T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS VE YILDIZILLIK KAVRAMINDAN HAREKETLE TANIMLANAN FONKSİYON SINIFLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(Matematik Anabilim Dalı,
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Programı)

İBRAHİM ÇANAK

Danışman: Prof.Dr. Yusuf AVCI

HAZİRAN - 1992

Bana, bu çalısma imkanını veren ve danışmanlığımı yüklenen hocam Sayın Prof.Dr.Yusuf AVCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İbrahim ÇANAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, konveks ve yıldızıllık kavramından hareketle tanımlanan fonksiyon sınıflarını araştırdık.

Birinci bölümde, $D = \{ z : |z| < 1 \}$ olmak üzere D'de analitik ve yalınkat, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı olan S ve onun alt sınıfları olan konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıflarının temel özelliklerini verdik.

İkinci bölümde, konveks ve yıldızıllık kavramından hareketle tanımlanan fonksiyon sınıflarını tarihsel bir gelişim içerisinde inceleyerek, sınıflar arasındaki bağıntıları, katsayı hesaplamalarını, gösteriliş teoremlerini, ayrıntılı bir biçimde ele aldık. Bazı fonksiyon sınıflarında ise, yalnızca sınıfın tanımını ve yalınkat olduğunu göstererek diğer özelliklerin okuyucu tarafından önceki sınıflardakine benzer şekilde hesaplamalarla elde edebileceğini düşündük ve okuyucu açısından yararlı olacağı amacıyla bazı teoremleri ispatsız verdik.

Üçüncü bölümde, konveks ve yıldızıl fonksiyonlarla indirekt olarak ilgili fonksiyon sınıflarını inceledik.

Dördüncü bölümde, harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfını tanıttık ve bu sınıfın bazı alt sınıflarından söz ettik. Bu sınıfta çalışmanın, S sınıfında çalışmaktan daha güç olduğunu ve bir çok açık problemin bulunduğunu belirttik.

Bu konuda çalışan kimselere faydalı olmak amacıyla sınıfların incelenmesinde gerekli hesaplamaları yaptık ve buna karşılık okuyucuyu konuya çekmek için bazı teoremlerin ispatları yerine referanslarını vererek araştırmalarında yardımcı olmayı amaçladık. Ayrıca bu tezin konusu olan sınıflar hakkında en son ve en yeni çalışmaları mümkün olduğu ölçüde gözden geçirerek referanslara dahil ettik.

THE CLASS OF FUNCTIONS DEFINED BY MEANS OF THE CONCEPTS OF CONVEXITY AND STARLIKENESS

SUMMARY

In this thesis, we study the class of functions that are defined by means of the concepts of convexity and starlikeness.

In the first chapter, we give the main properties of the classes S, convex and starlike functions. Here, S denotes the set of functions f, that are analytic, univalent in $D = \{ z: |z| < 1 \}$ and normalized by $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. The classes of convex and starlike functions are the set of functions f in S whose images are convex and starlike, respectively.

In the second chapter, we study the function classes defined by means of the concepts of convexity and starlikeness in a chronological order and give some representation theorems, some coefficient estimates, and we investigate the relation between the classes in detail.

In some function classes, we only give the definitions of the classes and show that the functions in the class are univalent, because the other properties can be obtained from similar calculations that appear in preceeding classes.

In the third chapter, we investigate the function classes related indirectly to convex and starlike functions.

In the fourth chapter, the class of harmonic univalent functions are introduced and some subclasses of this class are mentioned. It turns out that the problems are more difficult in this class than the problems on the class S, because we do not have the tools of analytic functions. We end this chapter by

mentioning some open problems in the class of harmonic univalent functions.

On one hand, to help readers studying on this field, we give the necessary calculations which transforms the defining geometric properties of the classes into analytic conditions. On the other hand, to influence readers first and then to be helpfull on their research we give a broad list of references in which the proofs of theorems can be found.

BÖLÜM O

GİRİŞ

Bu tezde, $D = \{ z : |z| < 1 \}$ olmak üzere D'de analitik ve yalınkat, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı olan S ve onun alt sınıflarını ve özellikle, konveks ve yıldızıl fonksiyonlar kavramından hareketle tanımlanan alt sınıfların temel özelliklerini verdik. Ayrıca son bölümde, harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfını tanıttık ve bu sınıfın bazı alt sınıflarından söz ettik.

Bu çalışmada, D'de analitik $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonların sınıfı A ile gösterilmiştir.

Bölüm 1.'de analitik ve yalınkat fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. S sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için bir üst sınır bulma problemi ile bu konuda çalışan bir çok kimse uğraşmıştır. Bieberbach bu sınıfa ait fonksiyonların a_2 katsayısı için bir üst sınırı alan teoreminden yararlanarak elde etmiştir. Bu sınıftaki her fonksiyonun katsayıları için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği Bieberbach tahmini olarak bilinmektedir. Bu tahminin doğruluğu tam olarak 1984'de Louis de Branges tarafından ispatlanmıştır. 1907'de Koebe, n = 2 için Bieberbach tahmininden faydalanarak, S sınıfına ait her fonksiyonun resminin $\{\omega : |\omega| < \frac{1}{4}\}$ diskini içerdiği sonucuna varmıştır.

$f(z)$ ve $g(z)$, D'de analitik iki fonksiyon olsun. $f(z) = g(\varphi(z))$ olmak üzere $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen analitik bir

$\varphi(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna $g(z)$'e Sabordine denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir. Ayrıca $g(z)$ fonksiyonunun yalınkat olması durumunda yukarıdaki tanım $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ ile eşdeğerdir.

D'de analitik, $\Re f(z) > 0$ ve $f(0) = 1$ koşullarını gerçekleyen $f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfına pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu sınıf P ile gösterilir.

$p(z) \in P$ olması için gerek ve yeter şart $p(z) \prec \dfrac{1+z}{1-z}$ olmasıdır.

1915'de Alexander, $f'(z) \in P$ ise $f(z)$ fonksiyonunun D'de yalınkat olduğunu göstermiştir. Noshiro ve Warschawski bu teoremin daha genel bir hali olan " Konveks bir E bölgesinde $\Re \{ e^{i\alpha} f'(z) \} > 0$ ise $f(z)$, E'de yalınkattır." teoremini vermişlerdir.
P sınıfına ait gösteriliş teoremi ile her $p \in P$ için $|p_n| \le 2$ olduğu sonucuna varılmıştır.

D'yi ω_0 noktasına göre yıldızıl (konveks) bir bölgeye resmeden $f(z)$ fonksiyonuna ω_0'a göre yıldızıl (konveks) bir fonksiyon denir. $\omega_0 = 0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl (konveks) fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ST, konveks fonksiyonlar sınıfı CV ile gösterilir. $f \in CV$ olması için g.y.k $zf'(z) \in ST$ olmasıdır.

1973'de Ruscheweyh ve Sheil-Small, $f(z) \in CV$ fonksiyonunun $\Re \{zf'(z)/f(z)\} > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçeklediğini göstermişlerdir. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ analitik fonksiyonları verildiğinde

$(f*g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \quad (|z| < 1)$ şeklinde tanımlanan $(f*g)(z)$

analitik fonksiyonuna f(z) ve g(z) nin hadamard çarpımı denir.

1958'de Polya ve Schoenberg, D'de konveks iki fonksiyonunun konvolüsyonunun konveks olduğunu tahmin etmişler ve daha sonra 1973'de Ruscheweyh ve Sheil-Small bu tahmini ispatlamışlardır.

Bölüm 2.'de konveks ve yıldızıl fonksiyonlar kavramından hareketle tanımlanan fonksiyon sınıflarının özelliklerini, bu sınıflarda katsayı sınırlamalarını, gösteriliş teoremlerini, distorsiyon hesaplamalarını ve diğer sınıflarla olan ilişkilerini tarihsel bir gelişim içinde verdik.

İlk olarak, 1969'da Robertson tarafından tanıtılmış olan α.mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfını inceledik. Sınıfların incelenmesinde kolaylık sağlamak üzere $Q_{ST}(z) = zf'(z)/f(z)$ ve $Q_{CV}(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ olarak kabul ettik.

$\Re\, Q_{ST}(z) \geq \alpha$ koşulunu gerçekleyen fonksiyonların sınıfına α.mertebeden yıldızıl, $\Re\, Q_{CV}(z) \geq \alpha$ koşulunu gerçekleyen fonksiyonların sınıfına da α.mertebeden konveks fonksiyonlar denir. Bu sınıflar sırasıyla ST(α) ve CV(α) ile gösterilir. $\alpha = 0$ olması halinde bu sınıflar sırasıyla yıldızıl ST=ST(0) ve konveks CV = CV(0) fonksiyonlar sınıfına indirgenir.

D'de $\Re\, \{ \alpha Q_{CV}(z) + (1-\alpha)Q_{ST}(z) \} \geq 0$ eşitsizliğini gerçekleyen f(z) fonksiyonuna α-konveks denir ve bu fonksiyonların sınıfı α-CV ile gösterilir. 1973'de Miller, Mocanu ve Reade, α-konveks fonksiyonlar sınıfında her bir f(z) fonksiyonunun $\alpha \geq 1$ ise konveks, $\alpha < 1$ ise yıldızıl olduğunu göstermişlerdir.

1962'de Sakaguchi, $f(z) \in \alpha$-CV ve $0 \leq \beta < \alpha$ ise f(z) fonksiyonunun β-konveks olduğu sonucuna varmıştır.

1974'de Lewandowski, Miller ve Zlotkiewicz, Gamma yıldızıl fonksiyon sınıfını tanıtmışlar ve bu sınıfı γ-ST ile göstermişlerdir. Bu sınıftaki her fonksiyonun yıldızıl olduğunu ve $0 \le \delta \le \gamma$ $(\gamma \le \delta \le 0)$ ise $\gamma\text{-ST} \subset \delta\text{-ST}$ sonucuna varmışlardır.

1970'de Janowski, (4.2) koşulunu gerçekleyen, Janowski alfa-konveks fonksiyonlarının α-konveks olduğunu göstermiştir.

(5.1) ve (5.2) koşullarını gerçekleyen fonksiyonlara karşılıklı olarak eşlenik konvekse yakın fonksiyonlar denir. Bu sınıfın fonksiyonları, konvekse yakın yani yalınkattır.

D'de bir α ($|\alpha| < \frac{\pi}{2}$) için $\Re \{ e^{i\alpha} zf'(z)/f(z) \} > 0$ eşitsizliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna α-spiral fonksiyon denir ve bu sınıf SP(α) ile gösterilir.

$f(z)$ fonksiyonunun α-spiral olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = z\exp \left[e^{-i\alpha}\cos\alpha \int_0^z \frac{p(\zeta)-1}{\zeta}\, d\zeta \right]$$

olacak biçimde bir $p(z) \in P$ fonksiyonunun var olmasıdır.

$f(z) \in SP(\alpha)$ ise $f(z)$ fonksiyonu yalınkattır ve a_n katsayı sınırlaması (7.6) ile verilmiştir.

Tanım 8.1. ve Tanım 8.3. ile düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmıştır.
$f(z)$ fonksiyonunun düzgün yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul her $(z,\zeta) \in D\times D$ için $\Re \left\{ \frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)f'(z)} \right\} \ge 0$ olmasıdır. Düzgün yıldızıl fonksiyonlar, simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların bir alt sınıfıdır.Dolayısıyla bu sınıf için $|a_n| \le 1$

eşitsizliği vardır. Oysa Horowitz, $|a_n| \leq \frac{2}{n}$ olduğunu göstererek daha iyi bir sınırlama vermiştir.

$b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\frac{f(z)}{z} \neq 0$ ve $\Re\{1 + \frac{1}{b}(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1)\} > 0$ koşullarını gerçekleyen analitik bir $f(z)$ fonksiyonuna $(1-b)$. mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $S(1-b)$ ile gösterilir. Teorem 10.1.'in bir sonucu olarak, $f(z) \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter koşul $f(z) = z\{\frac{g(z)}{z}\}^b$ olacak şekilde bir $g(z) \in ST$ fonksiyonunun var olmasıdır.

1988'de Aouf, $S(\lambda)$, $F_\lambda(b)$, $G_\lambda(b)$ sınıflarını, bu sınıflarda katsayı hesaplamalarını, sınıflar arasındaki ilişkileri vermiş ve özel olarak $F_1(b) = S(1-b)$ olduğunu göstererek bu sınıfa ait gösteriliş teoremini elde etmiştir.

Bu bölümün sonunda $C_\beta(\gamma)$ sınıfı tanıtılmış ve bu sınıfın konvekslik yarıçapı verilmiştir.

Bölüm 3.'de konveks ve yıldızıl fonksiyonlarla indirekt olarak ilgili konvekse yakın, dönme değeri sınırlı, Bazilevic ve quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı incelenmiştir.

$f(z)$ analitik fonksiyonuna, $\Re\{\frac{f'(z)}{\emptyset'(z)}\} > 0$ olacak şekilde bir $\emptyset(z)$ konveks fonksiyonu varsa konvekse yakın denir ve bu fonksiyonların sınıfı CC ile gösterilir. Yukarıdaki tanımdan hareketle, her konvekse yakın fonksiyonun yalınkat olduğu gösterilmiştir.

$f(z)$, D'de analitik ve $f'(z) \neq 0$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun CC sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul her $r \in (0,1)$ ve $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ eşitsizliğini gerçekleyen (θ_1, θ_2) çifti için,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re\{1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\}\,d\theta > -\pi$$

olmasıdır.

Konvekse yakın fonksiyonların başlığı altında yıldızıla yakın, β argümanlı konvekse yakın, α-konvekse yakın, alfa-spiral konvekse yakın, C_α, R_α, $R_n(\alpha)$ sınıflarının temel özelliklerinden bahsettik. $f(z)$ fonksiyonu D'de regüler ve $f'(z) \neq 0$ olsun. Her $r \in (0,1)$ için $\int_0^{2\pi} \left| \Re \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} \right| d\theta \leq k\pi$ olacak şekilde bir

$k\ (\geq 2)$ sabiti varsa, $f(z)$ fonksiyonuna dönme değeri sınırlı denir.

Bu fonksiyonların sınıfı V_k ile gösterilir. Bu sınıf Loewner [21] tarafından tanıtılmıştır. (2.22) ile bu sınıf, $V_k(b)$ $(b \in \mathbb{C})$ b.mertebeden kompleks dönme değeri sınırlı fonksiyonlar sınıfına genelleştirilmiştir.

$f(z) \in V_k(b)$ olması için gerek ve yeter koşul $f'(z) = \{g'(z)\}^b$ olacak şekilde bir $g(z) \in V_k$ fonksiyonunun var olmasıdır.

$f(z) \in V_k(b)$ ise, $1 - k|b|r + (2\Re\, b - 1)r^2 = 0$ denkleminin en küçük pozitif kökü r_0 olmak üzere $f(z)$, $|z| < r_0$ için konvekstir.

(3.1) ile Bazilevic fonksiyonları tanıtılmıştır. $\alpha > 0$ bir reel sayı ve $f(z) \in A$ olsun. $\Re\, \{zf'(z)f^{\alpha-1}(z)/g^\alpha(z)\} > 0$ olacak şekilde bir $g(z) \in ST$ varsa $f(z)$ fonksiyonuna α-tipli Bazilevic fonksiyonu denir ve bu sınıf $B(\alpha)$ ile gösterilir. $g(z) = z$ olmak üzere α-tipli Bazilevic fonksiyonlar sınıfına $B_1(\alpha)$ sınıfı denir. α nın özel değerleri için $B(1) = CC$, $B(0) = B_1(0) = ST$ sınıfları elde edilir.

$f(z) \in B_1(\alpha)$ $(\alpha > 0$, tamsayı$)$ ise $\Re\, \{f(z)/z\}^\alpha > 0$ dır. α-tipli Bazilevic fonksiyonlar, Brickman [8]'ın teoremi ile yalınkattır yani S sınıfındadır.

$f(z) \in A$ fonksiyonuna $\Re\, \dfrac{(zf'(z))'}{g'(z)} > 0$ olacak şekilde bir $g(z) \in CV$

varsa, quasi konveks denir. Bu fonksiyonların sınıfı Q_{cv} ile gösterilmiştir. Noor ve Thomas [28] tarafından tanıtılmış olan bu sınıf,1989'da Shanmugam [46],α-quasi konveks fonksiyonlar sınıfına genelleştirmiştir. $f(z) \in A$ fonksiyonuna

$$\left| (1-\alpha) \arg \frac{zf'(z)}{g(z)} + \alpha \arg \frac{(zf'(z))'}{g'(z)} \right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in \alpha$-CV fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna α-quasi konveks denir ve bu sınıf $Q_{cv}(\alpha)$ ile gösterilmiştir.
$\alpha \geq 1$ için, α-quasi konveks fonksiyonlar konvekse yakın fonksiyonların alt sınıfıdır yani yalınkattır. $\alpha \geq 1$ ve $0 \leq \beta \leq \alpha$ için $Q_{cv}(\alpha) \subseteq Q_{cv}(\beta)$ dır.

Bölüm 4.'de harmonik yalınkat fonksiyon sınıflarını ve onun alt sınıflarını, Clunie ve Sheil-Small [10]'un makalesini temel alarak tanıttık ve bu sınıfta çalışmanın analitik fonksiyonların sınıfı olan S sınıfında çalışmaktan daha güç olduğunu vurguladık. Ayrıca Hengartner ve Schober [14], harmonik, yalınkat, kompleks değerli çeşitli sınıfları çalışmışlardır. Bunlardan biri de orijinde normalize edilmiş, basit bağlantılı bir bölgenin sonsuz bir şerit (strip) üzerine resmedilen fonksiyonlar sınıfıdır. Yazarlar bu sınıfın bir çok temel özelliklerini incelemişlerdir. Avcı ve Zlotkiewicz [2], (1.15) ve (1.16) koşullarını gerçekleyen harmonik yalınkat fonksiyonların iki sınıfını ele almışlardır. Sırasıyle resim bölgelerinin yıldızıl ve konveks olduğunu ve (1.16) koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ile D birim diskinde herhangi bir yalınkat konveks harmonik fonksiyonun konvolüsyonunun yıldızıl bir fonksiyon olduğunu göstermişlerdir.

BÖLÜM 1

ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARI HAKKINDA TEMEL BİLGİLER

1. YALINKAT FONKSİYONLAR

Kompleks düzlemde $D_r = \{ z: |z| < r \}$ $(0 < r < 1)$ ve $D_1 = D$ olsun. $A = \{ f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n : f(z)$, D'de analitik $\}$ olarak tanımlansın.

TANIM 1.1. $E \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve bire-bir olan bir fonksiyona E'de yalınkat denir.

D'de analitik ve yalınkat, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Böylece S sınıfının her bir elemanı

$$(1.1) \qquad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \;, |z| < 1$$

ile belirlidir.

TANIM 1.2. E bölgesinde $f(z) = \omega_0$ denkleminin her ω_0 için bu bölgede en fazla p kökü ve bir ω_1 içinde $f(z) = \omega_1$'in tam olarak p kökü varsa, f(z) fonksiyonuna E'de p - değerli denir.

TEOREM 1.1. $f \in S$ ise,

$$(1.2) \qquad g_1(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \;,$$

$$(1.3) \qquad g_2(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \;,$$

(1.4) $g_3(z) = r^{-1}f(rz), \quad 0 < r < 1$,

(1.5) $$g_4(z) = \frac{f\left[\dfrac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right] - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)} \quad (|\alpha| < 1),$$

(1.6) ψ, f fonksiyonunun resminde analitik ve yalınkat, $\psi(0) = \psi'(0) - 1 = 0$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere $g_5 = \psi \circ f$,

(1.7) $f(z) \neq \omega$ ise $g_6 = \dfrac{\omega f}{\omega - f}$,

(1.8) $g_7(z) = \{f(z^2)\}^{1/2}$,

ile tanımlanan $g_i(z)$ $(i=1,\ldots,7)$ fonksiyonları S sınıfındadır.

S sınıfının bir alt sınıfı olan $S^{(m)}$, $f(z) = z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn+1} z^{mn+1}$ şeklindeki fonksiyonlardan oluşur.

Her $f \in S$ için,

(1.9) $g(z) = \{f(z^m)\}^{\frac{1}{m}}$

fonksiyonu $S^{(m)}$ sınıfındadır. Tersine her $g \in S^{(m)}$, bir $f \in S$ için (1.9) şeklinde yazılabilir. Özel olarak $m = 2$ için, $f(z) \in S^{(2)}$ fonksiyonuna tek yalınkat fonksiyon denir.

