βIN DEKİ NOKTALARIN TİPLERİ ÜZERİNDE RUDIN-KEISLER YARI SIRALAMASI

RUHAN BOLAY

T. C.

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

ADANA

HAZİRAN, 1983

Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Başkan Yusuf Ünlü

Üye Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Üye M Boral

Yrd. Doç. Dr. Melih BORAL

ONAY

Yukardaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Ural Dinç

Prof.Dr.Ural DİNÇ

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER

ÖZET

$\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesi olsun. $\beta\mathbb{N}$ uzayı $\mathbb{N}$ deki maksimal süzgeçlerin kümesi olduğuna göre, her $p \in \beta\mathbb{N}$ için p ye bağlı olarak bir S_p yarı grubu tanımlanmış ve yarı gruplarda α'- homomorfizma kavramı verilmiştir.

Ayrıca, Rudin-Keisler yarı sıralamasında, $\beta\mathbb{N}$ deki iki p ve q noktası alındığında $ty(p) \leq ty(q)$ olması için gerek ve yeter koşulun S_p den S_q içine bir α'- monomorfizma olması olduğu gösterilmiştir. Burada " $\leq$ " Rudin-Keisler yarı sıralamasını göstermektedir.

Bundan başka $\beta\mathbb{N}$ nin her p elemanına bir H_p grubu tekabül ettirilerek, p, $q \in \beta\mathbb{N}$ ise $ty(p) \leq ty(q)$ olması için gerek ve yeter koşulun H_p den H_q içine bir izomorfizmanın varlığı olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

For each point $p \in \beta \mathbb{N}$ a semi group S_p and a group H_p are associated with p and the concept of α'- homomorphism of semigroups is introduced. It is shown that for two points p and q in $\beta \mathbb{N}$, the type of p is not greater than the type of q, in the Rudin-Keisler sense, if and only if there is an α'-monomorphism from S_p into S_q. It is also shown that p and q have the same type, if and only if H_p and H_q are isomorphic.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

$\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesi olsun. $\mathbb{N}$ yi ayrık (discrete) topoloji ile donatılmış olarak düşüneceğiz. $\mathbb{N}$ nin Stone-Čech kompaktlamasını $\beta\mathbb{N}$ ile gösterelim. $\beta\mathbb{N}$ uzayı, $\mathbb{N}$ deki maksimal süzgeçlerin kümesidir. $A \subseteq \mathbb{N}$ olduğuna göre $o(A) = \{ p \in \beta\mathbb{N} : A \in p \}$ olarak tanımlıyalım. Bilindiği gibi [1], $\{ o(A) : A \subseteq \mathbb{N} \}$ kümesi $\beta\mathbb{N}$ nin bir bazını oluşturur. p, $q \in \beta\mathbb{N}$ olsun. $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibi bijektif bir k fonksiyonu için

$$k(p) = \{ k(A) : A \in p \}$$

maksimal süzgeci q ya eşit oluyorsa p ve q <u>aynı tiptendir</u> denir. $p \in \beta\mathbb{N}$ için ty(p) ile $\beta\mathbb{N}$ içinde p ile aynı tipte olan maksimal süzgeçlerinin kümesini gösterelim. $\beta\mathbb{N}$ de p, q elemanlarının aynı tipte elemanlar olması durumunda p ve q nun gerek süzgeç olarak yapıları ve gerekse $\beta\mathbb{N}$ içindeki komşulukları birbiriyle aynı özelliklere sahiptir. Ayrı tipte olan iki maksimal süzgeci birbirinden ayırt etmek pek kolay bir iş olmayabilir. Tipleri birbirinden ayırt etmenin bir yolu, yapısı daha kolay anlaşılabilir diğer bir matematiksel yapı kullanarak tipleri tasnife tabi tutmaktır. Bu amaçla, Rudin ve Keisler $T = \{ ty(p) : p \in \beta\mathbb{N} \}$ kümesi üzerinde Rudin-Keisler yarı sıralaması adı verilen bir yarı sıralama tanımlamışlardır. Böylece bir maksimal süzgecin tipini, bu maksimal süzgecin, bu yarı sıralamaya göre hangi seviyede olduğunun bilinmesi ile tesbit edilebileceği düşünülebilir.

Bu çalışmada $\beta\mathbb{N}$ nin her p maksimal süzgecine S_p ile göstereceğimiz bir yarı grup karşılık getirilmiş ve $p, q \in \beta\mathbb{N}$ nin aynı tipte olması için gerek ve yeter koşulun, S_p ve S_q arasında bir α'- izomorfizma bulunması olduğu gösterilmiştir. Böylece maksimal süzgeçlerin yapısının incelenmesi, belirli tipteki yarı gruplar ve bu tür yarı gruplar arasındaki α'- homomorfizmaların incelenmesine dönüştürülmüştür. Aynı zamanda Rudin-Keisler yarı sıralamasının bu sistem içinde ne anlama geldiği gösterilmiş ve $p, q \in \beta\mathbb{N}$ ise, $ty(p) \leq ty(q)$ eşitsizliğinin ancak ve ancak S_p den S_q ya bir α'- monomorfizma olması ile mümkün olacağı gösterilmiştir.

Bu bölümün geri kalan kısmında daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremleri ifade edeceğiz.

S bir yarı grup ve $z \in S$ olsun. Eğer her $a \in S$ için $za = z$ oluyorsa z ye S nin bir <u>sol sıfırı</u> denir. S bir yarı grup olduğuna göre

$$Z(S) = \left\{ z \in S : z,\ S \text{ nin bir sol sıfırı} \right\}$$

koyalım.

Sol sıfıra örnek vermek için $S_{\mathbb{R}}$ yarı grubu, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye giden bütün fonksiyonların bileşke işlemi altındaki yarı grubu olsun.

$z \in Z(S_{\mathbb{R}})$ alalım ve $z(0) = r$ olsun. $t \in \mathbb{R}$ için $\hat{t}$ ile her $x \in \mathbb{R}$ için t değerini alan fonksiyonu gösterecek olursak $z\hat{0} = z$ dir. O halde $z(x) = z(0) = r$ olur. Böylece $z = \hat{r}$ bulunur.

