim tanjant demetini ve buna bağlı olarak Serre fibrasyonunu $\mathbb{S}^{n-2}\subset T_0\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$ şeklinde kurabiliriz. Bu yeni kurduğumuz fibrasyon ile ilk fibrasyon arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde gösterirsek,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-2} \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d] & \mathbb{S}^{n-2} \arrow[d] \\
V_2\left(\mathbb{R}^n\right) \arrow[r] \arrow[d] & T_0\mathbb{S}^{n-1} \arrow[d] \\
V_1\left(\mathbb{R}^n\right) \arrow[r, "\equiv"] & \mathbb{S}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

Şekil 3.5

$\mathbb{S}^{n-2}\subset V_2\left(\mathbb{R}^n\right)\to V_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ fibrasyonuna ait hesaplamayı $\mathbb{S}^{n-2}\subset T_0\mathbb{S}^{n-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$ fibrasyonuna indirgeyerek yapabileceğimiz ortaya çıkar.

Teorem 3.1.1'den hareketle birim tanjant demetine ait fibrasyonun tam dizisini yazarsak

$$H^0\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)\xrightarrow[z\in H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)]{z\cup -} H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)\to H^{n-1}\left(T_0\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)\to \underbrace{H^1\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)}_{0}\to\cdots$$

elde ederiz. z sınıfı birim tanjant demetinin Euler sınıfıdır.

$n\equiv 0 \bmod (2)$ için Teorem 3.1.1'den $2z=0$ sonucuna ulaşılır. $H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)\cong\mathbb{Z}$ olduğundan $z=0$'dır. Bu sonuçtan hareketle $H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)/\operatorname{im}\left(z\cup -\right)\cong H^{n-1}\left(T_0\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)\cong\mathbb{Z}$ izomorfzması elde edilir.

$n\equiv 1 \bmod (2)$ ve $g\in H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)$ üreteç olsun. Öyle bir $\lambda\in\mathbb{Z}$ sayısı vardır ki $z=\lambda g$ eşitliği sağlanır. $z\in H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}_2\right)$ için $z=0$ olduğu bilindiğinden[31], z Euler sınıfının $g\in H^{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{Z}\right)$ üretecinin çift katı olduğu ve $E_2^{n-1,0}/d_{n-1}\left(E_2^{0,n-2}\right)\cong\mathbb{Z}_2$ sonuçları elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlardan hareketle $\mathbb{Z}$ katsayılı $V_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ Stiefel manifoldunun kohomoloji halkasını

$$H^*\left(V_2\left(\mathbb{R}^n\right),\mathbb{Z}\right)=\begin{cases} n\equiv 1\bmod(2)\begin{cases}\mathbb{Z} & :*=0,2n-3\\ \mathbb{Z}_2 & :*=n-1\\ 0 & :\text{diğer}\end{cases}\\ n\equiv 0\bmod(2)\begin{cases}\mathbb{Z} & :*=0,n-2,n-1,2n-3\\ 0 & :\text{diğer}\end{cases}\end{cases}$$

[31] Aguilar, **a.g.e.** , s. 233.

şeklinde tanımlarız. Evrensel katsayı teoremi[32] yardımıyla $H^*\left(V_2\left(\mathbb{R}^n\right),\mathbb{Z}_2\right)$'ye ait kohomoloji halkası aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$H^*\left(V_2\left(\mathbb{R}^n\right),\mathbb{Z}\right)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 : * = 0, n-2, n-1, 2n-3 \\ 0 \quad : \text{diğer}\end{cases}$$

- $H^*\left(SO(n),\mathbb{Z}_2\right)$

$x_j \in H^j\left(SO(n),\mathbb{Z}_2\right)$ için $\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$ kümesinin $H^*\left(SO(n),\mathbb{Z}_2\right)$ kohomoloji sınıfının üreteç sistemi olduğu tümevarım yöntemi ile ispat edilir. Buna göre $n=2$ için $SO(2)\cong\mathbb{S}^1$ izomorfizması aracılığı ile $x_1 \in H^1\left(SO(2),\mathbb{Z}_2\right)$ elemanı $H^*\left(SO(n),\mathbb{Z}_2\right)$ kohomoloji halkasının üreteci olduğu açıktır.

$SO(n-1)\subset SO(n)\to\mathbb{S}^{n-1}$ Serre fibrasyonunu tanımlayalım. $E_2^{*,*}$ terimleri arasında $d_{n-1}\in \mathrm{Hom}\left(E_2^{0,n-2},E_2^{n-1,0}\right)$ morfizması dışında tüm morfizmaların sıfır olduğu açıktır.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & SO(n-2) & \longrightarrow & SO(n-1) & \longrightarrow & SO(n-1)/SO(n-2) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & SO(n-1) & \longrightarrow & SO(n) & \longrightarrow & SO(n)/SO(n-1) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{=} & SO(n)/SO(n-1) & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

---

[32] Kohomoloji teorisi için $0\to Ext\left(H_{i-1}(X;\mathbb{Z}),A\right)\to H^i(X,A)\to Hom\left(\left(H_i(X;\mathbb{Z}),A\right)\right)\to 0$ split kıza tam dizidir, buradan da $H^i(X,A)\cong Ext\left(H_{i-1}(X;\mathbb{Z}),A\right)\oplus Hom\left(\left(H_i(X;\mathbb{Z}),A\right)\right)$ sonucu elde edilir.

Yukarıdaki kısa tam diziden hareketle $SO(n-1) \subset SO(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ Serre fibrasyonuna izomorf [33] olan $\mathbb{S}^{n-2} \subset V_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ fibrasyonu elde edilir ve bu fibrasyon yardımı ile $H^*(SO(n), \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji halkasını hesaplayabiliriz.

$H^*(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji halkasının üretecini y_{n-1} sınıfına, $H^*(\mathbb{S}^{n-2}, \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji halkasının üretecini x_{n-2} sınıfına gönderen morfizma kurabiliriz. $\mathbb{S}^{n-2} \subset V_2(\mathbb{R}^n) \to V_1(\mathbb{R}^n)$ spektral dizisine ait d_{n-1} morfizmasının $\bmod 2$ için sıfıra eşit olduğu gösterilmişti. Buradan hareketle $SO(n-1) \subset SO(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ fibrasyonuna ait spektral dizinin d_{n-1} morfizmasının sıfıra eşit olduğu elde edilir. Böylece E_2 teriminde ilgili spektral dizi limit değerine ulaşmış olmaktadır. Teorem 3.1.2 yardımı ile $H^*(SO(n), \mathbb{Z}_2)$ kohomoloji sınıfının üreteç sistemi olan $\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ elde edilir.

Yukarıda tanımlanan iki adım yardımı ile $\mathbb{Z}_2$ katsayılı $V_k(\mathbb{R}^n)$ Stiefel manifoldunun kohomoloji halkasının $x_j \in H^j(V_k(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z}_2)$ sınıfı için $\{x_{n-k}, \cdots, x_{n-1}\}$ kümesini üreteç sistemi olarak aldığı gösterilir.[34] □

1.7 Psödo Denge Manifoldunun Kohomolojisi

Denge manifoldlarının yapısı pek çok çalışmada incelenmiştir. Duffie ve Schafer 1985 yılında *Equilibrium in Incomplete Markets* çalışması ile tam olmayan piyasalarda denge noktalarının manifold yapısı meydana getirdiğini ortaya koymuş, Chichilnisky 1996 yılında *On the Existence and the Structure of the Pseudo-Equilibrium Manifold* çalışmasında psödo denge manifoldlarının fiber demetlerini, Zhou 1997 yılında *The Structure of the Pseudo-equilibrium Manifold in Economies*

---

[33] $V_k(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/SO(n-k)$

[34] McCleary, J., **A User's Guide to Spectral Sequences**, Cambridge University Press, 2000, s. 155, 156.

with Incomplete Markets çalışmasında psödo-denge manifoldlarının yapısını, Bich 2005 yılında ki *On the Orientability of The Asset Equilibrium Manifold* makalesinde denge manifoldlarının belli şartlar altında yönlendirilebildiğini göstermiştir. Bu alt bölümde Stiefel manifoldunun her noktasına ait denge vektörlerinin denklik sınıfları göz önüne alınacak.

