T. C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERİN OLUŞUMU

SÜMEYRA DEMİR

2501091302

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. NAZLI İNÖNÜ

İSTANBUL - 2016

T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS
TEZ ONAYI

ÖĞRENCİNİN;

Adı ve Soyadı	: Sümeyra DEMİR	**Numarası**	: 2501091302
Anabilim Dalı / Anasanat Dalı / Programı	: **Felsefe Anabilim Dalı**	**Danışmanı**	: Doç. Dr. Nazlı İNÖNÜ
Tez Savunma Tarihi	: 21.01.2016	**Saati**	: 16:30
Tez Başlığı	: "Öklidyen Olmayan Geometrilerin Oluşumu"		

TEZ SAVUNMA SINAVI, İÜ Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliği'nin **36. Maddesi** uyarınca yapılmış, sorulan sorulara alınan cevaplar sonunda adayın tezinin **KABULÜNE** OYBİRLİĞİ / ~~OYÇOKLUĞUYLA~~ karar verilmiştir.

JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1- Doç. Dr. Nazlı İNÖNÜ	N. İnönü	Kabul
2- Yrd. Doç. Dr. Özgüç GÜVEN		KABUL
3- Yrd. Doç. Dr. Sinan Kadir ÇELİK		KABUL

YEDEK JÜRİ ÜYESİ	İMZA	KANAATİ (KABUL / RED / DÜZELTME)
1- Doç. Dr. Yücel YÜKSEL		
2- DOÇ. DR. Ahmet ÇİTİL		

Versiyon: 1.0.0.2-61559050-302.14.06

ÖZ

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERİN OLUŞUMU

SÜMEYRA DEMİR

Antik Yunan Dönemi'nde oluşturulan Öklidyen Geometri iki bin yıl boyunca doğruluğu sorgulanmaksızın tek geometri sistemi olarak kabul edilmiştir. XIX. yüzyıla gelindiğinde ise Öklidyen geometrinin postulatları değiştirilerek farklı geometri sistemleri elde edilmiştir. Dar bir bakış açısıyla, sadece postuların değişimiyle Öklidyen olmayan geometri sistemlerinin oluşturulduğu iddia edilebilir, fakat daha geniş bir bakış açısıyla bakılmak istenirse o zaman bu yeni geometri sistemlerinin oluşumunda bütün süreç gözden geçirilmelidir. Bu tezde bu süreç geniş bir bakış açısıyla incelenmiştir.

Tezde Öklidyen olmayan geometrilerin nasıl oluştuğu sorusu araştırılmıştır. Bu soruyu yanıtlayabilmek amacıyla şu üç aşama incelenmiştir: bu oluşuma katkıda bulunduğu düşünülen bilimsel gelişmeler, Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmeleri ve bunların geçerli olarak kabul edilmeleri. Dolayısıyla bu tez, Antik Dönem'den XX. yüzyıl başına kadar olan süreci kronolojik olarak tarayan bir geometri tarihi ve geometri felsefesi araştırmasına dönüşmüştür. Bir geometri sisteminin değişmesi için sadece postulatların değil, düşünce yapısının da değişmesi gerektiği ortaya konmuş, bu düşünce yapısının değişmesine katkıda bulunan geometri, felsefe, sanat gibi alanlar incelenmiştir. Ayrıca değişimin anlaşılabilmesi ve kabul görmesi için yapılan Erlanger programı tarzı katkılar gösterilmiştir.

Tanımlayıcı araştırma metodu benimsenmiş; incelenen katkılar arasında neden-sonuç ilişkisi kurulmuş ve bu katkılara açıklık getirmeye çalışılmıştır. Ayrıca konuyla ilgili veri analizi yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Geometri, Öklidyen geometri, Öklidyen olmayan geometri, paralel postulatı, perspektif, izdüşüm geometri, hiperbolik geometri, eliptik geometri, Lobachevski, Riemann, grup teorisi.

ABSTRACT

DEVELOPMENT OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES

SÜMEYRA DEMİR

Euclidean Geometry was accepted without question as the only geometrical system for two thousand years. In the 19th century, different geometrical systems were derived by altering the postulates of Euclidean geometry. From a narrow point of view, it can be asserted that non-Euclidean geometrical systems were constituted only by changing the postulates. However, from a wider point of view, the entire process of construction of these new geometrical systems must be investigated. In this thesis, this process is examined from a wider point of view.

This thesis aims to answer the question of how non-Euclidean geometries were created. In order to answer this question, the following three stages were analyzed: scientific developments that supposedly contributed to the creation of non-Euclidean geometries, the creation of non-Euclidean geometries and their validity. Therefore, this thesis has become a study of history of geometry and philosophy of geometry which chronologically scans the process from Antiquity to the beginning of the 20th century. It is shown that, changes in the postulates are not enough to change a geometrical system, but also some change in the way of thinking is needed. Areas which contribute to the change in the way of thinking, such as geometry, philosophy and art, are examined.

Descriptive research method is followed, cause-effect relations are established and the contributions are clarified. Besides, relevent data have been analyzed.

Keywords: Geometry, Euclidean geometry, non-Euclidean geometry, parallel postulate, perspective, projective geometry, hyperbolic geometry, elliptic geometry, Lobachevsky, Riemann, group theory.

ÖNSÖZ

Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesi geometri tarihindeki en büyük devrimlerden biridir. Antik Yunan'da oluşturulan Öklidyen geometri ile Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumu arasında iki bin yıllık bir süre vardır. Öklidyen olmayan geometrilerin ortaya çıkarılması iki bin yıllık doğruluğu sorgulanmadan itaat edilen bir sisteme başkaldırıdır. Düşünce yapılarını inceleyen ve oluşturan bir felsefeci için şüphesiz böyle bir dönüşümün anlaşılması önem arz etmektedir. Tez bu dönüşümde etkisi olan gelişmelere genel bir bakış açısı sunmaya çalışmıştır. Bu gelişmelerin felsefe tezine dahil olmasındaki en büyük etmenlerden biri felsefenin bütünsel bağlayıcılığıdır.

Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesine en belirgin katkılar geometri alanı dışından gelmiştir: Rönesans ressamları, teologlar, bilişsel psikologlar, fizikçiler, askerler ve tabii ki felsefeciler. Bu değişik meslek gruplarından gelen insanların ortak özelliği geometri ile ilgilenmeleridir. Farklı altyapılara sahip bu kişiler iki bin yıllık geometri geleneğine çeşitli bakış açılarıyla yaklaşabilmişlerdir. Bu çeşitli bakış açıları farklı geometri sistemlerinin üretimine yol açmış ve bu sistemler sayesinde Öklidyen geometrinin tek doğru geometri olmayabileceği şüphesi doğmuştur. Böylece Öklidyen olmayan geometri sistemleri oluşturulmuştur.

Geometri sistemlerinin çeşitliliği sayesinde geometri ile ilgili felsefi fikirler derinleşmiş ve geometri felsefesinin alanı genişlemiştir. Geometri felsefecileri geometrinin fiziksel uzayı temsil edip etmediğini sorgulamaya başlamıştır: geometri fiziksel uzaydan türetilerek soyut bir sisteme mi dönüştürüldü yoksa soyut sistemde oluşturulduktan sonra fiziksel uzaya mı atfedildi? Geometri nesnelerinin varlığı ve geometrinin anlamlılığı başlıca tartışma konuları olmuştur. Bu tez, geometri ile ilgili yapılan tartışmalarda geometri felsefecilerine Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecini anlamlandırmalarına yardımcı olmak amacıyla hazırlanmıştır. İki bin yıl boyunca neden Öklidyen olmayan bir geometrinin üretilemediği sorusunun cevabı bu süreçte neler yapıldığına bakılarak bulunabilir. Tezde bu süreç ortaya konarak geometri algısının nasıl bir değişimden geçtiği de gösterilmeye çalışılmıştır.

Tez konumun belirlenmesinde bana ilham kaynağı olan hocam Prof. Dr. Şafak Ural'a, her türlü bilgi ve deneyimiyle bana yol gösteren ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen tez danışmanım Doç. Dr. Nazlı İnönü'ye, akademik alanda ilk adımlarımda yanımda bulunan ve ihtiyacım olduğu anda yardımlarını esirgemeyen bütün İstanbul Üniversitesi Felsefe Bölümü öğretim görevlilerine, Hasan Ümit Ezerçe ve Yard. Doç. Dr. Sinan Kadir Çelik'e, bu zorlu süreçte manevi destekleriyle yola devam etmemi sağlayan ailemden babam Ali Yaşar Demir, ağabeyim Hasan Basri Demir, ablam Sümeyye Demir ve arkadaşlarımdan Müge Önder, Gonca Türgen, Didem Atayurt, Rabia Ceran, Ezgi Ulusoy, Dr. Sezen Vatansever, Nurbanu Türgen'e, tez yazım sürecinde kaliteli fiziki ortamı sağlayan Salt Galata ailesine ve bilginin peşinden gitmemi tembihleyen, bana en büyük emeği veren rahmetli annem Ayşe Demir'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ SİSTEMLERİNİN ÜRETİLMESİ

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERİN GEOMETRİ SİSTEMİ İÇİNDE KABUL EDİLMESİ

RESİMLER LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

KISALTMALAR LİSTESİ

a.e.	aynı eser
a.g.e.	adı geçen eser
Apr.	April
C.	Cilt
Çev.	Çeviren
Dec.	December
ed.	edition
Ed.	Edited
Ibid.	Ibidem
Inc.	incorporation
Jul.	July
Jun.	January
Nov.	November
Oct.	October
op.cit.	obra citade
p.	page
pp.	pages
s.	sayfa
Trans.	Translated
Vol.	Volume
w.place	without place
y.y.	yayım yeri yok

GİRİŞ

Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi, geometri tarihi ve felsefesi açısından bir dönüm noktasıdır. XIX. yüzyılda Öklidyen geometriye alternatif olarak oluşturulan bu geometri sistemleri sadece geometri içeriğini değiştirmekle kalmamış, geometri algısı ve doğruluğu dahil birçok felsefe sorusunun doğmasına önayak olmuştur. Bu tezde ise, "Öklidyen olmayan geometrilerin nasıl oluştuğu" sorusu üzerine odaklanılacaktır.

Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumunun anlaşılabilmesi için öncelikle Öklidyen geometrinin anlaşılması gerekmektedir. Antik Yunan döneminde oluşturulan Öklidyen geometri yaklaşık iki bin yıl boyunca doğruluğu kabul edilen bir sistemdir. Bu sistemin bu kadar uzun süre alternatifleri oluşturulmadan süregelmesi dikkat çekicidir. Ancak alternatiflerinin neden iki bin yıl geçtikten sonra oluşturulduğu sorusu daha da ilgi çekicidir. Dolayısıyla bahsedilen bu iki bin yıllık süreç gözden geçirilecek ve bu süreçte Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna katkıda bulunduğu düşünülen bazı değişimler ele alınacaktır. Bu değişimler sadece geometri alanından değil, felsefe ve sanat dahil birçok farklı alanın etkisiyle meydana gelmiştir.

Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumunu ortaya koymayı hedefleyen bu tez şu üç bölümden oluşur: bu oluşuma katkıda bulunduğu düşünülen gelişmeler, Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesi ve bunların kabul edilmesi. Dolayısıyla araştırma, geometrinin tarihsel gelişimini kapsayacaktır.

Tezin ilk bölümü geometrinin doğuşundan, Öklidyen geometrinin yapılandırıldığı Antik Yunan Dönemi'ne, buradan da XIX. yüzyıl Öklidyen olmayan geometrilerin keşfine kadar olan süreci içermektedir. Bu süreçte yer alan Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna katkıda bulunduğu düşünülen değişimler tezin içinde kronolojik bir sıralama ile sunulacaktır. Bu bölüm beş alt-bölüme ayrılır.

Tezin birinci bölümünün ilk alt-bölümünde, geometrinin doğuşu üzerine kısa bir giriş yapılacaktır. Antik Yunan öncesi döneme denk gelen bu dönemde geometrinin sadece şehir düzenleme, ticaret ve benzeri pratik amaçlar için kullanılan, ölçüm üzerine kurulu deneysel bir yapısı olduğu belirtilecektir. Diğer bir deyişle, bu dönemin geometrinin sadece fiziksel uzayla ilgilendiği düşünülen bir dönem olduğu gösterilecektir.

İkinci alt-bölümde, geometrinin Antik Yunan'da soyut olarak adlandırılabilecek bir yapıya dönüşümü gösterilecektir. Antik Yunan Dönemi ile birlikte geometrinin tanımların, aksiyomların, postulatların, teoremlerin ve ispatların olduğu bir sistem haline nasıl ve kimler tarafından dönüştürüldüğü adım adım verilecektir. Bu dönemin geometricilerinden biri olan Öklid'in *Elementler* başlığı altında döneminin geometri bilgisini sistematik biçimde bir araya getirmesi ve böylece daha sonra Öklidyen geometri olarak anılacak geometriyi yapılandırması anlatılacaktır. Birçok geometrici için tartışma konusu olan *Elementler*'in içinde tanımlanan postulatlardan beşincisi üzerine yapılan irdelemeler bu alt-bölümde verilmeye başlatılacaktır.

Tezin birinci bölümünü kapsayan iki bin yıl boyunca geometriciler, geometri sistemini sağlam temeller üzerine oturtmak için Öklidyen geometrinin temelinde bulunan paralel postulatı ispatlamaya çalışmışlardır. Paralel postulatın göz önünde canlandırılması kolay olduğundan doğruluğu sorgulanmamış, fakat mantıksal ya da matematiksel yolla ispat edilmesi o kadar da kolay olmadığından XIX. yüzyıla kadar ispat denemelerinde bulunulmuştur. Jean le d'Alembert, bu postulatı "geometrinin skandalı" olarak ilan etmiş olmasına rağmen onu ispatlama çalışmaları, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşmasında en büyük katkıyı sağlayan çalışmalardır. İki bin yıl boyunca ispatlanamayan bir postulatın ya hiç ispatlanamayacağı ya da doğruluğu olmadığı yönünde kuşkular doğurmuştur. "Paralel postulat kaldırılırsa ne olur" ve "bu postulat yerine farklı bir postulat konursa ne gibi sonuçlar elde edilir" gibi sorular Öklidyen olmayan geometrileri oluşturan sorgulamalardır.

Üçüncü alt-bölümde ise İslam geometricilerinin katkıları ile geometrinin daha sembolik bir hale gelişi gösterilecektir. Bu, İslam geometricilerinin cebirle geometriye yaptığı katkı ile gerçekleştirilmiştir. Bu alt-bölümde ayrıca, Antik Yunan'da Öklid'den sonra gelen filozoflarla aynı çabaya giren İslam geometricilerinin Öklid'in paralel postulatını ispatlama çalışmaları gösterilecektir.

XV. ve XVI. yüzyılların kapsandığı dördüncü alt-bölümde, ilk Öklidyen olmayan geometri çalışması olan, izdüşüm geometrisinin oluşumu üzerinde durulacaktır. Öncelikle bu türden bir geometrinin oluşumuna öncülük eden Rönesans dönemi perspektif çalışmalarından bahsedilecektir. Perspektifin neden ve nasıl doğduğu ile nasıl izdüşüm geometrisine dönüştüğü ortaya konulacaktır. Oluşan bu geometri çeşidinin, homojen olarak yapılandırılmış olan Öklidyen geometriden farkı irdelenecektir. İzdüşüm geometrisinin kökenini, ilhamını matematik ve bilimden ziyade sanattan alan, Öklidyen geometriden farklı özelliklere sahip ilk çalışma olduğu gösterilecektir.

Beşinci alt-bölümde, XVII. ve XVIII. yüzyıllarda Öklidyen olmayan geometri sisteminin oluşturulmasına geçmeden yapılan son katkılar üzerinde durulacaktır. Paralel postulat yazıldıktan XVIII. yüzyılın sonuna kadar geometriciler, bu postulatın ispatlanabileceğine inanmışlardır. Bu dönemde farklı yöntemler denemeye başlayan geometriciler, farklı sonuçlar bulmaya da başlamışlardır. Böylece ‘evrensel geometri’, ‘görünenlerin geometrisi’ gibi Öklidyen olmayan geometri içeriğine sahip geometriler elde etmişlerdir. Fakat bu dönemde Öklidyen geometriye olan inanç devam ettiğinden ona eş değerde, alternatif geometri sistemleri kurulamamıştır.

Tezin ikinci bölümünde Öklidyen olmayan geometri sistemleri ve onların kurucuları ortaya konacaktır. Dolayısıyla, Öklidyen olmayan geometrilerin bilinçli ve sistemli bir şekilde kurulduğu dönem, yani XIX. yüzyıl ele alınacaktır. İki bin yıl boyunca ispatlanamayan paralel postulatın, belki de hiç ispatlanamayacağını gören XIX. yüzyıl geometricileri, bu postulatın kaldırılması halinde neler olabileceğini ve paralel postulat yerine farklı bir postulat konursa ne gibi sonuçlar elde edilebileceğini sorgulamışlardır. Schweikart, Lobachevski ve Bolyai gibi paralel postulat yerine farklı bir postulat konduğunda yeni, farklı bir geometri sisteminin de mantıksal olarak tutarlı olabileceği görüsüne sahip olanların, Öklidyen olmayan geometrilerin kurucuları kabul edilecek ve çalışmalarının önemli kısımları verilecektir. Dahası, oluşturulan bu Öklidyen olmayan geometrilerin (‘astral geometri’, ‘sanal geometri’ ve ‘salt geometri’ gibi), Öklidyen geometriden ayrılan en belirgin özellikleri incelenecektir. Bu geometri sistemleri birbirine benzer özellikler taşımakta olup ‘hiperbolik geometri’ olarak adlandırılacak bir çatı altında toplanmışlardır. Dolayısıyla bu bölümde bu geometri sistemlerinin sadece Öklidyen geometriden farkları sunulmayacak aynı zamanda birbirleri arasındaki benzer ve farklı özellikleri de sunulacaktır.

Tezin üçüncü ve son bölümünde Öklidyen olmayan geometrilerin, geometrinin içinde birer sistem olarak kabul edilmesinin gösterilmesiyle birlikte tez sonlandırılacaktır. Öncelikle

Riemann’ın Öklidyen ve Hiperbolik geometriden farklı oluşturduğu ‘eliptik geometri’ olarak adlandırılan sistemi sunulacaktır. Riemann, Öklidyen ve tüm Öklidyen olmayan geometrileri temellendirmiş ve hepsinin genel bir sistemin birer parçası olduğunu göstermiştir. Ayrıca Riemann, belirli kurallarla n-boyutlu geometri kurulabileceğini görmüş ve geometriyi soyut cebirsel bir açıdan ele almaya başlamıştır. Riemann’ın diferansiyel geometri kullanarak geometriyi yüksek boyutlulara taşımasıyla, Öklidyen olmayan geometri farklı bir döneme geçmiştir.

Bu bölümde daha sonra, Beltrami ve Klein tarafından Öklidyen olmayan geometrilerin mantıksal tutarlılığının ve sürekliliğinin gösterilmesiyle, bunların birer geometri sistemi olarak kabul edilmesi gösterilecektir. Bu matematikçiler Öklidyen olmayan geometrileri yorumlamış ve birleştirmişlerdir. Öklidyen ya da Öklidyen olmayan bütün geometrilerin grup teorisinin de yardımıyla, ‘izdüşüm geometrisi’ adı altında, tek bir çatıda birleştirildiği gösterilecektir. Diğer bir deyişle, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumunun tamamlanması sağlanacaktır. Bütün geometri çeşitlerinin temellendirildiği ve bütünleştiği bu dönem, Öklidyen olmayan geometrinin son dönemini oluşturmaktadır.

1. BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERİN OLUŞUMUNA KATKIDA BULUNAN GELİŞMELER

Öklidyen olmayan geometrilerin XIX. yüzyılda üretilmesi için gerekli olduğu düşünülen en belirgin gelişimleri içeren süreç, yaklaşık iki bin yılı kapsamaktadır. Bu süreç geometrinin doğduğu Antik Yunan Öncesi Dönem'i, Öklidyen geometrinin yapılandırıldığı Antik Yunan Dönemi'ni, cebrin oluşturulduğu İslam Dönemi'ni, Rönesans Dönemi'ni ve Aydınlanma Dönemi'ni içermektedir.

Bu sürecin en belirgin özelliği Öklidyen geometrinin oluşturulmasından sonra, iki bin yıl boyunca bu geometrinin tek doğru geometri olduğu inancıdır. Öklidyen olmayan geometriye dair fikirler ortaya çıkmasına rağmen, Öklidyen geometrinin tekliği inancından dolayı Öklidyen olmayan geometri sistemleri elde edilememiştir. Bu inancın sarsılmasında geometrideki gelişmelerin yanında felsefe ve sanatın da etkisi olmuştur.

1.1. Antik Yunan Öncesi Dönem

Tarihteki ilk geometri çalışmaları insanların çevresinde gördükleri doğal şekillerle ilgili olup doğası gereği sezgisel ve görsel türdendir. Daha sonra bu şekillerin alanlarının ve hacimlerinin ölçüldüğü ikinci aşama gelmektedir. Dörtgenlerin ve üçgenlerin alanlarının ölçülmesine dair ilk bilgiler Mezopotamyalıların tabletlerinde ve Mısır'da MÖ 1580 tarihinden önce yazılan Ahmes'in Rhind Papirüsü'nde görülmektedir.[1]

[1] Jason Socrates Bardi, **The Fifth Postulate: How Unraveling a Two- Thousand- Year- Old Mystery Unraveled the Universe**, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2009, p. 27. Sözkonusu Papirüs'ün başlığı

MÖ V. yüzyılda yaşamış olan Yunan tarihçi Herodot ise geometri çalışmalarının Mısır'da başladığını iddia etmiştir. Herodot'a göre geometri hesaplamaları ihtiyaçtan doğmuştur. Bu hesaplamalar vergilerin toprak alanlarına oranla belirlenmesinden dolayı Nil'in taşmasıyla oluşan yeni toprak alanlarının ölçülmesi amacıyla başlamıştır. Dolayısıyla geometri etimolojik olarak Yunanca 'geometrein' sözcüğünden, 'geo' (yer) ve 'metrein' (ölçme) kelimelerinin birleşiminden türetilmiş, 'arazi ölçümü' anlamına gelen bir terim olarak doğmuştur.[2]

Antik Yunan öncesi geometriyi tek kullanan Mısırlılar değildir. Bilindiği kadarıyla Mezopotamyalılar, özellikle Babilliler, Hintliler ve Çinliler gibi medeniyetler geometriyi uygulamalı geometri olarak kullanmışlardır. XIX. yüzyılda arkeologların bulduğu tabletlere göre Mezopotamyalılar, Thales'in doğumundan bin yıl önce Mısırlılardan daha geniş geometri bilgisine sahiptirler.[3] Çinlilerin geometrisinde ise Ahmes'in Papirüsü'ndeki formüllere yakın örnekler bulunmaktadır. Ayrıca Çinlilerin *Dokuz Bölüm*'lük kitabında dik açılı üçgen teoremi (Pisagor) ispatsız olarak vardır.[4] Bu geometrik şekillerle verilen kitabın MÖ 1247 yıllında yazıldığı tahmin edilmektedir. Hintlilerin geometrilerinde de görsel ve deneysel ölçülere dayanan kurallar bulunmaktadır.[5]

Bu durumda Herodot'un verdiği tarihlerden çok önce geometri bilinmektedir. Geometrinin doğduğu yer ve zaman tartışmalı bir konu olmasına rağmen Antik Yunan öncesi dönem ele alındığında geometrinin şehir düzenleme, ticaret ve benzeri pratik amaçlar için kullanılan, deneysel bir yapısı olduğu kabul edilmiştir. Bu dönemde geometri, matematiksel ispatların olmadığı, alan ölçümlerinin ön planda olduğu bir yapıdadır. Yunanlıların büyük başarısı bu empirik çalışmanın yerine kanıtlayıcı, a priori bir bilim koymalarıdır.

"Tüm Kara Şeylerin Bilgisini Elde Etmenin Yolu" (Direction for Obtaining Knowledge of All Dark Things) olarak geçmektedir.

[2] Marvin Jay Greenberg, **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**, New York, W. H. Freeman and Company, 2008, p. 1.

[3]John Tabak, **Geometry: The Language of Space and Form**, New York, Facts On File Inc., 2004, p. 11.

[4] Yoshio Mikami, **The Development of Mathematics in China and Japan**, Chelsia, New York, 1913, p. 77.

[5] Roger Cooke, **The History of Mathematics: A Brief Course**, New York, Wiley-Interscience, 2005, p. 198.

1.2. Antik Yunan Dönemi

Antik Yunan Dönemi bir önceki dönemden uzunluk ve alan ölçümü üzerine kurulu geometrinin tanım, aksiyom, postulat, teorem ve ispatlama üzerine sistemli bir yapıya dönüşümü ile ayrılmaktadır. Bu dönemde Öklidyen geometrinin temeli atılmış ve oluşturulmuştur. Oluşturulan Öklidyen geometri sistemi, XIX. yüzyıl Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna kadar tek doğru geometrik sistem olarak kabul görmüştür. Bu tek doğru geometri sistemini daha sağlam temele oturtmak için yapılan çalışmalar bu dönemde başlamış ve XIX. yüzyıla kadar devam ederek en sonunda Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna evrilmişlerdir.

1.2.1. Thales (MÖ 650- 546)

Miletli filozof ve matematikçi olan Thales geometriyi Mısırlılar ve Babilonlular'dan öğrenmiştir. Mısır ziyaretinden sonra Thales evren hakkındaki ilk genel açıklamayı yapmış ve her şeyi ezeli bir maddi kökenden çıkarmıştır. Bu düşüncesi geometriye olan bakış açısını da değiştirmiştir.

Thales, Mezopotamya ve Mısır ziyaretinde kullandıklarını gördüğü altı teoremin ispatını yaparak, matematikte ispat yapma dönemini başlatmıştır. Bu ispatlamalarda Thales tümdengelim yöntemini kullanmıştır. Böylece sayısal örnekler üzerine kurulu olan geometri ilk olarak Thales'in eserlerinde soyut bir çeşit geometriye dönüşmüştür. Thales'in ispatları zamanla kaybolmasına rağmen kendisinden sonra bu ispatları öğrenenler gelecek kuşaklara aktarmışlardır.[6]

1.2.2. Pisagor (MÖ 582- 500) ve Takipçileri

Oluşturulacak olan Öklidyen geometrinin en belirgin özelliklerinden bazılarını ilk olarak Pisagor ve takipçileri ortaya koymuşlardır. Bu özellikler Öklidyen olmayan geometrilerin

[6] Tabak, **op. cit.**, pp. 10, 14.

yapılandırılmasında da belirleyici rol oynamaktadırlar. Üçgenin iç açılar toplamı ve Riemann'ın kullandığı Pisagor teoremi bu özelliklerin arasındadır.

Pisagor teoreminin empirik olarak Pisagor'dan yaklaşık bin yıl kadar önce Mezopotamyalılar tarafından kullanıldığını belirtmiştik. Thales'in öğrencisi olduğu tahmin edilen Sisamlı Pisagor kendi adıyla anılan bu teoremi ilk ortaya koyan ve ispatlayandır.[7] Pisagor'un takipçileri ise üçgenin iç açıları ölçüleri toplamının 180^0 olduğunu ilk hesaplayanlardandır.

1.2.3. Hipokrates (yaklaşık MÖ 440)

Kendisinden önce tümdengelim yöntemi Pisagor tarafından uygulanmıştır. Fakat Sakız Adalı, tarihteki ilk geometri kitabını yazan Hipokrates, mantıksal tümdengelimle ispat yapan, özellikle bu ispatı 'olmayana ergi' yöntemiyle yapan öncü kişilerdendir.[8] Bu yöntem XVIII. yüzyılda Saccheri tarafından kullanılarak Öklidyen geometrinin tek geometri olmayabileceği yönündeki kuşkuları doğurmuştur.

1.2.4. Ödoksos (MÖ 408- 355)

Platon'un öğrencisi ve aynı zamanda 'tüketme yöntemi'[9]nin kurucusu olan Datçalı (Knidoslu) Ödoksos, geometriyi postulatlarla başlatıp, sistematik yolla teoremler çıkararak devam eden bir yapıyı ilk düzenleyenlerdendir.[10]

1.2.5. Öklid (yaklaşık MÖ 300)

---

[7] Pisagor teoremi: Bir dik üçgende dik kenarların karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir. (**Ibid.**, p. 15.)
[8] Bardi, **op. cit.**, p. 42.
[9] Bu yöntem bilinen şekillerin birleştirilmesiyle bir alanın ya da hacmin makul bir tahmini değerinin elde edilmesine dayanmaktadır. Şekillerin sayısı ve küçüklüğü arttırılarak bu tahmini değer iyileştirilebilir.
[10] Saul Stahl, **A Gateway to Modern Geometry : The Poincare Half- Plane**, 2nd ed., Boston, Jones and Bartlett Publishers, Inc., 2008, p. 1.

Öklid İskenderiye'de yetişmiş ve orada çalışmıştır.[11] O, Thales ve Pisagor'dan aldığı geometri bilgisini Aristoteles'in postulatlar üzerine kurulmuş olan sistemi üzerinde inşa edip geliştirmiştir. Öklid, Ödoksos'un birçok teoremini bir araya getirerek ve Theaetetus'un teoremlerini geliştirerek ve kendinden önce gelenler tarafından zayıf bir biçimde kanıtlanan teoremlere yeni gösterimler getirerek, yaklaşık MÖ 300'de *Elementler*[12] adlı eserini meydana getirmiştir.[13] Kısaca Öklid, bu kitapta kendinden önce gelen geometricilerin bütün buluşlarını ve filozofların sistematik yapısını bir araya getirerek sunmuştur.

