İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI (İKTİSAT)

DOKTORA TEZİ

STOKASTİK PORTFÖY TEORİSİ VE BORSA İSTANBUL'DA UYGULAMASI

ERHAN USTAOĞLU

2502080165

TEZ DANIŞMANI

PROF. DR. ERDİNÇ ALTAY

İSTANBUL 2015

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

DOKTORA
TEZ ONAYI

ÖĞRENCİNİN;

Adı ve Soyadı	: ERHAN USTAOĞLU	**Numarası**	: 2502080165
Anabilim Dalı / Anasanat Dalı / Programı	: İŞLETME-İKTİSAT	**Danışmanı**	: PROF. DR. ERDİNÇ ALTAY
Tez Savunma Tarihi	: 09.11.2015	**Saati**	: 11:00
Tez Başlığı	: STOKASTİK PORTFÖY TEORİSİ VE BORSA İSTANBUL'DA UYGULAMASI		

TEZ SAVUNMA SINAVI, İÜ Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin **50. Maddesi** uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **KABULÜNE** OYBİRLİĞİ / ~~OYÇOKLUĞUYLA~~ karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1- PROF. DR. HÜLYA TALU		Kabul
2- PROF. DR. ERDİNÇ ALTAY		KABUL
3- PROF. DR. MURAT ÇİNKO		KABUL
4- DOÇ. DR. SERHAT YANIK		KABUL
5- YRD. DOÇ. DR. DOĞAN YILDIZ		KABUL

YEDEK JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1- DOÇ. DR. ATIF EVREN		
2- YRD. DOÇ. DR. M. SABRİ TOPAK		

Versiyon: 1.0.0.2-61559050-302.14.06

ÖZ

STOKASTİK PORTFÖY TEORİSİ
VE BORSA İSTANBUL'DA UYGULAMASI
ERHAN USTAOĞLU

Çalışmada finans piyasalarında fiyat hareketlerini stokastik süreçler ile tanımlayan portföy optimizasyonu ve varlık fiyatlama modelleri ele alınmıştır. Piyasaların modellenmesinde kullanılan ve geliştirilen süreksiz ve sürekli zamanlı stokastik süreçler teorik olarak incelenmiştir. Stokastik süreçlere dayandırılarak oluşturulan uzun dönemli portföy optimizasyon ve varlık fiyatlama modelleri araştırılmış ve tek dönemli klasik modellerle karşılaştırılmıştır. Uygulama olarak sürekli zamanlı bir model olan ve fiyatların log-normal dağılımını varsayan log-optimal portföy optimizasyonun tek dönemli Markowitz portföy optimizasyonu karşılaştırılması yapılmıştır. Borsa Istanbul verileri kullanılarak farklı uzunluktaki zaman dilimlerinde her iki yöntemle de portföyler oluşturmuş ve portföy beklenen geometrik büyümeleri, getirileri ve standart sapmaları karşılaştırılmıştır. Ayrıca portföyler oluşturuldukları zaman dilimlerini izleyen farklı süreler boyunca test edilerek gerçekleşen değerler ile karşılaştırılmışlardır. Sonuç olarak portföy oluşturma ve test süreleri uzadıkça log-optimal portföylerin Markowitz portföylere oranla daha iyi performans sergilediği görülmüştür. Bu da sürekli zamanlı stokastik piyasa modellemesinin tek dönemli modellere göre uzun dönem için daha gerçekçi bir yaklaşım olduğu varsayımını desteklemektedir.

Anahtar Kelimeler : Stokastik Portföy optimizasyonu, Çok dönemli portföy optimizasyonu, Log-optimal portföy, Sürekli Zamanlı Varlık Fiyatlama, Log-optimal fiyatlama

ABSTRACT

STOCHASTIC PORTFOLIO THEORY
AND APPLICATION IN ISTANBUL STOCK EXCAHANGE
ERHAN USTAOĞLU

Portfolio optimization and asset pricing models, which define price movements in financial markets by stochastic processes, were investigated in this study. Continuous and discrete time stochastic processes used and developed for modelling the financial markets were examined theoretically. Intertemporal portfolio optimization and asset pricing models based on stochastic processes are investigated and compared with classical single period models. As an application log-optimal portfolio optimization, which is a continuous time model and which assumes log-normal distribution of prices, was compared with single period Markowitz portfolio optimization. Portfolios of different time ranges were constructed with Borsa Istanbul data by using both methods and the portfolio expected geometric growth, return and standard deviations were compared. Moreover portfolios were tested for the different time periods following their constructions and compared against actual values. It was observed as a result that as portfolio construction and test periods lengthen log-optimal portfolios outperform the Markowitz portfolios. This approves that the continuous time stochastic modelling of financial markets is a more realistic approach in long term compared to single period models.

Key Words: Stochastic portfolio optimization, Multi-period portfolio optimization, Log-optimal portfolio, Continuous time asset pricing, Log-optimal pricing

ÖNSÖZ

Finansal piyasa analizlerinde matematiksel yöntemlerin giderek daha yaygın olarak kullanılması bu yöntemlerin ve altında yatan teorik yaklaşımların anlaşılmasının önemi arttırmaktadır. Geliştirilen matematik modellerin piyasaların gerçek dinamiklerini ne ölçüde yansıttığının ortaya konulabilmesi de bu konuda daha fazla çalışma yapılmasına bağlı görünmektedir.

Bu çalışmada finansal piyasalarda fiyat oluşumunu stokastik süreçlerle açıklayan teoriler ve bu teorilerden geliştirilen pratik uygulama yöntemleri araştırılmıştır. Özellikle piyasa dinamiklerinin matematiksel olarak tanımlanması süreci ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Piyasa modellemeleri sürekli ve kesikli zamanlı olmak üzere iki yöntemle yapılabilmektedir. Kesikli zamanlı stokastik süreçler anlaşılması daha kolay fakat matematiksel olarak kullanışsız olabilmektedir. Sürekli zamanlı yöntemler daha derin bir matematik bilgisi gerektirmekle beraber hem analitik hem de nümerik olarak çözümler sunabilmektedir. Bu nedenle sürekli zamanlı modeller ve dayandırılan stokastik süreçler, çalışmada ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Klasik tek dönemli piyasa modellemeleri ve varlık fiyatlama yöntemlerinde bütün yatırımcıların eşit ve tek dönemli yatırım ufkuna sahip oldukları varsayılır. Bu yöntemlere piyasa gerçeklerine uymadıkları konusunda yapılan en önemli eleştirilerden birisi de budur. Sürekli zamanlı stokastik süreçlere dayalı analizlerin başka bir avantajı da bu noktada ortaya çıkmaktadır. Bu analizler böyle bir varsayıma dayanmayarak uzun dönemli bir piyasa modellemesine olanak sağlamaktadırlar.

Stokastik süreçlere dayalı yöntemlerin ülkemiz piyasalarında geçerliliğini sorgulamak amacıyla Borsa İstanbul' da bir uygulama yapılmıştır. Uygulamada stokastik teoriye dayalı bir portföy optimizasyon yöntemi ile klasik tek dönemli optimizasyon yöntemi 2000-2014 yılları arası Borsa İstanbul hisse senedi verileri ile test edilerek karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmanın amacı stokastik yöntemlerin uzun dönemli performanslarının daha üstün olup olmadığını belirlemektir. Portföy oluşturma ve test dönemleri uzadıkça bu varsayımı doğrulayan sonuçlara ulaşılmıştır. Daha eski tarihlere uzanan verilerin Borsa İstanbul'dan elde edilememesi ve endekste işlem gören ağırlıkları yüksek bir çok hisse senedinin çok uzun sayılamayacak bir süreden beri borsada bulunmaları daha uzun bir dönemi kapsayan analiz yapılmasını engellemiştir.

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ BÖLÜM

STOKASTİK PİYASA ANALİZİ

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SÜREKLİ ZAMANLI VARLIK FİYATLAMA MODELLERİ

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

STOKASTİK PORTFÖY TEORİSİNİN BIST'TE UYGULANMASI

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GİRİŞ

Stokastik süreçler zaman içerisinde rassal değerler alan bir veya daha fazla değişkenin oluşturduğu süreçler olarak tanımlanmaktadır. Başka bir değişle stokastik süreçler rassal değerlerin zaman içerisinde değişimini yansıtmaktadırlar. Bu nedenle içerisinde her zaman belirsizlik barındıran finansal piyasa davranışlarının, stokastik süreçler ile açıklanması kuralcı varsayımlara dayalı açıklamalara göre daha uygun görünmektedir.

Hisse senedi piyasalarındaki fiyat hareketlerini stokastik süreçler olarak tanımlayan ve piyasa analizlerini bu temele dayandıran teoriler, yapısını piyasa ve yatırımcı davranışlarına yönelik katı kuralcı varsayımlar altında açıklamaya çalışan Modern Portföy Teorisi'nden oldukça farklıdır. Tanımlayıcı ve kuralcı teori ayrımının fen bilimlerini sosyal bilimlerden ayıran olgu olduğu ileri sürülmektedir. Bu ayırımın doğru olduğu kabul edilirse, stokastik süreçlere dayanan teorilerin fen bilimleri tarafında kaldığı söylenebilir.[1]

Modern Portföy Teorisi, portföyü oluşturan varlıkların beklenen getiri oranları ve standart sapmaları olmak üzere iki temel parametreye dayanmaktadır. Fakat tek dönemli bir yaklaşıma dayanan bu teori kısa ve uzun dönem getirileri arasında oluşabilecek farkları göz ardı etmektedir. Örneğin kısa dönemde çok yüksek beklenen getirisi olan bir portföyün uzun dönem getirisi negatif olabilmektedir. Bu nedenle kısa ve uzun dönem getirileri arasındaki farkları elimine edebilecek ve uzun

[1] Robert Fernholz, Ioannis Karatzas, "Stochastic Portfolio Theory: an Overview", (Çevrimiçi) http://www.math.columbia.edu/~ik/FernKarSPT.pdf, 10 Jan. 2008, p.3.

dönemde daha iyi sonuçlar verebilecek portföy teorilerine gerek duyulmuştur. Fiyat hareketlerinin stokastik doğasını da yansıtan ve getiri oranlarından çok büyüme oranlarının uzun dönemde portföy davranışlarını belirleyeceğini varsayan yaklaşımlar ortaya çıkmıştır.

Stokastik süreçlere dayanan portföy teorileri, Modern Portföy Teorisinin aksine, yatırımcıların optimum getiri ve risk stratejileri üzerine kurulmadığı için yatırımcı davranışlarına yönelik kısıtlamalardan bağımsızdır. Bu nedenle Modern Portföy Teorisi'nin en çok eleştirilen noktalarından biri olan, bütün yatırımcıların tek bir yatırım ufkuna sahip olduğu varsayımı, Stokastik Portföy Teorisi için geçersizdir.

Matematiksel finans yaklaşımlarının büyük çoğunluğu gibi Stokastik Portföy Teorisi de kaynağını Modern Portföy Teorisi ve ona getirilen eleştirilerden almaktadır. Modern Portföy Teorisi ve uygulama biçimi olan ortalama-varyans optimizasyonuna yöneltilen en yaygın eleştiri statik bir optimizasyon çözümü olarak tek dönemli yatırım stratejisine yönelik olduğu yönündedir. Bu nedenle çalışmanın ilk bölümünde önce Modern Portföy Teorisi, daha sonra da çok dönemli portföy analizleri incelenmiştir. Modern Portföy Teorisi'nin fayda teorisi açısından sorgulanması ve çok dönemli analizler ile bağlantılı olarak fayda ve riskten kaçınma fonksiyonları, uzun dönemli portföy yaklaşımlarının anlaşılması açısından ise logaritmik fayda fonksiyonları ve büyüme ele alınmıştır.

Hisse senedi piyasalarında çok dönemli fiyat analizleri kesikli ya da sürekli zamanlı olarak iki yöntemle yapılmaktadır. Çalışmanın ikinci bölümünde öncelikle kesikli zamanda fiyat analizi, daha sonra ise sürekli zamanlı fiyat analizi ele alınmıştır. Sürekli zamanlı fiyat analizinde kullanılan log-normal rassal değişkenlere de bu bağlamda yer verilmiştir.

Hisse senedi fiyat hareketleri, sürekli zamanlı analizlerde Geometrik Brown Hareketi ile temsil edilmektedir. Stokastik bir süreç olan Geometrik Brown Hareketi'nin teorik altyapısı rassal yürüyüş kavramından itibaren ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Sürekli zamanlı fiyat analizi ile Geometrik Brown Hareketi bağlantısı açıklanarak stokastik hisse fiyat süreci çalışmanın ikinci bölümünde ele alınmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümü stokastik fiyat süreçlerinin portföy optimizasyonu yöntemlerindeki uygulamalarının incelenmesiyle tamamlanmıştır. Öncelikle log-normal portföy teorisi ele alınmıştır. Daha sonra yatırımcının ömür boyu yatırım ve tüketim alışkanlıklarını da kapsayan uzun dönemli portföy teorileri kesikli ve sürekli zamanda olmak üzere ayrı ayrı incelenmiştir. Bu teorilere bağlı olarak toplumun optimum tasarruf davranışlarını açıklamaya çalışan tüketim modeline yer verilmiştir.

Modern Portföy Teorisi'nden, Finansal Varlıkları Fiyatlama Modeli'nin geliştirilmesine benzer biçimde Stokastik Portföy Teorisi'nden de çeşitli varlık fiyatlama modelleri geliştirilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde bu varlık fiyatlama modelleri incelenmiştir. Öncelikle log-optimal fiyatlama ve bu modelin Finansal Varlık Fiyatlama Modeli ile farkı ele alınmıştır. Daha sonra geniş zamanlı varlık fiyatlama modelleri ve uygulamaları incelenmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde bu teoriye dayanan modellerin pratik bir araç olarak portföy optimizasyonu alanında uygulanabilirliği araştırılmıştır. Bu amaçla Borsa İstanbul (BIST) verileri kullanılarak stokastik süreçlere dayanan modellerden birisi olan log-optimal portföy modeli ile Modern Portföy Teorisi’nin uygulama yöntemi olan ortalama-varyans optimizasyonu karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalı uygulamada stokastik yöntemin teoride ifade edildiği biçimde uzun dönem performans açısından tek dönemli yöntemlere göre bir üstünlük sağlayıp sağlamadığı araştırılmıştır.

BİRİNCİ BÖLÜM

PORTFÖY TEORİSİ

Bir yatırımcı finansal piyasalarda yatırım yaparken, ne miktarda yatırım yapacağına, hangi varlıklara yatırım yapacağına ve her varlığa ne kadar yatırım yapacağına karar vermelidir. Bu üç karar sonrasında ortaya çıkan yatırım bütünü her yatırımcı için optimize edilmesi gereken portföyü oluşturur. Böyle bir portföy basit bir hisse senetleri ya da bonolar listesi değildir. Bu portföy yatırımcıya çok çeşitli risklere karşı koruma ve fırsatlar sağlayan dengeli bir bütün olmalıdır. Yatırımcı bu portföyü kendi ihtiyaçlarına en uygun biçimde şekillendirmelidir. Bu şekilde ifade edilen yatırım problemini sistematik olarak çözmeye odaklanan ilk çalışma günümüzde Modern Portföy Teorisi olarak da adlandırılan ortalama-varyans modeli olmuştur.[2]

Markowitz'in ortalama-varyans modelini ortaya koymasından önce varlıkların risk ve getirileri ayrı ayrı değerlendirilmekteyken, ortalama-varyans modelinin geliştirilmesi bir çeşitlendirme matematiği oluşturularak risk-beklenen getiri ilişkisini varlıklar bazında değil portföy bazında izlenebilir hale getirmiştir. Bu model ile yatırım tek tek varlıklara göre değil, risk ve getiri hedeflerine göre portföyler seçilerek belirlenebilir hale gelmiştir. Model, finansal piyasa gerçeklerini tam olarak yansıtmaması nedeniyle çok ciddi biçimde eleştirilmekle birlikte hala geniş bir kullanım alanı olan varlık fiyatlama modellerine de bir dayanak

---

[2] Harry Markowitz, "Portfolio Selection", **Journal of Finance,** 1952,Vol. 7, No. 1, pp.77-91.

oluşturmuştur. Bu nedenle bu bölümde önce Modern Portföy Teorisi ve Stokastik Portföy Teorisi'nin temel farklılıklarının anlaşılması bakımından iki alanda kullanılan getiri ve fiyat süreçleri, daha sonra ise Modern Portföy Teorisi açıklanmıştır. Stokastik Portföy Teorisi ise çalışmanın ikinci bölümünde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

1.1. Beklenen Fayda Hipotezi

Optimum portföyler oluşturmanın yolu bir fayda fonksiyonu belirleyerek, bu fayda fonksiyonuna dayalı beklenen getiriyi maksimize etmeye dayanmaktadır. Ortalama-varyans modeli de yatırımcıların belirsizlik karşısında rasyonel davranacakları varsayımı ile fayda yaklaşımını içinde barındırmaktadır. Fakat ortalama-varyans modelinin sadece belli bir fayda fonksiyonu (ikinci dereceden fayda fonksiyonu) varsayımı ile optimal olduğu gösterilmiş ve bu nedenle çok dönemli yatırım kararları için uygun çözüm olamayacağı ortaya konmuştur.[3]

Varlıkların gelecekte sağlayacağı getiriler, yatırım yapıldığı anda tam bir kesinlikle bilinemez. Bu nedenle portföy seçim kararları her zaman riskli ortamda verilmek durumundadırlar. Getiriler, kesinliği olmayan rassal değişkenlerdir. Bu nedenle ancak bu değişkenlerin gerçekleşme olasılıkları öngörülebilir. Yatırım sonucunda ulaşılacak servet de bu rassal değişkenlere bağlı olacaktır. Dolayısıyla değişik seçenekleri sıralayabilecek bir yönteme ihtiyaç vardır. Bu sayede bir portföy

[3] Haim Levy, Marshall Sarnat, **Investment and Portfolio Analysis**, New York, 1972, pp. 385-386.

seçeneği diğerine göre tercih edilebilir olabilecektir. Bu belirsizlik durumunda en yaygın kullanılan karar verme yaklaşımı beklenen fayda hipotezidir.[4]

Yatırım dönemi başında bir yatırımcının servetini getirileri rassal olan N sayıda varlığa yatırdığı varsayıldığında, yatırım dönemi sonunda ulaşacağı serveti aşağıdaki denklemle tanımlanmaktadır;

$$W_1 = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) W_0 = \left(1 + r_p\right) W_0 \qquad 1.1$$

W_0 = Dönem başı servet,

W_1 = Dönem sonu servet,

R_i = Varlık getirileri,

x_i = Varlıkların $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ olacak biçimde portföy içindeki ağırlıkları.

Servet ve servetin kullanılmasından sağlanan fayda arasındaki ilişki fayda fonksiyonu $U(\cdot)$ ile tanımlanmaktadır. Beklenen fayda hipotezi, yatırımcının portföyü içindeki varlık ağırlıklarını nihai servetinin beklenen faydasını maksimize edecek biçimde seçeceğini varsaymaktadır. Bu durumda portföy seçimi aşağıdaki maksimizasyon problemi biçiminde ifade edilir:

$$\max_{\{x_i\}_{i=1}^{N}} E[U(W_1)] = E\left\{U\left[\left(1 + \sum_{i=1}^{N} x_i R_i\right) W_0\right]\right\} \qquad 1.2$$

---

[4] John von Neuman, Oskar Morgenstern, **Theory of Games and Economic Behavior**, Sixtieth-Anniversary Edition, Princeton University Press, 2004, p.16.

Bu eşitlik, dönem sonu servetinin beklenen faydası $E[U(W_1)]$'nin, portföydeki varlık ağırlıkları seçimi ile maksimize edileceğini göstermektedir.[5]

Fayda fonksiyonları gerçek sayılar üzerinde tanımlıdır ve gerçek değerler vermektedirler. Böylece bir yatırımcının fayda fonksiyonu tanımlandığında , yatırım sonucu oluşacak rassal servet seçenekleri fayda fonksiyonun beklenen değerleri hesaplanarak sıralanabilmektedir. Örneğin farklı yatırımlar sonucu ulaşılacak iki rassal servet düzeyi x ve y için fayda fonksiyonlarının beklenen değerleri $E[U(x)]$ ve $E[U(y)]$ hesaplanarak yatırım kararı verilebilir. Bu seçim yapılırken sadece x ve y servet düzeylerini karşılaştırmak ilk bakışta anlamlı görünse bile bu değerlerin rassal, diğer bir deyişle olasılıklara bağlı değerler oldukları unutulmamalıdır. Yalnızca nihai servetin düzeyine göre yatırım kararı veren bir yatırımcı, en basit fayda fonksiyonu olan doğrusal, $U(x) = x$, fayda fonksiyonunu kullanmaktadır ve rassal getirileri beklenen değerlerine göre sıralamaktadır. Bu durumda yatırımcı riske karşı nötr demektir.

Fayda fonksiyonları yatırıcıların risk algılamaları ve servetlerine göre değişkenlik gösterir. Herhangi bir yatırımcıya özgü fayda fonksiyonunu belirlemek için geliştirilmiş sistematik yöntemler vardır fakat portföy teorisi açısından matematiksel olarak kullanılabilir çözümler sunan genel fayda fonksiyonları aşağıda tabloda yer almaktadır.[6]

---

[5] Louis Eeckhoudt, Christian Gollier, Harris Schlesinger, **Economic And Financial Decisions Under Uncertainty**, Princeton University Press, 2005,p.83.

[6] Jonathan E. Ingersoll, **Theory of Financial Decision Making**, Rowman and Littlefield Publisers Inc., Maryland,1987,pp.16-17.

Tablo 1.1 : Genel Fayda Fonksiyonları

Fayda Fonksiyonu	Denklem
İkinci dereceden fonksiyonlar	$U(\mathrm{x}) = x - bx^2$
Üstel fonksiyonlar	$U(\mathrm{x}) = -\mathrm{e}^{-ax}$
Üstlü fonksiyonlar	$U(\mathrm{x}) = \mathrm{c}\, x^{\gamma}$
Logaritmik fonksiyonlar	$U(\mathrm{x}) = \mathrm{c} \ln x.$

Tabloda yer alan ikinci dereceden fayda fonksiyonu Markowitz'in ortalama-varyans yönteminde riskten kaçınan yatırımcı varsayımının matematiksel karşılığıdır. Ortalama-varyans yöntemi ancak ikinci dereceden bir fayda fonksiyonu ile tek dönem için optimum portföy çözümünü vermektedir. Logaritmik fayda fonksiyonları ise ardışık yatırım dönemlerini tek dönem biçiminde analiz etmeyi sağladıklarından uzun dönemli portföy analizlerinde tercih edilen fayda fonksiyonlarıdır.[7]

1.2. Riskten Kaçınma

Portföy seçimi yaparken, beklenen faydanın yanında ve onunla bağlantılı olarak yatırımcının kararını etkileyen diğer bir unsur da riskten kaçınma davranışıdır.

[7] William Feller, **An Introduction to Probability Theory and Its Applications,** John Wiley & Sons Inc., New York, 1968, p.202.

Birçok araştırma yatırımcıların riskten kaçındığını fakat bu kaçınmanın yatırıcıdan yatırımcıya büyük değişiklikler gösterdiğini ortaya koymuştur. Her yatırımcının farklı koşullarda ne şekilde davranacağı öngörülemese de yatırımcıların riske karşı davranışlarını genelleyecek yaklaşımlar bulunmaktadır.[8]

Yatırımcılar sabit bir getiriyi rassal bir getirinin aynı büyüklükteki beklenen değerine tercih ediyorlarsa riskten kaçınıyorlar demektir. Bir yatırımcı, bu riskten kaçınma tanımı ile, $E[x]$ değerindeki sabit bir ödemeyi x değerindeki rassal bir getiriye tercih edecektir. Yatırımcının bu iki seçenek arasında kayıtsız kalmasını sağlayacak, risk primi olarak tanımlanan bir değer vardır. Bu risk primi π ile tanımlanırsa yatırımcı $E[x] - \pi$ ve x seçenekleri arasında kayıtsız kalacaktır. Beklenen fayda hipotezine göre bu iki değerin beklenen faydaları eşit olmalıdır;[9]

$$E[U(x)] = E\ [U(E[x] - \pi)] = U(E[x] - \pi). \qquad 1.3$$

Denkliğin iki tarafı da Taylor serileri olarak $E[x]$ etrafında açılır ve yüksek derecen terimler göz ardı edilirse ;

$$E[U(x)] = U(E[x]) + \frac{1}{2}\ U''\ (E[x])Var(x) \qquad 1.4$$

ve

---

[8] Bernard Dumas, Blaise R. Allaz, **Financial Securities: Market Equilibrium and Pricing Methods**, London, 1996, p.129

[9] Kenneth J. Arrow, "Aspects of the Theory of Risk- Bearing" (Yrjö Jahnsson Lectures [Helsinki: The Yrjö Jahnsson Foundation, 1965]), pp. 136-138.

$$U(E[x]-\pi) = U(E[x]) + U'\,(E[x])\,\pi \qquad 1.5$$

elde edilir. Denklemler düzenlenip risk primi π için çözüldüğünde;

$$\pi = \frac{1}{2}\left(-\frac{U''\,(E[x])}{U'\,(E[x])}\right)Var(x) \qquad 1.6$$

sonucuna ulaşılır. Burada

$$z = -\left(\frac{U''\,(E[x])}{U'\,(E[x])}\right) \qquad 1.7$$

mutlak riskten kaçınma katsayısı olarak tanımlanmaktadır. Bu sonuç riskin priminin, yatırımcının riske karşı duyarlılığı ve riskin büyüklüğü ile doğru orantılı olması gerektiği varsayımı ile uyumludur. Varyans $\sigma^2 = Var(x)$ olacak biçimde risk primi denklemi tekrar yazıldığında aşağıdaki eşitlik ortaya çıkmaktadır;

$$\pi = \frac{1}{2}z\sigma^2. \qquad 1.8$$

Yatırımcıların riskten kaçındıkları varsayıldığında risk primi (π) ve mutlak riskten kaçınma katsayısı (z) sıfırdan büyük olmalıdır. Marjinal faydanın, $U'\,(E[x])$, pozitif olduğu varsayılırsa, $U''\,(E[x]) < 0$ olmalıdır. Bu ekonomik teorinin ana kavramlarından biri olan azalan marjinal fayda yasası ile de uyumludur. $U'\,(E[x]) > 0$ ve $U''\,(E[x]) < 0$ koşulları fayda fonksiyonunun içbükey olduğunu göstermektedir. Fonksiyonun içbükeylik derecesi ise riskten kaçınma katsayısına bağlıdır.[10]

---

[10] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green**, Microeconomic Theory**, Oxford University Press, 1995,p.190.

Denklem 1.8'de risk primi ile ölçülen riskin fiyatının getirilerin varyansı ile orantılı olduğu görülmektedir. Buradan varyansın uygun bir risk göstergesi olduğu sonucuna varılarak ortalama-varyans yöntemi risk davranışını modellemekte yaygın olarak kullanılmaktadır. Fakat bu yöntemin geçerliliği denklem 1.4'te hesaplama dışında bırakılan terimlerin büyüklüğü ile ilişkilidir. Riskin küçük olduğu kısa dönemler için bu çıkarım doğru kabul edildiğinde ortalama-varyans yöntemi beklenen fayda teorisinin özel bir durumu olarak kabul edilebilir. [11]

1.3. Getiri ve Fiyat Süreçleri

Modern Portföy Teorisi ile Stokastik Portföy Teorisi çerçevesinde değerlendirilebilecek portföy uygulamaları karşılaştırılırken iki teorinin dayandığı getiri ve fiyat süreçlerini karşılaştırmak yararlı olacaktır. Modern Portföy Teorisi çerçevesinde tanımlanan getiri ve risk parametreleri klasik anlamda yaygın olarak kullanılan ve bilinen kavramlardır. Stokastik Portföy Teorisi'nde ise fiyat hareketleri, getiri ve büyüme kavramları stokastik süreçler olarak tanımlanmaktadır. Bununla birlikte bu süreçleri tanımlamakta kullanılan parametreler Modern Portföy Teorisi'nde kullanılan getiri ve risk parametreleri cinsinden ifade edilebilmektedir. Her iki teoride kullanılan kavramlar bu bölümde kısaca anlatılmıştır. Stokastik Portföy Teorisi kavramları çalışmanın ikinci bölümünde ayrıntılı olarak ele alınmaktadır.

---

[11] Eeckhoudt, **op.cit.** , p.16.

1.3.1. Getiri ve Risk

Ortalama-varyans yöntemi (Modern Portföy Teorisi) ile portföy optimizasyonu yapılırken portföyü oluşturan varlıkların beklenen getiri ve riskleri hesaplanmalıdır. Gelecekte gerçekleşecek getirileri tahmin etmekteki güçlükler nedeniyle, genellikle geçmiş dönem piyasa fiyat serileri kullanılarak beklenen getiriler hesaplanmaktadır. Bir i varlığının dönemsel getirisi (getiri oranı) aşağıdaki biçimde hesaplanabilir;

$$r_i = \frac{v_{it} - v_{i(t-1)}}{v_{i(t-1)}} \quad . \qquad 1.9$$

v_{it} = varlığın dönem sonundaki fiyatı,

$v_{i(t-1)}$ = varlığın bir önceki dönem sonundaki fiyatı.

Dönemsel getiri sürekli bileşik biçimde ise şöyle tanımlanmaktadır;

$$r_i = \ln\left(\frac{v_{it}}{v_{i(t-1)}}\right) \quad . \qquad 1.10$$

Beklenen getiriler ise dönemsel getirilerin aritmetik ya da geometrik ortalamaları alınarak bulunmaktadır. Varlığın geçmiş dönemlere ait verilerinden elde edilen beklenen getirisi aritmetik olarak;

$$\overline{r_i} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it} \quad , \qquad 1.11$$

ya da geometrik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\overline{r_i} = \left[\prod_{t=1}^{T}(1 + r_{it})\right]^{\frac{1}{T}} - 1. \qquad 1.12$$

Ortalama-varyans optimizasyon uygulamalarında bu iki yöntem de kullanılmaktadır. Risk (varyans) ise, varlığın beklenen getirisinden sapma olarak tanımlanır ve aşağıdaki biçimde ifade edilir;

$$\sigma_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{r_i})^2 \ . \qquad 1.13$$

Fakat portföyün risk tanımı yapılırken varlıkların tek tek risklerini göz önüne almak yeterli olmaz, aynı zamanda portföyü oluşturan varlıkların o dönem içinde birbirlerine göre hareketleri de hesaba katılmalıdır. Varlıklar arasındaki bu karşılıklı değişkenlik (kovaryans), portföy riskini etkiler ve şöyle ifade edilir;

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \overline{r_i})\left(r_{jt} - \overline{r_j}\right). \qquad 1.14$$

Portföy içerisindeki varlıkların ayrı ayrı riskleri ve karşılıklı değişkenlikleri portföy riskini oluşturmaktadır. Bu karşılıklı değişkenliğin ölçülmesinin önemi çeşitlendirmenin bir risk getiri optimizasyonu çerçevesinde yapılabilmesidir. Çeşitlendirmenin amacı farklı yönlerde fiyat hareketleri gösteren varlıkların portföy içinde bulundurulması, bir varlığın fiyatındaki düşüşün başka bir varlığın fiyat artışı ile telafi edilebilmesidir.[12]

---

[12] Harry M. Markowitz, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1959,pp.82-83.

1.3.2. Fiyat Hareketleri Süreci

Stokastik Portföy Teorisi çerçevesinde varlık fiyat hareketleri stokastik süreçler olarak tanımlanmaktadır. Varlığın kısa bir zaman aralığındaki aritmetik getirisi, zaman aralığı ile çarpılan bir sürüklenme hızı artı rassal bir oynaklık olarak tanımlanır. Sürüklenme hızı anlık beklenen aritmetik getiri (sürekli bileşik biçimde) olarak düşünülebilir. Rassal oynaklık getirilerin standart sapması ile ortalaması sıfır ve standart sapması zaman aralığının karekökü olan bir rassal değişkenin (Geometrik Brown Hareketi) çarpımından oluşmaktadır. Bu tanım matematiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir;[13]

$$\frac{dv_i}{v_i} = r_i\,dt + \sigma_i\,dW_i \qquad 1.15$$

v_i = varlığın fiyatı,

r_i = varlığın beklenen aritmetik getirisi,

$dt =$ kısa zaman aralığı,

σ_i = varlığın aritmetik getirisinin standart sapması,

dW_i = ortalaması sıfır, standart sapması $\sqrt{dt}$ olan rassal bir değişken.

Varlığın kısa zaman aralığındaki sürekli getirisi ise fiyatının logaritmasındaki değişim olarak tanımlanmaktadır. Sürekli getiri, sürüklenme oranı ve rassal bir

---

[13] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve, **Methods of Mathematical Finance,** Springer-Verlag, NewYork, 1998, p.3.

oynaklık toplamı olarak kısa zaman aralığındaki aritmetik getiri formuna benzer biçimdedir;

$$d \ln (v_i) = \mu_i \, dt + \sigma_i \, dW_i. \qquad 1.16$$

Sürekli getiri oranı standart sapması aritmetik getiri standart sapması ile aynıdır. Varlığın sürekli getiri sürüklenme oranı μ_i ise varlığın büyüme oranı olarak adlandırılır. Bu varlığın anlık beklenen sürekli getirisidir ve varlığın uzun dönemde aritmetik getirisine denk gelmektedir;

$$\mu_i = (r_i - \frac{\sigma_i^2}{2}) \, . \qquad 1.17$$

Yukarıdaki denklemde görüldüğü gibi bir varlığın büyüme hızı, varlığın aritmetik getiri sürüklenme oranından varyansının yarısı kadar daha azdır. Bu bir varlığın uzun dönemli aritmetik getirisinin beklenen aritmetik getirisinden varyansının yarısı kadar az olacağı anlamına gelmektedir. Buradan bir varlığın beklenen aritmetik getirisinin uzun dönemde de, kısa döneme benzer biçimde değişmeden kalacağı varsayımının yanlış olduğu sonucuna varılmaktadır.[14]

Çalışmanın ikinci bölümünde varlık fiyat hareketlerinin stokastik süreçler olarak tanımlanması ve altında yatan piyasa varsayımları, Geometrik Brown Hareketi ve matematiksel evrimi geniş biçimde ele alınmaktadır.

[14] Robert E. Fernholz, **Stochastic Portfolio Theory**, New York, NY: Springer-Verlag, 2002, p.23.

1.4. Modern Portföy Teorisi

Bir yatırım kararı verilirken ölçüt olarak riskten kaçınma kullanılacaksa yatırımcının fayda fonksiyonu tam olarak bilinmelidir. Fayda fonksiyonun her yatırımcı için farklı olması ve belirlenmesindeki güçlükler nedeniyle, fayda fonksiyonu yerine izlenebilir parametreleri risk kriteri olarak kullanmak daha tercih edilir bir yöntem olarak ortaya çıkmıştır. Getiri ve riski kolay anlaşılır ve hesaplanabilir bir biçimde tanımlayan ve Modern Portföy Teorisi'nin özünü oluşturan ortalama-varyans yöntemi finans alanında yaygın olarak kullanılan karar alma aracı olmuştur. Ortalama-varyans yöntemi portföyü oluşturan bütün varlıkların beklenen getiri ve risklerini ilişkilendirerek istenilen risk ve getiri düzeylerine göre optimum portföy bileşimine ulaşmayı amaçlamaktadır. [15]

Varlık sayısı n olan bir portföyün beklenen getirisi aşağıdaki biçimde hesaplamaktadır;

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} r_i \; w_i \,. \qquad 1.18$$

μ_p = portföyün beklenen getirisi,

r_i = portföy içindeki i varlığının beklenen getirisi,

w_i = i varlığının portföy içerisindeki ağırlığı.

[15] Markowitz, **op.cit.,** pp.155-157.

Bu portföyün varyansı ise şu şekilde oluşur;

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \ w_j \ \sigma_{ij} \ . \qquad 1.19$$

σ_p^2 = portföyün varyansı,

σ_{ij} = portföyün içindeki $i \ ve \ j$ varlıklarının kovaryansı.

Ortalama-varyans optimizasyonu belli risk düzeyi (varyans) için beklenen getiriyi maksimize ederek portföy içindeki varlık ağırlıklarını vermektedir. Bu problem matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\sigma_{opt}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \ w_j \ \sigma_{ij} \qquad 1.20$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad 1.21$$

olacak biçimde

$$Max \ \mu_p = \sum_{i=1}^{n} r_i \ w_i. \qquad 1.22$$

σ_{opt}^2 = ulaşılmak istenilen optimum portföy riski.