Çalışmanın ikinci bölümünde mal piyasasında denge noktaları kümesini $\Omega = \left\{ \left(p, Q, e \right) \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right) \times \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} : Z\left(p, Q, e \right) = 0 \right\}$ ve finans piyasası $\Upsilon = \left\{ \left(p, Q, \breve{Y} \right) \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right) \times V_I\left(\mathbb{R}^S \right) \middle| \left[I \;\middle|\; \psi_\eta\left(\left\langle Q^t \right\rangle^{\perp} \right) \right] P_\eta \cdot R\left(p, \bar{G}S\left(\breve{Y} \right) \right) = 0 \right\}$ denge noktalarını tanımlamıştık. İki piyasayı bir araya getiren denge noktalarının kümesi $\tilde{\Phi} = \left\{ \left(p, Q, e, \breve{Y} \right) : \left(p, Q, e \right) \in \Omega, \left(p, Q, \breve{Y} \right) \in \Upsilon \right\}$ şekliyle tanımlanmıştı.

Teorem 3.2.1 : $\tilde{\Phi}$ psödo denge manifoldu $V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right)$ baz uzayı üzerinde tanımlı vektör demeti için örtü uzayıdır ve $\tilde{\Phi}$ manifoldu $V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right)$ Stiefel manifolduna topolojik olarak denktir.

İspat: Chichilnisky (1996), s:180-182, teorem yardımı ile tam olmayan piyasaların büzülemeyeceği sonucu da elde edilir. Böylelikle tam olmayan piyasaların temel grubu birim grup yapısı değildir.[35] □

Stiefel manifoldunun her $Q \in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right)$ noktası için ekonomiyi piyasaları getirecek $\left(p, e, \breve{Y} \right) \in \mathbb{R}_{++}^{C(S+1)} \times \mathbb{R}_{++}^{HC(S+1)} \times V_I\left(\mathbb{R}^S \right)$ vektörünün varlığı ikinci bölümde gösterilmişti. $Q \in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right)$'ya bağlı bu vektör kümesinin bir vektör uzayına izomorf olmadığı, fiber yapısının ayrık diğer bir ifade ile sayılabilir olduğu açıktır. Bu noktada her $Q \in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^S \right)$ Stiefel manifoldu noktası için ekonomiyi dengeye

[35] Finans piyasalarının olmadığı tek dönemlik değiş-tokuş ekonomileri için denge noktalarının geometrisi, tek noktada delinmiş küreye homeomorf olduğundan temel grubu birim grup yapısı oluşturmaktadır (bkz. Ek 1).

getiren $\left(p,e,\breve{Y}\right)_{Q\in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)}$ noktalar kümesinin denklik sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\left[\left(p,e,\breve{Y}\right)_{Q\in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)}\right]=\left\{\left(p,e,\breve{Y}\right):\left(p,Q,e\right)\in\Omega_{Q\in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)},\left(p,Q,\breve{Y}\right)\in\Upsilon_{Q\in V_{(S-I)}\left(\mathbb{R}^{S}\right)}\right\} \tag{16}$$

Bu durumda taban uzayı ile psödo denge manifoldunun homeomorf olacağı açıktır. Bu özellik psödo denge manifoldunun topolojik değişmezini tanımlamamızda kolaylık sağlayacaktır. Bu bölümün ilk alt bölümünde spektral diziler yardımı ile hesaplanan Stiefel manifoldunun kohomoloji sınıfı topolojik denklik sayesinde psödo denge manifoldunun da topolojik değişmezini verecektir.

SONUÇ

İki dönemli, arbitraj seçeneğinin olmadığı stokastik yapılı eksik piyasalarda dengenin varlığı iktisat literatüründe çeşitli matematiksel metotlarla incelenmiş, bu çalışmalar yardımı ile ekonomide denge noktalarının varlığı gösterilmiştir. Değiş-tokuş ekonomileri için veri fiyat seviyesinde denk gelen denge noktalarının kardinalitesinin sayılabilir fiyat düzeyi dışında, ilgili fiyatın belli bir yerel komşuluğunda eşit olduğu ispatlanmış olsa da finans piyasaları için bu tarz bir çıkarım elde edilememiştir. İki dönemli arbitrajın olmadığı stokastik yapılı eksik piyasalarda temel çalışma alanları denge varlığı ve denge manifoldunun yapısı üzerine yoğunlaşmıştır.

Bu tez çalışmasında cebirsel topoloji konularından olan kohomoloji teorileri, karakteristik sınıflar teorileri (Stiefel-Whitney karakteristik sınıfları) ve genelleştirilmiş Borsuk-Ulam teoremleri yardımı ile eksik piyasalarda denge varlığı problemine yaklaşılmıştır. Bu noktada önemli olan ilgili teoremler yardımı ile elde edilen sonuçların literatürde diğer matematiksel yöntemler ile elde edilen sonuçlar ile tutarlı olması gerektiğidir ki bu koşul sağlanmıştır.

Tez çalışmasında ki en önemli hususlardan biri ilgili teoremlerin uygulanabilmesi için fiyat simpleksinin homeomorf olduğu CH kürenin pozitif kısmı $\mathbb{S}_{++}^{CH}$ ‘den $\mathbb{S}^{CH}$ küreye genişletilmesidir. Bu genişlemenin Tietze–Urysohn–Brouwer teoremi yardımı ile elde edilebileceği bilinmektedir. Böylelikle denge fiyat vektörü çalışması $\mathbb{S}^{CH}$ küre üzerine taşınmış olmaktadır. Diğer yandan $\mathbb{S}_{++}^{CH}$ fiyat vektörünün $\mathbb{S}^{CH}/\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}_{C(S+1)\times C(S+1)} : \mathbb{Z}_2 = \{-1,1\} \right\}$ bölüm uzayına homeomorf olduğu da açıktır.

Fiyat tanım kümesinin $\mathbb{S}^{CH}$ küresi üzerine genişletilmesi ile birlikte, talep fonksiyonu da $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbb{Z}_2 \end{pmatrix}_{C(S+1)\times C(S+1)} : \mathbb{Z}_2 = \{-1,1\} \right\}$ alt Lie grubu için eş değişim yapılı olacak şekilde tekrar tanımlanmış bu sayede bölüm 2‘de tanımlanan ideal değerli kohomoloji indeks teorilerinden yararlanılarak sıfırlar kümesinin boş olmama şartı gösterilmiştir. Bunu gerçekleştirirken piyasa mal ve finans piyasasına ayrıldığı noktada mal piyasasını dengeye getiren fiyat düzeylerinden hareketle finans piyasasında denge yapısının sağlanıp sağlanmadığı incelenmiştir.

Diğer önemli husus ise denge noktalarının meydana getirdiği alt manifoldun (psödo denge manifoldu) topolojik değişmezlerini spektral diziler yardımı ile hesaplayabilmek için, D. Duffie ve W. Shafer’in *Equilibrium in Incomplete Markets* makalesinde Grassmann manifoldları üzerinde yapmış oldukları analiz, S.Y. Husseini, J. Lasry, M.J.P. Magill’in *Existence of Equilibrium with Incomplete Markets* makalesinde gösterdikleri şekli ile Stiefel manifoldlarına taşınması olmuştur.Grassmann manifoldlarının Stiefel manifoldlarının bölüm uzayı olması bu analizin gerçekleştirilebilmesini sağlamıştır. Leray-Serre spektral dizileri yardımı ile üzerinde çalışılan vektör demetinin taban uzayı olan Stiefel manifoldu $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde hesaplanmıştır. Burada taban uzayı iktisat teorisi çerçevesinden incelendiğinde piyasa fiyat düzeyi vektör demetleri ise bu fiyat düzeyine denk gelen piyasa dengesidir. Bölüm 2’de her bir fiyat düzeyine ait piyasa denge noktasının var olduğu sonucu Stiefel manifoldunun her noktasında tanımlı vektör demetinin varlığını garanti altına almış olmaktadır. Ancak her nokta üzerinde tanımlı yapı vektör uzayı oluşturamamaktadır zira denge noktaları ayrık (discrete) yapı sergilemektedir.

Her Stiefel manifoldunun noktası üzerinde denge denklik sınıfı oluşturularak denge fiyat düzeylerinin oluşturmuş olduğu geometrik yapıya ait topolojik değişmezler homeomorf olduğu Stiefel manifoldunun yapısı spektral diziler yardımı ile incelenerek ortaya konmuştur.

Çalışmanın Ek 1 kısmında bütünlük açısından tezin ana kısmında yer almayan, değiş-tokuş ekonomileri analizinde önemli bir yer tutan regüler ekonomilerin oluşturmuş olduğu geometrinin homoloji ve homotopi değişmezleri hesaplanarak verilmiştir.

