



T.C.

**İSKENDERUN TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN DOĞRU VE DAİRE EKSENLİ
ÇUBUKLARIN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR
YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

AHMET DİNÇ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY

MAYIS – 2016



T.C.

İSKENDERUN TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN DOĞRU VE DAİRE EKSENLİ
ÇUBUKLARIN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR
YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ**

AHMET DİNÇ

YAPI MEKANİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
MAYIS – 2016**

13.05.2016

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

AHMET DİNÇ

ÖZET

ELASTİK ZEMİNE OTURAN DOĞRU VE DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Bu çalışmada, elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin statik analizi teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve izotropik kabul edilmiştir. Skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin rijitlik matrisini kesin olarak hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile sayısal olarak çözülmektedir. Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin statik analizi için çeşitli örnekler ele alınmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür.

ABSTRACT

THE STATIC ANALYSIS OF STRAIGHT AND CIRCULAR RODS ON ELASTIC FOUNDATION USING COMPLEMENTARY FUNCTIONS METHOD

In this study, the static analysis of straight and circular rods on elastic foundation is theoretically investigated. The governing equations for naturally twisted and curved space rods obtained using Timoshenko beam theory are rewritten for straight and circular rods on elastic foundation. The axial and shear deformations are also taken into account in the formulation. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and isotropic. Ordinary differential equations in scalar form are solved numerically using the complementary functions method to calculate exactly the dynamic stiffness matrix of the problem. The static analysis of straight and circular rods on elastic foundation are analysed through various example. The results obtained in this study are found to be in a good agreement with those available in the literature.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Faruk Fırat ÇALIM'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen Arş. Gör. Nurullah KARACA'ya, isimlerini burada zikredemediğim ama yardımlarını esirgememiş herkese içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni bugüne kadar desteklerini bir an olsun eksik etmeyen ve her zaman yanımda olan sevgili eşime, anneme, babama ve kardeşlerime en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	V
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	VI
SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	4
3.1. Eğri Eksenli Uzaysal Çubuklar.....	4
3.1.1. Çubuk Geometrisi.....	4
3.1.2. Geometrik Uygunluk Denklemleri.....	6
3.1.3. Hareket Denklemleri.....	6
3.1.4. Elastik Bünye Denklemleri.....	7
3.2. Düzlemsel Çubuklar.....	9
3.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar.....	9
3.2.2. Düzlemine Dik Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar.....	10
3.2.3. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	11
3.2.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	12
3.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	13
3.3.1. Diferansiyel Denklemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönetimi ile Çözümü.....	13
3.3.2. Homojen Çözümün Elde Edilmesi.....	14
3.3.3. Özel Çözümün Elde Edilmesi.....	15
3.3.4. Sınır Şartlarından C_m İntegrasyon Sabitlerinin Elde Edilmesi.....	16
3.3.5. Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi.....	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	21
4.1.1. Örnek 1.....	21
4.1.2. Örnek 2.....	22
4.1.3. Örnek 3.....	23
4.1.4. Örnek 4.....	24
4.1.5. Örnek 5.....	25
4.1.6. Örnek 6.....	26
4.1.7. Örnek 7.....	27
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	29
KAYNAKLAR.....	30

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Çubuk geometrisi	5
Şekil 3.2.	Elastik zemine oturan Timoshenko Kirişi	9
Şekil 3.3.	Doğru eksenli çubuk	9
Şekil 3.4.	Elastik zemine oturan daire eksenli çubuk	12
Şekil 4.1.	Elastik zemine oturan tekil yüklü basit çubuk uygulaması.....	21
Şekil 4.2.	Bir ucu serbest yarısonsuz giden çubuk	22
Şekil 4.3.	Dairesel çubuk uygulaması	23
Şekil 4.4.	İki ucu ankastre daire eksenli kiriş	24
Şekil 4.5.	İki ucu ankastre daire eksenli kiriş	25
Şekil 4.6.	İki ucu ankastre daire eksenli kiriş	26
Şekil 4.7.	Elastik zemine oturan dairesel kiriş	27



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1	İki ucu sabit mesnetli kirişe ait sayısal sonuçlar	21
Çizelge 4.2	Bir ucu serbest yarı sonsuza giden çubuk problemi	22
Çizelge 4.3	Dairesel çubuklar için sayısal sonuçlar	23
Çizelge 4.4	İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar	24
Çizelge 4.5	İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar	25
Çizelge 4.6	İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar	26
Çizelge 4.7	Elastik zemine oturan daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar.....	27



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

r	: Durum vektörü
s	: Eğrisel koordinatlarda aksenal uzunluk
t	: Teğet birim vektör
n	: Normal birim vektör
b	: Binormal birim vektör
χ	: Eğrilik
τ	: Tabii burulma
γ	: Rölatif birim uzama
ω	: Rölatif birim dönme
U	: Yer değiştirme vektörü
Ω	: Dönme vektörü
T	: İç kuvvet vektörü
M	: Moment vektörü
[C]	: Uzama ve kayma rijitliği
[D]	: Burulma ve eğilme rijitliği
A	: Kesit alanı
I_n, I_b	: Atalet momenti
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
v	: Poisson oranı
m	: Dış kuvvetlerin eksene aktarılmasıyla oluşan kuvvet çifti
p	: Yayılı dış kuvvetler
Δs	: Sonsuz küçük çubuk elemanı
ρ	: Eğrilik yarıçapı
L	: Çubuk elemanın boyu
J	: Burulma atalet momenti
ϕ	: Çubuk elemanın başlangıç ve bitiş noktası arasındaki açı
[k]	: Eleman rijitlik matrisi
{f}	: Eleman yük vektörü
[K]	: Sistem rijitlik matrisi
[T]	: Dönüşüm matrisi
α_n, α_b	: Kayma düzeltme faktörü
{X}	: Deplasmanları içeren kolon matrisi

1.GİRİŞ

Elastik zemine oturan kirişler, plaklar ve kabuklar mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Elastik zemin üzerine oturan çubuk problemleri uygulamada çok kullanılan bir yapı elamanıdır. Çok farklı uygulama alanları olmakla beraber, askeri alanlarda, uçak-uzay sanayisinde, fabrikalarda kren ve makinaların zemine sabitlenmesinde, biyomekanikte, yatay kuvvete maruz düşey kazıklar, demiryolu rayları, kıyı-liman yapılarında, sıvı ve gazların iletim hatlarında, özel amaçlı hava alanı inşasında, su tankı ve siloların betonarme temelleri gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Elastik zemine oturan kirişlerin analizlerinde Winkler, Pasternak, Vlasov ve Kerr gibi çeşitli zemin modelleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada, elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin statik analizleri incelenmiştir. Kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, statik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile uygun integrasyon adım aralığı seçilerek değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler uygun integrasyon adım aralığı seçilerek tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir. Önerilen bu yöntem, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklar mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Elastik zemine oturan kirişlerin statik analizlerinde çeşitli zemin modelleri kullanılmaktadır. Literatürde, elastik zemine oturan kirişlerin statik analizleri ile ilgili birçok çalışma vardır.