$E \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yalınkatlık, bir alt bölgesinde yalınkatlığı gerektirir. f(z) fonksiyonunun E'de yalınkat olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun E'de yalınkat olmasıdır. $f(z)$ fonksiyonu yalınkat ise $f'(z) \neq 0$ dır. Fakat tersi doğru değildir. Örnek olarak, $f(z) = e^{2\pi z}$ fonksiyonu için $f'(z) = 2\pi e^{2\pi z} \neq 0$ dır. oysa $\pm i/2 \in D$ için $e^{\pm \pi i} = -1$ olduğundan $f(z)$, D'de 1-1 değildir. $f(z)$ fonksiyonu bir A bölgesinde analitik olsun. A bölgesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsünün alanı

Alan $f(A) = \iint |f'(z)|^2 \, d\Omega$ ile belirlidir.

$k(z) = z(1-z)^{-2} = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} nz^n$ fonksiyonu S sınıfındadır ve D'yi $-\infty$ dan $-1/4$'e kadar olan negatif reel eksen hariç tüm düzleme resmeder. $k(z)$ fonksiyonuna Koebe fonksiyonu denir.

TANIM 1.3. $k_\theta(z) = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z)$ fonksiyonuna, $k(z)$ fonksiyonunun açısal dönüşümü denir.

Alan teoremine hazırlık olmak üzere, $\Delta = \{ z : |z| > 1 \}$ 'de tanımlı bir kaç sınıfı tanımlayalım. Δ'da analitik ve yalınkat olan $g(z) = z + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ fonksiyonlarından oluşan sınıfı Σ ile gösterelim.

$0 \notin g(\Delta)$ koşulunu gerçekleyen $g \in \Sigma$ fonksiyonlarının sınıfını Σ' ile gösterelim. $f \in S$ olmak üzere

$$g(z) = \{f(\tfrac{1}{z})\}^{-1} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \dots , \tag{1.10}$$

ile tanımlanmış $g(z)$ fonksiyonu Σ' sınıfındadır.

TEOREM 1.2. $g \in \Sigma$ ise

(1.11) $$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \le 1$$

dir.

İSPAT. g fonksiyonunun almadığı değerler cümlesi E olsun. $r > 1$ olmak üzere $|z| = r$ çemberinin g altındaki görüntüsü C_r olsun. g yalınkat olduğundan C_r, $E_r(\supset E)$ bölgesini çevreleyen basit kapalı bir eğridir.

Green teoremi ile, E_r'nin alanı

$$A_r = \frac{1}{2i}\int_{C_r} \bar{\omega}\, d\omega = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}\, g'(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big\{r e^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta}\Big\}\Big\{1 - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k r^{-k-1} \cdot e^{-i(k+1)\theta}\Big\} r e^{i\theta} d\theta$$

$$= \pi\,\Big\{ r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\, r^{-2n} \Big\} \quad , r > 1 .$$

$r \to 1$ için,

(1.12) $$m(E) = \pi\Big\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \Big\}$$

elde edilir. $m(E) \ge 0$ olduğundan (1.11) eşitsizliği elde edilir.

SONUÇ 1.1. $g \in \Sigma$ ise $|b_1| \le 1$ dir. Eşitlik ancak ve yalnız,

$g(z) = z + b_0 + \dfrac{b_1}{z}$, $|b_1| = 1$ şeklindeki g fonksiyonları için gerçeklenir.

TEOREM 1.3. $f \in S$ ise,

$$|a_2| \le 2 \tag{1.13}$$

dir. Eşitlik ancak ve yalnız, f fonksiyonun k(z)'nin bir açısal dönüşümü olması halinde gerçeklenir.

İSPAT. $f \in S$ ise,
$g(z) = \{ f(\frac{1}{z^2}) \}^{-1} = z - (a_2/2)z^{-1} + \ldots,$ fonksiyonu Σ sınıfındadır.
Alan teoreminin sonucundan $|a_2| \le 2$ olduğu görülür. Eşitlik ancak ve yalnız $g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z}$ şeklindeki fonksiyonlar tarafından sağlanır.
Basit bir hesaplamayla

$$f(\xi) = \xi(1-e^{i\theta}\xi)^{-2} = e^{-i\theta}k(e^{i\theta}\xi)$$

dir. Böylece f(z), Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümdür.

Bieberbach [5], D'de yalınkat ve sabit katsayısı sıfır olan $\sum_1^{\infty} a_n z^n$ kuvvet serisi için $|a_n| \le n|a_1|$ eşitsizliğini tahmin etmiştir. Bieberbach, ikinci katsayı için kendi adı ile anılan Bieberbach tahminini göstermiş, 1923'de Löwner [22],üçüncü katsayı için tahmini ispatlamıştır. 1955'de Garabedian ve Schiffer [11], dördüncü katsayı için tahmini göstermiştir. 1984'de Louis de Branges [6], S sınıfındaki katsayı problemini tamamiyle çözmüş ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliğini elde etmiştir. Eşitliğin f(z) fonksiyonunun, Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümü olması halinde gerçeklendiğini göstermiştir.
1907'de Koebe S'deki fonksiyonların görüntülerinin $|\omega| < \rho$ gibi ortak bir diski içerdiğini göstermiş, 1916'da Biberbach ρ nun 1/4 olarak alınabileceğini tahmin etmiş ve daha sonrada ispatlamıştır.

TEOREM 1.4. (Koebe 1/4 teoremi)
S sınıfına ait her fonksiyonun resmi $\{\omega : |\omega| < 1/4\}$ diskini kapsar.

İSPAT: $f \in S$ fonksiyonu için, $f(z) \neq \omega \in \mathbb{C}$ ise, (1.7)'den dolayı $g_6(z) = \dfrac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{\omega})z^2 + \ldots$, D'de yalınkat ve analitiktir. $g_6 \in S$ olduğundan Bieberbach tahmini ile

(1.14) $$\left| a_2 + \frac{1}{\omega} \right| \leq 2$$

dir. $|a_2| \leq 2$ ve (1.14)'den $\left|\frac{1}{\omega}\right| \leq 4$, yani $|\omega| \geq \frac{1}{4}$ elde edilir.

TEOREM 1.5. $f \in S$ ise,

(1.15) $$\left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \quad |z| = r < 1$$

dir.

TEOREM 1.6. $f \in S$ ise, $|z| = r < 1$ için

(1.16) $$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

(1.17) $$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

(1.18) $$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

dir.

2. SABORDİNASYON PRENSİBİ VE POZİTİF REEL KISIMLI FONKSİYONLAR

TANIM 2.1. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D'de analitik olsun.

$$(2.1) \qquad f(z) = g(\varphi(z))$$

olmak üzere $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını gerçekleyen analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna sabordine denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

TEOREM 2.1. $g(z)$, D'de yalınkat olsun. $f(z) \prec g(z)$ için g.y.k $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olmasıdır.

İSPAT. $\omega = g(z)$, D'de yalınkat olduğundan $g^{-1}(\omega)$, $g(D)$'de analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ ise $z = g^{-1}(\omega)$, $f(D)$'de analitiktir. O halde $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ fonksiyonu D'de analitiktir. $|\varphi(z)| < 1$ ve $f(z) = g(\varphi(z))$ dir. $f(0) = g(0)$ olduğundan $\varphi(0) = g^{-1}(f(0)) = 0$ dir. Sonuçta $f(z) \prec g(z)$ elde ederiz.

$f(z) \prec g(z)$ olsun. O halde (2.1) eşitliğini gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. Schwarz Lemması ile $|\varphi(z)| \leq |z|$ olduğundan bir $z_1 \in \varphi(D_r)$ için $\varphi(z) = z_1$ olacak şekilde bir $z \in D_r$ vardır. Böylece $|z_1| = |\varphi(z)| \leq |z| \leq r$, yani $\varphi(D_r) \subset D_r$ dir. $g(z)$ D'de yalınkat olduğundan $g(\varphi(D_r)) \subset g(D_r)$ dir. O halde $f(D_r) \subset g(D_r)$ ve $r \to 1$ için $f(D) \subset g(D)$ elde ederiz. Sonuçta $f(0) = g(\varphi(0)) = g(0)$ ile teoremi ispatlamış oluruz.

TANIM 2.2. D'de analitik, $\Re f(z) > 0$ ve $f(0) = 1$ koşullarını gerçekleyen $f(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ şeklindeki fonksiyonlardan oluşan sınıfa pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu sınıf P ile gösterilir.

TEOREM 2.2. $f(z),\ f_1(z),\ f_2(z) \in P$ ise,

$$g_1(z) = f(e^{i\alpha}z),\ \alpha \text{ reel}, \tag{2.2}$$

$$g_2(z) = [f(z)]^t,\ g_3(z) = f(tz),\quad -1 \le t \le 1, \tag{2.3}$$

$$g_4(z) = 1/f(z), \tag{2.4}$$

$$g_5(z) = [\, f_1(z)\,]^{t_1}\, [\, f_2(z)\,]^{t_2},\ 0 \le t_1,\ t_2,\ t_1+t_2 \le 1 \tag{2.5}$$

olarak tanımlanan $g_i(z)$ $(i = 1,2,3,4,5)$ fonksiyonları P sınıfına aittir.

TEOREM 2.3. $p(z) \in P$ olması için gerek ve yeter koşul $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ olmasıdır.

İSPAT. $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ olsun. O halde $p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ olmak üzere Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. $p(0) = 1$

ve

$$\Re\, p(z) = \Re\ \frac{(1+\varphi(z))(1-\overline{\varphi(z)})}{|1-\varphi(z)|^2} = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2} > 0$$

dır. $\varphi(z)$ D'de analitik olduğundan $p(z)$ fonksiyonu da D'de analitiktir. O halde $p(z) \in P$ dir.

$p(z) \in P$ olsun. $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $g(0) = p(0) = 1$ dir. $\omega \in P(D)$ olsun. $\omega = p(z)$ olacak biçimde bir $z \in D$ vardır ve $\Re\, \omega = \Re\, p(z) > 0$ dır. $g(z)$, D yi sağ yarı düzlem üzerine resmeden yalınkat bir fonksiyon olduğundan $\omega = g(z)$ olacak şekilde bir $z \in D$ vardır. Buradan $\omega \in g(D)$ dir. Sonuçta $p(D) \subset g(D)$ elde ederiz. Tanım 2.1. ile de $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ dir.

TANIM 2.3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ $|z|<R$'de yakınsak olsunlar. Bu taktirde her $n \geq 0$ tam sayısı için $|a_n| \leq A_n$ ise $f(z) \ll F(z)$ yazılır.

TEOREM 2.4. $f(z) \ll F(z)$ ise,

(2.6) $\qquad A_n \geq 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$

(2.7) $\qquad 0 < |z| = r < R$ için $|f(z)| \leq F(r)$,

(2.8) $\qquad f'(z) \ll F'(z)$

dir.

TEOREM 2.5. $p(z) \in P$ ise,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{2.9}$$

İSPAT. $p(z) \in P$ olduğundan $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ dir. Tanım 2.1. ile $p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$ olacak şekilde bir $\varphi(z)$ fonksiyonu vardır. $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|\varphi(z)| \leq |z|$ dir. O halde

$|p(z)| = \left|\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}\right| \leq \frac{1+|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$ elde ederiz. Teorem 2.2. ile son eşitsizlikten $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$ dir. Sonuçta (2.9)'u göstermiş oluruz.

TEOREM 2.6. (Alexander, 1915) $f'(z) \in P$ ise $f(z)$, D'de yakınsaktır.

Teorem 2.6.'nın daha genel hali Noshiro-Warschawski teoremidir.

TEOREM 2.7. Konveks bir E bölgesinde

(2.10) $$\Re\{e^{i\alpha}f'(z)\} > 0$$

ise f(z) fonksiyonu E'de yalınkattır.

İSPAT. z_1, z_2 E'de farklı iki nokta olsun. f(z) fonksiyonunun

$$L : z = z_1 + t(z_2 - z_1),\ 0 \leq t < 1$$

doğru parçası boyunca integralini alalım.
E konveks olduğundan $L \subset E$ dir.

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_L f'(z)dz = \int_0^1 f'(z)(z_2-z_1)dt$$

elde ederiz.

(2.11) $$f(z_2) - f(z_1) = (z_2-z_1)e^{-i\alpha}\int_0^1 e^{i\alpha}f'(z)dt$$

de integral (2.10) eşitsizliğinden dolayı sıfırdan farklıdır.
Böylece $f(z_2) \neq f(z_1)$ dir.

TEOREM 2.8. $f \in P$ ise,

$$(2.12) \qquad f(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\, d\mu, \qquad \int_{|\eta|=1} d\mu = 1$$

olacak şekilde negatif olmayan bir μ Probabilite ölçüsü vardır.

İSPAT. $f(z)$ fonksiyonunun

$$(2.13) \qquad f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, u(e^{it})dt + ic$$

şeklinde bir Poisson gösterilişi vardır.
$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt = 1$ olduğundan $c = 0$ dır. $\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{t} u(e^{i\theta})d\theta$

ile tanımlanan $\mu(t)$ fonksiyonu için $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ dir.

$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}u(e^{it})dt$ eşitliğini (2.13) de kullanarak

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\, d\mu(t)$$

elde ederiz. $e^{-it} = \eta$ dönüşümü ile $f(z) = \int_{|\eta|=1} \frac{1+\eta z}{1-\eta z}\, d\mu$ bulunur.

TEOREM 2.9. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in P$ ise $n = 1,2,\ldots$ için

$$(2.14) \qquad |c_n| \le 2$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik ancak ve yalnız $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu ve açısal dönüşümleri için gerçeklenir.

İSPAT. $\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-int}z^n$ eşitliğinden, Teorem 2.8 ile

$n = 1,2,...$ için

$$c_n = 2\int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \text{ dir. Böylece } |c_n| \leq 2 \text{ dir.}$$

(2.14)'de eşitlik $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ ile gerçeklenir.

3. KONVEKS VE YILDIZIL FONKSİYONLAR

TANIM 3.1. $E \subset \mathbb{C}$ olsun. $0 \le t \le 1$ olmak üzere her $\omega \in E$ için $(1-t)\omega_0 + t\omega \in E$ ise E bölgesine ω_0'a göre yıldızıl denir.

TANIM 3.2. D yi ω_0'a göre yıldızıl olan bir bölgeye resmeden f(z) fonksiyonuna ω_0'göre yıldızıl denir.
$\omega_0 = 0$ ise f(z) fonksiyonuna yıldızıl denir. Bu fonksiyonların sınıfı ST ile ile gösterilir.

TANIM 3.3. $E \subset \mathbb{C}$ olsun. $0 \le t \le 1$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in E$ için $tz_1 + (1-t)z_2 \in E$ ise E bölgesine konveks denir.

TANIM 3.4. D'yi konveks bir bölgeye resmeden f(z) fonksiyonuna konveks denir. Bu fonksiyonların sınıfı CV ile gösterilir.

TANIM 3.5. E bölgesi verildiğinde bir L doğrusu ve buna paralel bütün doğruların E ile kesişimleri bir aralık ise E ye L doğrultusunda konveks denir. D'yi L doğrultusunda konveks bir bölgeye resmeden f(z) fonksiyonuna L doğrultusunda konveks denir.

TEOREM 3.1. $f \in S$ ise aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

a) $f \in CV$.

b) $E_r = f(|z| < r) \quad (0 < r < 1)$ konveks.

c) $1 + zf''(z)/f'(z) \in P$.

d) $zf'(z) \in ST$.

İSPAT. b) $\Leftrightarrow$ c) E_r'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul f(z)'in $z = re^{i\theta}$ daki teğetinin eğim açısı $\arg\{\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta}\}$ fonksiyonunun θ nın azalmayan bir fonksiyonu olmasıdır. Yani

$$0 \le \frac{\partial}{\partial\theta} \arg \frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta} = \Im \frac{\partial}{\partial\theta} \log \frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta} = \Re\,\{1+zf''(z)/f'(z)\} \quad \text{dir.}$$

$z = 0$ noktasında $1 + zf''(z)/f'(z)$ 1'e eşit olduğundan minimum prensibi ile $\Re\left\{1 + zf''(z)/f'(z)\right\} > 0$ sonucunu elde ederiz.

b) $\Rightarrow$ a) $E_r = f(|z| < r)$ her $r < 1$ için konveks ise, f(D)'nin her noktası 1'e yeterince yakın r için E_r ye aittir. Yani $f \in CV$ dir.

a) $\Rightarrow$ b) f konveks bir fonksiyon olsun. $z_1 \neq z_2$ olmak üzere $|z_1| \leq |z_2| < r$ olduğunu varsayalım. f(D) konveks olduğundan $0<\lambda<1$ için $\omega_\lambda = \lambda f(z_1) + (1-\lambda)f(z_2) \in f(D)$ dir. Böylece bir $z_\lambda \in D$ için $\omega_\lambda = f(z_\lambda)$ dır. $g(z) = \lambda f(zz_1/z_2) + (1-\lambda)f(z)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda g(z) analitik, $g(0) = 0$ ve $g(D) \subset f(D)$ dir. Sabordinasyon prensibi ile $g(|z| < r) \subset E_r$ ve özellikle $g(z_2) = \omega_\lambda$ dır. Yani $\omega_\lambda \in E_r$ dir.

c) $\Rightarrow$ d) Aşikardır.

TEOREM 3.2. $f \in S$ ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) $f \in ST$.

b) $E_r = f(|z| < r)$ $(0 < r < 1)$ yıldızıl.

c) $zf'(z)/f(z) \in P$.

İSPAT. b) $\Rightarrow$ c) E_r'nin yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul $\arg f(re^{i\theta})$ nın $(0 \leq \theta < 2\pi)$ θ'ya göre azalmayan bir fonksiyon olmasıdır. Yani,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta}) = \Im\,\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta}) = \Im\, ire^{i\theta}\,\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \Re\, z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

dir. $zf'(z)/f(z)\Big|_{z=0} = 1$ olduğundan minimum prensibine göre

$\Re\,\{zf'(z)/f(z)\} > 0$ sonucu elde edilir.

b) $\Rightarrow$ a) $E_r = f(|z| < r)$ her $r < 1$ için yıldızıl ise f(D)'nin her noktası $r \to 1$ için E_r ye aittir, yani $f \in ST$ dir.

a) $\Rightarrow$ b) $0 < t < 1$ için $\omega(z) = f^{-1}(tf(z))$ fonksiyonu Schwarz lemması ile $|\omega(z)| \le |z|$ eşitsizliğini gerçekler. $\omega_0 \in E_r$ varsayalım. $|z_0| = |f^{-1}(\omega_0)| < r$ ve $|f^{-1}(t\omega_0)| = |\omega(z_0)| \le |z_0| < r$ dir. Bu nedenle $0<t<1$ için $t\omega_0 \in E_r$ dir. Böylece D_r yıldızıldır.

TEOREM 3.3. $0 < \rho \le 2-\sqrt{3}$ için $f \in S$ fonksiyonu $|z| < \rho$ yu konveks bir bölgeye resmeder.

İSPAT. S sınıfında her f(z) için

$$1 + \Re\, zf''(z)/f'(z) \ge 1 + \frac{2r^2-4r}{1-r^2} = \frac{1-4r+r^2}{1-r^2} \quad (|z| = r < 1) \text{ dir.}$$

Fakat $r < 2-\sqrt{3}$ için, $1-4r+r^2 > 0$ dır. Böylece $f(z)$, $|z| < r$ yi konveks bir bölgeye resmeder. $k(z)$ Koebe fonksiyonu için

$$1 + z\frac{k''(z)}{k'(z)} = \frac{1+4z+z^2}{1-z^2}$$ olduğundan $2-\sqrt{3}$ kesindir.

$R_{CV} = 2-\sqrt{3}$ sayısına S'nin konvekslik yarıçapı denir. S'nin yıldızıllık yarıçapı da $R_{ST} = \tanh \pi/4 = 0,655...$ dir.

TEOREM 3.4. $|z| < R$ de $f'(z) \ne 0$ olsun.

(3.1) $\quad f(z)$, $|z| < R$'de konveks $\Leftrightarrow F(z) = z\, f'(z)$ yıldızıldır.