Öklid'den önce *Elementler*'e benzer, Sakız Ada'lı Hipokrates ve Manisa'lı Theudius'un[14] kitapları dahil en az üç kitap yazılmıştır, fakat bu kitapların izine rastlanılmamaktadır.[15] *Elementler* ise iki bin yıl boyunca geometri kitabı olarak kabul edilecek ve geometrinin temeli ve kendisi olduğu düşünülecektir. *Elementler* ilk yazıldığında on üç kitaptır.[16] Ödoksos'un çalışmaları beş ve altıncı kitabı, Theaetetus'un katı geometrisi onuncu kitabı oluşturmaktadır. Theudios, Dinostratos ve Menaechmos gibi Platon'un Akedemiası'ndaki birçok isim geometrinin elementlerini belirleyerek *Elementler* kitabında yer almışlardır.[17]

Elementler tanımlarla başlamaktadır. Bütün terimlerin kullanılmadan önce tanımlanması, Öklid'in kullandığı yöntemin ana noktasını oluşturmaktadır. Öklid geometri sistemini tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar üzerine kurmuş, böylece teoremlerin ispatında meydana gelebilecek mantıksal hataların oluşmasını engellemiştir.[18]

Aksiyomlar ve postulatlar öncüller olarak alınmış yasalardır. Bunlar Öklid'in ispatlamadan doğru olarak kabul ettiği ve diğer geometri yasalarının (teoremlerin) ispatları için kullanacağı, eşitlik-eşitsizlik kavramları, doğrular, açılar ve şekiller üzerinedir. Öklid için aksiyomlar ve

---

[11] D. E. Smith, **History of Mathematics**, Vol.I, New York, Dover Pub., Inc., 1958, p.105.
[12] *Elementler*'in Yunanca karşılığı 'stoicheia, (Στοιχεῖα)'dır. İngilizce kaynaklarda *Elements* olarak geçmektedir. Türkçe kaynaklarda ise bazen *Elementler* bazen *Öğeler* ya da *Ögeler* olarak geçmektedir. Tezin yazarı *Elementler*'i kullanmayı tercih etmiştir.
[13] Thomas L. Heath, Euclid, **The Thirteen Books of The Elements**, 2nd ed., Vol.I, Dover Pub., Inc., New York, 1956, pp. 1, 3.
[14] George Sarton, **Antik Bilim ve Modern Uygarlık**, Çev. Melek Dosay, Remzi Demir, Ankara, Gündoğan Yayınları, 1995, s. 46.
[15] Carl B. Boyer, Uta Merzbach, **A History of Mathematics**, 3rd ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2011, p. 93.
[16] *Elementler*, sadece geometri değil, aritmetik gibi diğer basit matematiksel konuları da içermektedir. (Boyer, Merzbach, **op. cit.**, pp. 93, 94.)
[17] Bardi, **op. cit.,** p. 42.
[18] Stephen F. Barker, **Matematik Felsefesi,** Çev. Yücel Dursun, Ankara, İmge Kitabevi, 2003, s. 41, 42.

postulatlar arasındaki temel fark, postulatlar özellikle geometrinin konusu olan nesneleri (doğrular, açılar, şekiller ve diğerleri) içerirken, aksiyomların geometrinin konusundan ziyade daha genel durumları kapsamasından gelmektedir. Aksiyomlar, geometri dışında birçok konunun tartışmasında kullanılabilen eşitlik kavramıyla ilişkilidir.[19] Aristoteles ve Öklid, aksiyom ve postulatları farklı kategoriler olarak kabul etmesine rağmen, Wolfe ayrımın çok net olmadığını belirtmiştir.[20] Modern matematikçiler de aralarında büyük bir fark görmemektedirler.[21]

"Öklid'in aksiyomları:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler, birbirlerine eşittirler.
2. Eşit şeylere eşit şeyler eklenirse, toplamlar eşit olur.
3. Eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa, kalanlar eşit olur.
4. Birbirleriyle çakışan şeyler birbirleriyle eşittir.
5. Bütün parçasından büyüktür."[22]

"Öklid'in postulatları:

1. Herhangi bir noktadan diğer herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.
2. Herhangi sonlu bir doğru, bir doğruda daimi olarak uzatılabilir.[23]
3. Verilen herhangi bir nokta ve uzunluk için, o noktayı merkez alan ve yarıçap uzunluğu o uzunluk olan bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir."[24]
5. "İki doğruyu kesen bir doğrunun aynı tarafta oluşturduğu iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru, sınırsızca uzatıldıklarında açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler."[25,26]

---

[19] **A.e.,** s. 40.
[20] Harold E. Wolfe, **Introduction to Non-Euclidean Geometry**, New York, The Dryden Press, Inc., 1945, p. 4.
[21] Tabak, **op. cit.,** p.195. & Boyer, Merzbach, **op. cit.,** pp. 94,95.
[22] Barker, **a.g.e.,** s. 40, 41.
[23] Düz doğrunun daimi olarak uzatılması sonsuz olduğu anlamına gelmemektedir. İlk olarak Riemann, düz doğrunun sınırsız olduğunu ileri sürmüştür. (Wolfe, **op. cit.,** p. 6.)
[24] Barker, **a.g.e.,** s. 38.
[25] Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumunda bu son postulatın karakteristik bir yapısı bulunmaktadır. Tezde bu postulat, 'paralel postulat' olarak adlandırılmıştır. Öklid, bu postulatta paralellikten bahsetmese de ilk kez V. yüzyılda Proclus tarafından verilen farklı versiyonunda paralellikten bahsedilmiştir. (Stahl, **op. cit.,** p. 21.) Modern yazılara kadar beşinci postulat, genellikle paralel postulatı olarak anılmıştır.

Öklid, tanımlar, aksiyomlar ve postulatları ortaya koyduktan sonra teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını sunmuştur. Teoremler verilmiş olan öncüller yardımıyla ispatlanacak olan yasalardır. Öklid'in ispatları edimsel deney veya gözlemlerden gelmemektedir. Onun ispatları tümdengelim yöntemiyle oluşturulan ispatlardır. Bu ispatlarla sonuçlarını mutlak mantıksal zorunluluğun netliği ile kurmaya çalışmıştır. Öklid'in kavramsallaştırması, içinde hiçbir mutlak engelin olmadığı ve çevresinde hiçbir dış sınırın olmadığı bir uzayın kavramsallaştırılmasıdır.[27] Diğer bir deyişle, Öklid kendinden öncekiler gibi belirli sınırlarla belirlenmiş geometri nesneleri üzerinde empirik çalışmalar yapmamış, bunlardan soyutlamalar yapmıştır.

Öklid'in ayrıca, *Optik* adlı bir eser yazdığına dair Pappus ve Proclus tarafından yapılan atıflar bulunmuştur.[28] *Optik*, Ptolemaios tarafından bir başka optik kitabı yazılıncaya kadar perspektife ilişkin tek kitap olarak kalmıştır. Kitap tanımlarla başlamaktadır ve bu tanımların bazıları postulat niteliğindedir. Dördüncü tanımda büyük açıyla bakılan cisimlerin büyük, küçük açıyla bakılan cisimlerin küçük ve eşit açıyla bakılan cisimlerin eşit görüneceği varsayılmıştır. *Optik* elli sekiz önermeden meydana gelmiştir. Görmeye ilişkin açıklamalarda Platoncu geleneğe bağlı kalınmış ve ışığın gözden çıkarak nesneye ulaşması sonucunda görmenin oluştuğu savunularak ışığın doğrusal olduğu örtük olarak kabul edilmiştir.[29] Dolayısıyla oluşturulan optik ve perspektifin geometri yorumu Öklidyen bir yapıya daha yakındır. Fakat ilerleyen bölümlerde gösterileceği üzere, Rönesans Dönemi perspektif çalışmaları ile XVIII. yüzyıl 'görünenlerin geometrisi' optik çalışması gibi çalışmaların geometri yorumu Öklidyen değildir. Böylece bu gibi çalışmalar Öklidyen geometrinin her zaman geçerli olmayabileceği yönünde kuşkuları doğurmuşlardır. Bu kuşkular ise XIX. yüzyıla gelindiğinde ışığın doğrusal yapısı olmayabileceğini iddia eden Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna önayak olmuştur.

Öklid öldükten sonra *Elementler*'in gelişimi devam etmiştir. İbsiklavs (Hypsicles) tarafından on dördüncü kitap, ismi bilinmeyen fakat Ayasofya'nın mimarlarından İsidoras'ın öğrencisi olduğu düşünülen bir kişi tarafından da on beşinci kitap yazılmıştır. İskenderiyeli Heron (yaklaşık MS 10-75), Porfir (Porphyry Malchus yaklaşık MS 233-309), Proclus Diadochus (MS 411-485) ve Simplicius (490-560) gibi isimler *Elementler*'in net olmadığını düşündükleri

[26] **Ibid.**, p. 6.
[27] Barker, **a.g.e.,** s. 36, 39.
[28] Thomas L. Heath, **A History of Greek Mathematics**, Vol.I, Oxford, 1921, p. 441.
[29] John Murdoch, "Euclid", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.IV, New York, , 1981, p. 430.

bölümlerine açıklamalarda bulunmuşlardır. İskenderiyeli Theon (yaklaşık MS 355-405), *Elementler*'e eklemeler ve çıkarmalar yaparak onu yeniden yazmıştır.[30]

1.2.6. Posidonius & Geminus

MÖ I. yüzyılda Posidonius ve öğrencisi Rodos'lu Geminus, paralel postulatının ispatlanmasının gerektiğini hisseden ilk filozoflardandır. Posidonius paralel doğruların tanımını değiştirerek paralel postulatını ispatlayabileceğini düşünmüştür. Tanıma, paralel doğruların her yerde birbirine eşit uzaklıkta olacağını ve böylece hiç kesişmeyeceklerini eklemiştir.[31] Fakat paralel olmayıp kesişmeyen doğruları hesaba katmadığı için ispat geçersiz kalmıştır. Geminus ise önce *Elementler* ile ilgili genel açıklamalar yapmış, daha sonra Öklid'in paralel postulatına itiraz ederek, bu postulatın bir kanıtının kendisi tarafından yapıldığını iddia etmiştir.[32] Böylece iki bin yıl boyunca sürecek olan paralel postulatı ispatlama çalışmaları başlamıştır.

1.2.7. İskenderiyeli Menelaos (MS 70-130) & Batlamyus (MS 85-165)

İskenderiyeli Menelaos, *Küreler* adlı eserinde üçgen için Öklid'in birinci kitap 19. ve 20. tanımlarındaki sözcükten farklı bir sözcük kullanmıştır. Menelaos'un bu sözcüğü kullanımından küresel üçgenler ile düzlem üçgenlerini ayırt etmeye çalıştığı sonucu çıkarılmıştır.[33] Fakat Menelaos bu küresel üçgenler üzerine bir geometri sistemi inşa etmemiştir.

---

[30] 1808 yılında F. Peyrard, Vatikan kütüphanesinde Öklid'in *Elementler*'ini bulana kadar Theon'un versiyonu, geçerliliğini sürdürmüştür. 1883-1888 yılları arasında J. L. Heiberg, Vatikan ve diğer kütüphanelerdeki tüm *Elementler* kopyalarını inceleyerek, *Elementler*'i özgün metnine en yakın haliyle Yunanca ve Latince olarak yeniden oluşturmuştur. (Thomas L. Heath, Euclid, **The Thirteen Books of The Elements**, Vol.I, p. 46.)

[31] Bardi, **op. cit.,** p. 58.

[32] D. R. Dicks, "Geminus", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.V, New York, 1981, p. 346.

[33] Thomas Ivor Bulmer, "Menelaus of Alexandria", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.IX, New York, 1981, p. 297.

Boyutlar Üzerine adlı eserinde üç boyuttan başka boyut olamayacağını belirten Batlamyus, *Mekanik Üzerine* adlı eserinde Öklid'in paralel postulatını kanıtlanmaya çalışmıştır.[34] Fakat, o da başarılı olamamıştır.

1.2.8. Proklos (MS 410-485)

Proklos Öklid'in birinci kitabına yorum yazmıştır. O, paralel postulatının diğer postulatlara olan bağımlılığıyla ilgili Ptolemy'nin ispatından bahsetmiş ve bunu eleştirmiştir.[35] Ptolemy, verilen bir doğruya bir nokta üzerinden sadece bir paralel çizilebileceğini varsaymıştır. Bu paralel postulata eş değer bir varsayımdır.[36] Proclus ise "eğer bir doğru iki paralelden biriyle kesişirse, diğeriyle de kesişir" diyerek kendi ispatını yapmaya çalışmıştır. Proclus ise paralel postulatı diğer postulatlardan uzun akıl yürütme zinciri sonucu çıkarılabileceğini düşünerek onu teorem olarak kabul etmeye çalışmıştır.[37]

1.3. İslam Dönemi

IX. yüzyılda *Elementler*'in, el-Haccâc ibn Yûsuf ibn Matar tarafından Arapça'ya çevrilmesiyle İslam geometricileri, Antik Yunan'da Öklid'ten sonra gelen geometricilerle aynı çabaya girerek Öklid'in paralel postulatına daha sağlam bir temel kazandırmaya çalışmışlardır. İslam Dünyası'nda Öklid ve *Elementler* ile ilgili ilk bilgiler, X. yüzyılda yaşayan İbnü'n-Nedim'in *Fihrist* adlı eserinde bulunmaktadır.[38] Bu alanda yapılan çalışmalar XVII. ve XVIII. yüzyıllardaki geometricileri etkilemiştir. XVIII. yüzyılın geometricilerinden Saccheri ve Lambert gibi isimler, bu dönemde oluşturulan yöntemleri kullanarak, Öklidyen olmayan geometrili bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

---

[34] Thomas L. Heath, **A History of Greek Mathematics**, Vol.II, Oxford, 1921, p. 295.
[35] Stahl, **op. cit.,** p. 211.
[36] Wolfe, **op. cit.,** p. 27.
[37] Stahl, **op. cit.,** p. 211.
[38] Ali Rıza Tosun, "Hüseyin Rıfkı Tamani'nin Çalışmaları Işığında Öklid Geometrisi'nin Türkiye'ye Girişi'', doktora tezi, Ankara, 2007, s. 63, 64.

Bu dönemin Öklidyen olmayan geometrinin oluşum sürecine yaptığı dolaylı katkı ise, hem geometrik hem de başka türden nicelikler arasındaki ilişkileri denklem yoluyla ele alan cebrin üretilmesidir. Cebir, bu dönemi Antik Yunan Dönemi'nden ayıran unsur olup, cebirle birlikte geometri daha soyut bir aşamaya geçmiştir.

1.3.1. Sâbit ibn Kurra (836-901)

Bağdat'ta çalışmalarını yapmış olan Sâbit ibn Kurra, sayı kavramının reel sayılara doğru genişlemesine, küresel trigonometriye ve analitik geometriye yaptığı katkılarla, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşması sürecinde etkili olmuştur.[39]

Sâbit ibn Kurra paralel postulatını ispatlama girişiminde iki makale yazmıştır: "Öklid'in Ünlü Postulatının Kanıtı Üzerine Bir Makale"[40] ve "İki Doğruyu Kesen Üçüncü Doğrunun İki Dik Açıdan Küçük Olan Tarafa Uzatıldığında Kesişmeleri Üzerine Bir Makale".[41] Bu makalelerin ikincisinde, 'hareket'i yeterli ölçüde kullanmadığını düşündüğü Öklid'i eleştirmiş ve kinetiği kullanmıştır; bu kullanımın da bir zorunluluk olduğunu iddia etmiştir. Böylece 'hareket' kavramı geometrinin, paralel postulat kadar olmasa da, tartışma konusundan biri haline gelmiştir.

1.3.2. İbnü'l-Heysem (965-1039)

İbnü'l-Heysem, *Öklid'in Elementler'indeki Güçlüklerin Çözümü*[42] adlı eserinde *Elementler*'de problemli olduğunu düşündüğü kısımlara alternatif çözümler getirmiştir. Ayrıca *Elementler*'deki önermeleri ve ispatları sadeleştirmeye çalışmıştır. Daha önce yazdığı *Öklid'in Elementler'indeki Önermelerin Yorumu*[43] adlı eseri ile birlikte bu iki yazısının *Elementler*'i oluşturduğunu belirtmiştir.

---

[39] Tosun, **a.g.e.**, s. 43.
[40] Makalenin orijinal adı: "Risâle fî Burhān el-Musadere el-Meşhure min Uklidis"
[41] Makalenin orijinal adı: "Risâle fi inne el-Hatteyn ize İhrâca ale Zaviyeteyn ekal min Kaimeteyn İltika"
[42] Kitabın orijinal adı: *Fî Hall Şukûk Kitâb Uklidîs fî el-Usûl*
[43] Kitabın orijinal adı: *Kitâb Şerh Musadarât Kitâb Uklidîs fî el-Usûl*

İbnü'l-Heysem bu eserinde, 'iki doğru bir yüzey oluşturmaz' postulatını Öklid'e atfetmiş ve bunun postulatlar arasında yer alması gerektiğini iddia etmiştir. Öklid'in 'kesişmeyenler' şeklindeki paralel tanımıyla ilgili olarak böyle doğruların önce varlığının ortaya konması gerektiğini düşünmüş ve bu sebeple eşit mesafeli kavramıyla "bir doğru bir yönde sona doğru giderse başka bir doğruyla kesişmeyerek bu gidiş sırasında ikinci doğruya dik olur, fakat aynı düzlem üzerinde kalırsa bu doğru ikinci doğruya paralel olur" postulatını eklemiştir.[44] İbnü'l-Heysem'den önce Sâbit ibn Kurra da paralel postulatın kanıtında hareketi kullanmıştır; ancak önce Ömer Hayyam ve daha sonra Tûsî hareket kavramını geometri dışı bularak itiraz etmişlerdir.[45] Fakat XIX. yüzyılda Lobachevski hareketi geometrinin içine katmış, geometri nesnelerinin hareketle algılanabildiğini iddia etmiştir.

İbnü'l Heysem, paralel postulatını ispatlamak için öncelikle üç iç açısı 90^0 olan bir dörtgen ele almış ve dördüncü açının da 90^0 olduğunu ispatladığını düşünmüştür. İspatında şunu varsaymıştır: "verilen bir doğruya eşit uzaklıkta ilerleyen bir noktanın konumu zorunlu olarak verilen doğruya paralel bir doğru oluşturur". Bu da günümüzde Öklid'in paralel postulatına eş değer sayılan bir varsayımdır.[46] Fakat XVIII. yüzyılda Lambert, İbnü'l Heysem'in bu dörtgeninden ve fikrinden yola çıkarak Öklidyen yapıda olmayan sonuçlar elde etmiştir. İbnü'l-Heysem'in bu dörtgeni, Lambert dörtgeni olarak tanınmaktadır ve onun girişimleri Öklidyen olmayan geometrilerin ortaya çıkışına ilham kaynağı olmuştur.[47]

1.3.3. Ömer Hayyam (1048 - 1131)

Ömer Hayyam'ın *Öklid'in Kitabında Bulunan Önermelerin Yorumu*[48] adlı eserinin birinci kitabı paralel postulatı üzerinedir. Bu kitapta kendisinden önce gelenlerin bu postulatı kanıtlamalarını göstermiş ve Aristoteles'in ortaya koyduğu ilk ilkeleri gözardı ettikleri için onların ispatlarının geçersiz olduğunu ifade etmiştir. Örneğin İbnü'l Heysem'in hareketi kullanan paralel postulat ispatını Aristoteles'in geometride hareketi kullanmadığını öne sürerek eleştirmiştir.

---

[44] Boris A. Rosenfeld, Adolf P. Youschkevitch, "Geometry", **Encyclopedia of the History of Arabic Science**, Ed. by Roshdi Rashed, Vol.II, London, New York, Routledge, 1996, pp. 462- 468.
[45] A. I. Sabra, "Ibn al-Haytam", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.VI, New York, 1981, pp. 200, 210.
[46] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 220.
[47] Rosenfeld, Youschkevitch, **op. cit.,** p. 465.
[48] Kitabın orijinal adı: *Şerh ma Eşkâle min Musâdarât Kitâb Uklidîs*

Geometride Aristoteles ilkelerine uyulması gerektiğini düşünen Ömer Hayyam, bu ilkeleri aşağıdaki şekilde sıralamıştır:

- "Miktarlar sonsuza kadar bölünebilmekte; bölünemezleri barındırmamaktadır.
- Bir doğru sonsuza kadar uzatılabilmektedir.
- Kesişen iki doğru, kesişme noktasından uzaklaşırken açıklık mesafesi artmaktadır.
- Yakınsak doğrular kesişmekte ve yakınsak iki doğrunun yakınsadığı doğrultuda birbirinden uzaklaşması olanaksızdır.
- Eşit olmayan sınırlı iki miktardan, küçük olan katlarıyla birlikte alınırsa büyük olanı geçmektedir."[49]

Ömer Hayyam, Aristoteles'in bu ilkelerinden 'aynı doğruya dik olan iki dikmenin ne birbirine yakınlaşabileceğini ne de birbirinden uzaklaşabileceğini' göstererek, aralarındaki mesafenin eşit kalacağı sonucuna varmıştır. O, bu sonucu Öklid'in paralel postulatını ispatlamaya çalışırken kullanmıştır.[50]

Ömer Hayyam, öncelikle İbnü'l Heysem'in yöntemine benzer şekilde bir dörtgen ele almıştır. Bu dörtgenin iki kenarının birbirine eşit ve dörtgenin tabanına dik olduğunu kabul etmiştir. İbnü'l Heysem ve Ömer Hayyam'ın dörtgenleri arasındaki fark; İbnü'l Heysem'in dörtgeninde üç iç açı sabit ve 90^0 iken, Ömer Hayyam'ın dörtgeninde iki iç taban açı sabit ve 90^0'dir. Ömer Hayyam'ın dörtgeninde diğer tepe açılar düşünüldüğünde üç olasılık oluşmaktadır. Bu olasılıklarda açılar dar, dik veya geniş olabilmektedirler. Ömer Hayyam Aristoteles'in ilkelerinden çıkardığı sonuca göre, tepe açıların geniş açı ve dar açı olma durumunda şeklin bir dikdörtgen oluşturmayacağını göstererek paralel postulatını ispatladığını düşünmüştür.[51]

Ömer Hayyam'ın kendisinden önce gelen İslam geometricilerinden farkı postulatın ispatını ortaya koyarken ilk ilkeleri dikkate alması ve onlarla mantıksal bir çelişki yaratmayacak biçimde ispatı oluşturmasıdır. Ömer Hayyam'ın paralellik kavramı kendisinden sonra gelen İslâm geometricilerini, özellikle de Nasirüddîn el-Tûsî'yi ve XVII. ve XVIII. yüzyıllarda yetişen Avrupalı geometricileri etkilemiştir.[52] XVIII. yüzyıl geometricilerinden Saccheri, Ömer Hayyam'ın

[49] Tosun, **a.g.e.**, s. 58.
[50] **A.e.**, s. 58.
[51] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 220.
[52] Rosenfeld, Youschkevitch, **op. cit.,** p. 463.

izinden giderek onun paralel postulat ispatında kullandığı yolu kullanmış ve tepe açısı dar olan olasılıktan Öklidyen olmayan geometrili sonuçlar elde etmiştir. Ömer Hayyam'ın bu dörtgeni Saccheri Dörtgeni olarak anılmaktadır.

1.3.4. Nasîrüddin el-Tûsî (1201-1274)

Nasîrüddin el-Tûsî, "Paralel Doğrular Hakkındaki Kuşkuları Gideren Makale"[53] adlı eserinde Saccheri Dörtgeni'ni esas alarak, paralelliğin kanıtlamasını Ömer Hayyam'a benzer şekilde, tepe açıların dar ve geniş açı olması durumlarının olanaksızlığına dayanarak yapmaya çalışmıştır.[54]

Nasîrüddin el-Tûsî *Öklid'in Elementler'inin Düzeltilmiş Yazımı*[55] adlı eserinde ise *Elementler*'i daha sağlam temellere kavuşturduğunu düşünerek şu eklemeleri yapmıştır: "Öncelikle zorunlu olanları söylemek gerekir: Nokta, doğru, yüzey, düzlem yüzey ve dairenin var olduğu kabul edilmelidir, herhangi bir doğru ya da yüzey üzerinde bir nokta seçilebilmelidir ve herhangi bir yüzeyin üzerinde doğru olduğunu ya da onun üzerinde uzandığını varsaymamız gerekmektedir." Ayrıca Nasîrüddin, "eğer bir eğri üzerindeki bütün noktalar, bir doğru üzerindeki noktalara eşit uzaklıktaysa bu durumda eğri, düz bir doğru olmalıdır'' diyerek paralel postulata eş değer, fakat farklı bir tanım yapmıştır.[56]

Nasîrüddin, Öklid'in paralel postulatı üzerine yazdığı eserinde, Cevherî'ye atfettiği *Islâh li-Kitâb el-Usûl* adlı eser için Cevherî'nin *Elementler*'e eklediği önermelerin sayısının elliye yakın olduğunu iddia etmiştir. Nasîrüddin, Cevherî'nin bu önermeleri arasında paralel postulatının da bulunduğunu ve Cevherî'nin bu postulatı ispatlamaya çalıştığını belirtmiştir. Cevherî'nin bu çalışması, bilinen ilk Arapça paralel postulatı ispatlama girişimidir ve Nasîrüddin bu ispatın zayıf noktalarını ortaya koymuştur.[57]

---

[53] Makalenin orijinal adı: "El-Risâle el-Şafiye an Şekk fî el-Hutût el-Mütevâziye"
[54] **Ibid.**, p. 468.
[55] Kitabın orijinal adı: *Kitâb Tahrîr el-Usûl li-Uklidîs'*dir. Medici Matbaa'sında basılan bu kitaba daha sonradan *Pseudo-Tahrîr* adı verilmiştir.
[56] **Ibid.**, p. 462.
[57] **Ibid.**, p. 464.

Nasîrüddin el-Tûsî'nin görüşleri XVII. yüzyılda John Wallis tarafından yayımlanmıştır. XVIII. yüzyılın başlarında Saccheri, Wallis'in Nasîrüddin'le ilgili çalışmasını başlangıç noktası olarak almış ve onun çalışmalarını geliştirmiştir.[58]

1.3.5. Semerkandî (1250-1310)

Şemseddîn Muhammed ibn Eşref el-Semerkandî bir mantıkçıdır. Paralel postulatın ispatlamasının geometrik olarak yapılabileceğini düşündüğü için bu postulatı, postulatlar arasından çıkararak teoremler arasına almıştır.[59] Semerkandî, Öklid'in paralel postulatı yerine 'eğer bir doğru başka iki doğru üzerine indirilirse, iç kısımda oluşan açıların iki dik açıdan küçük olduğu kısımda doğrular uzatılmaya devam edilirse zorunlu olarak kesişirler' önermesini verdikten sonra, bu kesişimin zorunluluğunu açıklamıştır. Semerkandî'ye göre, 'sonsuz bölünebilen bir doğrunun diğer doğruya sürekli yaklaştığı, fakat asla kesişmediği kabul edilecek olursa, bir noktadan uzatılan herhangi bir doğru da asla diğer noktaya ulaşamamaktadır. Çünkü sonsuz bölünebilir bir mesafeyi katetmesi gerekmektedir. Semerkandî, bu durumda ise sonsuz bölünebilir doğrulara dayanan bütün geometri şekillerini reddetmek gerekmektedir ki bu durum mümkün değildir' diyerek ispatlamasını yaptığını düşünmüştür. Ayrıca Semerkandî, geometride İbnü'l Heysem, Ömer Hayyam, Cevherî, Nasrüddîn el-Tûsî, Ebherî ve Kadı Hamah'ı sonsuz bölünebilirliği kabullerini ve paralel postulatla ilgili çalışmalarını eleştirmiştir.[60]

1.4. Rönesans Dönemi

XV. ve XVI. yüzyılları kapsayan Rönesans Dönemi'nin Yunan, Mısır ve Arap eserlerinin tercüme edilmesi ve bu eserlerin yayımlanmasıyla başladığı söylenebilir. Matbaanın yaygınlaşmasıyla *Elementler* Avrupa'da yaygınlaşmıştır. Bu dönemde *Elementler*'le ilgilenen bazı geometriciler, *Elementler*'de bulunan tanım ve postulatların zaman içinde ne gibi

[58] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** pp. 220, 221.
[59] Daha sonra gelen düşünürler tarafından bu teoremin kanıtlamasını ele alan pek çok yazı yazılmıştır. Gregg de Young, "Euclidean Geometry in the Mathematical Tradition of Islamic India", **Historia Mathematica**, No:22, 1995, pp. 138-153, p. 146.
[60] İhsan Fazlıoğlu, "Hendese", **TDV İslam Ansiklopedisi**, C.XVII, İstanbul, 1998, s. 202.

değişiklikler geçirdiği ve bu değişikliklerin nasıl Öklid'in ifade ettiği biçime, aslına dönüştürülebileceğiyle ilgilenmişlerdir. Avrupa'daki bu geometriciler, Öklid'in yaklaşımıyla, Öklid'in kavramlarına bağlı kalarak ve mümkün olduğunca özgün metne uygun olacak biçimde çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Avrupa'daki diğer geometriciler ise *Elementler*'in aslına bağlı kalmak istememiş ve Öklid'in ele aldığı konuların yeni ortaya çıkan tekniklerle nasıl daha iyi sunulabileceğini araştırmışlardır. Bu geometriciler daha ziyade öğrencileri için eser yazmış ve yeni yöntemlerle, yani İslam matematiğinin katkıları olan semboller ve denklemlerle geometriyi işlemişlerdir.