Kerr (1964), diğer zemin modellerine karşın Pasternak modelinin avantajlarını göstermiştir. Aynı zamanda elastik zemin modelini viskoelastik zemin modeline genişletmiştir. İnan (1966), elastik çubukların genel teorisini araştırmış, buradan düzlemsel, doğru ve daire eksenli çubukların taşıma matrislerini elde ederek taşıma matrisi yöntemini çözümlerinde kullanmışlardır. Kıral ve Ertepinar (1974), statik yükleme altında elastik zemine oturan kirişlerin davranışını incelemişlerdir. Dasgupta ve Sengupta (1988), elastik zemine oturan eğri eksenli çubukların çözümü için üç düğümlü izoparametrik kiriş elemanı kullanarak bir sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Formülasyonda, kayma deformasyonu etkisini dâhil etmişlerdir. Banan ve ark. (1989), elastik zemine oturan eğri eksenli kirişler için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Celep (1990), elastik zemine oturan daire eksenli kiriş problemini çalışmıştır. Haktanır ve Kıral (1993), elastik ve izotropik malzemedan yapılmış helisel çubukların statik analizini taşıma matrisi yöntemine dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çalışmışlardır. Zubaroglu (1994), çalışmalarında winkler tipi zemin kullanmış, elastik zemin üzerine oturan daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını başlangıç değerleri metodu yardımıyla incelemişlerdir. Daire eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını elde etmişlerdir. Kadioğlu (1994), Winkler tipi elastik zemini kullanarak doğru ve daire eksenli kirişlerin çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını incelemişlerdir. Aköz ve Kadioğlu (1996), karışık sonlu eleman formülasyonu kullanarak elastik zemine oturan değişken kesite sahip daire eksenli çubukların keyfi yükler altında statik analizini incelemişlerdir. Yang ve ark. (2001), düşey yükler altındaki eğri eksenli çubuklar için analitik çözümler sunmuşlardır. Bozdoğan ve ark. (2004), taşıma matrisi yöntemini kullanarak elastik zemine oturan kirişlerin birinci ve ikinci mertebe statik ve stabilite analizini yapmışlardır. Elastik zeminin çözümlerinde Winkler hipotezine uyduğunu kabul etmişlerdir. Çalım (2009), viskoelastik zemine oturan doğru eksenli kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimini incelemiştir. Çalım ve

Akkurt (2011), elastik zemine oturan doğru ve eğri eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizini yapmışlardır. Denklemlerinde Timoshenko kiriş teorisinden faydalanmışlardır. Daha sonraları elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların serbest titreşimini incelemiştir. Arici ve Granata (2011), Winkler tipi elastik zemine oturan uzaysal eğri eksenli çubukların taşıma matrisi yöntemi ile çözümünü yapmışlardır. Eğri eksenli çubuklar ve ringler için numerik ve analitik sonuçlar hem düzlemi içinde hem de düzlemine dik olarak vermişlerdir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

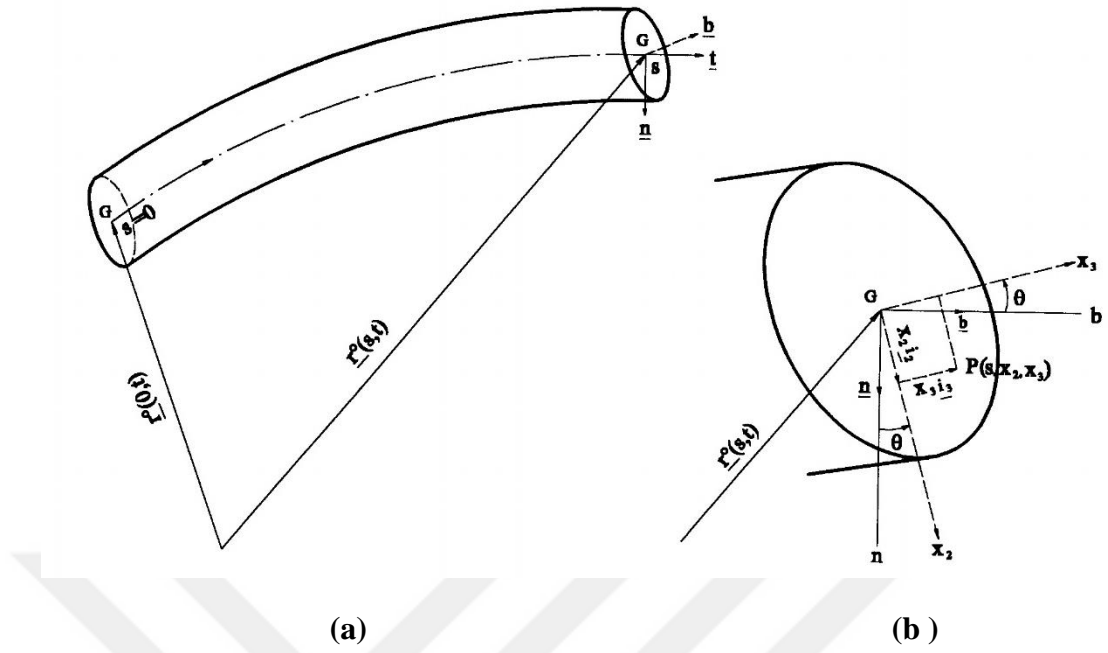
3.1. Eğri Eksenli Uzaysal Çubuklar

3.1.1. Çubuk Geometrisi

Tabii olarak eğilmiş ve burulmuş uzaysal bir çubuk göz önüne alalım. Çubuk eksenini, geometrik merkezi G 'nin yörüngesi olarak tanımlanır ve eksen üzerinde keyfi olarak seçilen $s=0$ noktasındaki durum vektörü $\mathbf{r}^0=\mathbf{r}^0(s)$ olarak verilir (Şekil 3.1a). Eğri eksenli çubuklarda, eksene bağlı hareketli bir koordinat takımının seçilmesi, problemin tanımlanmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Herhangi bir s konumunda, çubuk ekseninin orijininde \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} birim vektörleri olarak tanımlanan bir hareketli koordinat takımı seçilmiştir.

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}^0(s)}{\partial s} \quad (3.1)$$

Burada \mathbf{t} , \mathbf{n} ve \mathbf{b} sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörleri olarak adlandırılmaktadır. \mathbf{t} artan s yönünde, \mathbf{n} teğet birim vektöre dik ve yönü eğrilik merkezine doğrudur. Binormal birim vektör $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ olup, \mathbf{t} ve \mathbf{n} birim vektörlerinin oluşturdukları düzleme diktir.



Şekil 3.1. Çubuk geometrisi

Bu şekilde tarif edilen \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} birim vektörlerinin teşkil ettiği takım sağ el kuralı ile temsil edilir ve aralarında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntılar mevcuttur.

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \chi \mathbf{n} , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t} , \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.2)$$

Burada χ ve τ , sırasıyla eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır. χ , eğrilik olup daima pozitiftir. τ ise, artan s yönünde eğri üzerindeki \mathbf{n} , \mathbf{b} normal düzlemi \mathbf{t} eksenine etrafında pozitif yönde dönerse pozitif, aksi halde negatif olmaktadır.

Düzlemsel çubuklar için $\tau = 0$ ve doğru eksenli çubuklar için $\chi = \tau = 0$ alınmaktadır.