İSPAT. $F(z) = z\, f'(z)$ olsun.

$$zF'(z)/F(z) = z\frac{f'(z)+z\, f''(z)}{zf'(z)} = 1 + z\, f''(z)/f'(z)$$ dir. Her iki yanın reel kısımlarını alarak teoremi elde ederiz.

Teorem 3.4.'den yararlanarak

$F(z) \in ST$ ise $\int_0^z \frac{F(\xi)}{\xi}\, d\xi \in CV$ olduğu sonucuna ulaşırız.

TEOREM 3.5. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ $(|z| < 1)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

(3.2) $$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

ise f(z), $|z| < 1$'de yalınkat ve yıldızıldır.

(3.3) $$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$$

ise f(z), $|z| < 1$'de yalınkat ve konvekstir.

İSPAT. D bölgesinde

$$|zf'(z)-f(z)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n||z|^n \leq |z|-\sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n \leq |f(z)| \text{ dir.}$$

Eşitsizliğin her iki yanını $|f(z)|$ ile bölerek $|zf'(z)/f(z)-1| \leq 1$ eşitsizliğinden $\Re\,\{zf'(z)/f(z)\} > 0$ olduğu sonucuna ulaşırız. Böylece f(z) yıldızıl ve yalınkattır. (3.3), Teorem 3.4. ile kolayca gösterilir.

M.S. Robertson bir fonksiyonun yıldızıllığını karakterize eden aşağıdaki teoremi vermiştir.

TEOREM 3.6. [**44**] f(z) D'de analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını gerçeklesin. f'in yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul $-1 < k < 1$ olmak üzere her k reel sayısı için

$$F_k(z) = \left[k\, f(z)/f(kz)\right]^{1/2}, F_k(0) = 1,\; F_0(z) = [f(z)/z]^{1/2}$$

ile belirlenmiş $F_k(z)$ fonksiyonlarının D'de analitik ve $\frac{1+kz}{1+z}$ fonksiyonuna sabordine olması veya eşdeğer olarak $\Re\, F_k(z) \geq \frac{1+k}{2}$ ve $\left| \frac{1+k}{F_k(z)} - 1 \right| < 1$ koşullarını gerçeklemesidir.

TEOREM 3.7. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in ST$ ise, $n = 1,2,\ldots$ için

(3.4) $|a_n| \le n$

dir. $f(z)$, $k(z)$ fonksiyonunun bir açısal dönüşümü değil ise kesin eşitsizlik gerçeklenir.

İSPAT. $f \in ST$ olsun. $\varphi(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ ile belirlenen $\varphi \in P$ dir ve $|c_n| \le 2$ dir. $zf'(z) = \varphi(z)f(z)$ eşitliğinden z'nin katsayılarının karşılaştırarak $a_1 = 1$ olmak üzere $n = 1,2,\ldots$ için $na_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k}a_k$ elde ederiz. $k = 1,2,\ldots n-1$ $(n \ge 2)$ için $|a_k| \le k$ olduğunu varsayalım. O halde

(3.5) $$(n-1)|a_n| \le \sum_{k=1}^{n-1} |c_{n-k}||a_k| \le 2\sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)$$

eşitsizliğinden $|a_n| \le n$ elde edilir.

Bieberbach teoremine göre $|a_2| < 2$ eşitsizliği f'in Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümü olması halinde geçerliydi. O halde (3.5) den $f \in ST$ ve Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümü değil ise $n \ge 2$ için $|a_n| < n$ olduğu görülür.

SONUÇ 1.2. $f \in CV$ ise, $n = 1,2,\ldots$ için $|a_n| \le 1$. Kesin eşitsizlik her n için $f(z)$, $l(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonunun bir açısal dönüşümü değil ise gerçeklenir.

İSPAT. $f \in CV$ ise $zf'(z) \in ST$ dir. Teorem 3.7 ile $|a_n| \le n$ dir. $l(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots$ den $|a_n| \le 1$ eşitsizliği kesindir. $n \ge 2$

için $|a_n| = 1$ ise $zf'(z)$ Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümüdür. Böylece $f(z)$, $z/(1-z)$ fonksiyonunun bir açısal dönüşümüdür.

TEOREM 3.8. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun D'de yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul

$$(3.6)\quad f(z) = z \exp\left[2 \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1-e^{-it}z} d\mu(t)\right] \qquad (|z| < 1)$$

olacak şekilde $\mu(2\pi)-\mu(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen artan bir $\mu(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. $f(z)$ yıldızıl olsun. O halde, Teorem 2.8 ile

$$(3.7)\qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z} d\mu(t)$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\mu(t)$ fonksiyonu vardır.

(3.7) den

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z} d\mu(t)$$

elde ederiz. Her iki yanın z'e göre integralini alarak

$$\log \frac{f(z)}{z} - \log f'(0) = -2 \int_0^{2\pi} \log (1-e^{-it}z) d\mu(t)$$

buluruz. $f'(0) = 1$ olduğundan (3.6)'yı göstermiş oluruz. Tersi kolayca görülür.

TEOREM 3.9. $f(z) \in ST$ ise,

$$(3.8)\qquad \frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} ,$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{3.9}$$

dir. Eşitsizlikler kesindir. Eşitlik ancak ve yalnız $f(z)$, $k(z)$ Koebe fonksiyonunun bir açısal dönüşümü ise gerçeklenir.

TEOREM 3.10. [13,21] $f(z) \in CV$ ise,

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r}\,, \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2} \tag{3.11}$$

dir. Eşitsizlikler kesindir. Eşitlik ancak ve yalnız $f(z)$, $z/(1-z)$ fonksiyonunun bir açısal dönüşümü ise gerçeklenir.

TEOREM 3.11. Her $f \in CV$ fonksiyonunun resmi $|\omega| < 1/2$ diskini kapsar.

İSPAT. $f \in CV$ ve $f(z) \neq \omega$ ise, $g(z) = (f(z)-\omega)^2$ yalınkattır. $g(z_1) = g(z_2)$ ise $f(z_1) = f(z_2)$ ya da $\frac{1}{2}\,[f(z_1)+f(z_2)] = \omega$ dır. Son durum ω değerini almayan konveks bir fonksiyon için mümkün olamaz. Böylece $h(z) = \dfrac{\omega^2-g(z)}{2\omega} \in S$ dir. $h(z) \neq \frac{1}{2}\omega$ dır. Koebe 1/4 teoremi ile $|\frac{1}{2}\,\omega| \ge \frac{1}{4}$ yani $|\omega| \ge \frac{1}{2}$ dir.

TEOREM 3.12. $f(z) \in CV$ ise, D de her z, ξ, ω için

$$\Re\left\{ \frac{z}{z-\xi}\,\frac{\xi-\omega}{z-\omega}\,\frac{f(z)-f(\omega)}{f(\xi)-f(\omega)} - \frac{\xi}{z-\xi} \right\} > \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

dir.

İSPAT. $F(z,\xi,\omega) = \frac{2z}{z-\xi}\ \frac{\xi-\omega}{z-\omega}\ \frac{f(z)-f(\omega)}{f(\xi)-f(\omega)} - \frac{2\xi}{z-\xi} - 1$ fonksiyonu

$D^3 = \{ (z,\xi,\omega) : |z| < 1, |\xi| < 1, |\omega| < 1 \}$ cümlesinde holomorftur.

$\alpha = e^{ia}$ ve $\beta = e^{ib}$ $(0 < a, b < 2\pi)$ farklı sabitleri için

$$\Re \{ F(\alpha\omega,\beta\omega,\omega) \} = -\frac{\sin(b/2)}{\sin[\frac{a-b}{2}]\sin(\frac{a}{2})}\ \Im \{ \frac{f(\alpha\omega)-f(\omega)}{f(\beta\omega)-f(\omega)} \} \text{ dir.}$$

Oysa $|\omega| \le \rho < 1$ diskinin f altındaki görüntüsü konveks olduğundan

$$\arg \frac{f(\alpha\omega)-f(\omega)}{f(\beta\omega)-f(\omega)} \in \begin{cases} (0,\pi) & 0<a<b<2\pi \\ (-\pi,0) & 0<b<a<2\pi \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Buradan $\sin[(a-b)/2]$ ve $\Im\{\ldots\}$ zıt işaretlidir ve böylece $\Re \{ F(\alpha\omega,\beta\omega,\omega) \} > 0$ dır. Fakat $\Re \{ F(z,\xi,\omega) \}$, $T^3 = \{ (z,\xi,\omega) : |z| = |\xi| = |\omega| = 1 \}$'de minimumuna ulaşır. Buradan D^3 de $R \{ F(z,\xi,\omega) \} > 0$ dır.

SONUÇ 1.3. [50] $f \in CV$ ise, $z,\xi \in D$ için

$$\Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)-f(\xi)} - \frac{\xi}{z-\xi} \right\} > \frac{1}{2} \tag{3.13}$$

İSPAT. Teorem (3.12) de $\omega \to z$ alınırsa sonuç elde edilir.

SONUÇ 1.4. $f \in CV$ ise, D'de

$$\Re \left\{ zf'(z)/f(z) \right\} > \frac{1}{2}, \tag{3.14}$$

$$\Re \left\{ f(z)/z \right\} > \frac{1}{2}. \tag{3.15}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

(3.14) Strohacker [49], (3.15) Marx [23] tarafından gösterilmiştir.

İSPAT. Sonuç 1.3.'de $\xi = 0$ alınarak (3.14), Teorem 3.12.'de $\omega = 0$,

$\xi \to 0$ alınarak da (3.15) elde edilir.

$\Re\, zf'(z)/f(z) > \alpha$ ise $f(z)$ fonksiyonuna α.mertebeden yıldızıl denir. Bu nedenle konveks fonksiyonlar 1/2. mertebeden yıldızıldır.

SONUÇ 1.5. [50] $f \in CV$ ise, sabit bir $z_0 \in D$ için,

$$(3.16)\qquad F(z) = z\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]^2$$

yıldızıldır.

SONUÇ 1.6. $f \in CV$ ise, $z,\xi \in D$ için $\Re\left\{\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}\,\frac{z}{f(z)}\right\} > \frac{1}{2}$ dir.

TEOREM 3.13. $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$ de yıldızıl ve D'yi Δ alanlı bir bölgeye resmetsin. Bu takdirde

$$(3.17)\qquad |a_n| \le \frac{2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{1/2},\quad n \ge 2$$

dir.

İSPAT. $f(z) \in ST$ olduğundan,

$zf'(z)/f(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$ olacak biçimde $|z| < 1$'de $|\omega(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen bir $\omega(z) = \sum\limits_{1}^{\infty} \omega_n z^n$ vardır.

Yukarıdaki eşitliği

$$\{ zf'(z) + f(z) \}\omega(z) = zf'(z) - f(z)$$

veya

$$(3.18)\qquad \left\{ 2z + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)a_k z^k \right\}.\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k z^k = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_k z^k$$

şeklinde yazabiliriz.

(3.18) de katsayıları karşılaştırarak

$$2\omega_{n-1} + 3a_2\omega_{n-2} + \ldots + na_{n-1}\omega_1 = (n-1)a_n \;, \quad n \geq 2$$

buluruz.

Böylece (3.18)'in sağ tarafındaki a_n katsayısı, sadece $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$'e bağlı olur. Buradan $n \geq 2$ için,

$$(3.19) \qquad \{2z + \sum_{2}^{n-1} (k+1)a_k z^k\}\omega(z) = \sum_{2}^{n} (k-1)a_k z^k + \sum_{n+1}^{\infty} b_k z^k$$

dir. (3.19)'un her iki tarafının modül karesini alıp, $|z| = r < 1$ çevresindeki integralini hesaplar ve $|\omega(z)| < 1$'den faydalanırsak,

$$\sum_{2}^{n} (k-1)^2|a_k|^2 r^{2k} + \sum_{n+1}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k} < 4 + \sum_{2}^{n-1} (k+1)^2|a_k|^2$$

elde ederiz.

$r \to 1$ alarak

$$\sum_{2}^{n} (k-1)^2|a_k|^2 \leq 4 + \sum_{2}^{n-1} (k+1)^2|a_k|^2 \quad \text{veya}$$

$$(3.20) \qquad (n-1)^2|a_n|^2 \leq 4(1 + \sum_{2}^{n-1} k|a_k|^2 \;, \quad n \geq 2$$

buluruz. Diğer taraftan $|z| < 1$ bölgesinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün alanı,

$$\Delta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 (1 + \sum_{2}^{\infty} k^2|a_k|^2 r^{2k-2}) r dr$$

$$(3.21) \qquad = \pi(1 + \sum_{2}^{\infty} k|a_k|^2)$$

dir. (3.20) ve (3.21)'den

$$(n-1)^2|a_n|^2 \leq 4\,\frac{\Delta}{\pi}\,, \quad n \geq 2 \text{ veya}$$

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^{1/2}, \quad n \geq 2$$

olduğu sonucuna varırız.

TANIM 3.6. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ analitik fonksiyonları verildiğinde

$$(f*g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n\,, \quad |z| < 1 \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanan $(f*g)(z)$ analitik fonksiyonuna $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının hadamard çarpımı denir.

$f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ analitik fonksiyonlar olmak üzere

i) $\big((f*g)*h\big)(z) = \big(f*(g*h)\big)(z)$,

ii) $(f*g)(z) = (g*f)(z)$,

iii) $l(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu için $(f*l)(z) = f(z)$,

iv) $\big(f*(g+h)\big)(z) = (f*g)(z) + (f*h)(z)$,

v) $z(f*g)'(z) = (f*zg')(z)$

dir.

1958'de Polya ve Schoenberg [37] D'de konveks iki fonksiyonun hadamard çarpımının konveks olduğunu tahmin etmişlerdir. 1973'de Ruscheweyh ve Sheil-Small [45] da bu tahmini ispatlamışlardır.

BÖLÜM 2

KONVEKS VE YILDIZIL FONKSIYONLAR KAVRAMINDAN HAREKETLE TANIMLANAN FONKSIYON SINIFLARI

Bu bölümde konveks ve yıldızıl fonksiyonlar kavramından hareketle tanımlanan fonksiyonların sınıfını, bu sınıflarda katsayı ve distorsiyon hesaplamalarını, sınıfların yalınkatlığını, gösteriliş teoremlerini ve diğer sınıflarla olan ilgilerini vereceğiz.

1. α. MERTEBEDEN KONVEKS VE YILDIZIL FONKSİYONLAR

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar kavramından hareketle Robertson [39] α.mertebeden konveks ve yıldızıl fonksiyonların tanımlarını vermiştir. Bu bölümde sınıfların incelenmesinde kolaylık sağlamak üzere $Q_{ST}(z)=zf'(z)/f(z)$, $Q_{CV}(z)= 1+zf''(z)/f'(z)$ olarak kabul edelim.

TANIM 1.1. D'de her z için

$$\Re\, Q_{ST}(z) \geq \alpha \tag{1.1}$$

ise $f(z) \in A$ fonksiyonuna α. mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonlardan oluşan sınıf $ST(\alpha)$ ile gösterilir.

TANIM 1.2. D'de her z için

$$\Re\, Q_{CV}(z) \geq \alpha \tag{1.2}$$

ise $f(z) \in A$ fonksiyonuna α. mertebeden konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyonlardan oluşan sınıf $CV(\alpha)$ ile gösterilir.

Alexander teoreminden hareketle, $f(z)\in CV(\alpha) \Leftrightarrow F(z)=zf'(z)\in ST(\alpha)$ çift gerektirmesi kolayca elde edilir.

TEOREM 1.1. [39]
$f(z) \in CV(\alpha)$ $(0 \le \alpha \le 1)$ ise,

(1.3) $$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |f'(re^{i\theta})| \le \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} .$$

$\alpha \ne \frac{1}{2}$ ise,

(1.4) $$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \le |f(re^{i\theta})| \le \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} .$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ise,

(1.5) $$\ln(1+r) \le |f(re^{i\theta})| \le -\ln(1-r) .$$

Eşitsizlikler kesindir. Eşitlikler

$\alpha \ne \frac{1}{2}$ ise,

(1.6) $$f(z) = \frac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$$

ve $\alpha = \frac{1}{2}$ ise,

(1.7) $$f(z) = -\ln(1-z)$$

fonksiyonlarının açısal dönüşümleri için gerçeklenir.

İSPAT. $0 \le \alpha < 1$ ve $\Re\, Q_{CV}(z) \ge \alpha$ ise

$$\frac{1}{1-\alpha}\left\{ 1 + zf''(z)/f'(z) - \alpha \right\} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

fonksiyonu P sınıfındadır ve bu sınıfa ait sonuçlardan teorem elde edilir.

Teorem 1.1.'in bir sonucu olarak $F(z) \in ST(\alpha)$ ise,

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |F(re^{i\theta})| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

dir.

Eşitlik $k^*(z,\alpha) = \dfrac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ için gerçeklenir.

TEOREM 1.2. $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in ST(\alpha)$ ise

(1.8) $$|a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^{n} (k-2\alpha) \quad (n = 2,3,\ldots)$$

dir.

İSPAT.

(1.9) $$p(z) = \frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha}{1-\alpha} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

ile tanımlanan $p(z)$ regülerdir ve $|z| < 1$'de $\Re\, p(z) > 0$ dır.

(1.9) daki eşitlikte katsayıları karşılaştırarak,

$n = 2,3,4,\ldots$ için

$$(n-1)\, a_n = (1-\alpha)[\, c_{n-1} + a_2 c_{n-2} + \ldots + a_{n-1} c_1 \,]$$

elde ederiz.

P sınıfında her fonksiyonun katsayılarının $|c_n| \leq 2$ $(n = 1,2,\ldots)$ eşitsizliğini sağladığını kullanarak

$(n-1)|a_n| \leq (2-2\alpha)\{ 1 + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_{n-1}| \}, n = 2,3,4,\ldots$

sonucuna ulaşırız.

Özellikle

$$|a_2| \le 2-2\alpha,$$

$$2|a_3| \le (2-2\alpha)(1+|a_2|) \le (2-2\alpha)(1+(2-2\alpha)) = (2-2\alpha)(3-2\alpha)$$

yani,

$$|a_3| \le (2-2\alpha)\frac{(3-2\alpha)}{2!}$$

buluruz.İndüksiyonla

$$|a_n| \le \prod_{k=2}^{n} \frac{k-2\alpha}{(n-1)!} \quad ,n = 2,3,4,\ldots$$

elde ederiz.Bu eşitsizlik her $n \ge 2$ için kesindir.
$f(z) = z(1-z)^{-(2-2\alpha)} \in ST(\alpha)$ fonksiyonu ile eşitlik bulunur.

$\alpha = 1/2$ olduğu zaman $|a_n| \le 1$, $\alpha = 0$ olduğunda $|a_n| \le n$ sonuçlarını elde ederiz.

Teorem 1.2.'nin bir sonucu olarak $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in CV(\alpha)$ ise

$$(1.10) \qquad |b_n| \le \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)$$

dir.

(1.10)'da eşitlik (1.6) ve (1.7) denklemleri ile verilmiştir.
Bir $f(z)$ fonksiyonunun $ST(\alpha)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşulu vermeden önce aşağıdaki hesaplamaları yapalım.

$$G(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha \quad \text{ve}$$

$$H(z) = [G(z)-(1-\alpha)] \,/\, [G(z)+(1-\alpha)]$$

$$= \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right] \,/\, \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - (2\alpha-1)\right]$$

ile belirleyelim.
$H(z)$ fonksiyonu $|z| < 1$'de regüler, $H(0) = 0$, $|H(z)| < 1$ koşullarını gerçekler. Schwarz Lemması ile $|z| < 1$ 'de

$$(1.11) \qquad \left| \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right] \,/\, \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - (2\alpha-1)\right] \right| < |z|$$

dir.

(1.11) eşitsizliği D'de $|\emptyset(z)| \leq 1$ olmak üzere analitik bir $\emptyset(z)$ fonksiyonu için

$$(1.12) \qquad \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right] \Big/ \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - (2\alpha-1) \right] = -z\emptyset(z)$$

olarak yazılabilir.

(1.12)'den $zf'(z)/f(z)$'i çözerek

$$(1.13) \qquad zf'(z)/f(z) = [1 + (2\alpha-1)z\emptyset(z)] \,/\, [1 + z\emptyset(z)]$$
$$= (2\alpha-1) + \frac{2(1-\alpha)}{1+z\emptyset(z)}$$

eşitliğini buluruz. O halde aşağıdaki teoremi bu hesaplamalardan sonra kolayca elde ederiz.