KAYNAKÇA

Aguilar, Marcelo, Samuel Gitler ve Carlos Prieto, **Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint**, , New York, Springer Verlag, 2002.

Amann, Herbert and Joachim Escher, **Analysis II, III**. Basel: Birkhauser, 2002.

Avriel, Mordecai. **Nonlinear Programming**. New York: Dover. 2003.

Balasko, Yves. 1975. **The Graph of The Walras Correspondence. Econometrica**, Vol. 43, No.5-6, , s. 907-912.

Balasko, Yves. **Connectedness of The Set of Stable Equilibria**. SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 35, No.4, 1978, s. 722-728.

Balasko, Yves **Foundations of the Theory of General Equilibrium**, New Yory, Academic Press, 1989.

Balasko, Yves. **The Equilibrium Manifold**. Massachusetts, The MIT Press, 2009.

Bich, P., On the Orientability of The Asset Equilibrium Manifold, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 42, 2006, s. 452-470.

Blyth, T. S**., Module Theory, An Approach to Linear Algebra**, New York, Claredon Press, 1990.

Borglin, Andreas. **Economic Dynamics and General Equilibrium**. New York: Springer, 2007.

Brown, Edgar H. Jr. , Cohomology Theories**, The Annals of Mathematics**, Cilt. 75, No. 3. 1962, 467-484.

Cass, David ve Alessandro Citanna, Pareto Improving Financial Innovation in Incomplete Markets, **Journal of Economic Theory**, Cilt.11,No.3, s. 474.

Chichilnisky, G., G. Heal, On the Existence and the Structure of the Pseudo-Equilibrium Manifold, **Journal of Mathematical Economics** , Cilt.26, 1996, s. 171-186.

Citanna, Alessandro ve Atsushi Kajii, Antonio Villanacci, 1998, Constrained Suboptimality in Incomplete Markets: A General Approach and Two Applications, **Journal of Economic Theory**, Vol. 11, No.3, , s. 495-521.

Cohen, Ralph, **The Topology of Fiber Bundles Lecture Notes**, çevrimiçi, http://v37s3b4h7dn47s37hg1br4h7rs7n3du7s8nu.unbf.ca/~n28zb/some%20lectures/the%20topology%20of%20fiber%20bundles%20by%20Cohen.pdf, 15.05.2012.

Debreu, Gerard, Economies with Finite Set of Equilibria, **Econometrica**, Vol. 38, No. 3, 1970, s. 387-392.

Debreu, Gerard, Regular Differentiable Economies**, American Economic Review**, Cilt. 66,1976, s. 280-287.

Dierker, E. , Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy, **Econometrica**, Cilt. 40, 1972, s. 951-953.

Dierker, E. , **Topological Methods in Walrasian Economics**, Berlin, Springer Verlag, 1974.

Dold, Albrecht, **Lectures on Algebraic Topology**, New York: Springer, 1995.

Duffie, D., W. Shafer, Equilibrium in Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 14, 1985, s. 285-300.

Duffie, D., W. Shafer, Equilibrium in Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 15, 1986, s. 199-216.

Fadell, E., S. Husseini, An Ideal Valued Cohomological Index Theory with Applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang Theorems, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, Cilt.8, 1988, s. 73-85.

Geanakoplos, J., An Introduction to General Equilibrium with Incomplete Asset Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 19, 1990, s. 1-38.

Geanakoplos, J, M. Magill, M. Quinzi, J. Dreze, Generic Inefficiency of Stock Market Equilibrium When Markets are Incomplete, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 19, 1990, s. 113-151.

Guillemin, Victor ve Alan Pollack.2010. **Differential Topology**. Rhode Island: AMS Chelsea Publishing.

Hart, O., On the Existence of Equilibrium in Securities Models, **Journal of Economic Theory**, Cilt. 9, 1974, s. 293-311.

Hart, O., On the Optimality of Equilibrium When the Market Structure is Incomplete, **Journal of Economic Theory**, Cilt.11, 1975, s. 418-443.

Hausmann, Jean-Claude, **Mod Two Homology and Cohomology**, çevrimiçi, http://www.unige.ch/math/folks/hausmann/hausmannBook.pdf , 15.04.2012.

Hiller, H.L., On the Cohomology of Real Grassmanians, **Transaction American Mathematical Society**, 257, 1980, s. 521-533.

Husemoller, Dale, **Fibre Bundles**, New York, Springer Verlag, 1994.

Husseini, S.Y., J. Lasry, M.J.P. Magill, Existence of Equilibrium with Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Vol.19, 1990 , s. 39-67.

Inoue, A., Borsuk-Ulam Type Theorems on Stiefel Manifolds, **Osaka Journal of Mathematics**, Cilt. 43, Sayı. 1, 2006, s. 183-191.

Jaworowski, Jan, Maps of Stiefel Manifolds and a Borsuk-Ulam Theorem, **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, Cilt. 32, 1989, s. 271-279.

Kashiwara, Masaki ve Pierre Schappira, **Categories and Sheaves**, New York, Springer Verlag, 2010.

Komiya, K., Borsuk-Ulam Theorem and Stiefel Manifolds, **Journal of the Mathematical Society of Japan**, Cilt. 45, Sayı. 4, 1993, s. 611-626.

Magill, M., W. Shafer, **Theory of Incomplete Markets**, , Cambridge , MIT Press, 1996.

Matausek, Jiri, A. Björner, G.M. Ziegler, **Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry**, New York, Springer Verlag, 2003.

McCleary, J., **A User’s Guide to Spectral Sequences**, Cambridge University Press, 2000.

John W. Milnor, Construction of Universal Bundles II, **Annals of Mathematics**, C.63, No:3, 1956, s: 430-436.

Milnor, JohnW., James D. Stasheff, **Characteristic Classes**, New Jersey, Princeton University Press, 1974.

Mukherjee, Amiya, **Topics in Differential Topology**, New Delhi: Hindustan Book Agency, 2005.

Nagata, Ryo, **Theory of Regular Economies**. Singapore: World Scientific, 2004.

Nagata, Ryo, Inefficiency of Equilibria with Incomplete Markets. **Journal of Mathematical Economics**, Vol. 41, No.7, 2005, s. 887-897.

Osborne, H., **Vector Bundles: Foundations Stiefel-Whitney Classes**, New York, Academic Press, 1983.

Rotman, Joseph J., **An Introduction to Homological Algebra**, New York, Springer Verlag, 2008.

Schecter, S., On the Structure of the Equilibrium Manifold, , **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 6, 1979, s. 1-5.

Schofield, N., Existence of Equilibrium on a Manifold**, Journal of Operations Research**, Cilt. 9, 1984, s. 545-557.

Spanier, Edwin H., **Algebraic Topology**, New York, Springer Verlag, 1994.

Villanacci, Antonio ve Laura Carosi, Pierluigi Benevieri, Andrea Battinelli, **Differential Topology and General Equilibrium with Complete and Incomplete Markets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Weibel, Charles, **An Introduction to Homological Algebra**, Cambridge University Press, 1995.

Werner, J., Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets, **Journal of economic Theory**, Cilt. 36, 1985, s. 110-119.

Werner, J., Structure of Financial Markets and Real Indeterminancy of Equilibria**, Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 19, 1990, s. 217-232.

Whitehead, George W. , **Elements of Homotopy Theory**, New York, Springer Verlag, 1978.

Yamabe, H., Z. Yujobo, On the Continuous functions defined on the Sphere, **Osaka Journal of Mathematics**, Cilt. 2, 1950, s. 19-22.

Yang, C.T., On Theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dynson I, **Annals of Mathematics**, Cilt. 60, 1954, s. 262-282.

Yang, C.T., Continuous Functions from Spheres to Euclidean Spaces II, **Annals of Mathematics**, Cilt. 62, 1955, s. 284-292.

Zhou, Y., The Structure of the Pseudo-equilibrium Manifold in Economies with Incomplete Markets, **Journal of Mathematical Economics**, Cilt. 27, 1997, s. 91-111.

Zhou, Y., Generecity Analysis on the Pseudo-equilibrium Manifold, **Journal Economic Theory**, Cilt. 73, 1997, s. 79-92.