3.1.2. Geometrik Uygunluk Denklemleri

Çubuk eksenini üzerinde herhangi bir s noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^\circ(s)$ ve kesitin G ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönme $\mathbf{\Omega}^\circ(s)$ vektörleri ile gösterilmektedir. Ayrıca, ubuk eksenini üzerinde birim boyun rölatif uzaması $\mathbf{\gamma}^\circ(s)$ ve rölatif dönmesi $\mathbf{\omega}^\circ(s)$ vektörleri ile tarif edilmektedir. Geometrik uygunluk denklemleri (3.3) eşitlikleri ile verilmektedir.

$$\mathbf{\gamma}^\circ = \frac{\partial \mathbf{U}^\circ}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}^\circ, \quad \mathbf{\omega}^\circ = \frac{\partial \mathbf{\Omega}^\circ}{\partial s} \quad (3.3)$$

3.1.3. Hareket Denklemleri

$\mathbf{T}(s)$ ile s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $\mathbf{M}(s)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. ubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}^{ex}(s)$ ve yayılı moment $\mathbf{m}^{ex}(s)$ olsun. Yer ve Şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabul ile hareket denklemleri:

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{p}^{(ex)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m}^{ex} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Şeklinde verilmektedir.

3.1.4. Elastik Bünye Denklemleri

Çubuk kesitinin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı, kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilmektedir. Çubuk malzemesi homojen, izotropik ve lineer elastiktir. Bu durumda, rölatif birim uzama $\gamma^o(s)$ ve rölatif birim dönme $\omega^o(s)$ ile $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{M}(s)$ arasında aşağıdaki bünye denklemlerini yazmak mümkündür.

$$T_i^o = A_{ij} \gamma_j^o, \quad M_i^o = D_{ij} \omega_j^o \quad (i, j = t, n, b) \quad (3.5)$$

Burada A_{tt} kesitin uzama rijitliğini, A_{nn} ve A_{bb} de kayma rijitliklerini, D_{tt} ise kesitin burulma rijitliğini, D_{nn} ve D_{bb} de eğilme rijitliklerini göstermektedir.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Burada A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörleridir. $[\mathbf{A}]$ ve $[\mathbf{D}]$ matrisleri, çubuk malzemesi ve kesit geometrisine bağlı olup, $\gamma^o(s)$ ve $\omega^o(s)$ değişkenlerinden bağımsızdır.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse \mathbf{n} , \mathbf{b} eksenleri asal eksenler olmaktadır. Eğri eksenli çubukların davranışını idare eden diferansiyel denklemler \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} hareketli eksen takımında aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial U_t}{\partial s} = \chi U_n + \frac{1}{EA} T_t \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial s} = -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{\alpha_n}{GA} T_n \quad (3.7b)$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial s} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (3.7c)$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial s} = \chi \Omega_n + \frac{1}{GI_t} M_t \quad (3.7d)$$

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} = -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{1}{EI_n} M_n \quad (3.7e)$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial s} = -\tau \Omega_n + \frac{1}{EI_b} M_b \quad (3.7f)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial s} = \chi T_n - p_t^{(ex)} \quad (3.7g)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial s} = \tau T_b - \chi T_t - p_n^{(ex)} \quad (3.7h)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial s} = -\tau T_n - p_b^{(ex)} \quad (3.7i)$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial s} = \chi M_n - m_t^{(ex)} \quad (3.7j)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} = \tau M_b - \chi M_t + T_b - m_n^{(ex)} \quad (3.7k)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial s} = -\tau M_n - T_n - m_b^{(ex)} \quad (3.7l)$$

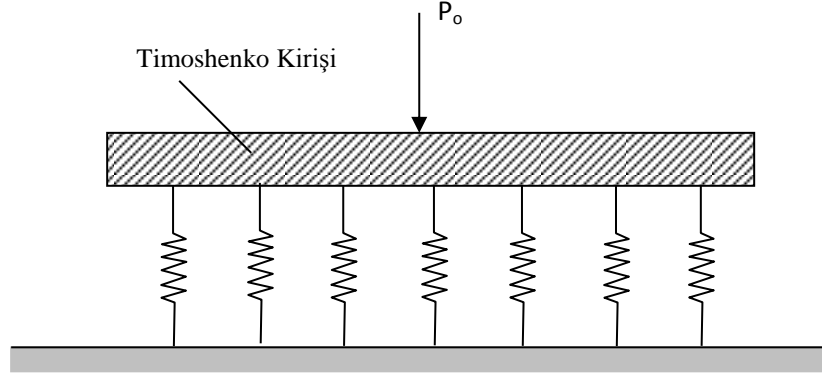
Bu çalışmada iki parametrelili elastik zemin modeli ele alınmaktadır (Şekil 3.2.). Elastik zemine oturan kirişlerde sisteme uygulanan yayılı kuvvet ve moment \mathbf{p}^{ex} ile \mathbf{m}^{ex} aşağıdaki gibi iki parçadan oluşturulabilir.

$$p^{(ex)} = p^e - p^f, \quad m^{(ex)} = m^e - m^f \quad (3.8)$$

Buradaki e ve f indisleri, sırasıyla yüklemeyi ve zeminin kirişe göstermiş olduğu reaksiyondur. Böylece kirişin deplasman ve dönmesine, elastik zeminin tepkisi aşağıdaki şekildedir.

$$p_i^f = k_i U_i^o, \quad m_i^f = (k_r)_i \Omega_i^o \quad (i = t, n, b) \quad (3.9)$$

Burada k ve k_I ötelenme ve dönme yay sabitlerini ifade etmektedir.



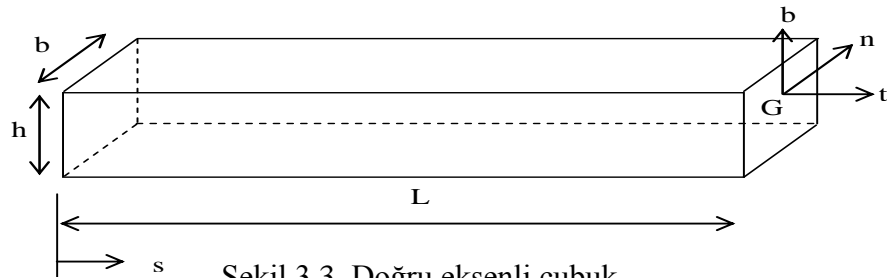
Şekil 3.2. Elastik zemine oturan Timoshenko Kirişi

3.2. Düzlemsel Çubuklar

Daha önce belirtildiği gibi, düzlemsel çubuklar için tabii burulma $\tau = 0$ ve doğru eksenli çubuklar için $\chi = \tau = 0$ alınmaktadır. Ayrıca, (3.7) ifadesinde verilen on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemleri iki gruba ayırabiliriz. Birinci grup büyüklükler, çubuk ekseninin bulunduğu düzlemde ve yükler çubuk düzlemine etmektedir. Birinci grup büyüklükleri idare eden denklemler 3.10a, 3.10b, 3.10c, 3.10d, 3.10e ve 3.10f’de görülmektedir. İkinci grup büyüklükler ise, 3.11a, 3.11b, 3.11c, 3.11d, 3.11e ve 3.11f’de görülmektedir.

3.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar

Doğru eksenli çubuklar, tabii burulması ve eğriliği (τ, χ) sıfır olan eğrilerdir (Şekil 3.3). Düzlemi içinde yüklenmiş bir çubukta oluşan deplasman ve dönmeler U_t, U_n, Ω_b ve iç kuvvetler ise T_t, T_n ve M_b ’dir.