Ortalama-varyans yöntemi ile farklı risk (σ^2) ve beklenen getiri (μ) değerleri olan sonsuz sayıda optimum portföy oluşturulabilir. Bu portföylerden birisinin diğerine göre tercih edilmesi şu koşullara bağlıdır;

$$p_i \succcurlyeq p_j \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_i < \sigma_j \quad ve \quad \mu_i \geq \mu_j \\ \qquad veya \\ \sigma_i \leq \sigma_j \quad ve \quad \mu_i > \mu_j \end{cases}.$$

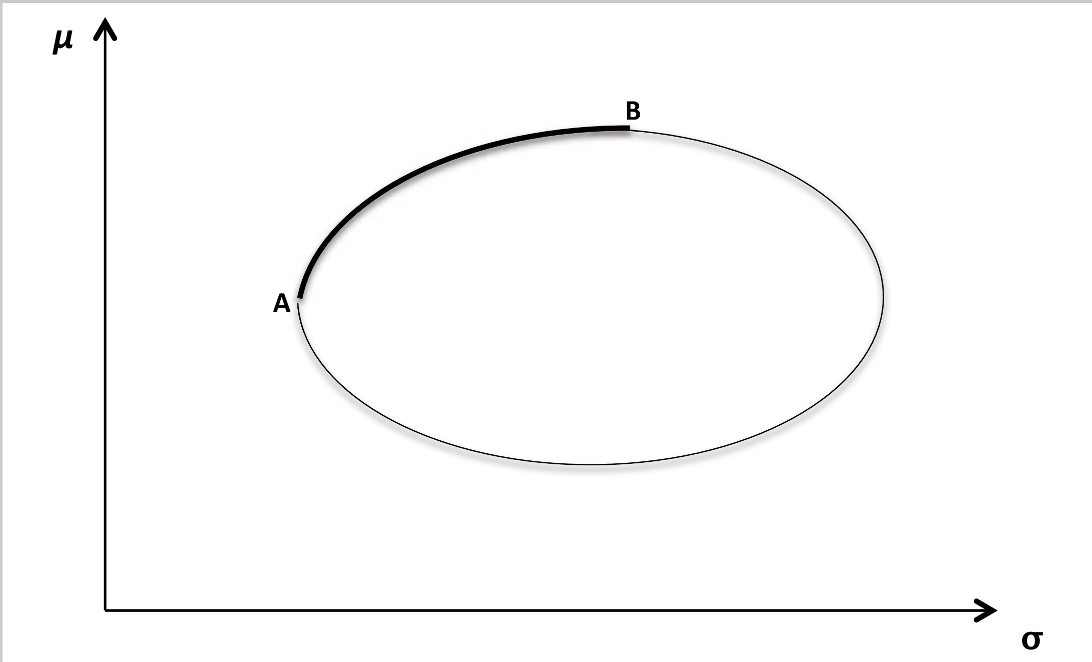
Portföy p_i'nin, portföy p_j'ye tercih edilmesi için gerekli koşul $\sigma_i \leq \sigma_j$ ve $\mu_i \geq \mu_j$ olmasıdır. Daha düşük risk ve daha yüksek beklenen getiri bir portföyün diğerine tercih edilmesi için yeterlidir. Diğer olasılıklar $\sigma_i > \sigma_j$ ve $\mu_i > \mu_j$ durumunda ise herhangi bir yargıya varılamaz. [16]

Şekil 1.1'de bütün olası portföyler bir μ, σ düzleminde gösterilmektedir. Yukarıda verilen kriterlere göre başka bir alternatife göre tercih edilmeyecek olanların dışındaki portföyler bütün alternatiflerin yer aldığı ovalin sol üst bölümünde A ve B noktaları arasında yer almaktadırlar. Bu alternatifler etkin portföyler olarak adlandırılmakta ve etkin sınırı oluşturmaktadırlar.

---

[16] Andreas Krause "An Overview of Asset Pricing Models", (Çevrimiçi) http://people.bath.ac.uk/mnsak/Research/Asset_pricing.pdf, 2001, p.24.

Şekil 1.1 : Markowitz Etkin Sınır



Kaynak: Erdinç Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri** , Derin Yayınları,İstanbul 2004, s.28.

1.4.1. Kayıtsızlık Eğrileri

Ortalama-varyans optimizasyonu etkin sınır üzerinde yer alan ve diğer risk getiri alternatiflerine göre üstün olarak nitelendirilen bütün portföyleri tanımlamaktadır. Fakat herhangi bir yatırımcının bu portföylerden hangisini tercih etmesi gerektiği ek bir bilgi olmadan belirlenemez. Bu ek bilgi de ancak yatırımcının fayda fonksiyonu ile sağlanabilir. Yatırımcının fayda fonksiyonundan ne kadar ek getiri için ne kadar daha fazla riske katlanabileceğini gösteren kayıtsızlık eğrisi çizilerek, o yatırımcı için optimum portföy bulunabilir. Aşağıda kayıtsızlık eğrileri ve etkin sınır ilişkisi açıklanmaktadır;[17]

[17] **Ibid.**, p.27.

Fayda fonksiyonu sadece getirilerin ortalama ve varyanslarına bağlı olacak biçimde ikinci dereceden $U(\mathrm{x}) = x - bx^2$ şekilde yazılırsa;

$$U'(\mathrm{x}) = 1 + 2bx \qquad 1.23$$

$$U''(\mathrm{x}) = 2b \qquad 1.24$$

fayda fonksiyonunun birinci ve ikinci dereceden türevleri olur. Bu durumda riskten kaçınma katsayısı aşağıdaki biçimde oluşur;

$$z = -\frac{U''(\mathrm{x})}{U'(\mathrm{x})} = -\frac{2b}{1 + 2b\,\mu} \qquad 1.25$$

Riskten kaçınan yatırımcı ve pozitif marjinal fayda varsayımı geçerli ise $b < 0$ olmalıdır. Fakat $b < 0$ ise fayda fonksiyonun birinci türevinden marjinal fayda yalnızca şu durumda pozitif olmaktadır;

$$\mu < -\frac{1}{2b} \ . \qquad 1.26$$

Beklenen fayda ikinci dereceden fonksiyon için şöyle yazılabilir;[18]

$$E[U(\mathrm{x})] = \mathrm{E}[x - bx^2] = \mu + \mathrm{E}[x^2] = \mu + b\,(\mu^2 + \sigma^2). \qquad 1.27$$

Kayıtsızlık eğrileri ise iki tarafın da türevleri alınarak elde edilir;

$$dE[U(\mathrm{x})] = (1 + 2b\mu)\,d\mu + 2\sigma\,d\sigma = 0. \qquad 1.28$$

Buradan kayıtsızlık eğrilerinin eğimi (μ, σ) düzleminde aşağıdaki biçimde oluşur;

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{2b\sigma}{1 + 2b\mu} = z\sigma > 0. \qquad 1.29$$

---

[18] **Ibid.**, p.28.

Riskten kaçınan yatırımcı için kayıtsızlık eğrileri eğiminin pozitif olması gereklidir. Bu denklem μ için çözüldüğünde kayıtsızlık eğri denklemine ulaşılır;

$$E[U(\mathrm{x})] = \mu + b\mu^2 + b\sigma^2 \qquad 1.30$$

$$\mu^2 + \frac{1}{b}\mu + \sigma^2 = \frac{E[U(\mathrm{x})]}{b} \qquad 1.31$$

$$\left(\mu + \frac{1}{2b}\right)^2 + \sigma^2 = \frac{1}{b}\, E[U(\mathrm{x})] + \frac{1}{4b^2}\,. \qquad 1.32$$

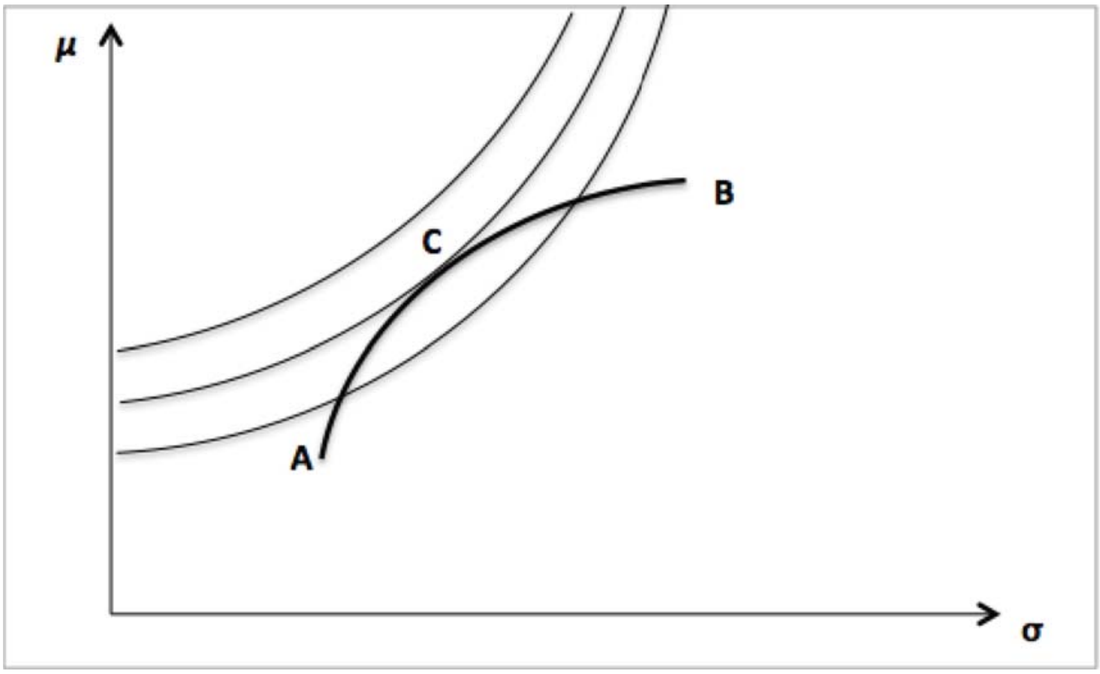
Marjinal faydanın pozitif kalması için geçilmemesi gereken beklenen getiri değeri $r^* = -\frac{1}{2b}$ olarak tanımlanırsa kayıtsızlık eğri denklemi aşağıdaki formda yazılabilir;

$$(\mu - r^*)^2 + \sigma^2 = -2r^*\, E[U(\mathrm{x})] + 2r^* \equiv R^2\,. \qquad 1.33$$

Bu merkezi $\mu = r^*, \sigma = 0$ ve yarı çapı R olan bir çember denklemidir. Riskten kaçınma katsayısı ile ilgili tek bir parametreye (b), sahip olan bu kayıtsızlık eğrisi ile etkin sınır tek bir noktada buluşmalıdır. Portföyler arasından optimal olan alternatif kayıtsızlık eğrisi ile etkin sınırın tek buluşması noktası olan teğet noktasıdır.[19] Optimum alternatif, Şekil 1.2'de (μ, σ) düzleminde C noktası ile gösterilmektedir.

[19] William F. Sharpe, **Portfolio Theory and Capital Markets,** New York, 1970, pp.198-200.

Şekil 1.2 : Optimum seçeneğin belirlenmesi



Kaynak: Erdinç Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri** , Derin Yayınları,İstanbul 2004, s.32.

1.4.2. İkinci Dereceden Fayda Fonksiyonu ve Optimum Portföy Seçimi

Ortalama-varyans modelinde beklenen faydanın, denklem 1.30'da görüldüğü üzere, sadece getirilerin ortalama ve varyansına bağlı olması ikinci dereceden bir fayda fonksiyonuna işaret etmektedir. Bu, modelin farklı fayda fonksiyonları için optimum seçimleri sağlamayacağı eleştirilerine neden olmaktadır. Modelin ancak ikinci dereceden fayda için optimal olduğu aşağıda gösterilmektedir;[20]

[20] Levy, **op.cit**., p.385.

Eğer portföy p_i, portföy p_j'ye tercih edilecekse , $p_i \succ p_j$, portföylerin beklenen faydalarının aşağıdaki denklemi sağlaması gerekir;

$$E[U(p_i)] > E\left[U\left(p_j\right)\right]$$

İkinci dereceden fayda fonksiyonları yerine konulduğunda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\mu_i + b\mu_i^2 + b\sigma_i^2 > \mu_j + b\mu_j^2 + b\sigma_j^2,$$

$$\mu_i - \mu_j + b\left(\mu_i^2 - \mu_j^2\right) + b\left(\sigma_i^2 - \sigma_j^2\right) = (\mu_i - \mu_j)[1 + b(\mu_i + \mu_j)$$

$$+b\left(\sigma_i^2 - \sigma_j^2\right) > 0 \qquad 1.34$$

Eşitsizlik $-2b > 0$ ile bölündüğünde aşağıdaki sonuca ulaşılır;

$$(\mu_i - \mu_j)\left[-\frac{1}{2b} - \frac{(\mu_i + \mu_j)}{2}\right] - \frac{\sigma_i^2 - \sigma_j^2}{2} > 0 \qquad 1.35$$

Burada marjinal faydanın pozitif olması gerektiği varsayımı ile $-\frac{1}{2b} > \mu_i$ ve $-\frac{1}{2b} > \mu_j$ olmalıdır. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır;

$$-\frac{1}{2b} > \frac{\mu_i + \mu_j}{2}. \qquad 1.36$$

Denklem 1.35'teki ilk terim $\mu_i > \mu_j$ ve $b > 0$ varsayımları ile pozitiftir. Ortalama-varyans kriterlerinin belirttiği üzere $\sigma_i^2 \leq \sigma_j^2$ koşulu sağlanıyorsa ikinci dereceden fayda fonksiyonu doğru portföy tercihine ulaşmış demektir.[21]

---

[21] **Ibid.**, p.385.

$\sigma_i^2 > \sigma_j^2$ durumunda ise hangi alternatifin tercih edileceği belirlenemez. $\mu_i = \mu_j$ durumunda p_i portföyünü p_j portföyüne tercih etmek için $\sigma_i^2 < \sigma_j^2$ olmalıdır. Bu tam olarak ortalama-varyans kriterinin işaret ettiği durumdur. Böylece fayda fonksiyonunun ikinci dereceden olduğunda ortalama-varyans kriterinin optimum seçimi verdiği kanıtlanmış olur. İkinci dereceden fayda fonksiyonu ortalama-varyans kriteri için sadece yeterli değil aynı zamanda gerekli bir koşuldur.[22]

Portföy teorisi çerçevesinde geliştirilen birçok modelde sabit bir riskten kaçınma katsayısı varsayımı yapılmaktadır. İkinci dereceden bir fayda fonksiyonu ile, sabit bir riskten kaçınma katsayısı, ancak beklenen getirinin çok fazla değişkenlik göstermediği kısa dönem için varsayılabilir. Sabit riskten kaçınma katsayını uzun dönemde ancak üstel veya logaritmik fayda fonksiyonları sağlayabilir. Bu nedenle çok dönemli yatırım analizlerinde logaritmik fayda fonksiyonu varsayımı daha doğru bir yaklaşımdır.[23]

1.5. Logaritmik Fayda Fonksiyonu

Genel olarak bir dönem için yatırım kararı almak ve bunu uzun döneme uyarlamak optimum sonucu vermemektedir. Fakat bazı fayda fonksiyonları kullanılarak bu yöntem ile çok dönemli yatırım kararlarında optimum sonuca ulaşmak mümkündür. Bu fayda fonksiyonlarından en çok kullanılanı logaritmik fayda fonksiyonudur.[24]

---

[22] **Ibid.**, p.386.

[23] Pratt, **op.cit**., p.132.

[24] Mossin, **op.cit**., p.223.

Çok dönemli bir yatırımın getirisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$X_k = R_k X_{k-1} \qquad 1.37$$

Burada X_k k'inci dönem sonundaki sermaye, R_k bu dönem için rassal getiri değişkeni olmaktadır. Burada bütün R_k değerlerinin birbirlerinden bağımsız ve eşit olasılık dağılımlarına sahip olan durağan ve bağımsız süreçler olduğu varsayılmaktadır. Bu önceki sonuçların içinde bulunulan dönem yatırımını etkilememesi anlamına gelmektedir. Genel sermaye büyümesi sürecinde *n* dönem sonunda sermaye şu değeri alır;[25]

$$X_n = R_n X_{n-1} \ldots\ldots.. R_2 R_1 R X_0 \,. \qquad 1.38$$

İki tarafın da logaritması alındığında ,

$$\ln X_n = \ln X_0 + \sum_{K=1}^{n} \ln R_k \qquad 1.39$$

elde edilir. Bu denklem basit bir manipülasyonla aşağıdaki biçimde de yazılabilir ;

$$\ln\left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \ln R_k \qquad 1.40$$

[25] David Luenberger, **Investment Science,** Oxford University Press Inc., New York, 1998, p.419.

Bütün $\ln \mathrm{R_k}$ terimleri rassal değişkenlerdir ve bağımsız ve eşit olasılık dağılımlarına sahiptirler. Bu büyük sayılar yasasından faydalanılarak eşitliğin sağ tarafının $n \rightarrow \infty$ durumunda

$$\frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \ln \mathrm{R_k} \rightarrow \ E\ (\ln R_1) \qquad 1.41$$

olarak yazılmasına olanak verir. Bütün k'ler için beklenen değer aynı olduğundan E $(\ln R_k)$, E $(\ln R_1)$ olarak yazılabilir. $m =$ E $(\ln R_1)$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır;

$$\ln \left(\frac{\mathrm{X_n}}{\mathrm{X_0}}\right)^{1/n} \rightarrow m. \qquad 1.42$$

İki tarafın da antilogaritmaları alınıp ve n kuvvetine yükseltildiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmaktdır;

$$\left(\frac{\mathrm{X_n}}{\mathrm{X_0}}\right)^{1/n} \rightarrow e^{m} \qquad 1.43$$

$$\mathrm{X_n} \rightarrow \ \mathrm{X_0} e^{mn}. \qquad 1.44$$

Büyük n değerleri için sermaye kabaca üstel olarak n ile m hızında büyümektedir. Bir başka deyişle m sayısı uzun dönemli tekrarlanan yatırımların büyüme hızını göstermektedir. Bu nedenle m değerini büyütecek yatırım stratejisi seçilmesi uygun olacaktır.[26]

Eğer m sayısına sabit $\ln X_0$ eklenirse aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$m + \ln X_0 = E(\ln R_1) + \ln X_0 = E(\ln R_1 X_0) = E(\ln X_1) \qquad 1.45$$

Fayda fonksiyonu *U(X)* = ln *(X)* olarak tanımlandığında büyüme oranı m'in maksimize edilmesi problemi beklenen faydanın $E[U(X_1)]$ maksimize edilmesi problemine ve bu stratejiyi her dönemde kullanmaya denk olmaktadır. Başka bir deyişle logaritmayı fayda fonksiyonu olarak kullanarak çok dönemli yatırım problemine tek dönemli bir problem olarak yaklaşma olanağı vardır. Beklenen logaritma kriter olarak kullanılarak, en iyi ilk dönem yatırımı ile optimum büyüme stratejisine ulaşılabilir.[27]

1.5.1. Kelly Kriteri

Logaritmik fayda fonksiyonu yaklaşımının bir örneği Kelly Kriteri'nde görülmektedir. Bu kritere göre bir bahisçi ya da yatırımcı parasının belli bir oranını aynı olasılıkla kazanma şansı bulunacak biçimde tekrarlayarak yatırırsa kazancı üstel bir biçimde artar ya da azalır. Burada artma ya da azalma bu olasılığın oranına bağlı olmaktadır.[28]

---

[26]**Ibid.** , p.420.

[27] **Ibid.**, p.421.

[28] John L. Kelly, "A New Interpretation of Information Rate", **Bell System Technical Journal**, 35, No.4, 1956, pp. 921.

Bu durum oynanan kartları belleğinde tutabilen bir oyuncunun durumuna benzetilebilir. Oyun stratejisini kalan kağıtların kompozisyonuna göre belirleyen bir oyuncunun herhangi bir eli kazanması şansının % 50,75 olduğu varsayıldığında, p = 0,5075 olmaktadır. Her oyun için yatırılan miktar α ile gösterilirse, oyuncu en iyi α değerini bulmaya çalışacaktır. Eğer oyuncu kazanırsa, sermayesi 1 – α + 2α = 1 + α oranında artacaktır. Kaybederse bu faktör 1 – α olacaktır. Bu nedenle α'nın log optimal değerinin bulunması için aşağıdaki denklemin maksimize edilmesi gerekir;

$$m = p\ \ln(1 + \alpha) + (p - 1)\ \ln(1 - \alpha) \qquad 1.45$$

Maksimizasyon türevin α'ya göre sıfıra eşitlenmesi ile sağlanır;

$$\frac{p}{1 + \alpha} - \frac{1 - p}{1 - \alpha} = 0 \qquad 1.47$$

$$p\,(1 - \alpha) - (1 - \mathrm{p})(1 + \alpha) = 0 \qquad 1.48$$

Buradan $\alpha = 2\mathrm{p} - 1$ elde edilir. Sonuç olarak oyuncu her oyunda sermayesinin %1.5'ni yatırmalıdır. Verilen p olasılığı ve %1.5 yatırım oranı ile bu yatırım fazla sayıda tekrarlanırsa sermaye büyümesi garanti olacaktır. Burada büyümeyi garanti eden logaritmanın tekrarlanan yatırımlarda toplamsal (additive) özelliğidir.[29]

1.5.2. Dinamik Dengeleme

Logaritmik fayda fonksiyonu fiyat dalgalanmalarından yararlanılarak sürekli bir portföy büyümesi sağlanmasında da kullanılabilir. Portföyü oluşturan varlıklara yapılan yatırım her dönem başında yeniden dengelenerek, yatırım ağırlıkları sabit

[29] **Ibid.,** pp.922.

olduğunda elde edilemeyecek büyüme oranlarına ulaşılabileceği gibi iflas riski de ortadan kaldırılabilir.[30]

Yatırım için iki varlığın olduğu bir durum varsayılsın. Varlıklardan birisi eşit olasılıkla her dönem için ya iki katı getiri sağlamaktadır ya da değeri yarı yarıya azalmaktadır. Diğer varlık yastık altında para saklamak gibi değerini olduğu gibi korumaktadır. Bu iki yatırım da çok çekici görünmemektedir. İlk yatırımın değeri çok fazla dalgalanmakta fakat toplamda büyüme oranı yaratmamakta, diğeri hiç büyümemektedir. Buna rağmen bu iki yatırım birlikte kullanılarak büyüme sağlanabilir. [31]

Her dönem sermayenin yarısının her bir varlığa yatırıldığı düşünülsün. Böylece her dönem başında her bir varlığa o anki sermayenin yarısı yatırılacak biçimde yeniden dengeleme yapılmış olacaktır. İlk varlığın kazandığı dönemlerde sermaye büyümesi oranı $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{2}$ kaybedilen dönemlerde ise $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ olacaktır. Bu stratejinin beklenen büyüme oranı

$$m=\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) \approx 0.059 \qquad 1.49$$

olacaktır. Böylece $e^{m}=1.0607$, portföyün kazancı da dönem başına yaklaşık olarak %6 olur. Burada, kazanç varlıkların oynaklığından yararlanılarak yatırılan sermayenin dengelenmesi yoluyla elde edilmektedir. Varlık değeri belli bir dönemde yükseldiğinde bir miktar kazanç kenara konulmakta, tersine olan dönemlerde ise ek

[30] Luenberger, **op.cit.,** p.422.

[31] **Ibid.**

sermaye varlığa yatırılmaktadır. Sermaye iki varlık arasında pompalanarak tek bir varlığa yatırım yapılarak elde edilemeyecek büyüme sağlanmaktadır. Bu strateji aslında ortalamada "düşükken al yüksekken sat" mantığının sermaye dengelemesi yoluyla uygulanmasıdır. Sonuç olarak büyümeyi sağlayan da bu mantık olmaktadır.[32]

Yukarıda verilen örnekteki iki varlığın değerinin her dönem eşit olasılıklarla iki katına çıktığı ya da yarıya indiği, varlıkların birbirlerinden bağımsız hareket ettiği ve her dönem başında sermayenin her iki varlığa eşit oranda dağıtılacak biçimde dengelendiği bir durumda büyüme aşağıdaki biçimde oluşacaktır;

$$m = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = 0.1116 \ . \qquad 1.50$$

Buradan $e^{m} = \sqrt{\frac{5}{4}} = 1.118$ bulunarak her dönem için %11.8'lik bir büyüme oranına ulaşılır. Bu örnekte sermaye dengelenmesi ile öncekine göre daha yüksek bir büyüme oranına ulaşılmaktadır. Bunun nedeni iki varlığın değerinin de oynaklık göstermesidir.[33]

Her dönem için getirileri rassal ve aynı olasılık dağılımına sahip R_i, $i = 1,2,3....,n$ olan n adet hisse senedinden, $w_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ olacak biçimde $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ ağırlıkları ile bir portföy oluşturulduğunda, portföyün toplam getirisi $R = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$ olacaktır. Maksimum olası büyüme oranını elde etmek için, ağırlıklar $m = \mathrm{E}(ln\, R)$ maksimize olacak şekilde seçildiğinde, portföyün ortalama olarak, k dönem sayısı olmak üzere, e^{mk} oranında , büyüyeceği beklenmelidir.[34]

[32] **Ibid.**, p.423.

[33] **Ibid.**

[34] **Ibid.**, p.424.

Log optimal stratejiler beklenen büyüme oranını maksimize ederler fakat kısa dönemde büyüme hızı farklılık gösterebilir. Bununla birlikte log optimal stratejiler için kesin önermeler de yapmak mümkündür. İki yatırımcının aynı X_0 sermaye seviyesi ile yatırıma başladıkları, A ile gösterilen ilk yatırımcının log optimal bir strateji, B ile gösterilen diğer yatırımcının başka bir (m değeri daha küçük olan) strateji kullandığı varsayıldığında, Sonuç sermayeleri bu yatırımcılar için $k = 1, 2, \ldots$ dönemler olmak üzere X_k^A ve X_k^B olarak tanımlanırsa bütün k değerleri için

$$E\,(X_k^B \,/\, X_k^A) \leq 1 \qquad 1.51$$

olduğu gösterilebilir. Bu, alternatif strateji B'nin sermayesinin log-optimal strateji A'nın sermayesinden her dönemde daha az beklenen değere sahip olduğunu göstermektedir. [35]

1.6. Çok Dönemli Portföy Analizi

Çok dönemli portföy planlamasının genel amacı nihai serveti ve her dönem tüketiminin faydasını maksimize ederek her dönem için optimum tüketim ve varlık yatırım oranlarına ulaşmaya çalışmaktır. Bu tür modeller genellikle nihai servetin sıfır olması gerektiğini varsayarak her dönem için tekrarlanan algoritmalarla yatırım ve tüketim miktarlarını optimize etmeye yönelmiştir. Bu bölümde öncelikle tek dönemli örneklere yer verilmiş genel bir analizden sonra ikinci dereceden ve logaritmik fayda fonksiyonu ile yapılan optimizasyonlar incelemiş ve ancak

---

[35] Paul H. Algoet, Thomas M. Cover, "Asymptotic Optimality and Asymptotic Equipartition Properties of Log-Optimum Investment", **The Annals of Probability**, Volume 16, 1988, p. 881.

logaritmik fayda fonksiyonu kullanımının analizi ilk servet düzeyinden bağımsız hale getirebileceği gösterilmiştir. Analizin ilk servetten bağımsız olması pratikte kullanılabilir ve optimizasyonun çok dönemli portföy problemlerinin çözümünde de uygulanabilir olması anlamına gelmektedir. Daha sonra genel bir, çok dönemli model incelenerek hangi varsayımlarla modelin tüketim ve servet parametrelerinden bağımsız hale gelebileceği ve durumda logaritmik ve üslü fayda fonksiyonlarının rolü açıklanmıştır.

Fayda fonksiyonlarından türetilen ve risk primi ile ilişkilendirilen riskten kaçınma katsayıları temel kavramlar olarak geliştikçe,[36] fayda fonksiyonları ve riskten kaçınma katsayılarını portföy optimizasyonuna uygulayan çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.[37] Modern Portföy Teorisi ve ortalama-varyans modelinin ancak ikinci dereceden fayda fonksiyonu varsayımı ile optimum çözümü verdiğinin kanıtlanması (bkz. 1.4.2) ve bu çözümün çok dönemli analizler için geçerliliğin sorgulanması da daha genel yaklaşımlar aranmasına yol açmıştır. Riskten kaçınma fonksiyonları bu yaklaşımlar için dayanak olmaktadır. Bunlar mutlak ve göreli riskten kaçınma fonksiyonlarıdır;[38]

$$R_a(Y) = -\left(\frac{U''(Y)}{U'(Y)}\right) \qquad 1.52$$

[36] John W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", **Econometrica**, vol. 32, 1964, pp.122-136.

[37] Jan Mossin, "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", **Journal of Business**, Vol. 41, Nr.2, pp. 215-229.

[38] Pratt, **op.cit**., pp.125-128.

$$R_r(Y) = -\left(\frac{U''\,(Y)}{U'\,(Y)}\right)Y \qquad 1.53$$

$R_a(Y)$ = Mutlak riskten kaçınma katsayısı

$R_r\ (Y)$ = Göreli riskten kaçınma katsayısı

$Y =$ Beklenen nihai servet.

Fayda fonksiyonları baz alınarak yapılan çok dönemli analizler öncelikle tek dönemli analiz ve bunun çok döneme uygulanması biçimindedir. Bu nedenle öncelikle tek dönemli genel, ikinci derecen ve logaritmik (sabit varlık katsayısı) fayda fonksiyonları ile yapılan analizlere aşağıda yer verilmektedir.

Tek dönemli yatırım modelinde yatırımcı portföy kararını dönem başında yapar ve dönem sonuna kadar getirisinin gerçekleşmesini bekler. Dönem içinde portföyünde bir değişiklik yapmaz. Yatırımcı kararını dönem sonu yatırımının (nihai servet) beklenen değerini maksimize etmek amacıyla verir. Çok dönemli yatırım analizlerine de tek dönemli yatırım problemi olarak bakılmakta ve tek dönemli çözümler dinamik programlama yöntemleri ile çok dönemli alana aktarılmaktadır.

Genel bir fayda fonksiyonu tanımı ve rassal getirili tek bir riskli varlık ile tek dönemli analiz bu tür portföy optimizasyonu yaklaşımının en basit örneğidir. Riskli varlığa yatırılan her birim rassal X getiri oranı, ilk servetin geri kalan kısmı ise sabit ve sıfır getiri sağlamaktadır. İlk serveti A olan bir yatırımcı bu servetinden a kısmını riskli varlığa yatırdığında son serveti aşağıdaki rassal değişken olmaktadır;

$$Y = A + a\,X \qquad 1.54$$

Nihai servet değeri seçimine göre belirlenecek fayda fonksiyonuna göre a'nın optimal değeri, a<0<A koşulu ile, E*[U(Y)]* beklenen getirisini maksimize eden değerdir. E *[U(Y)]* beklenen değerinin ilk iki türevi aşağıdaki gibidir;

$$\frac{dE\ [U(Y)]}{da} = E\ [U'(Y)\ X] \qquad 1.55$$

$$\frac{d^2E\ [U(Y)]}{d^2a} = E\ [U''(Y)\ X^2] \qquad 1.56$$

Genel olarak yatırımcıların riskten kaçınacağı varsayıldığında ikinci türev negatiftir, ($U'' < 0$). Böylelikle tek bir maksimum garantilenmiş olur. Bu maksimum iki son noktadan birinde olabilir, $\mathrm{a} = 0$ ya da $\mathrm{a} = \mathrm{A}$. Maksimumun $\mathrm{a} = 0$ noktasında gerçekleşmesi $dE\ [U(Y)]/da$'nin negatif olması demektir ki bu da $E(X) \leq 0$ anlamına gelecektir. Bu nedenle yatırımcı sadece getirinin beklenen değeri pozitif ise riskli varlığı portföyünde bulunduracaktır.[39]

Maksimum 0<a< A aralığında ise *E [U'(Y) X]* = 0 olacaktır. Optimum a değerinin ilk servete olan bağımlılığını göstermek için *E [U'(Y) X]* fonksiyonunun A'ya göre türevini almak yeterlidir;

$$\frac{da}{dA} = -\ \frac{E\ [U'(Y)\ X]}{E\ [U''(Y)\ X^2]} \qquad 1.57$$

Bu tek varlıklı basit yatırım örneği tek dönemli bir optimizasyon için yeterli çözüm olarak görülebilir. Fakat bu sonuçtan görüldüğü biçimde optimizasyon sonucunu ilk servet olan A, değerine bağlıdır. Bu bağımlılık her dönem için yatırımcının servetinin ne kadarını tüketeceği ve ne kadarını tekrar yatırım için kullanacağı

---

[39] Mossin, **op.cit**., p. 216.

sorusunun çözümünü gerektirmektedir. Burada tek dönemli yatırım problemini çok dönemli alana aktarmakta aşılması gerekli bir sorun ortaya çıkmaktadır.[40]

1.6.1. İkinci Derecen Fayda Fonksiyonu ile Çok Dönemli Portföy Analizi

Servet, *Y,* rassal değişkeninin olasılık dağılımının, Modern Portföy Teorisi'nin varsayımında olduğu biçimde ortalama ve varyans cinsinden tanımlandığında fayda fonksiyonu aşağıdaki formda, yani ikinci dereceden olmaktadır;

$$U(Y) = Y - \alpha Y^2. \qquad 1.58$$

Bu durumda riskli varlığa yapılan optimum yatırım oranı, *a* aşağıdaki beklenen değer denklemini maksimize eden değer olmaktadır;

$$E[U(Y)] = E[A + aX - \alpha (A + a X)^2]$$

$$= (A - \alpha A)^2 + (1 - 2\alpha A)Ea - \alpha (V + E^2)\ a^2. \qquad 1.59$$

Burada *E* ve *V,* sırasıyla *X*'in beklenen değeri ve varyansıdır. Riskten kaçınma değer aralığında oluşan maksimum noktası ise aşağıdaki biçimde oluşur;

$$a = \frac{(1 - 2\alpha A)E}{2\alpha(V + E^2)} \qquad 1.60$$

[40] **Ibid.**

Buradan da görüleceği üzere varlık ağırlığını belirleyen a değeri ilk serveti gösteren A değerine bağımlıdır. Bu denklem 1.57'de ortaya çıkan sonuç gibi bu çözümün çok dönemli alana aktarılamayacağı göstermektedir. Bu Modern Portföy Teorisi'nin yalnızca tek dönemde optimum çözümü verebileceğine dair bir kanıttır.[41]

1.6.2. Çok Dönemli Analiz ve Logaritmik Fayda Fonksiyonu

Tek dönemli portföy analizlerinin çoklu döneme aktarılabilmesi için bu analizlerin yatırımcının ilk servetinden bağımsız olmasının gerektiği, yukarıda tek ve ikinci dereceden fayda fonksiyonları kullanılarak yapılan analizlerde ortaya konulmaktadır. Portföy getirisinin ilk servetten bağımsız olarak tanımlanabilmesi riskli varlığa yapılan yatırım ile ilk servet oranının sabit, $a/A = k$, olarak tanımlanması ile eşdeğerdir. Bu nedenle bu özelliği taşıyan fayda fonksiyonları sınıfını bulmak, portföy getiri rassal değişkenini ilk servetten bağımsız (ilk servetin yüzdesi olarak) olarak tanımlayan fayda fonksiyonlarını bulmak anlamına gelecektir;

$$R = 1 + k\,X \qquad 1.61$$

Bunun ancak göreceli riskten kaçınma katsayısının sabit olduğu durumları sağlayan fonksiyonlar olduğu gösterilmiştir. Bunu sağlayan fonksiyonlar ise aşağıda tanımlanan logaritmik ve üslü fonksiyon sınıflarıdır;[42]

$$U(Y) = \ln Y \qquad eğer\ \gamma = 1$$

$$U(Y) = Y^{1-\gamma} \qquad eğer\ \gamma \neq 1\,. \qquad 1.62$$

---

[41] **Ibid.**, p. 217.

[42] **Ibid.**, p. 218.