<u>Tanım 1.1</u> S bir yarı grup ve $\mathcal{A} = \left\{ a_i : i \in I \right\}$, S de bir aile olsun. $\mathcal{A}$ ailesi aşağıdaki (i) ve (ii) koşullarını gerçekliyorsa $\mathcal{A}$ ya bir <u>e-aile</u> denir.

i) Her $i \in I$ için $a_i \notin Z(S)$ dir.

ii) $a \in S \setminus Z(S)$ ise, bir $i \in I$ için $a_i\, a \neq a$ olur.

e-aliye bir örnek vermek için

$$S = \left\{ f \in S_{\mathbb{R}} : f \text{ süreklidir} \right\}$$

alalım. S kümesi $S_{\mathbb{R}}$ nin bir alt yarı grubudur ve $Z(S) = \left\{ \hat{r} : r \in \mathbb{R} \right\}$ dir. $\mathcal{A} = \left\{ f_i : i \in I \right\} \subseteq S \setminus Z(S)$ olsun. $f \in S$ için $K(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) = x \right\}$ olduğuna göre

$$t(\mathcal{A}) = \bigcap \left\{ K(f_i) : i \in I \right\}$$

olsun. f_i ler sürekli olduklarından $t(\mathcal{A})$ kümesi $\mathbb{R}$ nin kapalı bir alt kümesidir. $\mathcal{A}$ nın bir e-aile olması için gerek ve yeter koşul $\operatorname{int} t(\mathcal{A}) = \emptyset$ olmasıdır. Önce $\operatorname{int} t(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman bir takım $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha < \beta$ ve $[\alpha, \beta] \subseteq t(\mathcal{A})$ olur. $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$a(x) = \begin{cases} \alpha & x \leq 0 \\ \alpha + x(\beta - \alpha) & 0 \leq x \leq 1 \\ \beta & x > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için $a(x) \in t(\mathcal{A})$ olduğundan her $i \in I$ için $f_i\, a = a$ olur. Ayrıca $a \notin Z(S)$ dir. O halde $\mathcal{A}$ bir e-aile olamaz.

Karşıt olarak $\mathcal{A}$ bir e-aile olmasın. O zaman her $i \in I$ için $f_i\, a = a$ olacak şekilde bir $a \in S \setminus Z(S)$ vardır. $a \notin Z(S)$ olduğundan bir takım $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 < x_2$ için $a(x_1) \neq a(x_2)$ olur. O halde $a([x_1, x_2]) = J \neq \emptyset$ bir aralıktır. Ayrıca $J \subseteq t(\mathcal{A})$ olur. O halde $\emptyset \neq \operatorname{int} J \subseteq \operatorname{int} t(\mathcal{A})$ dır.

[2] de Magill α - homomorfizma kavramını getirmektedir. Bu kavram bir $\underline{X}$ topolojik uzayı için, $\underline{X}$ in topolojisi ile $\underline{X}$ den $\underline{X}$ e giden sürekli fonksiyonların $S(\underline{X})$ yarı grubu arasındaki ilişkiyi incelemekte faydalı olmaktadır. Aşağıdaki tanım bu kavramdan kaynaklanmaktadır.

<u>Tanım 1.2</u> T ve S iki yarı grup ve h, T den S içine bir homomorfizma olsun. h, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir <u>α'- homomorfizmadır</u>.

i) $h(Z(T)) \subseteq Z(S)$ ve $h(T \setminus Z(T)) \subseteq S \setminus Z(S)$ dir.

ii) $\{t_i : i \in I\}$ kümesi T de bir e-aile ise $\{h(t_i) : i \in I\}$ kümesi S de bir e-aile dir.

Bire-bir bir α'- homomorfizmaya <u>α'-monomorfizma</u> ve üzerine bir α'-monomorfizmaya <u>α'-izomorfizma</u> diyeceğiz.

$P(\mathbb{N})$ ve $F(\mathbb{N})$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlıyalım.

$P(\mathbb{N}) = \{\pi : \pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bir permütasyondur.$\}$

$F(\mathbb{N}) = \{f : f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ üzerine bir fonksiyondur.$\}$

$p \in \beta\mathbb{N}$ ve $f \in F(\mathbb{N})$ olsun. Kolayca görüleceği gibi $f(p)$ kümesi $\mathbb{N}$ nin bir maksimal süzgecidir.

<u>Lemma 1.3</u> $f \in F(\mathbb{N})$, $p \in \beta\mathbb{N}$ ve $f(p) = q$ olsun.

a) $p = q$ olması için gerek ve yeter koşul $\{ n \in \mathbb{N} : f(n) = n \} \in p$ olmasıdır.

b) $ty(p) = ty(q)$ olması için gerek ve yeter koşul bir $A \in p$ için $f \mid A : A \longrightarrow f(A)$ tasvirinin bire-bir ve üzerine olmasıdır.

Ispat : a) $A = \{ n \in \mathbb{N} : f(n) = n \} \in p$ olsun. $B \in p$ ise $A \cap B \in p$ dir. Buradan $A \cap B = f(A \cap B) \in q$ ve dolayısıyle $B \in q$ bulunur. Böylece $p \subseteq q$ olur. p maksimal olduğundan $p = q$ elde edilir.

Karşıt olarak $A = \{ n \in \mathbb{N} : f(n) = n \} \notin p$ olsun. $f(p) = p$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $g \in F(\mathbb{N})$ ve $B \in p$ için $g(p) = p$, $B \cap \{ n \in \mathbb{N} : g(n) = n \} = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

1. durum : $f^{-1}(A) \setminus A = \emptyset$ tur : O zaman $A = f^{-1}(A)$ dır. Böylece $B = \mathbb{N} \setminus A$ ve $g = f$ alınabileceği görülür.

2. durum : $f^{-1}(A) \setminus A \neq \emptyset$ dir : $f^{-1}(A) \notin p$ dir. Çünkü aksi halde $A = ff^{-1}(A) \in f(p) = p$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathbb{N} \setminus f^{-1}(A) \in p$ dir. $B = \mathbb{N} \setminus f^{-1}(A)$ koyalım. Sabit bir $b \in B$ seçelim ve $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunu

$$g(n) = \begin{cases} n & n \in A \\ b & n \in f^{-1}(A) \setminus A \\ f(n) & n \in B \end{cases}$$

olarak tanımlıyalım. O zaman

$g(\mathbb{N}) \supseteq g(A \cup B) = f(A \cup B) = f(A) \cup ff^{-1}(\mathbb{N} \setminus A) = \mathbb{N}$ bulunur. Böylece $g \in F(\mathbb{N})$ dir. Kolayca görüleceği gibi $A = \{ n : g(n) = n \}$ ve $A = g^{-1}(A)$ dır. Aynı zamanda $C \in p$ ise $C \cap B \in p$ ve $f(C \cap B) \in p$ dir. Buradan

$g(C \cap B) \in p$ ve dolayısiyle $g(C) \in p$ bulunur. O halde $g(p) = p$ dir. Böylece g nin ve B nin varlığı ile ilgili iddianın doğruluğu gösterilmiş olur. O halde bir takım $B_0, B_1, B_2 \subseteq B$ için $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2$ ve $g(B_i) \cap B_i = \emptyset$ $(i = 0, 1, 2)$ olur. [[1], Teorem 9.1] $B \in p$ olduğundan bir $i \in \{0, 1, 2\}$ için $B_i \in p$ bulunur. Fakat $g(p) = p$ olduğundan $g(B_i) \in p$ ve dolayısiyle $\emptyset = B_i \cap g(B_i) \in p$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $f(p) \neq p$ dir.

b) $ty(p) = ty(p)$ olsun. $\pi(p) = q$ olacak şekilde bir $\pi \in P(\mathbb{N})$ vardır. O zaman $\pi^{-1} \circ f(p) = p$ dir. (a) dan dolayı, $A = \{ n : \pi^{-1} \circ f(n) = n \} \in p$ bulunur. $f \mid A : \longrightarrow f(A)$ tasvirinin bire-bir ve üzerine olduğu açıktır.