Fakat Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecinde Rönesans Dönemi diğer dönemlerden farklıdır. Bu fark diğer dönemlerde Öklid'in *Elementler*'i ya da daha özel olarak ifade edilecek olursa, paralel postulat üzerine yapılan çalışmalar Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecinde önem arz etmiştir. Oysa Rönesans Dönemi'nde yapılan *Elementler*'le ilgili çalışmalar bu sürece etkili bir katkıda bulunmamıştır. Bu dönem geometricilerden, geometri içeriğini cebirle birleştirenlerin katkıları yadsınmamalıdır. Fakat Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecinde, Öklidyen geometrinin tek geometri olduğu yönündeki inancın sarsılması için bu dönemde oluşturulan perspektif sanatın katkısına ihtiyaç duyulmuştur.

Dolayısıyla bu bölümde, yukarıda bahsedilen *Elementler* üzerinde çalışmalar yapan Rönesans Dönemi geometricilerine değinilmeyecek, perspektif ve perspektifin geometri yorumu olan izdüşüm geometrisi üzerinde durulacaktır. Bu dönemle birlikte, paralel doğruların kesişebileceği ve homojen yapıda olmayan bir geometri çeşidi oluşturulabileceği ortaya konmuştur. Dolayısıyla perspektif ve izdüşüm geometrisi, Öklidyen olmayan geometri çalışmalarının başlangıcıdır.

1.4.1. Perspektif

Rönesans Dönemi'nden önce yapılan resimler, Gotik sitilinde olup derinlik algısı kullanılmamıştır. Gotik tarzını kullanan ressamlar, dünyayı Tanrı'ya gözüktüğü gibi resmetmişlerdir. 1400'lerde Venedik'in resmedildiği bir yapıt için Resim 1'e bakınız.

Resim 1[61]

Fakat Rönesansla birlikte ressamlar dünyayı kendi gördükleri biçimde resmetmek istemişlerdir. Resme bakıldığında çizilen nesnenin gerçekmiş hissi yaratması için perspektifi kullanmaya başlamışlardır. Perspektif sayesinde derinlik hissi yaratarak istedikleri sonuca ulaşmışlardır. Bu derinlik hissini perspektifin üç kuralıyla yakalamışlardır:

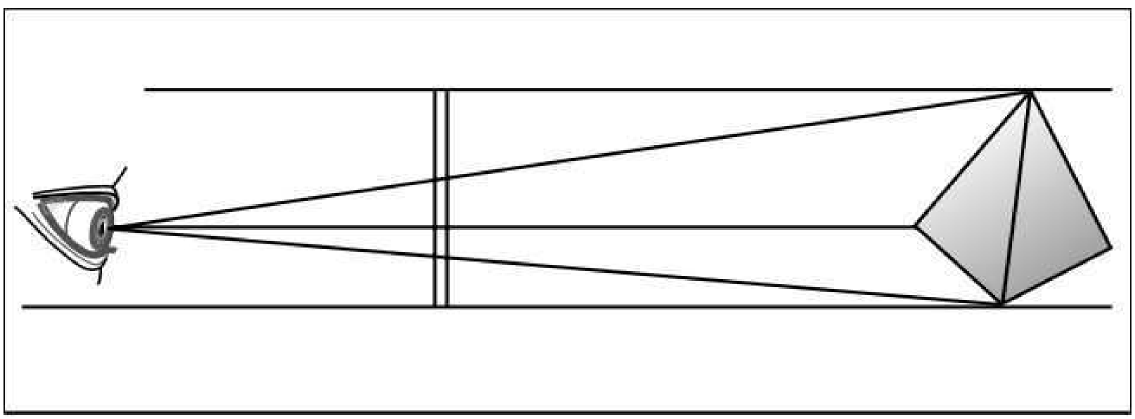
- "Boyutun perspektifi: Uzak objeler daha küçük resmedilirler.
- Renklerin perspektifi: Uzak objeler daha sönük renklerle resmedilirler.
- Dış hatların perspektifi: Uzak objeler daha yumuşak hatlarla resmedilirler."[62]

Resim 1 incelendiğinde, perspektif için oluşturulan bu kuralların uygulanmadığı görülmektedir. Kıyıdaki (uzaktaki) insanlar, kayıktaki (yakındaki) insanlara nazaran daha büyük çizilmemiş ve kuğularla insanlar aynı boyutta resmedilmişlerdir. Renkler, uzak ya da yakın farkı olmaksızın aynı canlılıkta kullanılmışlardır. Uzak ve yakın objeler aynı sertlikte hatlarla oluşturulmuşlardır.

[61] (Çevrimiçi) http://www.pages.drexel.edu/~tobiabj/courses/textbook/3a.html, 16 Temmuz 2014.
[62] Ladislav Kvasz, "History of Geometry and the Development of the Form of Its Language", **Synthese**, Vol.CXVI, No:2, Springer, 1998, pp. 141, 142.

1.4.1.1. Leonardo Da Vinci (1452-1519)

İtalyan ressamlardan Leon Battista Alberti ve Francesco della Pierro, Leonardo'dan önce perspektifin tekniklerini kullanmışlardır. Fakat Leonardo'nun eserlerindeki geometri kullanımı onlara göre daha ön plandadır. Leonardo, görüntülerin uzayda düz bir doğru şeklinde iletildiğini, böylece görüntünün piramit şeklinde bir formu olduğunu görmüştür. Burada piramitten kasıt, gözleyenin gördüğü nesnenin dış hatlarının piramidin tabanını oluşturmasıdır. Leonardo, perspektif tekniğini doğru bir biçimde uygulayabilmek için uygun bir yerde durduktan sonra resme tek bir gözle bakmayı önermiştir.[63] Leonardo'nun perspektif uygulaması için Şekil 1'e bakınız.



Şekil 1[64]

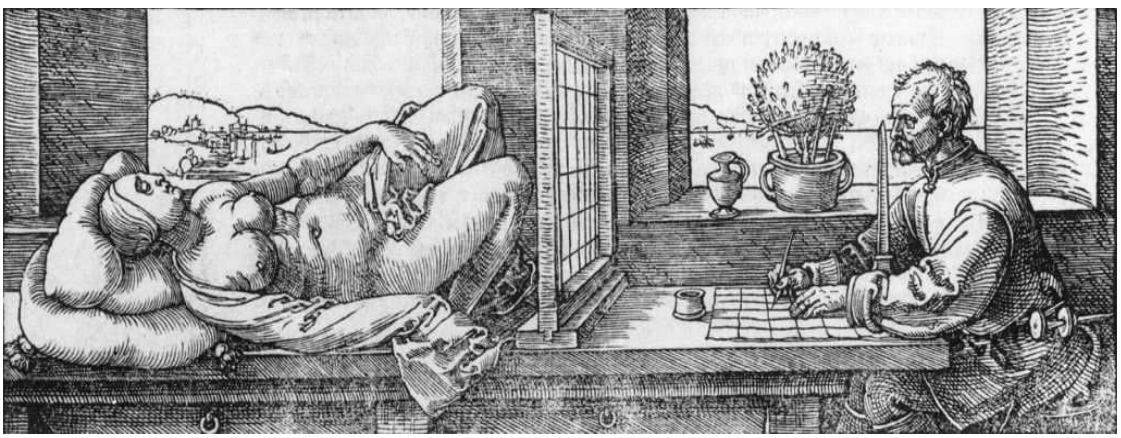
1.4.1.2. Albrecht Dürer (1471-1528)

Üç boyutlu nesneleri iki boyutlu resimlere çizmek isteyen Rönesans ressamları bazı bozulmaların olabileceğinin farkındaydılar. Aralarından bazıları bu bozulmanın en aza indirgenmesi için resmin matematiksel bir kaynağa dayanması gerektiğini fark etmiştir. Bu matematiksel kaynağı geometride bulan perspektif sanatının öncülerinden biri Albrecht Dürer'dir.

---

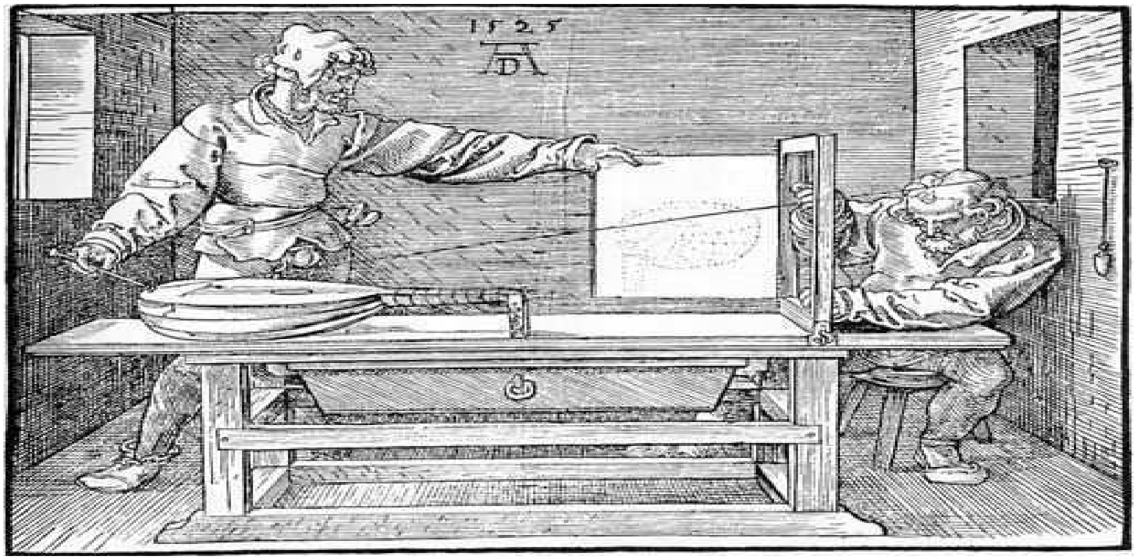
[63] Tabak, **op. cit.,** pp. 58, 59, 61.
[64] **Ibid.**, p. 58.

Perspektif sanatının altında yatan teori, özellikle Leonardo ve diğer ressamlar tarafından Güney Avrupa'da ortaya çıkmıştır. Dürer bu teoriyi analiz edip, dört ciltlik bir eser yazarak Kuzey Avrupa'daki kendi çağdaşlarının erişebilmesini sağlamıştır. Bu eserde sanatta ölçümün nasıl yapıldığı ve perspektif sorunları üzerinde durmuştur. Dürer, matematik ve sanatı bir bütün olarak görmüştür. Matematiksel olarak perspektif hakkındaki teorik sonuçları Leonardo'nun sonuçlarından daha derin değildir. Fakat Dürer'in farkı perspektif hakkındaki teorik fikirlerin, pratik olarak nasıl uygulanacağını göstermesinden gelmektedir. Dürer, gözlemci ve nesne arasındaki izdüşümünün nasıl yapılandığını ortaya koymuştur. Perspektifin resimlere nasıl uygulandığını göstermek için Resim 2 ve Resim 3'deki resimleri çizmiş ve böylece perspektif resim tekniklerinin, nasıl uygulanacağını göstermiştir.[65]



Resim 2[66]

[65] Tabak, **op. cit.,** pp. 61, 62, 63.
[66] (Çevrimiçi) https://transitionconsciousness.wordpress.com/tag/construction/, 16 Temmuz 2014.



Resim 3[67]

Resim 3'de göz merceği, gözlemleyen göz olarak düşünüldüğünde, ip udun üzerindeki bir noktadan gözlemleyen göze ışığın gittiği yolu göstermektedir.

"Birinci Adım: Çizim yapılan yerin solundaki kişi, udun incelenmesi istenilen noktalarının izdüşümünü noktalamaktadır. Bunu yaparak o kişi, udun üzerindeki bir noktadan göz merceği arasında bir doğru (ip) yaratmaktadır.

İkinci Adım: Sağdaki kişi, şekilde gösterildiği gibi dikdörtgen çerçeveyi, bir önceki adımda yaratılan doğru üzerindeki noktayla kesişene kadar hareket ettirmektedir.

Üçüncü Adım: Çerçeve kapatıldığında perspektifin uygulandığı doğru çizilir."[68]

Böylece Rönesans ressamları perspektifin ilkelerini belirlemişlerdir. İki paralel doğrunun 'bakış noktası'nda[69] birleştiğini keşfetmişlerdir. Böylece paralel doğruları ilk kesiştirenler Rönesans sanatçıları olmuştur.[70] Onlar resmedilecek görüntü ile resmedilen yer arasındaki

---

[67] (Çevrimiçi) http://virtualterritory.files.wordpress.com/2007/05/a-duerer-a-man-drawing-a-lute-sml-512.jpg, 16 Temmuz 2014.

[68] Tabak, **op. cit.,** pp. 63, 64.

[69] İngilizce kaynaklarda 'eyepoint' ya da 'viewpoint' olarak geçmektedir.

[70] Rönesans ressamları iki paralel doğrunun görüntüsünü çizmek için nedenini bilmeseler de bir noktada kesişen doğrular çizmeleri gerektiğini keşfetmişlerdir. Bunun sebebi - cevabı- ise Projektif geometri tarafından verilmiştir. (Kvasz, **op. cit.,** p. 143.)

ilişkiyi ve uzaklıkları hesaplamışlardır. Perspektifle Venedik'in resmi, Gotik stilde çizilen Resim 1'den, (1700'lü yıllarda) Resim 4'e dönüşmüştür.

Resim 4[71]

Resim 4'de, perspektifin yukarıda bahsedilen üç kuralı da (boyut, renk ve dış hat) uygulanmıştır. Uzaktaki insanlar, yakındaki insanlara nazaran daha küçük çizilmiştir. Yakındaki bina, uzaktaki binalara nazaran daha parlak renkte resmedilmiştir. Resmedilen nesnelerin hatlarının, yakındaki nesnelerde daha belirgin olduğu görülmektedir. Böylece Resim 4'de derinlik hissi yaratılmıştır.

Resim 4'e bakan kişi, Tanrı değil kişinin kendisidir. Rönesans Dönemi'nden önce Gotik tarzındaki resimler, homojen yapı sergilediklerinden Öklidyen geometriye uygundurlar. Fakat Rönesans'la beraber perspektif kullanarak oluşturulan resimler, homojen yapıda olmayıp, Öklidyen geometrisiyle tanımlanamazlar. Bunun en belirgin göstergelerinden biri, Rönesans resimlerinde paralel doğruların kesişmesidir.

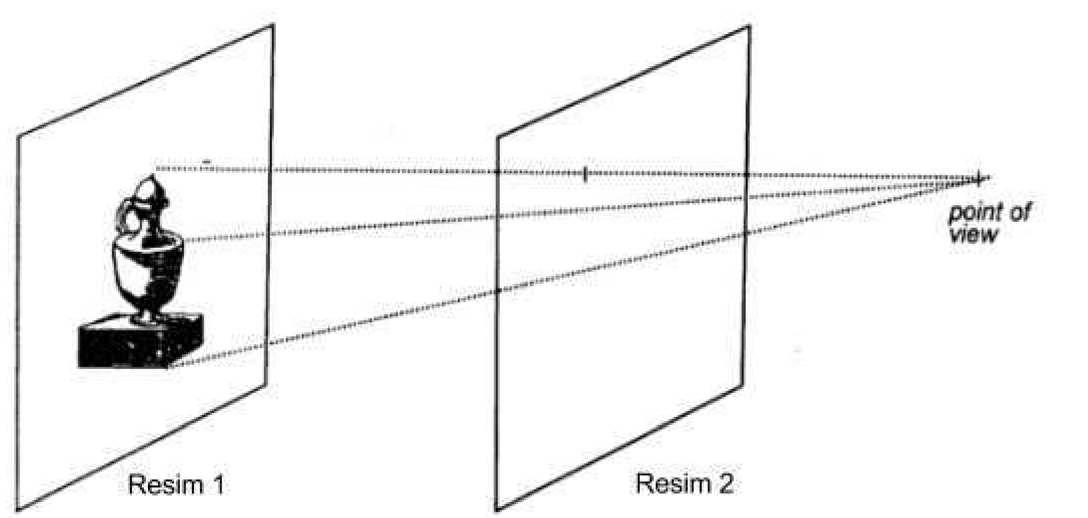
1.4.2. İzdüşüm Geometrisi

[71] (Çevrimiçi) http://www.pages.drexel.edu/~tobiabj/courses/textbook/3a.html, 16 Temmuz 2014.

Rönesans Dönemi ressamlarının perspektif uygularken oluşabilecek bozulmaları en aza indirgemek için kullandıkları matematiksel yansıma teknikleri, izdüşüm geometrisinin oluşumuna öncülük etmiştir.[72]

1.4.2.1. Gerard Desargues (1593-1662)

İzdüşüm geometrisinin kurucusu Fransız matematikçi Gerard Desargues'dir. Rönesans ressamları gerçeklik ile resim arasında ilişki kurarken, Desargues resim ile resim arasında ilişki kurmuştur. Diğer bir deyişle, Rönesanslı sanatçılar üç boyutlu nesnelerle iki boyutlu resimler arasında ilişki kurarken, Desargues Şekil 2'de de gösterildiği üzere, iki boyutlu resim ile iki boyutlu resim arasında ilişki kurmuştur. Bu yansıma ilişkisi izdüşüm geometrisini oluşturmaktadır ve bu geometrinin çıkış noktası bir noktadan bakıldığında iki resmin de aynı izlenimi oluşturmasından gelmektedir.[73]

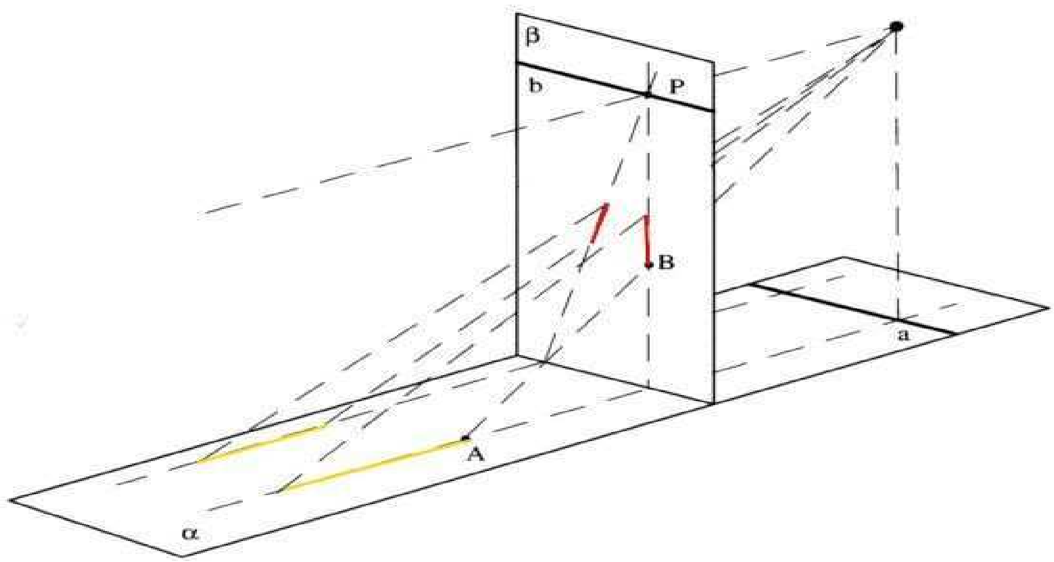


Şekil 2[74,75]

---

[72] Tabak, **op. cit.,** p. 56.
[73] Kvasz, **op. cit.,** pp. 143, 144.
[74] **Ibid**, p. 143.
[75] 'point of view', 'eye point' ya da 'view point', aynı anlama gelen terimler olup, tezin yazarı tarafından 'bakış noktası' olarak İngilizceden Türkçeye çevrilmiştir.

Öklid geometrisinin homojen bir yapıda olduğu belirtilmişti. Rönesans perspektif tekniğinde olduğu gibi Desargues'ın izdüşüm geometrisinde de 'bakış noktası' vardır. Bu bakış noktasıyla izdüşüm geometrisi, Öklidyen bir yapı sergilememektedir. Bunun en belirgin örneği, paralel doğruların kesişebilme özelliğidir. İlk olarak Rönesans ressamlarının keşfettiği bu özelliği Desargues, izdüşüm geometrisinde de kullanmıştır. Desargues, Şekil 3'de (α) düzlemi üzerindeki paralel doğruların, (β) düzlemi üzerindeki izdüşümlerinin paralel olmadığını göstermiş, böylece bir düzlemde paralel olan doğruların diğer bir düzlemdeki izdüşüm görüntüsünün paralel olmadığını ortaya koymuştur.[76]



Şekil 3[77,78]

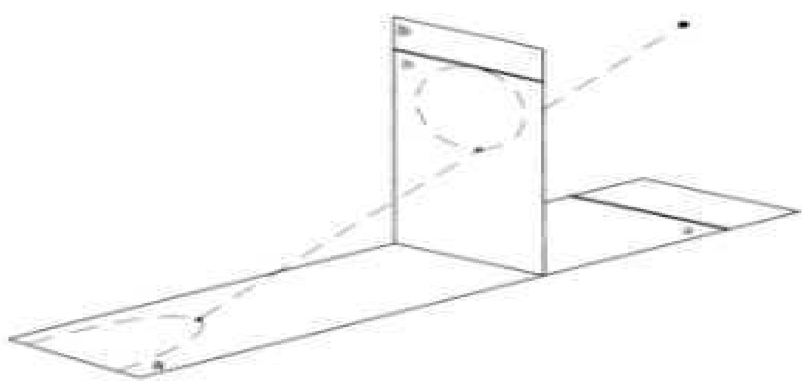
Desargues, sadece Rönesans perspektif çalışmalarından etkilenmemiş aynı zamanda Kepler'in süreklilik ilkesinden de etkilenmiştir.[79] 1604'de Johannes Kepler, her doğrunun ideal bir nokta ya da 'sonsuzda bir nokta' olduğunu göstermiştir.[80] Desargues bu ideal noktaları izdüşüm yöntemlerinde kullanarak, geometri problemlerine çözüm getirmiştir.

---

[76] Kvasz, **op. cit.,** pp. 145, 146.
[77] **Ibid.,** p. 144.
[78] Sarı paralel doğruların izdüşümünün, kırmızı- P noktasında birleşecek- doğrular olduğunu daha net göstermek için şeklin orijinaline renkli kısımları tezin yazarı eklemiştir.
[79] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 330.
[80] Roberto Torretti, **Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare,** 2nd ed., Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1984, p.111.

İki doğru her zaman ufukta bir noktada kesişmektedir. Bu nokta sanatta 'kaybolma noktası', izdüşüm geometrisinde ise 'sonsuzda bir nokta' olarak adlandırılmaktadır.[81] Parabolün odağı sonsuza gitmekte ve paralel doğrular 'sonsuzda bir nokta'da birleşmektedirler.[82]

Desargues, koni kesitlerinin izdüşümünü aldığında hangi özelliklerinin değiştiğini ya da değişmediğini araştırmıştır. Bu araştırması *Konilerin Düzlemle Kesişmesiyle Oluşan Sonuçların Taslak Önerileri Girişimleri*[83] adlı eserinde mevcuttur. Desargues'in araştırdığı aynı koni kesitlerini Apollonius, iki bin yıl önce araştırmıştır. Fakat Desargues'in farkı bu koni kesitlerini izdüşüm geometrisini kullanarak gözden geçirmesidir. Desargues, koni kesitinin izdüşümünün, başka bir koni kesiti olduğunu keşfetmiştir. Örneğin bir elipsin izdüşüm altındaki görüntüsü elips, parabol, hiperbol olabilmektedir. Bunun bir örneği olarak aşağıdaki Şekil 4 gösterilebilir. Elipsin izdüşüm altındaki görüntüsü, kesitin nereden alındığına bağlı olarak değişmektedir. Fakat, bulunan bu sonuçlardan farklı bir sonuç elde edilmemiştir. Ayrıca elipste olduğu gibi parabol ve hiperbollerde de izdüşüm kuralları aynı sonuçları vermektedir. Daha genel şekilde koni kesitinin izdüşümünün daima bir koni kesiti olduğu ifade edilebilir. Bu yüzden izdüşüm geometrisinde bütün koniler aynıdır.[84]



Şekil 4

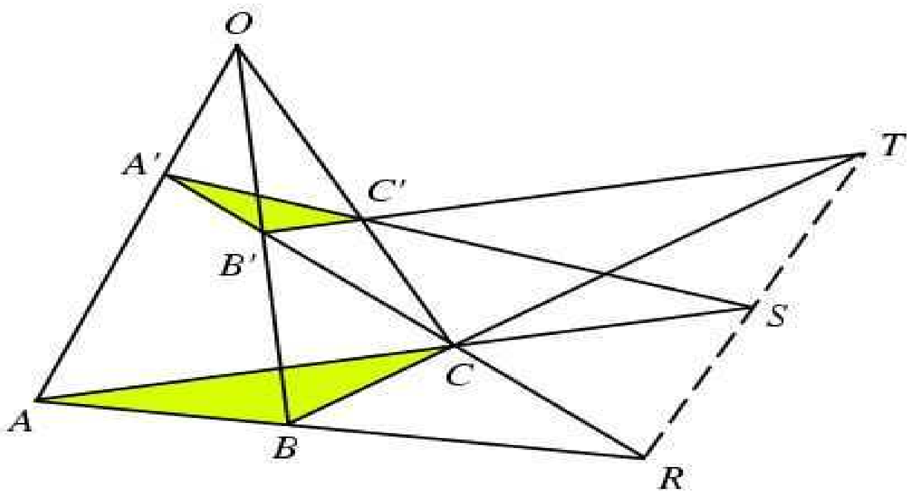
Blaise Pascal ve Philippe dela Hire, Desargues'ın izdüşüm geometrisinde kullandığı yöntemleri kullanmaya devam eden isimler arasındadır. Ayrıca bu yöntemler, XVIII. yüzyılda

---

[81] Tabak, **op. cit.,** p. 69.
[82] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 331.
[83] Kitabın orijinal adı: *Brouillon projet d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan* (Paris, 1639).
[84] Tabak, **op. cit.,** pp. 69, 70.

analitik yöntemlere başarı getirmiş ve XIX. yüzyılın başlarında Monge ve öğrencisi Poncelet'in de etkisiyle izdüşüm geometrisine önemli katkı sağlamıştır.[85] Bu katkılardan birisi Desargues'in ilk olarak 1648'de yayımlanan teoremidir. Desargues'in bu teoremi, XIX. yüzyılda yeniden oluşturulan izdüşüm geometrisinin temellerinden biri olmuştur.

Hem iki hem de üç boyutlular için geçerli olan Desargues'in teoremi şöyledir: "İki üçgen, birbirinin benzer açılarının uzatılan kenarları kesişecek şekilde konumlandırılırsa, karşılık gelen kenar çiftlerinin kesişim noktaları doğrudaş olur. Tersi de doğrudur."[86] Görsel anlatımı için Şekil 5'e bakınız.



Şekil 5[87]

İzdüşüm geometrisinin kökeni matematik veya bilime dayanmayıp sanata dayandığı için bütün geometri çeşitleri içinde eşsiz bir yere sahiptir ve Öklidyen geometrinin özelliklerini taşımamaktadır. John Tabak, izdüşüm geometrisini ilk Öklidyen olmayan geometri olarak kabul etmektedir. Fakat Tabak dışındaki bir çok geometrici, XIX. yüzyılda oluşturulan Öklidyen olmayan geometrilerden (hiperbolik, eliptik gibi) önce yapılan çalışmaları, Öklidyen geometriye tam anlamıyla alternatif birer sistem olarak ortaya çıkmadıkları düşüncesiyle Öklidyen olmayan geometriye bir örnek olarak kabul etmemişlerdir.

---

[85] Torretti, **op. cit.,** p.111.
[86] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 332.
[87] (Çevrimiçi) http://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/d/d133.htm, 30 Mayıs 2015.

1.5. Aydınlanma Dönemi

Rönesans Dönemi ile birlikte düşünce Ortaçağ Dönemi'ndeki otoriteden kurtulmuş ve akıl ile deneyim ön plana çıkmıştır. XVII. yüzyılda ise Rönesans Dönemi'ndeki gelişmeler sistemli hale getirilmiştir. Rasyonalizm görüşünün öne çıktığı bu yüzyılda aydınlanma felsefesinin düşünsel temelleri hazırlanmıştır. XVIII. yüzyılda ise rasyonalizm ve empirizmin güçlenmesi ile meydana gelen teorik sorunlar yeni bir takım sentezlerle aşılmaya çalışılmıştır. Bu dönemde yapılan felsefi tartışmalar, Öklidyen olmayan bir geometri çeşidi olan görünenlerin geometrisinin ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır.