Şekil 3.3. Doğru eksenli çubuk

Böylece, elastik zemine oturan düzlemi içinde yüklü doğru eksenli çubuğu idare eden diferansiyel denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dU_t}{ds} = \frac{1}{EA} T_t \quad (3.10a)$$

$$\frac{dU_n}{ds} = \Omega_b + \frac{\alpha_n}{GA} T_n \quad (3.10b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds} = \frac{1}{EI_b} M_b \quad (3.10c)$$

$$\frac{dT_t}{ds} = k_t U_t - p_t^{(ex)} \quad (3.10d)$$

$$\frac{dT_n}{ds} = k_n U_n - p_n^{(ex)} \quad (3.10e)$$

$$\frac{dM_b}{ds} = (k_1)_b \Omega_b - T_n - m_b^{(ex)} \quad (3.10f)$$

3.2.2. Düzlemine Dik Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar

Düzlemine dik yüklenmiş bir çubukta meydana gelen deplasman ve dönmeler U_b , Ω_t , Ω_n ve iç kuvvetler ise T_b , M_t ve M_n ' dir. Elastik zemine oturan düzlemi dik yüklü doğru eksenli çubuğu idare eden diferansiyel denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dU_b}{ds} = -\Omega_n + \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (3.11a)$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds} = \frac{1}{GI_t} M_t \quad (3.11b)$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds} = \frac{1}{EI_n} M_n \quad (3.11c)$$

$$\frac{dT_b}{ds} = k_b U_b - p_b^{(ex)} \quad (3.11d)$$

$$\frac{d M_t}{d s} = (k_1)_t \Omega_t - m_t^{(ex)} \quad (3.11e)$$

$$\frac{d M_n}{d s} = (k_1)_n \Omega_n + T_b - m_n^{(ex)} \quad (3.11f)$$

3.2.3. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Düzlemsel daire eksenli çubuklarda tabi burulma sıfır ($\tau = 0$) ve eğrilik ise sabittir ($\chi = 1/R$). Dairesel bir çubukta ds uzunluk elemanı $ds = R d\phi$ şeklinde ifade edilmektedir (Şekil 3.4). Elastik zemine oturan düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuğu idare eden diferansiyel denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\frac{d U_t}{d \phi} = U_n + \frac{R}{EA} T_t \quad (3.12a)$$

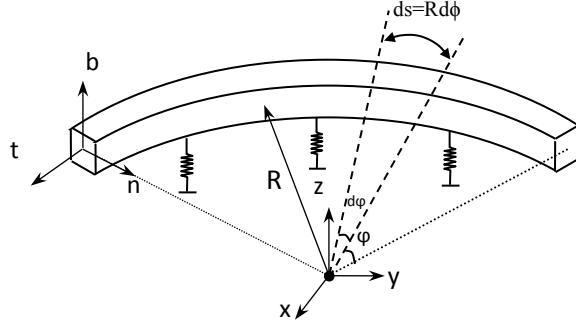
$$\frac{d U_n}{d \phi} = -U_t + R \Omega_b + R \frac{\alpha_n}{GA} T_n \quad (3.12b)$$

$$\frac{d \Omega_b}{d \phi} = \frac{R}{EI_b} M_b \quad (3.12c)$$

$$\frac{d T_t}{d \phi} = R k_t U_t + T_n - R p_t^{(ex)} \quad (3.12d)$$

$$\frac{d T_n}{d \phi} = R k_n U_n - T_t - R p_n^{(ex)} \quad (3.12e)$$

$$\frac{d M_b}{d \phi} = R (k_1)_b \Omega_b - R T_n - R m_b^{(ex)} \quad (3.12f)$$



Şekil 3.4. Elastik zemine oturan daire eksenli çubuk

3.2.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Elastik zemine oturan düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuğu idare eden diferansiyel denklemler aşağıda verilmektedir.

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -R\Omega_n + R \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (3.13a)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GI_t} M_t \quad (3.13b)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n} M_n \quad (3.13c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = Rk_b U_b - R p_b^{(ex)} \quad (3.13d)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = Rk_b \Omega_t + M_n - R m_t^{(ex)} \quad (3.13e)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = R(k_1)_n \Omega_n - M_t + R T_b - R m_n^{(ex)} \quad (3.13f)$$

Hem eleman rijitlik matrisi hem de eleman yük vektörü tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak elde edilmektedir.

3.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenir ve başlangıç şartları kullanılarak sabit katsayılı adi diferansiyel denklemler çözülebilmektedir. Başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebeye Runge-Kutta (RK5) algoritması (Chapra ve Canale, 1998) bu çalışmaya adapte edilerek çok daha etkin çözümler elde edilmiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi bilgisayar ile programlamaya çok müsait olup, genel sınır şartlarına sahip fiziksel problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu yöntemeye dayalı çözüm yapmanın diğer bir avantajı da, değişken kesit ve geometriye sahip problemlerin çözülebilmesidir. Uygun integrasyon adım aralığı seçilerek, diferansiyel denklemlerin istenilen hassasiyetteki kesin çözümünün elde edilebilmesidir.

3.3.1. Diferansiyel Denklemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Çözümü

Formülasyon aşamasında sabit katsayılı 6 adet (3.10-13a-1) diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin her biri yere göre birinci mertebeye türevler içermektedir. Elde edilen adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda

$$\frac{d\mathbf{Y}(\vartheta)}{d\vartheta} = \mathbf{F}(\vartheta)\mathbf{Y}(\vartheta) + \mathbf{B}(\vartheta) \quad (3.14)$$

şeklinde verilmiş olsun. ϑ bağımsız değişken, $\mathbf{Y}(\vartheta)$ bilinmeyen bağımlı değişkenleri içeren kolon matrisi, $\mathbf{F}(\vartheta)$ bağımlı değişkenlerin katsayılar kare matrisi ve $\mathbf{B}(\vartheta)$ başlangıç şartlarını da içeren sabitler vektörüdür.

Çözüm için gerekli olan 6 adet sınır şartından 3 adedi çözüm bölgesi başlangıcında ($\vartheta = a$),

$$\sum_{j=1}^6 b_{ij}\mathbf{Y}_j(a) = a_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.15)$$

geri kalan 3 adedi ise çözüm bölgesi sonunda ($\vartheta = b$)

$$\sum_{j=1}^6 d_{ij}\mathbf{Y}_j(b) = \beta_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.16)$$

şeklinde verilmiş olsun. Görüldüğü gibi problemin sınır şartları, bilinmeyen $\mathbf{Y}(\varnothing)$ vektörünün $(\varnothing = a)$ ve $(\varnothing = b)$ noktalarındaki bileşenlerinin lineer kombinasyonları olarak da ifade edilebilmektedir.

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, problemin sınır şartlarından bağımsız olarak (3.14) denkleminin homojen ve özel çözümlerinin, tamamen çözüm bölgesi başlangıcında $(\varnothing = a)$ belirlenen standart sınır şartları ile bulunması esasına dayanmaktadır. (3.14) denkleminin genel çözümü

$$\mathbf{Y}(\varnothing) = \sum_{m=1}^6 C_m(\mathbf{U}^{(m)}(\varnothing)) + \mathbf{V}(\varnothing) \quad (3.17)$$

şeklindedir. (3.17) ifadesinde, $\mathbf{U}^{(m)}(\varnothing)$, verilen sınır şartlarından m. homojen sınır şartına ait homojen çözümü, $\mathbf{V}(\varnothing)$ ise homojen olmayan sınır şartları ile elde edilen özel çözümü göstermektedir. Burada C_m integrasyon sabitleri, $(\varnothing = a)$ ve $(\varnothing = b)$ noktalarında verilmiş olan problemin gerçek sınır şartlarından elde edilecektir. 6 adet standart sınır şartı ile elde edilen homojen çözümler,

$$[\mathbf{U}(\varnothing)]_{6 \times 6} = \{\mathbf{U}^{(1)}(\varnothing)_{6 \times 1}, \dots, \mathbf{U}^{(6)}(\varnothing)_{6 \times 1}\}_{6 \times 6} \quad (3.18)$$

kare matrisi ile gösterilmektedir. Böylece (3.17) denkleminin genel çözümü

$$\mathbf{Y}(\varnothing) = \mathbf{U}(\varnothing)\mathbf{C} + \mathbf{V}(\varnothing) \quad (3.19)$$

formunda ifade edilebilir.