Karşıt olarak $f \mid A : A \longrightarrow f(A)$ tasviri bire-bir ve üzerine olacak şekilde $A \in p$ olsun. A sonlu ise $f(A)$ da sonludur. Böylece p, q sabit süzgeçlerdir ve $ty(p) = ty(1) = ty(q)$ olur. Dolayısıyle A sonsuz olsun. Bir takım $A_0, A_1 \subseteq A$ için $A = A_0 \cup A_1$, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ ve $|A_0| = |A_1| = \aleph_0$ dır. Genelliği kaybetmeksizin $A_0 \in p$ olduğunu kabul edelim. $f(A_1) = f(A \setminus A_0) = f(A) \setminus f(A_0) \subseteq \mathbb{N} \setminus f(A_0)$ olduğundan $|\mathbb{N} \setminus f(A_0)| = \aleph_0$ dır. O halde $\sigma : \mathbb{N} \setminus A_0 \longrightarrow \mathbb{N} \setminus f(A_0)$ gibi bir bijeksiyon vardır. $\pi \in P(\mathbb{N})$ yi $n \in A_0$ ise $\pi(n) = f(n)$ olarak ve eğer $n \in \mathbb{N} \setminus A_0$ ise $\pi(n) = \sigma(n)$ olarak tanımlıyalım. Buradan $\pi(p) = q$ olduğu kolayca görülür.

$p, p', q, q' \in \beta\mathbb{N}$, $ty(p) = ty(p')$ ve $ty(q) = ty(q')$ olsun. Bir takım $\pi, \sigma \in P(\mathbb{N})$ için $p' = \sigma(p)$ ve $q' = \pi(q)$, dur. Eğer bir $f \in F(\mathbb{N})$ için $f(p) = q$ ise, o zaman $\pi f \sigma^{-1}(p') = q'$ olur. Böylece aşağıda verilen tanımın $T = \{ ty(p) : p \in \beta\mathbb{N} \}$ üzerinde iyi tanımlanmış bir bağıntı olduğu görülür.

Tanım 1.4 $p,\ q \in \beta\mathbb{N}$ olsun. Bir $f \in F(\mathbb{N})$ için $f(q) = p$ ise $ty(p) \leq ty(q)$ dur. Kolayca görüleceği gibi " $\leq$ " T üzerinde bir yarı sıralamadır. Bu yarı sıralamaya Rudin-Keisler yarı sıralaması denir.

2. BÖLÜM

TİPLERİN YARI GRUPLARLA TEMSİLİ

$-\infty, \infty \notin \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{\infty, -\infty\}$ olsun. S_0 ile $\mathbb{N}_0$ ın kendi içine tasvirlerinin yarı grubunu gösterelim. Burada çarpma, fonksiyonların alışılagelmiş bileşkesidir. $x \in \mathbb{N}_0$ için $\hat{x}$, her $y \in \mathbb{N}_0$ için $\hat{x}(y) = x$ olarak tanımlanan fonksiyonu göstersin.

<u>Lemma 2.1</u> $Z(S_0) = \{\hat{x} : x \in \mathbb{N}_0\}$ dır.

<u>İspat</u> : $z \in Z(S_0)$ olsun. $Z(1) = x$ koyalım. $z \in Z(S_0)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}_0$ için, $z \circ \hat{n} = z$ dir. O halde $x = Z(1) = Z(\hat{n}(1)) = Z(n)$ olup her

$n \in \mathbb{N}_0$ için, $Z(n) = x$ dir. Dolayısiyle $z = \hat{x}$ dır.

Karşıt olarak $x \in \mathbb{N}_0$ ve $f \in S_0$ ise, her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(\hat{x} \circ f)(n) = \hat{x}(f(n)) = x = \hat{x}(n)$$

olduğundan $\hat{x} \circ f = \hat{x}$ olur.

Bundan böyle $Z(S_0)$ yerine kısaca Z_0 yazacağız.

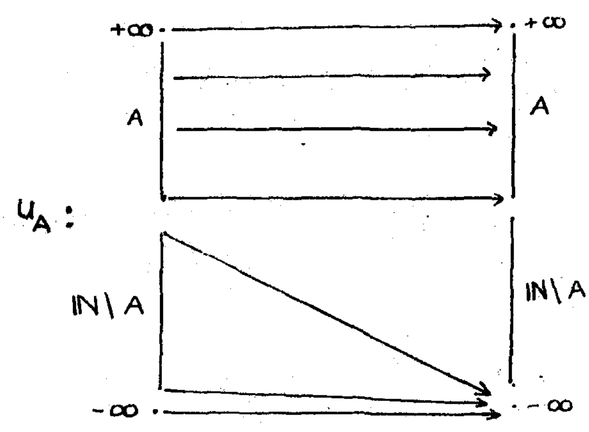
<u>Tanım 2.2</u> $f \in S_0$ için $K(f) = \{ n \in \mathbb{N} : f(n) = n \}$ dir.

$f, g \in S_0$ ise $K(fg) \supseteq K(f) \cap K(g)$ ve f nin tersi olması halinde $K(f) = K(f^{-1})$ olacağı açıktır. $K(f)$ nin, $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi olduğuna dikkat edelim.

<u>Tanım 2.3</u> $p \in \beta\mathbb{N}$ için

a) $S_p = \{ f \in S_0 : f(-\infty) = -\infty,\ f(+\infty) = +\infty,\ f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ ve $K(f) \in p \} \cup Z_0$ olsun.

b) $A \subseteq \mathbb{N}$ için $u_A : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ fonksiyonu $n \in A$ için $u_A(n) = n$, $x \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\} \setminus A$ için $u_A(x) = -\infty$ ve $u_A(\infty) = \infty$ olsun.