XVI. ve XVII. yüzyıllarda astronomide meydana gelen değişimler Öklidyen geometriyi önemli hale getirmiştir. XVII. yüzyılda Descartes uzayı sonsuz, genişlemesini limitsiz olarak tanımlamış; Isaac Newton, uzaydaki fiziksel nesnelerin doğası için geometriye başvurmuştur. Fiziksel uzay, Öklid uzayı olarak tanımlandığı için paralel postulatın ispatı hala önem taşımaktadır. Paralel postulat yerine farklı alternatifler sunma, önceki yüzyıllarda olduğu gibi devam etmiştir. XVII. yüzyılda Pietro Antonio Cataldi, XVIII. yüzyılda John Playfair ve yine aynı yüzyılın sonlarına gelindiğinde Farkas Bolyai gibi isimler paralel postulatı ispatlamaya çalışanlar arasındadır. Fakat birçoğunun çalışması önceki dönemlerde elde edilen sonuçlardan farklı bir sonuç getirmemiştir.

Paralel postulat ispat çalışmalarında farklı sonuç elde eden ve Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum süresinde etkisi olan isimler Saccheri ve Lambert'dir. Onlar paralel postulatı ispatlamaya çalışırken Öklidyen olmayan sonuçlar elde etmişler, fakat Öklidyen geometriye tam anlamıyla alternatif bir sistem oluşturamamışlardır.

Bu dönemde ayrıca XVII. yüzyılın ikinci yarısı Wallis'in katkısıyla, Öklid'in paralel postulat ispatının gereksizliği ilk defa ortaya atılmıştır. Paralel postulat ispat çalışmalarından bağımsız olarak ise Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecinde Reid'in çalışmaları ve Kant'ın bilgi kuramı etkili olmuştur.

1.5.1. John Wallis (1616-1703)

1651'de Wallis, Oxford'da verdiği derste Nassiruddin'in paralel postulat üzerine ispatını göstermiştir. Wallis, derslerinde herhangi bir ispatın gereksizliğinden bahsetse de o dönemin paralel postulatı ispatlama ihtiyacından dolayı kendi ispatının öncekilerden daha iyi olacağını umarak 1663'de ispatını ortaya koymuştur.[88] Antik Yunan'dan süregelen, paralel postulat yerine onu farklı şekillerde ifade eden postulatlarla yer değiştirmesi geleneğine Wallis de katılmıştır. Paralel postulatın ispatlanamayacağını, fakat onun yerine ispatlanabilecek başka bir şeyin kabul edilmesi gerektiğini iddia etmiştir. Sekiz önerme üzerine kurduğu sistemde, ilk yedisini her zamanki yöntemlerle ispatlamıştır. Sekizinci önermesinde ispatlama yapmayıp, sadece açıklık getirmiş ve ortaya koyduğu 'her şeklin keyfi büyüklükte benzer şekli vardır' önermesinin ispatlanabileceğini düşünmüştür.[89]

Wallis'in iki bin yıl boyunca Öklid'in paralel postulatını ispatlamaya çalışıp, başaramayanlardan bir farkı yoktur. Onun farkı ispatın gereksizliği hakkındaki düşüncesi ve paralel postulata eş değerde bir postulat ele almamasından gelmektedir. Böylece paralel postulatla ilgili ilk kuşkular filizlenmiştir.

1.5.2. Gerolamo Saccheri (1667-1733)

Felsefe, matematik ve teolojiyle ilgilenen İtalyan skolastik filozof Saccheri, XVIII. yüzyıldaki bir çok geometrici gibi paralel postulatın Öklid'in ilk dört postulatından çıkarılabileceğini düşünmektedir.[90] O, paralel postulatı ispatlamak için ilk dört postulatı kullanarak, bu postulatın diğerlerinden bağımsız olmadığını göstermek istemiştir.[91] Bu yöntem, paralel postulatın bir teorem olduğu düşüncesiyle yüzyıllardır Yunanlılar ve Araplar tarafından uygulanmıştır. Saccheri, paralel postulatı ispatlamak istediği için bu alanda önceden yapılan çalışmaları araştırmıştır.

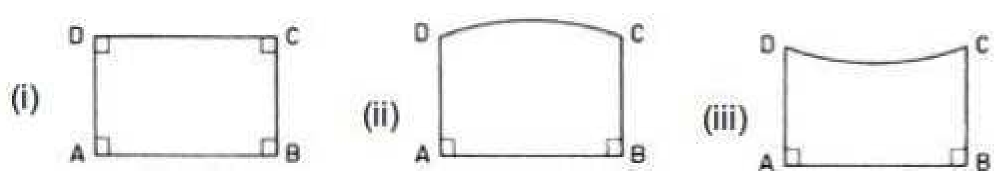
---

[88] Wolfe, **op. cit.,** p. 29.
[89] Torretti, **op. cit.,** p. 44.
[90] Stahl, **op. cit.,** p. 212.
[91] Barker, **a.g.e.**, s. 61.

Saccheri, öncelikle John Wallis'in 'her şeklin keyfi büyüklükte benzer şekli vardır' önermesinden yola çıkmıştır. Benzer üçgenlerin olasılığını inceleyen Saccheri, benzer üçgenlerin varlığının da ispatlanmaya ihtiyacı olduğunu fark edince Wallis'in yolundan vazgeçmiştir. Nassiruddin ve Wallis'in ispatlarını eleştirdikten sonra Saccheri, çözümü eski matematik ispat yollarına bakarak bulmaya çalışmış ve 'olmayana ergi'[92] yöntemini kullanmaya karar vermiştir.[93] Bu yöntemle paralel postulatın, diğerlerinden bağımsız olduğunu iddia edip bu iddiasının çelişkiye yol açtığını gösterirse, bu durumda iddiasının yanlış olduğunu göstermiş olacaktır. Diğer bir deyişle, Saccheri ilk dört postulatı doğru kabul edip, paralel postulatın yanlışlanabilirliğini sorgulamıştır.

Saccheri bu yöntemi, Ömer Hayyam'ın paralel postulatı ispatlamaya çalışırken kullandığı dörtgene uygulamıştır. Saccheri bir ABCD dörtgeni almış, [AB] tabanından tabana dik olacak şekilde köşe noktalardan [AD] ve [BC] gibi iki doğru çizmiş ve oluşan ∠(ADC) ve ∠(BCD) açılarını incelemiştir. Aşağıdaki Şekil 6'da da görüldüğü üzere böyle bir dörtgende tepe açılarına göre üç farklı hipotez ortaya çıkmaktadır:

i. ∠(ADC) ve ∠(BCD) tepe açıları dik açılardır.
ii. ∠(ADC) ve ∠(BCD) tepe açıları geniş açılardır.
iii. ∠(ADC) ve ∠(BCD) tepe açıları dar açılardır.



Şekil 6[94]

O dönemde uzayın daima aynı olduğu varsayıldığı, yani bir zamanda ve mekandaki geometri şekilleri doğruysa, her yerde ve her zamandaki geometri şekillerinin doğru olacağı düşünüldüğü için Saccheri, bu üç hipotezden yalnızca birinin doğru olduğunu kabul etmiştir. Bu

[92] 'reductio ad absurdum' adı verilen dolaylı uslamlama yöntemi
[93] Wolfe, **op. cit.,** p. 31.
[94] Torretti, **op. cit.,** p. 45.

sebeple Saccheri, Öklid'in paralel postulatını ispatlamak için i. hipotezin doğru olduğunu göstermesi gerektiğini düşünmüştür.

Saccheri, ortaya koyduğu postulatlara dayanarak ii. hipotez için 'doğrunun istenilen uzunluğa uzatılabileceği' postulatıyla çelişki içinde olduğundan dolayı bu hipotezin yanlış olduğunu belirtmiştir. Fakat iii. hipotezin çeliştiği herhangi bir postulat bulamamıştır ve mantıksal olarak uyumlu olduğunu görmüştür. Dolayısıyla Saccheri, iii. hipotezin yanlış olduğunu gösterememiş ve Öklid'in paralel postulatının ispatını yapamamıştır. iii. hipotezinden Öklidyen geometrinin teoremlerine paralel, buna rağmen ona benzemeyen sonuçlar elde eden Saccheri, tamamen yeni tip bir geometrinin birçok temel teoremini ispatlamıştır.[95]

Saccheri iii. hipotezinden ürettiği yeni tip geometrisine 'Evrensel Geometri' adını vermiştir. Evrensel Geometri'de paralel doğrular düz olmak zorunda değildir ve böylece o, bu yeni geometri çeşidiyle Öklidyen geometri özellikleri taşımayan bulgular elde etmiştir. Saccheri, bu yeni çeşit geometri hakkında yetmiş sayfa yazdıktan sonra bunun yanlış olduğunu bildirmiştir. Birçok araştırmacı Saccheri'nin bu davranışı için döneminin inancı olan Öklidyen geometrinin tek geometri olduğu inancından etkilendiğini düşünmektedir. Böylece Öklidyen geometriye dönüş yapan Saccheri, 1733'de *Elementler*'i *Bütün Kusurlarından Arındırılmış Öklid* [96] başlığıyla yayımlamıştır.[97]

Göttingen Üniversitesi'nden Abraham Kastner, paralel postulat hakkında uzun süre bilgi toplamış ve paralel postulatın ispatlanamayabileceğinden şüphelenmeye başlamıştır. Öğrencisi Georg Simon Klügel, 1763'de "Temel Paralel Teori İspatı Girişimleri Üzerine İnceleme"[98] başlıklı doktora tezinde paralel postulatın en iyi ispat çalışmalarının araştırmasını yapmıştır. Bu çalışmasında paralel postulatın yapılan ispatlarını detaylı bir şekilde gösteren Klügel, Saccheri'nin çalışmasını da incelemiştir. Klügel, Saccheri'nin çalışmasının diğer incelediği otuz ispattan daha ikna edici olmadığını belirtmiştir.[99] Klügel, paralel postulatın ispatlanamayabileceği

[95] Barker, **a.g.e.**, s. 62, 63, 64.
[96] Latince orijinal başlığı: "*Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia*"
[97] Leonard M. Blumenthal, **A Modern View of Geometry,** New York, Dover Publications Inc., 1980, p. 9.
[98] Doktora tezinin orijinal adı: "Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio"
[99] Torretti, **op. cit.,** p. 48.

konusundaki düşüncelerini bu yazısında belirterek, bu konudaki şüpheyi ilk yayımlayan olmuştur.

1.5.3. Thomas Reid (1710-1796)

Klügel gibi XVIII. yüzyılın bazı geometricilerinde ve filozoflarında paralel postulatın ispatlanamayabileceği düşüncesi filizlenmiştir. XVIII. yüzyılda ortaya çıkan tartışmalardan anlaşılan, bu düşüncenin ortaya çıkmasıyla geometrinin nesnelerinin doğası hakkında sorgulamaların başladığıdır. Bu sorgulamalarda farklı yaklaşımlara sahip düşünürler arasından Reid'in çalışması, Öklidyen olmayan bir geometri yapısına sahiptir.

1763'de Klügel, doğru ve eğrilerle ilgili 'onları çıkarımlarla ya da kavramlarla bilmiyoruz, tecrübelerimizle ve gözümüzün hükmüyle biliyoruz' diyerek kendi gözlemini dile getirmiştir.[100] 1764'de ise Reid gözün geometri üzerindeki hükmünü inceleyerek, Öklidyen kurallara uymayan 'görünenlerin geometrisi'ni keşfetmiştir. Reid'in çalışmaları Berkeley'in görsel uzay hakkındaki idealist yaklaşımına karşı, realizmi savunmuştur. Berkeley, 'yeni görme teorisi'nde geometrinin nesnelerinin sadece maddi uzay olduğunu iddia etmiştir. Reid, görünenlerin bir matematik bir çalışmasının nesnesi olabileceği tartışmasında, Berkeley ve Hume'un 'kavram oluşumu' teorilerinin karşısında durmuştur.[101]

Reid'in görünenleri bir matematik çalışmasının nesneleriymiş gibi ele almasının nedeni, onun 'ideal zihin sistemi' olarak adlandırdığı, Berkeley ve Hume'un zihin teorilerine karşı yaptığı eleştiriden gelmektedir. Reid'e göre, ideal sistem kuşkuculuğa götürür ve bu yüzden temelde yanlış olmalıdır. Reid, şekil ve uzam içeriğinin nasıl geliştirildiğini açıklamaya çalışmıştır. O, empirik içeriğin oluşumunda algıların merkezde olduğu 'ideal sistem' tezine karşı çıkmaktadır. Reid algıların, şekil ve uzam ele alındığında tam bir açıklama yapamadığı sonucuna varmıştır. Reid'e göre görsel algı, görsel şekil içeriğine sahip olmak için gerekli bir koşul değildir. Görme

---

[100] Klügel (1763), p. 16; quoted in Torretti, **op. cit.,** p. 48.
[101] Norman Daniels, "Thomas Reid's Discovery of a Non-Euclidean Geometry", **Philosophy of Science**, Vol.XXXIX, No:2, The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association, Jun., 1972, pp. 219-234, p. 219.

engelli bir kişi, iki boyutlu görsel uzayın metriğini anlayabilmekte, uygulayabilmekte ve görsel algısı olmaksızın görsel şekilleri birbirinden ayırt edebilmektedir.[102]

Reid görsel uzayı yapılandırmada kullandığı tekniklerini, XVII. ve XVIII. yüzyılın görme alanındaki teorileri üzerine inşa etmiştir. Reid'in yapısındaki bazı temel, teknik fikirler daha önce Malebranche'nin 1694'de yazdığı *Search After Truth* adlı yapıtında uzaklık ayrımı tartışmalarında bulunmaktadır. Malebranche, uzaklıkla ilgili yapılan hatalı yargıların bir şemasını sunmuştur. Malebranche bu şemasında, yapılan hatalı yargıların gözün noktalar arası uzaklığı ayırt edemediğinden kaynaklandığını göstermeye çalışmıştır. Benzer şekilde 1692'de Molyneaux da 'uzunluğun sonu bize doğru sunulduğunda sadece nokta görürüz; uzunluğun kendisinin farkına varılmaz' diyerek gözün uzunlukla ilgili üç boyutlu bir algısı olmadığını belirtmiştir. Malebranche'in şemaları ve Molyneaux'un çalışmalarından yola çıkarak Reid, görsel uzayı iki boyutlu ele almıştır. Molyneaux ve Malebranche görsel uzayı bir geometri sistemi içinde ele almamışlardır.[103] Fakat Reid, Molyneaux ve Malebranche'un çalışmalarını geometrik bir şekilde yorumlayarak görünenlerin geometrisini oluşturmuştur.

Reid yapısını oluştururken, iki boyutlu görünen uzay ve nesne grubunu belirlemek için uzaklık ayrımı yapamayan ideal gözü kullanmıştır. Reid'in yapısındaki bu gözün özellikleri:

- "Tek göz kullanılmakta ve böylece tek gözlü görsel uzay inşa edilmektedir.
- Göz herhangi bir derinlik ayrımı yapamamaktadır.
- Gözü çevreleyen küre istenildiği ölçüde büyük olabilmektedir.
- Herhangi bir yöne işaret edildiğinde göz normal görüş alanını muhafaza etmektedir.
- Göz, 360^0 dönebilmekte, fakat dönüştürememektedir."[104]

Standart bir görmeyle 'gözden eşit uzaklıktaki bütün görünen noktaların yüzeyleri eğridir' yargısı çıkarılabilmektedir. Reid bu yargının, üç boyutta ayrım içerebileceğini ve görsel yüzeylerin ne eğri ne de düzlem oldukları sonucunu çıkarmıştır.[105] Öklid'in *Elementler'*de önce tanımları ve postulatları daha sonra teoremleri sunduğu gibi Reid de kendi 'görünenlerin geometrisi'ni benzer adımlarda göstermiştir. Bu adımlar dört aşamada özetlenmiştir.

[102] **Ibid.,** p. 232.
[103] **Ibid.,** p. 231.
[104] **Ibid.,** p. 221.
[105] **Ibid.,** p. 223.

1. "Nokta, doğru ve açı gibi temel kavramların standart tanımlarını sunmuştur.
2. İşlevsel olarak tanımlanan görünün bir uzayı vermek için özel niteliklerle idealleştirilmiş bir göz ile birlikte, üç temel kavram kullanılmıştır. Böylece daha sonraki teoremleri için işlevsel bir model belirlemiştir.
3. Bu görünen uzayın, bu uzayı kapsayan keyfi bir küre tarafından 'gösterildiğini' iddia etmiştir. (Bu adım ispatın sürekliliği ile ilişkilidir.)
4. Küresel geometriden uyarlanmış, bazı temel geometri teoremleri önermiştir."[106]

Reid'in dördüncü adımındaki Öklidyen olmayan varsayımlar, ikinci adımda istenilen deney göz önüne alındığında oluşturulan uzay için doğrudur. İkinci adım özel geometri nesneleri kümesinin nasıl seçileceğini söyleyerek, temel geometri temel terimlerinin nasıl yorumlanacağını göstermektedir. Yani ikinci adım, görünenlerin geometrisinin teoremleri için işlevsel olarak özelleşmiş bir model sunmaktadır (Biz buna, görünenleri gözden gelen deneyimle inşa ettiğimizden dolayı, deneysel/tutarlılık ispatı diyebiliriz). Üçüncü adım görünenlerin Öklidyen olmayan geometri için doğal bir Öklidyen model vererek, ispatın göreceli tutarlılığını ortaya koymaktadır.[107]

Reid, kendisinden önce neden kimsenin görünenlerin geometrisini keşfetmediğini kendi zihin teorisine göre açıklamaktadır. Ona göre görsel şekillere dikkat edilmemektedir ve onlara maddi şekillerin bir simgesi gibi davranılmaktadır. Reid, geometricilerin hesaplamalarında ya da ölçümlerinde hata yapmamasını ise aşağıda verilen üç argümanına bağlamaktadır.[108]

1. "Küresel yüzeyin küçük bir parçası, düz bir yüzeyden hissedilir derecede farklı değildir.
2. İnsan gözü öyle şekillenmiştir ki tek bir açıdan ayrık bir şekilde görülen bir nesne görünen uzayın sadece küçük bir kısmını kaplayabilir.
3. Düzlem şekillerine eğik olacak şekilde tek bir açıdan bakıldığında, göze sunulan görünen şekillerden biraz farklıdır. Bundan dolayı, bir açıdan görünen düz şekiller, düzlükleri göze eğik değil, doğrudan göründüğünde, göze sundukları görünen şekillerden az farklılaşır."[109]

[106] **Ibid.,** p. 220.
[107] **Ibid**., p. 221.
[108] **Ibid.,** p. 294.
[109] **Ibid.,** pp. 294, 295.

Reid hipotetik, özel bir uzay inşa etmek yerine, insanın görsel uzayını idealleştiren bir yapı oluşturmak istemiştir. Reid, görünenlerin geometrisi için Öklidyen uzaydaki eğrilerin küresel geometri uygulaması olarak yorumlanmasını kastetmiştir. Reid, kendi eliptik geometrisi için model teoremler ve kürenin yüzeyine doğal örnekler önermiştir. O dönemde küresel geometriler bilinmektedir ve Reid, Öklidyen geometrinin gerçek uzay için doğru olup olmadığını sorgulamadığı için Öklidyen geometriye tam anlamıyla bir alternatif sunmamıştır.[110] Fakat görünenlerin geometrisi yapısı gereği Öklidyen olmayan bir geometri yapısı sergilemektedir. Dolayısıyla bu geometri, Öklidyen olmayan geometrilerin öncü çalışmalarından kabul edilmektedir.

Tek noktadan bakan gözü kullanan görünenlerin geometrisi, bu yönüyle Rönesans Dönemi perspektif ve izdüşüm geometrisi çalışmalarına benzerlik göstermektedir. Bu çalışmaların hiçbiri Öklidyen yapıda değildir. Perspektif ve izdüşüm geometrisinin kökeninin geometri yerine sanat olması ve Reid'in geometri uzmanı olmayıp bilişsel psikolog olması, Öklidyen olmayan geometrilerin gelişim sürecinde geometri dışındaki alanların etkisini ortaya koyan örneklerdendir.

Reid için her iki geometri de, fiziki veya görünen uzayın özel bir yorumuna a priori olarak ya da 'bizim oluşturmamız sonucu' bağlı olduklarından doğrudurlar. Reid, iki eş değerde, kendi içinde çelişkisi bulunmayan geometri sistemlerini (Öklidyen ve görünenlerin geometrisi), fiziksel uzayı Öklidyen kabul ettiği için, deneye tabi tutmamıştır. Bu a priori inancından dolayı fiziksel uzayın geometrisini sorguladığı düşünülmektedir.[111]

1.5.4. Immanuel Kant (1724–1804)

XIX. yüzyılın Öklidyen olmayan geometri sistemi kurucularından Lobachevski, Kant'ın isminden ya da fikirlerinden bahsetmemiş olmasına rağmen Vvedensky, Lobachevski'nin geometri kökenlerinin Kant'ın düşüncelerine bağlı olduğunu düşünmektedir. Diğer bir deyişle,

[110] Daniels, **op. cit.,** pp. 220, 230.
[111] **Ibid.,** pp. 232, 233.

Kant'ın bilgi kuramının Lobachevski'nin geometrisi için bir ön koşul olduğunu düşünmektedir.[112] Kant'ın görüşleri genel olarak, XIX. yüzyıl geometricilerini ve filozoflarını etkilemiştir. Birçok düşünür Öklidyen olmayan geometrilerin Kant'ın görüşleriyle, uzayın doğası içinde çelişkili olup olmadığını tartışmışlardır. Bu tartışma Helmholtz'a kadar uzanmaktadır ve Reichenbach gibi bazı bilim felsefecileri tarafından tekrar ele alınmıştır. 1870'de Helmholtz bir yazısında, geometri postulatlarının deney konusu olabildiklerinden, sentetik a priori yargılar olmadıklarını iddia etmektedir. Diğer bir deyişle, Helmholtz geometri postulatlarının doğrulanabilmesi olasılığını, onların a priori olmadığının, empirik olduğunun bir kanıtı olarak sunmuştur.[113]

Öklid yapılandırdığı geometriyi deneysel bir bilim olarak oluşturmamıştır. Geometrinin kısmen deneysel bir bilim olması ne Öklid'in ne de Kant'ın düşüncelerinde bulunmaktadır. Dolayısıyla Kant'ın, teorik (saf) ve uygulamalı geometri arasındaki ayrımı yapmama hatasına düştüğü sanılmaktadır. Teorik geometri, aksiyom ve postulatlarla oluşturulan sistemde, bu postulatlar arasındaki mantıksal veya biçimsel ilişkilerin incelenmesidir. Öyle ki teorik geometri a priori ve kesindir, fakat herhangi bir tecrübe ya da uzamsal görüye başvurmamaktadır. Diğer yandan uygulamalı geometri, fiziksel dünyanın yorumu altında bu aksiyomatik sisteminin doğruluğuyla ya da yanlışlığıyla ilgilenmektedir.[114] James Hopkins'e göre Kant'ın bu ayrımı yapmamasındaki neden, fiziksel uzayın geometrisi ile fenomenler uzayının geometrisinin birebir olduğunu düşünmesinden gelmektedir.[115]

Kant, 1781'de *Saf Aklın Eleştirisi*'ni[116] ve 1788'de *Pratik Aklın Eleştirisi*'ni[117] yayımlamıştır. O, uzayın doğasını açıklayarak geometrinin neden a priori olduğunu göstermeye çalışmıştır ve uzayın sezginin saf bir formu olduğunu tartışmıştır. Kant'ın teorisine göre geometri şekilleri uzayda yapılardır ve algı deneyimlerimizden bağımsız saf sezgiler olarak yapılandırılabilirler. Bu teori, geometrinin evrensel ve gerekli doğruluğun bilimi olarak

---

112 Catherine Evtuhov, "An Unexpected Source of Russian Neo-Kantianism: Alexander Vvedensky and Lobachevsky's Geometry, Studies in East European Thought", **Neo-Kantianism in Russian Thought,** Vol.XLVII, No:3/4, Springer, Dec., 1995, pp. 245-258, pp. 246, 252.

113 Shahen Hacyan, **Geometry as an Object of Experience: Kant and the Missed Debate between Poincare and Einstein**, February 2, 2008, pp. 2,3.

114 Michael Friedman, "Kant's Theory of Geometry", **The Philosophical Review**, Vol.XCIV, No:4, Duke University Press on behalf of Philosophical Review Stable, Oct., 1985, pp. 455-506, p. 455.

115 James Hopkins, "Visual Geometry", **The Philosophical Review**, Vol.LXXXII, No:1, Duke University Press on behalf of Philosophical Review, Jan., 1973, pp. 3-34, p. 12.

116 Kitabın orijinal adı: *Kritik der reinen Vernunft*

117 Kitabın orijinal adı: *Kritik der praktischen Vernunft*

açıklanması için yeni temeller sağlamıştır. Kant, uzayın kendiliğinden fiziksel bir gerçekliğe sahip olmadığını ve bu nedenle ona fiziksel özellikler yüklemenin anlamsız olduğunu belirtmiştir. O, çalışmalarında Newton'un Öklidyen geometri temelli fiziğinden birçok defa bahsetmiştir. Kant'a göre geometrinin postulatları Newton mekaniğinin en güçlü aletleridir.[118]

Kant'a göre geometri şekilleri, algısal tecrübeden bağımsız olarak saf sezgiyle yapılandırılabilirler. Kant'ın teorisi XIX. yüzyıl boyunca geometri felsefesine hakim olmuştur.[119] Bu hakimiyet Gauss gibi bazı geometricilerin Kant'ın Newton fiziği ve Öklidyen geometriyle kurulan hakimiyetine karşı Öklidyen olmayan geometriyle ilgili görüşlerini rahat paylaşamamalarına sebep olmuştur. Ancak, Kant ile Öklidyen olmayan geometriler arasında çelişki olmadığını düşünenler de bulunmaktadır.

Hacyan, XIX. yüzyılda oluşturulan Riemann geometrisinin sentetik a priori ilkelerden bağımsız olamayacağını, çünkü Öklidyen geometriden alınan uzunluk gibi içeriklere bağlı olduğunu iddia etmektedir. Diğer bir deyişle, Öklidyen geometrinin, Riemann geometrisi gibi daha genel geometrilerin olanağı için ön koşul olduğunu belirtmektedir. Dolayısıyla, soyut uzayları meydana getirme olasılığı Kant'ın tezini çürütmemekte tersine güçlendirmektedir.[120] Bu görüşe göre, Öklidyen olmayan geometriler ile Kant ya da Öklid arasında gerçek bir çelişki bulunmamaktadır.[121]

1.5.5. Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)

Lambert paralel postulatı ile ilgili şu görüşü dile getirmiştir: "Paralel postulatla ilgili zorluktan ne kurtulundu (paralel doğru tanımının değiştirilmesi yoluyla) ne de kaçınıldı, ne de zeki bir şekilde ele alındı. Her şey yolunda olsa bile, zorluk postulatlardan yeri değiştirilerek

---

[118] Hacyan, **op. cit.,** pp. 3,4.

[119] V. F. Lenzen, "Physical Geometry", **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLV, No:6, Mathematical Association of America, Jun. - Jul., 1939, pp. 324-334, p. 326.

[120] Hacyan, **op. cit.,** p. 4.

[121] Philip Chapin Jones, "Kant, Euclid, and the Non-Euclideans", **Philosophy of Science**, Vol.XIII, No:2, The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association, Apr., 1946, pp. 137-143, p.143.

tanımlara alındı. Gördüğüm kadarıyla, bu durum olmazsa zorluktan kurtulunması daha kolay olabilirdi."[122]

Daha önce de bahsedildiği üzere Georg Simon Klügel, paralel postulatı ispatlamaya çalışanların önemli kısmını tezinde belirtmiş ve 1763'deki bir yazısında paralel postulatı ispatlama olasılığı hakkında bazı kuşkularının olduğunu dile getirmiştir. Lambert, Klügel'in bu yazısından etkilenerek yola çıkmıştır.[123] Lambert, Saccheri gibi paralel postulatının yanlışlanabilirliğinin mümkün olup olmadığı kendisine sorarak başlamış ve böylece Öklidyen olmayan geometriye ilişkin bazı sonuçlar elde etmiştir.

1766'da Lambert "Die Theorie der Parallellinien'' başlıklı bir yazı yazmış, bu yazısı 1786'da ölümünden sonra yayımlanmıştır. Lambert, Saccheri ile aynı soruyu sormuş olsa da Saccheri dörtgeni ile işlem yapmamıştır. O, sonradan 'Lambert dörtgeni' olarak anılacak olan İbnü'l Heysem'in paralel postulatı ispatlamaya çalışırken kullandığı dörtgeni kullanarak işlem yapmıştır. Bu dörtgende üç dik açı alarak işleme başlamış ve böylece dördüncü açı için geniş, dik ya da dar olma durumlarına göre üç olasılık oluşturmuştur. Dördüncü açının geniş açılı olduğu durum küresel geometrideki klasik teoreme benzemektedir. Teorem şöyledir: bir üçgenin alanı onun küresel fazlalığı ile orantılıdır. Dar açılı olduğu durumda ise sanal yarıçaplı küresel, yeni bir yüzeyin oluşacağını tahmin etmiştir.[124]

Böyle bir sanal yarıçaplı küresel yüzeyin varlığı, yaklaşık yüz yıl sonra, 1868'de Beltrami tarafından gösterilmiştir. Böylece Lambert'in tahmini doğrulanmıştır. Sanal olmayıp gerçek bir yüzey olan ve sürekli negatif eğriliğe sahip bu küreye 'aykırı küre'[125] adı verilmiştir.[126]

Lambert Öklidyen olmayan geometri sistemi kurmamış, fakat fikir olarak çok yaklaşmıştır. O, paralel postulatı olmadan oluşacak geometrilerin ne gibi özellikleri olabileceğini ortaya koymuştur.[127]

---

122 Bardi, **op. cit.**, p. 108.
123 Wolfe, **op. cit.,** p. 33.
124 Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 421.
125 'pseudosphere'
126 **Ibid.,** p. 421.
127 E. Miller, "The Non-Euclidean Geometry", **Transactions of the Kansas Academy of Science**, Vol.XIX, Kansas Academy of Science, 1903 - 1904, pp. 374- 378, p.375.

2. BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ SİSTEMLERİNİN ÜRETİLMESİ

Paralel postulatın tarihsel gelişiminde XIX. yüzyıla kadar geometricilerin Öklid'in paralel postulatını ispat çalışmaları (tanım ya da postulatın değiştirilmesiyle eş değer ifadeler koyma yöntemi, paralel postulatı bağımsız varsayıp ilk dörtten çıkarılması yöntemi gibi), önceki bölümlerde sunulmuştur. Paralel postulatı bağımsız varsayıp ilk dört postulattan ayrı tutmaya çalışanlar, Saccheri gibi, Öklidyen olmayan geometriyi keşfetmeye ve bir sistem olarak kurmaya en yakın geometricilerdir. Ancak Öklidyen olmayan geometrilerin bir sistem olarak kurulabilmesi için paralel postulat yerine tamamen farklı bir postulat konduğunda yeni ve farklı bir geometri sisteminin de mantıksal olarak tutarlı olabileceği görüşü gereklidir. Bu görüş ise, Öklidyen geometrinin tek doğru geometri olmadığı düşüncesiyle beraber XIX. yüzyılda ortaya çıkmıştır.

Önceki dönemde üzerinde durulan Saccheri ve Reid gibi isimler, Öklidyen olmayan geometrilere dair eserler üretmiş olmalarına rağmen, Öklidyen geometriden bağımsız olarak bilinçli bir sistem kuramadıkları için Öklidyen olmayan geometrilerin kurucuları arasına alınmamışlardır. XIX. yüzyılın ilk yarısında dünyanın farklı bölgelerinde, birbirlerinin yaptığı çalışmalardan kısmen habersiz olan farklı geometriciler, Öklidyen geometriye tam anlamıyla alternatif, farklı ve yeni bir tip geometri geliştirmişlerdir. Aralarında Gauss, Lobachevski ve Bolyai gibi isimlerin bulunduğu Öklidyen olmayan geometrilerin bu kurucularının çalışmaları, Öklidyen olmayan geometrinin üç dönemlik gelişiminin, ilk dönemini oluşturmaktadır.

Kant'ın uzayın Öklidyen yapıda olduğunu ima ettiği bilgi kuramının bu dönem üzerindeki etkisine rağmen Öklidyen olmayan geometri kurucuları, Öklidyen geometriden bağımsız olarak kendi sistemlerini kurmuş, o dönemin teknolojisinin izin verdiği ölçüde fiziksel uzayın geometrisini test etmeye çalışmışlardır.

2.1. Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Alman kökenli matematikçi Gauss, Öklid geometrisinden farklı bir geometrinin mantıksal olarak tutarlı olabileceğini kavrayan ilk kişiler arasındadır ve 'Öklidyen olmayan geometri' teriminin isim babasıdır. Öncelikle 'Öklidyen karşıtı' (anti-Euclidean) daha sonra 'astral' olarak isimlendirse de en sonunda Öklidyen olmayan (non-Euclidean) terimini kullanmıştır.[1]

Gauss'un Öklidyen olmayan geometri ya da paralel postulat üzerine yayımı olmamasına rağmen arkadaşlarına, öğrencilerine yazdığı mektuplardan düşünceleri bilinmektedir. Örneğin, 1816'da öğrencisi Christian Gerling'e yazdığı mektuptan, Gauss'un Öklidyen olmayan geometriyi bildiği anlaşılmaktadır. Gauss'un iki bin yıllık Öklidyen gelenek ile Kant'ın etkisini sarsmaktan çekindiği için yayım yapmadığı düşünülmektedir. Mektuplarında, bunu yaparsa kulaklarının etrafında uçuşacak yaban arılarından ve eğer sırları tutulmazsa Boethius'un çığlıklarını duyacağından söz etmektedir.[2]

Gauss'un üniversite öğrencisi olduğu dönemde Kant, 1781'de *Saf Aklın Eleştirisi*'ni ve 1788'de *Pratik Aklın Eleştirisi*'ni yayımlamıştır. Kant, *Saf Aklın Eleştirisi*'nde evrenin Öklidyen olduğunu ima etmiştir. Avrupa ve Almanya'da entellektüel çevrede etkili olan Kant'ın bu kitabını Gauss beş defa okumuştur. Fakat Gauss, uzay kavramının a priori ve Öklidyen olduğunu ima eden Kantçı öğretinin geçerliliğinden kuşkulanmaktadır. Ona göre uzayın gerçek geometrisi, ancak deneyle bulunabilecek fiziksel bir olgudur.[3]

Gauss paralel postulatın ispatlanamamasıyla ilgili problemin farkında olup, bütün ispat çalışmalarının başarısız olacağını çünkü bu postulatın ispatlanamayacağını düşünmektedir. Hatta bu postulatın doğruluğu hakkında kuşkuludur. Böylece, paralel postulatı yok sayarak onsuz bir geometrinin nasıl olabileceğini düşünmüştür. Gauss, bu yeni Öklidyen olmayan geometrinin anlamlılığını ve geometrinin bir anlama ihtiyacı olup olmadığını sorgulamıştır ve

---

[1] Ladislav Kvasz, "History of Geometry and the Development of the form of Its Language", **Synthese**, Vol.CXVI, No:2, Springer, 1998, pp. 141-186, p. 147.

[2] Jason Socrates Bardi, **The Fifth Postulate: How Unraveling a Two- Thousand- Year- Old Mystery Unraveled the Universe**, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2009, p. 110.

[3] Struik Dirk J., **Kısa Matematik Tarihi**, Çev. Yıldız Silier, İstanbul, Doruk Yayımcılık, 2011, s. 205, 206.

şöyle demiştir: "Benim seçtiğim yol hepimizin aradığı sonuca ulaştırmıyor. Ben daha çok geometrinin doğruluğu hakkında kuşkular duyuyorum."[4]

Gauss'un arkadaşına yazdığı mektuplardan, Öklidyen geometriden daha fazla geometrilerin olabileceğini ilk kez 1792'de Collegium Carolinum'da öğrenciyken on beş yaşında farkına vardığı anlaşılmaktadır.[5] 1816'da öğrencisi Christian Gerling'e paralel postulatı reddetmede hiç bir gariplik olmadığını dile getirmiştir. 1817'de ise Gauss, öğrencisi Olbers'e "Geometrimizin zorunlu doğruluğunun ispatlanamaması kanaatine gittikçe daha çok varıyorum, en azından insan zihni tarafından, insan zihni için. Belki başka yaşamda uzayın doğası hakkında şu anda ulaşamadığımız farklı bir anlayışımız olur. O zamana kadar geometriyi saf a priori bir temele dayanan aritmetikle değil, mekanikle birlikte konumlandırmalıyız." diye yazmıştır.[6] Aynı yazıda Gauss, Wachter'ın geometrinin temelleri üzerine yayımladığı bölüm için kendinden öncekilerden daha ileri gittiğini, fakat ispatının diğerlerinden daha geçerli olmadığını dile getirmiştir. Bir sonraki bölümde sunulacak olan Schweikart'ın yayımladığı Astral geometri için ise gerçek Öklidyen olmayan geometrinin keşfi olduğunu ve bununla ölümsüz bir çağa girdiklerini belirtmiştir.[7]

1827'de Gauss, geometrinin temelleri üzerine çalışmaya başlamıştır. O, yüzeyi üç boyutlu uzayda göstermek yerine, herhangi iki yüzeyi üst üste bindirerek göstermiştir. Gauss, geometri ile geoit dünya arasındaki ilişkiyi gösteren ve şimdi Gauss Eğriliği olarak bilinen eğriliği ölçmek için çalışmıştır. *Eğri Yüzeyler Hakkında Genel Araştırmalar*[8] adlı kitabında eğrilik ölçümlerinin genel formülleri ve eğri yüzey teorilerini temellendirmiştir. Bir topun kesilmesiyle oluşan düzlemsel yüzey ve dünya haritasının çizilmesi örneklerinde olduğu gibi eğri bir yüzeyin eğriliğini ve boyutunu değiştirmeden, başka bir yüzeye taşınmasıyla ilgilenmiştir. 'Açıkorur dönüşüm' yöntemini kullanan Gauss, eğri yüzeylerin temel özelliklerini keşfetmiştir.

---

[4] Bardi, **op. cit**., p. 102.
[5] **Ibid.,** p. 19.
[6] Harold E. Wolfe, **Introduction to Non-Euclidean Geometry**, New York, The Dryden Press, Inc., 1945, p. 57.
[7] George Bruce Halsted, "Gauss and the Non-Euclidean Geometry by Carl Friedrich Gauss Werke", **Science**, New Series, Vol.XII, No:309, American Association for the Advancement of Science, Nov. 30, 1900, pp. 842-846, p. 845.
[8] Kitabın orijinal adı: *Disquisitiones Generales circa Superficies Curves*

Gauss on beş yaşında Öklidyen olmayan geometriler hakkında düşünmeye başlamış ve hayatı boyunca düşüncelerinin çoğunu yayımlamamıştır. Fakat o, 17 Mayıs 1831'de arkadaşı Heinrich Schumacher'e yazdığı mektupta Öklidyen olmayan geometriler hakkındaki düşüncelerinin kendisiyle beraber ölmemesi için onları yazmaya başladığını belirtmiştir.[9]

Bir üçgenin iç açılar toplamı, Öklidyen olmayan geometriler ile Öklidyen geometri arasındaki en belirgin ayrımlardan biridir. Öklidyen geometri için üçgenin iç açılar toplamının 180^0 olduğunu belirtmiştik. Öklidyen olmayan geometri üçgenlerinin iç açılar toplamı ise 180^0'den farklıdır. Daha sonra bu geometrilerin özelliklerinin ayrıntılarına değinilecektir. Gauss, iç açılar toplamının ölçülebilir bir farklılıkta olması için üçgeninin ne büyüklükte olması gerektiğini sorgulamıştır. Üç dağın tepesini (Almanya'da Inselberg, Brocken ve Hohenhagen dağları)[10] üçgenin köşe noktaları olarak seçmiş, ışığın doğrultularından üçgenin kenarlarını oluşturmuştur. Gauss, bu üçgenin açılarını ölçebilmek için hava bulutlu olsa bile çok uzun mesafelerde açıları ölçmeye yarayan 'heliotrope' adında bir alet tasarlamıştır. Heliotrope sayesinde büyük boyutlu üçgenler için deney yapma imkanı doğmuştur. Gauss, yaklaşık $\%\ 0.0002$ gibi bir hata payı ile iç açılar toplamını 180^0 bulmuştur. Gauss'un kullandığı bu üçgen, yıldızlar arasındaki bir üçgene kıyasla çok küçük bir üçgendir ve astronomik ölçekli bir üçgen henüz ölçülmemiştir. [11,12]

Gauss, fiziksel uzayın Öklidyen olmayan bir doğası olduğuna dair hiç bir sonuca varamamıştır. Ayrıca, jeodeziklerle ilgili yaptığı çalışmaları uzayın eğri olup olmadığıyla ilgili çalışmalara uygulamamıştır. O, uzayın Öklidyen olmayan yapısının araştırılmasından ziyade eğri yüzeyleri incelemiştir ve eğri yüzeylerle ilgili geometri teorileri üretmiştir.[13]

---

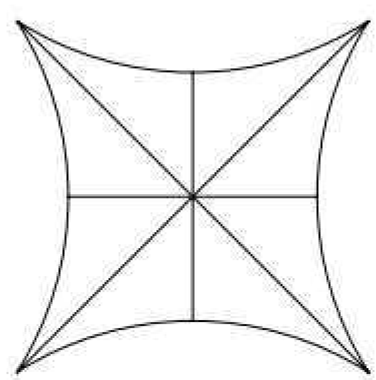
[9] Bardi, **op. cit.**, p. 161.
[10] **Ibid.,** p. 150.
[11] Mayme I. Logsdon, "Geometries", **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLV, No:9, Mathematical Association of America, Nov., 1938, pp. 573-583, p. 579.
[12] Bir çok bilim tarihi ve fizik metinlerinde Gauss'un üç dağ tepesi arasında yaptığı bu üçgen deneyinden bahsedildiği için bu deney tezin içeriğinde yer almıştır. Fakat Max Jammer'ın *Uzayın İçerikleri* adlı kitabında Gauss'un bilimsel yazılarında böyle bir deneyin bulunmadığını ve gerçek bir referansın olmadığını ortaya koyduğunu burada belirtmek gerekmektedir.
Arthur I. Miller, "The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space", **Isis**, Vol.LXIII, No:3, The University of Chicago Press on behalf of The History of Science Society, Sep., 1972, pp. 345-348, p. 345.
[13] **Ibid.**, p. 348.

2.2. Ferdinand Karl Schweikart (1780 - 1859)

Hukuk öğrencisi olan Schweikart, geometriyle de ilgilendiği için paralel postulat konusunda bilgili olan Hauff'un derslerine girmiştir. Geometriyle ilgili tek eseri, *Paralel Doğrular Teorisi ve Bunu Geometriden Çıkartma Önerileri*[14] paralel postulatı üzerinedir.[15] 1816'da Schweikart, 'astral geometri' olarak adlandırdığı bir geometri çeşidi ortaya koymuştur. Schweikart, yaklaşık yüz yıl önce ilk olarak Saccheri'nin kullandığı yaklaşıma benzer bir yaklaşım kullanmıştır. Paralel postulatın doğru olmadığını varsayarak, bunun geometri üzerindeki sonuçlarının neler olabileceğini incelemiştir. Paralelogramları kullanarak probleme yeni bir yaklaşım getirmiştir (dört yüzlü bir şekilde birbirine ters olan açıların eşitliği). Schweikart bu yaklaşımıyla Öklid geometrisinin, genel geometrinin sadece bir bölümü olduğunu fark etmiştir.

Schweikart'ın öne sürdüğü astral geometri şu üç özelliğe sahiptir:

1. Astral geometride üçgenin iç açılar toplamı 180^{0}'den küçüktür.
2. Astral geometride üçgenin alanı arttıkça iç açılarının ölçüsü azalır.
3. İkizkenar dik üçgenin yüksekliği, kenar uzunluklarının artırılmasıyla büyür, fakat asla belli bir uzunluğu aşamaz. Bu uzunluğa sabit denir (Sabit sonsuz büyüklükte alındığında ise sonuç Öklidyen Geometri olur.) Bundan dolayı kareler aşağıdaki formu alır.[16]



[14] Kitabın orijinal adı: *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ibrer Verbannung aus der Geometrie*
[15] Wolfe, **op. cit.**, p. 58.
[16] Jeremy Gray, **Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century**, London, Springer, 2011, pp. 93, 94.

Şekil 7: Schweikart'ın Karesi[17]

1., 2. ve 3. maddelerin ana hatlarını oluşturduğu astral geometri, Öklidyen olmayan bir geometri çeşididir. 1818'de Schweikart, Öklidyen ve astral geometri olmak üzere iki çeşit geometri olduğunu yazmıştır. Böylece Öklidyen geometri dışında, Öklidyen olmayan bir geometri tanımlanmıştır. Schweikart, 1812 ve 1816 yılları arasında astral geometriyi tanımladığı için Öklidyen olmayan geometri üzerine ilk yazan kişi olarak kabul edilmiştir.[18]

2.3. Friedrich Ludwig Wachter (1792-1817)

1809'da Göttingen'de Gauss'un öğrencisi olan Wachter, kendisinin 'Öklidyen karşıtı geometri' (anti-Euclidean geomety) dediği geometri çeşidi üzerine düşündükten sonra, 1817'de paralel postulatı ispatlama çalışmasını bir makalede yayımlamıştır. Bu makalede, paralel postulatı ispatlamak için 'uzayda bir düzlem üzerinde bulunmayan herhangi dört nokta ile küre oluşturulabilir' ifadesini ispatlamaya çalışmıştır. Bunun için öncelikle 'bir doğru üzerinde bulunmayan herhangi üç noktayla bir çember oluştuğu'nu ispatlaması gerekmektedir. İddiaları geçersiz olmasına rağmen sezgisel çıkarımlarını 1816'da Gauss'a yazdığı mektupta belirtmiştir. [19]

Bu mektupta küre yüzeyli bir geometri yapısından bahsetmiştir. Bu geometride küre büyüdükçe yüzeyi düzleşmekte ve teorik olarak yarıçap sonsuza gitmektedir. Eğer paralel postulatı yanlışsa, o zaman sonsuz yarıçaplı bir küre üzerinde geometri çalışması yapmak zorunlu olacaktır.[20] Ayrıca Wachter aynı mektupta Gauss'a, Öklid geometrisinin yanlış olsa da geometrinin aynı postulatlarla başlatılmak zorunda olduğunu yazmıştır. Birkaç ay sonra Gauss, Wachter'ın ispatının yanlış olduğunu belirterek mektubu cevaplamıştır.

Wachter'ın ispatı ile kendinden önceki geometriciler gibi başarısız olmasına rağmen bu alanda bir adım daha ilerlenmiştir; çünkü paralel postulatın yanlışlığında veya yokluğunda ne

---

[17] **Ibid.**, p. 94.
[18] Wolfe, **op. cit.**, p. 58.
[19] **Ibid.,** p. 57.
[20] Bu fikrin Wachter ya da Gauss ilk olarak kime ait olduğu tam olarak bilinmemektedir.
Gray, **op. cit.**, pp. 96, 97.

olabileceği sorgulanmıştır. Wacther ayrıca, sonradan Bolyai ve Lobachevski tarafından onaylanan, Öklid'in postulatı yanlışlandığında bile, kürenin yarıçapının sonsuz olduğuna izin verilirse (sınırlanan yüzey düzlem olmamasına rağmen) küresel geometrinin Öklidyen olacağını belirtmiştir.[21]

2.4. Lobachevski[22] (1792-1856)

Matematik ve fizik bölümlerinde yüksek lisans yapmış olan Lobachevski 1816'da, yirmi üç yaşında profesör olmuş ve profesörlükteki ilk on yılını paralel postulata ayırmıştır. Lobachevki, ilk geometri metnini "Geometri" başlığı altında 1823'de yazmıştır. Fakat bu eseri ölümünden sonra yayımlanabilmiştir. Paralel postulatı ispat çalışmalarından birini içeren bu eser, Lobachevski'nin genel olarak geometrinin temelleri hakkındaki düşüncelerini içermektedir.

Lobachevski, ayrıca 1826'da "Paralellik Üzerine Olan Teoremin Sağlam Bir Kanıtı ile Birlikte Geometri Temellerinin Kısaltılmış Yorumu" başlıklı bir makale sunmuştur. Bu makalede Lobachevski, Öklidyen geometride paralel postulatın diğer postulatlardan bağımsız olduğu sonucuna vardığını belirtmiş ve kendi keşfettiği 'sanal geometri'ye giriş yapmıştır. Öklidyen olmayan geometri ile ilgili ilk makalesini 1826'da yazmıştır. Bu makale, Kazan Massenger'da "Geometrinin Ögeleri"[23] başlığı altında 1829 yılında yayımlanmıştır. 1835-1838 yılları arasında keşfettiği geometrinin uygulamalarını daha da geliştirerek "Sanal Geometri"[24], "Belirli Tümlevlere Sanal Geometri Uygulaması"[25] ve "Tamamlanmış Paraleller Teorisi ile Geometrinin Yeni Temellleri"[26] gibi farklı makaleler, Kazan Üniversitesi Araştırma Notlarında yayımlanmıştır. Lobachevski'nin son makalesi ise "Pangeometry"dir.

---

[21] Wolfe, **op. cit.**, p. 57.

[22] Lobachevski, Rusça'dan çevirildiği için Lobachevsy, Lobatscheffsky, Lobatschewsky, Lobatschefskij, Lobacevskij, Lobachevskii… gibi farklı yazımları bulunmaktadır. (George Bruce Halsted, Non-Euclidean Geometry in the Encyclopædia Britannica, **Science**, New Series, Vol.XXXV, No:906, American Association for the Advancement of Science, May 10, 1912, pp. 736-740, p. 736). En yaygın biçimde kullanılan ve İngilizce kaynaklarda tercih edilen Lobachevsky çevirisidir. Fakat tezin yazarı, Türk fonetiğine daha uygun olması bakımından Lobachevski kullanımını tercih etmiştir.

[23] İngilizce kaynaklarda "Elements of Geometry" ya da "On the Foundations of Geometry" olarak geçmektedir.

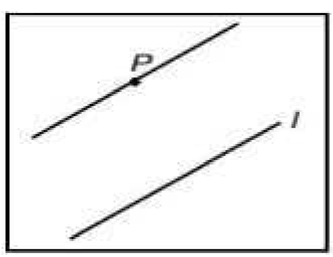
[24] İngilizce kaynaklarda bu makalenin başlığı "Imaginary geometry" olarak geçmektedir.

[25] İngilizce kaynaklarda bu makalenin başlığı "An application of imaginary geometry to certain integrals" olarak geçmektedir.

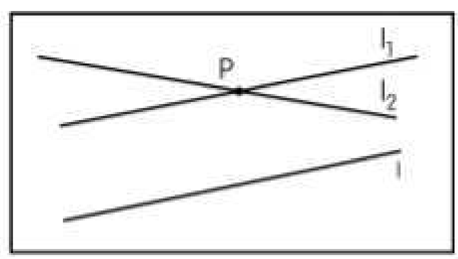
[26] İngilizce kaynaklarda bu makalenin başlığı "New foundations of geometry with a complete theory of parallels" olarak geçmektedir.

Rus matematikçi Lobachevski ile aynı dönemde Macar subayı Jἄnos Bolyai de, Saccheri'nin dar açılı hipotezine denk gelen, mantıksal olarak tutarlı yeni, farklı bir geometri çeşidi geliştirmiştir. Farklılıkları olmasına rağmen benzer temel özellikler taşıyan bu Öklidyen olmayan geometri çeşidini Bolyai 'salt geometri' olarak adlandırırken, Lobachevski 'sanal geometri' olarak adlandırmıştır. Lobachevski'nin ölümünden sonra bazıları onun geometrisine 'Lobachevskiyen geometri' de demiştir. Ancak günümüzde bu tip geometri genel olarak 'hiperbolik geometri' olarak anılmaktadır.

Öklidyen geometri ile hiperbolik geometri arasındaki en temel fark, paralel postulattaki farklılıktır. Farklılığın daha net ortaya konması için Öklidyen geometride paralel postulatın orijinal olmasa da eş değer versiyonunu ele alalım: Verilen bir doğru (*l*) ve bu doğru üzerinde olmayan bir (*P*) noktası ile (*P)* üzerinden geçen ve (*l)*'ye paralel olan bir doğru çizilebilir (Görsel sunum için Şekil 8'e bakınız.). Bu versiyon Öklid'in paralel postulatına mantıksal olarak eş değerdedir.



Şekil 8

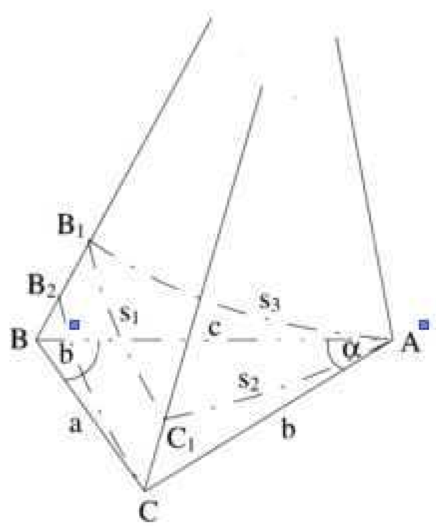


Şekil 9

Lobachevski, paralel postulatın diğer postulatlardan ayrı olduğuna kanaat getirdikten sonra bu postulat yerine farklı bir postulat getirerek oluşacak olan yeni geometrinin de mantıksal olarak tutarlı bir geometri olacağını görmüştür. Lobachevski'nin paralel postulat yerine koyduğu farklı versiyonu: Verilen bir doğru (*l*) ve bu doğru üzerinde olmayan bir nokta (*P*) ile (*P)* üzerinden geçen ve (*l)*'ye paralel olan en az iki doğru çizilebilir. Şekil 9 incelenirse, (*P)* noktasından geçen (l_1) ve (l_2) doğruları (*l)*'ye paraleldirler. (l_2) ve (*l)* yeteri kadar uzatıldığında kesiştiği düşünülebilir, fakat ispatlanamaz. Çünkü (l_2)'nin (*l)* ile kesişmesinin ispatlanması demek Öklid'in paralel postulatının ispatlanması demektir.[27]

[27] John Tabak, **Geometry: The Language of Space and Form**, New York, Facts On File Inc., 2004, pp. 95, 96.

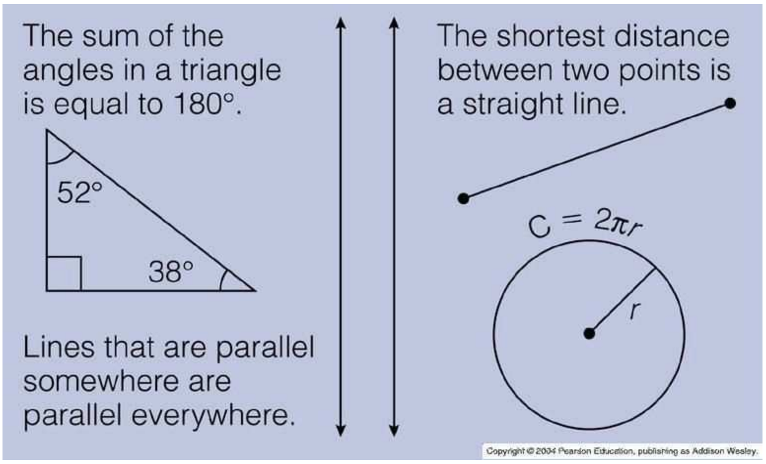
Bu yeni tip geometride, verilen bir doğrunun üzerinde olmayan bir noktadan o doğruya birden fazla paralel doğru çizilebilmektedir. Böylece hiperbolik geometrinin paralel postulatı ortaya konmuş ve bir postulatın değiştirilmesiyle yeni bir geometri çeşidi tanımlanmıştır. Öklidyen olmayan bu yeni tip geometri ile Öklidyen geometri arasında oluşan en belirgin ayrımlardan biri ise üçgenin iç açılar toplamıdır. Öklidyen geometride üçgenin iç açılar toplamı 180^0, hiperbolik geometride ise 180^0'den azdır. Herhangi bir üçgenin alanı büyüdükçe; Öklidyen geometride üçgenin iç açılar toplamı değişmezken, hiperbolik geometride iç açılar toplamı daha da azalmaktadır. Aşağıdaki Şekil 10'da ABC üçgeni, Öklidyen geometriye örnek bir üçgen oluştururken, AB_2C ve AB_1C_1 üçgenleri hiperbolik geometriye örnekler oluşturmaktadırlar.



Şekil 10[28]

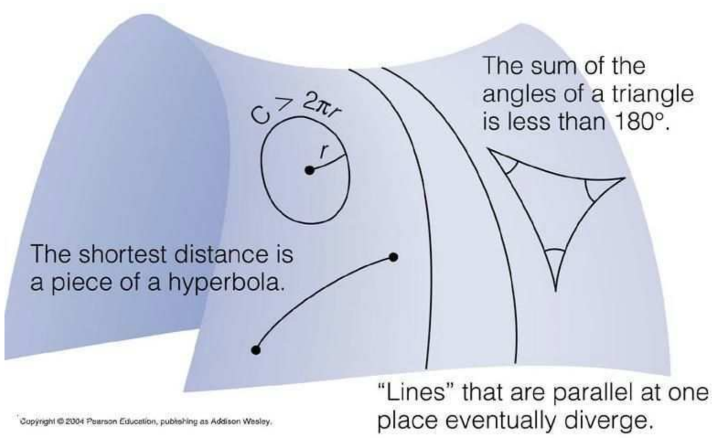
Öklidyen geometri ile hiperbolik geometri arasındaki bir diğer ayrım ise çemberin çevresinin çemberin çapına oranıdır. Öklidyen geometride çemberin çevresinin çapına oranı π'ye eşit, hiperbolik geometride ise π'den büyüktür. Öklidyen ve hiperbolik geometri arasındaki farkların görsel sunumu için Şekil 11, Şekil 12 ve Şekil 13'e bakınız.

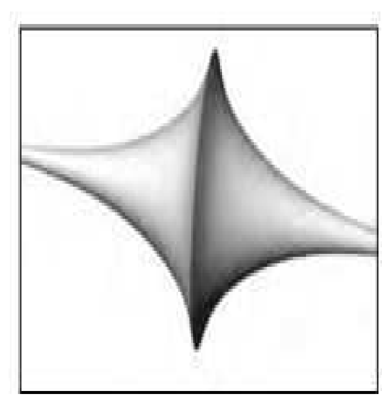
[28] Kvasz, **op. cit.**, p.148.