Ek 1: Değiş-Tokuş Ekonomilerinde Regüler Ekonomilerin Homoloji ve Homotopi Grubu

$\mathcal{H}$ sayıda bireyin yaşadığı ekonomide, $h \in \mathcal{H}$ ekonomideki h. bireyi; $\mathcal{C}$, ekonomide birbirinden farklı ve sonsuz bölünebilen C adet malın kümesini göstersin. h. bireye ait mal vektörünü $\left(x_h^c\right)_{c\in\mathcal{C}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}}$ şeklinde ifade edelim. Her birey ticarete başlamadan önce elinde belli bir mal vektörü bulundurmaktadır. h. bireye ait başlangıç mal vektörünü $\left(e_h^c\right)_{c\in C} \in \mathbb{R}_+^C$ şeklinde gösterelim. p^c, $c \in C$ malının piyasa fiyatını göstermektedir. Tüm mallara ait piyasa fiyat vektörünü $p = \left(p^1, \cdots, p^C\right)$ gösterelim. Bu vektör $\mathcal{C}$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu altında lineer fonksiyonel tanımlar ve $\left\langle p, \bullet \right\rangle : \mathcal{C} \xrightarrow{\left\langle p, \left(x_h^c\right)_{c\in C}\right\rangle \mapsto p\cdot\left(x_h^c\right)_{c\in C}} \mathbb{R}_{++}$ ifadesi h. bireyin elindeki $\left(x_h^c\right)_{c\in C}$ mal vektörünün piyasa değerini verir. Aynı şekilde bireyin ticarete başlamadan önce elinde bulundurduğu mal vektörünün piyasa değerini $\left\langle p, \left(e_h^c\right)_{c\in C} \right\rangle \mapsto p \cdot \left(e_h^c\right)_{c\in C} \in \mathbb{R}_{++}$ şeklinde gösteririz. h. bireyin tüketim kümesini $\mathcal{C}_h^* = \left\{ \left(x_h^c\right)_{c\in C} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{C}} : \sum_{j=1}^{C} p^j x_h^j \leq \sum_{j=1}^{C} p^j e_h^j \right\}$ şeklinde gösterebiliriz. h. bireyin amacı, $\mathcal{C}_h^*$ tüketim kümesi üzerinde tanımladığı tercih bağıntısını gösteren fayda fonksiyonu $u_h : \mathbb{R}_+^C \to \mathbb{R}_{++}$ [36] aracılığı ile refah seviyesini optimum noktaya getirmektir.

---

[36] Fayda fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu varsayılacaktır.

- $u_h : \mathbb{R}_+^C \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\mathbb{R}_{++}^C$ üzerinde C^∞ sınıfından fonksiyon
- $U_h(x) = \left\{ x' \in \mathbb{R}_+^C \middle| u_h(x') \geq u_h(x) \right\} \subset \mathbb{R}_{++}^C, \ \forall x \in \mathbb{R}_{++}^C$
- Her $x \in \mathbb{R}_{++}^C$ için $\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_h}{\partial x_C} \right) \in \mathbb{R}_{++}^C$

Yukarıdaki özelliklere sahip fayda fonksiyonlarının kümesini $\mathfrak{A}$ ile gösterelim.

- Her $x \in \mathbb{R}_{++}^C$ için $\sum_{j=1}^{G} \sum_{k=1}^{G} h_j h_k \frac{\partial^2 u_h(x)}{\partial x_j \partial x_k} < 0, \ \forall h \in \mathbb{R}_{++}^C, \ h \neq 0$

Tanım 1 : $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ve $u \in \mathfrak{A}$ için $(e,u) \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathfrak{A}$ değiş-tokuş ekonomisini ifade eder.

Tanım 2 : h. bireye ait maksimizasyon problemi veri $p' \in \mathbb{R}_{++}^{C-1}$[37] ve $e_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}$ için

$$\begin{aligned} &\underset{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}}{\text{maks.}} \quad u_h(x_h) \\ &\text{kısıt :} \quad -p(x_h - e_h) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

şeklindedir ve (2) numaralı fonksiyon ile gösterilen x_h talep fonksiyonu, (1) numaralı denkleme ait çözüm fonksiyonudur.

$$x_h : \mathbb{R}_{++}^{C-1} \times \mathbb{R}_{++}^{C} \xrightarrow{(\tilde{p}, e_h) \mapsto \arg\max \left\{ \begin{array}{ll} \underset{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}}{\text{maks.}} & u_h(x_h) \\ \text{kısıt :} & -p(x_h - e_h) = 0 \end{array} \right.} \mathbb{R}_{++}^{C} \tag{2}$$

(1) nolu denklem klasik kısıt altında optimizasyon işlemidir ve (p', e_h) eksojen değişkenleri ve $x_h \in \arg\max \left\{ \begin{array}{ll} \underset{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C}}{\text{maks.}} & u_h(x_h) \\ \text{kısıt :} & -p(x_h - e_h) = 0 \end{array} \right.$ değeri için öyle bir $\mu_h \in \mathbb{R}_{++}$ sayısı vardır ki (x_h, μ_h) vektörü $\left\{ \begin{array}{l} \nabla u_h(x_h) - \mu_h p = 0 \\ -p(x_h - e_h) = 0 \end{array} \right.$ eşitliğini sağlar. Bu ifadeyi aşağıdaki şekilde yazıp kapalı fonksiyon teoremini uygularsak veri (p', e_h) değerleri için görüntü kümesini $0 \in \mathbb{R}^{C+1}$ yapan $(x_h, \mu_h) \in \mathbb{R}_{++}^{C} \times \mathbb{R}_{++}$ değerlerini elde edebiliriz.

$$F_h : \mathbb{R}_{++}^{C} \times \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}^{C-1} \times \mathbb{R}_{++}^{C} \xrightarrow{(x_h, \mu_h, p', e_h) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \nabla u_h(x_h) - \mu_h p = 0 \\ -p(x_h - e_h) = 0 \end{array} \right.} \mathbb{R}^{C} \times \mathbb{R} \tag{3}$$

---

[37] Her $\alpha \geq 0$ için $\{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C} : p \cdot x_h \leq p \cdot e_h\} = \{x_h \in \mathbb{R}_{++}^{C} : \alpha\, p \cdot x_h \leq \alpha\, p \cdot e_h\}$ eşitliği gerçekleştiğinden fiyat vektörünü p_C malına ait fiyatı kullanarak normalleştirelim ve yeni fiyat vektörünü $p = \left(\frac{p^1}{p^C}, \cdots, \frac{p^{C-1}}{p^C}, 1 \right) = (p', 1)$ şeklinde yazalım.

h . bireye ait fayda maksimizasyonunu ekonomideki tüm bireyler için analiz etmek için yukarıda incelenen birinci derece koşulu yanında piyasada arz-talep eşitliğini $\sum_{h=1}^{H} e_h = \sum_{h=1}^{H} x_h$ de göz önüne almak gerekecektir.

Tanım 3 : $\xi = (x, \mu, p') \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathbb{R}_{++}^{H} \times \mathbb{R}_{++}^{C-1}$ ve veri $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için aşağıdaki dönüşüm genişletilmiş denge fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$F : \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathbb{R}_{++}^{H} \times \mathbb{R}_{++}^{C-1} \times \mathbb{R}_{++}^{CH} \xrightarrow{(x,\mu,p',e) \mapsto \begin{cases} \nabla u_h(x_h) - \mu_h p = 0 \\ -p(x_h - e_h) = 0 \\ -\sum_{h=1}^{H} e_h^* + \sum_{h=1}^{H} x_h^* = 0 \end{cases}} \mathbb{R}^{CH+H+C-1} \qquad (4)$$

Tanım 4: Veri $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için $F(\xi, e) = 0$ özelliğini sağlayan $\xi = (x, \mu, p') \in \mathbb{R}_{++}^{CH} \times \mathbb{R}_{++}^{H} \times \mathbb{R}_{++}^{C-1}$ vektörü varsa, bu vektör $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için denge durumunu gösterir. $\Omega(e)$ ifadesi, $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için tüm denge noktalarının kümesidir.

Lemma 1: Veri $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi Pareto optimal seviyede ise tek bir denge noktası vardır ve bu denge noktası başlangıç $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ seviyesidir.