Şekil 1

Lemma 2.4 $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $f \in S_o$, $n \in \mathbb{N}$ ve $p \in \beta\mathbb{N}$ olsun.

a) $u_A \, u_B = u_B \, u_A = u_{A \quad B}$ dir.

b) $u_A \, u_B = u_A$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ olmasıdır.

c) $u_A = u_B$ ise $A = B$ dir.

d) $n \in \mathbb{N}$ olsun. $n \in K(f)$ olması için gerek ve yeter koşul $f\hat{n} = \hat{n}$ olmasıdır.

e) $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $u_A \in S_p \setminus Z_o$ olması için gerek ve yeter koşul $A \in p$ olmasıdır.

f) Eğer bir $f \in S_o$ için $A \subseteq K(f)$ ve $f(\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$ oluyorsa $f \circ u_A = u_A$ dır.

g) S_p kümesi S_o ın bir alt yarı grubu ve $Z(S_p) = Z_o$ dır.

Ispat : a)

$$
\begin{array}{cl|ccccc}
 & & +\infty & \longrightarrow & +\infty & \longrightarrow & +\infty \\
x & & \mathbb{N} \setminus (A \cup B) & \longrightarrow & -\infty & \longrightarrow & -\infty \\
m & & A \setminus B & \longrightarrow & m & \longrightarrow & -\infty \\
n & & B \setminus A & \longrightarrow & -\infty & \longrightarrow & -\infty \\
t & & A \cap B & \longrightarrow & t & \longrightarrow & t \\
 & & -\infty & \longrightarrow & -\infty & \longrightarrow & -\infty
\end{array}
$$

Şekil 2

$u = u_B u_A$ olsun. $u(-\infty) = -\infty$ ve $u(+\infty) = +\infty$ olduğu açıktır. $x \in \mathbb{N} \setminus (A \cup B)$, $m \in A \setminus B$, $n \in B \setminus A$ ve $t \in A \cap B$ olsun. $u_B u_A(x) = u_B(-\infty) = -\infty$, $u_B u_A(m) = u_B(m) = -\infty$, $u_B u_A(n) = u_B(-\infty) = -\infty$, $u_B u_A(t) = u_B(t) = t$ olduğundan $u_B u_A = u_{B \cap A}$ dır.

Benzer şekilde $u_A u_B = u_{A \cap B}$ olur.

b) $u_A u_B = u_A$ olsun. (a) dan dolayı $u_A u_B = u_{A \cap B} = u_A$ dır. $n \in A$ için $n = u_A(n) = u_{A \cap B}(n)$ olup $u_{A \cap B}(n) = n$ olduğundan $n \in A \cap B$ dir. O halde $A \subseteq A \cap B$ olup $A \subseteq B$ dir.

Karşıt olarak $A \subseteq B$ ise, (a) dan dolayı $u_B u_A = u_{A \cap B} = u_A$ bulunur.

c) $u_A = u_B$ ise $n \in A$ için $n = u_A(n) = u_B(n)$ olup $n \in B$ dir. O halde buradan $A \subseteq B$ bulunur. Aynı şekilde $B \subseteq A$ dır. Dolayısiyle $A = B$ dir.

Karşıt olarak $A = B$ ise $u_A = u_B$ olduğu açıktır.

d) $n \in K(f)$ için $f(n) = n$ dir. Her $x \in \mathbb{N}_0$ için $f(\hat{n}(x)) = f(n) = n = \hat{n}(x)$ olup, $f \circ \hat{n} = \hat{n}$ dır.

Karşıt olarak $f \circ \hat{n}$ ise $f \circ \hat{n}(1) = \hat{n}(1)$ veya $f(n) = n$ dir. Dolayısiyle $n \in K(f)$ dir.

e) $A \in p$ olsun. $u_A(+\infty) = +\infty$, $u_A(-\infty) = -\infty$, $u_A(\mathbb{N}) \subseteq A \cup \{-\infty\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ ve $K(u_A) = A \in p$ dir. O halde $u_A \in S_p$ dir. $u_A(-\infty) \neq u_A(+\infty)$ olduğundan $u_A \notin Z_0$ dır.

Karşıt olarak $u_A \in S_p$ olsun. $K(u_A) = A$ olup, $A \in p$ olduğu görülür.

f) $A \subseteq K(f)$, $x \in \mathbb{N}_0$ olsun.

$$fu_A(x) = \begin{cases} f(x) = x & x \in A \subseteq K(f) \\ f(+\infty) = +\infty & x = +\infty \\ f(-\infty) = -\infty & x \neq \infty,\ x \in \mathbb{N} \setminus A \cup \{-\infty\} \end{cases}$$

olur. O halde $fu_A = u_A$ dır.

g) $f, g \in S_p$ olsun. $h = f \circ g$ koyalım. Kolayca görüleceği gibi $h(-\infty) = -\infty$, $h(+\infty) = +\infty$ ve $h(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ dur. Ayrıca $K(h) \supseteq K(f) \cap K(g)$ ve $K(f) \cap K(g) \in p$ olduğundan $K(h) \in p$ dir. Dolayısiyle $h \in S_p$ dir. Buradan S_p nin S_o ın bir alt yarı grubu olduğu görülür.

$z \in Z(S_p)$ olsun. $x \in \mathbb{N}_o$ ise $\hat{x} \in Z_o \subseteq S_p$ dir. O halde

$$z \circ \hat{x} = z$$

olur. Buradan

$$z(x) = (z \circ \hat{x})(1) = z(1)$$

bulunur. Böylece $z = \widehat{z(1)}$ dir. Dolayısiyle $Z(S_p) \subseteq Z_o$ dır. $Z_o \subseteq Z(S_p)$ olduğu açıktır. O halde $Z_o = Z(S_p)$ dir.

<u>Lemma 2.5</u> $p \in \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{ f_i : i \in I \} \subseteq S_p \setminus Z_o$ ve $A = \bigcap \{ K(f_i) : i \in I \}$ olsun. $\mathcal{A}$ nın bir e-aile olması için gerek ve yeter koşul $A \notin p$ olmasıdır.

<u>Ispat</u> : $\mathcal{A}$ bir e-aile ve $A \in p$ olsun. O zaman $u_A \in S_p \setminus Z_o$ ve her $i \in I$ için Lemma 2.4(f) den dolayı $f_i u_A = u_A$ olup bir çelişkidir. O halde $\mathcal{A}$ bir e-aile ise $A \notin p$ dir.