Şekil 11[29]

Şekil 11, Öklidyen geometriye örnek sunmaktadır; Şekil 12 ve Şekil 13, hiperbolik geometriye örnekler sunmaktadır. Şekil 12 ‘eyer’, Şekil 13 ise ‘aykırı küre’ olarak adlandırılmıştır.





Şekil 12[30] Şekil 13[31]

Lobachevski, uzayı bazı filozofların tanımladığı gibi zorunlu gerçeklik olarak görmemiş, kendi aklımızın üretimi olarak görmüştür. Lobachevski doğru, düzlem ve konum gibi terimleri

---

[29] (Çevrimiçi) http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/images/S3-12a.jpg, 22 Kasım 2014.
[30] (Çevrimiçi) http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/images/S3-12c.jpg, 22 Kasım 2014.
[31] Tabak, **op. cit.**, p. 97.

oldukça soyut ve belirsiz olarak gördüğünden dolayı Öklidyen temellerin kusurlu olduğunu varsaymıştır.[32] Lobachevski ideaların[33], algılarla oluştuğunu ve doğuştan idealara inanmamak gerektiğini söylemiş, ayrıca geometri içeriğiyle ilgili Kant'ın 'a priori' anlayışını reddetmiştir.[34] Böylece Öklidyen geometrinin olası tek geometri olmayacağı sonucuna varmıştır. Lobachevski bu konuyla ilgili düşüncelerini şöyle dile getirmiştir: "Öklid'in zamanından beri iki bin yıldır yapılan sonuçsuz çabalar bende doğruluk hakkında kuşku uyandırdı. Bu doğruluğu ispatlama isteği bilginin kendisini içermiyordu. Bunu oluşturmak için doğanın diğer kanunlarında olduğu gibi deneyin yardımı gereklidir, örneğin astronomik gözlemler gibi."[35]

Lobachevski, fiziksel uzayın en iyi hangi geometri tipiyle temsil edildiğini ölçmek istemiştir. Bir yanda pratik olarak adlandırdığı Öklidyen geometri, diğer yanda Öklidyen olmayan kendi sanal geometrisi bulunmaktadır. Ölçüm için çok büyük üçgenleri test etmeye karar vermiş ve Dünya ile Dünya'nın yörüngesinin zıt taraflarından iki yıldız seçmiştir. Sirius (ya da Akyıldız olarak bilinen) yıldız takımını seçen Lobachevski, oluşturduğu üçgenin iç açılarından birini dik açı olarak varsaymış ve ölçümünü yapmıştır. Seçtiği üçgenin ölçülerinin Öklidyen geometriye daha yakın olduğu sonucuna ulaşmıştır. Lobachevski, "Paralellik Üzerine Olan Teoremin Sağlam Bir Kanıtı ile Birlikte Geometri Temellerinin Kısaltılmış Yorumu" başlıklı makalesinde bu deneyinden bahsetmiştir. Lobachevski bu makalede fiziksel uzayın hangi geometriyi kabul ettiğini deneysel olarak belirlemenin imkansız olduğunu belirtmiş ve uygulamada herhangi bir hataya düşme tehlikesi olmaksızın pratik geometriye, yani Öklidyen geometriye başvurulabileceğini dile getirmiştir.[36]

Ölçüm doğası gereği hata payına sahip olduğundan dolayı, iddianın kesinliğinden bahsedilememektedir. Matematiğin kesin bir bilim olması ölçümlerin netliğinden değil, ispatlarından gelmektedir. Bu nedenle iki bin yılı aşkın sürede paralel postulat ölçüm yapılarak ispatlanmamıştır. Aynı şekilde üçgenin iç açıları toplamının 180^0 olduğu iddiası da ölçümle ispatlanamamıştır. Lobachevski yaptığı deneyde ispattan ziyade kendi sanal geometrisine örnek aramıştır.

[32] Gray, **op. cit.**, p. 118.
[33] idea: Görünen nesnelerin zihin tarafından şekillendirilmesi
[34] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, **Mathematics of the 19th Century: Geometry, Analytic Function Theory**, Trans. by Roger Cooke, Basel, Birkhauser Verlag, 1996, p. 54.
[35] Roberto Bonola, **Non - Euclidean Geometry**, New York, Dover Publications, Inc., 1955, p. 92.
[36] Kolmogorov, Yushkevich, **op. cit.**, p. 60.

Lobachevki, “Doğada ne doğru ne de eğri, ne düzlem ne de eğri yüzey vardır. Sadece kütleler vardır. Geri kalan hepsi hayal gücümüz tarafından yaratılmıştır ve sadece teoriler dünyasında varolurlar.”[37] dedikten sonra kütleyi, uzayı, kütlelerin uyumunu (benzerliği) ve eşitliği tanımlamıştır. Bu tanımları ‘hareket’i temel alarak oluşturmuştur. Lobachevski, “Doğada biz sadece hareketi biliriz. Hareket olmaksızın gösterimleri algılamamız mümkün olmaz. Böylece bütün içerikler, geometri içeriği gibi, yapay olarak aklımız tarafından üretilir ve hareketin özelliklerini içerir. Bu yüzden uzayın kendisi bizim için yoktur. Dolayısıyla, eğer doğadaki bazı güçlerin bir geometriye uyabileceğini ve diğer güçlerin başka bir geometriye uyabileceğini varsayarsak aklımızda hiçbir çelişki yaratmaz.” diyerek geometrinin, uzay algısına dayanmadığını, uzay içeriğinin ise maddeye ait güçler tarafından üretilen kütle hareketleriyle oluşturulmasına dayanması üzerine, farklı çeşitlerdeki doğa güçlerinin faklı geometri çeşitleri oluşturabileceği sonucuna ulaşmıştır.[38] Aslında uzayın farklı bölgelerinde, farkı geometri özelliklerinin bulunması ve bu özelliklerin güçlere bağlı olarak değişme olasılığı fikriyle Lobachevski, Einstein’ın genel görelelik kuramının öngörüsüne sahiptir. Lobachevski’nin tahminine göre kendi sanal geometrisi dışarıda görünenler dünyasında da olabilir, sıkı moleküler çekim katmanlarında da olabilir.[39] Çünkü Lobachevski, “Soyut olmasına rağmen, bir gün gerçek dünyanın görüngülerine uygulanamayacak, matematiğin her hangi bir dalı yoktur.”[40] diyerek sanal geometrisinin de uygulanacağı bir yer olduğuna inanmaktadır.

Lobachevski, hiperbolik düzlem ve üç boyutlu hiperbolik uzayda aritmetik model inşa ederek, koordinatları sunmuş, uzayda ve düzlemde kendi sisteminin tutarlılığını göstermiştir. Lobachevski, yanlış bir çıkarım olsa da, bağıntıda keşfettiği geometri tutarlılığının, sadece kendi trigonometrisi ve bunun küresel trigonometrisi arasındaki formüllerden geldiğini düşünmüştür. Trigonometrik formüllerin tutarlılığı, hiperbolik geometrinin tutarlılığını gösterdiğinden dolayı trigonometrik formüller ve salt geometriden çıkarılabilen bütün ifadelerin ispat edilmesi gereklidir (Bu ifadeler paralel postulattan bağımsızdır.). Dolayısıyla Lobachevski, “Sanal geometrinin içinde bulduğum üçgenin kenar, açı bağıntısının ana eşitliklerini ispatlamak niyetindeyim. Hiçbir

[37] Roberto Torretti, **Philosophy of geometry from Riemann to Poincare**, 2.nd ed., Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1984, p. 64.
[38] **Ibid**, p. 64.
[39] Kolmogorov, Yushkevich, **op. cit.**, pp. 60,61.
[40] Carl B. Boyer, Uta Merzbach, **A history of mathematics**, 3rd ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2011, p. 483.

bağıntıda yanlış sonuç vermeyecek analizi benimsedim." diyerek kendi geometrisine uygun küresel trigonometrinin formüllerini ispatlamıştır. Lobachevski'nin iddialarının ispatlanabilmesi için, onun döneminde bilinmeyen Poncelot'un yöntemi gibi bazı yöntemlerin kullanılması gereklidir. Fakat Lobachevski'nin çalışmaları, sanal geometrinin tutarlılık ispatlarında tabanı oluşturabilecek niteliktedir.[41]

Lobachevski'nin sanal geometri sisteminde yarıçap sonsuza giderken dairenin şekli doğrudan ziyade 'sınırlanmış çember' adında özel bir çeşit eğriyle sınırlandırılır. Bu eğriler, 'horocycle' adıyla bilinmektedirler. Aynı şartlar altında küre de sınırlandırıldığında, Lobachevski tarafından 'sınırlanmış küre' olarak adlandırılan, fakat daha sonra yaygın olarak 'horosphere' olarak bilinen eğri yüzeyler oluşmaktadır. Lobachevski, 'horosphere'in Öklid geometrisine uygun olduğunu ve doğruların görevlerinin 'horocycle' tarafından belirlendiğini kaydetmiştir. Dolayısıyla Lobachevki, horosphere üzerinde Öklid trigonometrisine dayanarak kendi geometri sistemininin düzlem trigonometrisinin çıkarımını yapmıştır. Sanal geometrinin isimlendirilmesi, sanal sayılar ile gerçel sayılar arasındaki bağ örneğinde olduğu gibi, bu geometrinin Öklidyen geometriyle aynı bağıntıları taşıdığının vurgulanmasından kaynaklanmaktadır.[42]

1865'de Cayley, "Lobachevski'nin Sanal Geometrisi Üzerine Notlar"[43] başlıklı yazısında Lobachevski'nin trigonometrik formülleriyle, küresel trigonometrinin formüllerini karşılaştırmıştır. Böylece Lobachevski'nin keşfinin tanınmasını sağlamıştır. Daha sonra Houel[44], Battaglini[45], Letnikov[46], Yanishevskil[47] ve Beltrami[48] gibi isimlerin katkısıyla 1870'de hiperbolik geometri bütün Avrupa'da yayılmıştır.

---

[41] Kolmogorov, Yushkevich, **op. cit.**, p. 63.
[42] Kolmogorov, Yushkevich, **op. cit.**, p. 60.
[43] "Note on Lobatschewsky's imaginary geometry" (Phil. Mag. London).
[44] Prof. Guillaume Jules Houel (1823-1866), 1866'da "Essai Critique sur les Principes Fondamentaux de la Geometrie" başlıklı yazısında Lobachevsi'nin temel düşüncelerini içeren Fransızca bir çalışma ortaya koymuştur.
[45] Prof. Giuseppe Battaglini (1826-1894), İtalyanca olarak 1867'de "Sulla Geometria Imaginaria de Lobatschewsky", 1868'de "Pangeometri" ve Bolyai'nin "Appendix"ini yayımlamıştır.
[46] 1868'de Prof. Aleksel Vasil'evich Letnikov (1837-1888) üç ciltlik *Mathematical Collection a Russian translation of Lobachevskil's Geometrische Untersuchungen* Lobachevski koleksiyonunu yayımlamıştır.
[47] Prof. Erast Petrovich Yanishevskil, 1868'da "Historical note on the life and work of N. 1. Lobachevskii." adlı çalışmasını yayımlamıştır.
[48] 1868'de hiperbolik geometri üzerine makale yazmıştır.

2.5. Franz Adolf Taurinus (1794 -1874)

Schweikart'ın çalışmalarını, yeğeni Franz Adolf Taurinus devralmıştır. 1824'de Öklidyen olmayan geometriyle ilgili iki sayfa yazı yazmış ve Gauss'la irtibata geçmiştir. Gauss, 8 Kasım 1824'de Taurinus'a yazdığı cevapta ilk defa Öklidyen olmayan terimini kullanmıştır. Gauss aynı mektupta oluşturulan bu yeni tip geometri için, "Üçgenin iç açılar toplamının 180^0'den küçük olduğu geometri, bizim geometriden oldukça farklı özel bir geometriye sahiptir. Kendi içinde sürekli olduğu ve bütün problemleri çözebildiğimiz için tatmin edici buldum" diyerek bu yeni tip geometrinin geçerliliğini belirtmiştir.[49]

Taurinus ilk kitabının basımından sonra, Saccheri ve Lambert'in de kendisiyle aynı yolu izlediğini öğrendiğinde 1826'da *Geometrinin İlk Elementleri*[50] adında başka bir kitap yayımlamıştır ve bu kitapta daha farklı yöntemler uygulamıştır. XIX. yüzyıla kadar geometriciler paralel postulatıyla genel olarak klasik yöntemlerle, Öklid'in kendi modellediği biçimde ilgilenmişlerdir. Fakat Taurinus, bu modelleme yöntemine bir yenilik getirerek, açılar arasında trigonometrik bağıntıları kullandığı yöntemi uygulamıştır.[51] En önemli görülen katkısı ise kitabın ekler kısmında bulunan Öklidyen olmayan trigonometriyle ilgili geliştirdiği temel formüllerdir. Ayrıca Taurinus kürenin yarıçapı sonsuz olduğunda Öklidyen geometriye dönüşen, 'Logaritmik-Küresel Geometri'[52] olarak adlandırdığı Öklidyen olmayan bir geometri yapılandırmıştır. Bu geometrinin, geniş açı hipotezi kullanıldığında küresel geometri ile olan uygunluğunu incelemiştir.[53]

2.6. Jάnos Bolyai (1802-1860)

Macar subayı Jάnos Bolyai matematik eğitimini babası Farkas Bolyai'den almıştır. Farkas Bolyai için paralel postulat hayatı boyunca uğraştığı, fakat ispatına bir türlü ulaşamadığı

---

[49] Bardi, **op. cit**., p. 128.
[50] Kitabın orijinal adı: *Geometriae Prima Elementa*
[51] Gray, **op. cit.**, p. 95.
[52] Orijinal adı: 'Logarithmisch-Spharischen Geometrie'
[53] Wolfe, **op. cit.**, pp. 59, 60.

bir takıntı haline gelmiştir. János Bolyai ise boş zamanlarında babasının tutkusu olan paralel postulatla ilgilenmiştir.[54]

1820'de János Bolyai Saccheri'nin yolundan giderek (olmayana ergi yöntemini kullanarak) paralel postulatın doğru olmadığını ispatlamaya çalışmış ve postulatın yanlış olması durumunda, geometri sistemi üzerindeki etkilerini incelemiştir. Bolyai'nin paralel postulatı ispatlamadaki başarısızlığı onu bu postulatın belki de yanlış olabileceği sonucuna götürmüştür. Paralel postulatın alternatiflerini düşünmeye başlayan János Bolyai, bu postulattan bağımsız bir geometri yaratarak, Öklidyen olmayan bir geometri sistemini ilk tasarlayanlar arasına girmiştir.[55] Kendisi buna 'salt uzayın bilimi' adını vermiştir. Bolyai bu tasarımı ile ilgili düşüncelerini "Hiçlikten yeni, bütün bir dünya yaratmamın dışında daha fazla şey söyleyemem."[56] diyerek dile getirmiştir. Bu keşfi, Lobachevski'nin sanal geometrisini keşfetmesiyle aynı döneme denk gelmektedir.

Farkas Bolyai'nin yayımladığı *Tentamen*'nin ek kısmında János Bolyai kendi Öklidyen olmayan geometrisini yayımlamıştır. János Bolyai 'salt geometri'sinde aksiyomlarını, postulatlarını, teoremlerini ve ispatlarını göstererek Öklidyen geometriye tam anlamıyla bir alternatif sistem sunabilmiştir. Bu sistem hiperbolik geometri kategorisine girdiğinden ayrıntılarına 2.4. bölümde değinilmiştir.

Bolyai'nin salt geometrisindeki paralel postulatı: "Verilen bir doğruya paralel bir noktadan sonsuz doğru geçer"dir. Bolyai'nin öne sürdüğü bu postulat Lobachevski'nin postulatına benzerdir, fakat aynı değildir. Bolyai Öklid'in paralel postulatı yerine kendi postulatını koyduktan sonra oluşan yeni geometriyi incelemiştir.[57] Bolyai'nin salt geometrisi Lobachevski'nin sanal geometrisine nazaran bazı farklılıkları taşımasına rağmen, temel özellikleri benzerlik göstermektedir. İkisi de üç boyut üzerinde geometri çalışmıştır ve temel sonuçlarını trigonometrik formüllerle belirtmişlerdir. Bolyai'den farklı olarak Lobachevski bazı noktalarda daha açıktır ve Öklidyen ile kendi geometrisi arasında ortak teoremleri bulmaktansa, kendi geometrisine ait 'horocycle', 'horosphere' gibi yeni terimler ve yeni teoremler bulmayı tercih etmiştir.

---

[54] Bardi, **op. cit**., p. 139.
[55]' Gray, **op. cit.**, p. 102.
[56] Bardi, **op. cit.**, p. 140.
[57] Tabak, **op. cit.**, p. 97.

3. BÖLÜM

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERİN, GEOMETRİ SİSTEMİ İÇİNDE KABUL EDİLMESİ

Bir önceki bölümde XIX. yüzyılın ilk yarısında Lobachevski ve Bolyai'nin -Saccheri'nin dar açılı hipotezine denk gelen Öklidyen olmayan bir geometri sistemi olan hiperbolik geometrinin- keşfinden bahsedilmiştir. Bu bölümde ise ilk olarak, XIX. yüzyılın ikinci yarısında Riemann'ın -Saccheri'nin geniş açılı hipotezine denk gelen Öklidyen olmayan bir başka geometri sistemi olan eliptik geometrinin- keşfi ortaya konacaktır. Böylece Öklidyen olmayan geometrilerin üç dönemlik gelişiminin ilk dönemi sona erecektir.

XIX. yüzyılın ikinci yarısında geometriciler içerikle ilgili sorular sormaya başlamışlardır. Bunun sonucunda geometri büyük oranda içerik merkezli olmuş ve kavramsallığa geçmiştir. Öklidyen olmayan geometrilerin gelişiminin ikinci dönemine diferansiyel geometrinin yüksek boyutlulara uygulanmasıyla geçilmiştir. Riemann bu geçişin öncülerindendir. Genel görelilik teoreminin de uygulanabildiği Riemann uzayının tanımlandığı bu dönemde geometri, Antik Yunan'da oluşturulan soyut sistemden daha farklı bir soyut seviyeye ulaşmıştır.

Öklidyen olmayan geometrilerin gelişiminin üçüncü dönemi ise Cayley ve Klein gibi isimlerle anılmaktadır. Onlar Öklidyen olmayan geometrilerin yorumlanmaları ve birleşmelerinde gerekli olan ihtiyacı karşılamışlardır. Öncelikle bütün geometri çeşitlerinin mantıksal tutarlılıklarını ortaya koymuş ve diferansiyel geometri yardımıyla sürekliliklerini göstermişlerdir. Daha sonra grup teorisinin de yardımıyla Öklidyen ve Öklidyen olmayan geometrilerin, izdüşüm geometrisinin özel durumları olduğunu göstermişlerdir. Bütün geometri çeşitlerinin temellendirilmesini ve bütünleştirilmesini sağlamışlardır.

3.1. Arthur Cayley (1821-1895)

Cayley, Beltrami'nin modelinin tam tersini yapmayı düşünmüştür. Yani Öklidyen olmayan durumdan Öklidyen geometriye bakmak istemiştir. Böylece Cayley, Kant'ın görüşü ve neo-Kant felsefesini terk etmiştir.[1] Öklidyen olmayan geometrilerin, a priori olan Öklidyen geometrinin tanımlarına bağlı olduğu düşüncesinin aşılmasında etkisi olmuştur.

Cayley, 1859'da yazdığı "Sixth Memoir upon Quantics"de uzaklık kavramının nasıl bütünüyle betimsel ilkeler üzerine kurulduğunu göstermiştir. Ayrıca Cayley, izdüşümsel düzlemde hangi çeşit geometrilerin oluşabileceğini sorgulamıştır, fakat cevabı Felix Klein vermiştir.[2]

3.2. Riemann (1826-1866)

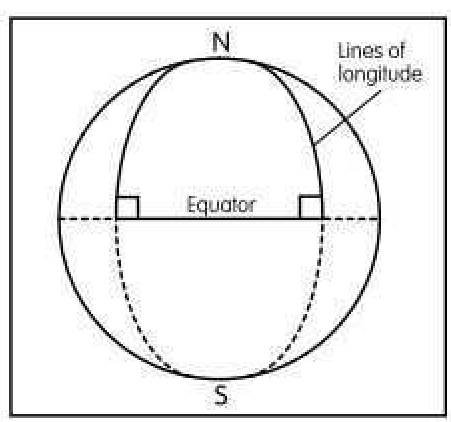
Riemann, 1850'lerde doktorasının erken yıllarında fizikle ilgilenmiştir. Bu dönemde matematiğin sadece didaktik yönüyle ilgilenen Riemann'ın tezi, fiziksel doğa üzerinedir. Riemann'ın felsefe ve fiziğe olan ilgisi, matematiğe farklı bir bakış açısı kazanmasını sağlamıştır. Bu sayede matematiksel niceliklerin içeriğini farklı formüle edebilmiştir.[3] 1853-1854 yıllarında matematik ve fizik seminerleri düzenleyen Riemann önce Gauss daha sonra Dirichlet, Jacobi ve Steiner gibi isimlerle çalışmıştır.[4,5] Riemann, Johann Friedrich Herbart'ın felsefesinden etkilenmiştir. Herbart'a göre doğuştan ideler yoktur ve görsel uzay deneyimden oluşmaktadır. Riemann, Herbart ile bu konuda aynı görüşe sahip olup, Kant'ın a priori anlayışını reddetmiştir.[6]

---

[1] Ladislav Kvasz, "History of Geometry and the Development of the Form of Its Language", **Synthese,** Vol.CXVI, No:2, Springer, 1998, pp. 141-186, pp.155 - 158.
[2] **Ibid.**, p. 159.
[3] Jeremy Gray, **Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century**, London, Springer, 2011, p. 198.
[4] J. Ferreiros, J. J. Gray, **The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy**, Oxford University Press, New York, 1st ed., 2006, p. 81.
[5] Harold E. Wolfe, **Introduction to Non-Euclidean Geometry**, New York, The Dryden Press, Inc., 1945, p. 60.
[6] Edward N. Zalta, "Epistemology of Geometry", (Çevrimiçi) http://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/, 29 Nisan 2015.

1854'de Riemann, Saccheri'nin geniş açılı hipotezine denk gelen Öklidyen olmayan bir geometri çeşidi keşfetmiştir. Denk gelen denilmesinin nedeni, Saccheri'nin hipotezinde ilk dört postulatın kabul edilip sadece paralel postulat üzerinden üç hipotez türetilmesi söz konusuyken; bu yeni tip geometride sadece paralel postulat değil, 'bir düz doğrunun istenildiği kadar uzatılabileceği' postulatı, yani ikinci postulat da reddedilmiştir. Böylece günümüzde 'eliptik geometri' olarak anılacak olan, yeni ve farklı bir çeşit Öklidyen olmayan geometri daha keşfedilmiştir.

Lobachevski ve Bolyai tarafından Öklid'in paralel postulatı yerine sunulan alternatifleri neredeyse aynıdır. Fakat Riemann tamamen farklı bir postulat üretmiştir: "Bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan hiçbir doğru yoktur." Bu postulat ilk bakışta alışılmışın dışında görülmesine rağmen Lobachevski ve Bolyai'nin postulatından daha kolay tahayyül edilebilmektedir. Postulat, düzlemsel bir geometri yerine küresel bir geometri üzerinde düşünülmelidir.[7] Aşağıdaki Şekil 14'de, ekvatoru dik bir biçimde kesen boylamlar gösterilmiştir. Şekil 14'deki üçgen incelenirse, tepe açısının 0^0 olmayacağı düşünüldüğünde iç açıları toplamı 180^0'i aşmaktadır.



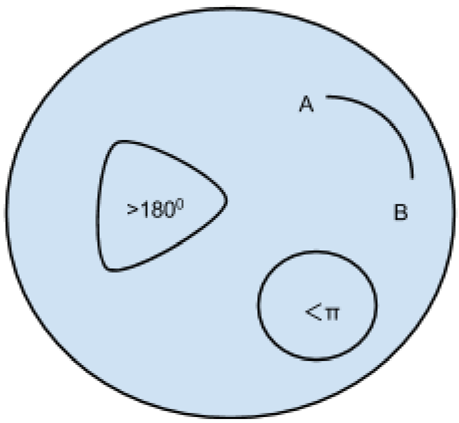
Şekil 14[8]

Eliptik geometrinin, Öklidyen ve hiperbolik geometrilerden en belirgin farklı özellikleri şunlardır:

- "Herhangi bir doğrunun uzatılabileceği maksimum bir uzunluk vardır.

[7] John Tabak, **Geometry: The Language of Space and Form**, New York, Facts On File Inc., 2004, pp. 148,149.
[8] **Ibid.**, p. 149.

- Verilen iki noktadan birden çok doğru oluşturulabilir.
- Bir üçgenin iç açılar toplamı 180^{0}'den büyüktür.
- Bir çemberin çevresinin çapına oranı π'den küçüktür."[9]



Şekil 15

Riemann, eliptik geometrisinde sadece paralel postulatı reddetmekle kalmamış paralel doğruları da tamamen reddetmiştir. O, ayrıca diğer postulatları da ortadan kaldırarak geometriye daha geniş bir yelpazeden bakabilmiştir. Doğruların sonlu olabileceği ihtimalini ilk Riemann fark etmiştir.[10] O Öklidyen geometri ile Öklidyen olmayan geometrileri temellendirmiş ve bu geometrilerin nasıl inşa edilebileceğini göstermiştir. Öklid'in, Lobachevski'nin geometrileri ve kendi geometrisinin genel bir sistemin birer örnekleri olduğunu ortaya koymuştur.

Riemann, geometri çeşitlerinin genel sistemin birer örnekleri olduğunu göstermek için öncelikle Gauss'un yüzeyleri ve bu yüzeylerin denklemlerini oluştururken kullanılan 'jeodezik'[11]

---

[9] Stephen F. Barker, **Matematik Felsefesi,** Çev. Yücel Dursun, Ankara, İmge Kitabevi, 2003, s. 65.

[10] George Bruce Halsted, "Non-Euclidean Geometry in the Encyclopædia Britannica", **Science**, New Series, Vol.XXXV, No:906, American Association for the Advancement of Science, (May 10, 1912), pp. 736-740, p. 737.

[11] Öklidyen bir uzayda iki nokta arasındaki en kısa uzaklık düz bir doğru iken, eğri bir uzayda iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir 'jeodezik'(geodesic)'tir. (Tabak, **op. cit.**, pp. 151,152.) Jeodezik, tanımlandığı yüzeyin özelliğine bağlıdır. Küresel bir yüzeyde eğrilik pozitiftir ve sabittir. Yani küresel yüzey üzerinde aldığımız jeodeziğin eğriliği hep aynıdır. Fakat yumurtaya benzer bir şeklin yüzeyinde eğrilik gene pozitiftir fakat sabit değildir, yani bu yüzeyde aldığımız noktalar arasındaki jeodezikler farklı pozitif eğriliklere sahip olabilirler. Eyerli (saddlebacked) bir yüzey ise negatif eğriliğe sahiptir. (Barker, **a.g.e**., s. 65, 66.) Dolayısıyla eyerli bir yüzeyin üzerindeki jeodezikler negatif eğriliğe sahiptirler.

kavramını ele almıştır. Riemann, Gauss'un geliştirdiği jeodezik ile eğrilik kavramını üç boyutlu uzaya uygulamış ve üç boyutlu alanların eğriliğine genellemiştir. İki boyutlular ya da üç boyutlular için eğrilik, temel olarak jeodeziklerin davranışını betimleyen denklemlerin matematiksel özelliklerine göndermeyle tanımlanmaktadır.[12]

Riemann, geometriyi içinden bakarak anlamak istemiştir. Uzayın iki, üç ya da daha fazla boyutlu olmasına bakmaksızın, esas özelliklerini belirleyen geometriyi sorgulamıştır. O, iki boyutlu uzayların daha yüksek boyutlu uzaylara uygulandığı çalışmaları bilmektedir. Yüzeyler genellikle dışarıdan bakılıyormuş gibi tarif edilmektedir. Yüzeyin eğri olması ya da sonlu uzunlukta veya sonsuz genişlikte olması gibi bazı özellikler, yüzeye dışından bakıldığında daha kolay gözlemlenebilmektedir. Riemann, bu yüzeyin üzerinde hayali bir yaratığın yaşadığını hayal etmiş ve bu hayali yaratığın yüzeyde herhangi bir noktadaki konumdan, herhangi bir ölçüm ya da gözlem yapmaksızın, bu yüzeyin geometrisini nasıl belirleyeceğini düşünmüştür. O, uzayın geometrisiyle ilgili üretilen herhangi bir sonucun içeriden yapılmak zorunda olduğunu iddia etmiştir. Böylece içeriden bakan bir geometriyi araştıran Riemann, 'jeodezik'lerin sistemini tahayyül etmiştir.[13]

Bu uzayın içinde yaşayan yaratık üç-boyutlu Öklid uzayı ile eğri uzayı birbirinden ayırt edebilir mi? Riemann, cevabın belirlenmesindeki kriteri Pisagor teoreminde bulmuştur. Eğer iki nokta arasındaki uzaklık Pisagor teoremiyle belirlenemiyorsa bu durumda uzay, Öklidyen değildir ve eğri olmak zorundadır. Hatta Pisagor teoremi farkına göre eğriliğin derecesi değişmektedir.[14]

Yüzeyde ele alınan bir noktanın eğriliğini ve eğriliğin hangi durumlarda değiştiğini bulmak için öncelikle "g" fonksiyonu kullanılarak, verilen nokta için değeri yüzeyin o noktasındaki eğimini veren k(u, v) fonksiyonu elde edilmektedir. "k"nın değeri, üç jeodezik doğrunun oluşturduğu üçgenin 180^{0}'den farklı iç açılar toplamına göre, sıfırdan farklı olarak değişmektedir. Yüzeyde verilen bir noktadaki eğriliği hesaplamak için alınan bu fonksiyonun değerinden şu özel durumlar çıkarılmıştır:

---

[12] **A.e**, s. 65, 66, 67.
[13] Tabak, **op. cit.**, p. 151.
[14] **Ibid.**, pp. 150, 152.