TEOREM 1.3. $f(z) \in ST(\alpha)$ için gerek ve yeter koşul

$$(1.14) \qquad f(z) = z\exp\left\{ -2(1-\alpha) \int_0^z \frac{\emptyset(t)}{1+t\emptyset(t)}\, dt \right\}$$

olacak şekilde $|z| < 1$'de $|\emptyset(z)| \leq 1$ koşulunu gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ analitik fonksiyonun var olmasıdır.

İSPAT. (1.13)'den

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2\alpha-1}{z} + \frac{2(1-\alpha)}{z(1+z\emptyset(z))} = \frac{1}{z} - \frac{2(1-\alpha)\emptyset(z)}{1+z\emptyset(z)}$$

elde ederiz. Her iki yanın integralini, sonrada bulunan ifadenin eksponansiyelini alarak (1.14)'ü elde ederiz. Tersine (1.14)'de, $f(z)$ hipotezdeki gibi bir $\emptyset(z)$ fonksiyon için gerçeklenirse $f(z) \in ST(\alpha)$ dır.

TEOREM 1.4. $0 \le \alpha \le 1$ için,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \le 1-\alpha \tag{1.15}$$

ise $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu D'de α. mertebeden yıldızıldır.

İSPAT. (1.15) ile,

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha} |a_n| \le 1 \quad \text{bulunur.}$$

$$\begin{aligned}
|zf'(z)-f(z)| - (1-\alpha)|f(z)| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n\right| - (1-\alpha)\left|z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right| \\
&\le \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^n - (1-\alpha)\left[|z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\right] \\
&\le |z|\left[\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| - (1-\alpha)\right] \le 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu hesaplamadan

$\left| 1 - \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \le 1-\alpha$ eşitsizliği kolayca görülür. Son eşitsizlikten D'de $\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} \ge \alpha$ elde edilir.

$f(z) \in CV(\alpha)$ ise $zf'(z) \in ST(\alpha)$ olduğundan Teorem 1.3. ile $f(z)$ için bir gösteriliş ve Teorem 1.4 ile de yeter koşul bulunur.

TANIM 1.3. D'de her z için,

$$|\arg Q_{ST}(z)| \le \alpha\frac{\pi}{2} \tag{1.16}$$

ise $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonuna α. mertebeden güçlü yıldızıl denir. Bu fonksiyonlardan oluşan sınıf $\widetilde{\widetilde{ST}}(\alpha)$ ile gösterilir.

$\tilde{S}\tilde{T}(1)$, normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfıdır. $\alpha < 1$ ise $ST(\alpha)$ sadece sınırlı yıldızıl fonksiyonları içerir.

Benzer olarak, D'de her z için

$$(1.17) \qquad |\arg Q_{cv}(z)| \le \alpha\frac{\pi}{2}$$

ise $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonuna α.mertebeden güçlü konveks denir. Bu fonksiyonlardan oluşan sınıf $\tilde{C}\tilde{V}(\alpha)$ ile gösterilir.

TEOREM 1.5. $f(z) \in \tilde{C}\tilde{V}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $F(z) = zf'(z) \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ olmasıdır.

$\tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ve $\tilde{C}\tilde{V}(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar içinde Teorem 1.1'de olduğu gibi kesin sınırlar hesaplanabilir. $\alpha \ge 1$ ise $\tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ve $\tilde{C}\tilde{V}(\alpha)$ nin önemli bir takım özellikleri vardır.

Aşağıdaki teoremde yararlanacağımız $f_\alpha(z)$ fonsiyonunu

$$f_\alpha(z) = z\exp\left(\int_0^z \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^\alpha - 1 \right] \frac{dt}{t} \right)$$

ile tanımlayalım.

TEOREM 1.6. $\alpha \ge 1$ olmak üzere,

$\left\{ \log \frac{f(z)}{z} : f \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha) \right\}$ cümlesinin uç noktaları $\log \frac{f_\alpha(xz)}{xz}$, $|x|=1$ şeklindeki fonksiyonlardır.

İSPAT. $f \in \tilde{S}\tilde{T}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(1.19) \qquad zf'(z)/f(z) = \{ p(z) \}^\alpha$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ fonksiyonunun var olmasıdır. $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ dir. $\{p^{\alpha}\}$ cümlesinin uç noktaları $(\frac{1+xz}{1-xz})^{\alpha}$, $|x| = 1$ $(\alpha \geq 1)$ şeklindedir. $z(\log(f(z)/z)' = (p(z))^{\alpha}-1$ dönüşümü $A = \{ \log(f(z)/z) : f \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha) \}$ dan $\{p^{\alpha}\}$ üzerine lineer 1-1 dir. O halde A nın uç noktaları

$$\log f(z)/z = \int_0^z [(\frac{1+xt}{1-xt})^{\alpha}-1]\frac{dt}{t} = \int_0^{xz} [(\frac{1+y}{1-y})^{\alpha}-1]\frac{dy}{y} \tag{1.20}$$

$$= \log f_{\alpha}(xz)/xz$$

şeklindedir.

TEOREM 1.7. $\alpha \geq 1$ olmak üzere $f(z) \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ise,

$$f_{\alpha}(-r) \leq |f(re^{i\theta})| \leq f_{\alpha}(r) \tag{1.21}$$

$$(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha} f_{\alpha}(-r)/r \leq |f'(re^{i\theta})| \leq (\frac{1+r}{1-r})^{\alpha} \frac{f_{\alpha}(r)}{r} \tag{1.22}$$

dir.

İSPAT. (1.21) eşitsizliğini, (1.20)'in eksponansiyelini alarak buluruz. (1.21) ve $p(z) \in P$ den faydalanarak, $z = re^{i\theta}$ ise

$$(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha} \leq |\frac{zf'(z)}{f(z)}| \leq (\frac{1+r}{1-r})^{\alpha}$$

elde ederiz. Eşitsizliği $|\frac{f(z)}{z}|$ ile çarpıp, (1.21) eşitsizliğini kullanarak (1.22) eşitsizliğini gösteririz.

Brannan, Clunie ve Kirwan [7], $0 < \alpha \leq 1$ için $\tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ sınıfında katsayı problemleri hakkında çalışmışlar ve

$$|a_2| \leq 2\alpha, \quad (0 < \alpha \leq 1) \tag{1.23}$$

(1.24) $\quad |a_3| \le \alpha, \quad (0 < \alpha < \frac{1}{3})$

(1.25) $\quad |a_3| \le 3\alpha^2, \quad (\frac{1}{3} < \alpha \le 1)$

(1.26) $\quad |a_3| \le \frac{1}{3}, \quad \alpha = \frac{1}{3}$

sonuçlarını elde etmişlerdir.

(1.23) ve (1.25) için ekstremal fonksiyonlar, $f(z)=z+2\alpha z^2+3\alpha^2 z^3+\dots$ ve onun açısal dönüşümleridir.

(1.24) ve (1.26) için ekstremal fonksiyonlar ise $|x| = 1$ için,

$$zf'(z) / f(z) = \left[\frac{1+xz^2}{1-xz^2}\right]^{\alpha} \quad \text{ve}$$

$0 \le \lambda \le 1$ için de

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \lambda\left[\frac{1+xz}{1-xz}\right]^{\alpha} + (1-\lambda)\left[\frac{1+xz^2}{1-xz^2}\right]^{\alpha}$$

dır.

Ayrıca [7]'de yazarlar, her n için α yeteri kadar 1'e yakınsa,

(1.27) $$f_{\alpha}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$$

olmak üzere $|a_n| \le A_n$ olduğunu göstermişlerdir.

TEOREM 1.8. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ise,

(1.28) $$|a_n| \le A_n$$

dir.

İSPAT. $\{p(z)\}^{\alpha} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ (1.19) ile belirlenmiş olsun. [7] ile

(1.29) $$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

olmak üzere $|b_n| \leq B_n$ dir. (1.19) da katsayıları karşılaştırarak

(1.30) $$(n-1)a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_n$$

elde ederiz.

$a_2 = b_1$ olduğundan sonuç $n = 2$ için doğrudur. $2 \leq k \leq n-1$ için

$|a_k| \leq A_k$ olduğunu varsayalım. (1.26) ve (1.27) ile

$$(n-1)|a_n| \leq B_1 A_{n-1} + B_2 A_{n-2} + \ldots + B_n = A_n$$

sonucu elde ederiz.

TEOREM 1.9. $\alpha < 1$ olmak üzere,

$f(z) \in \tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ise, $|z| < 1$'de

(1.31) $$|f(z)| < |z|\exp\left\{ 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+1-\alpha)} \right\} = |z|M(\alpha)$$

dir.

(γ Euler sabitidir ve $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{z} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \gamma \qquad \text{eşitliğinden}$$

(1.31)'de $M(\alpha) = \frac{1}{4}\exp\left\{ - \frac{\Gamma'\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} - \gamma \right\}$ olarak bulunur.)

İSPAT. $p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ olsun. O halde $p(z) \prec \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ ve

$\log \frac{f(z)}{z} = \int_0^z (p(\xi)-1)\frac{d\xi}{\xi}$ dir. $z = re^{i\theta}$ ise,

$$\log \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \int_0^r \Re \{ p(te^{i\theta})-1 \}\frac{dt}{t} \leq \int_0^r \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha}-1 \right] \frac{dt}{t}$$

$$< \int_0^1 \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha} - 1 \right] \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k t^k \right\} (1-t)^{-\alpha} \frac{dt}{t}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{2k+1} \int_0^1 t^{2k} (1-t)^{-\alpha}\, dt = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{2k+1} B(2k+1, 1-\alpha) \tag{1.32}$$

dir.

$B(p,q)$ nun özelliklerinden,

$$\binom{\alpha}{2k+1} B(2k+1, 1-\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-2k)}{(2k+1)!} \frac{\Gamma(2k+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2k+2-\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha}{(2k+1)(2k+1-\alpha)}$$

dır.

Son eşitliği (1.32)'de kullanarak ve daha sonra elde edilen ifadenin eksponansiyelini alarak (1.31) eşitsizliğini elde ederiz.

2. ALFA-KONVEKS FONKSİYONLAR

TANIM 2.1. $f(z) \in A$ ve D'de $\frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$ olsun.

$$J(\alpha,f(z)) = \alpha\ (1 + z\ \frac{f''(z)}{f'(z)}) + (1 - \alpha)\ (z\ \frac{f'(z)}{f(z)})$$

olmak üzere,

(2.1) $\qquad \Re\ J(\alpha,f(z)) \geq 0$

ise, $f(z)$ fonksiyonuna α- konveks fonksiyon denir. Tanım 2.1.'i gerçekleyen fonksiyonlardan oluşan sınıf α-CV ile gösterilir. (2.1) yerine, $\Re\ J(\alpha,f(z)) > \beta$ $(0 \leq \beta < 1)$ koşulunu gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna β. mertebeden α-konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı α-CV(β) ile gösterilir.

TEOREM 2.1. $f(z) \in A$ fonksiyonu α-konveks ise,
$f(z)$, yıldızıl ve yalınkattır.
$\alpha \geq 1$ ise $f(z)$ D'de konvekstir.
$\alpha \leq -1$ ise $\frac{1}{f(\frac{1}{z})}$, $|z| > 1$'de konvekstir.

İSPAT. (2.1)'de $p(z) = zf'(z)/f(z)$ yazalım. $z = re^{i\theta} \in D$ için

(2.2) $\qquad \Re\ [\ p(z) - i\alpha \frac{\partial}{\partial\theta} \ln p(z)\ ] > 0$

elde ederiz. $f(z)$'in yıldızıl olmadığını varsayalım. D'de bir $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ noktası için, $|z| \leq r_0$ 'da $\Re\ p(z) \geq 0$ ve $\Re\ p(z_0) = 0$ olur. O halde $\arg p(r_0 e^{i\theta})$, $\theta = \theta_0$ için bir maksimuma veya bir minimuma haizdir. Böylece $\frac{\partial}{\partial\theta} \arg p(z_0) = 0$ dır. Son eşitliği $\Re\ p(z_0) = 0$ ile birlikte kullanarak (2.2)'nin sol tarafını dolayısıyla (2.1)'in $z = z_0$'da sıfır değerini aldığı sonucuna varırız. Bu ise

(2.1) ile çelişir. Buradan $p(0) = 1$ ve D'de $\Re\, p(z) \neq 0$. O halde $p(z) = zf'(z) / f(z)$ için $\Re\, p(z) > 0$ dir. Böylece $\alpha \in (-\infty,\infty)$ için $f(z)$, D'de yalınkat ve yıldızıldır.

Birim dairede $z = \frac{1}{\xi}$ dönüşümü ile $g(\xi) = \frac{1}{f(\frac{1}{\xi})}$ olarak belirleyelim.

(2.1) den $|\xi| > 1$ için

$$\Re \left\{ (1+\alpha)\xi g'(\xi)/g(\xi) - \alpha(1+\xi g''(\xi)/g'(\xi) \right\} > 0 \tag{2.3}$$

bulunur.

$f(z)$ fonksiyonu yalınkat ve yıldızıl olduğundan, $g(\xi)$ fonksiyonu da yalınkat ve yıldızıldır. (2.3) eşitsizliğinden $1 + \alpha \leq 0$ için $\Re\, \{1 + \xi g''(\xi)/g'(\xi)\} > 0$ elde edilir. Böylece $g(\xi) = \frac{1}{f(1/\xi)}$, $\alpha \leq -1$ için konvekstir. $\alpha \geq 1$ ise (2.1)'in sol tarafındaki ilk terim negatiftir. Bu da $f(z)$'in konveks olduğunu gösterir.

TEOREM 2.2. $f(z)$, α-konveks ve $0 \leq \beta < \alpha$ ise $f(z)$ β-konvekstir.

TEOREM 2.3. $f(z)$, α-konveks ve $\alpha < \beta \leq 0$ ise $f(z)$ β-konvekstir.

TEOREM 2.4. [25]
$\alpha > 0$ olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonunun α-CV olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z [F(\xi)]^{1/\alpha}\, \xi^{-1} d\xi \right]^{\alpha} \tag{2.5}$$

olacak biçimde bir $F(z)$ yıldızıl fonksiyonunun var olmasıdır.

Teorem 2.4.'de $F(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$ Koebe fonksiyonu alınarak elde edilen,

$$f_\theta(\alpha,z) = \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^z \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\xi e^{i\theta})^{-\frac{2}{\alpha}} d\xi\right]^{\alpha} \tag{2.6}$$

fonksiyonları α-CV dir. Bu fonksiyonlar α-CV nin distorsiyon teoremleri için ekstremal fonksiyon görevini yerine getirirler. Aşağıdaki teoremlerin ispatlarında kullanılan fonksiyonları kısaca tanıtalım.

$\Re\, a > 0$ ve $\Re\,(c-a) > 0$ olmak üzere

$$G(a,b,c,;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{z^k}{k!} \tag{2.7}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-zu)^{-b}du$$

hipergeometrik fonksiyonu D'de regülerdir.

$\alpha > 0$ için,

$$K(\alpha,r) = r\left[\,G\left(\frac{1}{\alpha},\frac{2}{\alpha},\frac{1}{\alpha}+1;r\right)\right]^{\alpha} \tag{2.8}$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho\right]^{\alpha}$$

olarak tanımlayalım.

TEOREM 2.5. $\alpha > 0$ olmak üzere,
$f(z) \in \alpha$-CV ise $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için

$$-K(\alpha,-r) \le |f(z)| \le K(\alpha,r) \tag{2.9}$$

dir. Eşitlik $f_\theta(\alpha,z)$ fonksiyonu ile sağlanır.

ISPAT. İlk olarak $z = r$ alalım. Genel durumda ise $|\eta| = 1$ olmak üzere, uygun η lar için $f(\eta z)/\eta$ fonksiyonunu incelemek yeter. Teorem 2.4. ile

$$f(z) = \left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{F(\xi)^{1/\alpha}}{\xi}d\xi\right\}^{\alpha}$$

olacak biçimde bir $F(z)$ yıldızıl fonksiyonu vardır. $z = r$ alıp pozitif reel eksen boyunca integralini alarak, $\xi = \rho e^{i\theta}$ olmak olmak üzere,

$$f(r) = \{ \frac{1}{\alpha} \int_0^r \frac{F(\rho)^{1/\alpha}}{\rho} d\rho\}^{\alpha}$$

buluruz.

$F(z)$ yıldızıl olduğundan

$$\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \leq |F(\rho)| \leq \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \tag{2.10}$$

dir.

(2.10) dan yararlanarak

$$\{f(r)\}^{1/\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}} d\rho$$

elde ederiz.

$\rho = ru$ değişken dönüşümü ile (2.10)

$$|f(z)|^{1/\alpha} \leq \frac{r^{1/\alpha}}{\alpha} \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-ru)^{-\frac{2}{\alpha}} du \tag{2.11}$$

şeklini alır.

(2.7) ile (2.11)

$$|f(r)|^{1/\alpha} \leq r^{1/\alpha} G(\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}+1 ; r)$$

dir.

(2.8) ile $|f(r)| \leq K(\alpha, r)$

(2.9) un sol tarafını göstermek için orijini $f(z) = Re^{i\theta}$ ye birleştiren Γ doğrusunu inceleyelim. $f(z)$ yıldızıl olduğundan Γ, D'de orijini $z = re^{i\theta}$ ya birleştiren bir γ Jordan yayının resmidir. γ nın $\{ f(z) \}^{1/\alpha}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü orijin başlangıçlı doğru parçalarından ibarettir. Herbirinin uzunluğu $R^{1/\alpha} = |f(z)|^{1/\alpha} = \int_\gamma |df(\zeta)^{1/\alpha}/d\zeta||d\zeta|$ dir. $f(z) \in \alpha$-CV olduğundan Teorem 2.4. ile $df(\zeta)^{1/\alpha}/d\zeta = (1/\alpha)F(\zeta)^{1/\alpha}/\zeta$ dir. $\rho = |\zeta|$ ise (2.10)'dan

$$R^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \left|\frac{F(\zeta)^{1/\alpha}}{\zeta}\right||d\zeta| \geq \frac{1}{\alpha}\int_\gamma \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}|d\zeta|$$
$$\geq \frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho$$

ve $\rho = ru$ dönüşümü ile (2.7) ve (2.8) eşitliklerinden yararlanarak $|f(z)| \geq -K(\alpha,-r)$ eşitsizliğine ulaşırız.

(2.9)'da $f_\theta(\alpha,z)$ fonksiyonunda, sağ eşitsizliği $\theta = 0$, $z = r$; sol eşitsizliği $\theta = 0$, $z = -r$ alarak elde ederiz.

(2.9) daki eşitsizlikten özel durumlarda bir çok önemli sonuçlar elde edilir.

UYARILAR :

1) $\alpha = 1$ ise,

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r} \quad \text{dir.}$$

2) $\alpha = 2$ ise,

$$[\tan^{-1}\sqrt{r}]^2 \leq |f(z)| \leq [\tfrac{1}{2}\log((1+\sqrt{r})/(1-\sqrt{r})]^2 \quad \text{dir.}$$

3) $\alpha > 2$ ise,

$$|f(z)|^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho$$
$$= \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-2/\alpha)}{\Gamma(1-1/\alpha)},$$

$$|f(z)| \le \left[\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(1-2/\alpha)}{\Gamma(1-1/\alpha)}\right]^{\alpha} \tag{2.12}$$

yani f(z) sınırlıdır.

$f(z) \in \alpha$-CV ise $\alpha > 2$ için Teorem 2.2. ve (2.12) ile f(z) sınırlı konveks bir fonksiyondur.

TEOREM 2.6. $\alpha \ge 1$ olmak üzere
f(z), α-CV ise, $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ için

$$\frac{\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho\right]^{\alpha-1}}{r^{1/\alpha}(1+r)^{1/\alpha}} = \frac{\partial}{\partial r}K(\alpha,-r) \le |f'(z)|$$

$$\le \frac{\partial}{\partial r}K(\alpha,r) = \frac{\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\rho)^{-\frac{2}{\alpha}}d\rho\right]^{\alpha-1}}{r^{1/\alpha}(1-r)^{2/\alpha}} \tag{2.13}$$

dir.