Pareto optimum noktada olan bir ekonomiden hareketle keyfi bir $e \in \mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisinin denge noktasına sahip olduğunun ispatını aşağıda verilen homotopi fonksiyonu aracılığı ile elde ederiz. $\tilde{e}$ Pareto optimum seviyedeki ekonomiyi göstermek üzere aşağıdaki denklem takımlarını yazalım

$$\begin{cases} \ldots \\ \nabla u_h\left(x_h\right)-\mu_h p=0 \\ -p x_h+p\left[\left(1-\tau\right)e_h+\tau\tilde{e}_h\right]=0 \\ \ldots \\ -\sum_{h=1}^{H} x_h^*+\left[\left(1-\tau\right)\sum_{h=1}^{H} e_h^*+\tau\sum_{h=1}^{H}\tilde{e}_h^*\right]=0 \end{cases}$$

(5)

$\tau=1$ için Pareto optimum ekonomiyi, $\tau=0$ için veri $e\in\mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisini elde ederiz. (4) numaralı denklem takımlarını $H_e:\mathbb{R}_{++}^{CH}\times\mathbb{R}_{++}^{H}\times\mathbb{R}_{++}^{C-1}\times[0,1]\to\mathbb{R}^{CH+H+C-1}$ homotopi fonksiyonu aracılığı ile tanımlarız. $\left(H_{e,\tau=1}\right)^{-1}(0)=\{\tilde{e},\tilde{\mu},\tilde{p}'\}$ kümesi, Lemma 1'den hareketle tanımlıdır ve tek elemandan meydana gelmektedir.

Lemma 2 : $Rank\left(\nabla H_{e,\tau=1}\left(\tilde{e},\tilde{\mu},\tilde{p}'\right)\right)=boy\left(CH+H+C-1\right)$

Lemma 3: Her $e\in\mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için $H_e^{-1}(0)$ ters görüntüsü kapalı ve sınırlı bir kümedir. Böylece Heine-Borel Teoremi yardımı ile $H_e^{-1}(0)$ kümesi kompakt yapılıdır. Diğer bir değiş ile her $e\in\mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için en az bir denge $\left(x,\mu,\tilde{p}\right)\in\mathbb{R}_{++}^{CH}\times\mathbb{R}_{++}^{H}\times\mathbb{R}_{++}^{C-1}$ vektörü vardır.

Yukarıda verilen lemmadan hareket ile aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 1: Her $u\in\mathfrak{A}$ fayda fonksiyonu ve her $e\in\mathbb{R}_{++}^{CH}$ ekonomisi için öyle bir $\left(x,\mu,\tilde{p}\right)\in\mathbb{R}_{++}^{CH}\times\mathbb{R}_{++}^{H}\times\mathbb{R}_{++}^{C-1}$ vektörü vardır ki $F\left(x,\mu,\tilde{p},e\right)=0$.

Tanım 3'de ki $F:\mathbb{R}_{++}^{CH}\times\mathbb{R}_{++}^{H}\times\mathbb{R}_{++}^{C-1}\times\mathbb{R}_{++}^{CH}\to\mathbb{R}^{CH+H+C-1}$ fonksiyonu, her $\left(x,\mu,\tilde{p},e\right)\in F^{-1}(0)$ değeri için $Rank\left(\nabla_{\left(x,\mu,\tilde{p},e\right)}F\left(x,\mu,\tilde{p},e\right)\right)=boy\left(CH+H+C-1\right)$

eşitliğini sağlar. Bu durumda $\{0\} \in \mathbb{R}^{CH+H+C-1}$, F fonksiyonu için regüler değerdir. Regüler değer teoreminden[38] hareketle ilgili çözüm kümesinin bir alt manifold yapısına sahip olduğu çıkarılır.

Lemma 4 : $F^{-1}_{(\tilde{x},\tilde{\mu},\tilde{p})}(0)$ çözüm kümesi $\mathbb{R}^{CH}_{++} \times \mathbb{R}^{H}_{++} \times \mathbb{R}^{C-1}_{++} \times \mathbb{R}^{CH}_{++}$ uzayının CH boyutlu alt manifoldudur ve denge alt manifoldu olarak adlandırılır.

Lemma 5 : $F^{-1}(0)$ kapalı fonksiyonunun oluşturduğu alt manifolddan $\mathbb{R}^{CH}_{++}$ 'ye giden $pr : F^{-1}(0) \xrightarrow{(x,\mu,\tilde{p},e) \mapsto e} \mathbb{R}^{CH}_{++}$ izdüşüm fonksiyonu proper fonksiyon yapılıdır.

Her $e \in \mathbb{R}^{CH}_{++}$ için izdüşüm fonksiyonunun tersi kapalı olduğundan $F^{-1}(0)$ alt manifoldunun kompakt yapılı olduğunu elde ederiz.

Teorem 2 : $\hat{e} \in F^{-1}_{(\tilde{x},\tilde{\mu},\tilde{p})}(0)$ için $F^{-1}_{(\tilde{x},\tilde{\mu},\tilde{p})}(0)$ denge alt manifoldunun temel grubu, $\pi_1\left(F^{-1}(0),\hat{e}\right) = 1_{\hat{e}}$ sadece birim elemandan meydana gelmektedir.[39]

Yukarıdaki teorem, $F^{-1}_{(\tilde{x},\tilde{\mu},\tilde{p})}(0)$ denge alt manifoldunun basit bağlantılı olduğunu ve büzülebildiğini gösterir.

Tanım 5 : $F : \mathbb{R}^{CH}_{++} \times \mathbb{R}^{H}_{++} \times \mathbb{R}^{C-1}_{++} \times \mathbb{R}^{CH}_{++} \to \mathbb{R}^{CH+H+C-1}$ fonksiyonu tanım 3'de ki şekliyle verilsin. $\{0\} \in \mathbb{R}^{CH+H+C-1}$ vektörü, $F : \mathbb{R}^{CH}_{++} \times \mathbb{R}^{H}_{++} \times \mathbb{R}^{C-1}_{++} \times \{e\} \to \mathbb{R}^{CH+H+C-1}$ fonksiyonu için regüler değer ise, $e \in \mathbb{R}^{CH}_{++}$ ekonomisi regüler ekonomi olarak adlandırılır. Tüm regüler ekonomilerin kümesini Ξ ile gösterirsek, $F^{-1}(0)$'in alt

[38] Regüler Değer Teoremi: M ve N sırası ile m ve n($m \geq n$) boyutlu manifoldlar olsun. Eğer q değeri $f : M \to N$ düzgün dönüşümü için regüler değer ise, $f^{-1}(N)$ ters görüntüsü, M manifoldunun $m-n$ boyutlu alt manifoldudur.

[39] Temel grup yapılarının tanımı için Marcelo Aguilar $[1]$, s. 9-59

manifoldu olduğu açıktır. Regüler olmayan ekonomiler $F^{-1}(0)\setminus\Xi$ kritik ekonomiler olarak tanımlanır.

Teorem 3: Regüler ekonomiler, $F^{-1}(0)$'de açık ve yoğun bir alt küme meydana getirirler. Regüler ekonomilerin yoğunluğu, kritik ekonomilerin $F^{-1}(0)\setminus\Xi$ Lebesgue ölçüsü nün sıfır olduğu anlamına gelmektedir.

Lemma 6 : $F^{-1}(0)$ denge alt manifoldu $\mathbb{R}^{CH}$ uzayına homeomorftur.

$\mathbb{R}^{CH}$ uzayı $\mathbb{S}^{CH}-Q$ tek noktada delinmiş $\mathbb{S}^{CH}$ uzayına homeomorf olduğundan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 7 : $F^{-1}(0)$ denge alt manifoldu $\mathbb{S}^{CH}-Q$'ya homeomorftur.

A, denge manifoldu üzerinde kritik ekonomileri göstersin, yukarıda tanımlanan homeomorfizma yardımı ile bu kritik ekonomileri de $\mathbb{S}^{CH}-Q$ üzerine taşırsak $\mathbb{S}^{CH}-(\{Q\}\cup A)=\tilde{\mathbb{S}}^{CH}$ delikli CH boyutlu küresini elde ederiz.

Tanım 6 : $\{X_j : j\in\Lambda\}$ topolojik uzaylar ailesinin topolojik toplamı olan $\coprod_{j\in\Lambda} X_j$ uzayı üzerinde, her $x_j\in X_j$ noktası için oluşturulan $\coprod_{j\in\Lambda} X_j/\{x_j : j\in\Lambda\}$ bölüm uzayına kama (wedge) toplamı denir ve $\bigvee_{j\in\Lambda} X_j$ şeklinde gösterilir.