1. “F düzlem olduğunda, k fonksiyonun eğriliği sıfırdır.
2. F, r yarıçaplı bir çember olduğunda k fonksiyonun eğriliği $1/r^{2}$’dir. k sürekli ve pozitiftir.
3. Her yerde pozitif eğriliğe sahip olan bir F yüzeyinde, herhangi jeodezik üçgenin iç açılar toplamı 180^{0}’den büyüktür.
4. Her yerde negatif eğriliğe sahip olan bir F yüzeyinde, üçgenin iç açılar toplamı 180^{0}’den küçüktür.”[15]

Riemann diferansiyel geometriden bu durumları alarak yüksek boyutlulara uygulamıştır. Bu genişletilmiş uzaya ‘Riemann uzayı’ adı verilmiştir. Jeodezikler, hiperbolik ya da eliptik geometrinin aksiyomlarını sağladığında Riemann uzayı sürekli negatif eğriliğe sahipse hiperbolik, sürekli pozitif eğriliğe sahipse eliptik geometriye sahiptir. Genel olarak, eğer üçgen iç açılar toplamı 180^{0}’den farklı olacak şekilde jeodeziklerden oluşmuşsa Riemann uzayı eğridir denilmektedir.[16]

Riemann günümüz matematikçilerin kullandığı gibi uzay terimini çok geniş anlamda kullanmamıştır. Onun uzay olarak tanımladığı ‘der raum’ fiziksel kütlelerin konumlandığı ve fiziksel hareket yörüngelerinin olduğu tek uzaydır.[17] Riemann’a göre uzay, üç boyutun sadece özel bir durumudur. Üç boyutun farklı durumları ve eğrilikleri göz önüne alınmıştır. Öklidyen geometri üç boyutun eğriliğinin sıfır olduğu yerlerde, Janos Bolyai ve Lobachevski'nin geometrisi olan hiperbolik geometri üç boyutun eğriliğinin sürekli negatif olduğu yerlerde, Riemann'ın eliptik geometrisi ise üç boyutun eğriliğinin sürekli pozitif olduğu yerlerde geçerli olduğu varsayılmıştır.[18]

Riemann, evrenin şeklinin ne olduğu sorusunu çok soyut bir şekilde ele almıştır.[19] Riemann’a göre, Öklid geometrisi, üç-boyutlu sonsuz metrik yapıdan sadece özel bir durumu, Bolyai ve Lobachevski’nin geometrileri ise sonsuz durumları karşılayabilmektedir. Fakat başka sonsuz çokluktaki durumlar her iki sistem tarafından da karşılanamamaktadır.[20]

---

[15] Mayme I. Logsdon, “Geometries”, **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLV, No:9, Mathematical Association of America, (Nov., 1938), pp. 573-583, p. 577.
[16] **Ibid.,** p. 577.
[17] Roberto Torretti, **Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare,** 2nd ed., D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984, p. 83.
[18] Jason Socrates Bardi, **The Fifth Postulate: How Unraveling a Two- Thousand- Year- Old Mystery Unraveled the Universe**, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2009, p. 195.
[19] Tabak, **op. cit.,** p. 153.
[20] Torretti, **op. cit.,** p. 40.

Riemann, küreler üzerinde özel durumların çalışılması yerine eğri metrik uzaylarla ilgili genel bir çalışma yapılmasını önermiştir. Bu öneri genel görelilik teoremini mümkün kılmaktadır. [21] Bir çok yönden teorik fiziğe katkısı olan Riemann, uzayın kendi fiziksel kütlesiyle ölçülebileceğini iddia etmektedir. Riemann, fiziksel uzaydaki kütlelerin sadece yer işgal etmediklerini, onların aynı zamanda kendi varlıklarıyla uzayın kendisini büktükleri ve şekil verdikleri birer aktör olduklarına karar vermiştir. Böylece Einstein'ın görelilik teorisinin matematiksel arka planını (bu teorinin ortaya atılmasından altmış yıl önce) oluşturmuştur.

Genel görelelik teorisinde uzay-zaman, eğriliği kütlelerin belirlediği Riemannyen sürekliliğinde görülmektedir. Bağımsız madde parçacığı bu süreklilikte dünya doğrusu olan jeodeziği tanımlamaktadır. Böylece genel görelelik teorisi, kütle çekim fiziğini geometriye indirgemekte ve bütün fiziği geometriye indirgemek için de birleşik alan teorileri inşa etmektedir. Fiziğin geometrikleştirilmesi, tecrübeye bağımlılıktan kurtulmak için matematiğin bir dalı olarak ortaya çıkmaktadır.[22]

Geometrinin temellerini çalışan Riemann, geometriye farklı bir açıdan bakmıştır. O geometriyi şekille örneklememiş; uzayı ve geometri figürlerini göz önünde bulundurmamış; değişkenlerin sistemini ele alarak soyut cebirsel bir açıdan çalışmıştır. Riemann, “Uzunluğun ya da uzaklığın öğeleri olarak adlandırılabilen değişkenlerin fonksiyonunun doğası nedir” sorusunu araştırmıştır. Cevabını değişkenlerin ikinci dereceden fonksiyonun karekökünü alarak bulmuştur. Farklı şekillerde aldığı ikinci derece denklemlerle, sonsuz sayıda farklı çeşit geometri elde etmiştir. Ancak bu geometrilerin çoğunda ‘kütleler kendi boyut ve şekillerini değiştirmeden hareket edebilir’ postulatı işlememektedir.[23]

Riemann, “Geometrinin Temellerindeki Varsayımlar Üzerine”[24] başlıklı makalesinde herhangi bir uzay çeşidinin herhangi bir boyutundaki çok katlıların çalışılmasıyla ilgili genel bir geometri görüşü üzerinde durmuştur. Bir noktadan, bu nokta üzerinde bulunmayan bir doğruya

---

[21] Carl B. Boyer, Uta Merzbach, **A History of Mathematics**, 3rd ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2011, p. 497.
[22] V. F. Lenzen, “Physical Geometry”, **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLVI, No:6, Mathematical Association of America, (Jun. - Jul., 1939), pp. 324-334, p. 325.
[23] Henry Parker Manning, **Non - Euclidean Geometry**, Boston, Ginn & Company Publisers, 1901, p. 93.
[24] Makalenin orijinal adı: “Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen” (“On the Hypotheses which lie at the Foundation of Geometry”)

kaç tane paralel doğru çizilebileceği sorusu ele alındığında, Riemann'ın geometrisi Lobachevski'nin geometrisine göre daha Öklidyen olmayan bir geometridir. Riemann, geometrinin sıradan algılarla illaki noktalar, doğrular ya da uzayla ilgilenmesi gerekmediğini, n-boyutta belirli kurallarla bir geometri kurulabileceğini görmüştür.[25] O düzlemin çeşidi ne olursa olsun ondan vazgeçmek, noktayı, doğruyu ya da düzlemi, verilen bir uzayın nesneleriymiş gibi görmek istememektedir. Aslında onun amacı uzayın da kendisinden tamamen kurtulmaktır.[26] Özet olarak Riemann'ın geometriyle ilgili görüşü, n-boyutlu çok katlıların esas özellikleri ve çok katlıların daha büyük uzay ortamında devrettiği özelliklerin onlara göre nasıl tekrar formüle edildiğiyle ilgili çalışmalardır.[27] Dolayısıyla Riemann'ın elinde geometri, artık uzayın şekli olmaktan çıkmış, transformasyonların ve simetrinin olduğu bir alana dönüşmüştür. Riemann bu konuyla ilgili görüşlerini şöyle dile getirmiştir:

> "Boyutun genel özelliklerinden çok katlı büyütülmüş boyutların özelliklerini oluşturmak ilk görevimdir. Çok katlı büyütülmüş bu boyutların farklı ölçümlerin yapılabileceğinden hareketle, uzayın üç katlı bir boyut olduğu sonucu çıkar. Geometrinin önermeleri boyutun genel özelliklerinden çıkarılamaz, fakat uzay tecrübeyle çıkarılabileceği için diğer üç katlı boyutlardan ayrılır. Bu olgular hipotezdir. Bu hipotezin olasılığının araştırılması gözlemle sınırlıdır ve hem çok büyükler hem de çok küçükler için gözlem limitleri aşılmalıdır. Çok büyükler hakkında doğanın yorumu gereksiz bir sorudur. Fakat çok küçükler için durum farklıdır. Çünkü misroskobun izin verdiği ölçüde çok küçükleri inceleme olanağı doğmuştur."[28]

Riemann'la birlikte önceden kullanılan yöntemlerin aksine diferansiyel geometrinin kullanıldığı, Öklidyen olmayan geometri gelişiminin ikinci dönemine girilmiştir.[29] Böylece geometri daha önceki dönemlerden daha soyut bir döneme geçiş yapmıştır.

1854'de yazdığı makalede Riemann, geometrinin temelindeki hipotezleri incelemiştir. Uzayı, herhangi bir sayıdaki boyutun, topolojik katlı uzayı (manifoldu) olarak tanımlamış; böyle bir katlı uzayda ikinci dereceden bir diferansiyel form aracılığıyla bir metrik oluşturmuştur. Riemann'ın birleştirici ilkesi hem var olan tüm geometri biçimlerinin sınıflandırılmasını sağlamış,

[25] Boyer, Merzbach, **op. cit.,** p. 496.
[26] Kvasz, **op. cit.,** p. 163.
[27] Gray, **op. cit.,** p. 200.
[28] Wolfe, **op. cit.,** p. 60.
[29] **Ibid.,** pp. 60, 61, 62.

hem de çoğu geometride ve matematiksel fizikte işe yarayan istenilen sayıda yeni türde uzay yaratılmasına olanak tanımıştır.[30]

Riemann, modern matematiğin ana mimarlarından biridir. Soyut geometri ve komplex analiz gibi alanların içeriğini genişletmiştir. Riemann'ın çalışması matematik, fizik ve felsefenin etkileşiminden ortaya çıkmış ve bir çok tartışmaya konu olmuştur.[31]

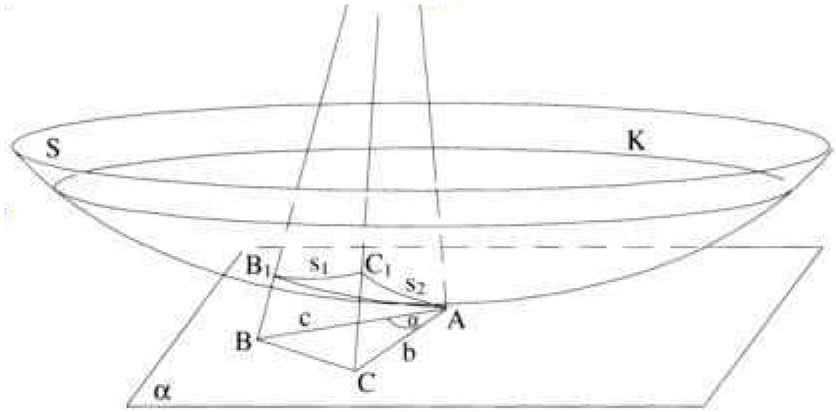
3.3. Beltrami (1835 -1899)

Beltrami, Öklidyen olmayan geometrilerin anlaşılmasına ve yaygınlaştırılmasına katkıda bulunmuştur. O önce 'aykırı küre'yi tanımlamıştır. Bu aykırı kürede doğrular sonsuza gider, verilen doğruya sayısız paralel doğru çizilebilmektedir. Bu aykırı küre aynı zamanda Öklidyen olmayan geometrinin soyut ve gerçek dışı görülmesinden, soyut ama gerçek dünyanın terimleriyle gösterilebilmesine yardımcı olmuştur.[32]

Öklidyen olmayan geometrileri popülarize eden Beltrami 1868'de Öklidyen ve Öklidyen olmayan geometrilerin mantıksal tutarlılığını ispatlamıştır. Bunu diferansiyel geometri yardımıyla sürekliliği göstererek elde etmiştir. Öklidyen olmayan geometrinin postulatlarının sürekliliğini, Öklidyen geometrinin postulatlarının sürekliliğine indirgemiştir. Beltrami'nin çalışması Bolyai ve Lobachevski'yi model almıştır. 1871'de bu çalışmayı Klein, Riemann'ın küresel geometrisini de ekleyerek tamamlamıştır.[33]

---

[30] Struik Dirk J., **Kısa Matematik Tarihi**, Çev. Yıldız Silier, İstanbul, Doruk Yayımcılık, 2011, s. 228.
[31] Ferreiros, Gray, **op. cit.,** p. 67.
[32] Gray, **op. cit.,** p. 216.
[33] Ibid., p. 218.



Şekil 16[34]

Desargues, her bir nesneye tek bir arka plan kullanırken Beltrami her bir nesneye iki arka plan vermiştir. Beltrami modelinde önce Öklidyen düzlemi ele almış ve bu düzlem üzerinde çember şeklinde Öklidyen olmayan arka planı konumlandırmıştır; daha sonra bu Öklidyen olmayan arka plan üzerinde nesneyi göstermiştir. Böylece aynı anda iki arka plan üzerinde nesnenin iki şekli oluşmuştur. Öklidyen düzlemin dışındaki arka planda çember kirişi olarak yerleşen nesne aynı zamanda içerideki arka planda Öklidyen olmayan düzlemde düz bir doğru olarak yerleşmiştir. Nesnelerin bu koordinasyonu Öklidyen olmayan geometrilerin sürekliliğinin ispatını mümkün kılmaktadır.[35]

Beltrami'nin modeli Öklidyen geometri içinde Öklidyen olmayan geometrinin sürekliliğinin modelidir. Fakat bu iki geometrinin eşit statüde olduğu anlamına gelmemektedir. Bu modelde Öklidyen geometri, Öklidyen olmayan geometrinin ön varsayımıdır. Öncelikle Öklidyen düzlem verilmelidir. Daha sonra bu düzlemin üzerine şekildeki (K) çemberi çizilmeli ve bu çemberin içinde Öklidyen olmayan düzlem yapısı oluşturulmalıdır. Bu durum Öklidyen geometrinin, geometrinin ön varsayımı olarak transendental olduğu anlamını taşımaktadır. Bu görüş, Kant'ın geometri felsefesini destekler niteliktedir. Beltrami'nin modelinde a priori karakter bozulmamıştır. Böylece Öklidyen geometri, bu modelde uzamsal kurumun a priori olma statüsünü koruyabilmektedir.[36]

[34] Kvasz, **op. cit.,** p. 151.
[35] **Ibid.**, pp. 153, 154.
[36] **Ibid.**, p. 154.

3.4. Felix Klein (1849 -1925)

1871'de Klein *Öklidyen Olmayan Geometri Üzerine*[37] adlı eserinde üç boyutlu eliptik geometriyi tanımlamış ve Beltrami'nin modelini basitleştirerek sunmuştur. Ayrıca Klein Cayley'in izdüşüm metriğiyle hiperbolik geometri arasında kurduğu ilişkiyi tespit etmiştir.[38] 1859'da Cayley'in uzaklık kavramıyla ilgili yaptığı çalışmaları, 1871-1873 tarihlerinde Klein Öklidyen olmayan geometri bakış açısıyla yorumlamış ve geliştirmiştir.[39] Klein Öklidyen olmayan geometrilerin nasıl Cayley metrikli izdüşüm geometrisi olarak kavranılabileceğini göstermiştir. Böylece Bolyai ve Lobachevski'nin kuramlarının yaygınlaşmasını ve mantıksal tutarlılığının anlaşılmasını sağlamıştır.

Klein, 'Erlangen Programı'nın kurucusudur. O bu programda izdüşüm geometrisinin Öklidyen geometriye göre daha temel olduğunu göstermiştir. Diğer bir deyişle, Öklidyen geometrinin izdüşüm geometrisinin çok özel bir durumu olduğunu ortaya koymuştur.[40] Aynı şekilde Öklidyen olmayan geometrilerin de izdüşüm geometrisinin özel durumları olduğunu göstermiştir.[41]

Ayrıca Klein, Öklidyen olmayan geometrilerin ve 'grup teorisi'nin özümsenmesinde rol oynamıştır. Klein, her geometri çeşidinin belirli bir dönüşüm grubunun değişmezlerinden oluştuğunu iddia etmiştir. Geometriler arası geçişin, grubunun genişletilmesi ya da daraltılmasıyla mümkün olduğunu belirtmiştir. Dönüşüm gruplarının sınıflandırılması geometrinin sınıflandırılışını belirlemektedir; her grubun cebirsel ve diferansiyel değişmezlerinin kuramı ise geometrinin analitik yapısını vermektedir.[42]

Klein, grup teorisi metodunu bütün geometriyi birleştirmek için kullanmıştır. Aslında Klein, geometrinin temeli içinde örtük bir biçimde olan içeriği açık hale getirmiştir. Yunan geometrisinde dönüşümler neredeyse hiç çalışılmamıştır, ancak izdüşüm geometrisiyle birlikte bu içerik zenginleştirilmiş ve dönüşümler çalışılabilecek duruma gelmiştir. Bir sonraki bölümde

---

[37] Kitabın Orijinal adı: *Uber die sogenannte nichteuklidische Geometrie*
[38] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, **Mathematics of the 19th Century: Geometry, Analytic Function Theory**, Trans. by Roger Cooke, Basel, Birkhauser Verlag, 1996, p. 71.
[39] Wolfe, **op. cit.**, p. 63.
[40] Tabak, **op. cit.**, p. 91.
[41] Gray, **op. cit.**, p. 310.
[42] Kolmogorov, Yushkevich, **op. cit.**, p. 71.

ayrıntılarına değinileceği üzere grup içeriğinin yeniden yapılandırılması Poincaré tarafından yapılmıştır. Böylece izdüşüm geometrisi ile Poincaré'nin grup içeriği çalışmalarıyla, grup teorisi Klein tarafından kullanılabilir hale gelmiştir.[43]

Klein 'parabolik geometri', 'hiperbolik geometri' ve 'eliptik geometri'nin isim babasıdır. Öklidyen geometri için parabolik terimini türetmiştir. Bolyai ve Lobachevski'nin geometrileri için Yunanca 'aşmak' anlamına gelen 'hyperballein' kelimesinden 'hiperbolik'i türetmiştir. Riemann'ın geometrisi için Yunanca 'yetersiz kalmak' anlamında olan 'elleipein' kelimesinden 'eliptik' terimini türetmiştir.[44] Bu terminoloji günümüzde neredeyse evrensel olarak kabul edilmiştir.[45]

3.5. Henri Poincaré (1854 - 1912)

Poincaré, *Bilim ve Varsayım*[46] başlıklı kitabında geometri uzayı ile duyusal algı uzayı arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Poincaré geometri uzayını sürekli, sonsuz, homojen, eş yönlü ve üç boyutlu kabul etmiştir. Görsel algı uzayının ise homojen, eş yönlü ya da üç boyutlu olmadığını göstermiştir. Dolayısıyla sadece görsel algılarla geometri uzayının içeriğinin oluşturulamayacağı sonucunu çıkarmıştır. Diğer algı çeşitlerinde de benzer sonuçlar elde etmiştir. Buradan geometri tasavvurunun herhangi bir algı organından ziyade duyusal ve motor algılarla beraber bir bütünlük içinde oluştuğu anlaşılmaktadır. Böylece geometri uzayının içeriği ilk aşamada vücutla ilintilidir ve bunu sadece görsel algıya çıkarmak epistemolojik bir hatadır.[47]

Poincaré, farklı çeşitlerdeki algıların (görsel, dokunsal ve hareketsel) birbirleri ile olan ilişkisiyle geometri uzayı içeriğinin ortaya çıkarıldığını iddia etmiştir. Bu ilişkiler arasında önemli olan dengedir. Örneğin vücudun veya gözün hareketiyle görsel alanda denge yaratılabilmektedir. Poincaré, bu dengelerin bir grup yapısına sahip olduğunu ve bu grubun Öklidyen uzaydaki dönüşümlerin grubu olduğunu göstermiştir. Yani Öklidyen uzay ne görülen uzay, ne dokunulan uzay ne de hareket edilen uzaydır. Öklidyen uzay bu üç duyunun bir arada olduğu uzay yapısındadır. Analizlere göre gruplamanın içeriği kişiyle ilgilidir. Öklidyen grup öyle

[43] Kvasz, **op. cit.**, pp. 160, 161.
[44] Bardi, **op. cit.**, p. 199.
[45] Wolfe, **op. cit.**, p. 63.
[46] Kitabın Orijinal adı: *La Science et l'Hypothese*
[47] Kvasz, **op. cit.**, pp. 160, 161.

bir araçtır ki her kişinin özel duyu algılarını aşmasına yardım etmektedir. Bu durumda grup teorisi ayrı algı organlarının izlenim serilerinden, dengeleyici ilişki yapısının değişmezlerine dönüşümü mümkün kılan bir teoridir. Temel olarak sadece uzayın içeriğini değil aynı zamanda nesnenin, gerçekliğin içeriğini de göstermektedir.[48]

Klein, grup yapıları içeriğinin temelleri uzayın içeriğinden oluşturulduğundan dolayı bu grup içeriğini, geometride etkin bir biçimde kullanmıştır. Klein'nin uyguladığı Erlangen Programı'nın başarısı geometriyi birleştirmesinden kaynaklanmaktadır. Bu programda temellenen grubun içeriği, uzayın içeriğinin epistemolojik temelini şekillendirmektedir. Böylece grup teorisinin yardımıyla geometri bütünleşmiş ve yüksek bir soyut seviyeye ulaşmıştır. [49]

Poincaré "Geometrinin postulatları ne a priori sentetik yargılardır ne de deneysel olgulardır. Onlar geleneksel üsluplardır." diyerek çoklu geometrilerin üretilmesinde ortaya çıkan felsefi krizin aşılmasına yardım etmiştir. Poincaré, geometrinin doğru olmadığını, yararlı olduğu sonucunu çıkarmıştır.[50,51] Yerçekimsel alanda Riemann geometrisi kullanımının daha uygun olduğunu düşünen Poincaré, amaca göre hangi geometrinin kullanımı daha uygunsa onun kullanılması gerektiğini belirtmiştir.

---

[48] **Ibid.**, pp. 161, 162.
[49] **Ibid.,** pp. 161, 162.
[50] Bardi, **op. cit.**, p. 199.
[51] Shahen Hacyan, **"**Geometry as an Object of Experience: Kant and the Missed Debate between Poincare and Einstein", w.place, February 2, 2008, p. 5.

SONUÇ

Bu tezde 'Öklidyen olmayan geometriler nasıl oluşmuştur' sorusu araştırılmıştır. Bu oluşumu ortaya koymak amacıyla; bu oluşuma katkıda bulunduğu düşünülen gelişmeler, Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesi ve kabul edilmesi olmak üzere üç aşama incelenmiştir. Dolayısıyla tez, Antik Dönem'den XX. yüzyıl başına kadar olan süreci kronolojik olarak tarayan bir geometri tarihi ve felsefesi çalışması haline gelmiştir. Açıklayıcı araştırma yöntemi benimsenerek, incelenen oluşum sürecindeki çalışmalar arasında neden-sonuç ilişkisi kurulmaya, olgu ve olaylara açıklık getirilmeye çalışılmıştır. Bilgi toplarken, zaman zaman ikincil kaynaklara başvurulmuş ve bu çalışmaların analizi yapılmaya çalışılmıştır.

Tezin ilk bölümünde, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna katkıda bulunduğu düşünülen gelişmeler incelenmiştir. Dolayısıyla Antik Dönem'den, XIX. yüzyılda Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesine kadar geçen süreçte geometri, felsefe ve sanat dahil bir çok alanın katkıları ortaya konmaya gayret edilmiştir.

Birinci bölümün ilk alt-bölümünde, geometrinin sadece fiziksel uzayla ilgilendiği düşünülen ilk dönemi -geometrinin tartışmalı olarak bilinen doğuşu- üzerine kısaca bir giriş yapılmıştır. Antik Yunan öncesi döneme denk gelen bu dönemde geometrinin ölçüm üzerine kurulu deneysel bir yapısı olduğu belirtilmiştir.

İkinci alt-bölümde, Antik Yunan'da geometrinin tanımlardan, aksiyomlardan, postulatlardan, teoremlerden ve ispatlardan oluşan bir sistem haline (soyut olarak adlandırılabilecek bir yapıya) dönüşümü gösterilmiştir. Bu dönemin geometricilerinden biri olan Öklid'in, döneminin geometri bilgisini sistematik biçimde *Elementler* başlığı altında bir araya getirmesiyle Öklidyen geometrinin oluşumuna değinilmiştir. Birçok geometrici için tartışma konusu olan *Elementler*'in içinde tanımlanan postulatlardan beşincisi üzerine irdelemeler bu bölümde başlatılmıştır.

Bu ilk aşamanın kapsadığı iki bin yıl boyunca geometriciler, geometri sistemini sağlam temeller üzerine oturtmak için Öklidyen geometrinin temelinde bulunan paralel postulatı ispatlamaya çalışmışlardır. Paralel postulatın tahayyül edilmesi kolay olduğu için onun doğruluğu bu süreçte sorgulanmamıştır. Bazı geometriciler paralel postulatı, postulatlar arasından çıkarıp teorem olarak kabul etmek istemişlerdir. Fakat teorem olarak kabul etmek için ispatının yapılması gerekmektedir. Böylece iki bin yıllık ispat arayışı postulatın yazılmasıyla başlamıştır. Bu süreçte yapılan ispatlar genellikle ispatı yapan geometricinin ardından gelen geometriciler tarafından çürütülmüş, çürüten geometricinin ortaya koyduğu ispat ise onun ardından gelenler tarafından reddedilmiştir. Birçok geometrici paralel postulatı ispatlamaya çalışmış ve bu çalışmaları sırasında bazı ilginç sonuçlara ulaşmış olsalar da başarısız olmuşlardır. Bu başarısız gözüken ispatlama çalışmaları, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşmasında en büyük katkıyı sağlamışlardır. Bu postulatın iki bin yıl boyunca ispatlanamaması muhtemelen hiç ispatlanamayacağı ya da doğruluğu olmadığı yönünde kuşkuları doğurmuştur. Bu kuşkular da Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesini sağlamıştır. Marvin Jay Greenberg iki bin yıllık ispat bulma çabasının önemini şu sözleriyle dile getirmiştir: “Eğer idealist hayalperestler Öklid’in paralel postulatını ispatlamak için iki bin yıl harcamasalardı bugün Galaksi’yi keşfe çıkan uzay gemileri olmazdı.”

Üçüncü alt-bölümde, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecini dolaylı olarak etkilemiş olan İslam geometricilerinin, özellikle cebir yoluyla yaptığı katkılarıyla geometrinin daha sembolik bir sisteme dönüşümü gösterilmiştir. Bu dönemde ayrıca, bazı Öklidyen olmayan geometri sonuçları elde eden XVIII. yüzyıl geometricilerinin kendi ispatlarında uyguladıkları, İslam geometricilerinin yöntemleri ele alınmıştır.

Dördüncü alt-bölümde, ilk Öklidyen yapıda olmayan çalışma niteliğine sahip, izdüşüm geometrisinin oluşumu üzerinde durulmuştur. Öncelikle bu tip bir geometrinin oluşumuna öncülük eden Rönesans Dönemi perspektif çalışmalarından bahsedilmiş, daha sonra perspektifin izdüşüm geometrisine dönüşümü gösterilmeye çalışılmıştır. Böylece homojen olarak yapılandırılmış Öklidyen geometriye karşı, ‘gören nokta’ kavramıyla paralel doğruların kesiştiği, Öklidyen geometriden farklı özelliklere sahip ilk çalışma olan izdüşüm geometrisi yapılandırılmıştır. Dolayısıyla ilk Öklidyen yapıda olmayan geometri kökeni, sanat çalışmalarından gelmektedir.

Birinci bölümün son alt-bölümünde, Aydınlanma Dönemi’nde geometride meydana gelen gelişmeler üzerinde durulmuştur. Paralel postulat yazıldıktan XVIII. yüzyılın sonuna kadar geometriciler, bu postulatın ispatlanabileceğine inanmışlardır. Bu dönemde farklı ispat yöntemleri denemeye başlayan geometriciler, farklı sonuçlar bulmaya da başlamışlardır. Bu çeşitli sonuçlarla oluşan geometriler, ‘evrensel geometri’, ‘görünenlerin geometrisi’ gibi Öklidyen geometriden farklı isimlerle anılmaya başlanmasına rağmen, bu dönemde Öklidyen geometriye olan inanca devam edilmiştir. Bu inanç sebebiyle, (üretilen geometrilerin Öklidyen olmayan yapıda olmasına rağmen) Öklidyen geometriye eş değerde ve tam anlamıyla alternatif olacak geometrik bir sistem kurulamamıştır. Böylece bu geometriler Öklidyen olmayan geometrinin ortaya çıkmasına sadece katkıda bulundukları için bu aşamada ele alınmışlardır.