İSPAT. Teorem 2.4. ile

$$|f'(z)| = \frac{|F(z)|^{1/\alpha}\,|f(z)|^{1-(1/\alpha)}}{|z|}$$ dir. (2.10) ve Teorem (2.5)'den

$0 < r < 1$ olmak üzere $|z| = r$ için

$$|f'(z)| \le \frac{1}{r}\left[\frac{r}{(1-r)^2}\right]^{1/\alpha}[K(\alpha,r)]^{1-(1/\alpha)}$$

$$= \frac{1}{r^{1-1/\alpha}(1-r)^{2/\alpha}}\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^r \rho^{(1/\alpha)-1}(1-\rho)^{-2/\alpha}d\rho\right]^{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial r}K(\alpha,r)$$

elde edilir. Sol eşitsizlikte benzer şekilde gösterilir.

M. OBRADOVIC [29] Bir $f(z) \in A$ fonksiyonunun, β. mertebeden α-konveks fonksiyonlar sınıfına ait olması için bir yeter koşul vermiştir.

TEOREM 2.7. [40] $f \in S$ olsun. $F(z,t)$ $(0 \le t \le 1)$ D'de regüler ve

$F(z,0) \equiv f(z)$, $F(0,t) \equiv 0$ olsun.

ρ, $f(z) = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{F(z,t)-F(z,0)}{zt^{\rho}}$ mevcut yapan pozitif bir reel sayı ve $F(z,t)$, D'de $f(z)$'e sabordine olsun. O halde D'de,

$$(2.14) \qquad \Re \left\{ \frac{F(z)}{f'(z)} \right\} \le 0,$$

dir.

Buna ilave olarak $F(z)$, D'de regüler ve $\Re\, F(0) \neq 0$ ise,

$$(2.15) \qquad \Re \left\{ \frac{F(z)}{f'(z)} \right\} < 0$$

elde edilir.

TEOREM 2.8. [29] $f \in A$ ve $0 < |z| < 1$'de $f(z)f'(z) \neq 0$ olsun. α reel bir sayı olmak üzere,

$$(2.16) \qquad g(z) = \int_0^z \frac{f(s)}{s} \left(sf'(s)/f(s)\right)^{\alpha} ds$$

ise ve

(a) $G_1(z,t) = g(ze^{it}) + g(ze^{-it}) - g(ze^{-\beta t^2}) \prec g(z)$

veya

(b) $G_2(z,t) = \dfrac{1}{1-\beta} \left\{ \dfrac{1}{2}\, g(ze^{it}) + g(ze^{-it}) - \beta g\left(\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)z\right) \right\} \prec g(z)$

ise $f \in \alpha\text{-}CV(\beta)$ dir.

3. GAMMA-YILDIZIL FONKSİYONLAR

TANIM 3.1. $f(z) \in A$ fonksiyonu, $0 < |z| < 1$ 'de $f(z) \neq 0, f'(z) \neq 0$

$(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}) \neq 0$ koşullarını gerçeklesin.

γ reel bir sayı olmak üzere

$$(3.1) \qquad \Re\left[\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}\right] > 0$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna gamma-yıldızıl denir. Tanım 3.1'i gerçekleyen fonksiyonların sınıfı γ-ST ile gösterilir.

Ayrıca (3.1) koşulu

$$(3.2) \qquad \left|(1-\gamma)\arg\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) + \gamma\arg\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$$

eşitsizliğine eşdeğerdir. $\gamma = 0$ ise 0-ST = ST, $\gamma = 1$ ise 1-ST = CC sınıfları elde edilir.

TEOREM 3.1. γ reel sayısı için γ-ST $\subset$ ST dir.

İSPAT. $f(z) \in \gamma$-ST olsun . $\omega(z)$ fonksiyonunu

$$(3.3) \qquad \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

olarak tanımlayalım. (3.3) ile $\omega(0) = 0$, $\omega(z) \neq \pm 1$ ve $\omega(z)$ meromorfik bir fonksiyondur. $z \in D$ için $R \geq 0$ olacak şekilde $\omega(z) = R(z)e^{i\emptyset(z)}$ olsun. $z_0 \in D$ noktası

$$(3.4) \qquad \max_{|z|\leq|z_0|} |\omega(z)| = |\omega(z_0)| = 1$$

koşulunu gerçeklesin. Böylece $\frac{\partial}{\partial\theta}\Re\, z_0 = 0$ ve

$\frac{z\omega'(z)}{\omega(z)} = \frac{\partial\emptyset(z)}{\partial\theta} - i\frac{1}{R}\frac{\partial R(z)}{\partial\theta}$ dir. z_0 için

$z_0\omega'(z_0)/\omega(z_0) = \partial\Theta(z_0)/\partial\theta$ dir. $\{z_0\omega'(z_0)/\omega(z_0)\}$ reel bir sayıdır.

$\partial\Theta(z_0)/\partial\theta < 0$ ise $\omega(z)$, z_0 da yerel yalınkat olur ki bu durum (3.4) ifadesini çelişkiye götürür. O halde $\dfrac{\partial\Theta(z_0)}{\partial\theta} > 0$ dır. Yani

$$(3.5) \qquad z_0\frac{\omega'(z_0)}{\omega(z_0)} = B$$

dir. $|\omega(z_0)| = 1$ ve $\omega(z_0) \neq \pm 1$ olduğundan, $A \neq 0$ reel bir sayı olmak üzere,

$$(3.6) \qquad \frac{1+\omega(z_0)}{1-\omega(z_0)} = Ai$$

dir. (3.1) ve (3.3) den $I(\gamma, f(z)) = \left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}$ olmak üzere,

$$\Re\, I(\gamma, f(z)) = \Re\left[\left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} + \frac{z\omega'(z)}{\omega(z)}\left(\frac{\omega(z)}{1+\omega(z)} + \frac{\omega(z)}{1-\omega(z)}\right)\right)^{\gamma}\right]$$

dir. (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden yararlanarak $z = z_0$ noktasında $\Re\, I(\gamma, f(z_0)) = \Re\left[(Ai)^{1-\gamma}\left(Ai + \frac{B}{2}(A+\frac{1}{A})i\right)^{\gamma}\right]$ elde ederiz.
$C = A + B(A + \frac{1}{A})/2$ ile $AC > 0$ dır. Böylece
$\Re\, I(\gamma, f(z_0)) = \Re\left[(Ai)^{1-\gamma}(Ci)^{\gamma}\right] = \Re\left(|A|^{1-\gamma}|C|^{\gamma}i\right) = 0$ buluruz. Fakat $f \in \gamma$-ST idi. O halde D'de $|\omega(z)| < 1$ dir. Sonuç olarak $f(z) \in ST$ dir.

TEOREM 3.2. $0 \le \delta \le \gamma$ $(\gamma \le \delta \le 0)$ ise γ-ST $\subset$ δ-ST dir.

İSPAT. $\delta = 0$ durumunu Teorem 3.1.'de gösterdik. Şimdi $0 < \delta/\gamma < 1$ olması halini gözönüne alalım. $f \in \gamma$-ST ise,

$$(3.7) \qquad \left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma} = P_1(z)$$

olacak biçimde bir $P_1(z) \in P$, Teorem 3.1.ile $f(z) \in ST$ olduğundan,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = P_2(z) \tag{3.8}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $P_2(z) \in P$ vardır. (3.7)'in $\frac{\delta}{\gamma}$,(3.8)'in de $(1 - \frac{\delta}{\gamma})$ kuvvetini alıp, eşitlikleri tarafa tarafa çarparak

$$\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^{1-\delta}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^{\delta} = P_1(z)^{\delta/\gamma}P_2(z)^{1-\delta/\gamma} = P_3(z) \tag{3.9}$$

elde ederiz. $P_1(z)$ ve $P_2(z)$, P sınıfına ait olduğundan $P_3(0) = 1$, ve $|\arg P_3(z)| \le \frac{\delta}{\gamma} |\arg P_1(z)| + (1-\frac{\delta}{\gamma})|\arg P_2(z)| < \frac{\pi}{2}$ dir. O halde $P_3(z) \in P$ dir.

TANIM 3.2. $f \in A$ fonksiyonu , $0 < |z| < 1$'de $f(z) \neq 0$, $f'(z) \neq 0$ $1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \neq 0$ koşullarını gerçeklesin . γ reel bir sayı olmak üzere

$$\Re \left[\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1+z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma} \right] > \alpha \tag{3.10}$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna α.mertebeden gamma-yıldızıl denir. (3.10) eşitsizliğini gerçekleyen fonksiyonların sınıfı γ-ST(α) ile gösterilir.

$$\left| (1-\gamma)\arg\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) + \gamma\arg\left(1+z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \right| < \frac{\pi}{2}\alpha \tag{3.11}$$

koşulunu gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna α.mertebeden güçlü gamma yıldızıl denir ve bu fonksiyonlardan oluşan sınıf γ-$\tilde{S}\tilde{T}(\alpha)$ ile gösterilir.

4. JANOWSKİ ALFA-KONVEKS FONKSİYONLAR

Janowski [16], D birim dairesinde $M \geq 1$ olmak üzere

$$(4.1) \qquad \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - M \right| < M$$

koşulunu gerçekleyen regüler $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonlarından oluşan $S^*(M)$ sınıfının özelliklerini incelemiştir.

TANIM 4.1. $\alpha \geq 0$ olsun. $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, $0 < |z| < 1$'de $\frac{f(z)\, f'(z)}{z} \neq 0$ koşulunu gerçeklemek üzere D'de regüler bir fonksiyon olsun. D'de $M \geq 1$ ve

$$J\{\alpha, f(z)\} = (1-\alpha)\frac{zf'}{f} + \alpha\left(1 + \frac{zf''}{f}\right) \text{ olmak üzere}$$

$$(4.2) \qquad \left| J\big(\alpha, f(z)\big) - M \right| < M$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna Janowski alfa-konveks denir. Böyle fonksiyonlardan oluşan sınıf $S^*(\alpha, M)$ ile gösterilir.

$S^*(M) = S^*(0,M)$, α-CV $= S^*(\alpha,\infty)$, ST $= S^*(0,\infty)$ dir.

TEOREM 4.1. $\alpha \geq 0$, $M \geq 1$ olmak üzere $S^*(\alpha,M) \subset \alpha\text{-CV} \cap S^*(M)$ dir.

İSPAT. $f(z) \in S^*(\alpha,M)$ olsun. (4.2) eşitsizliğinden $\Re\, J(\alpha, f(z)) > 0$ ile $S^*(\alpha,M) \subset \alpha$-CV dir. $f(z) \notin S^*(M)$ olduğunu varsayalım. $z = 0$ noktasında (4.1) gerçeklendiğinden D'de tüm $|z| \leq r_0$ için

$$(4.3) \qquad \left| z\,\frac{f'(z)}{f(z)} - M \right| \leq \left| z_0\, \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} - M \right| = M$$

eşitsizliginin doğru olduğu bir $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ $(0 < r < 1)$ noktası vardır. $p(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ ile tanımlanırsa (4.3)'den

$$(4.4) \qquad |\, p(z) - M \,| \le |\, p(z_0) - M \,| = M$$

ve $J(\alpha, f(z))$ 'in tanımı ile

$$(4.5) \qquad |\, J(\alpha, f(z)) - M \,| = |\, p(z) + \alpha z \frac{p'(z)}{p(z)} - M \,|$$

elde edilir. $p'(z_0) = 0$ ise (4.4) ve (4.5)'den $|\, J(\alpha, f(z_0)) - M \,| = M$ bulunur. $p'(z_0) \neq 0$ ise $\arg z_0 p'(z_0) = \arg (p(z_0) - M) = \varphi$ elde ederiz. (4.4) ve (4.5)'den

$|\, J(\alpha, f(z_0)) - M \,| = |\, M + \dfrac{\alpha |z_0 p'(z_0)|}{M + Me^{i\varphi}} \,| \ge M$ dir. Her iki durumda

$|\, J(\alpha, f(z_0)) - M \,| \ge M$ dir. Oysa $f \in S^*(\alpha, M)$ idi. O halde $f \in S^*(M)$. Teorem 4.1. ile

$$(4.6) \qquad S^*(\alpha, M) \subset S^*(0, M)$$

dir.

TEOREM 4.2. $f(z) \in S^*(\alpha, M)$ ise, $0 \le \beta \le \alpha$ için $f(z) \in S^*(\beta, M)$ dir.

İSPAT. (4.6) ile $\beta = 0$ halini inceledik. Şimdi $0 < \beta \le \alpha$ olsun. $f(z) \notin S^*(\beta, M)$ varsayalım. Bu durumda,

$$(4.7) \qquad |\, J(\beta, f(\xi)) - M \,| \ge M$$

koşulunu gerçekleyen bir $\xi \in D$ vardır. Hipotezle,

$$(4.8) \qquad |\, J(\alpha, f(\xi)) - M \,| < M$$

dir.

$A = \xi \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} - M$, $B = \xi \dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - \xi \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} + 1$ olsun. (4.7) ve (4.8) ifadeleri

$$(4.9) \qquad |\, A + \beta B \,|^2 \geq M^2$$

$$(4.10) \qquad M^2 > |\, A + \alpha B \,|^2$$

şeklini alır. (4.9)'u α, (4.10)'u β ile çarpıp taraf tarafa toplayarak $(\alpha - \beta)|A|^2 > \alpha\beta(\alpha - \beta)|B|^2 + (\alpha - \beta)M^2$ elde ederiz. $\alpha - \beta > 0$ olduğundan $|A|^2 > \alpha\beta|B|^2 + M^2 \geq M^2$ dir. Yani $|\, \xi f'(\xi)/f(\xi) - M \,| \geq M$ elde ederiz. O halde $f(z) \in S^*(\beta, M)$ dir.

5. KARŞILIKLI OLARAK EŞLENİK KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLAR

TANIM 5.1. f ve g, D'de $f(0) = g(0) = 0$ ve $f'(0) = g'(0) = 1$ koşullarını gerçekleyen regüler fonksiyon olsunlar.

(5.1) $$\Re\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)+g(z)} \right\} > 0$$

(5.2) $$\Re\left\{ \frac{zg'(z)}{f(z)+g(z)} \right\} > 0$$

ise f ile g fonksiyonlarına karşılıklı olarak eşlenik konvekse yakın denir. (5.1) ve (5.2)'yi sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı sınıfı S^*ile gösterilir. (5.1) ve (5.2)'den $\varphi = \frac{1}{2}(f + g) \in ST$ dir. (5.1)'den yıldızıl $\varphi(z)$ fonksiyonu için,

(5.3) $$\Re\left\{ \frac{zf'(z)}{\varphi(z)} \right\} > 0$$

olduğundan f konvekse yakın ve dolayısıyla yalınkattır. Şüphesiz aynı durum g için de geçerlidir.

TEOREM 5.1. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i) f ve g, S^* 'nin karşılıklı olarak iki elemanıdır.

ii)

(5.4) $$f(z) = \int_0^z p(\eta)\left[\exp\int_0^\eta \frac{p(\xi)+q(\xi)-2}{2\xi}\,d\xi\right] d\eta ,$$

(5.5) $$g(z) = \int_0^z q(\eta)\left[\exp\int_0^\eta \frac{p(\xi)+q(\xi)-2}{2\xi}\,d\xi\right] d\eta$$

olacak şekilde $p,q \in P$ fonksiyonları vardır.

İSPAT. i) $\Rightarrow$ ii) f ve g, S^* 'nin karşılıklı olarak iki elemanı olsun.

(5.6) $$p(z) = \frac{2zf'(z)}{f(z)+g(z)}, q(z) = \frac{2zg'(z)}{f(z)+g(z)}$$

olarak alalım. Buradan,

(5.7) $$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

elde ederiz. (5.6)'dan, $g(z) = 2\frac{zf'(z)}{p(z)} - f(z)$ fonksiyonunun türevini alarak

(5.8) $$g'(z) = \frac{2f'(z)p(z)-2zf'(z)p'(z)-f'(z)p^2(z)+2zf''(z)p(z)}{p^2(z)}$$

olduğunu görürüz. (5.7) ve (5.8)'den

$f''(z)/f'(z) = p'(z)/p(z) + (p(z)+q(z)-2)/2z$ elde ederiz. Her iki tarafın integralinin alınmasıyla (5.4) bulunur. Benzer yöntemlerle (5.5) hesaplanabilir.

ii) $\Rightarrow$ i) (5.4) ve (5.5)'den f ve g fonksiyonları regülerdir ve $f(0) = g(0) = 0$; $f'(0) = g'(0) = 1$ koşullarını gerçekler. Basit bir hesaplamayla

(5.9) $$2z\exp\int_0^z \{[p(\xi)+q(\xi)-2]/2\xi\}d\xi = \int_0^z [p(\eta)+q(\eta)]\{\exp\int_0^\eta[(p(\xi)+q(\xi)-2)/2\xi]\,d\xi\}d\eta$$

eşitliğini elde ederiz.

(5.4)'den

(5.10) $$f'(z) = p(z)\exp\int_0^z [(p(\xi)+q(\xi)-2)/2\xi]\,d\xi$$

dir. D'de $f'(z) \neq 0$ dir. O halde (5.4) ve (5.5) eşitliklerini toplayarak,

$$f(z) + g(z) = \int_0^z [\, p(\eta)+q(\eta)] \left\{ \exp\int_0^{\eta} \frac{p(\xi)+q(\xi)-2}{2\xi}\, d\xi \right\} d\eta \tag{5.11}$$

elde ederiz. (5.9), (5.10) ve (5.11)'den $2z\,\dfrac{f'(z)}{f(z)+g(z)} = p(z)$ bulunur. Benzer olarak (5.2)'de gösterilebilir.

6. SİMETRİK NOKTALARA GÖRE YILDIZIL FONKSİYONLAR

TANIM 6.1. D birim dairesinde

$$(6.1) \qquad \Re \{ zf'(z) / (f(z)-f(-z)) \} > 0$$

koşulunu gerçekleyen $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonuna simetrik noktalara göre yıldızıl denir. Böyle fonksiyonlardan oluşan sınıf S^{**} ile gösterilir. $f \in S^{**}$ ise $g(z) = -f(-z)$ ile tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu da S^{**}'a aittir.
(6.1) şartı ile

$$(6.2) \qquad \frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} = p(z)$$

olacak şekilde bir $p \in P$ vardır.
(6.2)'de z yerine −z yazarak

$$(6.3) \qquad \frac{2zf'(-z)}{f(z)-f(-z)} = \frac{2zg'(z)}{g(z)-g(-z)} = p(-z)$$

elde ederiz. (6.2) ve (6.3) ile $h = \frac{1}{2}(f + g)$ fonksiyonu yıldızıldır. $\emptyset(z) = \int_0^z \xi^{-1} h(\xi) d\xi$ fonksiyonu D'de normalize edilmiş yalınkat bir fonksiyondur. (6.2)'den, $\emptyset(z)$ fonksiyonu için $\Re \left\{ \frac{f'(z)}{\emptyset'(z)} \right\} > 0$ eşitsizliği bulunur. Buradan da simetrik noktalara göre yıldızıl fonksiyonların, konvekse yakın fonksiyonlar sınıfının bir alt sınıfı olduğu görülür.

TEOREM 6.1. f(z) fonksiyonunun S^{**} sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul

$$(6.4) \qquad f(z) = \int_0^z p(\eta) \left\{ \exp \frac{1}{2} \int_0^{\eta} [p(\xi)+p(-\xi)-2] \xi^{-1} d\xi \right\} d\eta$$

olacak şekilde bir $p \in P$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. $f \in S^{**}$ ise,

(6.5) $$2zf'(z)[f(z) - f(-z)]^{-1} = p(z)$$

dir. (6.5)'de z yerine $-z$ alarak

(6.6) $$2zf'(-z)[f(z) - f(-z)]^{-1} = p(-z)$$

elde ederiz. (6.5) ve (6.6)'dan, $\dfrac{f'(z)}{f'(-z)} = \dfrac{p(z)}{p(-z)}$ dir. Böylece

(6.7) $$f'(-z) = \frac{p(-z)f'(z)}{p(z)}$$

buluruz. (6.5)'den

$-f(-z) = [2zf'(z) - f(z)p(z)] / p(z)$ dir. Bulunan bu eşitliğin her iki yanının türevini alırsak

(6.8) $$f'(-z) = [p(z)]^{-2}[\ 2zpf'' + 2pf' - 2zp'f' - p^2f'\ ]$$

elde ederiz. (6.7) ve (6.8) eşitliklerinden ve

$q(z) = \frac{1}{2}[\ p(z) + p(-z) - 2\ ]\ z^{-1}$ ile $\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = q(z) + \dfrac{p'(z)}{p(z)}$ buluruz. Basit bir hesaplamayla (6.4) 'ü elde ederiz.