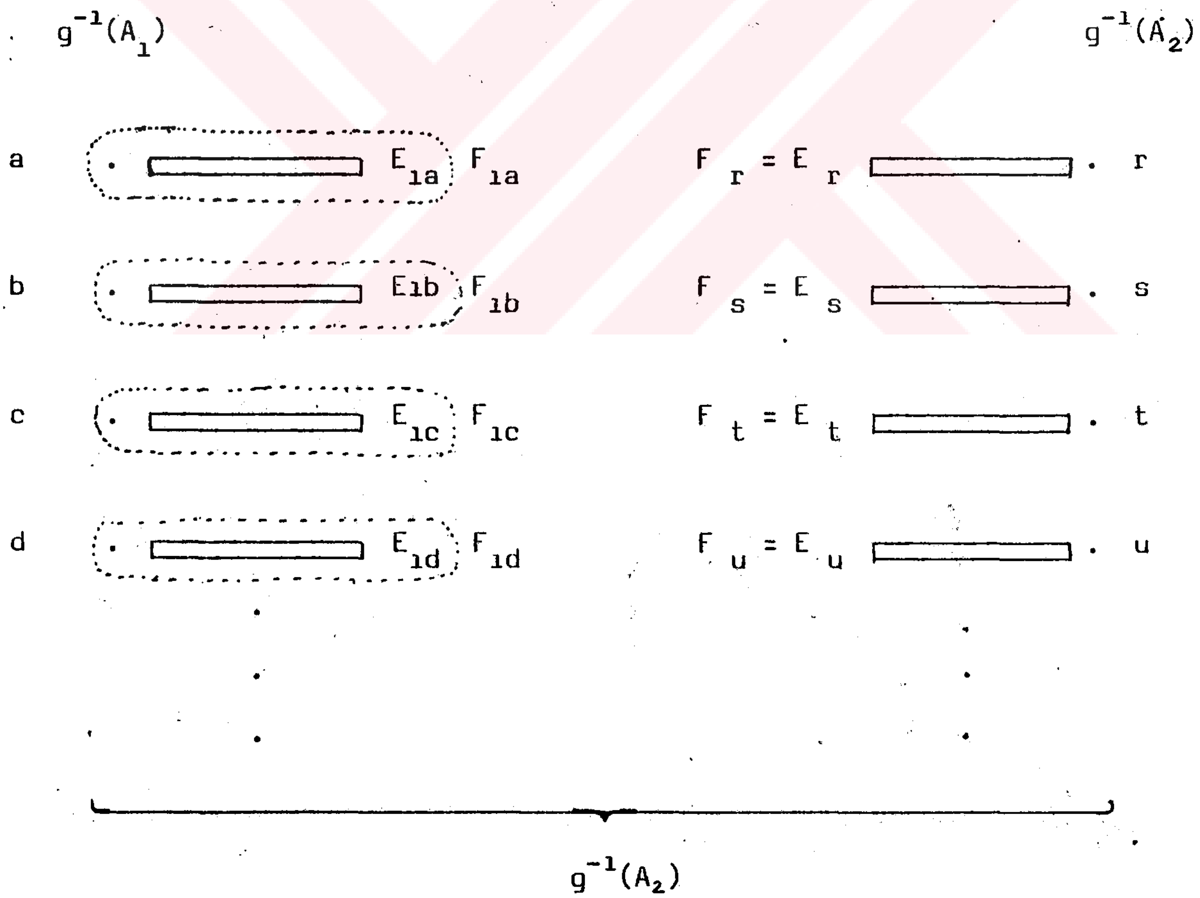
Karşıt olarak $A \notin p$ varsayalım. Bir $g \in S_p \setminus Z_o$ ve her $i \in I$ için $f_i g = g$ olsun. O zaman $A \supseteq K(g)$ olur. $K(g) \in p$ olup $A \in p$ çelişkisi elde edilir. O halde hiç olmazsa bir $i \in I$ için $f_i g \neq g$ dir. Dolayısiyle $\mathcal{A}$ bir e-ailedir.

<u>Lemma 2.6</u> $p, q \in \beta\mathbb{N}$ ve $ty(p) \leq ty(q)$ olsun. Bir $f \in F(\mathbb{N})$ için $f(q) = p$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(n)$ sonsuzdur.

Ispat : $g \in F(\mathbb{N})$ ve $g(q) = p$ olsun. $ty(p) \leq ty(q)$ olduğundan böyle bir g vardır. $A_1 \in p$ yi $A_2 = \mathbb{N} \setminus A_1$ sonsuz olacak şekilde seçelim. O halde $g^{-1}(A_1) \in q$ ve $g^{-1}(A_2)$ sonsuzdur. Çünki A_2 sonsuz ve g, üzerindedir. Ayrıca

$$\mathbb{N} = g^{-1}(A_1) \cup g^{-1}(A_2)$$

dir. $i = y, 2$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $E_1 \cup E_2 = g^{-1}(A_2)$ ve $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olacak şekilde sonsuz olan iki E_1 ve E_2 kümesi seçelim. $\{ E_{im} : m \in g^{-1}(A_i) \}$ kümesi E_i nin ayrık ve her biri sonsuz olan kümelere bir parçalanışı olsun. $m \in g^{-1}(A_1)$ için $F_{1m} = \{m\} \cup E_{1m}$ ve $m \in g^{-1}(A_2)$ için $F_{2m} = E_{2m}$ olsun.



Şekil 3

$m \in g^{-1}(A_1)$ ve $n \in g^{-1}(A_2)$ ise $F_{1m} \cap F_{2n} = (E_{1m} \cap E_{n}) \cup (\{m\} \cap E_{2n})$ dir. E_{ik} lerin seçiminden dolayı $E_{1m} \cap E_{n} = \emptyset$ olur. Ayrıca $m \in g^{-1}(A_1)$ ve $E_{2m} = g^{-1}(A_2)$ olup $\{m\} \cap E_{2n} = \emptyset$ tur. O halde $F_{1m} \cap F_{2n} = \emptyset$ dir.

$m, k \in g^{-1}(A_1)$ ve $m \neq k$ ise

$F_{1m} \cap F_{1k} = (\{m\} \cap \{k\}) \cup (\{m\} \cap E_{1k}) \cup (\{k\} \cap E_{1m}) \cup (E_{1m} \cap E_{1k})$.

ve $m \neq k$ olduğundan $\{m\} \cap \{k\} = \emptyset$ tur. $m, k \in g^{-1}(A_1)$ ve $E_{1m} \cup E_{1k} \subseteq g^{-1}(A_2)$ olduğundan $\{m\} \cap E_{1k} = \{k\} \cap E_{1m} = \emptyset$ tur. E_{1s} lerin seçiminden $E_{1m} \cap E_{1k} = \emptyset$ tur. O halde $F_{1m} \cap F_{1k} = \emptyset$ olup E_{2s} lerin seçiminden $r, n \in g^{-1}(A_2)$ ve $r \neq n$ için $F_{2r} \cap F_{2n} = E_{2r} \cap E_{2s} = \emptyset$ tur. Böylece F_{im} lerin ikişer ikişer arakesitleri boş ve kolayca görüleceği gibi

$$\bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{m \in g^{-1}(A_i)} F_{im} = \mathbb{N}$$

dir. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu $i = 1, 2$ ve $m \in g^{-1}(A_i)$ için $f(F_{im}) = g(m)$ olarak tanımlıyalım. g, üzerine olup, f nin de üzerine olacağı açıktır. Ayrıca $B \in p$ için $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(B \cap A_1) \supseteq g^{-1}(B \cap A_1) \in p$ olup $f^{-1}(B) \in q$ dur. İddianın ikinci kısmını görmek için $m \in g^{-1}(B \cap A_1) \subseteq g^{-1}(A_1)$ alalım. O zaman $m \in F_{1m}$ olup $f(m) = g(m) \in B \cap A_1$ dir. Böylece f üzerine ve $f(q) = p$ dir. Ayrıca her m ve belirli bir $i = 1, 2$ için $f^{-1}(m) \supseteq E_{im}$ olduğu görülür. O halde her m için $f^{-1}(m)$ sonsuzdur.