Tezin ikinci bölümünde, Öklidyen geometriye eşdeğerde ve alternatif olarak üretilen Öklidyen olmayan geometri sistemleri, kurucularıyla beraber ele alınmıştır. İlk bölümden farklı olarak bu bölümde, Öklidyen olmayan geometriler bilinçli ve sistemli bir şekilde kurulmuştur.

Önceki bölümde gösterilen iki bin yıllık, Öklid’in paralel postulatını ispatlama çalışmalarının başarısızlığı, XIX. yüzyılda postulatın doğruluğu hakkında kuşkuları doğurmuştur. Artık matematik Tanrı’nın dili olduğu Altın Çağı’nı tamamlamış, insan üretimi, hata payı olabilen bir çağa girmiştir. Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumuna yön veren “paralel postulat kaldırılırsa ne olur” ve “bu postulat yerine farklı bir postulat konursa ne gibi sonuçlar elde edilir” gibi sorular sorulmaya başlanmıştır. Böylece Öklidyen geometrinin tek doğru geometri sistemi olduğu inancı da sarsılmıştır. Bu konudaki düşüncelerini hiç yayımlamamasına rağmen, paralel postulatın bağımsız olduğuna, yani seçilen başka bir postulata dayanan başka geometrilerin de mantıksal olarak olanaklı olduğuna ilk inanan kişi Gauss'dur.

Bu bölümde öne çıkan isimlerden Schweikart, Lobachevski ve Bolyai, Öklid’in paralel postulatı yerine kendi postulatlarını koymuş ve böylece Öklidyen olmayan geometrilerin kurucuları unvanına sahip olmuşlardır. ‘Astral geometri’, ‘Sanal geometri’ ve ‘Salt geometri’ şeklinde isimlendirilen çalışmaları, Öklidyen geometriye eşdeğerde ve tam anlamıyla alternatif geometri sistemleridir.

Sanal geometri ve Salt geometri gibi yeni oluşturulan bu geometri sistemlerinin sadece Öklidyen geometriden farkları sunulmamış aynı zamanda birbirleri arasındaki benzer ve farklı özellikleri de gösterilmeye çalışılmıştır. Lobachevski ve Bolyai’nin bu konuda yazdığı makaleleri farklı olmasına rağmen kuramları temel olarak birbirine benzerlik göstermektedir. İkisi de üç boyut üzerinde geometri çalışmıştır ve temel sonuçlarını trigonometrik formüllerle belirtmişlerdir.

Bolyai'den farklı olarak Lobachevski, bazı noktalarda daha açıktır ve Öklidyen geometri ile kendi geometrisi arasında ortak teoremleri bulmaktansa, kendi geometrisine ait yeni teoremler bulmayı tercih etmiştir. Aynı döneme denk gelen -daha sonra hiperbolik geometri olarak adlandırılan- bu yeni tip geometrinin birbirinden bağımsız olarak nasıl dünyanın farklı yerlerinde ortaya çıktığı dikkat çekici bir sorudur. Bu soru tezin araştırma konusunu aştığı için incelenmemiştir, fakat gelecek çalışmalar için önerilmektedir.

Hiperbolik geometrinin keşfedilmesiyle fiziksel uzayın hangi bölümlerinde (astronomik, mikroskobik,...) hangi geometrinin daha uygun olduğu bulunmak istenmiştir. Gauss ve Lobachevski, deneylerini dönemin teknolojik imkanlarının verdiği ölçüde yapmalarına rağmen Öklidyen olmayan geometriye örnek bulamamışlardır. Fakat Lobachevski, kütlelerin çekim güçlerine bağlı olarak uzayın farklı bölümlerinde, farklı geometrilerin oluşabileceği düşüncesindedir ve bu fikriyle Einstein'dan altmış yıl kadar önce Genel Görelilik'in geometri öngörüsüne sahiptir.

Öklidyen olmayan geometri, bir süre geometrinin anlaşılması güç bir alanı olarak kalmış ve çok az ilgi görmüştür. Lobachevski ve Bolyai'nin görüşleri uzun yıllar kabul edilmemiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Öklidyen olmayan geometrilerin yorumlanması ve bütünleştirilmesiyle, geometri sisteminin içinde kabul edilmesi incelenmeye çalışılmıştır. Bu son bölümde, öncelikle Riemann'ın Öklidyen ve hiperbolik geometriden farklı oluşturduğu, 'eliptik geometri' adlı Öklidyen olmayan geometrisi sunulmuştur. Riemann, Öklidyen ve Öklidyen olmayan geometrileri temellendirmiş ve hepsinin genel bir sistemin birer örneği olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra Riemann'ın geometri içeriğinin fiziksel uzayı temsil etmek zorunda olmadığı düşüncesiyle, diferansiyel geometriyi yüksek boyutlulara uyguladığı geometri incelenmiştir. Riemann sonsuz sayıda farklı çeşit geometriler elde etmiştir. Böylece Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesinin ardından geometrinin yüksek, soyut seviyeye dönüştüğü farklı bir döneme girilmiştir.

Burada belirtmek gerekir ki geometrinin XIX. yüzyılda ulaştığı bu soyutlama Antik Yunan'da yapılan soyutlamadan farklıdır. Doğada mükemmel bir doğru ya da tam bir çember bulunmasa da Antik Yunan'da tecrübe edilen objelerden soyutlamayla ideal objeler üretilmiştir. Diğer bir deyişle, Antik Yunan'da geometri, tecrübe edilmiş objelerin tasarımından oluşan ideal objelerle oluşmakta ve soyut, tek geometri sisteminin görüntüsü fiziksel uzayın kendisini vermektedir. XIX. yüzyıldaki soyutlama ise fiziksel uzayı temsil etmeksizin keyfi, sonsuz sayıda soyut geometri sistemleri üzerine kurulmuştur.

Riemann’nın tezinin yayımlanmasıyla Öklidyen olmayan geometriler çalışılmaya başlanmıştır. Fakat kuramların tam kabulü ancak Riemann'dan sonraki kuşak, 1870 ve sonrasında bu kuramların anlamının kavranmasıyla gerçekleşmiştir. Bu anlamın kavranmasında Poincare’nin grup çalışmasının ve Klein’in grup teorisini uyguladığı Erlanger Programı’nın etkisi büyüktür. Klein grup teorisini kullanarak bütün geometrilerin izdüşüm geometrisinin özel durumları olduğunu ortaya koymuş ve tüm geometri çeşitlerini ortak bir çatı altında toplamıştır. Böylece, Bolyai ve Lobachevski'nin göz ardı edilmiş olan kuramlarının sonunda tanınmasını ve mantıksal tutarlılığının anlaşılmasını sağlamıştır. Dolayısıyla bu noktada, Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum süreci tamamlanmıştır.

Öklidyen Olmayan Geometrilerin Oluşumu Sonrası Bazı Felsefi Tartışmalar

Geometri bir devlet işi olarak doğmuştur. Antik Yunan Dönemi’yle beraber bireysel bir uğraşa dönüşmüştür. Bu dönüşümün oluşmasında tarihsel ve toplumsal bağlamın önemi yadsınamaz. Antik Çin’de sembollerin kullanılmadığı bir geometri ve matematik vardır; soyut sistem kurmak yerine uygulamalı alana odaklanılmıştır. Antik Çin aritmetikte ilerlemiş; Antik Yunan aksiyomatik bir sistem olan Öklidyen geometriyi oluşturmuştur. Buradan matematik ile geometri gibi en formel disiplinlerin bile belirli tarihsel toplumsal bağlamda oluşan ve şekillenen birer pratik olduğunu iddia edebiliriz. Bunun bir diğer örneği İslam geometricilerinin geometri problemlerini cebirsel bir biçimde ele almalarıdır.

Bilim yalnızca bilimin kendisine bakılarak anlaşılamaz. Diğer bir deyişle disiplinler yalnızca kendi içsel mantıkları içinde gelişip dönüşmezler. Geometrinin oluşumu yalnızca geometricilerin çalışmalarıyla tanımlanamaz. Geometri toplumla, inançla, sanatla ve fizik gibi diğer bilimlerle yakından ilişkilidir. Bu etkileşimler anlaşılmadan Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumu anlamlandırılamaz.

“1800’lere kadar bütün matematikçiler Öklidyen geometrinin fiziksel uzayın ve uzaydaki şekillerin doğru idealleştirilmiş özellikleri olduğuna inanıyorlardı”[1] Öklidyen geometrinin zorunlu doğrulukların örneği olduğunu, Öklid’in aksiyom ve postulatlarının kendiliğinden doğrular olduklarını düşünüyorlardı.[2] Çeşitli eğilimlere sahip Descartes, Hobbes, Spinoza, Locke, Hume ve Kant gibi birçok modern filozof Öklidyen geometriyi epistemik kesinliğin bir örneği olarak kabul etmişlerdi.[3]

Öklidyen geometrinin zorunluluğuna dair fikirden vazgeçmeden Öklidyen olmayan geometrileri oluşturmak imkansızdır.[4] Öklidyen olmayan geometrilerin keşfinin bir devrim olup olmadığı ya da bir devrimse ne türden bir devrim olduğu Crowe, Dauben, Dunmore ve Gillies gibi felsefeciler tarafından tartışılmıştır.

Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesi matematiğin kesin doğruluğunu sarsmıştır. “Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi matematikte Antik Yunan Dönemi’nden beri yapılan en önemli ve devrimsel adımdır.”[5] Bu keşif matematiksel doğruluğun zorunluluğunu çürütmüştür.[6] “1900’lü yıllarda matematik gerçeklikten kopmuştur. Doğa hakkındaki doğruluk iddiasını kaybetmiş ve anlamsız şeyler hakkında keyfi aksiyomların zorunlu sonuçlarının peşinde koşmaya başlamıştır.”[7] Matematik için artık iki farklı doğruluk içeriği oluşturulabilir: Realistik doğruluk ve formel doğruluk.[8] Formel doğruluğun içeriğinin bağımsızlığı matematiksel düşünmenin özgürlüğünü tasdikliyor. Formel doğruluk içeriği matematiğin sadece bilim olmadığını aynı zamanda bir kültür olduğunu ortaya koyarak matematiğin bir diğer yönünü gösteriyor.[9]

---

[1] Klein 1972, p. 861, quoted in Yuxin Zheng, “Non-Euclidean Geometry and Revolutions in Mathematics”, **Revolutions in Mathematics**, Clarendon, Oxford, 1992, p. 174.
[2] Zheng, **op. cit.**, p. 174.
[3] (Çevrimiçi) Roberto Torretti, "Nineteenth Century Geometry", **The Stanford Encyclopedia of Philosophy***,* Ed. by Edward N. Zalta , Winter 2014 Edition, http://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/geometry-19th/. 02 Şubat 2016.
[4] Zheng, **op. cit.**, p. 175.
[5] Klein 1972, p. 861. quoted in Zheng, **op. cit.**, p. 176.
[6] Zheng, **op. cit.**, p. 179.
[7] Klein 1972, p. 1035, quoted in Zheng, **op. cit.**, p. 179.
[8] Zheng, **op. cit.**, p. 179.
[9] **Ibid.,** p. 181.

Öklidyen olmayan geometrilerin oluşturulması modern matematiğin gelişiminin başlangıcı olarak kabul edilir. Modern matematiğin en belirgin karakteristiği matematik nesnelerinin sadece deneyimden soyutlanan şekiller ve ilişkiler olmadığı, aynı zamanda mantıksal olarak mümkün olan şekiller ve ilişkilerden oluştuğudur. Hilbert nokta, doğru, düzlem yerine masa, sandalye, kupa da kullanabiliriz demiştir. Geometri artık belirli nesnelerle sınırlandırılmıyor, nesne - aksiyom - tümdengelim yerine hipotez - tümdengelime dönüşüyor. Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi matematikçilerin matematiğin doğasını kavrayışlarını ve bunun fiziksel dünyayla olan ilişkisini radikal bir şekilde gözden geçirmelerine mecbur bırakmıştır.[10]

XIX. yüzyıldan itibaren geometri terimlerinin anlamlılığı, geometride bilgiye nasıl ulaşıldığı ve geometrinin neden fiziksel uzayda karşılık bulduğu sorgulanmıştır. Matematiksel nesnelerin temellendirilmesi ya da bir temele ihtiyacı olup olmadığına dair birçok felsefi tartışma ortaya çıkmıştır. Bu temellendirme çalışmalarında geometri bilgisinin empirik bilgi ya da a priori bilgi olup olmadığı geometri felsefesinin en çok tartışılan konularından biri haline gelmiştir.

Felsefeciler geometri nesnelerinin nasıl oluşturulduğuyla uzun süre ilgilenmişlerdir. Antik Yunan Dönemi'nden günümüze Locke, Hume ve Kant gibi birçok önde gelen felsefeci geometri nesnelerinin konumuna dair görüşlerini belirtmiştir. Geometri felsefesi yapılan süre içinde, genel olarak felsefeciler geometrinin a priori doğrular olduğuna dair daha açık görüşlüdürler.

Öklid'in paralel postulatının XIX. yüzyılda tekliğinin sarsılmasının ardından felsefede postulatların konumu da sorgulanmaya başlanmıştır. Bu konumlandırmada postulatların empirik doğrular mı a priori doğrular mı olduğunun belirlenmesi öncelikli hale gelmiştir. Kant'a göre, Öklid'in teoremleri ve postulatları bir genelliğe sahiptir ve hiçbir genellemenin sahip olamayacağı bir zorunlulukla yakından ilintilidir.[11] Kant'a göre bir şeyi bilmek ya da herhangi türden bir inanca sahip olmak bir yargıda bulunmaktır. Ancak ve ancak bir yargıdaki kavramlar ve onların birleşiminin biçimi üzerine salt düşünme, bir kimseye yargının doğru olup olmadığını bilmeyi yeterince sağlamıyorsa, yargı sentetiktir.[12] Buradan Kant matematik ve geometriyi sentetik a priori olarak konumlandırmıştır. Jaakko Hintikka, Charles Parsons, Stephen Barker ve Michael

[10] **Ibid.,** p. 176.
[11] Stephen F. Barker, **Matematik Felsefesi,** Çev. Yücel Dursun, Ankara, İmge Kitabevi, 2003, s. 53.
[12] **A.e.,** s. 23, 24.

Friedman gibi birçok geometri felsefecisi Öklidyen olmayan geometrilerin keşfini Kant'ın bilgi kuramı tabanında incelemişlerdir.

Öklidyen olmayan geometrilerin üretilmesiyle Öklidyen geometri temel yaklaşım olma özelliğini izdüşüm geometrisine bırakmış ve Hilbert'in geometriyi aksiyomatikleştirmesine alan açmıştır. Daha zengin aksiyomatik sistemlerin oluşturulmasıyla teorik geometri daha da gelişmiştir. XX. yüzyılın başlarında geometrinin içeriği büyük ölçüde genişlemiş ve geometriyle ilgili felsefi fikirler derinleşmiş ve genişlemiştir. Öklidyen olmayan geometriler anlaşılmış, kabul görmüş ve birçok farklı alanda etkilerini göstermeye başlamıştır. Öklidyen olmayan geometrilerin oluşumunun tamamlanmasından sonra etkilediği alanlar farklı bir çalışmanın konusu olduğundan onlara tezin içinde değinilmemiştir. Fakat ileri çalışmalar için faydası olabileceği düşünüldüğünden burada kısa bir şekilde değinilecektir.

1870'den 1914'e kadar uzayın Öklidyen geometriye uygun bir yapıda olmayabileceği fikri yaygınlaşmıştır. Bu fikir zamanın bir boyut olarak ele alınması ve böylece uzayın dört boyutlu olabileceği tartışmalarıyla birlikte düşünülmüştür. Öklidyen olmayan geometrilerin bir olasılık olarak matematikçiler arasında kabul edilmesinden sonra uzayın, Öklidyen olmayan bir geometriyle daha iyi tanımlanabileceği fikri kabul görmüştür. Böylece Öklidyen olmayan geometrilerin keşfi sadece geometrinin anlamını değiştirmekle kalmamış aynı zamanda fiziksel uzayın da anlamını değiştirmiştir.

Öklidyen olmayan geometrilerin diğer akademisyenler tarafından kabul görmesinde Einstein'nın Görelilik Teorisi'nin de etkisi vardır. 1915'de oluşturulan bu teoriye göre ışığın iki nokta arasında aldığı en kısa yol Öklidyen değil, Öklidyen olmayan bir doğru oluşturmaktadır. Çünkü Öklidyen bir yüzeyde doğru, bükülmez olarak tanımlanırken, Öklidyen olmayan geometride doğru, verilen uzayda birleşen iki nokta olarak tanımlanmaktadır. Dolayısıyla Öklidyen olmayan geometride doğrular bükülebilir ve eğrilebilir yapıdadırlar. Böylece Öklidyen olmayan geometriler Einstein'ın Görelilik Teorisi'nin matematiksel temelini oluşturmaktadır. Bu teoriye göre eğer uzayda hiçbir kütle yoksa uzay Öklidyen geometriye uygun olabilir, fakat büyük bir kütle varsa bu kütlenin çekimiyle uzay bükülmektedir.

Eddington, 1919'da Einstein'ın teorisini ispatlamak için güneş tutulması anında fotoğraflar çekerek, uzak yıldızların ışıklarının Riemann'ın geometrisine daha uygun olduğunu göstermiştir. Eddington, yaptığı deneyde uzay ve zamanın büküldüğünü ve kütlenin bunu etkilediğini gözlemlemiştir.

Öklidyen olmayan geometri sistemlerinin oluşturulması sadece geometri içeriğini değiştirmekle kalmamış, geometri algısı ve doğruluğu dahil birçok felsefe sorusunun doğmasına önayak olmuştur. Her ne kadar Kvasz gibi bazı düşünürler Desargues, Lobachevski, Beltrami, Cayley, Klein, Riemann ve Poincare gibi geometricilerin, geometri tarihi açısından sadece süreklilik arz ettiğini ve yeni bir içerik üretmekten ziyade geometri içeriğinin daha iyi temellendirilmesini sağladıklarını düşünseler de bazı düşünürler bu geometricilerin oluşturdukları Öklidyen olmayan geometri içeriğini geometri tarihi açısından devrim olarak ele almaktadırlar. Bunun nedeni artık geometrinin, fiziksel dünyanın geometrisi olmak zorunda olmadığı ve bağımsız şekilde yapılandırılabilmesidir.

Öklidyen olmayan geometrilerin oluşum sürecinde sanatın etkisi olduğu gibi oluşan Öklidyen olmayan geometriler de sanata etki etmişlerdir. Lewis Carroll'un Aynanın İçinden adlı eseri tümsek bir ayna tarafından olağan uzayı sanal uzay üzerine birebir eşleştiren bir hikayedir; ve bu Öklidyen olmayan geometrilerin sanata yansıması olarak yorumlanmıştır. Lewis Carroll (H. P. Lovecraft), Vasarely, Escher, Yturralde gibi isimlerin sanat eserlerinde Öklidyen olmayan geometrilerin etkilerinin olduğu düşünülmektedir. XIX. yüzyıl sonları, XX. yüzyılın başlarında zamanın da bir boyut olabileceği fikriyle boyut sayısının üçten dörde yükselmesi aynı zamanda yüksek boyutlu geometrilerin baz alındığı sanat formlarına ilgiyi arttırmıştır. Pablo Picasso, Georges Braque ve Salvador Dali bu sanat formlarını uygulayan isimlerdendir. Dolayısıyla Öklidyen olmayan geometrilerin etkisinin sadece bilimsel ve felsefi teorilerin üzerinde değil, aynı zamanda sanat alanında kübist ve sürrealist sanatçıların üzerinde de etkisi olduğu düşünülmüştür. Böylece, modern sanatın doğumu ile Öklidyen olmayan geometrilerin doruğu aynı döneme denk gelmiştir.

KAYNAKÇA

Bardi, Jason S. : **The Fifth Postulate/ How Unraveling a Two- Thousand- Year-Old Mystery Unraveled the Universe**, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2009.

Barker, Stephen F. : **Matematik Felsefesi**, Çev. Yücel Dursun, Ankara, İmge Kitabevi Yayınları, 2003.

Blumenthal, Leonard M. : **A Modern View of Geometry,** New York, Dover Publications Inc., 1980.

Bonola, Roberto: **Non - Euclidean Geometry**, New York, Dover Publications, Inc., 1955.

Boyer, Carl B. & Merzbach, Uta: **A history of mathematics**, 3rd ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2011.

Bulmer, Thomas Ivor: "Menelaus of Alexandria", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.IX, New York, 1981.

Cooke, Roger: **The History of Mathematics: A Brief Course**, New York, Wiley-Interscience, 2005.

Daniels, Norman : "Thomas Reid's Discovery of a Non-Euclidean Geometry", **Philosophy of Science**, Vol.XXXIX, No:2, The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association, Jun., 1972, pp. 219-234.

Dicks, D. R. : "Geminus", **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.V, New York, 1981.

Dürer, Albrecht: **The Human Figure**, Ed. and Trans. by Walter L. Strauss, New York, Dover Publications, 1972.

Euclid : **The Thirteen books of Euclid's Elements**, Trans. by Sir Thomas Healt, 2nd. ed., Cambridge: at the university press, Vol.I, 1908.

Euclid : **The Thirteen books of Euclid's Elements**, Trans. by Sir Thomas Healt, 2nd. ed., Cambridge: at the university press, Vol.II & Vol.III,1908.

Evtuhov, Catherine : ''An Unexpected Source of Russian Neo-Kantianism: Alexander Vvedensky and Lobachevsky's Geometry'', **Studies in East European Thought**, Vol.XLVII, No:¾, Neo-Kantianism in Russian Thought, Springer, Dec., 1995, pp. 245-258.

Fazlıoğlu, İhsan: "Hendese", **TDV İslam Ansiklopedisi**, C.XVII, İstanbul, 1998.

Ferreirós, José & Gray, Jeremy J. : **The Architecture of Modern Mathematics Essays in History and Philosophy**, New York, Oxford University Press Inc., 2006.

Friedman, Michael: "Kant's Theory of Geometry", **The Philosophical Review**, Vol.XCIV, No:4, Duke University Press on behalf of Philosophical Review Stable, Oct., 1985, pp. 455-506.

Giedymin, J. : **Science and Convention: Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition**, Oxford, Pergamon, 1982.

Gray, Jeremy: **Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century**, London, Springer, 2011.

Greenberg, Marvin J. : **Euclidean and Non-Euclidean Geometries/ Development and History**, New York, W. H. Freeman and Company, 2008.

Hacyan, Shahen: "Geometry as an object of experience: Kant and the missed debate between Poincare and Einstein", y.y., 2008.

Halsted, George Bruce: "Gauss and the Non-Euclidean Geometry by Carl Friedrich Gauss Werke", **Science,** New Series, Vol.XII, No:309, American Association for the Advancement of Science, Nov., 1900, pp. 842-846.

Halsted, George Bruce: “Non-Euclidean Geometry in the Encyclopædia Britannica”, **Science**, New Series, Vol.XXXV, No:906, American Association for the Advancement of Science, 1912, pp. 736-740.

Heath, Thomas L. A : **History of Greek Mathematics**, Vol.I & Vol.II, Oxford, 1921.

Hempel, Carl G. : **Readings in Philosophical Analysis**, Ed. by Herbert Feigl, Wilfred Sellars, New York, Appleton Century Crofts, Inc., 1949.

Hofstadter, Douglas R. : **Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik**, Çev. Ergün Akça, Hamide Koyukan, İstanbul, Pinhan Yayıncılık, 2011.

Hopkins, James: “Visual Geometry”, **The Philosophical Review**, Vol.LXXXII, No:1, Duke University Press on behalf of Philosophical Review, Jan., 1973, pp. 3-34.

Jammer, M. : **Concepts of Space**, New York, Dover, 1993.

Jones, Philip Chapin: “Kant, Euclid, and the Non-Euclideans”, **Philosophy of Science**, Vol.XIII, No:2, The University of Chicago Press on behalf of the Philosophy of Science Association, Apr., 1946, pp. 137-143.

Kolmogorov, A. N. & Yushkevich, A. P. : **Mathematics of the 19th Century: Geometry, Analytic Function Theory**, Trans. by Roger Cooke, Basel, Birkhauser Verlag, 1996.

Kvasz, Ladislav : "History of Geometry and the Development of the form of Its Language", **Synthese**, Vol.CXVI, No:2, Springer, 1998, pp. 141-186.

Lenzen, V. F. : "Physical Geometry", **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLVI, No:6, Mathematical Association of America, Jun. - Jul., 1939, pp. 324-334.

Lobachevsky, Nikolai I. : **Pangeometry**, Ed. & Trans. by Athanase Papadopoulos, Zürich, European Mathematical Society Publishing House, 2010.

Lobachevsky, Nikolai I. : **Geometrical Researches on The Theory of Parallels**, Trans. by George Bruce Halsted, Chicago - London, Open Court Publishing Company, 1914.

Logsdon, Mayme I. : "Geometries", **The American Mathematical Monthly**, Vol.XLV, No:9, Mathematical Association of America, 1938, pp. 573-583.

Magnani, L. : **Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues**, Dordrecht, Kluwer, 2001.

Manning, Henry Parker: **Non - Euclidean Geometry**, Boston, Ginn & Company Publishers, 1901.

Mikami, Yoshio: **The Development of Mathematics in China and Japan**, Chelsia, New York, 1913.

Miller, Arthur I. : “The Myth of Gauss' Experiment on the Euclidean Nature of Physical Space”, **Isis**, Vol.LXIII, No:3, The University of Chicago Press on behalf of The History of Science Society, 1972, pp. 345-348.

Miller, E. : “The Non-Euclidean Geometry”, **Transactions of the Kansas Academy of Science,** Vol.XIX, Kansas Academy of Science, 1903 - 1904, pp. 374- 378.

Mlodinow, Leonard : **Euclid's window: the story of geometry from parallel line to hyperspace,** New York, The Free Press and colophon are trademarks of Simon & Schuster, Inc., 2001.

Murdoch, John : “Euclid”, **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.IV, New York, 1981.

Poincare, Henri : **Science and Hypothesis**, New York, Dover Publications Inc., 1955.

Rosenfeld, B. A. : **A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space**, Trans. by Abe Shenitzer, New York, Springer, 1988.

Rosenfeld, Boris A. & Youschkevitch, Adolf P. : “Geometry”, **Encyclopedia of the History of Arabic Science**, Ed. by Roshdi Rashed, Vol.II, London, New York, Routledge, 1996, pp. 462-468.

Sabra, A. I. : “Ibn al-Haytam”, **Dictionary of Scientific Biography**, Vol.VI, New York, 1981, pp. 200-210.

Sarton, George : **Antik Bilim ve Modern Uygarlık**, Çev. Melek Dosay, Remzi Demir, Ankara, Gündoğan Yayınları, 1995.

Smith, D. E. : **History of Mathematics**, Vol.I, New York, Dover Inc., 1958.

Stahl, Saul : **A Gateway to Modern Geometry: The Poincare Half-Plane**, 2nd ed., Boston, Jones and Bartlett Publishers, Inc., 2008.

Struik, Dirk J. : **Kısa Matematik Tarihi**, Çev. Yıldız Silier, İstanbul, Doruk Yayımcılık, 2011.

Tabak, John : **Geometry: The Language of Space and Form**, New York, Facts On File, Inc., 2004.

Tosun, Ali Rıza: ‘’Hüseyin Rıfkı Tamani'nin Çalışmaları Işığında Öklid Geometrisi'nin Türkiye’ye Girişi’’, doktora tezi, Ankara, 2007.

Torretti, Roberto : (Çevrimiçi) "Nineteenth Century Geometry", **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**, Ed. by Edward N. Zalta , Winter 2014 Edition, http://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/geometry-19th/ , 02 Şubat 2016.

Torretti, Roberto : **Philosophy of geometry from Riemann to Poincare**, 2nd ed., Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1984.

Trudeau, R. J. : **The Non-Euclidean Revolution**, Boston: Birkhäuser, 1987.

Wolfe, Harold E. : **Introduction to Non-Euclidean Geometry,** New York, The Dryden Press, 1945.

Yaglom, I. M. : **A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis,** Trans. by Abe Shenitzer, New York, Springer-Verlag New York Inc., 1979.

Young, Gregg de : “Euclidean Geometry in the Mathematical Tradition of Islamic India”, **Historia Mathematica**, No:22, 1995, pp. 138-153.

Zalta, Edward N. : “Epistemology of Geometry”, (Çevrimiçi) http://plato.stanford.edu/entries/epistemology-geometry/, 29 Nisan 2015.

Zheng, Yuxin : “Non-Euclidean Geometry and Revolutions in Mathematics”, **Revolutions in Mathematics**, Clarendon, Oxford, 1992.

(Çevrimiçi) http://archive.lib.msu.edu/crcmath/math/math/d/d133.htm, 30 Mayıs 2015.

(Çevrimiçi) https://transitionconsciousness.wordpress.com/tag/construction/, 16 Temmuz 2014.

(Çevrimiçi) http://virtualterritory.files.wordpress.com/2007/05/a-duerer-a-man-drawing-a-lute-sml-512.jpg, 16 Temmuz 2014.

(Çevrimiçi) http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/images/S3-12a.jpg, 22 Kasım 2014.

(Çevrimiçi) http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/images/S3-12c.jpg, 22 Kasım 2014.

(Çevrimiçi)
http://www.pages.drexel.edu/~tobiabj/courses/textbook/3a.html,
16 Temmuz 2014.