3.3.2. Homojen Çözümün Elde Edilmesi

(3.14) denkleminin homojen çözümü

$$\frac{d\mathbf{U}^{(m)}(\varnothing)}{d\varnothing} = \mathbf{F}(\varnothing) \mathbf{U}^{(m)}(\varnothing) \quad (m=1, 2, \dots, 6) \quad (3.20)$$

şeklindedir. (3.20) denkleminin 6 adet farklı sınır şartı için 6 kere çözülmesi gerekmektedir. Böylece 6×6 boyutunda çözüm matrisi elde edilir.

Burada $\mathbf{U}^{(m)}(\emptyset)$, çözüm bölgesi başlangıcında bilinmeyen $\mathbf{U}_1(a)$ vektörünün m. elemanına 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen çözümü göstermektedir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_1(a) = 1, \mathbf{U}_2(a) = 0, \dots \dots \dots, \mathbf{U}_6(a) = 0 \\
 \mathbf{U}_1(a) = 0, \mathbf{U}_2(a) = 1, \dots \dots \dots, \mathbf{U}_6(a) = 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \mathbf{U}_1(a) = 0, \mathbf{U}_2(a) = 0, \dots \dots \dots, \mathbf{U}_6(a) = 1
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

(3.21) ifadesinde tarif edilen ve bu şekilde elde edilmiş olan $[\mathbf{U}]$ kare matrisinin çözüm bölgesindeki başlangıç değerleri birim matrise karşılık gelmektedir.

$$[\mathbf{U}(a)] = [\mathbf{I}] \tag{3.22}$$

3.3.3. Özel Çözümün Elde Edilmesi

(3.14) denkleminin özel çözümü

$$\frac{d\mathbf{V}(\emptyset)}{d\emptyset} = \mathbf{F}(\emptyset)\mathbf{V}(\emptyset) + \mathbf{B}(\emptyset) \tag{3.23}$$

şeklinde olsun. Bu denklemin çözüm bölgesi başlangıcı için kabul edilen,

$$\mathbf{V}(a) = 0 \tag{3.24}$$

sınır şartları ile bir defa çözülmesi yeterlidir.

3.3.4. Sınır Şartlarından C_m İntegrasyon Sabitlerinin Elde Edilmesi

(3.17) genel çözümünde yer alan C_m integrasyon sabitleri, problemin gerçek sınır şartlarından elde edilecektir. ($\phi = a$) noktasında verilmiş olan 3 adet sınır şartının bulunduğu (3.15) ifadesindeki, $\bar{Y}_j(a)$ çözümleri yerine konursa,

$$\sum_{j=1}^6 b_{ij} \left(\sum_{m=1}^6 C_m \mathbf{U}_j^{(m)}(a) + \mathbf{V}_j(a) \right) = a_i \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada,

$$\mathbf{Y}_j(a) = \sum_{m=1}^6 C_m \mathbf{U}_j^{(m)}(a) + \mathbf{V}_j(a) \quad (3.26)$$

olup özel çözümün bulunmasında kullanılan sınır şartları

$$\mathbf{V}_j(a) = 0 \quad (j= 1, 2, \dots, 6) \quad (3.27)$$

(3.25) ifadesinde yerine konursa

$$\sum_{m=1}^6 b_{im} C_m = \alpha_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28), 6 adet C_m integrasyon sabitinin elde edilmesi için 3 adet lineer denklem takımı sunmaktadır. Gerekli olan diğer 3 adet denklem ($\phi = b$) noktasındaki sınır şartlarından elde edilecektir. Yukarıdaki gibi, bu kez de ($\phi = b$) noktasındaki çözümler (3.19) ifadesinde yerine konulursa

$$\sum_{j=1}^6 d_{ij} \left(\sum_{m=1}^6 C_m \mathbf{U}_j^{(m)}(b) + \mathbf{V}_j(b) \right) = +\beta_i \quad (3.29)$$

veya

$$\sum_{m=1}^6 \left(\sum_{j=1}^6 d_{ij} \mathbf{U}_j^{(m)}(b) \right) C_m = \beta_i - \sum_{j=1}^6 d_{ij} \mathbf{V}_j(b) \quad (3.30)$$

olarak yazılabilmektedir. (3.34) eşitliğinden C_m integrasyon sabitleri hesaplanıp (3.17) denkleminde yerine konularak genel çözüm yapılabilmektedir.

$$\mathbf{Y}(\phi) = \sum_{m=1}^6 C_m \left(\mathbf{U}^{(m)}(\phi) \right) + \mathbf{V}(\phi) \quad (3.36)$$

Böylece (3.36) denkleminin genel çözülerek çözüm bölgesi üzerinde istenilen herhangi bir noktadaki bağımlı değişkenlerin değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

Buraya kadar olan bölümde anlatılanlar bir problemin tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile doğrudan çözümü için kullanılabilir. Bu genel formülasyondan yararlanılarak eleman rijitlik matrisi elde edilecektir. Bu durum, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

3.3.5. Eleman Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

(3.14) denklem takımının homojen ve özel çözümleri bir önceki bölümlerde anlatıldığı şekilde yapılmaktadır. Eleman rijitlik matrisini hesaplamak için, C_m integrasyon sabitleri elde edilirken, problemin gerçek sınır şartları yerine çözüm bölgesinin $\phi = 0$ ve $\phi = L$ noktalarındaki sınır şartları olarak U_i ve Ω_i ($i=t, n, b$) büyüklükleri için sırasıyla birim deplasman alınmaktadır. İlk adımda, sınır şartları olarak (3.37) denkleminin sağ tarafı için $U_t(0)=1$ ve $U_n(0)=U_b(0)=\Omega_t(0)=\Omega_n(0)=\Omega_b(0)=U_t(L)=U_n(L)=U_b(L)=\Omega_t(L)=\Omega_n(L)=\Omega_b(L)=0$ alınarak C_m integrasyon sabitleri hesaplanır. İkinci adımda, sınır şartları için $U_n(0)=1$ ve diğerleri sıfır alınarak C_m integrasyon sabitleri hesaplanır. Sırasıyla her bir serbestlik için birim deplasman uygulanıp C_m integrasyon sabitleri ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Bu sabitler hesaplanırken homojen çözümden elde edilen (3.34) ifadesindeki katsayılar matrisinin bir kez oluşturulması yeterlidir.