<u>Lemma 2.7</u> $p, q \in \beta\mathbb{N}$ ve $w : p \longrightarrow q$ aşağıdaki koşulları sağlıyan bir fonksiyon ise $ty(p) \leq ty(q)$ dır.

i) Her $A, B \in p$ için, $A \subseteq B$ olması için gerek ve yeter koşul $w(A) \subseteq w(B)$ olmasıdır.

ii) Her $A, B \in p$ için $w(A \cap B) = w(A) \cap w(B)$ dir.

iii) Eğer $\{A_i : i \in I\} \subseteq p$ ve $\bigcap \{A_i : i \in I\} \notin p$ ise o zaman

$\bigcap \{w(A_i) : i \in I\} \notin p$ dir.

Ispat : Genelliği kaybetmeksizin p nin serbest olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü aksi halde $ty(p) \leq ty(q)$ dur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = w(\mathbb{N}) \setminus w(\mathbb{N} \setminus \{n\})$ koyalım. p serbest olduğundan $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in p$ dir. O halde K_n iyi tanımlanmıştır. Ayrıca $\mathbb{N} \in p$ ve $\mathbb{N} \setminus \{n\} \neq \mathbb{N}$ olduğundan (i) den dolayı $w(\mathbb{N}) \neq w(\mathbb{N} \setminus \{n\})$ dir. O halde $K_n \neq \emptyset$ tur. Tümevarım kullanılarak

$$T_1 = K_1,$$
$$T_n = K_n \setminus \bigcup\{K_j : j = 1, 2, \ldots, n-1\} \ ; \ (n \geq 2),$$
$$T = \bigcup\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olarak tanımlıyalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n \neq \emptyset$ dir. Çünkü aksi halde bir $n \geq 2$ için $T_n = \emptyset$ olursa $K_n \subseteq \bigcup\{K_j : J = 1, 2, \ldots, n-1\}$ olur. Böylece $w(\mathbb{N} \setminus \{n\}) \supseteq \bigcap\{w(\mathbb{N} \setminus \{j\}) : j = 1, 2, \ldots, n-1\} = w(\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots n-1\})$ elde edilir. Bu ise (i) ile çelişir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n \neq \emptyset$ dir.

$$\bigcap\{\mathbb{N} \setminus \{n\} : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset \notin p$$

olduğundan (iii) den dolayı $\bigcap\{w(\mathbb{N} \setminus \{n\}) : n \in \mathbb{N}\} \notin q$ olur. Böylece

$$M = \bigcup\{K_n : n \in \mathbb{N}\} \in p$$

bulunur. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu $n \geq 2$ için $f(T_n) = \{n\}$ ve $f(T_1 \cup \mathbb{N} \setminus T) = \{1\}$ olarak tanımlıyalım. $A \in p$ ve $f^{-1}(A) \notin q$ olsun. O zaman $w(A) \cap M \subseteq f^{-1}(A)$ dır. Çünkü aksi halde $y \in w(A) \cap M \setminus f^{-1}(A)$ alalım. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $y \in w(A) \cap K_n$ dir. m, böyle n lerin en küçüğü olsun. $y \in w(A) \cap T_m$ ve dolayısiyle $f(y) = m \notin A$ olur. $m \notin A$ olduğundan $w(A) = w(\mathbb{N} \setminus \{m\})$ ve böylece

$$y \in w(A) \cap T_m \subseteq w(A) \cap K_m = \emptyset$$

çelişkisi elde edilir. O halde $f(q) = p$ dir.

Bu hazırlıklardan sonra Rudin-Keisler yarı sıralamasını S_p yarı grupları cinsinden ıspat edebilecek duruma gelmiş bulunuyoruz.

<u>Teorem 2.8</u> $p, q \in \beta\mathbb{N}$ olsun. $ty(p) \leq ty(q)$ olması için gerek ve yeter koşul S_p den S_q ya bir α'- monomorfizmanın var olmasıdır.

<u>Ispat</u> : S_p den S_q ya φ gibi bir α'- monomorfizma olduğunu varsayalım. $\varphi(Z_o) \subseteq Z_o$ olduğundan bir $f : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{N}_o$ fonksiyonu için $\varphi(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$; $(x \in \mathbb{N}_o)$ dır. φ, bire-bir olduğundan f de bire-bir dir. φ bir α'- homomorfizma olduğundan $\varphi(S_p \setminus Z_o) = S_q \setminus Z_o$ dır. $A \in p$ için $u_A \in S_p \setminus Z_o$ olduğundan $\varphi(u_A) \in S_q \setminus Z_o$ ve $K(\varphi(u_A)) \in q$ dur. $A \in p$ için $w(A) = K(\varphi(u_A))$ olarak tanımlıyalım. $w : p \longrightarrow q$ fonksiyonunun Lemma 2.7 nin koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

i) $A, B \in p$ olsun. $A \subseteq B$ ise $u_B u_B = u_A$ olup $\varphi(u_B)\varphi(u_A) = \varphi(u_A)$ olur. O halde $w(A) \subseteq w(B)$ dir.

Karşıt olarak $w(A) \subseteq w(B)$ olsun. Eğer $n \in A \setminus B$ ise $u_A \hat{n} = \hat{n}$ fakat $u_B \hat{n} \neq \hat{n}$ olur. Böylece $\varphi(u_A)\widehat{f(n)} = \widehat{f(n)}$ ve $\varphi(u_B)\widehat{f(n)} \neq \widehat{f(n)}$ dır. O halde $f(n) \neq \mp\infty$ dur. Çünkü aksi halde $\varphi(u_B)\widehat{f(n)} = \widehat{f(n)}$ olurdu. Buradan $f(n) \in w(A) \setminus w(B)$ çelişkisi elde edilir. O halde $A \subseteq B$ dir.

ii) $A, B \in p$ olsun. (i) den dolayı $w(A \cap B) = w(A) \cap w(B)$ dir. $u_A u_B = u_{A\cap B}$ olduğundan $\varphi(u_A)\varphi(u_B) = \varphi(u_A u_B) = \varphi(u_{A\cap B})$ olur. Böylece

$w(A) \cap w(B) = K(\varphi(u_A)\varphi(u_B)) = K(\varphi(u_{A\cap B})) = w(A \cap B)$ bulunur.