(6.9) $$2z\exp\left[\int_0^z q(\xi)d\xi\right] = \int_0^z [p(\eta)+p(-\eta)]\exp\left\{\int_0^\eta q(\xi)d\xi\right\}d\eta$$

eşitliği gerçeklenir.
(6.4)'den,

(6.10) $$f'(z) = p(z)\exp\left\{\int_0^z q(\xi)d\xi\right\}$$

elde ederiz. Böylece D'de $f'(z) \neq 0$ dır. Ayrıca

$$(6.11) \qquad -f(-z) = \int_0^z p(-\eta)\{ \exp \int_0^\eta q(\xi)d\xi \}d\eta$$

dır. (6.4) ve (6.11) ile,

$$(6.12) \qquad f(z) - f(-z) = \int_0^z [p(\eta)+p(-\eta)]\{ \exp \int_0^\eta q(\xi)d\xi \}d\eta$$

dir. (6.9),(6.10) ve (6.12) ile $f(z)-f(-z) = 2zf'(z)/p(z)$ dir. Sonuçta $f(z)$ fonksiyonu S^{**} sınıfına aittir.

7. ALFA SPİRAL FONKSİYONLAR

TANIM 7.1. D birim diskinde analitik, bir α ($|\alpha| < \frac{\pi}{2}$) için

$$\Re \left\{ e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \tag{7.1}$$

eşitsizliğini gerçekleyen f(z) fonksiyonuna D'de α-spiral denir. Böyle fonksiyonların sınıfı SP(α) ile gösterilir.
$\Re \left\{ e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$ şartını elde etmek için $\Re \left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$ koşuluna $e^{i\alpha}$ yı ekleyerek değiştirelim. O halde P sınıfının temel özelliklerinden z = 0 civarında

$$e^{i\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} = \cos\alpha + i\sin\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{7.2}$$

yazılabilir. Tanım 7.1.'den, z = 0'da $\cos\alpha \geq 0$, yani $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ dir. $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ ise f(z) = z dir. O halde bu fonksiyon sınıfı için $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ olarak kabul edeceğiz. (7.2)'de eşitliğin sağ yanını normalize ederek

$$\frac{1}{\cos\alpha} \left[e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} - i\sin\alpha \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = p(z) \tag{7.3}$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ nin var olduğu sonucina varırız. Tersine $p(z) \in P$ ise (7.1), D birim diskinde gerçekleşir. (7.3)'de $p(z) = \frac{1+z}{1-z}$ için f(z) çözümü, $s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olmak üzere,

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^{2s}} \tag{7.4}$$

dir. (7.4) ile belirli f(z) fonksiyonuna α-spiral Koebe fonksiyonu denir.

TEOREM 7.1. [48] f(z) fonksiyonun α-spiral olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = z \exp\{ e^{-i\alpha}\cos\alpha \int_0^z \frac{p(\xi)-1}{\xi} d\xi \} \tag{7.5}$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. $f(z) \in SP(\alpha)$ olsun. (7.3) ile,
$\frac{1}{\cos\alpha}\{e^{i\alpha} z \frac{f'(z)}{f(z)} - i\sin\alpha\} = p(z)$ dir. Bu denklemden f(z) çözülürse (7.5) kolayca görülür. Tersine f(z),(7.5) şeklinde ise $f(z) \in SP(\alpha)$ dir.

TEOREM 7.2. [48] $f(z) \in SP(\alpha)$ ise, f(z) D'de yalınkattır.

TEOREM 7.3 [52] $f(z) \in SP(\alpha)$ ise,

$$|a_n| \le \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} [(k-1)^2 + 4k\cos^2\alpha]^{1/2} \tag{7.6}$$

dir.

Eşitsizlik $n \ge 2$ için kesindir. (7.6)'da eşitlik $s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olmak üzere $F(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{2s}}$ fonksiyonu ve bunun açısal dönüşümleri için gerçeklenir.

Spacek 1933'de Spiral fonksiyonları tanıtmıştır. 1967'de Libera [20] bu kavramı daha ince bir sınıf olan β. mertebeden spiral fonksiyonlara genişletmiştir.

TANIM 7.2. D 'de $0 < \beta < 1$ ve $|\lambda| < \pi/2$ olmak üzere

$$\Re \{ e^{i\lambda} zf'(z)/f(z) \} > \beta\cos\lambda \tag{7.7}$$

koşulunu gerçekleyen bir $f(z) \in S$ fonksiyonuna β.mertebeden λ-spiral denir. Libera 1967 'de bu sınıf için

$$(7.8) \qquad |a_n| \le \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s(1-\beta)-1|}{k}, \quad s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$$

eşitsizliğinin kesin olduğunu, eşitliğin $F(z) = z/(1-z)^{2s(1-\beta)}$ olması halinde geçerli olduğunu göstermiştir.
Obradovic ve Owa [30] $f(z)$, D birim diskinde regüler olan $f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ $(n \ge 1)$ formundaki fonksiyonların sınıfı A_n olmak üzere, Tanım 7.2. eşitsizlini gerçekleyen fonksiyonların sınıfını $S_n^{\lambda}(\beta)$ olarak tanımlamışlardır. $S_1^{\lambda}(\beta)$ sınıfı [20]'de Libera tarafından incelenmiştir.
$S_n^{0}(\beta) = S_n^{*}(\beta)$ sınıfı da, A_n sınıfına ait olan α.mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfıdır. Yazarlar $S_n^{\lambda}(\beta)$ sınıfına ait ilginç sonuçlar elde etmişlerdir. Bu sonuçlardan en önemlisi aşağıdaki teoremle verilmiştir.

TEOREM 7.4. $f(z) \in S_n^{\lambda}(\beta)$ ise, $a \ge -\beta$ ve $0 < b \le \frac{1}{\cos\lambda}$ olmak üzere

$$(7.9) \qquad F(z) = \frac{a+1}{z^a} \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t}\right]^{be^{i\lambda}} t^a dt$$

fonksiyonu $S_n^{*}(\alpha)$ sınıfına aittir.
Bu teoremin bir sonucu olarak, Teoremde $\lambda = 0$ ve $b = 1$ alarak, $f(z) \in S_n^{*}(\beta)$ $(0 \le \beta < 1)$ ve $a \ge -\beta$ olmak üzere

$$(7.10) \qquad F(z) = \frac{a+1}{z^a} \int_0^z t^{a-1} f(t) dt$$

fonksiyonunun $S_n^*(\beta)$ sınıfına ait olduğunu görürüz.

1969'da Robertson [42] konveks α-spiral fonksiyonları tanımlamış ve bu sınıfı CVSP(α) ile göstermiştir. Ayrıca Robertson,

$$f(z) \in CVSP(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = zf'(z) \in SP(\alpha)$$

gerektirmesini vermiştir. Ancak bu sınıftaki fonksiyonların α 'nın özel durumları için yalınkat olduğunu göstermiştir. Örnek olarak $f(z) = i(1-z)^{i} - i = z + \ldots$ fonksiyonu CVSP(α)'ya aittir. Ancak $0 \leq \cos\alpha < 0.2315$ koşulunu gerçekleyen α lar için, Robertson $f(z)$'in yalınkat olduğunu göstermiştir. Ayrıca $\frac{1}{2} < \cos\alpha < 1$ eşitsizliğini sağlayan α için D'de yalınkat olmayan bir $f(z) \in CVSP(\alpha)$ olduğu sonucuna varmıştır. Birkaç yazar tarafından α'nın mümkün en iyi değerleri hesaplanmış, 1975'de Pfaltzgzaff [36], $0 \leq \cos\alpha < \frac{1}{2}$ için $f(z) \in CVSP(\alpha)$ fonksiyonunun D'de yalınkat olduğunu göstermiştir. Silvia [47]'de yukarıda verilen bir çok sınıfı içine alan daha ince bir sınıfı tanımlamıştır.

TANIM 7.3. $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olsun. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S$, D birim diskinde analitik, $0 < |z| < 1$ 'de $f(z)f'(z) \neq 0$ olsun.

$$\Re \left[e^{i\lambda} \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 - z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \right] > \beta\cos\lambda \tag{7.11}$$

ise, $f(z)$ fonksiyonuna β.mertebeden $\alpha - \lambda -$ spiral fonksiyon denir, ve $f(z) \in S_\alpha^\lambda(\beta)$ yazılır. $\alpha = 0$ için $S_0^\lambda(\beta)$, β. mertebeden λ-spiral fonksiyonların, $\lambda = 0 = \beta$ için $S_\alpha^0(0)$, α-konveks fonksiyonların sınıflarıdır. $\alpha \geq 0$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere $S_\alpha^0(\beta)$, β.mertebeden α-konveks fonksiyonların sınıfıdır.

LEMMA 7.1. [15] $\omega(z)$ D'de regüler ve $\omega(0) = 0$ olsun. Bir $\xi \in D$ için

$$\max_{|z| \leq |\xi|} |\omega(z)| = |\omega(\xi)|$$

ise,

$$(7.12)\qquad \xi\omega'(\xi) = k\omega(\xi)$$

olacak şekilde bir k ($k \geq 1$) vardır.

LEMMA 7.2. [20] $f(z) \in S$ nin β. mertebeden λ-spiral ($0 \leq \beta < 1$, $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$) olması için gerek ve yeter koşul

$$(7.13)\qquad e^{i\lambda} z\,\frac{f'(z)}{f(z)} = \beta\cos\lambda + (1-\beta)\cos\lambda\left(\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}\right) + i\sin\lambda$$

olacak şekilde $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen bir $\omega(z)$ analitik fonksiyonunun var olmasıdır.

TEOREM 7.5. $\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < 1$ ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olsun.
$f(z) \in S_\alpha^\lambda(\beta)$ ise $f(z) \in S_0^\lambda(\beta)$ yani $S_\alpha^\lambda(\beta) \subset S_0^\lambda(\beta)$ dir.

İSPAT. $e^{i\lambda} zf'(z)/f(z) = \beta\cos\lambda + (1-\beta)\cos\lambda[1-\omega(z)/1+\omega(z)] + i\sin\lambda$ olsun. Buradan $\omega(0) = 0$ dır. (7.13)'deki eşitliğin sağ yanının düzenlenmesiyle

$$(7.14)\qquad e^{i\lambda}\, z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{e^{i\lambda}(1+(2\beta e^{-i\lambda}\cos\lambda - e^{-2i\lambda})\omega(z))}{1+\omega(z)}$$

elde edilir. Tanım 7.3. 'deki parantez içindeki ifadeyi

$$(7.15)\qquad K\{\lambda,\alpha,f(z)\} = (\, e^{i\lambda} - \alpha\,)\, z\frac{f'}{f} + \alpha\left(z\frac{f''}{f'} + 1 \right)$$

şeklinde yazalım. (7.14)'ün türevini alıp, (7.13)'den faydalanarak

$$(7.16)\qquad K\{\lambda,\alpha,f(z)\} =$$

$$= \beta\cos\lambda + (1-\beta)\cos\lambda\left(\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}\right) + i\sin\lambda + \alpha\,\frac{\{2\beta e^{-i\lambda}\cos\lambda - e^{-2i\lambda}\} z\omega'(z)}{1+(2\beta e^{-i\lambda}\cos\lambda - e^{-2i\lambda})\omega(z)}$$

$$-\alpha\,\frac{z\omega'(z)}{1+\omega(z)}$$

elde ederiz. Bir $\xi \in D$ için $\max_{|z|\le|\xi|}|\omega(z)| = |\omega(\xi)| = 1$ gerçeklendiğini varsayalım. Buradan $\omega(\xi) \neq -1$ dir. Lemma 7.1. ile bir $k \geq 1$ için $\xi\omega'(\xi) = k\omega(\xi)$ dir. Bu $\xi \in D$ için

$$(7.17) \qquad \Re\left\{\frac{1-\omega(\xi)}{1+\omega(\xi)}\right\} = 0, \quad \Re\left\{\frac{\xi\omega'(\xi)}{1+\omega(\xi)}\right\} = \frac{k}{2}$$

dir. Ayrıca,

$$(7.18) \qquad m = 2\beta e^{-i\lambda}\cos\lambda - e^{-2i\lambda}$$

için ,

$$\Re\,\frac{m\xi\omega'(\xi)}{1+m\omega(\xi)} = \Re\,\frac{k\left(|m|^2+m\omega(\xi)\right)}{1+|m|^2+2\Re\ m\omega(\xi)} = \frac{k\left(|m|^2+\Re\ m\omega(\xi)\right)}{1+|m|^2+2\Re\ m\omega(\xi)}$$ dir. Buradan,

$$(7.19) \qquad \Re\left\{\frac{m\xi\omega'(\xi)}{1+m\omega(\xi)}\right\} - \Re\left(\frac{\xi\omega'(\xi)}{1+\omega(\xi)}\right) = \frac{k(|m|^2-1)}{2\left(1+2\Re\ m\omega(\xi)+|m|^2\right)}$$

dir. (7.17), (7.18), (7.19)'dan

$$(7.20) \qquad \Re\ K\left(\lambda,\alpha,f(z)\right) = \beta\cos\lambda - \frac{2k\beta(1-\beta)\alpha\cos^2\lambda}{1+|m|^2+2\Re\ m\omega(\xi)} < \beta\cos\lambda$$

bulunur. Oysa bu son durum $f(z) \in S_\alpha^\lambda(\beta)$ olmasına aykırıdır. O halde D'de $|\omega(z)| < 1$ dir. Sonuçta $f(z)$, β. mertebeden λ-spiral fonksiyondur.

TEOREM 7.6. $f(z) \in S_\alpha^\lambda(\beta)$ ise $0 \leq \gamma < \alpha$ olmak üzere, $f(z) \in S_\gamma^\lambda(\beta)$ dir.

İSPAT. Teorem 7.5. ile $f(z) \in S_0^\lambda(\beta)$ dır.

$f(z) \notin S_\gamma^\lambda(\beta)$ olacak şekilde $0 < \gamma < \alpha$ yı gerçekleyen bir γ'nın var olduğunu varsayalım. O halde,

$$(7.21) \qquad \Re\left(\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)} +1 - \xi\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \right) \le \frac{\beta\cos\lambda}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\Re\left(\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} e^{i\lambda} \right)$$

koşulunu gerçekleyen bir $\xi \in D$ vardır.

$f(z) \in S_{\alpha}^{\lambda}(\beta)$ olduğundan,

$$(7.22) \qquad 0 < -\beta\cos\lambda + \Re\, e^{i\lambda} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} + \alpha\, \Re\left(\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)} +1-\xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right)$$

dir. (7.21) ve (7.22)'den

$0 < (1-\frac{\alpha}{\gamma})\Re\left(e^{i\lambda}\xi f'(\xi)/f(\xi) - \beta\cos\lambda \right)$ elde edilir. Oysa $1 - \frac{\alpha}{\gamma} < 0$ olduğundan, $\Re\, e^{i\lambda}\xi \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} < \beta\cos\lambda$ bulunur ki bu da $f(z) \in S_{0}^{\lambda}(\beta)$ olmasına aykırıdır. Sonuçta $f(z) \in S_{\gamma}^{\lambda}(\beta)$ dır.

Aşağıda tanım ve teoremlerde $\alpha > 0$, $0 \le \beta < 1$ ve $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ olarak kabul edeceğiz.

TANIM 7.4. $g(z) \in ST$, $\gamma > 0$, μ reel olmak üzere,

$$(7.23) \qquad f(z) = \left[(\gamma+i\mu)\int_0^z \sigma(t)^{\gamma}\, t^{-1+i\mu} dt \right]^{1/(\gamma+i\mu)}$$

fonksiyonuna $\gamma+i\mu$-Bazilevic fonksiyonu denir ve bu fonksiyonların sınıfı $B(\gamma+i\mu)$ ile gösterilir.

TANIM 7.5.

$$(7.24) \qquad f(z) = \left[\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z g(\xi)^{(\cos\lambda)/\alpha}\, \xi^{-1+((i\sin\lambda)/\alpha)} d\xi \right]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in ST(\beta)$ varsa $f(z) \in S$ fonksiyonuna β. mertebeden $\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}$ -Bazilevic fonksiyonu denir ve $f(z) \in B(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta)$ ile gösterilir.

TEOREM 7.7. $f(z) \in B(e^{i\lambda}/\alpha,\beta)$ ise $f(z) \in S_{\alpha}^{\lambda}(\beta)$ dır.

İSPAT. $f(z) \in B(\frac{e^{i\lambda}}{\alpha}, \beta)$ için (7.24)'den,

$$(7.25) \qquad f'(z) = g(z)^{\cos\lambda/\alpha} z^{-1+((i\sin\lambda)/\alpha)} f(z)^{1-e^{i\lambda/\alpha}}$$

elde edilir. (7.25) in logaritmik türevini alıp, $z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1$ için bulunan ifadeyi (7.11)'de yerleştirerek

$$(7.26) \qquad K\{\lambda,\alpha,f(z)\} = \cos\lambda\ zg'(z)/g(z) + i\sin\lambda$$

elde ederiz. Hipotezlerden $\Re\ K\{\lambda,\alpha,f(z)\} > \beta\cos\lambda$ yani $f(z) \in S_\alpha^\lambda(\beta)$ dır.

LEMMA 7.3. [3]
$g(z) \in ST(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul D'de

$$(7.27) \qquad \left(\frac{g(\xi)}{\xi}\right)^{\cos\lambda} = \left(\frac{F(\xi)}{\xi}\right)^{e^{i\lambda}}$$

olacak şekilde bir $F(z) \in S_0^\lambda(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

LEMMA 7.4. $f(z) \in B(e^{i\lambda/\alpha}, \beta)$ için gerek ve yeter koşul,

$$(7.28) \qquad f(z) = \left[\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z [F(\xi)]^{e^{i\lambda/\alpha}} \xi^{-1} d\xi \right]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

olacak şekilde bir $F(z) \in S_0^\lambda(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. Tanım 7.5.'den, $f(z) \in B(e^{i\lambda}/\alpha, \beta)$ için gerek yeter koşul, (7.24)'ü gerçekleyen bir $g(z) \in ST(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır. Lemma 7.3. ile $g(z) \in ST(\beta)$ için gerek ve yeter koşul (7.28) eşitliğini gerçekleyen bir $F(z) \in S_0^\lambda(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır. Buradan $f(z) \in B(e^{i\lambda}/\alpha, \beta)$ ise

$$(7.29) \qquad f(z) = \left[\frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z g(\xi)^{(\cos\lambda)/\alpha} \xi^{-1+((i\sin\lambda)/\alpha)} d\xi \right]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

$$= [\ \frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z (\frac{g(\xi)}{\xi})^{(\cos\lambda)/\alpha}\ \xi^{-1+(e^{i\lambda}/\alpha)} d\xi\ ]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

$$= [\ \frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z [F(\xi)]^{e^{i\lambda/\alpha}}\ \xi^{-1} d\xi\ ]^{\alpha e^{-i\lambda}}$$

(7.29)'daki adımlar tersine çevrildiğinden ,tersi bu eşitlikten kolayca elde edilir. Lemma 7.4.'den $f(z) \in B(e^{i\lambda/\alpha},\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$F(z) = f(z)[\ z \frac{f'(z)}{f(z)}\ ]^{\alpha e^{-i\lambda}} \tag{7.30}$$

olacak şekilde $F(z) \in S_0^{\lambda}(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır. Buradan da $B(e^{i\lambda}/\alpha,\beta) \subset S_{\alpha}^{\lambda}(\beta)$ elde edilir.

Sonuçta aşağıdaki teorem önceki Teorem ve Lemmaların bir sonucu olarak bulunur.

Teorem 7.8. [47] $f(z) \in S_{\alpha}^{\lambda}(\beta)$ olması için gerek yeter Koşul,

$$f(z) = [\ \frac{e^{i\lambda}}{\alpha} \int_0^z F(\xi)^{e^{i\lambda/\alpha}}\ \xi^{-1} d\xi\ ]^{\alpha e^{-i\lambda}} \tag{7.31}$$

olacak şekilde bir $F(z) \in S_0^{\lambda}(\beta)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

8. DÜZGÜN YILDIZIL FONKSİYONLAR

TANIM 8.1. $f(z)$ fonksiyonu D'de yıldızıl olsun. ξ merkezli her γ çembersel yayı için $f(\gamma)$ yayı $f(\xi)$ ya göre yıldızıl ise $f(z)$ fonksiyonuna düzgün yıldızıl denir. Bu fonksiyonların sınıfı UST ile gösterilir.
$\omega_0 = f(\xi)$ olmak üzere $\arg\{f(z)-\omega_0\}$ azalmayan ise $f(\gamma)$ yayına ω_0'a göre yıldızıl denir.