A, denge manifoldu üzerinde kritik ekonomileri göstersin, yukarıda tanımlanan homeomorfizma yardımı ile bu kritik ekonomileri de $\mathbb{S}^{CH}-Q$ üzerine taşırsak $\mathbb{S}^{CH}-(\{Q\}\cup A)=\tilde{\mathbb{S}}^{CH}$ delikli CH boyutlu küresini elde ederiz. $\tilde{\mathbb{S}}^{CH}$ üzerinde ki her kritik ekonomi noktasını içine alan bir çember tanımlayıp bunların tanım 6'da verildiği şekli ile kama toplamını oluşturalım. $\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{\text{kardinalite } A}$ çemberlerin kama toplamının $\mathbb{S}^{CH} - Q$ gömüldüğü ve $\mathbb{S}^{CH} - Q$ küresinin güçlü deformasyon geri çekmesi (strong deformation retract)[40] olduğu açıktır. Böylece tüm ekonomilerin $\mathbb{S}^{CH} - \{Q\}$ alt uzayı olan $\mathbb{S}^{CH} - (\{Q\} \cup A) = \tilde{\mathbb{S}}^{CH}$ regüler ekonomiler uzayının homotopi grubu $\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{\text{kardinalite } A}$ topolojik uzayının homotopi grubuna eşittir.[41]

Teorem 4 : $H_q\left(\bigvee_{j\in\Lambda}^{m} \mathbb{S}_j^n\right) = \begin{cases} \bigoplus_{j\in\Lambda}^{m} \mathbb{Z} : q = n \\ 0 : q \neq n \end{cases}$ $_n$ kürelerin kama toplamının homoloji grubudur.

Teorem 5 (Kürelerin kama toplamı için Hurewicz teoremi) : n kürelerin kama toplamının homoloji grubu ile homotopi grubu arasında izomorfizma dönüşümü kümesi boş değildir. $\Psi_q \in \mathrm{Isom}\left(H_q\left(\bigvee_{j\in\Lambda}^{m} \mathbb{S}_j^n\right), \pi_q\left(\bigvee_{j\in\Lambda}^{m} \mathbb{S}_j^n\right)\right)$ (Dalmagro ve Quintana 2005: 32)

Teorem 4 ve teorem 5 aracılığı ile regüler ekonomilerin homotopi grubu

$$\pi_q = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{\text{kardinalite } A} : q = 1 \\ 0 : q \neq n \end{cases} \tag{6}$$

şeklinde ifade edilir.

[40] $A \subset X$ alt topolojik uzay ve $H : X \times I \to X$ homotopi dönüşümü tanımlansın. Her $x \in X_0$, $a \in A$ ve $t \in I$ için 1) $F(x,0) = x$, 2) $F(x,1) \in A$, 3) $F(a,t) = a$ şartı gerçekleşirse güçlü deformasyon geri çekmesi denir.
[41] Homotopik topolojik uzayların topolojik değişmezleri birbirine eşittir.

Değiş-tokuş ekonomilerinde regüler ekonomilerin topolojik değişmezlerini homoloji teorisi yardımı ile de inceleyebiliriz.

A, denge manifoldu üzerinde kritik ekonomileri göstersin, yukarıda tanımlanan homeomorfizma yardımı ile bu kritik ekonomileri de $\mathbb{S}^{CH}-Q$ üzerine taşırız.

$\left(\mathbb{S}^{CH}-Q,A\right)$ topolojik uzayının homoloji dizisini aşağıdaki şekilde yazarız.[42]

$$\begin{array}{c}
\cdots \to H_2(A) \to H_2\left(\mathbb{S}^{CH}-Q\right) \to H_2\left(\mathbb{S}^{CH}-Q,A\right) \to H_1(A) \to H_1\left(\mathbb{S}^{CH}-Q\right) \\
\downarrow \\
0 \leftarrow H_0\left(\mathbb{S}^{CH}-Q,A\right) \leftarrow H_0\left(\mathbb{S}^{CH}-Q\right) \leftarrow H_0(A) \leftarrow H_1\left(\mathbb{S}^{CH}-Q,A\right)
\end{array}$$

$\mathbb{S}^{CH}-Q$ büzülebilir olduğundan, $H_j\left(\mathbb{S}^{CH}-Q\right)=\begin{cases}\mathbb{Z} : j=0\\ 0 : j>0\end{cases}$ elde edilir.

A kritik ekonomileri sayılabilir olduğundan

$$H_j(A)=\begin{cases}\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{A \text{ kümesinin sayısal değeri}} & : j=0\\ 0 : j>0\end{cases}$$

Yukarıda ki çıkarsamalardan ve homoloji dizisinin kesin uzunluğundan hareketle Ξ regüler ekonomiler için homoloji grubunu

$$H_j\left(\mathbb{S}^{CH}-Q,A\right)=\begin{cases}\mathbb{Z} : j=0\\ \left(\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{A \text{ kümesinin sayısal değeri}}\right)/\,\mathbb{Z} : j=1\\ 0 : j>1\end{cases}$$ şeklinde tanımlanır

---

[42] Dold, ,$[20]$ s.33, 47

Ek 2: Manifoldlar

1.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Diferansiyellenebilen manifoldları incelerken iki farklı tanımdan hareket edebiliriz. Birinci tanım, üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyonlar tanımlanabilen ve özel bir yapı ile donatılmış topolojik uzaylar iken, ikinci tanım, Öklid uzaya ait açık kümelerin uygun şekilde birleştirilmesi ile meydana getirilen topolojik uzaylardır.

$x^1,\cdots,x^n$ şeklinde gösterdiğimiz n adet fonksiyonun her biri koordinat fonksiyonu olarak adlandırılır ve $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ için $x^i(p)\mapsto p_i\in\mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. $U\subset\mathbb{R}^n$ açık alt kümesi üzerinde tanımlı olup $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun C^r sınıfından olması, $x^1,\cdots,x^n$ koordinat fonksiyonlarına göre her $\leq r$ dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olması demektir. $C^r(U)$ gösterimi, $U\subset\mathbb{R}^n$'dan $\mathbb{R}$'ye giden ve C^r sınıfından olan fonksiyonların kümesidir ve bu küme $\mathbb{R}$ cismi üzerinde cebir yapısı oluşturur.

$\phi:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $\phi_i=x^i\circ\phi$ gösterimi, ϕ altındaki görüntün *i.* koordinat değerini verir ve $\phi\in C^r$ olması için tüm ϕ_i fonksiyonlarının C^r sınıfından olması gerekir. ϕ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$' e ait iki açık küme arasında homeomorfizma fonksiyonu ve $\phi,\phi^{-1}\in C^r$ özelliklerini sergiliyorsa C^r-diffeomorfizma $(Diff)^r$ olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.1: Bir $(X,\mathfrak{A})$ topolojik uzayı için X kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların demeti, ilgili uzay üzerindeki topolojiye ait tüm $U\in\mathfrak{A}$ açık kümelerinde, $C^0(U)$ cebirinin bir $\mathfrak{F}_X(U)$ alt cebirini karşılık getiren $\mathfrak{F}_X$ fonksiyonudur ve aşağıdaki şartları sağlar

1. $\mathfrak{F}_X(\varnothing) = 0$
2. $V, U \in \mathfrak{A}$ ve $V \subset U$ için $f \in \mathfrak{F}_X(U)$ ise f fonksiyonunun V açık kümesine de kısıtlanışı $\mathfrak{F}_X(V)$'nin elemanıdır.
3. Her $p \in U$ için V_p, ilgili noktanın $U \in \mathfrak{A}$ 'da ki açık komşuluğu ve $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer f fonksiyonu $\mathfrak{F}_X(V)$'nin bir g elemanına eşit olursa, $f \in \mathfrak{F}_X(U)$'yu tanımlarız.

Yukarıdaki şartları sağlayan topolojik uzayı $(X, \mathfrak{F}_X)$ şeklinde gösteririz ve a -uzayı olarak adlandırırız.

a -uzayları arası $\phi : (X, \mathfrak{F}_X) \to (Y, \mathfrak{F}_Y)$ morfizmasını, $\phi : X \to Y$ sürekli fonksiyonu yardımı ile tanımlarız. Buna göre $(Y, \mathfrak{M})$ topolojik uzayındaki her $Z \in \mathfrak{M}$ açık kümesi üzerinde tanımlı $\mathfrak{F}_Y(Z)$ cebiri için bu cebire ait bir $f \in \mathfrak{F}_Y(Z)$ elemanına bir $f \circ \phi \in \mathfrak{F}_X(\phi^{-1}(Z))$ elemanı karşılık getirilir. Özel olarak ϕ morfizmasının izomorfizma olması için tersinin ver ve morfizma olması gerekir.