Her düğümde altı serbestlik derecesi olmak üzere, bunların üçü deplasman, diğer üçü de dönme serbestlikleridir. Elemanın başlangıç düğümü i , diğer ucu j düğümü olmak üzere eleman deplasman ve eleman uç kuvvetleri

$$\{d\} = \{\mathbf{U}(\phi_i), \mathbf{\Omega}(\phi_i), \mathbf{U}(\phi_j), \mathbf{\Omega}(\phi_j)\} \quad (3.37)$$

$$\{p\} = \{\mathbf{T}(\phi_i), \mathbf{M}(\phi_i), \mathbf{T}(\phi_j), \mathbf{M}(\phi_j)\} \quad (3.38)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Eleman rijitlik matrisini hesaplamak için (3.37) ifadesindeki eleman uç deplasmanlarına sırasıyla birim deplasman uygulanarak C_m integrasyon sabitleri ilk paragrafta anlatıldığı gibi elde edilir. Bu işlem 12 kez tekrarlanarak bütün C_m integrasyon sabitleri belirlenir. Eleman dinamik rijitlik matrisinin bileşenleri olan eleman uç kuvvetleri (3.14) denkleminin homojen çözümünden elde edilir.

Ankastre uç kuvvetleri ise, bütün çubuk uç deplasmanlarını sifıra eşitleyerek (3.14) denkleminin özel çözümünden hesaplanmaktadır.

$$\{f\} = \{-\mathbf{T}(\phi_i), -\mathbf{M}(\phi_i), \mathbf{T}(\phi_j), \mathbf{M}(\phi_j)\}^T \quad (3.39)$$

Eleman denklemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\{p\} = [k]\{d\} + \{f\} \quad (3.40)$$

Eleman koordinatlarında elde edilen bu denklemlerden sistem koordinatlarına geçmek için aşağıdaki dönüşüm işlemi uygulanmalıdır.

$$[k_{ijk}] = [T]^T [k]_{tnb} [T] \quad (3.41)$$

$$\{f\}_{ijk} = [T]^T \{f\}_{tnb} \quad (3.42)$$

Dönüşüm matrisi [T]

$$[T] = \begin{bmatrix} [B(\phi_i)] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B(\phi_i)] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [B(\phi_j)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B(\phi_j)] \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.43)$$

Bu tezde, hem eleman rijitlik matrisi hem de ankastrelik uç kuvvetleri, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımı ile (3.14) denkleminin homojen ve özel çözümlerinden hesaplanmaktadır. Eleman rijitlik matrisi ve yük vektöründen sistem hareket denklemleri elde edilmektedir.

$$[K]\{D\} = \{P\} \quad (3.44)$$

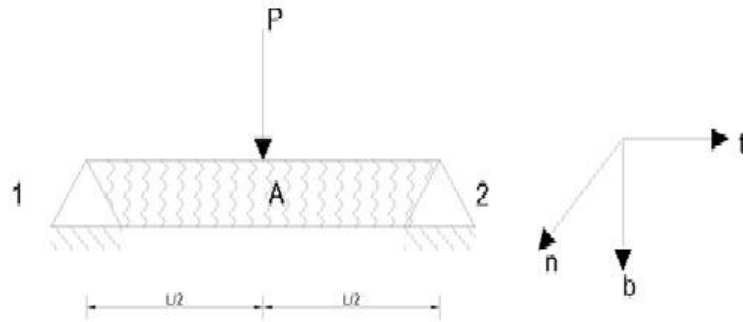
Burada, [K] ve {P} sistem rijitlik matrisi ve yük vektörüdür. {D} ise, sistemin bilinmeyen düğüm deplasmanları vektörüdür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, statik yükleme altında elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin davranışını analiz etmek için genel amaçlı Fortran dilinde bir bilgisayar programları hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci merteye Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Önerilen yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile literatürde bulunan örnekler ele alınmıştır.

4.1.1. Örnek 1

Bu örnekte Winkler tipi elastik zemine oturan iki ucu sabit mesnetli kiriş problemi incelenmiştir. Kirişin uzunluğu $L = 10 \text{ m}$ olup kirişin orta noktasına $P=10 \text{ t}$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır (Şekil 4.1). Kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 0.5 \text{ m}$, yay katsayısı $k = 100 \text{ t/m}^2$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.5 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.1'de verilmektedir. Çizelge 4.1 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntem kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



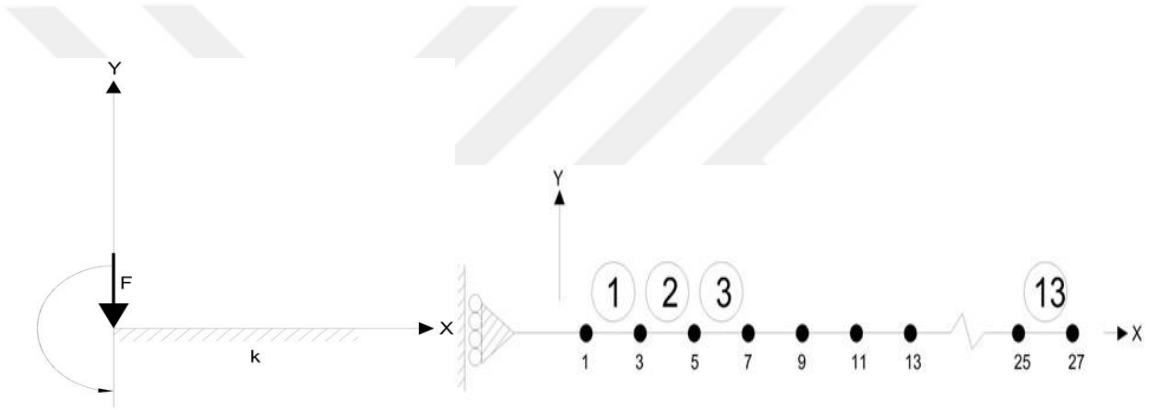
Şekil 4.1. Elastik zemine oturan tekil yüklü basit çubuk uygulaması

Çizelge 4.1. İki ucu sabit mesnetli kirişe ait sayısal sonuçlar

Nokta	Kesit Tesirleri	Erim (1997)	Bu Çalışma
A	Ub (m)	0,00901	0,00907
	Mn (Nm)	16,012	16,09

4.1.2. Örnek 2

Bu örnekte Winkler tipi elastik zemine oturan bir ucu serbest diğeri yarı sonsuza giden kiriş problemi ANSYS programının yardım kısmından alınarak incelenmiştir. Kirişe $F = 10 \text{ lb}$ şiddetinde tekil yük ve $M=10,000 \text{ lb in}$ moment uygulanmıştır (Şekil 4.2.). Kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = 4.224 \text{ in}$, $h = 5 \text{ in}$, yay katsayısı $k = 1515.15 \text{ lb/in}^3$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 30 \times 10^6 \text{ Psi}$ alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.2’de verilmektedir. Çizelge 4.2 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile program sonuçlarının uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



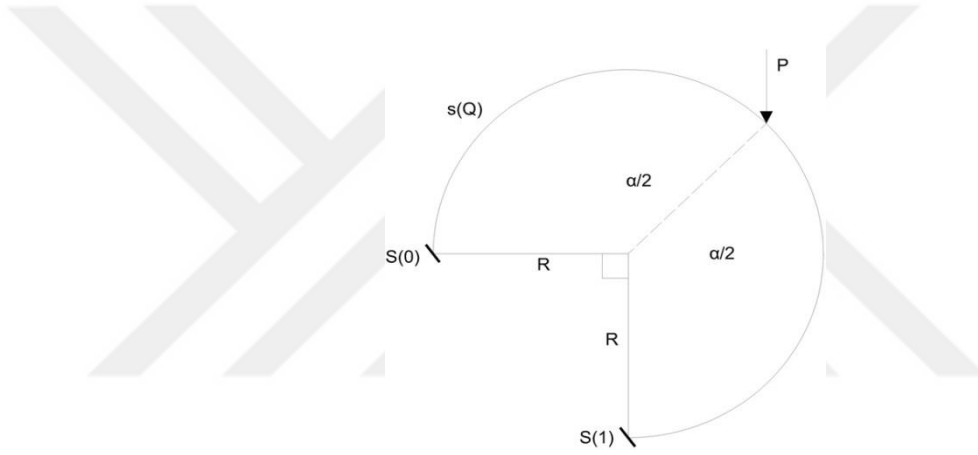
Şekil 4.2. Bir ucu serbest yarı sonsuza giden çubuk