TEOREM 8.1. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunun UST olması için gerek ve yeter koşul DxD 'de her (z,ξ) için

$$(8.1) \qquad \Re \frac{f(z)-f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)} \geq 0$$

olmasıdır.

İSPAT. $f(z) \in$ UST olsun. O halde D'de ξ merkezli her γ çembersel yayı için $\arg\{f(z)-f(\xi)\}$ azalmayandır. Goodman [12], γ yayı $z(t)$ ile verilmişse, $f(\gamma)$ nin ω_0' a göre yıldızıl olması için gerek ve yeter koşulun

$$(8.2) \qquad \Im \left\{ \frac{f'(z)}{f(z)-\omega_0} \frac{dz}{dt} \right\} \geq 0$$

ile verildiğini göstermiştir. Buradan ξ merkezli γ çembersel yayı $z = \xi + re^{it}$ için $z'(t) = i(z-\xi)$ dir. (8.2) ile, (8.1) bağıntısı elde edilir.

TANIM 8.2. DxD 'de regüler ve $\Re\, P \geq 0$ koşulunu gerçekleyen

$$(8.3) \qquad P(z,\xi) = 1 + \sum_{m,n>0}\sum b_{mn} z^m \xi^n$$

fonksiyonlarının cümlesi $P^{(2)}$ ile gösterilir.

$f(z) \in UST$ ise,

$$(8.4) \qquad Q(z,\xi) \equiv \frac{f(z)-f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)}$$

$P^{(2)}$ 'ye aittir. Ayrıca $1/Q(z,\xi) \in P^{(2)}$ dir.

$$Q(z,\xi) = \frac{f(z)-f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)} = 1 + \sum_{m,n>0}\sum b_{mn} z^m \xi^n$$

olsun. $p_n(\xi)$ ve $q_n(z)$ fonksiyonlarını

$$(8.5) \qquad Q(z,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\xi) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z)\xi^n$$

ile tanımlayalım.

LEMMA 8.1. $f(z) \in UST$ ise

$$(8.6) \qquad p_0(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi} \quad \text{ve} \quad p_1(\xi) = \frac{f(\xi)[1-2a_2\xi]-\xi}{\xi^2}$$

$$(8.7) \qquad q_0(z) = \frac{f(z)}{zf'(z)}, \quad q_1(z) = \frac{f(z)-z}{z^2 f'(z)}$$

dir. D'de her z ve ξ için,

$$(8.8) \qquad |p_1(\xi)| \le 2\Re\, p_0(\xi), \quad |q_1(z)| \le 2\Re\, q_0(z)$$

dir.

Tanım 6.1.'i gerçekleyen $f \in S^{**}$ için $\Re\{1/Q(z,-z)\} > 0$ dır. (8.4)'e göre $S^{**} \supset UST$ dir. Sakaguchi $f(z) \in S^{**}$ için $|a_n| \leq 1$ $(n=2,3,\ldots)$ olduğunu göstermiştir. Sonuç olarak UST cümlesi içinde $|a_n| \leq 1$ dir. Fakat Horowitz aşağıdaki teoremle bu sınıftaki fonksiyonların katsayıları için daha iyi bir sonuç elde etmiştir.

TEOREM 8.2. $f(z) \in UST$ ise, $f'(z)$ orijin boyunca bir doğru ile sınırlanmış yarı düzlemdedir ve $n = 2,3,4,\ldots$ için

$$(8.9) \qquad |a_n| \leq \frac{2}{n}$$

dir.

İSPAT. $P(z,\xi) = f'(z)Q(z,\xi) = \dfrac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}$ olsun. D'de bir (z,ξ) çifti için $\arg f'(z) = \arg f'(\xi) + \pi$ olduğunu varsayalım. Simetri ile $P(z,\xi) = P(\xi,z)$ dir. Buradan $Q(z,\xi) = \dfrac{P(z,\xi)}{f'(z)}$ ve $Q(\xi,z) = \dfrac{P(\xi,z)}{f'(\xi)}$ orijine göre simetriktir. z_1 ve ξ, D nin iç noktaları olduğundan D de noktaların bir civarı için $\Re\, Q(z,\xi) < 0$ veya $\Re\, Q(\xi,z) < 0$ dır. Bu ise (8.1)'e aykırıdır. Böylece bir α için $\Re\, e^{i\alpha} f'(z) > 0$ dır. O halde sonuçta $n|a_n| \leq 2|\cos\alpha| \leq 2$ dir.

TEOREM 8.3. $f(z) \in UST$ ise, $|z| = r < 1$ için

$$(8.10) \qquad \frac{r}{1+2r} \leq |f(z)| \leq -r + 2\ln\frac{1}{1-r}$$

dir.

İSPAT. $|f(z)| = |z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n| \leq r + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} r^n$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \log\frac{1}{1-r}$ eşitliğinden yararlanarak, $r + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{n} = 2\log\frac{1}{1-r} - r$ elde ederiz. $\Re\, Q > 0$ olduğundan, (8.11) $$|q_1(z)| \le 2\Re\, q_0|z| \le 2|q_0(z)|$$

eşitsizliğini, $|z^2 f'(z)|$ ile çarparak

(8.12) $$|f(z) - z| \le 2|zf(z)|$$

eşitsizliğini buluruz. $|z| - |f(z)| \le 2|zf(z)|$ eşitsizliğinden $\frac{r}{1+2r} \le |f(z)|$ sonucunu elde ederiz.

TANIM 8.3. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ D 'de regüler ve yalınkat olsun. ξ merkezli her γ yayı için $f(\gamma)$ yayı konveks bir eğri ise $f(z)$ fonksiyonuna düzgün konveks denir. Böyle fonksiyonların sınıfı UCV ile gösterilir.

$f(z)$ fonksiyonunun UCV olması için gerek ve yeter koşul DxD de

(8.12) $$\Re\left[\, 1 + \frac{g''(z)}{g'(z)}(z-\xi)\,\right] > 0$$

olmasıdır. [12]

9. $S(\mu,\lambda)$ SINIFI

TANIM 9.1. [24] D birim diskinde $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ regüler ve $\frac{f(z)}{z} \neq 0, f'(z) \neq 0, \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \neq 0$ olsun. μ ve λ reel sayıları için

$$\Re \left[z \frac{f'(z)}{f(z)} \right]^{\mu} \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right]^{\lambda} > 0 \tag{9.1}$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna $S(\mu,\lambda)$ sınıfına aittir denir.

$S(\mu,\lambda)$, μ ve λ nın özel değerleri için bir çok sınıfı içerir. Örnek olarak $S(1,0) = ST$, $S(0,1) = CV$ dir. $|\mu| \geq 1$ olmak üzere $S(\mu,0)$ güçlü yıldızıl fonksiyonların, $|\lambda| \geq 1$ olmak üzere $S(0,\lambda)$ güçlü konveks fonksiyonların, γ reel için $S(1-\gamma,\gamma)$ gamma-yıldızıl fonksiyonların sınıfıdır.
(9.1) şartı,

$$\left| \mu \arg\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) + \lambda \arg\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right) \right| < \frac{\pi}{2} \tag{9.2}$$

eşitsizliğine eşdeğerdir. I tamsayıların cümlesi olmak üzere, $K=\{(\mu,\lambda) : 4n+1 \leq \mu+\lambda \leq 4n+3,\ n \in I\} \cup \{(\mu,0) : |\mu| \geq 1\} \cup \{(0,\lambda) : |\lambda| \geq 1\}$ şeklinde tanımlansın.

TEOREM 9.1. [24] $(\mu,\lambda) \in K$ ise,

$$S(\mu,\lambda) \subset ST \tag{9.3}$$

dir.
Teorem 9.1.'in daha genel hali olan teorem aşağıda verilmiştir.

TEOREM 9.2. $0 \leq t \leq 1$ ve $(\mu,\lambda) \in K$ ise $S(\mu,\lambda) \subset S[(\mu-1)t + 1, \lambda t]$ dir.

İSPAT. $f(z) \in S(\mu,\lambda)$ ise

$$(9.4) \qquad \left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^{\mu}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right]^{\lambda} = P_1(z)$$

olacak şekilde $P_1(0) = 1$ ve $\Re\, P_1(z) > 0$ koşullarını gerçekleyen $P_1 \in P$ vardır. Teorem 9.1. ile,

$$(9.5) \qquad z\frac{f'(z)}{f(z)} = P_2(z),\ P_2(0) = 1,\ \Re\, P_2(z) > 0$$

dır. (9.4)'ün t. kuvvetini ve (9.5)'in (1-t). kuvvetini taraf tarafa çarparak

$$\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^{(\mu-1)t+1}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right]^{\lambda t} = [P_1(z)]^{t}[P_2(z)]^{1-t} = P_3(z)$$

elde ederiz. $P_3(z)$ fonksiyonunun verilişinden

$$|\arg P_3(z)| \leq t|\arg P_1(z)| + (1-t)|\arg P_2(z)| \leq t\frac{\pi}{2} + (1-t)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

dir. Böylece

$P_3(0) = 1$ ve $\Re\, P_3(z) > 0$ dır. Sonuç olarak $f(z) \in S[(\mu-1)t+1, \lambda t]$. dir.

Teoremin bir sonucu olarak,

i) $0 \leq \delta \leq \lambda$ $(\lambda \leq \delta \leq 0)$ ve $(1,\lambda) \in K$ ise $S(1,\lambda) \subset S(1,\delta)$ dir.

ii) $0 \leq \delta \leq \lambda$ $(\lambda \leq \delta \leq 0)$ ise, her λ reel sayısı için, $S(1-\lambda,\lambda) \subset S(1-\delta,\delta) \subset ST$ dir.

10. KOMPLEKS MERTEBEDEN YILDIZIL FONKSİYONLAR

TANIM 10.1. $b \neq 0$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. D'de

$$\frac{f(z)}{z} \neq 0 \text{ ve } \Re\left\{ 1 + \frac{1}{b}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \right\} > 0 \tag{10.1}$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ analitik fonksiyonuna $(1-b)$.mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Böyle fonksiyonların sınıfı $S(1-b)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanım bir başka şekilde şöyle de verilebilir: $f \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = b\left[p(z)-1 \right] + 1 \tag{10.2}$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ nin var olmasıdır.
$\Omega = \{ \omega \in H(D) : \omega(0) = 0 ,\ |\omega(z)| \leq |z|,\ z \in D \}$ ile tanımlanan Ω sınıfından yararlanarak, $f \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter şartın,

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+(2b-1)\omega(z)}{1-\omega(z)} \tag{10.3}$$

olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ 'nın var olduğu sonucunu elde ederiz. Pozitif reel kısımlı fonksiyonlar için verilen Herglotz gösterilişinden yararlanarak aşağıdaki teoremi kolayca elde ederiz.

TEOREM 10.1. $f \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f(z) = z\exp\left\{ \int_0^{2\pi} -2b\log(1-z\bar{e}^{it})d\mu(t) \right\} \tag{10.4}$$

olacak şekilde $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$, $\int_0^{2\pi} \frac{1+z\bar{e}^{it}}{1-z\bar{e}^{it}} d\mu(t) = p(z)$ $(\in P)$ eşitliklerini gerçekleyen azalmayan bir $\mu(t)$ fonksiyonu var

olmasıdır.

b 'nin farklı değerleri için bu bölümde incelenmiş bir çok fonksiyon sınıfı elde ederiz.

$b = 1$ için $S(0) = ST$ (yıldızıl fonksiyonlar), $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $b = 1-\alpha$ için, $ST(\alpha)$ (α.mertebeden yıldızıl fonksiyonlar),

$S(1-\cos\lambda\, e^{-i\lambda}) = SP(\lambda)$, ($|\lambda| < \frac{\pi}{2}$, λ-spiral fonksiyonlar),

$S[1-(1-\alpha)e^{-i\lambda}\cos\lambda] = S_\alpha^\lambda$ ($|\lambda| < \frac{\pi}{2}, 0 \le \alpha < 1$), α.mertebeden λ-spiral fonksiyonlar sınıfı bulunur.

Teorem 10.1.'in bir sonucu Pommerenke tarafından verilmiş ST 'deki fonksiyonlar için gösteriliş teoremidir.

SONUÇ 10.1. $f \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter koşul $f(z) = z\,[g(z)/z]^b$ olacak şekilde bir $g(z) \in ST$ fonksiyonunun var olmasıdır.

TEOREM 10.2. $\Re\, b > 0$ olmak üzere,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S(1-b) \text{ ise, } n = 2,3,\ldots \text{ için}$$

$$|a_n| \le \frac{1}{(n-1)!} \prod_{m=0}^{n-2} |2b+m| \tag{10.6}$$

dir. (10.6)'da eşitlik,

$$f^*(z) = \frac{z}{(1-z)^{2b}} = \left\{ z + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{m=0}^{n-2} \left(\frac{2b+m}{m+1}\right) z^n \right\} \tag{10.7}$$

fonksiyonu ile gerçeklenir.

İSPAT. $f \in S(1-b)$ olduğundan, (10.3)'den

$$\left\{ 2bz + \sum_{k=2}^{\infty} (2b+k-1)a_k z^k \right\} \omega(z) = \sum_{k=2}^{n} (k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k z^k \text{ dir.}$$

$|\omega(z)| < 1$ 'den yararlanarak,

$$(10.8)\qquad \left|2bz + \sum_{k=2}^{\infty} (2b+k-1)a_k z^k\right| \ge \left|\sum_{k=2}^{n} (k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k z^k\right|$$

buluruz. (10.8)'in her iki yanının karesini alıp, $|z| = r < 1$ çevresinde integralini hesaplar ve bu ifadenin $r \to 1$ için limitini alırsak,

$$(10.9)\qquad (n-1)^2|a_n|^2 \le |2b|^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\, |2b+k-1|^2-(k-1)^2 \,\right] |a_k|^2$$

sonucunu elde ederiz.

$\Re\, b > 0$ olduğundan $|a_2| \le 2|b|$, $|a_3| \le \dfrac{|2b|\,|2b+1|}{2!}$ ve indüksiyonla,

$|a_n| \le \dfrac{1}{(n-1)!} \prod_{m=0}^{n-2} |2b+m|$, $n = 2,3,\ldots$ elde edilir.

LEMMA 10.1. $f(z) \in S(1-b)$ ve $a \in D$ ise,

$$(10.10)\qquad F(z) = \frac{azf\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{f(a)(z+a)(1+\bar{a}z)^{2b-1}}$$

fonksiyonu da $S(1-b)$ sınıfına aittir.

İSPAT. $f(z) \in S(1-b)$ olsun. Sonuç 10.1.'den

$$(10.11)\qquad f(z) = z(f_1(z)/z)^b$$

olacak şekilde bir $f_1(z) \in ST$ vardır.

$$(10.12)\qquad F_1(z) = \frac{azf_1\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{f_1(a)(z+a)(1+\bar{a}z)},\quad z \ne 0,\ F_1(0) = 0 \text{ ile}$$

belirli $F_1(z) \in ST$ dir. (10.11) ve (10.12) 'den $F(0) = 0$ ve

$$F(z) = z\left(\frac{F_1(z)}{z}\right)^b = \frac{azf\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{f(a)(z+a)(1+\bar{a}z)^{2b-1}}, \quad z \neq 0$$

ile belirli $F(z) \in S(1-b)$ dir.

LEMMA 10.2. $|z| \leq r$ için $f(z)$, $S(1-b)$'de değişirken, $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ 'in değerler cümlesi $\frac{1+(2b-1)r^2}{1-r^2}$ merkezli, $\frac{2|b|r}{1-r^2}$ yarıçaplı bir çemberdedir.

İSPAT. $f \in S(1-b)$ olsun. Lemma 10.1. ile belirli olan $F(z)$, $S(1-b)$ sınıfındadır. O halde (10.6) dan, $|a| < 1$ için,

$$\left|\frac{F''(0)}{2}\right| = \left|\frac{f'(a)}{f(a)}(1-|a|^2) - \frac{1+(2b-1)|a|^2}{a}\right| \leq 2|b| \text{ dir.}$$

$a \in D$, keyfi bir kompleks sayı olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte a yı z ile değiştirerek

$$(10.13) \qquad \left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1+(2b-1)r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{2|b|r}{1-r^2}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

TEOREM 10.3. $S(1-b)$ sınıfının yıldızıllık yarıçapı,

$$(10.14) \qquad r_s = \left\{ |b| + \sqrt{|b|^2-2R(b)+1} \right\}^{-1}$$

dir.

İSPAT. (10.13) 'den,

$$r < r_s = \left\{ |b| + \sqrt{|b|^2-2Re(b)+1} \right\}^{-1} \text{ için,}$$

$\Re\left\{ zf'(z)/f(z) \right\} > 0$ dır. $g(z) = \frac{z}{(1-z)^{2b}}$ ve $\omega = \frac{r(r-\sqrt{\bar{b}/b})}{(1-r\sqrt{\bar{b}/b})}$ olsun.

Buradan,

$$\omega \frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = \frac{1-2|b|r+(2b-1)r^2}{1-r^2}$$ ile bu eşitsizliğin kesin olduğu görülür.

TEOREM 10.4. $f(z) \in S(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart,

(10.15) $$\Re\, G_k(z) = \Re\left(\frac{kf(z)}{f(kz)}\right)^{1/2b} > \frac{1+k}{2} \quad (-1 < k < 1),$$

$$\left| \frac{1+k}{G_k(z)} - 1 \right| < 1$$

olmasıdır.

İSPAT. Sonuç 10.1.'den yararlanarak, $f(z) \in S(1-b)$ ise, $F(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/b} \in ST$ olduğunu görürüz. $\left.\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/b}\right|_{z=0} = 1$ dir.

$F(z)$ de z yerine kz yazarak, $F(kz) = kz\left(\frac{f(kz)}{kz}\right)^{1/b}$ buluruz.
Teorem 1.3.6 yı $F(z)$ fonksiyonuna uygulayarak,

$f(z) \in S(1-b) \Leftrightarrow \Re\left(G_k(z)\right) > \frac{1+k}{2}$, $\left| \frac{1+k}{G_k(z)} - 1 \right| < 1$ elde ederiz.

$f(z) \in A$ olsun. $0 < \lambda \le 1$ olmak üzere D'de analitik ve $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < \lambda$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfı Ω_λ olsun.

TANIM 10.2. $f \in A$ fonksiyonunun b. mertebeden ($b \neq 0$, kompleks) konveks olması için gerek ve yeter şart D'de $g'(z) \neq 0$ ve

(10.16) $$\Re\left\{ 1 + \frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır. Bu fonksiyonların sınıfı $C(b)$ ile gösterilir.

Tanım 10.1. ve Tanım 10.2. den, $f(z) \in C(b) \Leftrightarrow zf'(z) \in S(1-b)$ olduğu sonucu çıkar.

TANIM 10.3. Verilen bir λ ($0 \le \lambda < 1$) için,

$$(10.17)\qquad \left| \frac{z\dfrac{f'(z)}{f(z)}-1}{z\dfrac{f'(z)}{f(z)}+1} \right| < \lambda,\ z \in D$$

eşitsizliğini gerçekleyen $f(z) \in A$ fonksiyonuna λ. mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Tanım 10.3.'ü gerçekleyen fonksiyonların sınıfı $S(\lambda)$ ile gösterilir.

TANIM 10.4 $b(\neq 0) \in \mathbb{C}$ ve $0 < \lambda \leq 1$ için,

$$(10.18)\qquad H(f(z)) = \frac{b-1+z\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right)}{b}$$

olmak üzere

$$(10.19)\qquad \left| \frac{H(f(z))-1}{H(f(z))+1} \right| < \lambda \quad ,\ z \in D$$

eşitsizliğini gerçekleyen $f \in A$ fonksiyonuna $F_{\lambda}(b)$ sınıfına aittir denir.