Tanım 1.1.2 : m boyutlu düzgün C^∞ manifoldu $(M, \mathfrak{F}_M)$, ikinci sayılabilir Hausdorff a -uzayıdır ve yerel olarak $(\mathbb{R}^m, C^\infty)$ uzayına izomorftur.

Tanım 1.1.3 : $p \in M$ noktasının açık komşuluğu olarak U_i ve bu açık komşuluğu $\mathbb{R}^m$'e homeomorfik şekilde taşıyan ϕ_i fonksiyonunu alalım. (U_i, ϕ_i) ikilisine, p noktasındaki koordinat haritası, U_i'ye p'nin koordinat komşuluğu denir. $\phi_i^j = x_j \circ \phi_i : U_i \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da p noktasının yerel koordinat sistemidir. M manifoldunu örten koordinat haritalarının kümesini atlas olarak adlandırırız.

Tanım 1.1.4 : m boyutlu düzgün M manifoldu aşağıdaki şartları sağlayan ikinci sayılabilir Hausdorff uzayıdır.

1. U_i açık kümeleri M manifoldu üzerinde atlas yapısı oluşturur.
2. $\forall i, j \in \Lambda : U_i \cap U_j \neq \varnothing$ için $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j\left(U_i \cap U_j\right) \to \phi_i\left(U_i \cap U_j\right)$ ve $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i\left(U_i \cap U_j\right) \to \phi_j\left(U_i \cap U_j\right)$ fonksiyonları açık kümeler arasında tanımlı düzgün fonksiyonlardır.

1.2 Manifoldlar Üzerinde Teğet Uzaylar

Diferensiyellenebilen manifoldların bir noktasında teğet uzayı tanımlarken amaçlanan, ilgili manifolda Öklid uzaylardaki yöne göre türev özelliğini katmak, aynı zamanda ilgili noktanın komşuluklarının değerini yerel koordinatlardan bağımsız olarak elde edebilmektir.

M manifoldu üzerinde ki bir p noktasından geçen ve $\gamma(0) = p$ olan $\gamma : I \to M$ eğrisini alalım. Öklid uzayda ilgili eğrinin veri noktadaki teğer vektörü, parametrelerde ki küçük değişikliklere göre belirlenmektedir ancak manifoldlar üzerinde bu analizi gerçekleştirememekteyiz. Bu durumda yerel haritalardan yararlanarak eğriyi Öklid tanım kümesine indirgeriz. $(U,\varphi)_p$ haritası yardımı ile eğri üzerindeki p noktasının komşuluğunu $\mathbb{R}^m$'e indirgeyelim. Eğrinin yerel temsili $\overline{x} = x^i(\varphi \circ \gamma)(t)e_i = \gamma^i(t)e_i$ şeklinde ifade edilir. Aşağıda $x^i(\varphi \circ \gamma)(t)e_i$ ifadesi kısalık amacıyla $\overline{\gamma}(t)$ şeklined gösterilecektir.

$C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$ cebiri üzerinden $\mathbb{R}$'ye giden $\hat{V}$ operatörünü, $\hat{f} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$ için $\hat{V}\left(\hat{f}\right) = \dfrac{d\hat{f}\left(\overline{\gamma}(t)\right)}{dt} = \left(\dfrac{d\gamma^i(0)}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\hat{f} = v^i(x)\dfrac{\partial \hat{f}(x)}{\partial x^i}$ şeklinde tanımlarsak, $x \in \mathbb{R}^m$ noktasındaki $\hat{V}$ operatörü $\hat{V}_x = v^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ şeklinde tanımlarız. $\hat{V}_x \in Funct\left(C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right), \mathbb{R}\right)$ opratörlerinin kümesi bir vektör uzayı oluşturur ve bu uzay $T_x\left(\mathbb{R}^m\right)$ teğet uzayına izomorftur.

İzomorfizma sayesinde ilgili vektör alanlarının oluşturduğu vektör uzayının boyutunu m olarak gösteririz ve kanonik baz operatörleri ise $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$ şeklindedir.

M manifoldu üzerinde ki bir p noktasından geçen ve $\gamma(0)=p$ olan $\gamma : I \to M$ eğrisine ait teğeti temsil edecek vektör alanını yerel koordinat sistemindeki uygulamayı benzer şekilde kurarız. $(U,\varphi)_p$ haritası $f \in C^\infty(U)$ fonksiyonu üzerinde tanımlı vektör alanını $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ için $V_p(f) = v^i \frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^i}$ şeklinde gösterilir. Buradan da p noktasındaki ilgili vektör alanı $V_p = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şeklinde ifade edilir. $V_p(f)$ değeri $f \in C^\infty(U)$ fonksiyonunun $p \in M$ noktasından geçen eğri boyunca değişimini ölçmektedir.

$p \in M$ noktasındaki operatörler manifoldun ilgili noktasında bir vektör uzayı oluşturmakta ve bu uzay $T_x(\mathbb{R}^m)$ teğet uzayına izomorf olmaktadır, bu yüzden V_p operatörlerinin kümesi, manifoldun p noktasında teğet vektörler olarak bakılabilir.

M manifoldu Öklid uzayı içinde ise $p \in M$ noktasındaki teğet vektör uzayını yerel koordinatlardan hareketle manifoldun üzerine yerleştirebiliriz. $(U,\varphi)_p$ manifold üzerinde bir harita ve $\varphi(p) = x$ noktası yerel koordinat sisteminde ki değer için $T_x(\mathbb{R}^m)$ teğet vektör uzayının vektörlerini $d\varphi^{-1}$ izomorfizması yardımı ile M manifoldunun p noktasını merkez yapacak şekilde yerleştirir ve bu noktada m boyutlu teğet uzay oluşturmuş oluruz. Böylece ilgili teğet uzayı $\{p\} \cup T_p(M)$ şeklinde ifade edilir.

1.3 Manifoldlar Arası Düzgün Fonksiyonlar ve Türevleri:

Tanım 1.3.1 : $(M, \mathfrak{F}_M)$ ve $(N, \mathfrak{F}_N)$ manifoldları düzgün olsun, bu durumda $f \in Mor\left((M, \mathfrak{F}_M), (N, \mathfrak{F}_N)\right)$ morfizması düzgün fonksiyondur.

Bu tanımı koordinat haritaları yardımıyla açıklarsak, $f \in Funct(M, N)$, $p \in U \overset{\circ}{\subset} M$ ve $f(p) \in V \overset{\circ}{\subset} N$ açık kümeleri ve bu kümelere ait koordinat haritalarını sırasıyla (U, ϕ) ve (V, ψ) gösterelim. f fonksiyonunun lokal gösterimi $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ fonksiyonu ile ifade edilir. Bu durumda f fonksiyonunun düzgün olması için her $p \in M$ noktası için $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ fonksiyonunun düzgün olması gerekir.

Tanım 1.3.2 : M manifoldundan N manifolduna giden türevlenebilir bir fonksiyon ϕ olsun. $p \in M$ ve $\phi(p) = q \in N$ noktalarına ait koordinat haritaları sırası ile (U, φ) ve $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ olarak tanımlayalım. Bu durumda iki manifoldun yerel koordinatlardaki transformasyonu $\tilde{\varphi}(q) = \left(\tilde{\varphi} \circ \phi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(p)\right) = \Phi\left(\varphi(p)\right)$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımı diğer bir ifade ile $y^{\alpha} = \Phi\left(x^1, \cdots, x^m\right) : \alpha = 1, \cdots, n$ şeklinde gösteririz.

Manifoldlar arası $d\phi_p : T_pM \to T_qN$ lineer dönüşümü ise p'de ki yerel koordinat bileşenleri v^i olan bir vektörü q'da ki yerel koordinatları $\left(\dfrac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial x^i} v^i\right)$ olan vektöre dönüştürür.

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d\phi_p"] \arrow[d, "d_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\ \cong"'] & T_qN \arrow[d, "d_{\tilde{\varphi}(q)}\tilde{\varphi}\ \cong"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "d_{\varphi(p)}\Phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Teorem 1.3.3 (Manifoldlar için Ters Fonksiyon Teoremi): M ve N aynı boyuta sahip manifoldlar, f fonksiyonu sırasıyla bu manifoldlara ait olan U ve V açık kümeleri arasında tanımlanmış düzgün fonksiyon olsun. $p \in U$ noktasında f fonksiyonunun rankı maksimum ise p noktasının U açık kümesi içinde öyle bir açık W komşuluğu vardır ki, $f|_W$ kısıt fonksiyonunun görüntüsü $f(p)$ noktasının V açık kümesi içindeki bir açık komşuluğa diffeomorftur.