Buradan $w(A) \cap w(B) = w(A \cap B)$ elde edilir.

iii) $\{A_i : i \in I\} \subseteq p$ ve $\bigcap\{A_i : i \in I\} \notin p$ olsun.

Lemma 2.5 den dolayı $\{ u_{A_i} : i \in I \}$, S_p de bir e-ailedir. Böylece $\{ \varphi(u_{A_i}) : i \in I \}$ de S_q da bir e-aile olur. Gene Lemma 2.5 ten $\bigcap \{ w(A_i) : i \in I \} \notin q$ dir.

w nın, Lemma 2.7 nin koşullarını sağladığını böylece göstermiş oluyoruz. O halde $ty(p) \leq ty(q)$ dir.

Karşıt olarak $ty(p) \leq ty(q)$ olduğunu varsayalım. Lemma 2.6 dan dolayı öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır ki $f(q) = p$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(n)$ sonsuzdur. $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(n) = \{ y_{nk} : k \in \mathbb{N} \}$ olsun. Burada $k \neq k'$ için $y_{nk} \neq y_{nk'}$ dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $y_{-\infty, k} = -\infty$ ve $y_{+\infty, k} = +\infty$ koyalım. $\varphi : S_p \longrightarrow S_o$ fonksiyonunu şöyle tanımlıyalım.

a) $h \in s_p \setminus Z_o$ ise $\varphi(h)(y_{nk}) = y'_{h(n)k}$,

b) $m \in N_o$ ise $\varphi(\hat{m}) = \hat{y}_{m1}$.

φ nin iyi tanımlandığı açıktır. Ayrıca $h \in s_p \setminus Z_o$ ise $\varphi(h)(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N} \cup \{ -\infty \}$ dur. Aynı şekilde $\varphi(Z_o) \subseteq Z_o$ olduğu açıktır.

i) <u>φ, bire-bir dir</u> : $h, g \in S_p$ ve $h \neq g$ olsun. Bir $m \in \mathbb{N}_o$ için $h(m) \neq g(m)$ dir. $h(\mp\infty) = \mp\infty = g(\mp\infty)$ olduğundan $m \neq \mp\infty$ dur. O halde $m \in \mathbb{N}$ dir. Ayrıca $h(m) \neq g(m)$ olup, $y_{h(m),1} \neq y_{g(m),1}$ dir. Şimdi $h, g \in S_p \setminus Z_o$ ise

$$\varphi(h)(y_{m,1}) = y_{h(m),1} \neq y_{g(m),1} = \varphi(g)(y_{m,1})$$

olup $\varphi(h) \neq \varphi(g)$ olur. O halde h veya g den biri Z_o'a ait olsun. Genelliği kaybetmeksizin $h \in Z_o$ ve $h = \hat{x}$, $(x \in \mathbb{N}_o)$ olsun. $h(m) = x \neq g(m)$ dir. $\varphi(h) = \hat{y}_{x,1}$ olduğundan $\varphi(h)(y_{m,1}) = y_{x,1}$ olur. $g \in S_p \setminus Z_o$ ise $\varphi(g)(y_{m,1}) = y_{g(m),1} \neq y_{x,1}$ olup $\varphi(h) \neq \varphi(g)$ dir. $g \in Z_o$ ve $g = \hat{a}$ $(a \in \mathbb{N}_o)$ ise, $\varphi(g)(y_{m,1}) = \hat{y}_{a,1}(y_{m,1}) = y_{a,1}$ olur. $x = h(m) \neq g(m) = a$ olduğundan $y_{a,1} \neq y_{x,1}$ dir. Böylece bu durumda da $\varphi(h) \neq \varphi(g)$ bulunur.

ii) <u>φ bir homomorfizmadır</u> : $h, g \in S_p$ olsun. $h \in Z_o$ ise

$\varphi(h) \in Z_o$ olduğundan $hg = h$ ve $\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(h)$ dır. O halde $\varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g)$ bulunur. $h \notin Z_o$ olsun. $g \in Z_o$ ve $g = \hat{a}$ ise $hg = \widehat{h(a)}$ ve $\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(h)\hat{y}_{a,1} = \varphi(h)\widehat{(y_{a,1})} = \hat{y}_{h(a),1}$ olur. O halde

$$\varphi(hg) = \varphi(\widehat{h(a)}) = \hat{y}_{h(a),1} = \varphi(h)\varphi(g)$$

dir. Nihayet $h, g \in S_p \setminus Z_o$ olması durumunu gözönüne alalım. $hg \notin Z_o$ dır. Çünkü aksi halde $hg=\hat{a}$ ($a \in \mathbb{N}_o$) şeklindedir. $h, g \notin Z_o$ olup $h(\mp\infty) = g(\mp\infty) = \mp\infty$ dur. O halde $\mp\infty = hg(\mp\infty) = a$ çelişkisi elde edilir. Böylece $hg \notin Z_o$ bulunur. Her $m \in \mathbb{N}_o$, $k \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(hg)(y_{mk}) = y_{hg(m)k} = \varphi(h)(y_{g(m)k}) = \varphi(h)\varphi(g)(y_{mk})$$

bulunur. O halde $\varphi(hg) = \varphi(h)\varphi(g)$ dir.

iii) <u>$h \in S_p \setminus Z_o$ ise $K(\varphi(h)) = f^{-1}(K(h))$ dır</u> : $y_{mk} \in K(\varphi(h))$ ise $m \neq \mp\infty$ dur. Çünkü $K(\varphi(h)) \subseteq \mathbb{N}$ dir. Aynı zamanda $y_{h(m),k} = \varphi(h)(y_{mk}) = y_{mk}$ olur. $m \in \mathbb{N}$ olduğu gözönüne alınırsa $h(m) = m$ bulunur. Böylece $f(y_{mk}) = m \in K(h)$ veya $y_{mk} \in f^{-1}(K(h))$ bulunur. O halde $K(\varphi(h)) \subseteq f^{-1}(K(h))$dır.

Karşıt olarak $y_{m,k} \in f^{-1}(K(h))$ olsun. Yukarıdaki gibi $m \in \mathbb{N}$ dir. $f(y_{mk}) = m \in K(h)$ olup $h(m) = m$ dir. O halde $\varphi(h)(y_{mk}) = y_{h(m),k} = y_{mk}$ yani $y_{mk} \in K(\varphi(h))$ bulunur. Buradan $f^{-1}(K(h)) = K(\varphi(h))$ olduğu görülür.

Şimdi, (iii) den dolayı $h \in S_p \setminus Z_o$ ise $K(h) \in p$ olup $f^{-1}(K(h)) \in q$ dur. O halde $\varphi(h) \in S_q$ olur. Böylece φ, S_p yi S_q içine tasvir eder. Ayrıca (iii) ve Lemma 2.5 ten dolayı φ, e-aileleri, e-ailelere götürür. Kolayca görüleceği gibi $\varphi(S_p \setminus Z_o) = S_q \setminus Z_o$ dır. O halde φ bir α'- monomorfizmadır.