Bu fonksiyonların gerçekten bu koşulu sağlayıp sağlamadıklarını görmek için göreli riskten kaçınma katsayısı sabit olacak biçimde seçilir;

$$\frac{U''(Y)\ Y}{U'(Y)} = -\gamma\,, \qquad 1.63$$

buradan

$$U''(Y)\ Y\,X = -\gamma\, U'(Y)\, X \qquad 1.64$$

ve

$$E[U''(Y)\ X\,Y] = -\gamma\, E[\,U'(Y)\, X] \qquad 1.65$$

yazılır. Maksimum noktada

$$E[\,U'(Y)\, X] = 0 \qquad 1.66$$

ve

$$E[U''(Y)\ X\,Y] = 0 \qquad 1.67$$

olmalıdır. Bu denklemler ilk servet ve varlık ağırlıkları cinsinden de yazılabilir;

$$A\, E[U''(Y)\ X\,] + a\, E[\,U'(Y)\, X^2] = 0, \qquad 1.68$$

buradan

$$-\frac{E[U''(Y)\ X\,]}{E[\,U'(Y)\, X^2]} = \frac{a}{A} \qquad 1.69$$

bulunur. Bu denklemin sol tarafı genel durum için türetilen denklem 1.57'de olduğu gibi da/dA'ya eşittir. Buradan $da/dA = a/A$ ve $a = k\,A$ sonucuna varılır. Sonuç olarak nihai serveti maksimize etmeye yönelik çok dönemli analizleri geçerli kılabilecek olan, ilk servetten bağımsız fakat varlık ağırlıkları ve getiri oranlarına bağlı fayda fonksiyonları sınıfları bulunmaktadır. Ancak bu fonksiyonlar $\ln Y$ ya da $Y^{1-\gamma}$ biçiminde olmalıdırlar. İkinci dereceden fayda fonksiyonları bu koşulu sağlamamaktadır. Bu da ortalama-varyans modelinin çok dönemli analizlerde optimum seçenekleri belirlemede kullanılamayacağı anlamına gelmektedir.[43]

1.6.3. Genel Fayda Fonksiyonu ile Çok Dönemli Portföy Analizi

Yukarıda açıklanan ve çok dönemli analizlere temel olabilecek tek dönemli portföy analizleri genel, ikinci dereceden ve logaritmik fayda fonksiyonları ile tanımlanmaktadır. Bu kısımda ise bir yatırımcının ömür boyu tüketim ve yatırım kararlarını temsil edecek genel bir model ortaya konulmaktadır.

Ömür boyu tüketimin faydasını temsil eden genel bir fonksiyon herhangi bir dönemdeki tüketimin faydasının başka bir dönemdeki tüketimin faydası ile olan ilişkisini ve dış koşulların tüketim kararı üzerindeki etkisini yansıtmalıdır. Böyle genel bir fayda fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir;[44]

$$U(c_1, c_2, \ldots., c_k, \ldots, c_{T-1}, c_T | \emptyset_t) \qquad 1.70$$

$c_t \; = \;$ dönem t içinde yapılan tüketim,

$\emptyset_t$ = tüketim kararının verildiği dönemdeki dış koşulların bilgisini içeren vektör,

---

[43] **Ibid.**, p. 219.

[44] Eugene F. Fama, "Multi-period Consumption-Investment Decisions", **American Economic Review,** Vol.60, 1970, pp.163-164.

t = ilk tüketim kararının verildiği tarih 1'den miras bırakılan tarih T'ye kadar olan zamanı kapsar. Tarih $T - 1$ son portföy kararının verildiği tarihtir.

Çok dönemli bir portföy analizinin amacı, yatırımcının nihai servetini maksimize ederek her dönem için optimum yatırım ve tüketim miktarlarını, ayrıca yatırım yapılacak miktarın varlıklara olan optimum dağılım oranlarını belirlemektir. Yatırım seçenekleri ise getirileri rassal değişkenler olan varlıklar ile bilinen bir getirisi olan risksiz varlıktır. Ayrıca yatırımcının zaman içerisinde emeği ile elde ettiği gelirler de getiri olarak hesaba katılmalıdır. Bu durumda $t + 1$ zamanındaki servet t zamanında seçilen portföyün $t + 1$ zamanındaki değeri olacaktır;[45]

$$W_{t+1} = \sum_{i=2}^{m} \beta_{it}(\emptyset_{t+1}) z_{it} + r_t \, z_{1t} + y_t \,. \qquad 1.71$$

W_{t+1} = $t + 1$ zamanındaki servet,

$\beta_{it}(\emptyset_{t+1})$ = t dönemi için i varlığına yapılan yatırımın getiri oranı +1 (Bu değer $t + 1$ zamanında elde olan bütün bilgilerin bir fonksiyonudur ve $t + 1$ zamanında elde olan bilgiler t zamanında olmadığı için rassal bir değişkendir.),

z_{it} = t dönemi için i varlığına yapılan yatırım miktarı,

r_t = risksiz varlık getiri oranı + 1,

y_t = t ve $t + 1$ zamanları arasındaki yatırım dışı gelirler.

---

[45] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, "The Multi-Period Consumption Investment Problem and Single Period Analysis", **Oxford Economic Papers**, Vol. 26, 1974, p. 293.

Bu denklem $t+1$ zamanındaki servetin, t zamanında satın alınan $m-1$ sayıdaki varlığın değeri artı risksiz varlığa yapılmış olan yatırım artı t ve $t+1$ zamanları arasındaki yatırım dışı gelirlere eşit olduğunu göstermektedir. Zaman t'de yapılan toplam yatırım miktarına servetten, W_t, t zamanı içerisindeki tüketimin, c_t, çıkarılması ile ulaşılmaktadır;

$$\sum_{i=1}^{m} z_{it} = W_t - c_t . \qquad 1.72$$

Bu denklem bir önceki denkleme yerleştirildiğinde t zamanındaki tüketim ve servete bağlı, $t+1$ zamanındaki servet denklemine ulaşılır;

$$W_{t+1} = \sum_{i=2}^{m} [\beta_{it}(\emptyset_{t+1}) - r_t]\, z_{it} + (W_t - c_t)\, r_t + y_t . \qquad 1.73$$

Fayda fonksiyonu son dönem olan T'de bütün servetin harcanacağı sıfır miras durumu varsayılarak yazıldığında aşağıdaki denkleme ulaşılmaktadır;

$$f_t(c_1, c_2, \dots, c_{T-1}, W_T | \emptyset_T) = U(c_1, c_2, \dots, c_{T-1}, c_T | \emptyset_T). \qquad 1.74$$

Bu ifade ömür boyu tüketimin faydasını bütün olası tüketim yapıları ve ekonomik durum için vermektedir. Tekrarlanan ilişki $T-1$ dönemi için şöyle verilir;

$$f_{T-1}(c_1, c_2, \dots, c_{T-2}, W_{T-1} | \emptyset_{T-1}) = \max_{z_{iT-1} c_{T-1}} E[f_T(c_1, c_2, \dots, c_{T-1}, W_T | \emptyset_T)] . \quad 175$$

Burada maksimizasyon $T-1$ zamanındaki optimum tüketim ve her varlığa yapılan optimum yatırıma göre sağlanmaktadır. Herhangi bir t zamanı için, bu tekrarlanan ilişki;

$$f_t(c_1, c_2, \dots, c_{t-1}, W_t|\emptyset_t) = \max_{z_{it}c_t} E[f_{t+1}(c_1, c_2, \dots, c_t, W_{t+1}|\emptyset_{t+1})] \qquad 1.76$$

olacaktır. Bu denklem zaman içinde tekrarlanarak t zamanında optimum tüketim ve yatırım karışımının seçilmesini sağlayarak, $t-1$ zamanına kadar olan her tüketim seviyesi ve t zamanındaki her servet düzeyi için ömür boyu tüketimin faydasını maksimize etmektedir. Çok dönemli tüketimin faydasını maksimize etmek amaç olarak alındığında, çok dönemli portföy problemini temsil eden genel dinamik programlama formülasyonunu bu denklem sağlamaktadır.[46]

Genel dinamik programlama formülü herhangi bir k zamanı için, o ana kadar olan dönemlerde tüketim bilindiği için sadece gelecek tüketimler cinsinden verilebilir;

$$f_k^*(W_k|\emptyset_k) = \max_{z_{ik}c_k} E[f_{k+1}^*(c_k, W_{k+1}|\emptyset_{k+1})]\,. \qquad 1.77$$

Burada f_k^* daha önce yapılan tüketimlerin $(c_1, c_2, \dots, c_{k-1})$, fonksiyonun içinde olduğunu ifade etmektedir. Bu denklem ilk bakışta tek dönemli bir maksimizasyon problemi gibi görünmektedir fakat f_{k+1}^* fonksiyonu içinde bütün gelecek yatırım seçenekleri ve bilgi setleri bulunmaktadır. Fonksiyon gelecek durum değişkenlerine $\emptyset_{k+1}$ bağlıdır. Bu durumda problem fayda fonksiyonu durum değişkenlerinden

[46] **Ibid.**, p. 294.

bağımsız ise tek döneme indirgenebilir. Ancak şu koşullarda fayda fonksiyonunun durum değişkenlerinden bağımsız olduğu varsayılabilir;[47]

- Bir tüketicinin belli bir tüketim malı için zevkleri ekonomik duruma göre değişmez.
- Tüketici, tüketim fırsatlarının mallar ve fiyatları açısından bir önceki dönem başında bilindiği varsayılacak biçimde hareket eder.
- Tüketici, tek dönemlik getiri dağılımlarını önceki dönem başında bildiğini varsayarak hareket eder.

Bu durumda genel dinamik programlama denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$f_k^*(W_k) = \max_{z_{ik} c_k} E[f_{k+1}^*(c_k, W_{k+1})]\,. \qquad 1.78$$

Bu denklem tek dönemli bir problemi göstermektedir. $f_{k+1}^*(\,)$ bir fayda fonksiyonu olarak adlandırılırsa, karar verici güncel tüketiminin ve nihai servetinin faydasını tek dönemli problemde olduğu gibi maksimize etmektedir.[48]

Yeni bir varsayım olmaksızın yukarıda dinamik programlama yolu ile türetilen fayda fonksiyonunun, tek dönemli analiz için kullanılan fayda fonksiyonu ile bağlantısı kurulamaz ve fonksiyonun formu belirlenemez. Bu varsayım tek dönemli fayda fonksiyonunun logaritmik ya da üslü bir fonksiyon ve türetilen fonksiyonun toplamsal ayrılabilir (additively separable) olmasıdır. Ancak bu durumda türetilen fayda fonksiyonu, tek dönemli fayda fonksiyonunun doğrusal bir

[47] Eugene F. Fama, "Multi-period Consumption-Investment Decisions", **American Economic Review,**Vol.60, 1970, p.167.

[48] Elton, **op.cit.**, p.295.

dönüşümü olmakta ve tek dönemli fayda fonksiyonunu maksimize eden portföy çok dönemli fonksiyonu da maksimize etmektedir.[49]

Tek dönemli analizlerde logaritmik ya da üslü fayda fonksiyonu formlarının kullanılması portföy oluşumlarının servet düzeyinden bağımsız olmasını sağlamaktadır. Çok dönemli analizler için servet düzeyinden bağımsızlık ise bu koşula ek olarak, yukarıda açıklandığı biçimde, türetilen fayda denkleminin toplamsal ayrılabilir olması varsayımını gerektirmektedir. Bu koşullar tüketimin durum değişkenlerinden bağımsızlığı varsayımı ile birleştirildiğinde logaritmik ve üslü fayda fonksiyonu kullanımı servet ve tüketimden bağımsız portföy karar kuralları oluşturulmasını sağlamaktadır. Bu varsayımlar klasik portföy teorisi ya da çalışmanın ikinci bölümünde yer verilen Stokastik Portföy Teorisi çerçevesinde yapılan sayısız çok dönemli portföy analizi çalışmasında açık ya da kapalı biçimde kullanılmaktadır.

[49] Nils H. Hakansson, "Optimal Investment and Consumption Strategies Under Risk for a Class of Utility Functions", **International Economic Review**, Vol.10, 1969, pp.448-450.

İKİNCİ BÖLÜM

STOKASTİK PİYASA ANALİZİ

Çok dönemli yatırım planlaması analizlerinde, finansal piyasalardaki fiyat hareketleri ilk bölümde bahsedilen çalışmalardan farklı biçimde de ele alınmaktadır. Stokastik Portföy Teorisi olarak adlandırılabilecek bu kapsamda fiyat hareketleri rassal yürüyüş hipotezi ve buradan türetilen Geometrik Brown Hareketi ile açıklanmaktadır. Geometrik Brown Hareketi, biyolojide bir polen parçacığının hareketi ya da finansal piyasalardaki günlük fiyat değişimleri gibi, birçok öngörülemeyen veya izlenemeyen etkinin sonucu olan olguları açıklamakta kullanılmaktadır. Bu öngörülemeyen veya izlenemeyen etkiler tek tek irdelenemese de sonuca etki eden istatistik özellikleri anlaşılabilmektedir.[50]

Finansal piyasalarda hisse veya endeks fiyat grafiklerine bakıldığında iki özellik göze çarpmaktadır. Birincisi fiyatın zamanla değişimi düzgün değil tersine rassal olarak aşağı ve yukarı dönüşler içermektedir. İkincisi fiyat, zaman aralığı arttığında daha geniş değer aralığında hareket etmektedir. Bu grafikler fiyat hareketlerinin rassal doğasını yansıtmaktadır. Bu özellik fiyat hareketlerinin rassal yürüyüş sürecini temel alan Geometrik Brown Hareketi ile tanımlanmaya çalışılmasına yol açmıştır. Rassal yürüyüş hipotezi piyasa etkin ise varlık fiyatlarının önceden tahmin edilemeyeceğini varsaymaktadır.[51]

---

[50] Wolfgang Paul, Jörg Baschnagel, **Stochastic Processes From Physics to Finance**, Springer-Verlag, Berlin, 1999, p.2.

[51] **Ibid.,** p.135.

Etkin piyasa çok sayıda rasyonel yatırımcının karlarını maksimize etmek amacı ile varlıkların gelecek değerlerini tahmin etmeye çalıştıkları ve bilginin bütün yatırımcılara bedelsiz olarak açık olduğu bir piyasa olarak tanımlanmaktadır. Etkin bir piyasada varlık değerlerinin gerçekleşmiş ve gerçekleşmesi beklenen olayların etkilerini tam olarak yansıttığı varsayılmaktadır. Bu nedenle cari varlık fiyatları gerçek varlık değerlerinin iyi bir göstergesidir. Fakat yatırımcılar arasında bir varlığın gerçek değeri konusunda her zaman fikir ayrılığı olacaktır. Bu nedenle fiili fiyat gerçek değer etrafında rassal bir biçimde değişecektir. Bu değişim, rassal olmak yerine sistematik bir durum gösterdiğinde, yatırımcıların bu eğilim yönünde hareket etmesi ile farklı bir noktada oluşan gerçek değer etrafındaki rassal harekete geri dönülecektir.[52]

Etkin bir piyasada yeni bir bilginin piyasa fiyatlarına anında yansıtılacağı varsayılmaktadır. Fakat bu yansıtma, bilgi ile ilgili belirsizlikler nedeniyle ilk anda gerçek değerin üstünde ya da altında fiyat oluşumlarına yol açmaktadır. Bu durumda gerçek fiyatlara tam yansıtmadaki gecikmenin kendisi de rassal bir değişken olmaktadır. Etkin piyasa hipotezinin anında yansıtma özelliği aslında varlık fiyatlarındaki ardışık değişimlerin birbirlerinden bağımsız oldukları anlamına gelmektedir. Ardışık fiyat hareketlerinin birbirinden bağımsız olduğu bir piyasa, rassal yürüyüş piyasası olarak tanımlanmaktadır. Rassal yürüyüş hipotezi varlık fiyat değişimlerinin belleği olmadığını ve geçmiş fiyat serilerinin geleceği tahmin etmede kullanılmayacağını varsaymaktadır. Ardışık fiyat değişimlerinin birbirlerinden tam olarak bağımsız olmayacağı düşünülse bile bu bağımlılığın göz ardı edilebilecek

---

[52] Eugene F. Fama, "Random Walks In Stock Market Prices", **Financial Analysts Journal,** Vol.21, 1965, p.56.

kadar küçük olabileceği varsayımı ile rassal yürüyüş hipotezi finansal piyasa davranışlarını açıklamada yaygın bir model olarak kullanılmaktadır.[53]

Stokastik bir süreç olan Geometrik Brown Hareketi bir Markov sürecidir. Markov süreçlerinin en önemli özelliği rassal değişkenlerin bir sonraki değerinin geçmiş değerlerden bağımsız fakat sadece o anki değerine bağımlı olmasıdır. Bu, varlık fiyatlarının gelecek değerlerinin sadece şu anki değerleri ile bağlantılı olduğu anlamına gelmektedir. Bu ilişki, finansal varsayımın matematiksel modele yansıdığı noktadır. Bu noktada finansal piyasalarla ilgili temel bir varsayım olan Etkin Piyasa Hipotezi matematiksel teori tarafında Geometrik Brown Hareketi ile çakışmaktadır.

Çok dönemli finansal modellerde çözümlenmesi gereken en önemli olgu fiyatlar, getiriler veya kurlar gibi ekonomik verilerin zaman parametresinin değişimi ile nasıl ortaya konulacağıdır. Bu problemlerin çözümü için kesikli ve sürekli zamanlı olmak üzere genel olarak iki farklı yöntem geliştirilmiştir. Kesikli zamanlı modellerde piyasaların sınırlı ve sayılabilir tarihlerde, sürekli zamanlı modellerde ise sürekli açık olduğu varsayılmaktadır. Sürekli zamanlı modeller işlem tarihleri arasındaki zamanın sıfıra yakınsadığı bir kesikli zamanlı modeller serisi olarak varsayılmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde yer verilen çok dönemli portföy analizleri kesikli zamanda yapılan analizlerdir. Geometrik Brown Hareketi sürekli zamanlı bir modeldir ve bu modelde fiyat hareketleri birinci bölümde anlatılan analizlerden farklı olarak stokastik süreçler biçiminde tanımlanmaktadır. Çalışmanın bu bölümünde Geometrik Brown Hareketi'nin anlaşılabilmesi amacı ile genel olarak

[53] **Ibid.**, p.56.

stokastik süreçler, rassal yürüyüş, Wiener süreci ve Ito süreçleri kısaca anlatılmaktadır.

Finansal piyasalarda fiyat hareketlerinin stokastik doğası, Geometrik Brown Hareketi ile fiyat hareketlerinin modellenmesi ve Ito dönüşümünün bu alandaki rolü açıklanmaktadır. Fiyatların Geometrik Brown Hareketi ile temsil edilmesi fiyatların log-normal dağılımını gerektirmektedir. Bu özellik de bu bölümde vurgulanmaktadır.

Bir varlık için yapılan fiyat analizinin birden çok varlığı kapsayacak biçimde genişletilmesi ile stokastik portföy teorisi alanına geçilmektedir. Bu teori çerçevesinde log-optimal portföy modeline yer verilmekte ve bu teorinin etkin sınır ve risksiz varlık ile analizleri anlatılmaktadır. Süreksiz zamanda yapılan çok dönemli portföy analizlerine benzer biçimde sürekli zamanda da tüketim ve tasarruf davranışlarını göz önüne alan çalışmalar yapılmaktadır. Bu alandaki teorik bir analize de bu bölümde yer verilmektedir.

2.1. Stokastik Süreçler

Değeri zaman içerisinde belirsiz bir biçimde değişen herhangi bir değişken stokastik bir süreci tanımlamaktadır. Stokastik süreçler kesikli zamanlı ya da sürekli zamanlı olarak sınıflandırılırlar. Kesikli zamanlı stokastik süreçler değişken değerinin zaman içerisinde belirli sabit zamanlarda değiştiği buna karşılık sürekli zamanlı stokastik süreçler değişkenin zaman içerisinde her noktada değiştiği süreçlerdir. Stokastik süreçler aynı zamanda sürekli değişkenli ve kesikli değişkenli süreçler olarak da sınıflandırılmaktadır. Sürekli değişkenli bir süreçte ilgili değişken belli bir aralık içerisinde her değeri alabilir fakat kesikli değişkenli bir süreç için alınabilecek değerler birbirlerinden belli aralıklarla ayrışan değerlerdir.[54]

Pratikte hisse senedi fiyatları sürekli zamanlı ve sürekli değişkenli bir süreç izlemezler. Hisse fiyatları belli bir değerin katları biçiminde artar ya da azalır ve bu değişiklikler her an değil sadece piyasa açık olduğunda gerçekleşir. Fakat zamanın ve değişken değerleri adımlarının sıfıra yaklaştığı limit durumlarda olduğu varsayıldığında sürekli zamanlı ve sürekli değişkenli süreçler varlık fiyatlarını modellemede çok elverişli analitik çözümler sunmaktadırlar.

2.1.1. Markov Süreçleri

Bir Markov süreci geleceği öngörmek açısından sadece şu anki değerlerin göz önüne alındığı özel bir süreç sınıfıdır. Geçmiş değerler ve şu anki değere nasıl ulaşıldığı geleceği öngörmek açısından önemsizdirler. Stokastik Portföy Teorisi varlık fiyatları süreçlerinin Markov süreçleri olduğunu varsaymaktadır. Değeri 100 birim olan bir hisse fiyatı bir Markov sürecini takip ediyorsa, bu hissenin fiyatının geçen hafta, geçen ay ya da bir yıl önce ne olduğu, gelecek öngörüsü ile ilgili düşünceleri etkilememektedir. Hisse fiyatının gelecekteki değeri ile ilgili kullanılabilir tek bilgi hisse fiyatının şu anda 100 birim olduğudur. Bu nedenle gelecekle ilgili öngörüler belirsizdir ve olasılık dağılımları cinsinden ifade edilmek durumundadırlar.[55]

---

[54] John C. Hull, **Options, Futures, And Other Derivatives** , 8th. Edition, Prentice Hall, 2012, p.280.

[55] Fima C. Klebaner, **Introduction To Stochastic Calculus With Applications,** Imperial College Press, London, 2005, p.67.

Hisse senedi fiyatlarının Markov özelliği, etkin piyasa hipotezinin zayıf formu ile uyumludur. Bu hipotez bir hissenin şu anki fiyatının geçmiş fiyatları içerisindeki bütün bilgiyi barındırdığını varsayar. Eğer etkin piyasa hipotezinin zayıf formu doğru olmasaydı, hisse fiyatlarının geçmiş fiyat grafiklerini irdeleyen teknik analizciler ortalama üzerinde getiri elde ederlerdi. Fakat bunu yapabildikleri hakkında yeterli bulgu vardır.[56]

Markov süreçleri göz önüne alındığında ardışık dönem değerlerinin varyansları, rassal değişkenler birbirlerinden bağımsız olduğu için toplanabilmektedir. Örneğin varyansı bir yıl için 1,0 olan bir değişkenin ikinci yıl da aynı dağılımı gösterdiği varsayıldığında iki yıl için varyansı 2,0 olacaktır. İki yıl için standart sapma ise $\sqrt{2}$'dir. Aynı biçimde değişken değerinin bir yıl içindeki değişimlerinin varyansı da iki altı ay içindeki varyansların toplamına eşit olmaktadır. Buradan ilk 6 ay için varyansın 0,5 olacağı sonucu çıkmaktadır. Aynı şekilde standart sapma da $\sqrt{0{,}5}$ olur. Benzer bir fikir yürütme ilk üç ay içerisinde değişken değerinin varyansı 0,25 olacaktır. Bu yaklaşım genelleştirildiğinde herhangi bir zaman aralığı T için varyans T, çok kısa bir zaman aralığı Δt için ise Δt 'dir. Buradan belirsizliğin zamanla doğru orantılı olduğu sonucu varılmaktadır. Yukarıdaki örnekte iki yıl için varyans 2,0, üç yıl için 3.0'dür. Fakat iki ve üçüncü yıl için standart sapmalar sırası ile $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ 'dür. Varyanslar için geçerli olan toplanabilirlik standart sapma değerleri için bu söz konusu değildir. Bu nedenle belirsizliğe referans olarak standart sapma değeri yerine varyans kullanılmaktadır.

[56] Eugene F. Fama, "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", **Journal of Finance,** Vol.25, Issue 2, 1970, p.389.

Bu sonuç rassal yürüyüşün finansal modelinde belirsizliğin neden zamanın karekökü ile orantılı olarak tanımlandığını göstermektedir.[57]

2.1.2. Rassal Yürüyüş Hipotezi

Rassal yürüyüş farklı yönlerde rastgele n sayıda adım atan bir kişinin başlangıç noktasından belli bir uzaklıkta bulunma olasılığının hesaplanması üzerinde durmaktadır. Bu hareket biçimi ekonomi, fizik, biyoloji, kimya gibi farklı branşlardaki olguları istatistiksel olarak açıklamakta kullanılmaktadır. Finans alanında da fiyat hareketlerini açıklamakta kullanılan stokastik süreçlerin temeli rassal yürüyüş hipotezine dayanmaktadır. [58]

Zaman ekseninde uzunlukları Δt olan N adet dönem olduğu varsayıldığında, bir rassal yürüyüş süreci, z , $k=0,\ 1,\ 2,\ .....,N$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \epsilon(t_k)\sqrt{\Delta t} \qquad 2.1$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t. \qquad 2.2$$

Burada $\epsilon(t_k)$ ortalaması sıfır ve varyansı bir olan normal dağılımlı rassal bir değişkendir. Bu rassal değişkenler birbirlerinden bağımsızdırlar;

$$E\left[\epsilon(t_j)\epsilon(t_k)\right] = 0\,,\ \ j \neq k. \qquad 2.3$$

---

[57] Hull, **op.cit.,** p.282.

[58] Klebaner, **op.cit. ,** p.81.

Süreç $z(t_0) = 0$ varsayımı ile başlamakta ve rassal değişken $\epsilon(t_k)$ 'nın aldığı değerlere göre bir rota üzerinde hareket etmektedir. Fark rassal değişkenleri $z(t_k) - z(t_j)$, $j < k$, de özel anlamı olan değişkenlerdir ;

$$z(t_k) - z(t_j) = \sum_{i=j}^{k-1} \epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t} \qquad 2.4$$

Bu rassal değişkenler de normal değişkenlerin toplamı oldukları için normal dağılır ve beklenen değerleri

$$E[z(t_k) - z(t_j)] = 0 \qquad 2.5$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde $\epsilon(t_k)$ değişkenlerinin bağımsızlığından yararlanılarak varyansları aşağıdaki biçimde bulunur;

$$\begin{aligned} var[z(t_k) - z(t_j)] &= E\left[\sum_{i=j}^{k-1} \epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}\right]^2 \\ &= E\left[\sum_{i=j}^{k-1} \epsilon(t_i)^2\,\Delta t\right] \\ &= (k-j)\Delta t = t_k - t_j. \end{aligned} \qquad 2.6$$

Buradan $z(t_k) - z(t_j)$ 'nin varyansının tam olarak $t_k - t_j$ zaman farkına eşit olduğu görülmektedir. Markov süreçleri göz önüne alındığında, bir önceki kısımda açıklandığı üzere, varyans ve zaman doğru orantılıdır. Bu sonuç neden t yerine $\sqrt{\Delta t}$ teriminin rassal yürüyüş tanımında olduğunu da açıklamaktadır.[59]

---

[59] **Ibid.**

2.1.3. Wiener Süreci

Wiener süreci fizikte çok sayıda küçük moleküler şoka maruz kalan parçacıkların hareketini betimlemekte kullanılan ve Brown Hareketi olarak da adlandırılan bir süreçtir. Bu süreç rassal yürüyüş sürecinin sürekli zamana aktarılmış biçimi olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle finans alanında da sürekli zamanlı getiri ve fiyat süreçlerinin tanımlanmasına dayanak çıkış noktası olarak kullanılmaktadır. Wiener Süreci ortalama değişimi sıfır varyansı bir olan özel bir tip Markov sürecidir ve rassal yürüyüş sürecinin $\Delta t \rightarrow 0$ ‘a giderken limitinin alınması ile elde edilmektedir. Wiener sürecini gösteren denklem her bir $\epsilon(t)$ standardize normal bir rassal değişken olmak üzere aşağıdaki gibi yazılır;[60]

$$\mathrm{d}z = \epsilon(t)\sqrt{\mathrm{d}t} \tag{2.7}$$

Bir Wiener süreci $z(t)$ ‘nin özellikleri şöyle tanımlanmaktadır;

- Herhangi bir $s < t$ değeri için $z(t) - z(s)$, ortalaması sfır varyansı $t - s$ olan normal bir rassal değişkendir
- Herhangi $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ değerleri için $z(t_2) - z(t_1)$ ve $z(t_4) - z(t_3)$ rassal değerleri ilişkisizdir
- Olasılığı 1 olacak şekilde $z(t_0) = 0$’dır.

[60] Robert C. Merton, **Continuous-Time Finance**, Cambridge, Mass. and Oxford, 1990, p. 82.

2.1.4. Genelleştirilmiş Wiener Süreci

Bir stokastik sürecin birim zaman başına ortalamadaki değişimi sapma oranı, birim zaman başına varyansı ise varyans oranı olarak adlandırılmaktadır. Önceki kısımda açıklanan Wiener Süreci'nin iki nedenle varlık fiyatlarını temsil edemeyeceği görülmektedir. İlki, Wiener Süreci'nin sapma oranının , dz, sıfır olmasıdır. Sapma oranının sıfır olması demek z'nin beklenen değerinin gelecek herhangi bir zamanda şu anki değerine eşit olması demektir. Bu da beklenen varlık getirilerinin her zaman sıfır olmasını gerektirmektedir. İkincisi, Wiener Süreci'nin varyans oranının ise bir olmasıdır. Bu, z'deki değişimin varyansının, uzunluğu T olan bir zaman aralığında T'ye eşit olması demektir. Bunun anlamı bütün varlıkların fiyat dalgalanmaların eşit olmasıdır. Örneğin piyasa payı çok yüksek olan bir banka hissesi ile yeni kurulmuş bir teknoloji hissesinin fiyat dalgalanmaları bir Wiener Süreci ile aynı olasılıklarla hareket edecektir. Böyle bir sürecin hisse senetleri ya da diğer varlık fiyatlarını betimleyemeyeceği açıktır. Bu nedenle sapma ve varyans oranları farklı değerler alabilen daha genel bir süreç tanımlamak gerekmektedir.[61]

Wiener Süreci'nin finansal piyasalara daha uygun hale getirilmiş hali olan Genelleştirilmiş Wiener Süreci , x değişkeni için dz cinsinden a ve b sabit olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$dx = a\,dt + b\,dz. \qquad 2.8$$

[61] Steven P. Peterson, **Investment Theory and Risk Management,** John Wiley & Sons, Inc. New Jersey,2012, p.317.

Denklemin sağındaki $a\,dt$ terimi x‘in birim zaman başına a kadar beklenen sapma oranına sahip olduğunu ifade etmektedir. Terim $b\,dz$ olmadığında denklem $dx = a\,dt$‘den $dx/\,dt = a$ olur. Zamana göre integral alındığında

$$x = x_0 + at \qquad 2.9$$

elde edilir. Burada x_0 sıfır zamanında x*‘in* değeridir. T zaman aralığında değişken x aT kadar artar. Denklemin sağındaki $b\,dz$ terimi x’in izlediği rotaya değişkenlik ekleyen bir terim olarak görülebilir. Bu değişkenliğin miktarı b ile Wiener Süreci’nin çarpımına eşit olacaktır. Bir Wiener Süreci’nin standart sapması bire eşittir. Buradan Genelleştirilmiş Wiener Süreci’nin standart sapmasının b olacağı sonucuna varılmaktadır. [62]

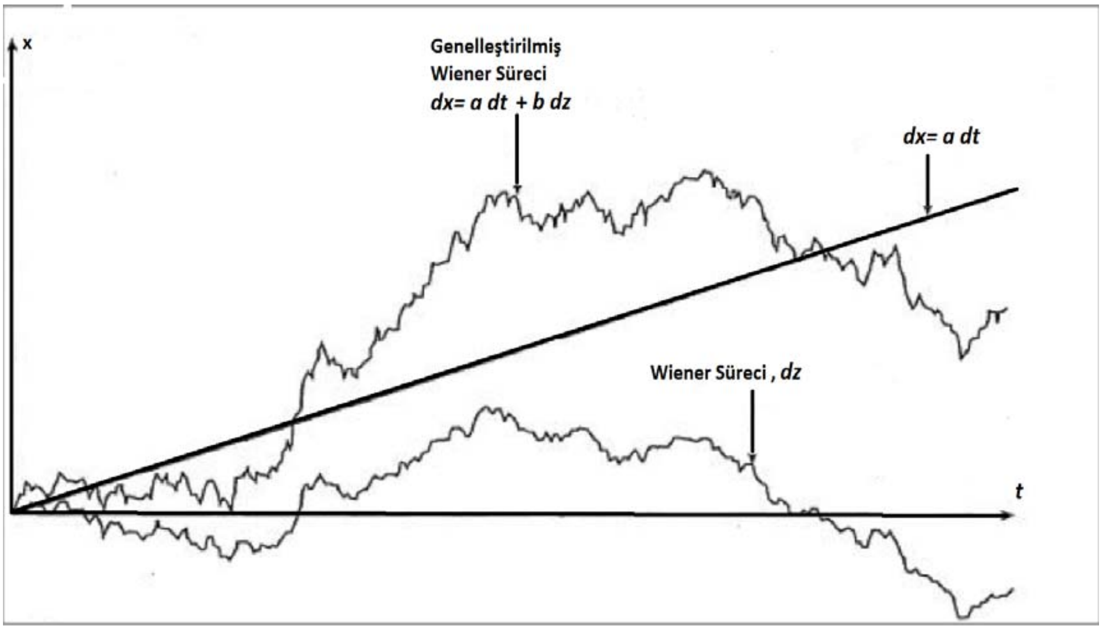
Küçük bir zaman aralığı Δt için x değerindeki değişim Δx olarak şöyle ifade edilmektedir;

$$\Delta x = a\,\Delta t + b\,\epsilon\sqrt{\Delta t}\,. \qquad 2.10$$

Burada ϵ standart normal dağılıma sahiptir. Bu nedenle Δx de ortalaması $a\,\Delta t$, standart sapması $b\,\sqrt{\Delta\,t}$ ve varyansı $b^2\Delta t$ olan bir normal dağılımdır. Aynı şekilde x‘in değerinde herhangi bir T zaman aralığında meydana gelecek değişim de ortalaması $a\,T$, standart sapması $b\,\sqrt{T}$ ve varyansı b^2T olacak biçimde normal olarak dağılır. Böylece Genelleştirilmiş Wiener Süreci a beklenen sapma oranına ve b^2 varyans oranına sahip olmaktadır. a=0,3 ve b=1.5 olan Genelleştirilmiş Wiener Süreci’nin grafiği Şekil 2.1’de gösterilmektedir. Bu grafikte Genelleştirilmiş Wiener

[62] **Ibid.**

Süreci'nin, Wiener Süreci'ne göre varlık fiyat hareketlerini daha iyi açıklayabileceği görülmektedir.[63]



Şekil 2.1 : Genelleştirilmiş Wiener Süreci

Kaynak John C. Hull, **Options, Futures, And Other Derivatives** , 8th. Edition, Prentice Hall, 2012, p.285.

2.1.5. Ito Süreci

Genelleştirilmiş Wiener Süreci'nin daha ileri bir aşaması olan Ito süreci a ve b parametrelerinin rassal değişken x ve zamana bağlı olarak tanımlandığı daha genel bir durumu ifade etmektedir. Bir Ito süreci aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır;[64]

$$dx(t) = a\,(x,t)dt + b(x,t)\,dz. \qquad 2.11$$

---

[63] Hull, **op.cit.**, p.285.

[64] Kiyosi Ito, "On a Formula Concerning Stochastic Differentials", **Nagoya Mathematics Journal**,Vol. 3 ,1951, pp. 55-65.

Burada dz yine bir Wiener sürecidir. Fakat katsayılar $a\,(x,t)$ ve $b(x,t)$ x ve t'ye bağlıdırlar. Bir Ito süreci, x'in t zamanındaki değişimi sadece x'in t zamanındaki değerine bağlı olduğu bir Markov sürecidir. Bu değişim geçmiş değerlerden bağımsızdır ve etkin piyasa hipotezi ile uyumludur. Ito sürecinin genel bir analitik çözümü yazılamaz fakat özel bir formu varlık hareketlerini betimlemek için kullanılmaktadır. Bu durum varlık fiyat süreçlerini açıklayan bölümlerde ele alınacaktır.[65]

2.2. Varlık Fiyat Süreçleri

Varlık fiyat dinamiklerini Genelleştirilmiş Wiener Süreci ile modellemek ilk bakışta anlamlı görünse de, bu süreç sabit sapma ve sabit varyans oranları nedeniyle varlık fiyat hareketlerini tam olarak açıklayamamaktadır. Yatırımcıların bir varlık için öngördükleri beklenen yüzde getiri varlık fiyatından bağımsız olmalıdır. Örneğin bir varlık için beklenen getiri yıllık %10 ve varlık fiyatı 20 birimse, aynı ekonomik veriler altında varlık fiyatı 35 birim olduğunda da beklenen yıllık getiri %10 olmalıdır. Bu nedenle Genelleştirilmiş Wiener Sürecinde tanımlanan a (sapma) parametresi varlık fiyatı ile orantılı olmalıdır. Varlık fiyatı, t zamanında S ile gösterilirse fiyattaki sapma, sabit bir μ parametresi için μS olarak belirlenmelidir. Bu kısa bir Δt zaman aralığında fiyattaki artışın $\mu S\,\Delta t$ olması demektir. Burada μ parametresi varlığın beklenen getiri oranıdır.[66]

---

[65] Luenberger, **op.cit.,** p.308.