Çizelge 4.2. Bir ucu serbest yarı sonsuza giden çubuk problemi

	ANSYS	Bu Çalışma
Uç deplasmanı (in)	-0,03767	-0,03772

4.1.3. Örnek 3

Bu örnekte iki ucu ankastre dairesel kiriş problemi incelenmiştir. Dairesel kirişin yay açıklığı $\alpha = 270^\circ$ olup orta noktasından $P = 50 t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır (Şekil 4.3). Dairesel kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 1.5 m$, dairenin yarıçapı $R = 8 m$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.7 \times 10^6 t/m^2$ ve Poisson oranını $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.3'de verilmektedir. Çizelge 4.3 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntem kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



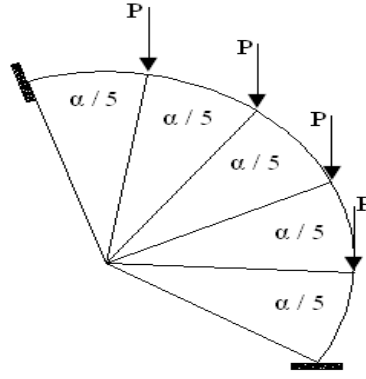
Şekil 4.3. Dairesel Çubuk Uygulaması

Çizelge 4.3. Dairesel çubuklar için sayısal sonuçlar

Açı	Kesit Tesirleri	Zubaroğlu (1994)	Bu Çalışma
0	Tb (t)	25	25.07
	Mt (tm)	250.22	233.2
	Mn (tm)	232.62	251.0
α	Tb (t)	-25	-25.07
	Mt (t)	-250.22	-232.62
	Mn (t)	-232.62	-251.0

4.1.4. Örnek 4

Bu örnekte iki ucu ankastre dairesel kiriş problemi incelenmiştir. Dairesel kirişin yay açıklığı $\alpha = 140^\circ$ olup beş eşit parçaya bölünmüştür (Şekil 4.4.). Dairesel kirişe dört adet $P = 100 t$ şiddetinde tekil yük kirişin tam orta noktasından uygulanmıştır. Dairesel kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = 1.2 m$, $h = 0.6 m$, yarıçapı $R = 12 m$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.7 \times 10^6 t/m^2$ ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.4'de verilmektedir. Çizelge 4.4 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntem kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



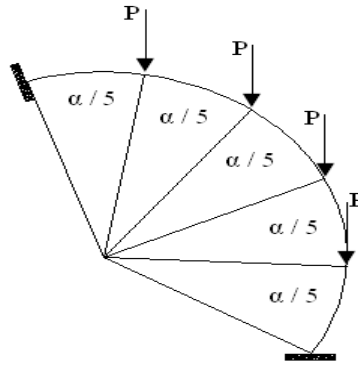
Şekil 4.4. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş

Çizelge 4.4. İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

Açı	Kesit Tesirleri	Zubaroglu (1994)	Bu Çalışma
0	Tb (t)	99.71	99.92
	Mt (tm)	75.32	82.42
	Mn (tm)	-464.2	-467.7
α	Tb (t)	-99.71	-99.92
	Mt (t)	-75.32	-82.42
	Mn (t)	-464.2	-467.7

4.1.5. Örnek 5

Bu örnekte Winkler tipi elastik zemine oturan iki ucu ankastre dairesel kiriş problemi incelenmiştir. Dairesel kirişin yay açıklığı $\alpha = 140^\circ$ olup iki eşit parçaya bölünmüştür. Dairesel kirişe dört adet $P = 50 t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. (Şekil 4.5). Kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 1.5 m$, yay katsayısı $k = 10 t/m^2$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.7 \times 10^6 t/m^2$ olarak alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.5’de verilmektedir. Çizelge 4.5 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile program sonuçlarının uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



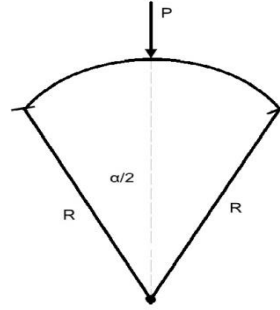
Şekil 4.5. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş

Çizelge 4.5. İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

Açı	Kesit Tesirleri	Zubaroğlu (1994)	Bu Çalışma
0	Tb (t)	99.71	99.92
	Mt (tm)	75.32	82.42
	Mn (tm)	-464.2	-467.7
α	Tb (t)	-99.71	-99.92
	Mt (t)	-75.32	-82.42
	Mn (t)	-464.2	-467.7

4.1.6. Örnek 6

Bu örnekte Winkler tipi elastik zemine oturan iki ucu ankastre dairesel kiriş problemi incelenmiştir. Dairesel kirişin yay açıklığı $\alpha = 70^\circ$ olup iki eşit parçaya bölünmüştür. Dairesel kirişe bit adet $P = 50 t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. (Şekil 4.6). Kiriş dikdörtgen kesite sahip olup, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 1.5m$, yay katsayısı $k = 1500 t/m^2$, malzeme özellikleri ise elastisite modülü $E = 2.7 \times 10^6 t/m^2$ olarak alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.6’de verilmektedir. Çizelge 4.6 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile program sonuçlarının uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



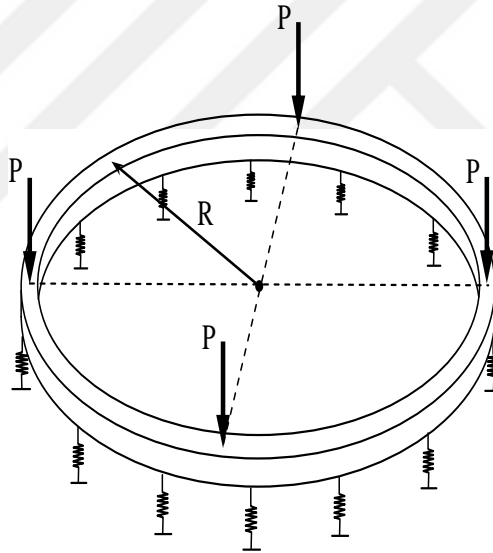
Şekil 4.6. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş

Çizelge 4.6. İki ucu ankastre daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

Açı	Kesit Tesirleri	Zubaroğlu (1994)	Bu Çalışma
0	Tb (t)	23.95	23.99
	Mt (tm)	1.834	2.378
	Mn (tm)	-63.78	-64.29
α	Tb (t)	-23.95	-23.99
	Mt (t)	-1.834	-2.378
	Mn (t)	-63.78	-64.29

4.1.7. Örnek 7

Bu örnekte dört adet tekil yüke maruz elastik zemine oturan daire eksenli kirişin statik analizi incelenmiştir (Şekil 4.7). Simetri nedeni ile problemin dörtte biri sekiz elemana bölünerek analiz yapılmıştır. Probleme ait malzeme ve kesit özellikleri; tekil yük $P = 1524 \text{ kN}$, dairenin yarıçapı $R = 7.63 \text{ m}$, kesit genişliği ve yüksekliği $b = h = 0.762 \text{ m}$, elastisite modülü $E = 47.24 \text{ GPa}$, kayma modülü $G = 19.68 \text{ GPa}$, yay katsayısı $k_b = 23.623 \text{ MPa}$ ve yayın dönme katsayısı $(k_1)_t = 1143 \text{ kNm/m}$ olarak alınmıştır. Örneğe ait sayısal sonuçlar Çizelge 4.7’de verilmektedir. Çizelge 4.7 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile literatürde farklı yöntemler kullanarak elde edilen sonuçların uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.