3. BÖLÜM

TİPLERİN GRUP TEMSİLLERİ

Bu bölümde $\beta\mathbb{N}$ nin her p elemanına bir H_p grubu tekabül ettirecek ve p, q$\in\beta\mathbb{N}$ ise ty(p) = ty(q) olmasi için gerek ve yeter koşulun, H_p nin H_q ya izomorf olması olduğunu göstereceğiz.

H ile, $\mathbb{N}$ nin bütün permütasyonları grubunu gösterelim. F kümesini

$$F = \left\{ f \in H : \mathbb{N} \setminus k(f) \text{ sonlu dur.} \right\}$$

olarak tanımlıyalım. f $\in$ F ise, f elemanı n = $\left| \mathbb{N} \setminus k(f) \right|$ olmak üzere, sym(n) nin bir elemanı olarak düşünülebilir. Burada sym(n), $\left\{ 1, 2, \ldots, n \right\}$ kümesinin permütasyonları grubudur. f, sym(n) nin bir elemanı olarak çift veya tek olduğuna göre f ye çift veya tek diyeceğiz.

$\mathcal{A} = \{ f \in F : f \text{ çift} \}$ olsun. Bilindiği gibi [5], $\mathcal{A}$ ve F, H nin trivial olmayan yegane normal alt gruplarıdır. $F \in \beta\mathbb{N}$ için

$$H_p = \{ f \in H : k(f) \in p \}$$

koyalım. H_p, H nin bir alt grubudur ve p serbest ise $\mathcal{A} \subseteq H_p$ dir.

Teorem 3.1 L ve M, H nin iki alt grubu ve $\mathcal{A} \subseteq L \cap M$ olsun. L ve M izomorf ise bir $f \in H$ için $fLf^{-1} = M$ dir.

Ispat : $\varphi : L \longrightarrow M$ bir izomorfizma olsun. $\varphi(\mathcal{A})$ grubu M nin trivial olmayan normal bir alt grubudur. O halde [[5], Ex. 11. 3. 10] $\mathcal{A} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$ dır. φ^{-1} de bir izomorfizma olduğundan $\mathcal{A} \subseteq \varphi^{-1}(\mathcal{A})$ dır. Böylece $\mathcal{A} = \varphi(\mathcal{A})$ bulunur. Bundan sonra ıspat [5] deki Teorem 11.4.6. nın ıspatının aynıdır.

Teorem 3.2 $p, q \in \beta\mathbb{N}$ ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) $ty(p) = ty(q)$

b) Bir $f \in H$ için $fH_pf^{-1} = H_q$ dir.

c) H_p den H_q üzerine bir izomorfizma vardır.

Ispat : (a) $\Longrightarrow$ (b) : $f \in H$ için $f(p) = q$ olsun. $g \in H_p$ ise $K(fgf^{-1}) = f(k(g)) \in q$ olduğundan $fH_pf^{-1} \subseteq H_q$ dir. $p = f^{-1}(q)$ olup $f^{-1}H_qf \subseteq H_p$ ve böylece $fH_pf^{-1} = H_q$ bulunur.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : $g \in H_p$ için $\varphi(g) = fqf^{-1}$ olarak tanımlanan $\varphi : h_p \longrightarrow H_q$ fonksiyonu bir izomorfizmadır.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : $\varphi : H_p \longrightarrow H_q$ bir izomorfizma olsun.

1. durum : p veya q sabittir : Genelliği kaybetmeksizin p nin sabit olduğunu varsayalım. q nun da sabit olduğunu göstermek yetecektir. q nun sabit olmadığını ve $\bigcap p = \{n\}$ olduğunu varsayalım. $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{n\}$ herhangi bir bijeksiyon olsun. $\lambda : H \longrightarrow H_p$ fonksiyonu $m \in \mathbb{N}\setminus\{n\}$ için $\lambda(f)(m) = kfk^{-1}(m)$ ve $\lambda(f)(n) = n$ olarak tanımlıyalım. λ, H den H_p üzerine bir izomorfizmadır. O halde H ve H_q izomorf ve $\mathcal{A} \subseteq H \cap H_q$ dir. Teorem 3.1 den dolayı bir $g \in H$ için $H_q = gHg^{-1} = H$ çelişkisi elde edilir. O halde $ty(p) = ty(q)$ dir.

2. durum : p ve q serbesttirler: Teorem 3.1 den dolayı bir $f \in H$ için $fH_pf^{-1} = H_q$ olur. $A \in P$, $g \in H$ ve $K(g) = A$ olsun. O zaman $g \in H_p$ ve $f(A) = K(fgf^{-1}) \in q$ olur. Dolayısiyle $f(p) = q$ yani $ty(p) = ty(q)$ dir.

Teorem 3.3 $p \in \beta\mathbb{N}$ ise H_p nin bütün sol kosetleri kümesi ile $ty(p)$ arasında kanonik bir bijeksiyon vardır.

Ispat : L, H_p nin bütün sol kosetleri kümesini göstersin. $\mu : L \longrightarrow ty(p)$ fonksiyonu $f \in H$ için $\mu(fH_p) = f(p)$ olarak tanımlansın. $f, g \in H$ ve $fH_p = gH_p$ ise o zaman $K(g^{-1}f) \in p$ olduğundan $f(p) = g(p)$ dir. O halde μ iyi tanımlanmıştır. μ nün üzerine olduğu açıktır. μ nün bire-bir olduğunu göstermek için $f, g \in H$ ve $\mu(fH_p) = \mu(gH_p)$ olsun. O zaman $g^{-1}f(p) = p$ ve [1] deki teorem 9.2 den dolayı $K(g^{-1}f) \in p$ dir. O hlade $g^{-1}f \in H_p$ yani $fH_p = gH_p$ dir.

KAYNAKLAR

[1] COMFORT, W.W., NEGREPONTIS, S. Theory of Ultrafiltres, Springer-Werlag, New York (1974).

[2] MAGILL, K.D.Jr. Some homorphism theorem for a class of semigroups, Proc. London Math. Soc. (3)15 (1965) 517-26.

[3] RUDIN, M. E., Partial orders on the types of N. Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971) 353-362.

[4] RUDIN, W., Homogeneity problems in the theory of Cech compactifications. Duke Math. J. 23 (1956) 409-419.

[5] SCOTT, W.R. Group Theory, Prentice-Hall inc. New Jersey (1964).

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında kıymetli zamanını bana ayırarak her türlü yardım ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlanmamı sağlayan Sayın Doç. Dr.Yusuf ÜNLÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi sabır ve titizlikle daktilo eden Nermin OR'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.