[66] Hull, **op.cit.**, p.286.

Genelleştirilmiş Wiener Süreci'ndeki dz teriminin sıfır olması fiyatlarda belirsizlik olmadığı varsayımına denk gelmektedir. Bu durumda

$$\Delta S = \mu S\, \Delta t \qquad 2.12$$

olmaktadır. $\Delta t \rightarrow 0$ limit durumunda ise;

$$dS = \mu S\, dt \qquad 2.13$$

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt \qquad 2.14$$

eşitliğine varılmaktadır. Zaman 0 ve T aralığında integral alındığında S_0 ve S_T, 0 ve T zamanlarındaki varlık fiyatı olmak üzere;

$$S_T = S_0\, e^{\mu T} \qquad 2.15$$

eşitliğine ulaşılır. Bu denklem belirsizlik olmaması durumunda fiyatın her zaman biriminde, μ sürekli bileşik oranı ile arttığını göstermektedir. Gerçek piyasa koşullarında geçerli olan, belirsizlik durumunda ise Δt zaman aralığında yüzdesel getiri oranındaki değişim fiyat düzeyinden bağımsız olmalıdır. Yatırımcı için fiyat 10 ya da 50 birim de olsa getiri yüzdesi aynı oranda belirsizdir. Bu durumda Δt zaman aralığındaki değişimin standart sapması fiyat ile orantılı olmalıdır. Bu nedenle fiyat denklemi şöyle yazılabilir;

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dz \qquad 2.16$$

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dz. \qquad 2.17$$

Bu varlık fiyat davranışı Geometrik Brown Hareketi olarak adlandırılır ve varlığın anlık getiri oranını gösterir. Parametre μ varlığın beklenen getiri oranı, σ varlık fiyatının oynaklığıdır. Bu denklem gerçek piyasa koşullarındaki fiyat sürecini temsil etmektedir. Risksiz piyasa koşullarında ise μ, risksiz varlığın getirisine eşittir.[67]

2.2.1. Geometrik Fiyat Süreçleri

Finansal piyasalarda sürekli zamanda fiyat dinamiklerinin anlaşılmasında kesikli zamanlı analizler de önemli yer tutmaktadır. Fiyat rassal değişkeni S, $\ln S$ biçiminde tanımlandığında ve geometrik olarak artan kesikli bir fiyat modelinden yola çıkıldığında Geometrik Brown Hareketi'nin logaritmik formuna ve fiyat hareketlerinin log-normal dağılımına ulaşılmaktadır. Geometrik fiyat modelinde herhangi bir dönemdeki fiyat şu biçimde ifade edilmektedir;

$$S(k+1) = u(k)\ S(k)\,. \qquad 2.18$$

Burada *k= 0, 1, 2, ..., N-1* olmak üzere $u(k)$ terimleri birbirlerinden bağımsız rassal değişkenlerdir. Değişken $u(k)$ k ve $k+1$ zamanları arasındaki göreli fiyat değişimini tanımlamaktadır. Denklem 2.18'de iki tarafın da logaritması alındığında;

$$ln\,S(k+1) = \ ln\,S(k) + \ln u(k) \qquad 2.19$$

elde edilir. Fiyat değişkenlikleri beklenen değeri $\overline{w}(k) = \upsilon$ ve varyansı σ^2 olan birbirinden bağımsız normal rassal değişkenler olarak $ln\,u(k)$ cinsinden tanımlanabilir;

[67] **Ibid.**, p.287.

$$w(k) = \ln u(k)\,. \qquad 2.20$$

Buradan da,

$$\mathrm{u(k)} = \ \mathrm{e}^{\mathrm{w(k)}} \qquad 2.21$$

elde edilir. Her bir $u(k)$ terimi logaritmaları normal rassal değişkenler oldukları için log-normal rassal değişkenler olarak adlandırılırlar. Burada eksi değer sorunu da $w(k)$ normal rassal değişkeni eksi değerler alsa bile $u(k)$ her zaman pozitif olacağı için ortadan kalmış olmaktadır. Böylece fiyatların her zaman pozitif kalması sağlanmış olmaktadır.[68]

Denklem 2.19'da gösterilen ifadenin sürekli zamanlı biçimi υ ve $\sigma \geq 0$ sabitler ve z standart Wiener Süreci olmak üzere aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\mathrm{d}\ln \mathrm{S(t)} = \ \upsilon\, \mathrm{dt} + \sigma\, \mathrm{dz}. \qquad 2.22$$

Bu denklemin sağ tarafı süreksiz zamanda rassal değişken $w(k)$'nin oynadığı role denk gelmektedir. Denklemin bu tarafı bir sabit artı sıfır ortalamalı bir normal rassal değişken olarak düşünüldüğünde toplam olarak da normal rassal bir değişken olacaktır. Sağ tarafın ortalama değeri $\upsilon\, \mathrm{dt}$ 'dir. Bu ortalama değer dt ile orantılıdır, bu da süreksiz zamanlı modelde değişimin ortalama değerinin dönem uzunluğu ile orantılı olmasıyla tutarlıdır. Denklemin sağ tarafının standart sapması σ çarpı dz 'nin standart sapmasıdır. Bu nedenle bu terimin büyüklüğü $\sigma\sqrt{\mathrm{dt}}$ derecesindedir ve süreksiz zamanda değişimin dönem uzunluğunun karekökü ile orantılı olması durumu ile tutarlıdır. Denklem 2.22 bir Genelleştirilmiş Wiener Süreci'dir ve t'ye

[68] Luenberger, **op.cit.,** p.301.

göre integral alınarak çözülür;

$$ln\, S(t) = ln\, S(0) + \upsilon t + \sigma\, z(t). \qquad 2.23$$

Burada $E[ln\, S(t)] = [ln\, S(0)] + \upsilon t$ ve $E[ln\, S(t)]$, t ile doğrusal olarak bileşik faizli bir hesap biçiminde arttığı için bu süreç geometrik bir süreçtir ve Geometrik Brown Hareketi'nin logaritmik formu olarak adlandırılmaktadır.[69]

2.2.2. Ito Dönüşümü

Ito Lemma olarak adlandırılan dönüşüm formülü, içerisinde rassal değişkenler barındıran diferansiyel denklemlerle ifade edilen süreçler kullanılarak, bu süreçler cinsinden gösterilebilen başka süreçlerin tanımlanmasına olanak sağlamaktadır. Bu dönüşüm Geometrik Brown Hareketi biçiminde tanımlanan fiyat hareketi (denklem 2.16) kullanılarak fiyatın logaritmik olarak tanımlandığı sürecin de böylece aynı değişkenlerle tanımlanmasını sağlamaktadır. Benzer biçimde Geometrik Brown Hareketi'ne dayalı fiyat sürecine bağlı olarak tanımlanan vadeli ya da opsiyon fiyat süreçlerinin de tanımları da Ito dönüşümleri ile yapılmaktadır.

Geometrik Brown Hareketi önceki kısımlarda anlık ve logaritmik olarak iki biçimde tanımlanmıştı. Bu iki tanımdan hareketle klasik diferansiyel hesaplama yöntemleri kullanılarak

$$d\, \ln[S(t)] = \frac{dS(t)}{S(t)} \qquad 2.24$$

---

[69] Luenberger , **op.cit.**, p.308.

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak yazılan denklem anlık Geometrik Brown Hareketi denklemi $dS(t)/S(t) = \upsilon \, \mathrm{dt} + \sigma \, \mathrm{dz}$ olmaktadır. Fakat bu denklem, Wiener Süreçleri sıradan fonksiyonlar olmadıkları ve klasik hesaplama yöntemlerine uymadıkları için doğru olmayacaktır. Ito süreçlerinde değişkenler değiştirildiğinde bir düzeltme terimi gerekmektedir. Bu durumda $S(t)$ cinsinden doğru Ito süreci aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{dt} + \sigma \, \mathrm{dz} \,. \qquad 2.25$$

Bu denklem, $\mu = \upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2$ olarak tanımlanırsa aşağıdaki biçimde yazılır;

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \, \mathrm{dt} + \sigma \, \mathrm{dz} \,. \qquad 2.26$$

Denklemdeki $dS(t)/S(t)$ terimi hissenin diferansiyel getirisini temsil etmektedir. İki tanım arasındaki düzeltme terimi Ito Lemma ile tanımlanan genel dönüşüm denklemlerinin özel bir uygulamasıdır. Düzeltme terimi $\frac{1}{2}\sigma^2$ rassal değişkenlerin $\sqrt{\mathrm{t}}$ derecesinde olmasından ve karelerinin ikinci derece yerine birinci derece etki yaratmasından kaynaklanmaktadır. Bu transformasyonları yapmak için Ito Lemma ile açıklanan sistematik bir yol vardır.[70]

Rassal değişken x, z bir standart Wiener süreci olacak biçimde, bir Ito sürecini sağladığı varsayıldığında;

$$\mathrm{d}x(t) = a\,(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)\,\mathrm{dz} \qquad 2.27$$

---

[70] Anastasios G. Malliaris, William A. Brock, **Stochastic Methods in Economics and Finance**, Amsterdam, North-Holland, 1982, p.80.

ve $y(t) = F(x,t)$ olarak tanımlandığında $y(t)$ aşağıdaki Ito denklemini sağlayacaktır.

$$\mathrm{d}y(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}b^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial F}{\partial x}b\,\mathrm{d}z \qquad 2.28$$

burada dz Ito sürecindeki Wiener sürecinin aynısıdır.

Ito dönüşümünün Geometrik Brown Hareketi'nin çözümlenmesindeki kullanımını göstermek için anlık fiyat hareketi $S(t)$ tekrar aşağıdaki biçimde yazıldığında;

$$\mathrm{d}S = \mu\, S\, \mathrm{dt} + \sigma\, S\, \mathrm{dz} \qquad 2.29$$

$F(S(t)) = \ln S(t)$ ile Ito transformasyonu kullanılırsa $a = \mu S$ ve $b = S\sigma$, $\partial F/\partial S = 1/S$ ve $\partial^2 F/\partial^2 S = -1/S^2$ olacaktır. Ito transformasyonuna göre;

$$\mathrm{d}\ln S = \left(\frac{a}{S} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{S^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{b}{S}\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}z \qquad 2.30$$

olur ve bu sonuç Geometrik Brown Hareketi'nde varsayılan $\mu = \upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2$ eşitliğini doğrulamaktadır. [71]

[71] **Ibid.** p.81.

2.2.3. Log-normal Fiyatlar

Denklem 2.30'da yer alan $\ln S$'in sapma oranı $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$ ve varyansı σ^2 bir Geometrik Brown Hareketi olduğu görülmektedir. Bu nedenle 0 ve T zamanı arasında $\ln S$ değerindeki değişim ortalaması $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T$ ve varyansı $\sigma^2 T$ olacak şekilde normal olarak dağılmaktadır. Buradan $N(m, \sigma^2)$, m ortalama ve σ^2 varyans olarak normal bir dağılımı gösterecek biçimde, S_0 ve S_T sıfır ve T zamanlarındaki varlık fiyatı olmak üzere

$$ln\, S_T - ln\, S_0 \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right]$$

ya da

$$ln\, S_T \sim N\left[ln\, S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right] \qquad 2.31$$

yazılabilir. Denklem 2.31'de $ln\, S_T$'nin normal dağıldığı görülmektedir. Bir değişkenin doğal logaritması normal dağılıyorsa değişkenin kendisi log-normal olarak dağılır. Bu nedenle Geometrik Brown Hareketi ile betimlenen fiyat hareketi davranışı bugünün fiyatı verildiğinde, varlık fiyatının herhangi bir T zamanında log-normal olarak dağıldığını göstermektedir. Varlık fiyatının logaritmasının standart sapması $\sigma\sqrt{t}$ olmaktadır. Standart sapmanın zamanla orantılı olması uzun dönem içinde olabilecek dalgalanmaların fiyat hareketi içinde temsil edilmesi anlamına gelmektedir.[72]

---

[72] David Ruppert, **Statistics and Finance: An Introduction,** Springer Texts in Statistics, New York, 2004,p.83.

2.3. Stokastik Portföy Analizi

Geometrik Brown Hareketi ile betimlenen varlık fiyat hareketlerini, portföy analizlerinde kullanılır biçime getirebilmek için birden fazla ilişkili varlığı kapsayacak biçimde genişletmek gerekmektedir. Fiyatları Geometrik Brown hareketi biçiminde verilen n sayıda varlıktan oluşan bir portföy içinde her bir varlığın fiyatı aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$\frac{dp_i}{p_i} = \mu_i \, \mathrm{dt} + \mathrm{dz}_i \qquad 2.32$$

p_i= i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

z_i = i varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci.

Burada z_i varyans parametresi 1' den farklı σ^2 olan bir Wiener sürecidir. Bu tek bir varlık için olan standart modeli oluşturmaktadır. Bir portföy göz önüne alındığında varlıkların Wiener Süreci üzerinden ilişkili olmaları gerekmektedir. Başka bir deyişle varlık fiyatını etkileyen rassal değişkenler birbirleri ile ilişkilendirilmelidir. Bu da varlık fiyatlarındaki rassal değişimi gösteren Wiener Süreçleri'nin kovaryansları ile yapılmaktadır;

$$\mathrm{cov}\left(\mathrm{dz}_i, \mathrm{dz}_j\right) = E\left(\mathrm{dz}_i \, \mathrm{dz}_j\right) = \sigma_{ij} \, dt. \qquad 2.33$$

z_i = i varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci,

z_j = j varlığının değerindeki rassal değişimi betimleyen Wiener Süreci,

σ_{ij} = i ve j varlıklarının t zamanındaki anlık kovaryansı,

Bu denklemden görüldüğü biçimde iki varlığın kovaryanslarındaki anlık değişim Geometrik Brown Hareketi'ne dayanan fiyat modelindeki kovaryansı göstermektedir. Geometrik Brown Hareketini'ne dayalı varlık fiyatlarının log-normal dağılması nedeniyle herhangi bir *t* zamanında bu *n* varlıktan her biri aşağıdaki beklenen getiri ve varyansa sahip olacaklardır;[73]

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)}\right)\right] = \left(\mu_i - \tfrac{1}{2}\sigma_i^2\right) t = \upsilon_i t \qquad 2.34$$

$$\mathrm{var}\left[\ln\left(\frac{p_i(t)}{p_i(0)}\right)\right] = \sigma^2 t. \qquad 2.35$$

p_i= i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

σ_i^2 = i varlığının t zamanındaki anlık varyansı,

υ_i = i varlığının t zamanındaki anlık büyüme oranı.

2.3.1. Log-optimal Portföy

Geometrik Brown Hareketi'ni temel alan varlık fiyat davranışlarının log-normal özelliği nedeniyle bu strateji ile oluşturulan optimum portföyler de belli zaman dilimi içerisinde en yüksek bileşik getiri oranına sahip olmaktadırlar. Portföy büyüme oranı belli bir zaman aralığı içerisinde maksimize olacak biçimde

[73] Luenberger , **op.cit.**, p.428.

ağırlıklandırılmış portföyler diğer bütün çeşitlendirmelere üstünlük sağlamaktadırlar.[74]

Bir portföyün anlık getirisi portföyü oluşturan varlıkların getirilerinin ağırlıklı toplamı olacağı için denklem 2.32'deki varlık fiyatı da kullanılarak portföy değeri aşağıdaki biçimde gösterilmektedir;

$$\frac{dV}{V} = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{dp_i}{p_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \, \mathrm{dt} + w_i \, \mathrm{dz}_i \qquad 2.36$$

V = Portföyün t zamanındaki anlık değeri,

$p_i =$ i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

$w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ olacak şekilde varlıkların portföy içindeki ağırlıkları,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

z_i = Wiener Süreci.

Bu denklemdeki stokastik terimin varyansı da denklem 2.33'deki kovaryans tanımı ile aşağıdaki biçimde olmaktadır;

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, \mathrm{dz}_i\right)^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, \mathrm{dz}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, \mathrm{dz}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \sigma_{ij} w_j \, dt. \qquad 2.37$$

---

[74] John B. Long, "The Numeraire Portfolio", **Journal of Financial Economics**, Vol. 26, 1990, p.36.

Portföyün anlık beklenen değeri de tek bir varlık için denklem 2.34’te verilen eşitliğe benzer biçimde aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right)\right] = \upsilon t = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \,\mathrm{t} - \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} w_i\, \sigma_{ij} w_j \mathrm{t}. \qquad 2.38$$

olacak biçimde log-normaldir. Portföyün anlık varyansı ise yine denklem 2.35’te verilen eşitliğe benzer biçimde aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$\sigma^2 t = \sum_{i,j}^{n} w_i\, \sigma_{ij} w_j \mathrm{t}\,. \qquad 2.39$$

Denklem 2.38 aynı zamanda portföyün anlık büyüme oranını verir ve bu oran ağırlık katsayıları $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ seçimleri ile kontrol edilebilir ;

$$\upsilon = \frac{1}{t}\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right)\right]. \qquad 2.40$$

Geleneksel portföy teorisi beklenen getiri ve varyans parametreleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Fakat portföylerin uzun dönemli davranışlarını getiri oranından çok büyüme oranı belirlemektedir. Bu nedenle uzun dönemli yatırımlar için getiri oranları yerine büyüme oranlarını göz önüne almak gerekmektedir. Büyüme oranı υ maksimize edilerek optimum log-normal portföy ağırlıkları bulunabilir. Bunun için denklem 2.38’de gösterilen büyüme oranı maksimize edilerek optimum portföy ağırlıkları belirlenmektedir; [75]

[75] Fernholz, **op.cit.**, p.16.

$$Max \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \, \mu_i \; - \; \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i \, \sigma_{ij} \, w_j \, . \qquad 2.41$$

$$\sum_{i=1}^{n} \; w_i = 1 \, . \qquad 2.42$$

Anlık büyüme oranı zamana bağlıdır fakat yukarıda verilen maksimizasyon işlemi için zaman bağımlılığı bir engel oluşturmamaktadır. Matematiksel olarak denklemin bir zaman değeri, t, ile çarpılıp çarpılmamasının optimum ağırlıkların belirlenmesine bir etkisi bulunmamaktadır. Denklem 2.41'e bakıldığında maksimize edilen değerin beklenen getiri oranlarından varlıkların varyans ve kovaryanlarının yarısının çıkarılmasından oluştuğu görülmektedir. Bu eksiltilen terim zamanın büyüme oranı üzerindeki etkisi olarak değerlendirilmektedir ve piyasa verileri ile desteklenmektedir.[76]

2.3.1.1. Log-normal Etkin Sınır

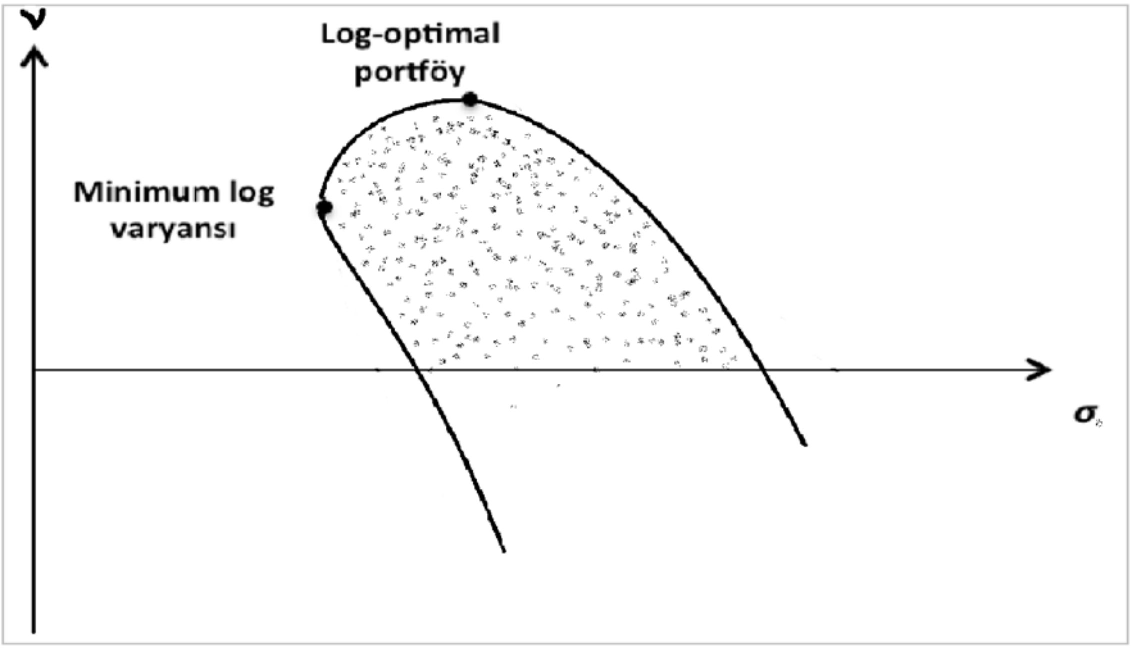
Log-normal portföyler de Markowitz portföy teorisine benzer biçimde υ ve σ değerlerinden oluşan iki boyutlu bir diagramda gösterilebilmektedirler. Bütün mümkün olan portföyler tarafından taranan alan Markowitz portföy teorisindeki yatırım olanakları kümesine denk gelmektedir. Fakat log-normal yatırım olanakları kümesi ile Markowitz yatırım olanakları kümesi arasında önemli bir fark vardır. Bu bölge υ maksimum değeri ile, başka bir deyişle log-normal portföyün büyüme oranıyla sınırlandığı için üste doğru sınırsız bir biçimde uzanmamaktadır. Buna

[76] Eugene F. Fama, Kenneth R. French, "Cross-Section of Expected Stock Returns", **Journal of Finance**, 47 (1992), p. 434.

rağmen Markowitz portföy teorisine benzer biçimde minimum bir standart sapma, σ, değeri bulunmaktadır.[77]

Markowitz portföy teorisine benzer biçimde etkin sınır yatırım olanakları kümesinin üst sol bölümü olarak tanımlanmaktadır. Aslında etkin sınır tam bir kesinlikle eğrinin minimum varyans noktası ile log-optimal noktası arasında kalan bölüm olarak tanımlanmaktadır. Etkin sınır üzerindeki herhangi bir noktaya yine etkin sınır üzerindeki iki noktanın kombinasyonu olarak ulaşılabilir. Özellikle bu iki nokta olarak minimum varyans ve log-normal noktaları kullanılmaktadır. Log-normal yatırım olanakları kümesi ve etkin sınırı Şekil 2.2'de gösterilmektedir.[78]

Şekil 2.2 : Log-normal Yatırım Olanakları Kümesi



Kaynak : David Luenberger**, Investment Science**, Oxford University Press Inc., New York, 1998, p.431.

[77] Luenberger , **op.cit.**, p.432.

[78] **Ibid.**

2.3.1.2. Risksiz Varlık

Log-normal portföy analizine sermaye piyasası teorisine benzer biçimde risksiz bir varlık dahil edildiğinde, sabit getirisi r_f olan risksiz bir varlığın fiyat değişimi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır;

$$\frac{dp_0(t)}{p_0(0)} = r_f\, dt. \qquad 2.43$$

Sıfır varyans üreten başka varlık kombinasyonları olmadığı varsayıldığında risksiz varlık etkin sınır üzerinde yer almaktadır. Aslında burası minimum varyans noktasıdır. Bu nedenle bütün etkin sınırı belirlemek için sadece log-normal noktanın bulunması yeterli olacaktır. Log-normal portföy ağırlıkları w_i , i = 1, 2, 3 ...., n, olan n adet riskli varlık ve ağırlığı $w_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i$ olan risksiz bir varlıktan oluşur. Riskli varlık ağırlıkları aşağıda verilen toplam büyüme hızını maksimize etmek üzere seçilmektedir;

$$\max\left[\left(1 - \sum_{j=1}^{n} w_j\right) r_f + \sum_{j=1}^{n}\left(\mu_i w_j - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} w_j\, \sigma_{jk} w_k\right)\right] \qquad 2.44$$

μ_i = i varlığının beklenen getiri oranı,

σ_{jk} = j ve k varlıklarının kovaryansı,

w_j = j varlığının portföy içerisindeki ağırlığı.

Türev w_k sıfıra eşitlenecek biçimde alınırsa log-normal portföy denklemine ulaşılır. Böylece risksiz bir varlık olması durumunda log-normal portföyün riskli varlık ağırlıkları aşağıdaki denklemi sağlamaktadır;

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} w_j = \mu_i - r_f. \qquad 2.45$$

Denklem 2.45 n sayıda ağırlık için çözülebilecek n doğrusal denklemli bir sistemdir. Ağırlıkların büyüme kriterine göre belirlenmesi nedeni ile standart sapma değerindeki birinci dereceden bir değişim ancak beklenen (logaritmik) değerdeki ikinci dereceden bir değişim ile sağlanabilmektedir. Buradan, uzun dönemli yatırım başka bir deyişle log-varyans kriteri göz önüne alındığında, Markowitz portföy ağırlıkları kullanılarak ve düzenli portföy dengelemeleri yapılarak etkin bir yatırım stratejine ulaşılmayacağı sonucuna varılmaktadır.[79]

2.3.2. Sürekli Zamanda Portföy Optimizasyonu

Çalışmanın birinci bölümünde, portföy optimizasyonunu yatırımcıların tüketim ve tasarruf davranışlarını içerecek biçimde ele alan süreksiz zamanlı modeller açıklanmıştı. Bu kısımda Geometrik Brown Hareketini baz alan fiyat modeline dayalı sürekli zamanlı portföy optimizasyonu ele alınmaktadır. Bu analiz bu bölümde açıklanan log-optimal portföy analizinden farklı olarak tüketim ve tasarruf davranışlarını göz önüne almaktadır.

Yatırım kararları irdelenirken iki unsuru hesaba katmak gerekmektedir. İlki bireylerin gelirlerinin ve servetlerinin ne kadarını tüketeceklerini ve ne kadarını ileri tüketimleri için tasarruf edeceklerini belirleyen tasarruf tüketim seçimi diğeri ise bireyin tasarruflarını yatırım fırsatları arasında nasıl dağıtacağını belirleyeceği

[79] Luenberger , **op.cit.**, p.433.

portföy seçimidir. Genel anlamda bu iki karar birbirlerinden bağımsız olamazlar. Buna rağmen portföy teorisinin önemli bulguları tasarruf tüketim dağıtımının göz önüne alınmadığı tek dönemli modellerde daha kolay elde edilebilmiştir. Sürekli zamanlı modellerin getirdiği matematiksel araçlar ile yatırımın bu iki yönünü de portföy analizlerine daha kolay dahil edilebilmektedirler.[80]

Yatırım kararlarını modelleyen bütçe denklemi normal bir diferansiyel denklemdir. Fakat rassal bir değişken ile belirsizlik eklendiğinde bu denklem stokastik bir diferansiyel denklem olacak biçimde genelleştirilmektedir. Bu denklemin finansal olarak anlamlandırılabilmesi için süreksiz zamanda tanımlanması daha sonra limit işlemi ile sürekli zamana dönüştürülmesi gerekmektedir.[81]

$W(t)$, t zamanındaki toplam servet, $X_i(t)$, i varlığının t zamanındaki fiyatı, $C(t)$, t zamanındaki birim zaman başına tüketim, $\omega_i(t)$, t zamanında toplam servetten i varlığına yapılan yatırımın oranı, $i = 1, \ldots, m$, olarak tanımlandığında herhangi bir t zamanı için

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) = 1 \qquad 2.46$$

olmalıdır. Bu model için bütçe denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir;

$$W(t) = \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t_0) \frac{X_i(t)}{X_i(t_0)}\right] [W(t_0) - C(t_0)\, h]\,. \qquad 2.47$$

---

80 Darrell Duffie, **Security Markets: Stochastic Models,** Academic Press, California,1988, p.222.

81 Robert C. Merton, “Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case.” **The Review of Economics and Statistics,** Vol. 51, 1969, p. 249-251.

Burada $t = t + h$ ve dönem aralarındaki zaman farkı h'dir. Denklemin iki tarafından da $W(t_0)$ çıkartılıp ve $\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t) = 1$ kullanılarak, denklem şu biçimde yazılabilir;

$$W(t) - W(t_0) = \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t_0) \frac{X_i(t) - X_i(t_0)}{X_i(t_0)}\right] [W(t_0) - C(t_0)\, h] - C(t_0)\, h. \quad 2.48$$

$$W(t) - W(t_0) = \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t_0)\, e^{g_i(t_0)h} - 1\right] [W(t_0) - C(t_0)\, h] - C(t_0)\, h. \quad 2.49$$

Burada $g_i(t)\, h = log \frac{X_i(t)}{X_i(t_0)}$, i varlığının birim zaman için getirisidir. $\{ g_i(t)\}$ değerlerinin bir rassal değişken tarafından belirlendiği varsayılmaktadır. Ayrıca sürekli zamanda $g_i(t)$ değerinin Geometrik Brown Hareketi ile oluştuğu varsayılmaktadır;

$$g_i(t)\, h = \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\, \sigma_i^2\right) h + \Delta\, Y_i\, . \quad 2.50$$

Burada α_i , beklenen getiri sabit, ve $Y_i\,(t)$ rassal yürüyüşü ile belirlenen aşağıdaki stokastik fark denklemidir;

$$Y_i\,(t) - Y_i\,(t_0) = \Delta\, Y_i = \sigma_i\, Z_i\,(t)\, \sqrt{h}\, . \quad 2.51$$

Her $Z_i\,(t)$ her t zamanı normal dağılan bağımsız bir değişken, σ_i^2 süreç Y_i'nin her birim zaman için varyansı ve $\Delta\, Y_i$'nin ortalaması sıfırdır.

Denklem 2.50'deki $g_i(t)$ tanımı ile denklem 2.2.44 tekrar yazıldığında;

$$\mathrm{W(t) - W(t_0)} = \left\{\exp\left[\left(\alpha_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) h + \Delta\, Y_i\right] - 1\right\} [\mathrm{W(t_0) - C(t_0)\, h}] - \mathrm{C(t_0)\, h}.$$

2.52

elde edilir. Denklem 2.51 ile tanımlanan sürecin $h \to 0$ iken limiti alındığında, $Y_i\ (t)$'nin bir Wiener süreci ile tanımlandığı stokastik diferansiyel denklem elde edilir;

$$dY_i = \sigma_i Z_i\ (t)\ \sqrt{dt}\,. \qquad 2.53$$

Aynı limit işlemi bütçe denklemi 2.52'ye uygulandığında;

$$dW = \left[\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\ \sigma_i W(t) - C(t)\right] dt + \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\ \sigma_i Z_i\ (t)\ W(t) \sqrt{dt} \qquad 2.52a$$

elde edilir. Bu stokastik diferansiyel denklem belirsizlik halinde sürekli zamanlı bütçe denkleminin genelleştirilmiş halidir.

Bu denklem beklenen değer kullanılarak aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir;

$$E(\mathrm{t}_0)\left[\frac{\mathrm{W(t)} - \mathrm{W(t_0)}}{h}\right] = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(\mathrm{t}_0)\ \alpha_\mathrm{i}\ \ [\mathrm{W(t_0)} - \mathrm{C(t_0)\ h}] - \mathrm{C(t_0)} + O(h). \qquad 2.54$$

Bu denklemde $E(\mathrm{t}_0)$, $W(\mathrm{t}_0)$ değerleri bilgisi üzerinde ki koşullu beklenen değer operatörü, $O(h)$ ise Taylor serisi açılımından kaynaklanan daha düşük dereceden terimleri ifade etmektedir. Burada $h \to 0$ limiti alınırsa varlıktaki ortalama değer değişim oranı bulunur;

$$\dot{W}(t_0) = \lim_{h \to 0} E(t_0) \left[\frac{W(t) - W(t_0)}{h} \right] = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t_0)\, \alpha_i\ W(t_0) - C(t_0). \qquad 2.55$$

Yukarıdaki denklem tüketim modeline yerleştirilerek optimum portföy seçimi ve tüketim kuralları belirleyen denklemler bulunabilir;

$$max\ E\left\{ \int_0^T e^{-\rho t} U\,[C\ (t)]\, dt + \ B[W(T), T] \right\}. \qquad 2.56$$

Burada $C\ (t) \geq 0$, $W\ (t) > 0$, $W\ (0) = W_0 > 0$ varsayımları geçerli ve fayda fonksiyonu $U\ (C)$ içbükey bir fonksiyondur. $B[W(T), T]$ miras değer denklemi olarak adlandırılmaktadır. Bu aşamadan sonra dinamik programlama yöntemi kullanılarak herhangi bir t zamanı için optimum portföy ağırlıkları ve tüketim değerlerine ulaşılmaktadır. Bu çözümlere analitik olarak sadece sabit göreceli riskten kaçınma katsayıları ile ulaşmak mümkün olmaktadır. Bunu sağlayan fayda fonksiyonlarından biri de, $U\ (C) = \log C$, logaritmik fayda fonksiyonudur. Bu durumda fiyatların Geometrik Brown Hareketi ile modellenmesi ve fiyat dağılımlarının log-normal olması varsayımı uzun dönemli portföy analizi için doğru seçenekler olarak görünmektedir.[82]

[82] Merton , **op.cit.**, pp.253-255.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SÜREKLİ ZAMANLI VARLIK FİYATLAMA MODELLERİ

Varlık fiyatlama teorilerinin amacı finansal varlıkların temel değerlerini belirlemektir. Varlıkların temel değerleri ve getirileri ilişkilidirler ve bu nedenle portföy teorilerinden de varlık fiyatlama modelleri ortaya çıkmıştır. Finansal Varlık Fiyatlama Modeli (CAPM) ve Koşullu Finansal Varlık Fiyatlama Modeli (CCAPM), Modern Portföy Teorisi'ne dayanan varlık fiyatlama modelleridir. Ayrıca Arbitraj Fiyatlama Modeli (APT), gibi çok faktörlü modeller de geliştirilmiştir. Bu modellerin ortak bir özellikleri, tek dönemli olmalarıdır. Bu bölümde öncelikle, bu modellerden CAPM modeli kısaca özetletmekte ve diğer varlık fiyatlama modellerinin de geliştirilmesine yol açan eleştirilere yer verilmektedir.

Bu bölümde Stokastik Portföy Teorisi'ni temel alan sürekli zamanlı varlık fiyatlama modelleri ayrıntılı biçimde yer almaktadır. Öncelikle çalışmanın ikinci bölümünde anlatılan log-optimal portföy modelinden türetilen log-optimal varlık fiyatlama modeline ve bu modelin tarihsel piyasa verileri bakımından CAPM ile karşılaştırmasına yer verilmektedir. Daha gerçekçi bir varlık fiyatlama modeli yatırımcıların her varlığa yaptıkları yatırım miktarını istedikleri an değiştirebilme ve tüketim için bir kısmını çekebilme olasılığını hesaba katmalıdır. Sadece her varlığa yapılan yatırım miktarı değil aynı zamanda bu varlıklara yapılan yatırımların toplam servetin içindeki oranının da modelde bir değişken olması gerekir. Bu unsurları da göz önüne alan sürekli zamanlı varlık fiyatlama modellerine ve uygulamalarına da bu bölümde yer verilmektedir.