Tanım 1.3.4 : M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar $(m \leq n)$, f fonksiyonu bu iki manifold arasında tanımlanmış düzgün fonksiyon olsun. $p \in M$ noktasında f fonksiyonun rankı M manifoldunun boyutuna eşit ise, ilgili fonksiyon p noktasında immersion olarak adlandırılır. Eğer M manifoldunun tüm değerleri için immersion ise, f fonksiyonu immersiondur.

Tanım 1.3.3 : M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar $(n \leq m)$, f fonksiyonu bu iki manifold arasında tanımlanmış düzgün fonksiyon olsun. $p \in M$ noktasında f fonksiyonun rankı N manifoldunun boyutuna eşit ise, ilgili fonksiyon p noktasında submersion olarak adlandırılır. Eğer M manifoldunun tüm değerleri için submersion ise, f fonksiyonu submersiondur.

Tanım 1.3.5 : M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar $(m \leq n)$, f fonksiyonu bu iki manifold arasında tanımlanmış düzgün fonksiyon olsun. f fonksiyonu immersion ve M ile $f(M)$ arasında homeomorfizma ise embedding olarak adlandırılır. $m=n$ özel durumu için surjektif embedding diffeomorfizma sağlar.

1.4 Alt Manifoldlar

Tanım 1.4.1 : N, n boyutlu bir manifold ve bu manifoldun bir alt kümesi M olsun, eğer her $p\in M$ için N manifoldunun bu noktayı içeren (U,ϕ) koordinat haritasının M alt kümesi ile kesişimi $\mathbb{R}^m$ ($m\leq n$) uzayına homeomorfik ise M manifoldu N manifoldunun alt manifoldu olarak adlandırılır.

M alt manifolduna ait düzgün atlas ise N manifolduna ait koordinat haritalarının M manifoldu ile kesişiminden elde edilir.

Lemma 1.4.2 : N, n boyutlu bir manifold ve A alt kümesinin bu manifoldun bir alt manifoldu olması için $(m\leq n)$ özelliği sağlayan bir M manifoldunun düzgün bir embedding fonksiyonu altındaki görüntüsünün N manifoldu içinde A alt kümesine eşit olması gerekmektedir.

Tanım 1.4.3 : $f:M\to N$ düzgün fonksiyon, $p\in M$ noktasının ilgili fonksiyon altında kritik nokta olması için, f fonksiyonu p noktasında submersion olmaması gerekir. Bu özelliği sergilemeyen M de ki diğer noktalar ise regüler noktalar olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.4 : $f:M\to N$ düzgün fonksiyon, $q\in N$ noktasının ilgili fonksiyonun ters görüntüsü altında kritik değer olarak adlandırılması için $f^{-1}(q)$ lif kümesinin en az bir kritik noktaya sahip olması gerekir. Eğer $f^{-1}(q)$ lif kümesinde kritik nokta sayısı boş küme ise regüler değer olarak adlandırılır.

Teorem 1.4.5 : M ve N sırasıyla m ve n boyutlu manifoldlar $(n \leq m)$. $f: M \to N$ düzgün fonksiyonu altında $q \in N$ noktası regüler değer ise $f^{-1}(q)$ ters görüntüsü M manifoldu içinde $m-n$ boyutlu bir alt manifolddur.

Yukarıdaki teoremin özel bir durumu olarak eğer her iki manifoldun boyutları eşitse $f^{-1}(q)$ boyutu sıfırdır, yani ters görüntü noktalardan meydana gelmektedir.

2. Sard Teoremi, Transversality ve Manifoldların Yönlendirilmesi

2.1 Sard Teoremi

Tanım 2.1.1 : $K \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi her $\varepsilon > 0$ için toplamları ε'dan küçük olan sayılabilir adette n-küpler tarafından örtülebiliyorsa K alt kümesi sıfır ölçüye sahiptir denir.

Lemma 2.1.2 : $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesinin ölçüsü sıfır ise, $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$ fonksiyonu altında A'nın görüntüsünün ölçüsü de $\mathbb{R}^m$'de sıfırdır.

Teorem 2.1.3 (Sard) : $f: M \to N$ ilgili manifoldlar arasında düzgün fonksiyon ve C kümesi f fonksiyonu altında M manifolduna ait kritik noktalar olsun. Bu durumda $f(C) \subset N$ alt kümesinin ölçüsü sıfırdır.

Sard teoremini M manifolduna ait regüler noktalar dahilinde incelersek, bu noktaların ilgili fonksiyon altında ki görüntülerinin N manifoldunda yoğun olduğu ortaya çıkar.

2.2 Transversality

Tanım 2.2.1 : M ve N manifoldları ve $A \subset N$ alt kümesi alt manifold olsun. Bu durumda $f: M \to N$ düzgün fonksiyonu $x \in f^{-1}(A)$ noktasında A alt manifolduna transverse olması $\left(f \,\overline{\pitchfork}_x\, A \right)$ için $df_x\left(\tau(M)_x\right) + \tau(A)_{f(x)} = \tau(N)_{f(x)}$ şartını sağlaması gerekir.

f fonksiyonunun A alt manifolduna transverse olması durumunu :

1) $f^{-1}(A) = \varnothing$ veya

2) Her $x \in f^{-1}(A)$ için $f \,\overline{\pitchfork}_x\, A$ şeklinde gösterebiliriz.

Eğer $\dim(M) + \dim(A) < \dim(N)$ geçerli ise (2) nolu durum gerçekleşememektedir, bu durumda $f \,\overline{\pitchfork}\, A$ ifadesi $f(M) \cap A = \varnothing$ anlamına gelmektedir.

Tanım 2.2.2 : M_1 ve M_2, N manifoldunun alt manifoldu olsun. $i : M_1 \to N$ içerme fonksiyonu altında her $x \in M_1 \cap M_2$ için $\tau(M_1)_x + \tau(M_2)_x = \tau(N)_x$ sağlanıyorsa iki alt manifold $\left(M_1 \,\overline{\pitchfork}\, M_2 \right)$ transversedir.

Teorem 2.2.3 (Transversality) : M, N, A ve B manifoldları için B sınıra sahip ve A, N manifoldunun alt manifoldu olarak tanımlayalım. M ve B manifoldlarının Kartezyen çarpımı üzerinden N manifolduna giden düzgün fonksiyon F için F ve ∂F, A alt manifolduna transverse olsun. Her $b \in B$ elemanı için $f_b(x) = F(x,b)$ fonksiyonu, f_b ve ∂f_b için A alt manifolduna transversedir.

Yukarıda ki teoremden çıkarılacak önemli sonuç M manifoldundan N manifolduna giden neredeyse tüm düzgün fonksiyonlar, N manifoldunun bir alt manifolduna transversedir.

2.3. Manifoldların Yönlendirilmesi

Tanım 2.3.1 : M manifoldunun yönlendirilebilirliği için öyle bir $\Phi = \{(U_i, \phi_i)\}$ atlası olmalıdır ki, $U_i \cap U_j = \varnothing$ için $\psi_j \circ \phi_i^{-1}$ fonksiyonunun Jacobiyen matrisi her $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$ noktasında kesin pozitif determinanta sahip olmalıdır. Bu durumda eğer M manifoldunu için bu şekilde yönlendirilebilir atlas seçilebilirse, M yönlendirilebilir manifolddur denir.

Tanım 2.3.2 : M sınıra sahip bir manifold ve ∂M ilgili manifoldun sınırı olsun. ∂M üzerindeki teğet uzayı ve bu uzaya ait sıralı baz elemanlarını sırası ile $\tau(\partial M)_x$ ve $\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ ile gösteririz. ∂M manifoldunun M'de ki tümleyen boyutu 1 olduğundan $\tau(\partial M)_x$ teğet uzayına ortonormal olan aynı zamanda dışa yönlenmiş bir v_x vektörü vardır. $\{v_x, \alpha\} = \{v_x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ sıralı baz elemanlarının determinantının işareti ise bize M manifolduna ait sınırın yönlendirmesini verecektir.