Şekil 4.7. Elastik zemine oturan dairesel kiriş

Çizelge 4.7. Elastik zemine oturan daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

$\varphi(^{\circ})$	U_b (m)	Ω_t (rad)	Ω_n (rad)	T_b (kN)	M_t (kNm)	M_n (kNm)	
0	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008150	0,000770	0	762	0	-1355,65
	[4] $(k_1)_t = 0$	-0,008064	-	-	762	0	-1362,78

Çizelge 4.7. (Devam) Elastik zemine oturan daire eksenli kirişe ait sayısal sonuçlar

	[4] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008063	-	-	762	0	-1362,54
0	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,008150	0,000705	0	762	0	-1361,11
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,008147	0,000702	0	762	0	-1360,11
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,007096	0,000486	-0,001089	487,578	-166,640	-405,060
11,25	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,007099	0,000445	-0,001083	489,702	-167,390	-407,433
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,007098	0,000443	-0,001082	489,803	-166,290	-407,333
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,005208	-0,000048	-0,00122	269,413	-182,480	-189,702
	[4] $(k_1)_t=0$	-0,005198	-	-	272,674	-184,505	-192,353
22,5	[4] $(k_1)_t \neq 0]$	-0,005198	-	-	272,705	-183,431	-192,346
	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,005223	-0,000044	-0,00122	271,201	-183,378	-190,176
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,005223	-0,000044	-0,00122	271,303	-181,982	-190,176
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,003642	-0,000492	-0,000755	115,001	-110,719	-500,447
37,75	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,003668	-0,000451	-0,000749	115,997	-111,326	-503,070
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,003669	-0,000449	-0,000748	116,098	-110,329	-502,869
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,003050	-0,000660	0	0	0	595,125
	[4] $(k_1)_t=0$	-0,003115	-	-	0	0	605,211
45	[4] $(k_1)_t \neq 0]$	-0,003116	-	-	0	0	605,013
	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,003081	0,000604	0	0	0	598,506
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,003083	0,000601	0	0	0	598,308
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,005208	-0,000048	0,001224	-269,413	182,480	189,7022
67,5	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,005223	-0,000044	0,001215	-271,201	183,378	190,176
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,005223	-0,000044	0,001214	-271,302	181,982	190,176
	[7] $(k_1)_t \neq 0$	-0,008150	0,000770	0	-762	0	-1355,65
90	Bu çalışma $[(k_1)_t=0]$	-0,007099	0,000710	0	-762	0	-1361,11
	Bu çalışma $[(k_1)_t \neq 0]$	-0,008148	0,000710	0	-762	0	-1360,11

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, lineer elastik, homojen ve izotrop malzemeden yapılmış elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların statik davranışları teorik olarak incelenmiştir. Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilen uzaysal eğri eksenli çubukların statik davranışını idare eden denklemler doğru ve daire eksenli çubuklar için tekrar düzenlenmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Uzaysal eğri eksenli çubukların statik davranışı için denge denklemleri, bünye denklemleri ve uygunluk şartlarından dört adet vektörel denklem elde edilmiştir. Bunlar, hareketli koordinat takımındaki bileşenlerine ayrıldığında birinci dereceden on iki diferansiyel denklem bulunmaktadır. Bunların altısı düzlemi içinde, altısı düzlemine dik olarak iki gruba ayrıldıkları görülmektedir. Kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, problemin rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır.

Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların statik analizleri, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çözülmüştür. Doğru ve daire eksenli çubuklara ait sistem rijitlik matrisleri, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı elde edilmiştir.

Düzleminde ve düzlemine dik yüklü elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların statik analizleri için literatürdeki mevcut örnekler ele alınmıştır. Literatürde farklı yöntemler kullanılarak çözülen problemler ile önerilen yöntemin çözümleri karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları gözlemlenmektedir.

KAYNAKLAR

- Kerr, A.D., 1964. Elastic and viscoelastic foundation models. **Journal of Applied Mechanics – Transaction of The ASME**, 31,491-498
- Aköz, A. Y. and Kadioğlu, F., 1996. The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation. **Computers&Structures**, 60(4), 643-651.
- Akkurt, F. G., 2011. Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların dinamik analizi. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Arici, M. ve Granata, F. M., 2011. Generalized curved beam on elastic foundation solved by transfer matrix method. **Structural Engineering and Mechanics**, 40 (2), p. 279-295.
- Banan, M.R., Karami G. and Farshad M., 1989. Finite element analysis of curved beams on elastic foundations. **Computers & Structures**, 32, 45-53.
- Bozdoğan, K. B., Sezer, A. ve Aklık, P., 2004. Elastik zemine oturan kirişlerin taşıma matrisi yöntemi ile birinci ve ikinci mertebe statik ve stabilite analizi. **S. Ü. Mühendislik – Mimarlık Fakültesi Dergisi**, 19, 1.
- Celep, Z., 1990. In-plane vibrations of circular rings on a tensionless foundation. **Journal of Sound and Vibration**, 143 (3), 461-471.
- Çalım, F. F., 1996. Eğri eksenli çubuk sistemler ve silindirik tonoz yapıların tamamlayıcı fonksiyonlar metodu ve rijitlik matrisi yöntemi ile statik analizi. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Çalım, F. F., 2011. Forced vibration of curved beams on two-parameter elastic foundation. **Applied Mathematical Modelling**, 36 (3), 964-973.
- Çalım, F.F. and Akkurt, F.G., 2011. Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation. **Mechanics Research Communications**, 38 (2), 89-94.
- Çalım, F. F., 2009. Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation. **European Journal Mechanics – A/Solids**, 28 (3), 469-476.
- Dasgupta, S. and Sengupta, D., 1988. Horizontallı curved isoparametric beam element with or without elastic foundation including effect of shear deformation. **Computers & Structures**, 29 (6), 967-73.

- Erim, Y., 1997. Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubuklar. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Haktanır, V. ve Kıral, E., 1993. Statical analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods. **Computers & Structures**, 49 (4), 663-677.
- İnan, M., 1966. Elastik çubukların genel teorisi. İstanbul, **Berksoy Matbaası**.
- Kadıoğlu, F., 1994. Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubuklar. İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Kıral, E. and Ertepinar, A., 1974. Studies on elastic rods subject to diverse external agencies- part ii- planar rods on an elastic foundation. **METU Journal of Pure and Applied Sciences**, 7 (1), 41-53.
- Yang, Y. B., Wu, C. M. and Yau, J. D., 2001. Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads. **Journal of Sound and Vibration**, 242 (3), 519-537.
- Zubaroğlu, S., 1994. Elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar ve taşıma matrisi. İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Çankırı'da doğdu. İlk orta ve lise öğrenimini Çankırı'da tamamladı. 2004 yılında kazandığı Mustafa Kemal Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2010 yılında Çankırı'da inşaat firması kurarak ticari hayatına başladı. Halen Çankırı'da ticari hayatına devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.