3.1. Finansal Varlık Fiyatlama Modeli

Finansal Varlık Fiyatlama Modeli (CAPM), Modern Portföy Teorisi'nin yatırımcı davranışları konusundaki varsayımlarına dayanmaktadır. Piyasadaki bütün yatırımcıların aynı beklenen getiri ve risk algılamasına sahip oldukları varsayımı, bütün yatırımcıların risksiz bir varlık ve tek bir etkin portföyden oluşan bir kombinasyona yatırım yapmalarını gerektirmektedir. Bu etkin portföy bütün riskli varlıkların piyasa değerleri ile orantılı olarak içinde bulunduğu pazar portföyüdür. [83]

Fayda teorisinden yola çıkılarak her yatırımcının kendi beklenen faydasını maksimize etmek için optimum varlık ağırlıklarını belirleyeceği varsayılmaktadır. Burada her yatırımcı j $(j = 1, \ldots\ldots M)$ için optimum ağırlıklar pazar portföyü olduğu için maksimizasyon problemi aşağıdaki biçimde yazılır;[84]

$$\begin{aligned}\max_{\{x_i\}_{i=1}^{N}} E[U^j(R_p)] &= \max_{\{x_i\}_{i=1}^{N}} U^j\left(\mu_p - \frac{1}{2} z_j \sigma_p^2\right)\\ &= \max_{\{x_i\}_{i=1}^{N}} \left(\mu_p - \frac{1}{2} z_j \sigma_p^2\right)\\ &= \max_{\{x_i\}_{i=1}^{N}} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\, \mu_i - \frac{1}{2} z_j \sum_{k=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_i\ x_k\ \sigma_{ik}\right). \qquad 3.1\end{aligned}$$

U^j = j yatırımcısının fayda fonksiyonu,

z_j = j yatırımcısının riskten kaçınma katsayısı,

μ_p = portföyün beklenen getirisi,

---

[83] Sharpe, **Portfolio Theory and Capital Markets**, New York, 1970, p.82.

[84] Dumas, **op.cit.,** p.78.

σ_p = portföyün standart sapması,

x_i = i varlığının portföy içerisindeki ağırlığı.

Denklem 3.1 Lagrange çarpanı yöntemi ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır;

$$\mu_i \quad = \lambda + z_j \, \sigma_{ip}. \qquad 3.2$$

Bu çözümde, i varlığının pazar portföyü ile olan kovaryansı σ_{ip}'nin sıfır olması durumunda $\mu_i = \lambda$ bulunur. Bu durumda λ pazar portföyü ile korelasyonu olmayan varlığın getirisine denk gelmektedir. Bu da λ'nın risksiz varlığın getirisine eşit olması demektir. Bu durumda denklem, λ risksiz varlığın getirisini tanımlayacak biçimde r ile değiştirilerek yeniden aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\mu_i \quad = r + z_j \, \sigma_{ip}. \qquad 3.3$$

Denklem 3.3'ten beklenen getirinin varlığın pazar portföyü ile kovaryansına doğrusal olarak bağlı olduğu görülmektedir. Kovaryans varlığın risk ölçüsü olarak görülebilir. Varyans bir varlığın risk ölçüsü olarak tanımlanmaktadır fakat portföy çeşitlendirmesi ile bu risk düşürülebilmektedir. Bir varlığın toplam riski pazara bağlı sistematik ve varlığa özel sistematik olmayan riskin toplamından oluşmaktadır. Çeşitlendirme ile daha fazla düşürülemeyen risk sistematik risk olarak adlandırılmaktadır. [85]

[85] William F. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market equilibrium Under Conditions of Risk", **Journal of Finance**, 1964, p. 436.

Denklem 3.3 her varlık ve her portföy için geçerlidir. Bu nedenle bu eşitlik pazar portföyüne de uygulanabilir. Denklemde i varlığı yerine pazar portföyü kullanıldığında kovaryans terimi pazar portföyünün varyansı σ_p^2 olmaktadır;

$$\mu_i \quad = r + z_j \sigma_p^2. \qquad 3.4$$

Denklem 3.4 z_j için çözülüp ve denklem 3.3'e yerleştirildiğinde CAPM denklemi elde edilmektedir;

$$\mu_i = r + \ (\mu_p - r)\frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^2}. \qquad 3.5$$

$\beta_i = \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p^2}$ olarak tanımlanırsa denklem 3.5 aşağıdaki biçimde yazılır;

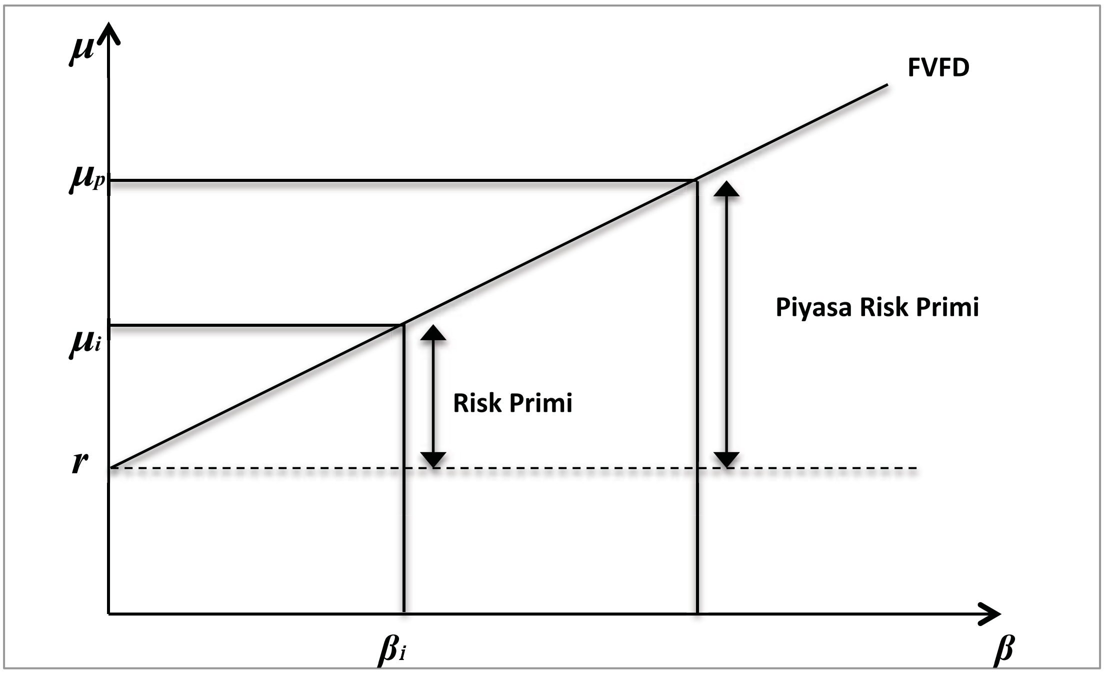
$$\mu_i = r + \ (\mu_p - r)\beta_i. \qquad 3.6$$

β_i , i varlığının pazar riskine olan göreli riskini göstermektedir. Bir varlığın göreli riski ile beklenen getirisi arasında doğrusal bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu ilişki her yatırımcı için tanımlanan riskten kaçınma katsayısı z_j'e bağımlı olmadığı için yatırımcıların tercihlerinden bağımsızdır.[86] Varlık getirisi ve beta arasındaki ilişkiyi gösteren doğru finansal varlıkları fiyatlama doğrusu olarak adlandırılmaktadır. Bu doğru Şekil 3.1'de gösterilmektedir. Denklem 3.6'da yer alan $(\mu_p - r)\beta_i$ terimi risk primi ya da riskin pazar fiyatı olarak adlandırılmaktadır. Risksiz getiri oranı r ise zamanın fiyatı olarak değerlendirilmektedir.

---

[86] Dumas, **op.cit.,** p.79.

Şekil 3.1 : Finansal Varlıkları Fiyatlama Doğrusu



Kaynak: Erdinç Altay, **Sermaye Piyasasında Varlık Fiyatlama Teorileri** , Derin Yayınları,İstanbul 2004, s.104.

3.2. Finansal Varlıkları Fiyatlama Modeli Eleştirileri

Finansal Varlıkları Fiyatlama Modeli, bütün yatırımcıların, ortalama varyans kriterini kullanarak beklentilerini maksimize etmeye çalıştıkları, piyasa hakkında homojen beklentilere ve tek dönemli sabit bir yatırım ufkuna sahip oldukları varsayımları ile kısıtlayıcı bir çerçeve çizmektedir. Bu kısıtlayıcı çerçeve aynı zamanda CAPM'in kolay uygulanabilir bir model olmasını sağlamakta ve finans alanında en yaygın olarak kullanılan fiyatlama modeli haline getirmektedir. Fakat uzun dönemli piyasa verilerinin incelenmesi varlık getiri ilişkilerinin CAPM denkleminde gösterildiği biçimde doğrusal olmadığını göstermiştir.[87]

Model ortaya konulduğunda yapılan ilk testler genel olarak modeli destekler nitelikte olmakla beraber daha sonra yapılan çalışmalarda modelin gözlenen getirileri açıklayamadığı görülmüştür. Piyasa değeri defter değeri oranı, fiyat kazanç oranı, şirketlerin piyasa değeri gibi parametreler hesaba katıldığında betanın varlık getirilerini açıklamakta yetersiz olduğu görülmektedir. Daha yüksek defter değeri piyasa değeri oranına sahip olan şirketler modelin öngördüğünden daha yüksek getiri oranlarına ulaşmaktadırlar. [88]

CAPM'e yöneltilen diğer bir önemli eleştiri de yatırımcıların piyasa hakkındaki görüşlerinin zamanla değişmediği varsayımı konusundadır. Özellikle beta ve risk primi parametrelerinin değişiyor olması bu değişimleri hesaba katan koşullu CAPM'in geliştirilmesine yol açmıştır. CAPM beklenen getirileri sadece tek bir değişkene bağlı olarak açıklamaktadır. Bu değişken varlığın pazara olan göreceli riskidir. Fakat başka parametrelerin de getirileri etkilediği varsayımı ile Arbitraj Fiyatlama Teorisi gibi çok faktörlü modeller geliştirilmiştir.[89]

CAPM tek dönemli bir modeldir. Piyasadaki bütün yatırımcılarının yatırım ufuklarının aynı olamayacağı ve getiri ve risk öngörülerinin çakışamayacağı

---

[87] Eugene F. Fama, Kenneth R. French, "Cross-Section of Expected Stock Returns", **Journal of Finance**, 47 (1992), p. 434.

[88] Eugene F. Fama, Kenneth R. French, **"**Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds" **Journal of Financial Economics**, vol. 33, 1993, 3–56.

[89] John Y. Campbell, Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay, **The Econometrics of Financial Markets**, Princeton, NJ, 1997, p.217.

düşüncesi ile geliştirilen sürekli zamanlı modeller CAPM'e alternatif oluşturmaktadırlar. Geniş zamanlı varlık fiyatlama modeli (ICAPM) bu modellerin en kapsamlı olanlarındandır ve bölümde anlatılmaktadır.

3.3. Sürekli Zamanlı Varlık Fiyatlama

Sürekli zamanlı varlık fiyatlama modelleri çalışmanın ikinci bölümünde yer verilen Stokastik Portföy Teorisi'ni temel almaktadırlar. Bu teoride fiyat hareketlerinin Geometrik Brown Hareketine uydukları varsayılmaktadır. Bu kısımda ilk olarak log-optimal portföy teorisi üzerine kurulan log-optimal fiyatlama anlatılmaktadır. Daha sonra tüketim ve tasarruf parametrelerini de göz önüne alan geniş zamanlı varlık fiyatlama modeli (ICAPM) yer almaktadır. ICAPM, Arbitraj Fiyatlama Teorisi'ndeki faktörlere benzer biçimde durum değişkenleri içermektedir. Bu durum değişkenlerinin belirlenmesindeki zorluklar nedeniyle, durum değişkenlerini tek bir değişkene, tüketime, indirgeyen tüketim bazlı geniş zamanlı varlık fiyatlama modeli (ICCAPM) geliştirilmiştir. Bu model de bu kısımda incelenmektedir.

3.3.1. Log-optimal Fiyatlama

Log-optimal fiyatlama log-optimal portföy teorisine dayanan genel bir varlık fiyatlama formülüdür. Fiyatları Geometrik Brown Hareketine uyan n sayıda riskli varlığın her biri için fiyat denklemi aşağıdaki gibi verilmektedir;

$$\frac{dp_i}{p_i} = \mu_i \, \mathrm{dt} + \mathrm{dz}_i \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad 3.7$$

p_i= i varlığının t zamanındaki anlık fiyatı,

μ_i = i varlığının t zamanındaki anlık beklenen getiri oranı,

z_i = Wiener Süreci.

Bütün i değerleri için $E(\mathrm{dz}_i) = 0$ olması nedeniyle, kovaryanslar $E\left(\mathrm{dz}_i \, \mathrm{dz}_j\right) = \sigma_{ij} \, dt$ olmaktadır. Piyasada aynı zamanda getirisi r_f olan risksiz bir varlık bulunmaktadır. Herhangi bir ağırlık seti $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_n$ ile $\sum_{i=0}^{n} w_i = 1$ olacak biçimde bir portföy tanımlandığında, bu portföyün fiyat dinamiklerini de Geometrik Brown Hareketi belirleyecektir. Bu sürecin varlık *i* ile olan kovaryansı da $\sigma_{i,port}$ olarak gösterilmektedir. Özel bir durum olarak da log-optimal portföy opt altsimgesi ile tanımlandığında bu portföyün varyansı $\sigma^2{}_{opt}$ ve *i* varlığı ile olan kovaryansı da $\sigma_{i,opt}$ olarak gösterilmektedir.[90]

Herhangi bir varlığın getirisi μ, varlığın log-optimal portföy ile olan kovaryansı değerlendirilerek bulunabilmektedir. Bu sapma ve belirsizlik arasındaki ilişkiyi göstereceği için temel olarak bir fiyatlama formülü olmaktadır. Bu formül dört farklı biçimde ifade edilmektedir;

$$\mu_i - r_f = \sigma_{i,opt} \qquad 3.8$$

$$\upsilon_i - r_f = \sigma_{i,opt} - \tfrac{1}{2}\sigma_i^2 \, . \qquad 3.9$$

Yukarıdakilere denk ve $\beta_{i,opt} = \sigma_{i,opt} / \sigma_{opt}^2$ olacak biçimde

[90] Long, **op.cit.,** p. 57.

$$\mu_i - r_f = \beta_{i,opt}\ (\mu_{opt-}r_f) \qquad 3.10$$

$$\upsilon_i - r_f = \beta_{i,opt}\,\sigma_{opt}^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_i^2 \qquad 3.11$$

yazılabilir. Bu denklemler bölüm log-optimal strateji denkleminin sonuçlarıdır;

$$\mu_i - r_f = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, w_j. \qquad 3.12$$

Log-optimal portföyün değeri *V* olarak alındığında;

$$\frac{dV}{V} = \sum_{j=1}^{n} w_j(\,\mu_i\, dt + dz_j) \qquad 3.13$$

yazılabilir. Burada $\sigma_{i,opt} = E\big(dz_i\, dz_{opt}\big) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, w_j = \mu_i - r_f$ eşitliği görülmektedir. İkinci denklem, $\upsilon_i = \mu_i - \tfrac{1}{2}\sigma_i{}^2$ eşitliğinin sonucu olmaktadır. Alternatif formlara ulaşmak için ilk fiyat denklemini log-optimal stratejinin kendi üstünde uygulamak gerekir, buradan $\mu_{opt} - r_f = \sigma^2{}_{opt}$ elde edilir. Bu denklemlere göre bir varlığın log-optimal portföyle olan kovaryansı varlığın beklenen getirisini belirlemektedir. Son iki denklem CAPM denklemlerine benzerliği ile kolay anımsanabilecekleri gibi artık anlık beklenen getiriyi beta tipi bir formül ile ifade etmektedirler. [91]

Fiyatlama için $\upsilon - r_f$ formundaki denklemler υ gözlemlenen gerçek büyüme oranı olduğu için en uygun denklemlerdir. Denklem $\upsilon_i - r_f = \beta_{i,opt}\,\sigma^2{}_{opt} - \tfrac{1}{2}\sigma_i{}^2$ göz önüne alındığında dalgalanması düşük varlıklar (küçük $\sigma_i{}^2$) için büyüme oranı

[91] **Ibid.**, p.59.

yaklaşık olarak $\beta_{i,opt}$ değerine orantılı olmaktadır. Bu CAPM sonuçları ile paraleldir. Fakat büyük dalgalanmalar söz konusu olduğunda $-\frac{1}{2}\sigma_i{}^2$ teriminin etkisi ortaya çıkmakta ve υ değeri düşmektedir. Finansal piyasada fiyat dalgalanmalarının, izlenen zaman dilimi uzadıkça arttığı göz önüne alındığında bu etkinin uzun dönemde daha belirgin olacağı varsayılmaktadır.[92]

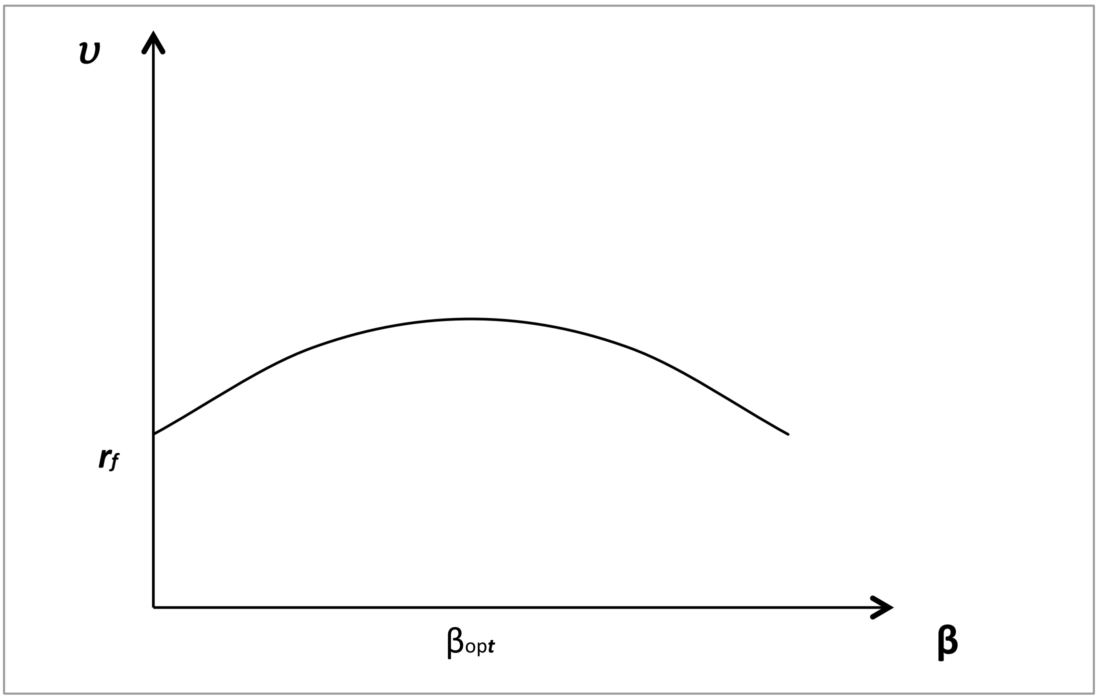
Dalgalanma teriminin gösterdiği üzere risk ve getiri arasındaki ilişki CAPM teorisinde olduğu gibi doğrusal değil ikinci derecedendir. Bu ikinci derece ilişkiyi göstermek amacı ile, ortalama da doğru kabul edilebilecek biçimde, herhangi bir varlığın σ değerinin β değeri ile orantılı olduğu varsayıldığında $\sigma = \gamma\beta$ ve γ sabit bir parametre olmak üzere buradan aşağıdaki denkleme ulaşılmaktadır;

$$\upsilon - r_f = \sigma_{opt}^2\beta - \frac{\gamma^2\beta^2}{2} \ . \qquad 3.14$$

Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Bu grafik CAPM'in geleneksel β diyagramından farklılık göstermekte ve bir doğru yerine maksimum noktası $\beta_{opt} = \sigma^2{}_{opt} / \gamma^2$ olan bir paraboldür olmaktadır.

[92] **Ibid.**, p.60.

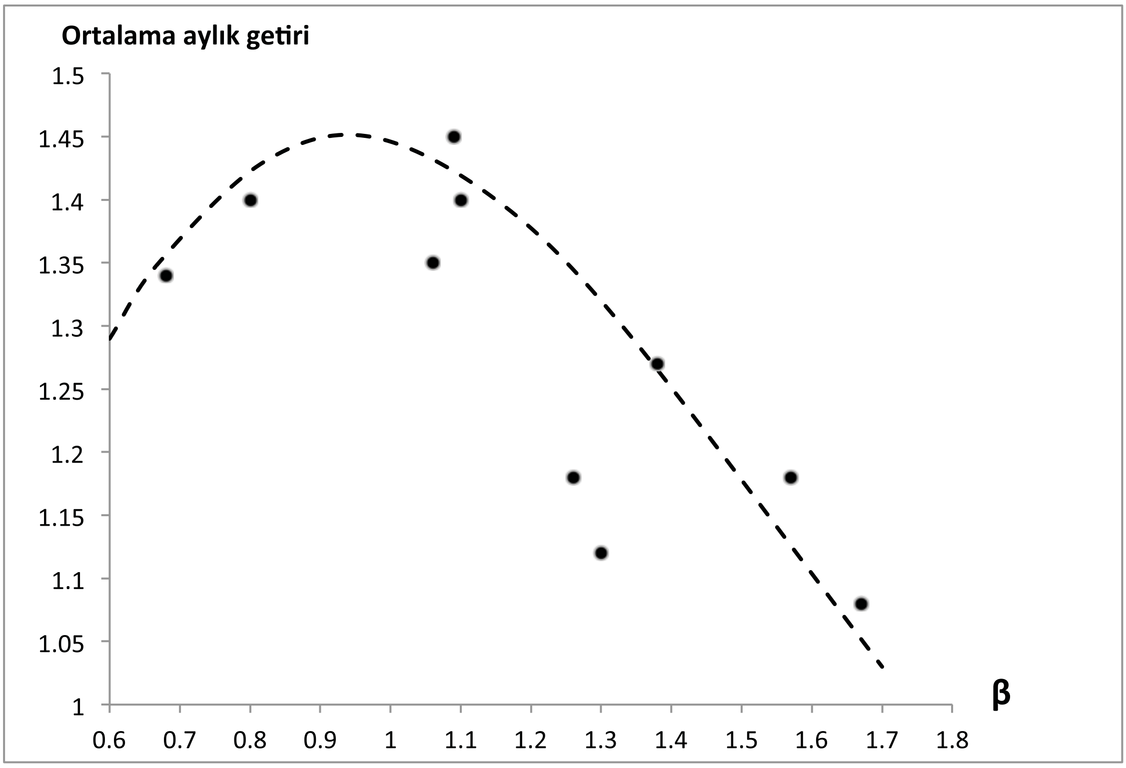
Şekil 3.2 : Log Getiri Beta İlişkisi



Kaynak: David Luenberger, **Investment Science,** Oxford University Press Inc., New York, 1998, p.437.

Büyüme ve beta değerleri arasındaki ilişki aynı zamanda standart sapma değerine de bağlı olduğundan, piyasada işlem gören gerçek varlıkların betalarının Şekil 3.2'de görüldüğü gibi tek bir eğrinin üzerine düşmesi beklenemez. Buna rağmen teoriye göre bütün varlıkların benzer bir parabolü izleyecek biçimde dağılmaları beklenmektedir. 1963-1990 yılları arasında NYSE (New York Stock Exchange) borsasında ortalama aylık getiri ve beta değerlerini gösteren bir çalışmanın sonuçları Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te gösterilmektedir. Burada kullanılan β değerleri log-optimal değerler değil piyasa getirilerine dayanan normal değerlerdir. Bu çalışma β ve getiriler arasındaki ilişkinin tarafından ileri sürüldüğü biçimde doğrusal olmadığını göstermektedir. Şekillerde çizilen kesikli paraboller getiri ve β arasındaki ilişkinin yaklaşık olarak ikinci dereceden olduğunu göstermektedir. [93]

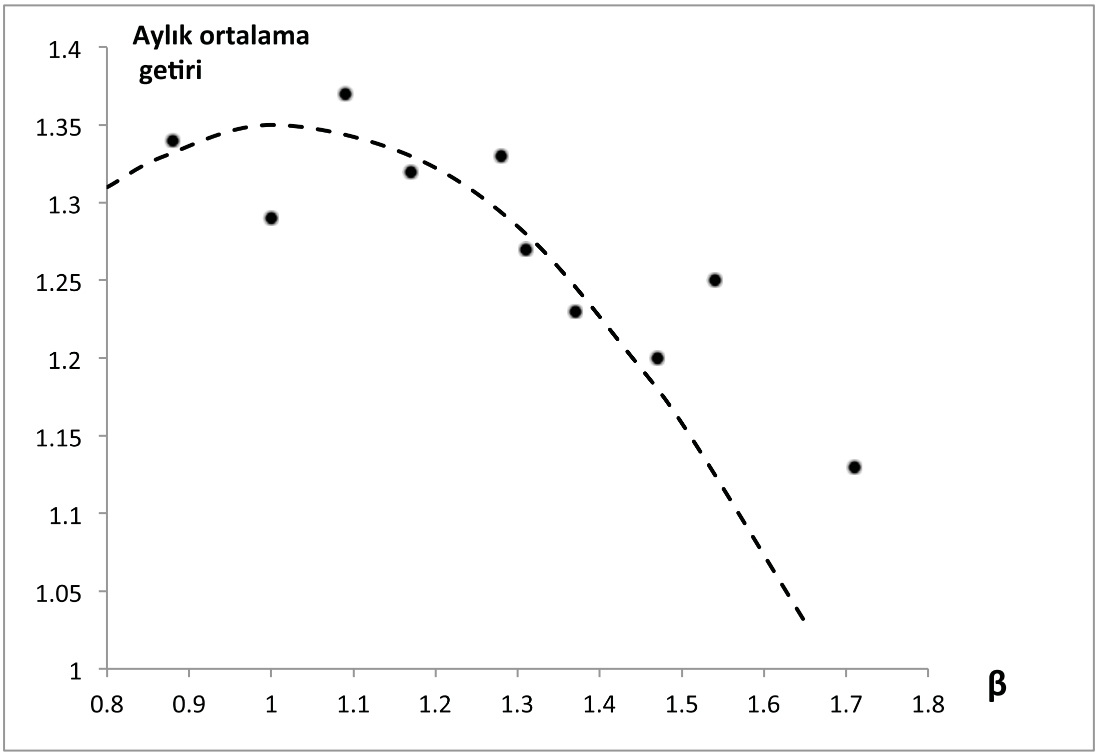
Şekil 3.3 : Orta Ölçekli Şirketler İçin Getiri Beta İlişkisi



Kaynak: David Luenberger, **Investment Science,** Oxford University Press Inc., New York, 1998, p.438.

[93] Luenberger, **op.cit. ,** p.438.

Şekil 3.4 : Bütün Şirketler İçin Getiri Beta İlişkisi



Kaynak: David Luenberger, **Investment Science,** Oxford University Press Inc., New York, 1998, p.438.

Log-optimal fiyatlama formülü yatırımcıların davranışlarından bağımsız matematiksel bir yaklaşımdır. Piyasalarda test edilmesi gereken tek nokta varlık fiyatlarının gerçekten Geometrik Brown Hareketi sürecine uyup uymadıklarıdır. Getiriler log-normale yakın oldukları için log-optimal fiyatlamanın da aynı yakınlıkta doğru sonucu vermesi beklenmektedir.

3.3.2. Geniş Zamanlı Varlık Fiyatlama Modeli

Geniş Zamanlı Varlık Fiyatlama Modeli (Intertemporal Capital Asset Pricing Model, ICAPM) sürekli açık olduğu varsayılan bir piyasada yatırımcıların portföy oluşturma davranışlarını temel alarak ömürleri boyunca tüketimlerinin beklenen faydasını maksimize etmelerine dayanan bir modeldir. Model, varlıklar için talep fonksiyonları içermektedir ve tek dönemli modellerin aksine anlık talepler gelecekteki yatırım fırsatlarının belirsiz değişikliklerinden etkilenmektedirler. ICAPM aşağıda özellikleri sıralanan tam rekabetçi bir piyasa varsayımına dayanmaktadır;[94]

- Bütün varlıklar sınırlı sorumluluğa sahiptirler
- İşlem ücreti, vergi yada varlıkların bölünebilirliği ilgili sorunlar yoktur
- Piyasada yeterli sayıda ve karşılaştırılabilir servete sahip yatırımcı vardır ve yatırımcılar her istedikleri varlıktan istedikleri miktarı piyasa fiyatından alabilirler
- Piyasa her an denge durumundadır, dengede olmayan fiyatlarla alım satım yoktur
- Aynı faiz oranı ile borçlanmak ve borç vermek mümkündür
- Varlıkların açığa satışı mümkündür
- Alım satım sürekli olarak gerçekleşmektedir.

Yukarıda sıralanan varsayımlar, sonuncusu dışında tam rekabetçi piyasayı tanımlamaktadır. Son varsayım standart olmamasına rağmen aslında ikinci

---

[94] Robert C. Merton, “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model”, **Econometrica**, Vol. 41,1973, p.868.

varsayımdan çıkarılabilir. Bir piyasada varlıkların işlem ücreti olmadan istenilen hacimde alınıp satılabilmesi varsayımı, bir nedeni işlem ücretlerinin yatırımcılara yansıtılması olan sınırlı işlem zamanlarını geçersiz kılmak anlamına gelmektedir. Ayrıca işlem zamanları arsasındaki süreler de farklı ve rassaldır. Bu nedenle sürekli zamanlı alım satım varsayımı süreksiz zamanlı piyasa modellemesinden çok farklı görünmemektedir. Gelişmiş piyasalarda ardışık piyasa açılış zamanları arasındaki farkın kısa olduğu düşünüldüğünde sürekli zaman yaklaşımını mantıklı olmaktadır.[95]

3.3.2.1. Varlık Değeri ve Getiri

ICAPM'de fiyat ve getiri süreçlerinin Geometrik Brown Hareketi'ni izledikleri varsayılmaktadır. Modelin geliştirilmesi için öncelikle fiyat hareketi kesikli zamanda tanımlanmakta daha sonra bu fiyat tanımı getiri ile ilişkilendirilerek sürekli zamana aktarılmaktadır. Bu aşamalar aşağıda verilmektedir.

Bir varlığın t zamanında beklenen getirisi ve varyansı birim zaman için aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır;[96]

$$\mu_i = \frac{1}{h}\, E\left[\frac{P_{t+h}^i - P_t^i}{P_t^i}\right] \qquad 3.15$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{h}\, E\left[\left(\frac{P_{t+h}^i - P_t^i}{P_t^i}\right)^2 - h\mu_i\right]. \qquad 3.16$$

---

[95] **Ibid.**, p.869.

[96] Merton, **Continuous-Time Finance**, p. 379.

μ_i = i varlığının t zamanındaki beklenen getiri oranı,

σ_i^2 = i varlığının t zamanındaki varyansı,

P_t^i = i varlığının t zamanındaki fiyatı,

h = zaman biriminin sayısı.

Denklem 3.15'de verilen getiri, $y_i(t)$ rassal değişkenler ve $N\ (0,1)$ olacak biçimde bu tanımlama ile aşağıdaki biçimde yazılır. Burada normal dağılım kesin bir koşul değildir fakat Wiener ve Ito süreçlerinin kullanılmasının sağlanması bakımından gerekmektedir;

$$\frac{P_{t+h}^i - P_t^i}{P_t^i} = h\mu_i + \sqrt{h}\,\sigma_i\, y_i(t)\,. \qquad 3.17$$

Denklemin iki tarafının da $h \to 0$ iken limiti alındığında getiri süreci için diferansiyel denkleme ulaşılmaktadır;

$$\frac{dP^i}{P^i} = \lim_{h\to 0} \frac{P_{t+h}^i - P_t^i}{P_t^i} = \mu_i dt + \sqrt{dt}\,\sigma_i y_i(t)\,. \qquad 3.18$$

dz_i bir Wiener süreci olarak tanımlandığında ve denklem 3.18 içine yerleştirildiğinde fiyat denklemi bir Ito süreci olarak tanımlanmaktadır;

$$dz_i = y_i(t)\sqrt{dt} \qquad 3.19$$

$$\frac{dP^i}{P^i} = \mu_i dt + \sigma_i dz_i. \qquad 3.20$$

Beklenen getiriler ve varyanslarında aynı şekilde Ito süreçlerini takip ettikleri varsayılmaktadır;

$$d\mu_i = a_i dt + b_i dq_i, \qquad 3.21$$

$$d\sigma_i = f_i dt + g_i dx_i. \qquad 3.22$$

Bu denklemlerde dq_i , dx_i birbirlerinden bağımsız olmaları gerekmeyen Wiener süreçleridir. Denklemler 3.21 ve 3.22 birbirlerine bağlı bir Markov sürecini oluştururlar. Analizin devamı için piyasada *n* sayıda riskli ve *n+1* ile gösterilen risksiz bir varlık tanımlanmaktadır. Getirisi zaman içinde değişebilen risksiz varlığın standart sapması ve getirisi aşağıdaki gibi tanımlanır;[97]

$$\sigma_{n+1} = 0 \,,$$

$$\mu_{n+1} = r \,. \qquad 3.23$$

Yukarıda tanımlanan fiyat, beklenen getiri ve varyans süreçleri, optimum portföy ağırlıklarını belirlemek için gerekli olan maksimizasyon problemi çözümünün parametreleri olmaktadırlar.

3.3.2.2. Bütçe Denklemi

CAPM'in tersine, ICAPM'de yatırımcılar fayda maksimizasyonunu verilen dönem sonunda değil fakat tüm zamanlarda yani $T > 0$ durumda maksimize etmeye çalışmaktadırlar. Bu durumda yatırımcı aşağıdaki bütçe denklemini maksimize etmeye çalışmaktadır;

$$E\left[\int_0^T U^k\left(C^k(t)\right)e^{-p^k t}dt + U^k\left(W^k(T)\right)e^{-p^k T}\right]. \qquad 3.24$$

---

[97] **Ibid.**, p.381.

U^k = k yatırımcısının fayda fonksiyonu,

C^k = k yatırımcısının *t* zamanındaki tüketimi,

ρ = gelecekteki faydanın iskonto faktörü,

$W^k(T)$ = i varlığının t zamanındaki fiyatı.

İlk terim 0 ve T zamanları arasındaki tüketimin bugünkü değerini, ikinci terim ise nihai servet $W^k(T)$ ya da son tüketimden kaynaklanan faydanın bugünkü değerini yansıtmaktadır.[98]

3.3.2.3. Servet Süreci

Servet, $W^k(t)$, herhangi bir t zamanında daha önceden elde bulunan varlıkların sayısı $N_i^k(t-h)$ ile , t zamanında bu varlıkların fiyatlarının P_t^i çarpımı ile verilmektedir; [99]

$$W^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(t-h)\, P_t^i\,. \qquad 3.25$$

Yatırımcı aynı anda yeni varlık sayısı $N_i^k(t-h)$ ve birim zaman için optimum tüketimi $C^k(t)\, h$ ile verilen yeni bir portföy seçer. Bu durumda serveti aşağıdaki gibi oluşmaktadır;

$$W^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(t)\, P_t^i + C^k(t)\, h. \qquad 3.26$$

[98] **Ibid.**, p.381.

[99] Robert C. Merton, “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, **Journal of Economic Theory**, Vol. 3, 1971, p. 378.

Denklem 3.25 ve 3.26'dan $C^k(t)\,h$ çözüldüğünde aşağıdaki denkleme ulaşılmaktadır;

$$C^k(t)\,h = \sum_{i=1}^{n+1} (N_i^k(t-h) - N_i^k(t))\,P_t^i\,. \qquad 3.27$$

Zaman h kadar kaydırıldığında ;

$$C^k(t+h)\,h = \sum_{i=1}^{n+1} (N_i^k(t) - N_i^k(t+h))\,P_{t+h}^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (N_i^k(t) - N_i^k(t+h))\,(P_{t+h}^i - P_t^i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (N_i^k(t) - N_i^k(t+h))\,P_t^i \qquad 3.28$$

ve $h \to 0$ durumunda denklemler 3.26 ve 3.27 aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$W^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(t)\,P_t^i\,. \qquad 3.29$$

$$-\,C^k(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n+1} dN_i^k(t)\,dP_t^i + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i^k(t)\,P_t^i\ . \qquad 3.30$$

Ito lemma kullanılarak denklem 3.29'un türevi alındığında ve denklem 3.30 kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır;

$$dW^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(t)\, dP_t^i + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i^k(t)\, dP_t^i + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i^k(t)\, P_t^i$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} N_i^k(t)\, dP_t^i - C^k(t)\, dt\,. \qquad 3.31$$

İlk terim varlıklara yapılan yatırımla elde edilen serveti ikinci terim ise tüketim nedeniyle servetteki azalmayı göstermektedir.[100]

Tüketimden sonra varlık i için yapılan yatırımın toplam servete oranı $\omega_i^k(t) = \frac{N_i^k(t)\, P_t^i}{W^k(t)}$ olarak tanımlanıp bu tanım denklem 3.31 içine yerleştirildiğinde aşağıdaki denklem elde edilmektedir;

$$dW^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^k(t)\, \frac{dP_t^i}{P_t^i}\, W^k(t) - C^k(t)\, dt\,. \qquad 3.32$$

Bu sonucun denklem 3.20 içine yerleştirilmesi ile de serveti belirleyen Ito sürecini ulaşılmaktadır;

$$dW^k(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^k(t)\, \mu_i\, W^k(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^k(t)\, \sigma_i\, W^k(t)\, dz_i - C^k(t)\, dt$$

$$= W^k(t) \left[\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^k(t)\, (\mu_i - r) + r \right] dt - C^k(t)\, dt$$

[100] **Ibid.**, p.379.

$$+W^k(t)\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i^k(t)\,\sigma_i\,dz_i. \qquad 3.33$$

Ayrıca gösterim kolaylığı açısından fiyat, getiri ve varyans değerlerine bağlı olan durum değişkenleri vektörü $X=(X_1,\ldots\ldots,X_m)$ de Ito süreçleri biçiminde tanımlanmaktadır;

$$dX = Fdt + GdQ\,. \qquad . \qquad 3.34$$

Burada v_{ij} , dq_i ve dq_j , η_{ij} ise dq_i ve dz_j arasındaki korelasyon olacak biçimde $dQ=(dq_1,\ldots\ldots,dq_m)$ olarak, ayrıca $F=(f_1,\ldots\ldots,f_m)$ ve $G=(g_1,\ldots\ldots,g_m)$ vektörel olarak tanımlanmaktadır.[101]

3.3.2.4. Optimum Çözüm Denklemleri

Yukarıdaki verilen fiyat, getiri ve servet süreci tanımlamaları ile denklem 3.24 ile verilen maksimizasyon problemi çözülebilir. Maksimumun belirlenebilmesi için her an için optimum tüketim miktarı $C^k(t)$ ve her varlık için optimum yatırım miktarı $\omega_i^k(t)=\frac{N_i^k(t)\,P_t^i}{W^k(t)}$ değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla bir performans fonksiyonu tanımlanmaktadır ;

$$J^k(\,W^k,t,X)=\max_{C^k(t),\{\omega_i^k(t)\}_{i=1}^{n}} E\left[\int_t^T U\left(C^k(\tau)\right)e^{-p^k\tau}d\tau+\,U\left(W^k(T)\right)e^{-p^kT}\right]. \qquad 3.34$$

[101] **Ibid.**, p.380.

Bu performans fonksiyonunun, k tüketici-yatırımcısının herhangi bir t zamanında, ömrünün sonuna kadar olan süre içerisinde yapacağı tüketiminin ve son servetinin beklenen faydasını maksimize etmek için çözülmesi gerekmektedir. Çözüm için optimize edilmesi gereken parametreler ise her t zamanı için olan tüketim miktarı ve yatırım yaptığı varlıkların portföy içerisindeki ağılıkları olmaktadır. Fonksiyonun fiyat, getiri ve varlık ağılıkları ile olan ilişkisi fonksiyonun tanımında bulunan ve önceki kısımlarda tanımlanan servet $W^k(t)$ parametresi üzerinden sağlanmaktadır. Bu performans fonksiyonu dinamik programlama yöntemleri ile çözümlendiğinde, herhangi bir t zamanında tüketim-yatırım için gerekli optimum koşulları veren eşitliğe ulaşılmaktadır;[102]

$$\max_{C^k(t),\{\omega_i^k(t)\}_{i=1}^n} \Bigg[U\Big(C^k(t)\Big)\, e^{-p^k t} + J_t^k$$

$$+J_W^k \left(W^k \left(\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^k(t)\,(\mu_i - r) + r \right) - C^k \right)$$

$$+\sum_{i=1}^{m} J_i^k\, f_i + \frac{1}{2} J_{WW} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_i^k\, \omega_j^k \sigma_{ij} W^2$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} J_{iW}\, \omega_j^k\; g_i\, \sigma_j\, \eta_{ij}\, W^k\, v_{ij}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} J_{ij} g_i\, g_j\, v_{ij} \Bigg] = 0. \qquad 3.35$$

---

[102] Merton, **Continuous-Time Finance**, p. 100.

Parantez içindeki terimleri Φ, C^k'ya göre türevi Φ_C , ω_i^k'e türevi Φ_i olarak tanımlandığında bir maksimum için $(n+1)$ sayıdaki koşul aşağıdaki gibi oluşmaktadır;

$$\Phi_C = \mathrm{U}_C - J_W^k = 0 \qquad 3.36$$

$$\Phi_i = J_\omega^k(\mu_i - r)W^k + J_{WW}^k \sum_{j=1}^{n} \omega_j^k \sigma_{ij} W^2 + \sum_{j=1}^{m} J_{jW}^k W^k g_i \sigma_j \eta_{ij} = 0. \qquad 3.37$$

Koşul 3.36 anında tüketim $\mathrm{U_C}$'nin marjinal faydasının geciktirilmiş tüketim $\mathrm{J_W}$ 'nin marjinal faydasına eşit olması gerektiği doğal sonucunu göstermektedir. [103]

$V = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ varlıkların kovaryans matrisi, $d^k = \{\omega_j W^k\}_{j=1}^{n}$ yatırımcı *k* için varlık talep vektörü, $\mu = \{\mu_j\}_{j=1}^{n}$ varlıların beklenen getiri vektörü, $\sigma = \{g_j \sigma_i \eta_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$ varlık getirilerinin ve durum değişkenlerinin kovaryans matrisi, $A^k = -\frac{J_W^k}{J_{WW}}$, $H_j^k = -\frac{J_{jW}^k}{J_{WW}^k}$ ve $H^k = \{H_i^k\}_{j=1}^{n}$ olarak tanımlandığında denklem 3.37 W^k vektör formuyla bölündükten sonra aşağıdaki şekilde yazılabilir;[104]

$$-A^k = (\mu - r\iota) + Vd^k - H^k\sigma = 0. \qquad 3.38$$

Buradan varlık talepleri çözüldüğünde ;

$$d^k = A^k V^{-1}(\mu - r\iota) + H^k V^{-1}\sigma\,. \qquad 3.38$$

---

[103] **Ibid.**, p.101.

[104] Krause, **op.cit**., p.85.

Denklem 3.38, υ_{ij}, V^{-1} 'nin (i,j) elemanı olarak yazıldığında ve $\sigma_{i,j}^{*} = g_j \sigma_i \eta_{ij}$ iken tek bir varlık için aşağıdaki gibi oluşmaktadır;

$$d_i^k = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}\left(\mu_j - r\right) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} H_l^k \, \sigma_{j,l}^{*} \upsilon_{ij} \, . \qquad 3.39$$

Bir varlık için talep iki bölümden oluşmaktadır. İlk terim statik CAPM talebine benzeyen ortalama varyans maksimizasyonuna dayanan yatırımdır. A^k riskten kaçınma için bir terim içermektedir, $\mu_j - r$ ise risk primidir. İkinci terim durum değişkenlerinde meydana gelebilecek olumsuz değişimlere karşı önlem (hedging) olmaktadır. Bu önlem H_l^k'in bir bölümünü oluşturan $\frac{\partial c^k}{\partial x_i}$ 'ın işaretine göre negative ya da pozitif olabilir.[105]

Durum değişkenlerinin zamanla değişmediği varsayıldığında $H_l^k = 0$ olmakta ve sonuç standart CAPM çözümüne eşitlenmektedir. Fakat genel olarak durum değişkenleri zamanla değişmektedirler. Basit bir analiz için sadece bir durum değişkeninin, risksiz faiz oranının, zamanla değiştiği varsayıldığında denklem 3.39 aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$d_i^k = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}\left(\mu_j - r\right) + \; H_r^k \sum_{j=1}^{m} \sigma_{j,l}^{*} \upsilon_{ij} \, . \qquad 3.40$$

Durum değişkeni ile tam olarak negatif korelasyonu olan n sayılı bir varlık durumda $\rho_{nr} = -1$ olmaktadır. Böyle bir varlık temerrüt bakımından risksiz ve değeri sadece

[105] **Ibid.**, p.86.

faiz oranına bağlı bir bono olabilir. Değişen faiz değeri nedeniyle bono artık risksiz bir varlık olmayacaktır. Bu durumda

$$\rho_{jr} = \rho_{jn}\, \rho_{nr} = -\rho_{jn} \qquad 3.41$$

$$\sigma^{*}_{j,r} = \rho_{jr}\ \ \sigma_j\ g_r = -\,\sigma_{jn}\ \ \sigma_j\ g_r = -\ \ g_r\ \frac{\rho_{jn}\ \ \sigma_j\ \ \sigma_n}{\sigma_n} = -\ \ g_r\,\frac{\sigma_{jn}}{\sigma_n} \qquad 3.42$$

olmaktadır. Denklem 3.42 ile denklem 3.40'ın ikinci terimi $H^k_r\,\frac{g_r}{\sigma_n}\sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}\,\sigma_{jn}$ olur. Buradan υ_{rj} , σ'nın tersinin bir elemanı olduğu için $i = n$ olduğunda ;

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jn}\upsilon_{ij} = 1 \qquad 3.43$$

diğer durumlarda ise;

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{jn}\upsilon_{ij} = 0 \qquad 3.44$$

olmaktadır. Bu değerlerle denklem 3.40 aşağıda biçimde basitleştirildiğinde;

$$d^k_i = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}\big(\,\mu_j - r\big) \qquad i = 1, \ldots\ \ldots, n-1,$$

$$d^k_n = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{nj}\big(\,\mu_j - r\big)\ -\ H^k_r\,\frac{g}{\sigma_n} \qquad 3.45$$

denklemlerine ulaşılmaktadır.

Buradan denklem ile üç farklı portföy tanımlanabilir;

Portföy 1; ağırlıkları $\delta_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r)}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r)}$ olan ve bütün riskli varlıklardan oluşan portföydür. Bu portföyün ağırlıkları portföy teorisindeki optimum portföy ağırlıklarına eşittir.

Portföy 2; sadece n. varlıktan oluşur.

Portföy 3; sadece risksiz varlıktan oluşur.

Bir k yatırımcısının bu üç portföye ayırdığı toplam servetinin oranları λ_i^k $(1 = 1{,}2{,}3)$ olarak tanımlandığında, $n-1$ varlık için talep $\lambda_1^k\, \delta_i\, W^k$, n. varlık için $(\lambda_1^k\, \delta_n + \lambda_2^k)\, W^k$ olmaktadır. Eğer bir yatırımcı n sayıdaki bütün varlıklara direkt olarak ya da bu üç portföye yatırım yapma noktasında kayıtsız olacaksa, bu talepler denklem 3.45'deki koşulları sağlamalıdır;[106]

$$\lambda_1^k\, \delta_i\, W^k = \lambda_1^k \frac{\sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r)}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r)} W^k = d_i^k = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r) \qquad 3.46$$

$$(\lambda_1^k\, \delta_n + \lambda_2^k)\, W^k = d_n^k = A^k \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{nj}(\mu_j - r) - H_r^k \frac{g}{\sigma_n}\,. \qquad 3.47$$

Bu denklemler λ_1^k ve λ_2^k için çözüldüğünde aşağıdaki ağırlık oranlarına ulaşılmaktadır;

$$\lambda_1^k = \frac{A^k}{W^k} \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \upsilon_{ij}(\mu_j - r) \qquad 3.48$$

$$\lambda_2^k = -\frac{H_r^k}{W^k}\,\frac{g_r}{\sigma_n}\,. \qquad 3.49$$

[106] **Ibid.**, pp.86-87.

Bütün varlıklara (n) direkt olarak yatırım yapmak yerine, yatırımcı optimum riskli portföy ve değişen durum değişkeni ile en yüksek korelasyona sahip n. varlığın kombinasyonu olan bir portföye yatırım yapmak arasında kayıtsız kalacaktır. Kalan serveti ise risksiz varlığa yatıracaktır. Bu sonuç Üç Fon Teoremi (Three Fund Theorem) olarak adlandırılmakta ve Ayrım Teorisi'nin (Separation Theorem) dinamik karşılığına denk gelmektedir. [107]

Birinci ve üçüncü portföyler yatırımcının ortalama-varyans etkin bir portföyü olmasını sağlamaktadır, başka bir deyişle yatırımcının pozisyonu CAPM'in etkin sınırı üzerindedir. Fakat durum değişkeni zaman içinde rassal olarak değiştikçe, etkin sınırın yeri de değişmektedir. Bu durumda ikinci portföy olumsuz yer değiştirmelere karşı koruma sağlamaktadır. Genel durumda, birden fazla, $m > 1$, durum değişkeni zamanla değişebilir. Yatırımcılar bu durumda $(m + 2)$ sayıda portföyün kombinasyonunu yapmaktadırlar. Genel durum için özellikler değişmez, ilk portföy optimal portföy olarak kalmakta ve bir portföy sadece risksiz varlığı içermektedir, diğer m sayıdaki portföyler ise bir durum değişkeni ile en yüksek korelasyona sahip tek bir varlıktan oluşmaktadır. [108]

Denklem 3.45'de verilen talep fonksiyonları ile, $m = 1$ iken denge durumundaki beklenen getiriler bulunabilir. Denklem 3.38 $(\mu - r\iota)$ için çözüldüğünde aşağıdaki eşitlik elde edilmektedir;

---

[107] **Ibid.**, p.88.

[108] **Ibid.**, p.89.

$$(\mu - r\iota) = \frac{1}{A^k}\, Vd^k - \frac{H_r^k}{A^k}\, \sigma. \qquad 3.50$$

Bu ilişki her yatırımcı için ayrı ayrı geçerli olduğundan bütün yatırımcıların toplamı için de geçerli olmak durumundadır. Böylece toplam talep fonksiyonları $A = \sum_{k=1}^{K} A^k$, $H = \sum_{k=1}^{K} H^k$, $D_i = \sum_{k=1}^{K} d_i^k$, $D = \{D_i\}_{i=1}^{n}$ şeklinde yazılabilir. Denklem 3.50 bu durumda şu şekli almaktadır;

$$(\mu - r\iota) = \frac{1}{A}\, VD - \frac{H}{A}\, \sigma. \qquad 3.51$$

Alım satımın sadece denge durumunda olacağı varsayıldığından toplam talep her zaman bütün varlıkların değerine eşit olmalıdır; $\sum_{i=1}^{n} D_i = M$. Bir varlığın piyasa değerine oranı denge durumunda $\omega_i = \frac{D_i}{M}$ olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımla denklem 3.51 $i = 1, \ldots, n$ için şöyle yazılabilir;[109]

$$\mu_i - r = \frac{M}{A} \sum_{j=1}^{n} \omega_j\ \sigma_{ij} - \frac{H}{A}\ \sigma_{ir}$$

$$= \frac{M}{A} \sum_{j=1}^{n} \omega_j\ \sigma_{ij} + \frac{H}{A}\ \frac{\sigma_{in}\ g_r}{\sigma_n}\ . \qquad 3.52$$

Piyasa portföyü M ile ifade edildiğinde, $\mu_M - r = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\,(\mu_j - r)$, $\sigma_{iM} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, \sigma_{ij}$ ve $\sigma_M^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j\, \sigma_{jM}$ ile denklem 3.52 tekrar aşağıdaki biçimde yazılmaktadır;

$$\mu_i - r\ = \frac{M}{A}\, \sigma_{iM} + \frac{H}{A}\, \sigma_{ir}\ . \qquad 3.53$$

[109] **Ibid.**

ω_j ile çarpılıp bütün $i = 1, \ldots, n$ için toplandığında;

$$\mu_M - r = \frac{M}{A}\sigma_M^2 + \frac{H}{A}\frac{\sigma_{MN}\ g_r}{\sigma_n} = \frac{M}{A}\sigma_M^2 - \frac{H}{A}\ \sigma_{Mr} \qquad 3.54$$

elde edilmektedir. Denklem 3.52, $i = n$ için ise şu sonuca ulaşılmaktadır;

$$\mu_n - r = \frac{M}{A}\sigma_{nM} - \frac{H}{A}\sigma_{nr}. \qquad 3.55$$

Denklemler 3.54 ve 3.55 , $\frac{M}{A}$ ve $\frac{H}{A}$ için çözüldüğünde;

$$\frac{M}{A} = \frac{\sigma_{nr}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_M - r) - \frac{\sigma_{Mr}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_n - r)\,, \qquad 3.56$$

$$\frac{H}{A} = \frac{\sigma_{nM}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_M - r) - \frac{\sigma_M^2}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_n - r) \qquad 3.57$$

elde edilir. Bu sonuçların denklem 3.52 içine yerleştirilmesi ve terimlerin yeniden düzenlenmesi ile dengedeki beklenen getiriler elde edilmektedir;

$$\begin{aligned}\mu_i - r &= \frac{\sigma_{nr}\sigma_{iM} - \sigma_{nM}\sigma_{ir}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_M - r) \\ &+ \frac{\sigma_M^2\sigma_{ir} - \sigma_{Mr}\sigma_{iM}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}(\mu_n - r) \\ &= \beta_i^1(\mu_M - r) + \beta_i^2(\mu_n - r). \end{aligned} \qquad 3.58$$

Burada $\beta_i^1 = \frac{\sigma_{nr}\sigma_{iM} - \sigma_{nM}\sigma_{ir}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}$ ve $\beta_i^2 = \frac{\sigma_M^2\sigma_{ir} - \sigma_{Mr}\sigma_{iM}}{\sigma_{nr}\sigma_M^2 - \sigma_{Mr}\sigma_{nM}}$ ‘dir.

Artık getiri CAPM’de olduğu gibi sistem riskini (β_i^1), artı olarak durum değişkenlerinde meydana gelebilecek olumsuz değişim riskini (β_i^2) telafi etmektedir.

Betası sıfır olan yani piyasa portföyü ile korele olmayan varlıklar bile durum değişkenlerinde meydana gelebilecek kaymalara bağlı olarak risksiz varlıktan yüksek getiriler sağlayabilirler. Bu ilişki gerçekte gözlenebilmesine rağmen CAPM ile açıklanamamaktadır. [110]

$m \geq 1$ sayıda durum değişkenin zamanla değiştiği genel durum için denklem 3.58 aşağıdaki gibi oluşmaktadır;

$$\mu_i - r = \beta_i^1 (\mu_M - r) + \sum_{j=1}^{n} \beta_i^j (\mu_j - r). \tag{3.59}$$

Durum değişkeninin her bir riski ayrı biçimde telafi etmesi ile ICAPM CAPM'i dinamik bir ortama genişletmektedir. ICAPM denklemleri çok faktörlü modellere (APT) benzerlik göstermektedir. Fakat ICAPM'in avantajı risklerin varlık özelliklerine bağlı olarak belirlenebilmesinde yatmaktadır. [111]

3.3.2.5. *Geniş Zamanlı Varlık Fiyatlama Modeli Uygulamaları*

Finansal literatürde ICAPM uygulamalarına çok sık rastlanılmamaktadır. Bu, ICAPM'in ilk bakışta APT ile olan benzerliğinden kaynaklanmaktadır. ICAPM tek sabit risk faktörü olarak pazar portföyünü tanımlamaktadır. APT ise pazar portföyünü, yatırımcının kusursuz biçimde çeşitlendirme yapmış olduğu varsayımı ile, bir risk faktörü olarak değerlendirmemektedir. ICAPM ne pazar portföyünün ne de durum değişkenleri ile en yüksek korelasyona sahip portföylerin kusursuz olarak çeşitlendirilmediğini varsaymaktadır. Bütün portföylerin kusursuz olarak

---

[110] **Ibid.**, p.90.

[111] **Ibid.**

çeşitlendirildiği ve durum değişkenlerinin ortak faktörlere eşitliği varsayıldığında ICAPM, APT'ye denk olmaktadır. Bu nedenle APT'nin ICAPM'in özel bir durumu olduğu söylenebilir.[112]

Gelecek enflasyondaki belirsizliğin ve üretim artışının durum değişkenleri olarak alındığı bir ICAPM çalışmasında, 1960-1985 yılları arasındaki NYSE aylık verileri kullanılarak durum değişkenleri ile getiriler arasındaki ilişki açık bir biçimde gösterilmiştir. Enflasyon belirsizliğindeki değişikliklerin kalıcı olduğu buna karşın üretimdeki belirsizliklerin önemli etkileri olmadığı sonucuna varılmıştır. Enflasyondaki belirsizlik değişimlerin varlık fiyatlarını anlamlı biçimde değiştirdiğini buna karşın gerçek üretimdeki belirsizliklerin fiyatlar üzerinde bir etkisinin olmadığı gösterilmiştir. Gözlemlenen zaman diliminde hisse senedi piyasası ICAPM ile çok kesin bir biçimde açıklanmıştır. Fakat birçok model gibi kısa dönemli fiyat hareketlerinin açıklanmasında başarılı olunamamıştır.[113]

3.3.3. Tüketim Bazlı Varlık Fiyatlama Modeli

ICAPM ile varlık fiyatları davranışları belirlenmeye çalışıldığında durum değişkenlerini belirleme sorunu ile karşılaşılmaktadır. Teoride bu değişkenlerin belirlenmesi ile ilgili bir ipucu bulunmamaktadır. ICAPM teorik çerçevesi içinde

---

[112] George M. Constantinides, Anastasios G. Malliaris, "Portfolio Theory", **Finance** ed. by R.A. Jarrow, V. Maksimovic ,W. T. Ziemba, Elsevier- Amsterdam, 1995, pp.8.

[113] Yoon Dokko, Robert H. Edelstein, "Inflation Uncertainty and Stock Market Fluctuations: An Intertemporal CAPM Approach", **Research in Finance**, Vol. 9, 1991, pp.1-20.

geliştirilen tüketim bazlı varlık fiyatlama modeli (ICCAPM) durum değişkenleri riskini tek bir değişkende (tüketim) toplayarak, bu soruna yaklaşmaktadır.[114]

3.3.3.1. Modelin Türetilmesi

ICAPM'in temelini oluşturan varsayımlar ICCAPM için de geçerlidir. Yatırımcıların aynı biçimde denklem 3.24'de verilen bütçe denklemini, tüketim, $C^k(t)$ ve portföy kompozisyonu, $\{\omega_i^k\}_{i=1}^n$'e göre maksimize etmeye çalışacakları varsayılmaktadır;

$$E\left[\int_0^T U^k\left(C^k(t)\right)e^{-p^k t}dt + U^k\left(W^k(T)\right)e^{-p^k T}\right]. \qquad 3.60$$

Buna ek olarak yapılması gereken tek varsayım tüketim ile ilgilidir. Burada tek bir tüketim maddesi olduğu ve durum değişkenlerinin tüketimi etkilediği varsayılmakta ve tüketimin kendisi rassal bir değişken olarak tanımlanmaktadır. Bu etki, durum değişkenlerinin fiyatı etkilemesi dolayısı ile servetin alabileceği tüketim maddesi sayısının değişmesinden kaynaklanmaktadır.[115]

Denklem 3.60'ın maksimize edilmesi için gerekli koşullar ICAPM modelinde olduğu biçimdedir;

$$J_W^k = U_C\,, \qquad 3.61$$

---

[114] Douglas T. Breeden, "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", **Journal of Financial Economics**, Vol. 7, 1979, 265–296.

[115] Robert C. Merton, **Continuous-Time Finance**, p. 404.

$$d^k = \omega^k W^k = -\frac{J_W^k}{J_{WW}} V^{-1}(\mu - r\iota) - \frac{J_{XW}^k}{J_{WW}} V^{-1}\sigma \,. \qquad 3.62$$

Denklem 3.3.2 durum değişkenleri X ve servet W^k'e göre türetildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir;

$$J_{WX}^k = U_{CX} = U_{CC}\, C_X^k \,, \qquad 3.63$$

$$J_{WW}^k = U_{CW} = U_{CC}\, C_W^k \,. \qquad 3.64$$

Sonuçlar denklem 3.62'ye yerleştirildiğinde $z^k = -\frac{U_C}{U_{CC}}$ Arrow-Pratt riskten kaçınma ölçütü olacak şekilde aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır;

$$\omega^k W^k = -\frac{U_C}{U_{CC} C_W^k} V^{-1}(\mu - r\iota) - \frac{U_{CC}\, C_X^k}{U_{CC} C_W^k} V^{-1}\sigma$$

$$= z^k \frac{1}{C_W^k} V^{-1}(\mu - r\iota) - \frac{C_X^k}{C_W^k} V^{-1}\sigma. \qquad 3.65$$

$C_W^k\, V$ ile çarpıldığında

$$C_W^k\, V\omega^k\, W^k = z^k(\mu - r\iota) + C_X^k\, \sigma \qquad 3.66$$

elde edilir. $V\omega^k\, W^k$ terimi varlık getirilerinin servetteki değişim ile olan kovaryans vektörünü göstermektedir. $V_{\mu W^k} = V\omega^k\, W^k$ olarak tanımlanırsa denklem 3.66 aşağıdaki biçimde yazılabilir;[116]

$$z^k(\mu - r\iota) = V_{\mu W^k}\, C_W^k + C_X^k\, \sigma. \qquad 3.67$$

---

[116] Breeden, **op.cit.**, p.276.

Ito lemma kullanılarak yatırımcı tüketimleri ile varlık getirileri kovaryansı türetilmektedir;

$$V_{\mu C^k} = V_{\mu W^k}\, C_W^k + C_X^k\, \sigma. \qquad 3.68$$

Denklem 3.68, denklem 3.67'ye yerleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilmektedir;

$$z^k(\mu - r\iota) \ = \ V_{\mu C^k} \qquad 3.69$$

Denklem 3.69 her yatırımcı için geçerli olduğundan bu sonuçlar toplanabilmektedir. $z \equiv \sum_{k=1}^{K} z^k$ ve $V_{\mu C} \equiv \sum_{k=1}^{K} V_{\mu C^k}$ tanımlandığında bütün varlıklar için;

$$z\,(\mu - r\iota) \ = \ V_{\mu C} \qquad 3.70$$

ve tek bir varlık için aşağıdaki eşitliğe ulaşılmaktadır;

$$z\,(\mu_i - r) \ = \ \sigma_{iC}\,. \qquad 3.71$$

Denklem 3.71 aynı zamanda herhangi bir portföy içinde geçerlidir. Piyasa portföyü olması gerekmeyen bu portföy altsimge M ile gösterildiğinde ω_i^M portföy ağırlıkları olmak üzere portföy beklenen getirisi ve tüketimle olan kovaryansı $\mu_M \equiv \sum_{i=1}^{n} \omega_i^M\, \mu_i$ ve $\sigma_{MC} \equiv \sum_{i=1}^{n} \omega_i^M\, \sigma_{iC}$ olarak tanımlanmaktadır. Denklem 3.71 ω_i^M ile çarpılıp tüm varlıklar toplandığında aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır;

$$z\,(\mu_{iM} - r) \ = \ \sigma_{MC} \qquad 3.72$$

Denklem *z* için çözülüp ve 3.71 içine yerleştirildiğinde şu eşitlik ortaya çıkmaktadır;

$$\mu_i - r \ = \ \frac{\sigma_{iC}}{\sigma_{MC}}\,(\mu_M - r)\,. \qquad 3.73$$

Beta değerleri toplam tüketime bağlı biçimde $\beta_{iC} \equiv \frac{\sigma_{iC}}{\sigma_C^2}$ ve $\beta_{MC} \equiv \frac{\sigma_{MC}}{\sigma_C^2}$ olarak tanımlandığında denklem 3.73 şu şekilde yazılabilir;

$$\mu_i - r \;\; = \frac{\beta_{iC}}{\beta_{MC}}(\mu_M - r) \;. \qquad 3.74$$

Bu durumda toplam tüketim ile tam korelasyon içinde değişen bir M portföyü için denklem 3.74, aşağıdaki biçime indirgenmektedir;

$$\mu_i - r \;\; = \;\beta_{iC}(\mu_M - r) \qquad 3.75$$

Böylece ICAPM'de getirileri belirleyen durum değişkenlerindeki değişim riskleri genel bir risk faktörü olan toplam tüketimde toplanmış olmaktadır. Anlık ve gelecekteki toplam tüketimi etkileyen tüm risk faktörleri bu biçimde birleştirilirken $(\mu_M - r)$ terimi tüketim riskinin piyasa fiyatı olarak adlandırılmaktadır. [117]

Bu sonuçların anlaşılması için bugünkü fayda $J^k(\,W^k, t, X)$ 'in son servet ile birlikte tüketim miktarı ve zamanlamasından da etkilendiğini göz önüne almak gerekmektedir. Servet arttıkça tüketimin artacağını $(C_W^k > 0)$ varsaymak, mantıklı olacağı için ve servetinde varlık getirilerinin yükselmesi ile artacağı düşünüldüğünde tüketim de varlık getirilerinden etkilenmektedir. Mevcut tüketimi ve bir varlığın beklenen getirisini düşüren bir durum oluştuğunda, $\beta_{iC} \gg 0$, düşen mevcut tüketim yatırımcının bugünkü faydasını düşürecektir. Varlığın gelecek beklenen getirisi de düşeceği için beklenen gelecek servet ve dolası ile beklenen gelecek tüketim de düşerek sonucunda faydayı daha da düşürecektir. Bir varlığı elinde bulunduran yatırımcı gelecek tüketimini etkileyecek olan durum değişkenlerinde meydana

[117] **Ibid.**, p.277.

gelebilecek olumsuz değişiklik risklerine maruz kalmaktadır ve bu risklere karşı korunmalıdır. Aynı argüman negatif beta için de geçerlidir.[118]

3.3.3.2. Tüketim Bazlı Varlık Fiyatlama Modeli Uygulamaları

ICCAPM uygulamalarında toplam tüketim ile ilgili bazı zorluklarla karşılaşılmaktadır. Toplam tüketim istatistikleri, doğrudan tüketimi değil fakat mal ve hizmetler için yapılan harcamaları yansıtmaktadır. Satın alınan mallar anında tüketilmediği, ileri tarihlerde tüketilmek üzere depolandığı ya da zaman içinde tüketildiği için, veriler iş döngüsü ile örtüşmemektedir. Bu olumsuzluk toplanma etkisi ile azalmakla birlikte uygulama sonuçlarını olumsuz etkilemektedir. Ayrıca tüketim verileri aylık ya da çeyreklik zaman dilimlerinde toplanmaktadır. Fakat varlık fiyat verileri günlük ya da gün içinde alınabilmektedir. Bu durum da veri uyumsuzluğuna yol açan olan diğer bir etken olmaktadır. [119]

Veri uyumsuzluklarına rağmen, CAPM'de kullanılan pazar portföyüne karşılık tüketim verilerinin kullanılmasının bir avantajı bulunmaktadır. CAPM pazar portföyü menkul kıymetler ve kişisel sermaye gibi önemli varlıkları içermezken tüketim verileri etkin tüketimin daha büyük bir bölümünü kapsamaktadır.[120]

Veri sorunlarının yanında toplam tüketimdeki değişim ile maksimum korelasyonu sağlayan, maksimum korelasyon portföyü olarak da adlandırılan portföyün belirlenmesi de ICCAPM sorunları arasında yer almaktadır. Teorinin

---

[118] **Ibid.**, p.278.

[119] Douglas T. Breeden, Michael R. Gibbons, Robert H. Litzenberger, "Empirical Tests of the Consumption- Oriented CAPM", **Journal of Finance**, Vol. 44, 1989, pp. 231–262.

[120] Breeden, **op.cit**., p.291.

öngördüğü üzere sıfır beta portföyün artık getirisi CAPM'in tersine küçüktür. 1929-1982 yılları arasında çeyrek ve aylık veriler kullanılarak yapılan bir çalışmada tüketim riski fiyatının pozitif olduğu belirlenmiştir. Artık getiri ve tüketim riski arasındaki doğrusal ilişki (β_{iC}) ise veri kalitesinin yükseldiği daha yakın alt dönemlerde (1947-1982) reddedilmiştir. Bu olgu sonuçların anlamlandırılması açısından veri kalitesinin kritik önemde olduğunu göstermektedir.[121]

Sonuçlar ICCAPM'i, CAPM sonuçlarındaki benzer nedenlerle desteklememektedir. ICCAPM kısa vadede aylık dönemlerden kısa tüketim verileri olmaması nedeniyle varlık fiyat hareketlerini açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Fakat zamanla değişen riskten kaçınma fonksiyonu kullanılarak CCAPM'in verilerle daha uyumlu olduğu da gösterilmiştir.[122]

---

[121] Douglas T. Breeden, Michael R. Gibbons, Robert H. Litzenberger, "Empirical Tests of the Consumption- Oriented CAPM", **Journal of Finance**, Vol. 44, 1989, pp. 231–262.

[122] Chang Mo Ahn, Dosung Cho, "Time Varying Risk Preference and Consumption Asset Pricing Model", **Research in Finance**, Vol. 9, 1991, pp. 21-36.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

STOKASTİK PORTFÖY TEORİSİNİN BIST'TE UYGULANMASI

Bu bölümde Stokastik Portföy Teorisine dayanan log-normal portföyler ile Modern Portföy Teorisine dayanan Markowitz portföylerinin Borsa İstanbul verileri ile performans açısından karşılaştırması yer almaktadır. Karşılaştırmanın amacı Stokastik Portföy Teorisine dayanan yöntemlerin uzun dönemde Modern Portföy Teorisine dayanan yöntemlere göre üstün olup olmadığını ortaya koymaktır. Bu bölümde ilk olarak log-optimal ve Markowitz portföy optimizasyon yöntemleri açıklanmakta daha sonra ise BIST verileri ile yapılan karşılaştırmalı uygulamaya yer verilmektedir.

4.1. Log-optimal ve Markowitz Portföy Optimizasyonları

Log–optimal yöntem, ardışık biçimde belirsiz ve rastgele seçimlerle karşı karşıya olan ve son servetini maksimize etmeye çalışan yatırımcıların optimum stratejisinin en yüksek büyüme oranına ulaşmak olduğunu varsaymaktadır. Bu nedenle optimum hisse oranlarının belirlenmesi için uzun dönemde büyüme oranının maksimizasyonu amaçlanmaktadır.

Modern Portföy Teorisi çerçevesinde oluşturulan Markowitz portföylerin ise bu çalışmanın ilk bölümünde vurgulandığı üzere tek dönemde optimal iken çok dönemli bir uygulamada optimal olmaktan uzaklaşacakları varsayılmaktadır. Uzun dönemli uygulamalarda bu özelliğin daha belirgin olacağı düşünülmektedir.

4.1.1. Yöntem

Markowitz portföylerin optimizasyonu için Sharpe oranı maksimizasyonu kullanılmaktadır. Daha yüksek bir Sharpe oranı birim risk başına daha yüksek getiri anlamına gelmektedir. Bu nedenle Markowitz etkin sınır üzerindeki portföyler içinde en yüksek Sharpe oranına sahip olan portföy, optimum portföy olarak değerlendirilmektedir. Bir portföyün Sharpe oranı portföyün beklenen getirisinin portföy standart sapmasına bölümü olarak ifade edilmektedir;[123]

$$\mu_p = \sum_{i=i}^{n} x_i \, \mu_i \qquad 4.1$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=i}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_i \, x_j \, \sigma_{ij} \qquad 4.2$$

$$SR_p = \frac{\mu_p}{\sigma_p} \, . \qquad 4.3$$

x_i = portföyün i varlığına yatırılan bölümü,

μ_i = i varlığının beklenen getirisi,

σ_{ij} = i ve j varlıkları arasındaki kovaryans,

μ_p = portföyün beklenen getirisi,

σ_p^2 = portföyün varyansı,

SR_p = portföyün Sharpe oranı.

Sharpe oranı tanımı risksiz varlık terimini de içermektedir fakat maksimizasyon durumunda sabit bir terimin etkisi olmayacağı için bu terimin denklemde yer alması

[123] William F. Sharpe, “Mutual Fund Performance, **Journal of Business**, January, 1966, pp. 121-125.

sonucu değiştirmemektedir. Bu durumda Sharpe oranının maksimize edilmesi aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir;

$$\max_{x_1, x_1, \ldots, x_n} \frac{\sum_{i=i}^{n} x_i \, \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=i}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_i \, x_j \, \sigma_{ij}}} . \qquad 4.4$$

Sharpe oranı portföy içerisindeki varlık oranlarının optimum dağılımları bulunarak maksimize edilmektedir. Bu maksimizasyon, varlık oranları toplamını $\sum_{i=i}^{n} x_i = 1$ ve bütün *i* değerleri için $x_i \geq 0$ büyük olacak biçimde tanımlanmaktadır. Koşul $x_i \geq 0$ açığa satış olmaması anlamına gelmektedir.

Log-optimal portföy optimizasyonu da kısım 2.3.1 denklem 2.38'de verilen

$$\upsilon t = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i \, \mathrm{t} - \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} w_i \, \sigma_{ij} w_j \mathrm{t} \qquad 4.5$$

eşitliğinin maksimize edilmesi ile sağlanacaktır. Markowitz portföy optimizasyonuna benzer gösterimler kullanılarak, $\sum_{i=i}^{n} x_i = 1$ ve bütün *i* değerleri için $x_i \geq 0$ büyük olacak biçimde maksimizasyon problemi şu biçimde oluşmaktadır;

$$\max_{x_1, x_1, \ldots, x_n} \sum_{i=i}^{n} x_i \, \mu_i - \frac{\sum_{i=i}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_i \, x_j \, \sigma_{ij}}{2 \left(\sum_{i=i}^{n} x_i \, \mu_i \right)^2} \qquad 4.6$$

Denklem 4. 6 Modern Portföy Teorisi ile uzun dönemli sürekli zamanlı teoriler arasındaki bir farkı da ortaya çıkarmaktadır. Modern Portföy Teorisi oynaklık istenmeyen bir durumdur ve risk ile eşdeğerdir. Stokastik Portföy Teorisi' de ise oynaklık, portföy büyümesini düşürmesi nedeniyle olumsuz bir etki yapmaktadır.

4.1.2. Optimizasyon

Yukarıda teorik olarak verilen maksimizasyon denklemlerinin çözülerek portföylerdeki optimum varlık oranlarının belirlenebilmesi için portföy ortalama aylık getiri, portföy standart sapma ve portföy kovaryans matrislerinin hesaplanması gerekmektedir. Bir portföyün ortalama aylık getirisi matris formunda aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır;

$$\mu_p = w_i^T \overline{x_i} \qquad 4.7$$

μ_p = portföy ortalama aylık getirisi,

w_i^T = portföy ağırlıkları matrisinin devriği,

$\overline{x_i}$ = portföyü oluşturun varlıkların ortalama aylık getirisi.

Bu matris denklemi aşağıdaki biçimde açık olarak ifade edilmektedir.

$$\mu_p = [\, w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \cdots \quad \cdots \quad w_k \,] \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \\ \cdots \\ \cdots \\ \overline{x_k} \end{bmatrix} \qquad 4.8$$

Portföy standart sapması ise aşağıdaki biçimde hesaplanmaktadır;

$$\sigma_p = (w_i^T \, \Sigma \, \mathrm{w})^{\frac{1}{2}} \qquad 4.9$$

σ_p = portföy standart sapması,

w_i^T = portföy ağırlıkları matrisinin devriği,

Σ = portföy kovaryans matrisi,

w = portföy ağırlıkları matrisi.

Yukarıdaki denklemdeki kovaryans matrisinin hesaplanması portföy kovaryans denkleminin matris formunda oluşturulması ile olmaktadır. Bir portföy içerisindeki iki varlığın kovaryansı aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır;

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\ (y_i - \overline{y}). \qquad 4.10$$

σ_{xy} = x ve y varlıklarının kovaryansı,

x_i = x varlığının i. aydaki getirisi,

$\overline{x}$ = x varlığının n aydaki ortalama getirisi,

y_i = y varlığının i. aydaki getirisi,

$\overline{y}$ = y varlığının n aydaki ortalama getirisi.

Varlık sayısı k olan bir portföyün kovaryans matrisinin hesaplanması için öncelikle portföy içerindeki varlıkların her birinin n sayıdaki aylık getiri vektöründen oluşan n x k ‘lik bir getiri matrisi oluşturulmak gerekmektedir. Daha sonra bu getiri matrisinden her varlığın n aylık ortalama getirileri çıkarılarak yine n x k boyutlarında bir artık getiri matrisine ulaşılmaktadır. Bu aşamalardan sonra kovaryans matrisi aşağıdaki biçimde oluşturulmaktadır;

$$\Sigma_{kxk} = \frac{1}{n} \ (X^T X) \qquad 4.11$$

Σ_{kxk} = k x k kovaryans matrisi,

n = getirilerin alındığı ay sayısı,

X = artık getiri matrisi,

X^T = artık getiri matrisinin devriği.

Yukarıdaki matris çarpımı denklem 4.10'da iki varlık için tanımlanan kovaryans eşitliğinin bütün varlıklara denk gelen matris formudur. Bu matris denkliğinde yer alan X ve X^T aşağıdaki biçimde oluşturulmaktadırlar;

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} - \overline{x_1} & x_{21} - \overline{x_2} & \cdots & x_{k1} - \overline{x_k} \\ x_{12} - \overline{x_1} & x_{22} - \overline{x_2} & & x_{k2} - \overline{x_k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ x_{1n} - \overline{x_1} & x_{2n} - \overline{x_2} & & x_{kn} - \overline{x_k} \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} x_{11} - \overline{x_1} & x_{12} - \overline{x_1} & \cdots\cdots & x_{1n} - \overline{x_1} \\ x_{21} - \overline{x_2} & x_{22} - \overline{x_2} & & x_{2n} - \overline{x_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \cdots\cdots & \vdots \\ x_{k1} - \overline{x_k} & x_{k2} - \overline{x_k} & & x_{kn} - \overline{x_k} \end{bmatrix}$$

$x_{11}, \ldots\ldots, x_{k1}$ = birden k'ye kadar varlıkların birinci aydaki getiri oranları

$x_{1n}, \ldots\ldots, x_{kn}$ = birden k'ye kadar varlıkların n. aydaki getiri oranları

$\overline{x_1}, \ldots\ldots\ldots, \overline{x_k}$ = birden k'ye kadar varlıkların ortalama aylık getiri oranları.

Her zaman aralığı için yukarıdaki matris eşitliklerinden yararlanılarak elde edilen portföy ortalama getiri oranları ve standart sapmaları, denklemler 4.3 ve 4.6 kullanılarak portföy varlık ağırlıklarını belirlemek için optimize edilmektedir. Bu kısımda teorik olarak açıklanan optimizasyon uygulamaları aşağıdaki kısımda yer almaktadır.

4.2. Log-optimal ve Markowitz Portföy Performansları Karşılaştırmalı Uygulaması

Bu kısımda yukarıda anlatılan iki optimizasyon yönteminin, tarihi Borsa İstanbul (BIST) verileri ile karşılaştırmalı bir uygulaması yapılmaktadır. Kullanılan veriler 2000 ile 2015 yılları arasında BIST100 endeksinde yer alan ve sürekli işlem gören 59 hisse senedine aittir. Bu hisselerin Ocak 2000 tarihinden Nisan 2015 tarihine kadar olan aylık getirileri hesaplanmış ve analizde kullanılmıştır. İki yöntemle oluşturulan portföylerin özellikleri ve performansları farklı oluşturma ve performans ölçüm dilimleri içeren üç kategoride analiz edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Analizde kullanılan hisse senetlerinin listesi ve karşılaştırılan portföyler içerisindeki ağırlıkları EK-1'de verilmektedir.

Uygulamanın amacı log-optimal portföylerin uzun dönemdeki performanslarını ölçmek ve Markowitz portföyler ile karşılaştırmak olduğu için portföy oluşturma ve performans ölçme süreleri veri setinin el verdiği ölçüde uzun tutulmuştur.

İlk kategoride üçer yıllık portföy oluşturma dönemlerinde iki yöntemle optimize edilerek elde edilen portföylerin, takip eden bir, iki ve üç yıllık gerçek getiriler ile performansları ölçülerek karşılaştırılmıştır. İlk olarak 2000-2002 yılları getiri ve standart sapmaları kullanılarak oluşturulan portföyler 2003, 2003-2004, 2003-2005 dönem gerçek getirileri ile performans ölçümüne tabii tutulmuş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu şekilde 2000-2015 yılları arasında dört ayrı dönemde iki yöntem kullanılarak oluşturulan portföylerin performansları, gerçek getiriler kullanılarak on iki ayrı zaman diliminde karşılaştırılmıştır.

İkinci kategoride portföy oluşturma süreleri beş yıla çıkarılmış ve oluşturulan portföyler, takip eden bir, iki, üç, dört ve beş yıllık sürelerde gerçek getiriler ile performans ölçümü yapılarak karşılaştırılmıştır. Bu kategoride iki ayrı dönemde portföyler oluşturulmuş ve on ayrı zaman diliminde performans ölçümü yapılmıştır.

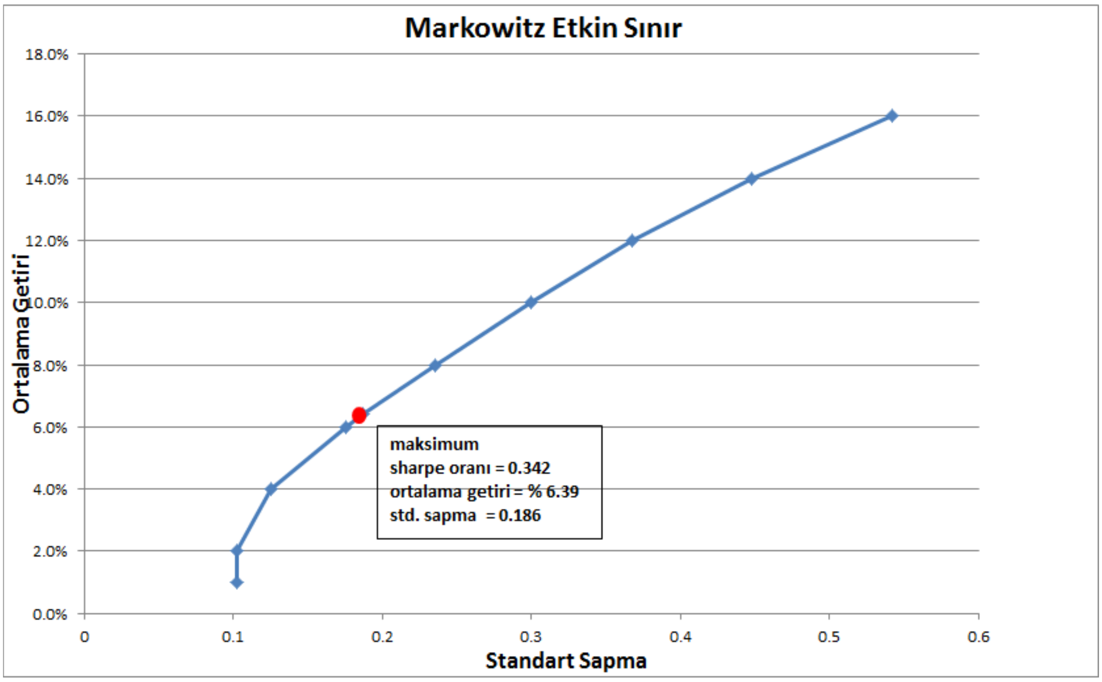
Üçüncü kategoride ise veri dönemi elverdiğince (2000-2015) hem portföy oluşturma hem de performans ölçüm süreleri uzun tutularak portföyler oluşturulmuştur. Bu kategoride dokuzar yıllık veriler ile iki ayrı dönemde oluşturulan portföylerin performansları veri seti sonuna kadar on ayrı dönem için ölçülmüş ve karşılaştırılmıştır.

Her üç kategori uygulamaları ve bulguları aşağıdaki kısımlarda açıklanmaktadır.

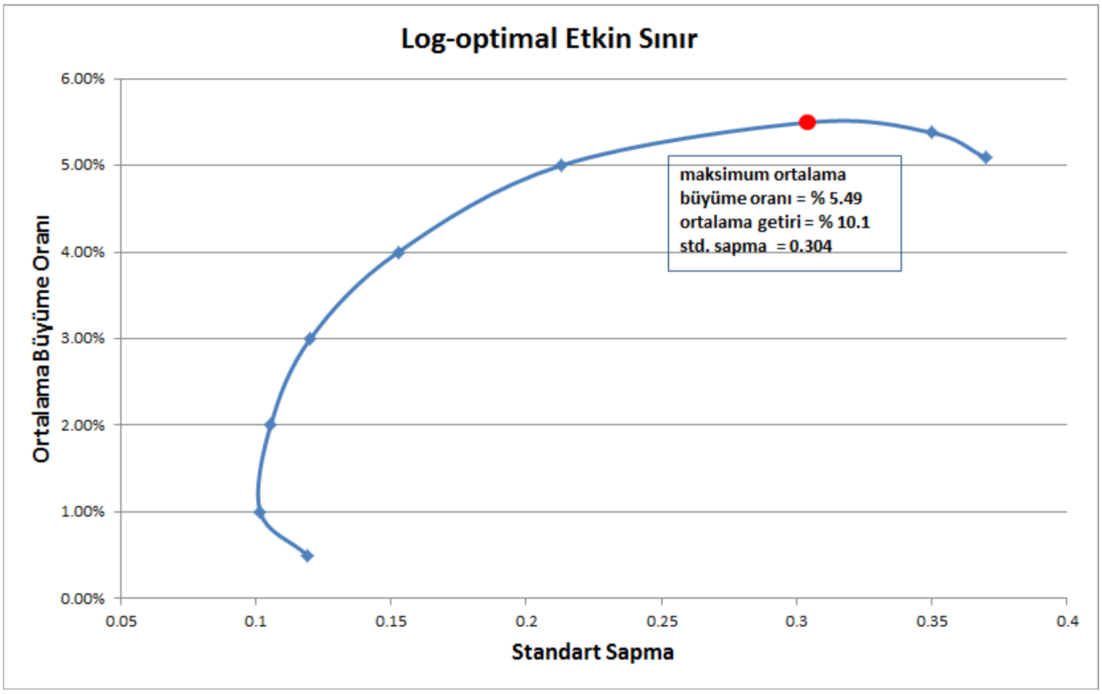
4.2.1.1. İlk Kategori Bulgular

İlk olarak Ocak 2000 ile Aralık 2002 tarihleri arasındaki aylık getiriler kullanılarak Markowitz ve log-optimal etkin sınırlar üzerinde bulunan portföyler, çeşitli getiri-risk ve büyüme-risk değerleri için belirlenmiştir. Bu portföyler belirlenirken önceki kısımlarda anlatılan Sharpe oranı (Markowitz) ve büyüme (log-optimal) maksimizasyonu ile optimum hisse ağırlıkları saptanmıştır. Markowitz ve log-optimal etkin sınırlar Şekil 4.1 ve 4.2'de verilmektedir. Şekillerde maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme sağlayan (log-optimal) portföyler ayrıca belirtilmişlerdir. Log-optimal sınır şekillerinde görüldüğü üzere log-optimal noktadan sonra büyüme, risk artışı ile keskin bir biçimde düşmektedir. Bu log-optimal portföylerin, log-optimal etkin sınır üzerinde riskin en yüksek olduğu noktalara yakın biçimde oluştuğunu göstermektedir. Bu yüksek riske karşın büyüme değeri ve getiri oranları da Markowitz portföylere oranla daha yüksek değerlere ulaşmaktadır. Bu ve izleyen tablolarda Modern Portföy Teorisi ile oluşturulan portföyler M, log-optimal portföyler ise L ile gösterilmektedir.

Şekil 4.1 : 2000-2002 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.2 : 2000-2002 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Yukarıdaki etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.1'de özetlenmektedir.

Tablo 4.1 : 2000-2002 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	6	10.14%	5.49%	0.332	0.304
M	5	6.39%	4.65%	0.342	0.186

Tablo 4.1' den log-optimal portföyün daha yüksek bir ortalama getiri ve büyüme oranına fakat aynı zamanda daha yüksek risk değerine sahip olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2003, 2003-2004, 2003-2005 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümü Tablo 4.2'de verilmektedir.

Tablo 4.2 : 2000-2002 Portföy Performansları

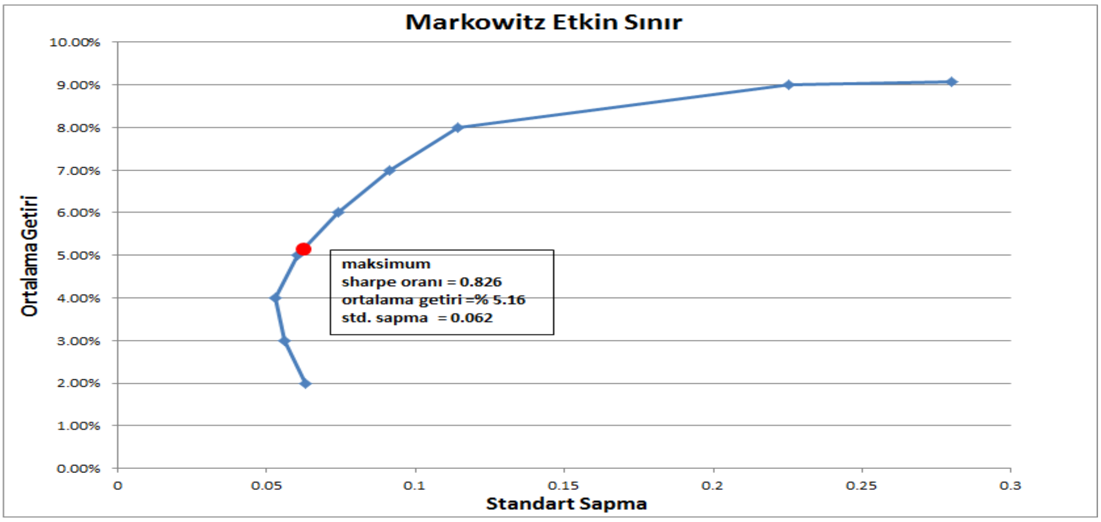
	2003	2003-2004	2003-2005
L	28.47%	234.97%	298.66%
M	56.13%	227.41%	315.69%

Tablo 4.2'de log-optimal ve Markowitz portföylerin iki ve üç yıllık performanslarının yaklaşık olduğu fakat Markowitz portföyünün ilk yıl performansının log-optimal portföye oranla daha iyi olduğu görülmektedir.

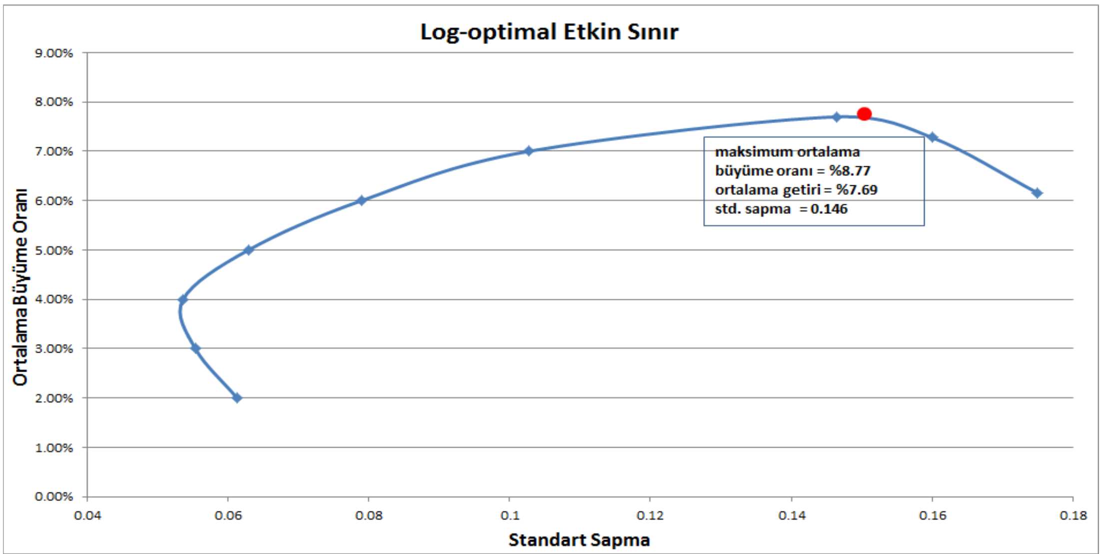
2003-2005 Portföy Bulguları;

2003-2005 yılları arası aylık verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te verilmektedir. Maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranına denk gelen portföyler şekiller üzerinde belirtilmişlerdir.

Şekil 4.3 : 2003-2005 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.4 : 2003-2005 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Yukarıdaki etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.3'de özetlenmektedir.

Tablo 4.3 : 2003-2005 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	3	8.77%	7.69%	0.598	0.146
M	12	5.16%	4.97%	0.826	0.062

Tablo 4.3'de log-optimal portföyün 2000-2002 portföylere benzer biçimde daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca Markowitz portföy açık biçimde daha fazla hisse senedi içermektedir. Bu iki portföyün 2006, 2006-2007, 2006-2008 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümü Tablo 4.4'te verilmektedir.

Tablo 4.4 : 2003-2005 Portföy Performansları

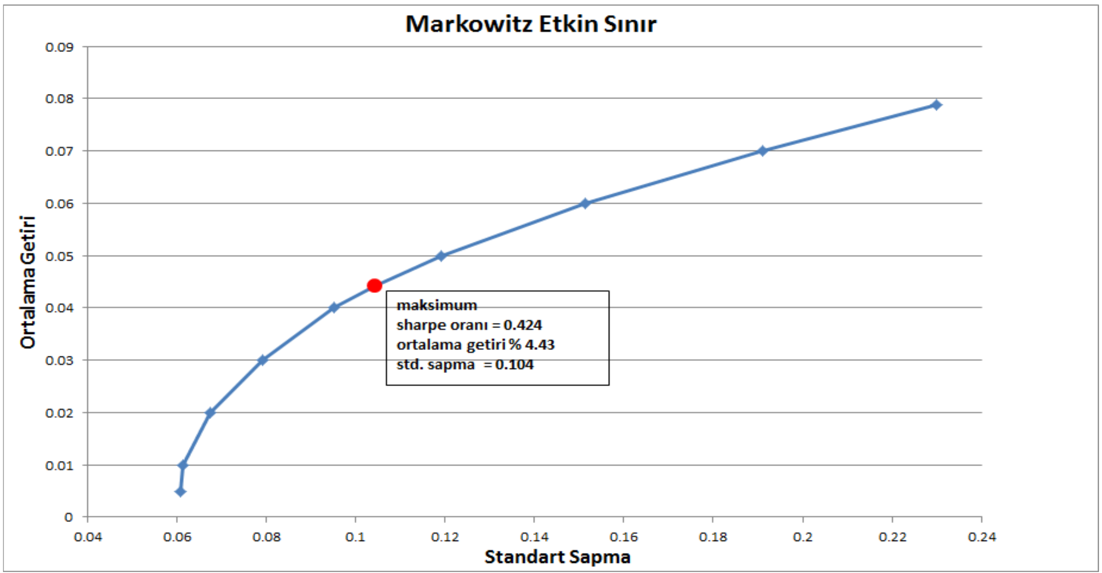
	2006	2006-2007	2006-2008
L	3.48%	47.66%	-26.73%
M	13.63%	17.27%	-29.70%

Tablo 4.4'te Markowitz portföyünün ilk yıl performansının log-optimal portföye oranla daha iyi olduğu fakat iki ve üç yıllık performanslarda log-optimal portföyün daha üstün olduğu görülmektedir.

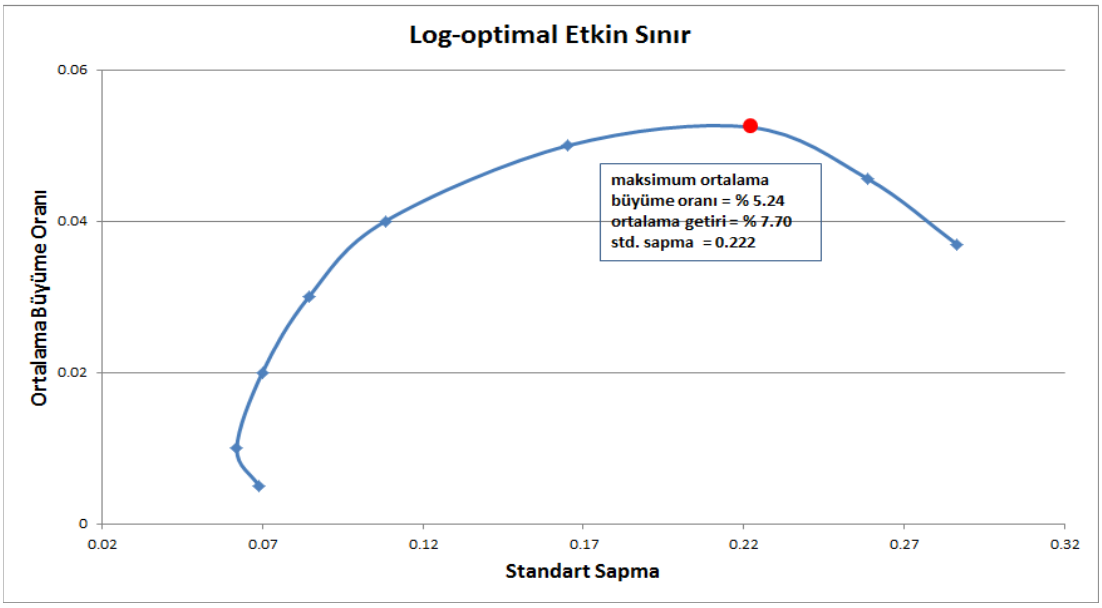
2006-2008 Portföy Bulguları;

2006-2008 yılları arası aylık verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da verilmektedir.

Şekil 4.5 : 2006-2008 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.6 : 2006-2008 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.5’te özetlenmektedir.

Tablo 4.5 : 2006-2008 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	2	7.70%	5.24%	0.347	0.222
M	6	4.43%	3.88%	0.424	0.104

Tablo 4.5’te log-optimal portföyün önceki dönemlerde olduğu gibi daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2009, 2009-2010, 2009-2011 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümü Tablo 4.6’da verilmektedir.

Tablo 4.6 : 2006-2008 Portföy Performansları

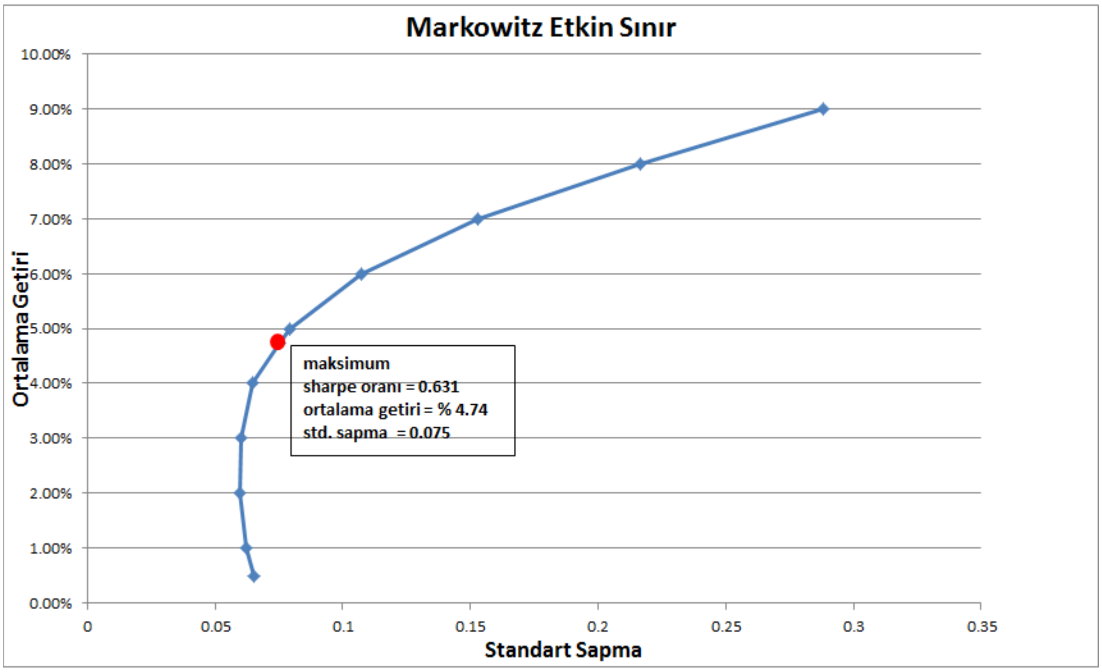
	2009	2009-2010	2009-2011
L	32.63%	173.00%	91.38%
M	29.77%	81.92%	62.27%

Tablo 4.6’da log-optimal portföylerin her üç ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

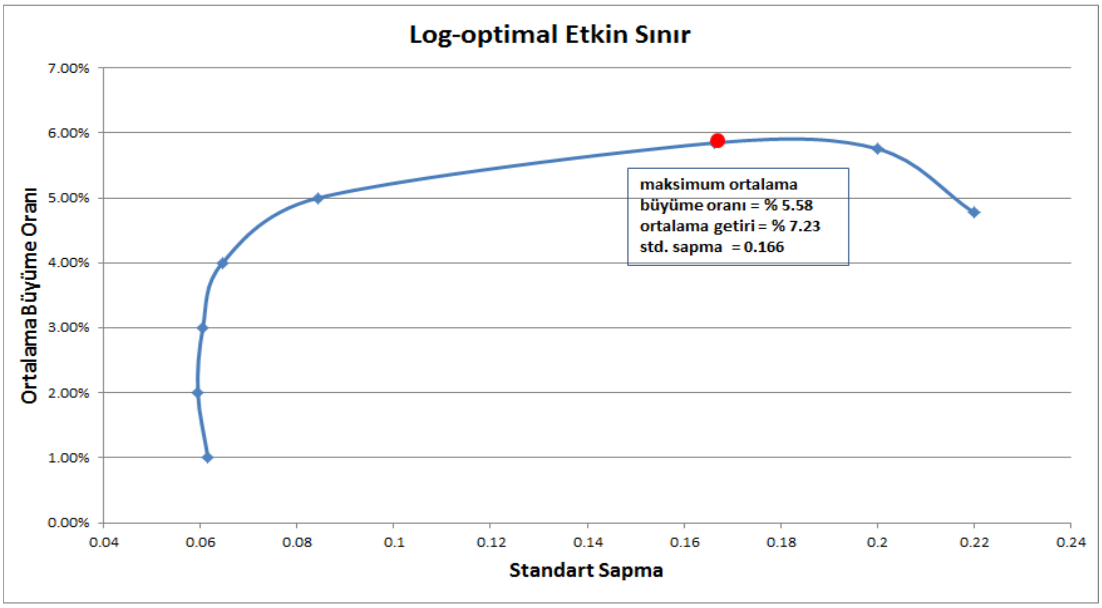
2009-2011 Portföy Bulguları;

2009-2011 yılları arası aylık verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de verilmektedir.

Şekil 4.7 : 2009-2011 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.8 : 2006-2008 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'de verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.7'de özetlenmektedir.

Tablo 4.7 : 2009-2011 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	4	7.23%	5.85%	0.434	0.166
M	13	4.74%	4.46%	0.631	0.075

Tablo 4.7'de log-optimal portföyün önceki dönemlerde olduğu gibi daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Markowitz portföyün çeşitliliği ise daha yüksektir. Bu iki portföyün 2012, 2012-2013, 2012-2014 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümü Tablo 4.8'de verilmektedir.

Tablo 4.8 : 2009-2011 Portföy Performansları

	2012	2012-2013	2012-2014
L	80.06%	122.64%	190.03%
M	44.79%	72.00%	140.54%

Tablo 4.8'de log-optimal portföylerin her üç ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla bariz biçimde daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

İlk kategori portföy oluşumları sonunda, tablolar 4.1, 4.3, 4.5 ve 4.7'ye bakıldığında log-optimal portföylerin her zaman diliminde daha yüksek beklenen aritmetik getiri ve büyüme oranı sağladığı görülmektedir. Teorik olarak daha yüksek beklenen portföy büyümesi daha yüksek beklenen son servet anlamına gelmektedir. Ayrıca bu tablolardan log-optimal portföylerin daha az sayıda hisse senedi içerdiği görülmektedir. Buradan log-optimal portföylerin Markowitz portföylere oranla daha az çeşitlendirilmiş olduğu görülmektedir. Ayrıca tablolardan görüldüğü üzere daha az çeşitlendirilmiş log-optimal portföyler daha yüksek standart sapma ve dolayısı ile daha yüksek oynaklık değerlerine sahiptirler.

Log-optimal portföyler bütün zaman dilimlerinde beklenen aritmetik getiri ve beklenen büyüme oranı açısından üstün oldukları halde gerçek verilerle yapılan performans ölçümlerinde Markowitz portföylere her dönemde üstünlük sağlayamamışlardır. Buna rağmen on iki performans ölçümünün dokuzunda log-optimal portföylerin daha üstün olduğu görülmüştür. Markowitz portföyler ikisi bir yıllık ve birisi üç yıllık olmak üç zaman diliminde daha iyi sonuçlar vermiştir.

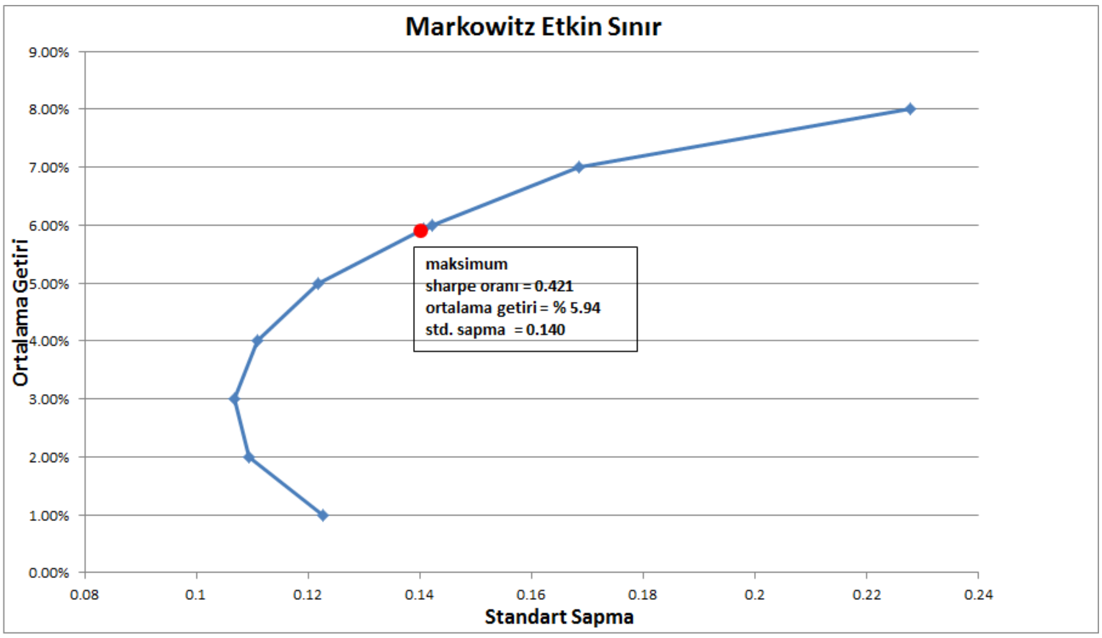
4.2.1.2. İkinci Kategori Bulgular

Log-optimal portföylerin daha uzun dönemli performanslarını ölçmek ve Markowitz portföyleri ile karşılaştırmak amacı ile iki ayrı zaman diliminde beşer yıllık veriler kullanılarak portföyler oluşturulmuştur. Bu portföylerin izleyen bir, iki, üç, dört ve beş yıllık dönemlerde gerçek veriler ile performansları ölçülmüş ve birbirleri ile karşılaştırılmıştır. İlk kategori ölçümlerinde olduğu gibi bu kategoride de oluşturulan Markowitz ve log-optimal portföy etkin sınırları belirlenmiş ve bu etkin sınırlar üzerinde maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyümeye denk gelen portföyler saptanmıştır.

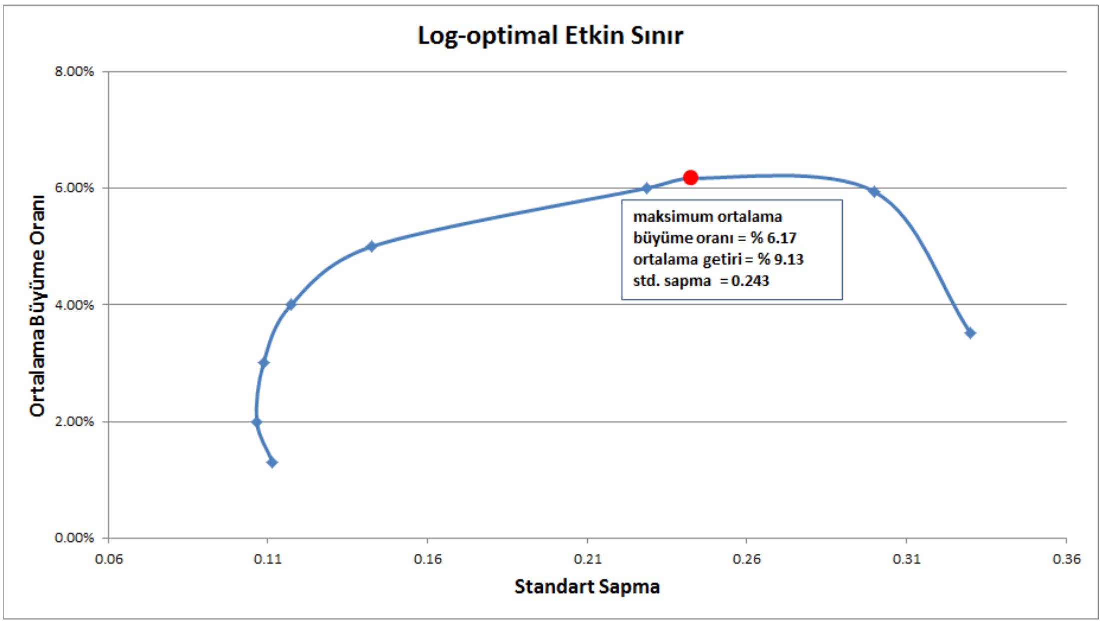
2000-2004 Portföy Bulguları;

2000-2004 yılları verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da verilmektedir.

Şekil 4.9 : 2000-2004 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.10 : 2000-2004 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'da verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.9'de özetlenmektedir.

Tablo 4.9 : 2000-2004 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	5	9.13%	6.17%	0.375	0.243
M	7	5.94%	4.95%	0.421	0.140

Tablo 4.9'da log-optimal portföyün her dönemde olduğu gibi daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bu dönemde çeşitlendirme açısından ise portföyler birbirlerine yaklaşmaktadırlar. Bu iki portföyün 2005, 2005-2006, 2005-2007, 2005-2008, 2005-2009 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 4.10'da verilmektedir.

Tablo 4.10 : 2000-2005 Portföy Performansları

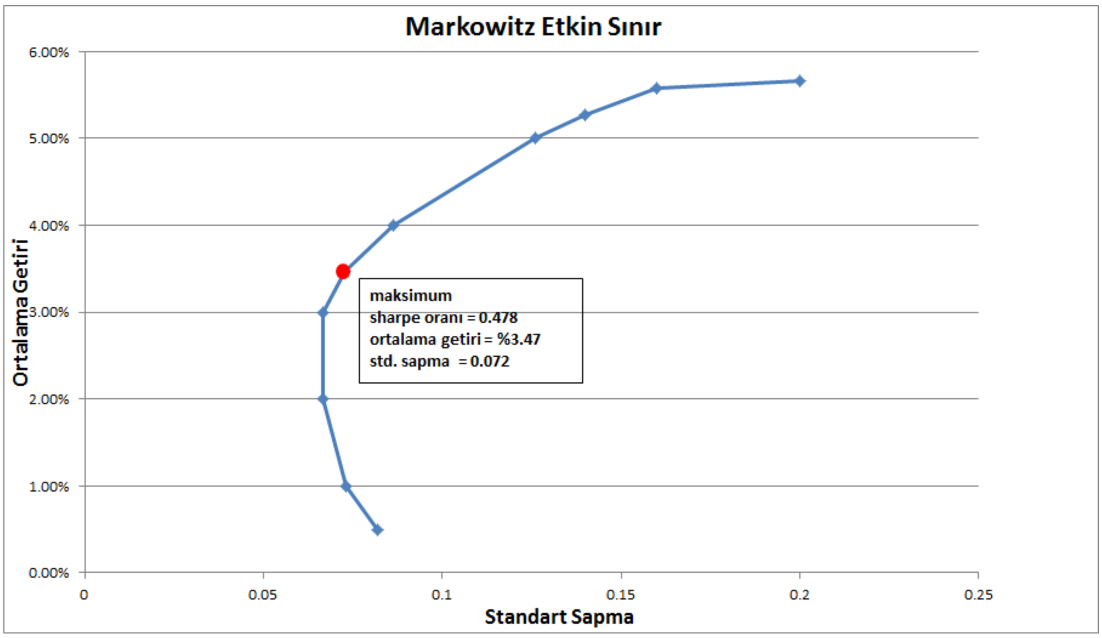
	2005	2005-2006	2005-2007	2005-2008	2005-2009
L	37.55%	19.60%	43.24%	-8.79%	63.43%
M	31.66%	12.37%	25.95%	-14.86%	43.53%

Tablo 4.10'da log-optimal portföylerin her beş ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

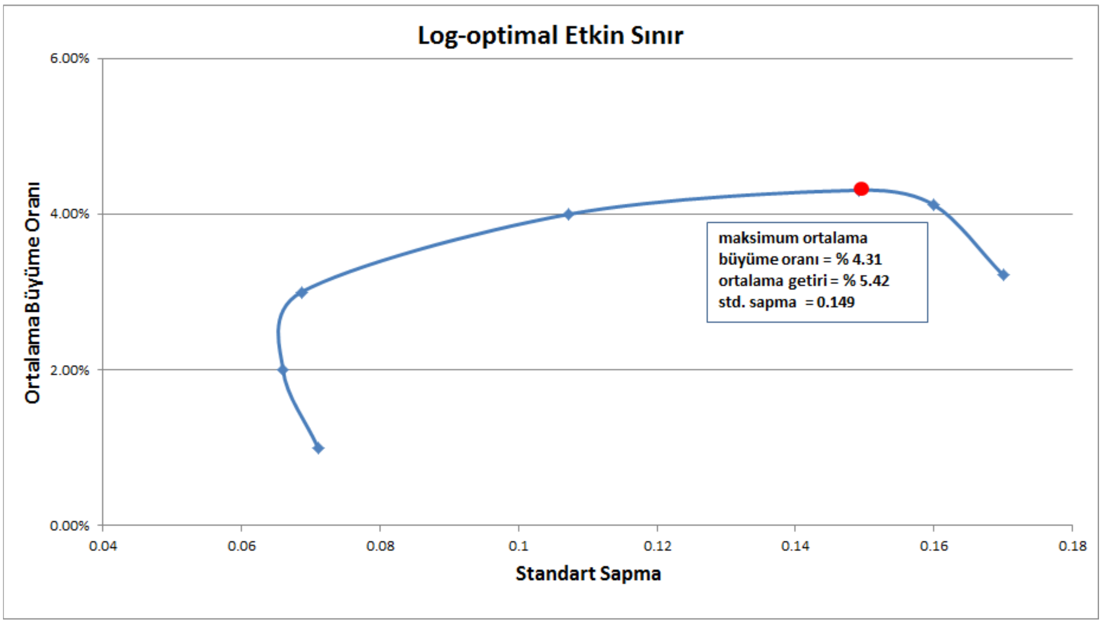
2005-2009 Portföy Bulguları;

2005-2009 yılları verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de verilmektedir.

Şekil 4.11 : 2005-2009 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.12 : 2005-2009 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.11'de özetlenmektedir.

Tablo 4.11 : 2005-2009 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	2	5.42%	4.31%	0.363	0.149
M	13	3.47%	3.21%	0.478	0.072

Tablo 4.11'de log-optimal portföyün daha yüksek ortalama getiri, büyüme oranı ve risk değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Markowitz portföy ise çok daha fazla hisse senedi içermektedir. Bu iki portföyün 2010, 2010-2011, 2010-2012, 2010-2013, 2010-2014 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 4.12'de verilmektedir.

Tablo 4.12 : 2005-2009 Portföy Performansları

	2010	2010-2011	2010-2012	2010-2013	2010-2014
L	101.30%	40.84%	99.65%	67.77%	179.95%
M	41.58%	4.11%	34.90%	32.69%	110.55%

Tablo 4.12'de log-optimal portföylerin her beş ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla açık biçimde daha iyi performans gösterdiği görülmektedir. Sonuç olarak bu kategoride yapılan toplam on performans ölçümünün tümünde log-optimal portföylerin Markowitz portföylere üstünlük sağladığı görülmüştür.

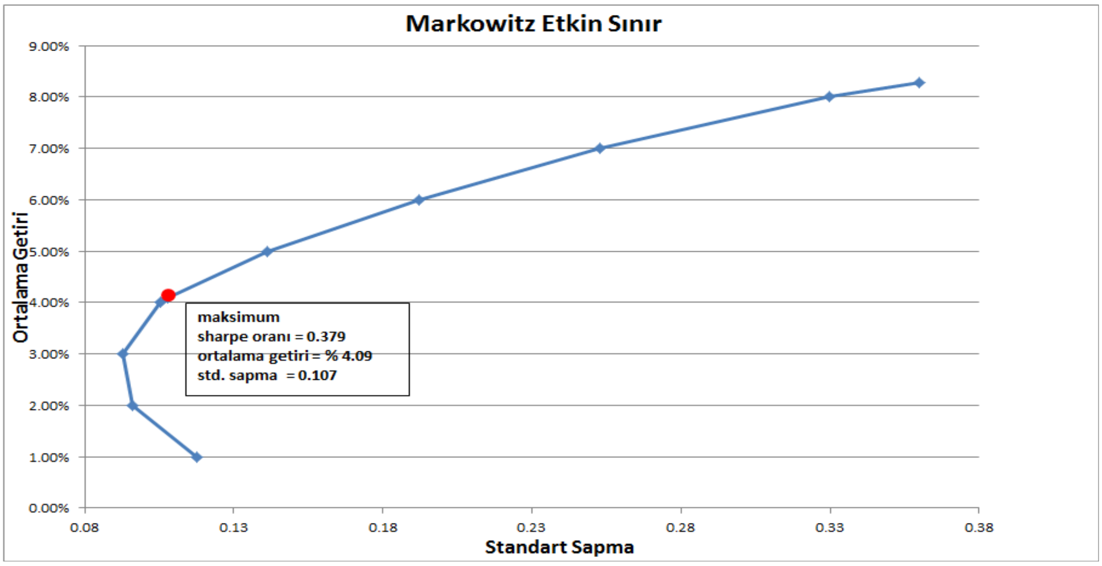
4.2.1.3. Üçüncü Kategori Bulgular

Bu kategoride log-optimal portföylerin uzun dönem performanslarının Markowitz portföylere oranla kesin olarak daha iyi olduğu savını sınamak amacı ile, dokuz yıllık veriler ile log-optimal ve Markowitz portföyler oluşturulmuştur. İlk olarak 2000-2008 yılları verileri ile oluşturulan portföylerin performansları, 2009, 2009-2010, 2009-2011, 2009-2012, 2009-2013, 2009-2015 (Nisan) dönemleri gerçek getirileri ölçülmüştür. Daha sonra 2002-2010 verileri ile portföyler oluşturularak performansları, 2010, 2010-2011, 2010-2012, 2010-2013, 2010-2015 (Nisan) gerçek getirileri ile ölçülmüştür. Elde edilen bulgular aşağıda verilmektedir.

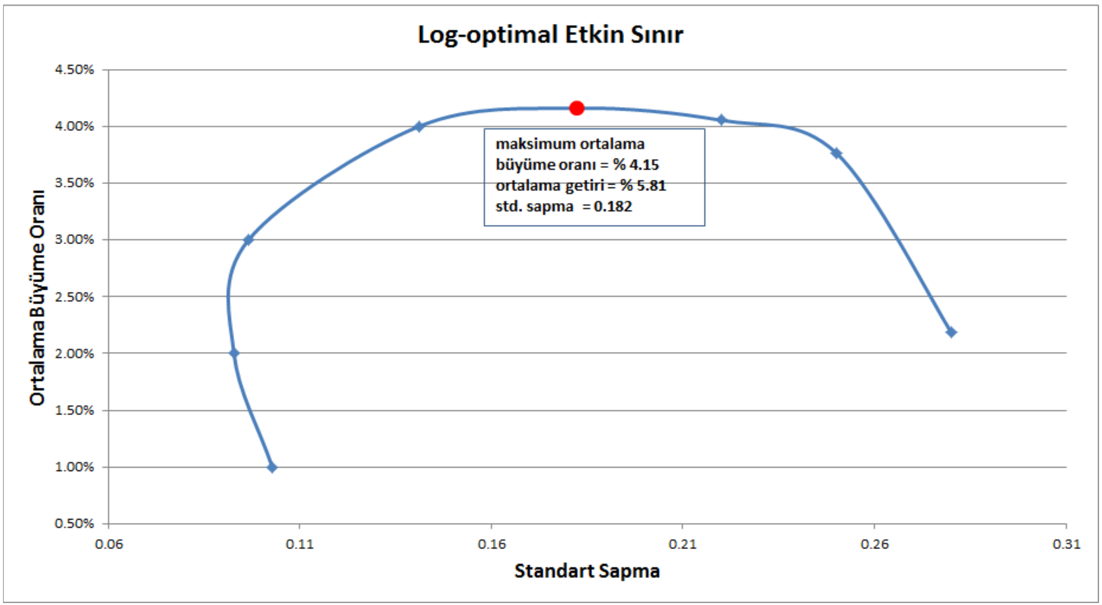
2000-2008 Portföy Bulguları;

2000-2008 yılları verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'da verilmektedir.

Şekil 4.13 : 2000-2008 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.14 : 2000-2008 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'de verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.13'de özetlenmektedir.

Tablo 4.13 : 2000-2008 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	5	5.82%	4.15%	0.319	0.182
M	10	4.09%	3.51%	0.379	0.107

Tablo 4.13'te log-optimal ve Markowitz portföy özelliklerinin önceki kategorilere benzer olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2009, 2009-2010, 2009-2011, 2009-2012, 2009-2015 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 4.14'de verilmektedir.

Tablo 4.14 : 2000-2008 Portföy Performansları

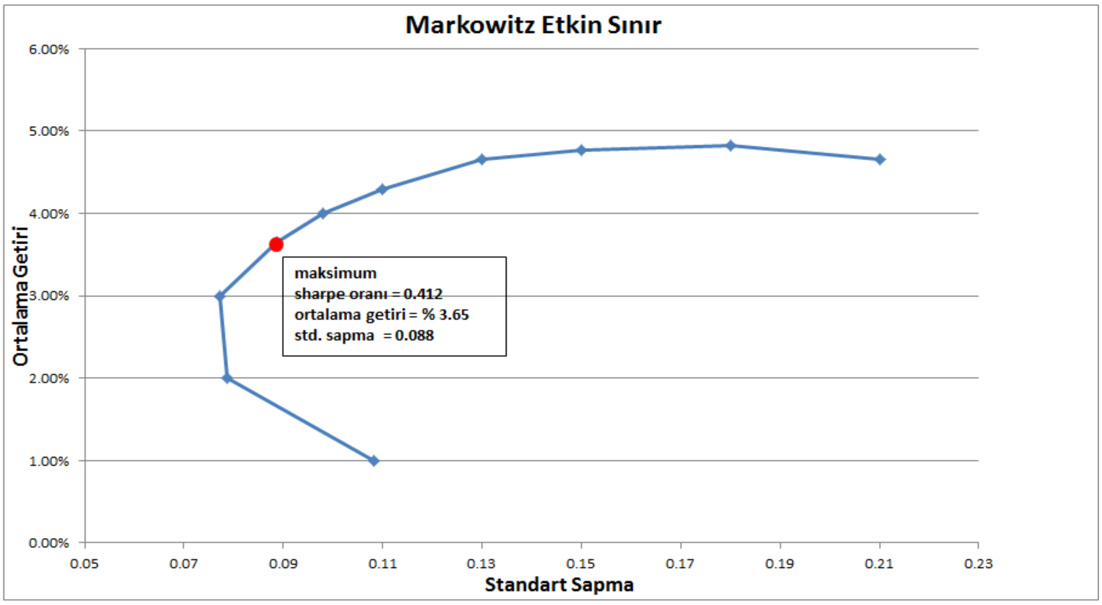
	2009	2009-2010	2009-2011	2009-2012	2009-2013	2009-2015
L	110.46%	187.41%	136.60%	325.33%	354.85%	306.88%
M	92.62%	171.18%	122.74%	233.08%	262.70%	271.79%

Tablo 4.14'te log-optimal portföylerin her altı ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

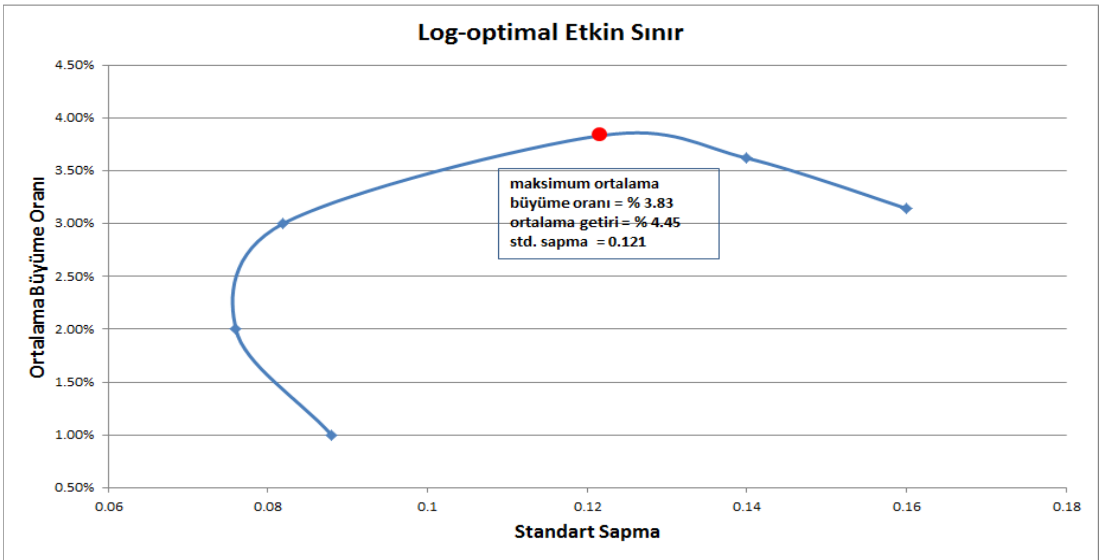
2002-2010 Portföy Bulguları;

2002-2010 yılları verileri ile elde edilen Markowitz ve log-optimal portföylerin etkin sınırları Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da verilmektedir.

Şekil 4.15 : 2002-2010 Portföyleri Markowitz Etkin Sınırı



Şekil 4.16 : 2002-2010 Portföyleri Log-optimal Etkin Sınırı



Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da verilen etkin sınırlar üzerinde belirtilen maksimum Sharpe oranı ve maksimum büyüme oranını veren portföylerin getiri, risk, Sharpe oranı ve büyüme değerleri Tablo 4.15'te özetlenmektedir.

Tablo 4.15 : 2002-2010 Portföy Değerleri

	Hisse Sayısı	Ortalama Getiri	Büyüme Oranı	Sharpe Oranı	Risk
L	4	4.45%	3.83%	0.375	0.121
M	12	3.65%	3.26%	0.412	0.088

Tablo 4.15'te log-optimal ve Markowitz portföy özelliklerinin de önceki kategorilere benzer olduğu görülmektedir. Bu iki portföyün 2011, 2011-2012, 2011-2013, 2011-2015 dönemlerindeki gerçek getiriler ile yapılan performans ölçümleri Tablo 4.16'da verilmektedir.

Tablo 4.16 : 2002-2010 Portföy Performansları

	2011	2011-2012	2011-2013	2011-2015
L	-23.39%	18.54%	3.39%	89.54%
M	-25.36%	-1.81%	-10.58%	46.11%

Tablo 4.16'da log-optimal portföylerin her dört ölçüm döneminde de Markowitz portföylere oranla daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Bütün kategorilerde yapılan toplam 32 ölçümünün 29'unda log-optimal portföylerin daha iyi performans gösterdiği belirlenmiştir. Markowitz portföylerin daha iyi performans verdiği üç ölçüm de göreceli olarak kısa oluşturma ve ölçüm zamanlarının olduğu ilk kategoride bulunmaktadır. Portföy oluşturma dönemleri uzadıkça log-optimal portföyler her dönem için daha iyi performans göstermektedir. Bu sonuçlar Stokastik Portföy Teorisi'ne dayanan piyasa modellemesinin uzun dönemli portföy optimizasyonu açısından tek dönemli modellere göre daha iyi sonuçlar vereceği savını destekler niteliktedir. Log-optimal portföyler uzun dönemde her zaman dilimi için daha iyi sonuçlar vermiştir fakat bu performans üstünlüğü değişkenlik göstermektedir. Burada göz önüne alınması gereken log-optimal portföylerin tek dönemli yaklaşımlara göre performans üstünlüğünü garanti etmediği, sadece uzun dönemli büyüme ve son servetin maksimize olması olasılığını diğer modellere göre artırdığıdır.

SONUÇ

Çalışmada bütün yatırımcıların aynı vadeli tek dönemli bir yatırım ufkuna sahip oldukları varsayımına dayanan Modern Portföy Teorisine alternatif olarak geliştirilen Stokastik Portföy Teorisi ele alınmıştır. Bu çerçevede finans literatüründe öne çıkan ve yol gösterici nitelikte olan çok dönemli portföy analiz yöntemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Çok dönemli portföy analizleri kesikli ve sürekli zamanlı olarak sınıflandırılan iki farklı finansal piyasa modellemesine dayandırılabilmektedir. Bu nedenle sürekli ve kesikli zamanda piyasa modellemelerinin matematiksel temeli araştırılmıştır. Varlık fiyatlarının bu iki yöntemle analizleri ve uzun dönemde fiyat oluşumlarının modellenmesi ele alınmıştır.

Çalışmada uygulaması yapılan log-optimal portföy analizi de sürekli zamanlı stokastik (rassal) süreçlere dayanan bir yöntemdir. Bu nedenle sürekli zamanlı stokastik süreçlere dayanan piyasa modellemesine daha geniş bir biçimde yer verilmiştir. Piyasadaki fiyat hareketlerinin dayandırıldığı rassal yürüyüş, Geometrik Brown Hareketi kavramları ve fiyat hareketini modelleyen stokastik süreçler matematiksel olarak açıklanmıştır.

Çalışmada ayrıca tek dönemli piyasa varsayımlarına dayalı varlık fiyatlama modellerine alternatif olan ve yine Stokastik Portföy Teorisi üzerinden geliştirilmiş varlık fiyatlama modelleri incelenmiştir. Bu bağlamda bireylerin yatırım ve tüketim kararlarını portföy analizine katarak daha gerçekçi modeller öneren analizlerin bazıları çalışmada ele alınmıştır.

Sürekli zamanda rassal süreçlere dayanan teoriler sermaye piyasalarında portföy optimizasyonu amacı ile kullanılmaktadır. Bu teoriye dayanan yöntemlerin uzun vadede tek dönemli piyasa modellemesine dayanan yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vereceği savını irdelemek amacı ile bahsedilen iki yöntemle oluşturulmuş portföylerin Borsa İstanbul verileri kullanılarak performansları karşılaştırılmıştır.

Portföylerin oluşturulmasında 2000 ile 2015(Nisan) yılları arasında BIST100 endeksinde bulunan ve sürekli işlem gören 59 hisse senedinin verileri kullanılmıştır. Analiz farklı portföy oluşturma ve performans ölçüm zaman dilimleri içeren üç kategoride yapılmış ve oluşturulan portföylerin getiri, büyüme, Sharpe oranı ve riskleri karşılaştırılmıştır. İlk kategoride üçer yıllık oluşturma dönemlerinde iki yöntemle optimize edilen portföylerin izleyen bir, iki ve üç yıllık süreçlerde gerçek getiriler ile performansları ölçülmüş ve karşılaştırılmıştır. İkinci ve üçüncü kategorilerde portföy oluşturma süreleri sırası ile beş ve dokuz yıla çıkarılmış ve veri seti sonuna değin farklı dönemlerdeki gerçek getiriler ile performansları karşılaştırılmıştır. Bütün kategorilerde farklı zaman dilimlerinde toplam olarak 32 performans karşılaştırılması yapılmış ve bunlardan 29'nda Stokastik Portföy Teorisi'ne dayanan log-optimal portföylerin Markowitz portföylere göre daha iyi performans gösterdiği bulunmuştur. Markowitz portföylerin üstün olduğu üç ölçümde en kısa portföy oluşturma dönemlerinin kullanıldığı ilk kategoride yer almıştır. Bu sonuçlar Stokastik Portföy Teorisi'ne dayalı log-optimal portföylerin uzun dönemde Markowitz portföylere göre daha iyi performans göstereceği savını destekler niteliktedir.

KAYNAKÇA

Ah, Chang Mo, Dosung Cho: "Time Varying Risk Preference and Consumption Asset Pricing Model", **Research in Finance**, Vol. 9, 1991, pp. 21-36.

Algoet Paul H., Thomas M. Cover: "Asymptotic Optimality and Asymptotic Equipartition Properties of Log-Optimum Investment", **The Annals of Probability**, Volume 16, 1988, p. 881.

Arrow, Kenneth J.: "Aspects of the Theory of Risk- Bearing" (Yrjö Jahnsson Lectures [Helsinki: The Yrjö Jahnsson Foundation, 1965]), pp. 136-138.

Breeden, Douglas T., Michael R. Gibbons, Robert H. Litzenberger : "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", **Journal of Financial Economics**, Vol. 7, 1979, pp. 265–296.

Breeden, Douglas T.: "İktidar ve Hukuk," Çev. Hayrettin Ökçesiz, **Hukuk Araştırmaları**, C.II, No:3, Eylül-Aralık 1987, s.40-49.

Campbell, John Y., Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay: **The Econometrics of Financial Markets**, Princeton, NJ, 1997.

Constantinides, George M., Anastasios G. Malliaris: "Portfolio Theory", **Finance** ed. by R.A. Jarrow, V. Maksimovic ,W. T. Ziemba, Elsevier- Amsterdam, 1995, p.8.

Dokko, Yoon, Robert H. Edelstein: "Inflation Uncertainty and Stock Market Fluctuations: An Intertemporal CAPM Approach", **Research in Finance**, Vol. 9, 1991, pp.1-20.

Duffie, Darrell: **Security Markets: Stochastic Models,** Academic Press, California,1988.

Dumas, Bernard, Blaise R. Allaz: **Financial Securities: Market Equilibrium and Pricing Methods**, Springer Science, London, 1996.

Eeckhoudt, Louis, Christian Gollier, Harris Schlesinger: **Economic And Financial Decisions Under Uncertainty**, Princeton University Press, 2005.

Elton, Edwin J., Martin J. Gruber: "The Multi-Period Consumption Investment Problem and Single Period Analysis", **Oxford Economic Papers**, Vol. 26, 1974, p.293.

Fama, Eugene F., Kenneth R. French : "Cross-Section of Expected Stock Returns." **Journal of Finance**, 47 (1992), p. 434.

Fama, Eugene F., Kenneth R. French : "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds" **Journal of Financial Economics**, vol. 33, 1993, 3–56.

Fama, Eugene F.: "Multi-period Consumption-Investment Decisions", **American Economic Review,** Vol.60, 1970, pp.163-164.

Fama, Eugene F.: "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", **Journal of Finance**, Vol.25, Issue 2, 1970, p.389.

Fama, Eugene F.: "Random Walks In Stock Market Prices", **Financial Analysts Journal,** Vol.21, 1965, p.56.

Feller, William : **An Introduction to Probability Theory and Its Applications,** John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

Fernholz, Robert, Ioannıs Karatzas: "Stochastic Portfolio Theory: an Overview", (Çevrimiçi) http://www.math.columbia.edu/~ik/FernKarSPT.pdf, 2008.

Fernholz, Robert : **Stochastic Portfolio Theory**, New York, NY: Springer-Verlag, 2002.

Ingersoll, Jonathan E.: **Theory of Financial Decision Making**, Rowman and Littlefield Publisers Inc., Maryland,1987.

Hakansson, Nils H.: "Optimal Investment and Consumption Strategies Under Risk for a Class of Utility Functions", **International Economic Review**, Vol.10, 1969, pp.448-450.

Hull, John C: **Options, Futures, And Other Derivatives**, 8th. Edition, Prentice Hall, 2012.

Karatzas, Ioannis, Steven E. Shreve: **Methods of Mathematical Finance,** Springer-Verlag, NewYork, 1998.

Ito, Kiyoshi: "On a Formula Concerning Stochastic Differentials", **Nagoya Mathematics Journal**,Vol. 3 ,1951, pp. 55-65.

Kelly, John L.: "A New Interpretation of Information Rate", **Bell System Technical Journal**, 35, No.4, 1956, pp.917-926.

Klebaner, Fima C.: **Introduction To Stochastic Calculus With Applications,** Imperial College Press, London, 2005.

Krause, Andreas: "An Overview of Asset Pricing Models",(Çevrimiçi) http://people.bath.ac.uk/mnsak/Research/Asset_pricing.pdf, 2001.

Levy, Haim, Marshall Sarnat: **Investment and Portfolio Analysis**, New York, 1972.

Long, John B.: "The Numeraire Portfolio", **Journal of Financial Economics**, Vol. 26, 1990, pp. 29–69.

Luenberger, David: **Investment Science**, Oxford University Press Inc., New York, 1998.

Malliaris, Anastasios G., William A. Brock: **Stochastic Methods in Economics and Finance**, Amsterdam, North-Holland, 1982.

Markowitz, Harry M.: "Portfolio Selection": **Journal of Finance**, 1952,Vol. 7, No. 1, pp.77-91.

Markowitz, Harry M.: **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1959.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, Jerry R. Green**:** **Microeconomic Theory**, Oxford University Press, 1995.

Merton, Robert C.: **Continuous-Time Finance**, Cambridge, Mass. and Oxford, 1990.

Merton, Robert C.: "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case." **The Review of Economics and Statistics**, Vol. 51, 1969, pp. 247-257.

Merton, Robert C.: "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", **Journal of Economic Theory**, 1971, 3, p. 393.

Mossin, Jan: "Optimal Multiperiod Portfolio Policies", **Journal of Business**, Vol. 41, Nr.2, pp. 221–222.

Peterson, Steven P.: **Investment Theory and Risk Management,** John Wiley & Sons, Inc. New Jersey, 2012.

Paul, Wolfgang, Jörg Baschnagel: **Stochastic Processes From Physics to Finance**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Pratt, John W.: "Risk Aversion in the Small and in the Large", **Econometrica**, Vol.32, No1/2,1964, pp. 122-136.

Ruppert, David: **Statistics and Finance: An Introduction,** Springer Texts in Statistics, New York, 2004.

Sharpe, William F.: **Portfolio Theory and Capital Markets,** New York, 1970.

Sharpe, William F.: "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", **Journal of Finance**, 1964, 19 (3), 425-442.

Sharpe, William F.: "Mutual Fund Performance, **Journal of Business**, January, 1966, pp. 121-125.

Von Neuman, John, Oskar Morgenstern: **Theory of Games and Economic Behavior**, Sixtieth-Anniversary Edition, Princeton University Press, 2004,

EKLER

İlk Kategori Portföy Ağırlıkları

	2000-2002		2003-2005		2006-2008		2009-2011	
	L	M	L	M	L	M	L	M
ADANA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AFYON	0.00%	0.00%	0.00%	**7.22%**	0.00%	0.00%	**8.18%**	0.00%
AKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKCNS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKGRT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**20.67%**	**10.52%**
ALARK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ANSGR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARCLK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
ASELS	**26.55%**	**14.51%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**39.52%**	**12.89%**
AYGAZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**9.25%**
BAGFS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**6.63%**
BANVT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BOSSA	**1.57%**	0.00%	0.00%	0.00%	**4.29%**	**35.66%**	0.00%	0.00%
BOYNR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CIMSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.09%
DGZTE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DOHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DYBOY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECILC	0.00%	0.00%	0.00%	**10.74%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECYTY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EGSER	0.00%	0.00%	0.00%	**6.15%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ENKAI	0.00%	0.00%	0.00%	**3.38%**	0.00%	**7.05%**	0.00%	0.00%
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**6.69%**	0.00%	0.00%
FROTO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**11.66%**
GARAN	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GLYHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GSDHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GUBRF	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**95.71%**	**35.22%**	0.00%	0.00%
GUSGR	**1.61%**	**10.95%**	0.00%	**8.59%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
HURGZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

ISCTR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KARTN	**10.55%**	**43.66%**	0.00%	**4.55%**	0.00%	0.00%	0.00%	**7.65%**
KCHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KIPA	0.00%	0.00%	0.00%	**15.43%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KRDMD	0.00%	0.00%	**4.76%**	**1.33%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MARTI	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MERKO	0.00%	0.00%	0.00%	**12.96%**	0.00%	**7.52%**	0.00%	0.00%
MGROS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**7.86%**	0.00%	**19.74%**
NTTUR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
OTKAR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**6.11%**
PEGYO	**15.89%**	**5.88%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PETKM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PRKME	**43.84%**	**25.00%**	0.00%	**2.39%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SAHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SASA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**2.88%**
SISE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**4.74%**
SKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TATGD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TEKST	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
THYAO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
TOASO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**31.63%**	**2.93%**
TRCAS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRKCM	0.00%	0.00%	0.00%	**17.88%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TSKB	0.00%	0.00%	**68.91%**	**5.77%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
TUPRS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**1.98%**
ULKER	0.00%	0.00%	**26.33%**	**3.61%**	0.00%	0.00%	0.00%	**2.89%**
YKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

İkinci ve Üçüncü Kategori Portföy Ağırlıkları

	2000-2004		2005-2009		2000-2008		2002-2010	
	L	M	L	M	L	M	L	M
ADANA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AFYON	0.00%	0.00%	0.00%	**5.88%**	0.00%	**2.20%**	0.00%	**11.50%**
AKBNK	0.00%	**7.76%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**9.43%**
AKCNS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKGRT	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AKSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ALARK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ANSGR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARCLK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ASELS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
AYGAZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BAGFS	0.00%	0.00%	0.00%	**4.53%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BANVT	**0.00%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
BOSSA	0.00%	0.00%	0.00%	**13.85%**	0.00%	0.00%	0.00%	**7.39%**
BOYNR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
CIMSA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DGZTE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DOHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
DYBOY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ECILC	0.00%	0.00%	0.00%	**11.73%**	0.00%	**2.21%**	**16.06%**	**12.04%**
ECYTY	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EGSER	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ENKAI	0.00%	0.00%	0.00%	**7.36%**	**25.93%**	**39.16%**	0.00%	**8.62%**
EREGL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
FROTO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GARAN	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GLYHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GSDHO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GUBRF	0.00%	0.00%	**69.09%**	**16.88%**	0.00%	0.00%	**40.26%**	**19.54%**
GUSGR	0.00%	**15.01%**	0.00%	0.00%	0.00%	**9.86%**	0.00%	**1.13%**
HURGZ	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ISCTR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

KARTN	**14.14%**	**36.26%**	0.00%	0.00%	0.00%	**14.35%**	0.00%	**3.28%**
KCHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
KIPA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**7.24%**	0.00%	**10.74%**
KRDMD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**11.98%**	**4.90%**
MARTI	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MERKO	0.00%	0.00%	0.00%	**7.39%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MGROS	0.00%	0.00%	0.00%	**7.86%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTHOL	0.00%	0.00%	0.00%	**3.50%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
NTTUR	0.00%	0.00%	0.00%	**4.34%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
OTKAR	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PEGYO	**8.77%**	0.20%	0.00%	0.00%	**12.88%**	0.00%	0.00%	0.00%
PETKM	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PRKME	**44.65%**	**19.12%**	0.00%	0.00%	**34.65%**	**11.00%**	0.00%	0.00%
SAHOL	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SASA	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SISE	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
SKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**4.13%**	0.00%	0.00%
TATGD	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TEKST	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
THYAO	0.00%	0.00%	0.00%	**9.22%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TOASO	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRCAS	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TRKCM	0.00%	**3.77%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
TSKB	0.00%	0.00%	**30.91%**	0.00%	**12.92%**	**4.40%**	**31.70%**	**10.15%**
TUPRS	0.00%	0.00%	0.00%	**7.44%**	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ULKER	**32.44%**	**17.88%**	0.00%	0.00%	**13.61%**	**5.45%**	0.00%	**1.27%**
YKBNK	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

ÖZGEÇMİŞ

İsim : Erhan Ustaoğlu

Doğum Yeri ve Tarihi : Ankara , 27.07.1964

Eğitim Durumu

Yüksek Lisans : Ortadoğu Teknik Üniversitesi , Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 1992

Lisans : Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 1987

İş Deneyimi :

1987- 2004 : Haberleşme Mühendisi

2004- 2013 : SAP Danışmanı

Yabancı Dil : İngilizce, Almanca