TANIM 10.5. $b \neq 0$ kompleks ve $0 < \lambda \leq 1$ için,

$$(10.20)\qquad H(g(z)) = \frac{b+z\dfrac{g''(z)}{g(z)}}{b}$$

olmak üzere,

$$\left| \frac{H(g(z))-1}{H(g(z))+1} \right| < \lambda \ ,\ z \in D$$

eşitsizliğini gerçekleyen $g \in A$ fonksiyonuna $G_{\lambda}(b)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 10.4. ve 10.5. den,

(10.21) $\quad g(z) \in G_\lambda(b) \Leftrightarrow zg'(z) \in F_\lambda(b)$

olduğu görülür.

LEMMA 10.3. [33] $h(z)$, $|z| < 1$ de analitik ve $h(0) = 0$ olsun. $h(z) \in S(\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart

$$h(z) = z\exp\left[-2\int_0^z \frac{\emptyset(t)}{1+t\emptyset(t)}\,dt \right] \qquad (0 < \lambda \leq 1) \tag{10.22}$$

olacak şekilde D'de analitik ve $|\emptyset(z)| \leq \lambda$ yı gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ analitik fonksiyonunun var olmasıdır.

LEMMA 10.4.

$$f(z) \in F_\lambda(b) \Leftrightarrow zf'(z)/f(z) = \frac{1+(1-2b)\omega(z)}{1+\omega(z)}, \omega \in \Omega_\lambda \tag{10.23}$$

dir.

İSPAT. $f(z)$,(10.23) ile verilmiş ise, $H\{f(z)\} = \dfrac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}$ ve buradan $\dfrac{H\{f(z)\}-1}{H\{f(z)\}+1} = -\omega(z)$ dir. $\omega(z) \in \Omega_\lambda$ olduğundan $f(z) \in F_\lambda(b)$ dir.

Tersine $f(z) \in F_\lambda(b)$ ise, $\omega(z)=\dfrac{1-H\{f(z)\}}{1+H\{f(z)\}}$ için (10.23) gerçeklenir.

LEMMA 10.5. $f(z) \in F_\lambda(b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = z\left(\frac{h(z)}{z}\right)^b \tag{10.24}$$

olacak şekilde bir $h(z) \in S(\lambda)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} j_n z^n \in S(\lambda)$ için $f(z) = z\left(\dfrac{h(z)}{z}\right)^b$ eşitliğinden,

$\dfrac{b-1+z\dfrac{f'(z)}{f(z)}}{b} = \dfrac{zh'(z)}{h(z)}$ elde edilir. Yukarıdaki eşitlik, Tanım 10.3.

ve Tanım 10.4.'e uygulanmasıyla Lemma elde edilir.

Lemma 10.5. ve Lemma 10.3.'ün bir sonucuda şu teoremdir.

TEOREM 10.5. $f(z) \in F_\lambda(b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(10.25) \qquad f(z) = z\exp\left[-2b\int_0^z \frac{\emptyset(t)}{1+t\emptyset(t)}\,dt \right]$$

olacak şekilde $|z| < 1$ 'de analitik ve $|\emptyset(z)| < \lambda$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ fonksiyonunun var olmasıdır. •

SONUÇ 10.2. $f(z) \in F_1(b) = S(1-b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(10.26) \qquad f(z) = z\exp\left[-2b\int_0^z \frac{\emptyset(t)}{1+t\emptyset(t)}\,dt \right]$$

olacak şekilde D'de $|\emptyset(z)| \le 1$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

LEMMA 10.6. [1] $m\ (\ge 3) \in \mathbb{N}$ için, $u_j = \dfrac{\lambda^2|2b+j|^2}{(j+1)^2}$, $(j = 0,1,2,\ldots)$,

olmak üzere,

$$(10.27) \qquad \frac{1}{(m-1)^2}\left\{4\lambda^2|b|^2 + \sum_{k=2}^{m-1}\left[\lambda^2|2b+k-1|^2-(k-1)^2\right] \times \prod_{j=0}^{k-2} u_j\right\} = \prod_{j=0}^{m-2} u_j$$

dir.

TEOREM 10.6. [1] $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in F_\lambda(b)$ ise, $n=2,3,\ldots$ için, u_j $(j = 0,1,2,\ldots)$, Lemma 10.6.daki gibi olmak üzere

$$(10.28) \qquad |a_n| \le \prod_{j=0}^{n-2} u_j^{1/2}$$

dir.

$F_\lambda(b)$ ve $G_\lambda(b)$ sınıfları arasındaki bağıntılardan yararlanarak aşağıdaki sonuçları kolayca elde ederiz.

SONUÇ 10.3. $g(z) \in G_\lambda(b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(10.29) \quad (i) \qquad \frac{zg''(z)}{g'(z)} = \frac{-2b\omega(z)}{1+\omega(z)}, \quad \omega \in \Omega_\lambda$$

olmasıdır.

(10.30) (ii) Bir $h \in S(\lambda)$ için

$$g'(z) = \left[\frac{h(z)}{z}\right]^b$$

olmasıdır.

$$(10.31) \quad (iii) \qquad g'(z) = \exp\left[\ -2b\int_0^z \frac{\emptyset(t)}{1+t\emptyset(t)}\,dt\ \right]$$

olacak şekilde D'de analitik ve $|\emptyset(z)| \leq \lambda$ $(0 < \lambda \leq 1)$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $\emptyset \in \Omega_\lambda$ fonksiyonunun var olmasıdır.

SONUÇ 10.4. $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in G_\lambda(b)$ ise,

$$(10.32) \qquad |b_n| \leq \frac{1}{n}\prod_{j=0}^{n-2} u_j^{1/2}, \quad n = 2,3,\ldots \ (u_j, \text{ Lemma 10.6'daki gibi})$$

dir.

11. $C_\beta(\gamma)$ SINIFI

TANIM 11.1. $0 \le \beta < 1$ ve $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere D'de

$$(11.1) \qquad \Re\, e^{i\gamma}\left\{ 1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > \beta$$

olacak şekilde β,γ varsa f(z) fonksiyonuna $C_\beta(\gamma)$ sınıfına aittir denir.
$\gamma = 0$ için β.mertebeden konveks, $\beta = 0$ içinde $zf'(z)$ γ-spiral olan fonksiyonların sınıfı elde edilir.

LEMMA 11.1. $C_\beta(\gamma)$ sınıfının konvekslik yarıçapı,

$$(11.2) \qquad \left\{ (\cos\gamma-\beta) + \sqrt{\beta^2+\sin^2\gamma} \right\}^{-1}$$

dir.

İSPAT. Tanım 11.1. 'den,

$$(11.3) \qquad 1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} = e^{-i\gamma}\left[(\cos\gamma-\beta)p(z) + i\sin\gamma + \beta \right]$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ vardır. $p(z) = u(z) + iv(z)$ alarak, (11.3) ün reel kısmı,

$$(\cos\gamma-\beta)\left[u(z)\cos\gamma + v(z)\sin\gamma \right] + \sin^2\gamma + \beta\cos\gamma$$

olarak bulunur. Robertson [41] de, $u(z) + iv(z) \in P$ ise,

$$u(z)\cos\gamma + v(z)\sin\gamma \ge \frac{(1+|z|^2)\cos\gamma-2|z|}{1-|z|^2}$$

olduğunu göstermiştir. Bu sonuçtan yararlanarak

$$\Re\left\{ 1 + z\,\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \ge \left[1 + |z|(2\beta-2\cos\gamma) + |z|^2(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma-2\beta\cos\gamma)\right]\left[1-|z|^2 \right]^{-1}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sağ yanı

$|z| < \left[(\cos\gamma-\beta) + \sqrt{\beta^2+\sin^2\gamma} \right]^{-1}$ için pozitiftir.

TEOREM 11.1. $-\pi/2 < \gamma-\sigma < \pi/2$, $0 \le \rho < 1$ olmak üzere $\alpha = \rho e^{i\sigma}$ olsun. $f(z)$ in $C_\beta(\gamma)$ ya ait olması için gerek ve yeter şart $\delta = \cos(\gamma-\sigma) - \rho\cos\gamma + \sigma\beta$ için

(11.4) $$f_\alpha(z) = \int_0^z (f'(\xi))^\alpha \, d\xi \in C_\delta(\gamma-\sigma)$$

olmasıdır.

İSPAT. $f_\alpha(z)$ in birinci ve ikinci turevleri

$f'_\alpha(z) = (f'(z))^\alpha$, $f''_\alpha(z) = \alpha(f'(z))^{\alpha-1} f''(z)$ dir. Buradan,

(11.5) $$1 + z\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} = \alpha\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)$$

elde ederiz.

$\alpha = \rho e^{i\sigma}$ alalım.

$$\frac{e^{i(\gamma-\sigma)}}{\rho}\left(1+z\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)}\right) = e^{i\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) + \frac{e^{i(\gamma-\sigma)}}{\rho}(1-\rho e^{i\sigma})$$

veya

$$\Re\left\{e^{i(\gamma-\sigma)}\left(1+z\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)}\right)\right\} = \rho\Re\left\{e^{i\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right\} + \cos(\gamma-\sigma)-\rho\cos\gamma$$

elde ederiz. $f(z) \in C_\beta(\gamma)$ olduğundan son eşitlik $\ge \rho\beta + \cos(\gamma-\sigma) - \rho\cos\gamma = \delta$ dir. Tanım 11.1. ile $f_\alpha(z) \in C_\delta(\gamma-\sigma)$ dır. (11.5) 'den hareketle,

$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{\alpha}\left(1+z\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)}\right) - \frac{1-\alpha}{\alpha}$ dır. $f(z) \in C_\delta(\gamma-\sigma)$ olduğundan

$\Re\left\{e^{i\gamma}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right\} \ge \frac{1}{\rho}\delta - \frac{\cos(\gamma-\sigma)}{\rho} + \cos\gamma = \beta$ dır . Yani

$f(z) \in C_\beta(\gamma)$ dir.

SONUÇ 11.1. α reel bir sayı olsun. Bu takdirde,

$$f(z) \in CV \Leftrightarrow f_\alpha(z) \in CV(1-\alpha) \text{ dir.}$$

İSPAT. Teorem 11.1.'de $\sigma = \gamma = \beta = 0$ ve $\rho = \alpha$ alarak sonucu elde ederiz.

SONUÇ 11.2. $f(z) \in CV(\beta) \Leftrightarrow f_\alpha(z) \in CV(1-\alpha(1-\beta))$ dir.

İSPAT. Teorem 11.1.'de $\sigma = \gamma = 0$ ve $\rho = \alpha$ alarak sonucu elde ederiz.

BÖLÜM 3

KONVEKS VE YILDIZIL FONKSIYONLARLA İNDİREKT OLARAK İLGİLİ FONKSIYON SINIFLARI

1. KONVEKSE YAKIN FONKSİYONLAR

TANIM 1.1. $f(z)$ fonksiyonu D'de analitik olsun. D'de

$$\Re\left\{\frac{f'(z)}{\emptyset'(z)}\right\} > 0 \tag{1.1}$$

olacak şekilde yalınkat ve konveks bir $\emptyset(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$'e konvekse yakın denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı CC ile gösterilir.
(1.1) eşitsizliği ayrıca; $h(z)$ yıldızıl olmak üzere,

$$\Re\left\{z\frac{f'(z)}{h(z)}\right\} > 0 \quad \text{veya} \quad \left|\arg\frac{f'(z)}{\emptyset'(z)}\right| < \frac{\pi}{2} \tag{1.2}$$

şeklinde de yazılabilir.
TEOREM 1.1. Her konvekse yakın fonksiyon yalınkattır.
İSPAT. (1.1) eşitsizliğinden yararlanarak, $\emptyset^{-1}(\omega)$ fonksiyonunun $H = \emptyset(D)$ konveks bölgesinde analitik olduğunu görürüz. $\varphi(\omega)=f\left(\emptyset^{-1}(\omega)\right)$ fonksiyonu,

$$\Re\,\varphi'(\omega) = \Re\,\frac{f'(z)}{\emptyset'(z)} > 0 \quad (\omega = \emptyset(z) \in H)$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $\omega_1, \omega_2 \in H$ için

$$\Re\,\frac{\varphi(\omega_2)-\varphi(\omega_1)}{\omega_1-\omega_2} = \int_0^1 \Re\,\varphi'\left(\omega_1+t(\omega_2-\omega_1)\right)dt > 0$$ dır. Sonuçta $\varphi(\omega)$, H'da yalınkat ve buradan $f(z) = \varphi\left(\emptyset(z)\right)$ D'de yalınkattır.
(1.2)'de $h(z) = z/(1-z)^2$ olarak alınırsa konvekse yakın fonksiyonların alt sınıfı bulunur. Böylece (1.2) şartı

$$\Re\left[(1-z^2)f'(z)\right] > 0 \quad (|z| < 1) \tag{1.3}$$

şeklini alır. Yalınkat bir $f(z)$ fonksiyonunun (1.3) eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart $f(D)$ nin imajiner eksene paralel her doğruyla arakesitinin ya bir aralık ya da boş olmasıdır. Böyle fonksiyonlara imajiner eksen yönünde konveks fonksiyonlar denir. Örnek olarak $f(z) = z/(1-z^2)$ fonksiyonu bu sınıfa aittir. $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ fonksiyonu imajiner eksen yönünde konveks ise $n = 2,3,\ldots$ için $|a_n| \leq 1$ dir.

TEOREM 1.2. [17] $f(z)$, D'de analitik ve $f'(z) \neq 0$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun CC sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart her $r \in (0,1)$ ve $0 \leq \theta_2-\theta_1 \leq 2\pi$ yi gerçekleyen her θ_1, θ_2 çifti için

$$(1.4) \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} d\theta > -\pi$$

olmasıdır.

Teorem 1.2.'de, $f'(z) \neq 0$ koşulu gereklidir. Aksi takdirde $f(z) = z^n$ $(n \geq 1)$ fonksiyonu (1.4) eşitsizliğini gerçekler fakat yalınkat değildir ve bu yüzdende konvekse yakın olamaz.

TEOREM 1.3. [38] $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_nz^n$ D'de konvekse yakın ise,

$$(1.5) \qquad |a_n| \leq n\,, \quad n = 2,3,\ldots$$

dir.

TANIM 1.2. $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_nz^n$, $(a_1 \neq 0)$ D'de analitik ve $z \neq 0$ için $f(z) \neq 0$ olsun. $f(z)$'in yıldızıla yakın olması için gerek ve yeter şart,

$$(1.6) \qquad \Re \left\{ \frac{f(z)}{\psi(z)} \right\} \geq 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen $\psi(z) \doteq \sum_{1}^{\infty} \sigma_nz^n$ yalınkat yıldızıl fonksiyonunun var olmasıdır. Yıldızıla yakın fonksiyonların sınıfı CST ile gösterilir.

Tanım 1.1. ve Tanım 1.2.'den şu sonuçlar elde edilir:

1) $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 \neq 0)$ D'de analitik olsun. Bu takdirde,

(1.7) $$f(z) \in CST \Leftrightarrow F(z) = \int_0^z \frac{f(z)}{z} \in CC$$

dir.

2) $F(z)$, D'de analitik ve $F'(z) \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$F(z) \in CC \Leftrightarrow f(z) = zF'(z) \in CST$$

dir.

TEOREM 1.4. $f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$ $(a_1 \neq 0)$ D'de analitik ve $z \neq 0$ için $f(z) \neq 0$ olsun. O halde f(z)'in yıldızıla yakın olması için gerek ve yeter şart her $\theta_1 < \theta_2$ ve her $0 \leq r < 1$ için

(1.8) $$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re \left[re^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right] d\theta > -\pi$$

olmasıdır.

TEOREM 1.5. $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n \in CST$ ise,

(1.9) $$|a_n| \leq n^2 \quad (n = 2,3,\dots)$$

dir.

Teorem 1.4. ve 1.5. 'in ispatları konvekse yakın fonksiyonlar için verilen teoremler ve (1.7) den görülür.

TEOREM 1.6. f(z)'in CC olması için gerek ve yeter koşul her $z_1, z_2 \in D$ için

(1.10) $$\Re \left\{ \frac{f(z_2)-f(z_1)}{\emptyset(z_2)-\emptyset(z_1)} \right\} > 0$$

olacak şekilde bir $\emptyset(z)$ konveks fonksiyonunun var olmasıdır.

TANIM 1.3. f(z) fonksiyonuna

(1.11) $$\Re \left\{ \frac{f'(z)}{e^{i\beta}\emptyset'(z)} \right\} > 0$$

olacak şekilde bir $\emptyset(z) \in CV$ varsa, β argümanlı konvekse yakın denir. β argümanlı konvekse yakın fonksiyonların sınıfı CC_β ile gösterilir.

TEOREM 1.7. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, β argümanlı konvekse yakın bir fonksiyon ise $n = 2,3,\ldots$ için

(1.12) $$|a_n| \le 1 + (n-1)\cos\beta \ .$$

İSPAT. $f(z) \in CC_\beta$ olduğundan bir $\emptyset(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ konveks fonksiyonu için $\Re \dfrac{f'(z)}{e^{i\beta}\emptyset'(z)} > 0$ dır. Buradan,

(1.13) $$\frac{f'(z)}{e^{i\beta}\emptyset'(z)} = \cos\beta - i\sin\beta + \sum_{1}^{\infty} q_n z^n$$

pozitif reel kısma haizdir. (1.13), $p(z) \in P$ olmak üzere,

(1.14) $$\frac{1}{\cos\beta}\left(\frac{f'(z)}{e^{i\beta}\emptyset'(z)} + i\sin\beta \right) = 1 + \sum_{1}^{\infty} p_n z^n = p(z)$$

şeklinde yazılabilir. (1.14)'den,

(1.15) $$f'(z) = e^{i\beta}\phi'(z)\left(\cos\beta - i\sin\beta + \cos\beta \sum_{1}^{\infty} p_n z^n \right)$$

elde edilir. (1.15)'de $|p_n| \le 2$ ve konveks bir fonksiyon için bilinen gerçeklerden hareketle

(1.16) $$f'(z) \ll \frac{1}{(1-z)^2}\left(1 + \cos\beta \frac{2z}{1-z} \right)$$

elde ederiz. (1.16)'nın sağ tarafında z^{n-1} in katsayısı $n+(\cos\beta)n(n-1)$ ve $f'(z)$ in z^{n-1}'inci katsayısı na_n olduğundan,

$n|a_n| \le n + n(n-1)\cos\beta$ yani $|a_n| \le 1 + (n-1)\cos\beta$ dir.

TANIM 1.4. [4] $f(z)$, D'de analitik, $f(0) = 0$ ve $f(z)\frac{f'(z)}{z} \neq 0$ olsun. $0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \theta_1 + 2\pi$, $z = re^{i\theta}$ $(r < 1)$ olmak üzere,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re \left\{ \alpha\left(1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) + (1-\alpha)\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \right\} d\theta > -\pi \quad (\alpha \ge 0) \tag{1.17}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna α-konvekse yakın fonksiyon denir. Bu sınıf $P(\alpha)$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremden faydalanmayla, α-konvekse yakın fonksiyonların $\frac{1}{\alpha}$ tipli Bazilevic fonksiyonu olduğunu gösterelim.

TEOREM 1.8. $f(z)$'in $P(\alpha)$'ya ait olması için gerek ve yeter şart,

$$\Re \left\{ \left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \right\} > 0 \tag{1.18}$$

olacak şekilde D'de yalınkat ve yıldızıl bir $g(z)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

$f \in P(\alpha)$ ise, (1.18) gerçekleşir. Böylece bir $\Re\, h(z) > 0$, $h(0) = 1$ için $\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = h(z)$ dir. Buradan

$$\left(zf'(z)\right)^{\alpha} = \frac{g(z)h(z)}{f(z)^{1-\alpha}} \text{ veya}$$

$$zf'(z) = \frac{g^{1/\alpha}(z)h^{1/\alpha}(z)}{f(z)^{(1/\alpha)-1}} = f(z)^{1-(1/\alpha)}\, g(z)^{1/\alpha}\{h(z)\}^{1/\alpha}$$

elde ederiz ki ileriki bölümde görüleceği gibi $f(z)$ fonksiyonu $\frac{1}{\alpha}$ -tipli bir Bazilevic fonksiyonudur.

TANIM 1.5. D'de $f'(z) \neq 0$, $f(0) = 0$, $0 < |z| < 1$'de $f(z) \neq 0$ koşulunu gerçekleyen bir $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonuna N sınıfına aittir denir.

TANIM 1.6. [18] $f(z) \in N$ fonksiyonunun alfa-spiral konvekse yakın olması için gerek ve yeter koşul

$$J(\alpha,\beta,f) = (e^{i\beta} - \alpha\cos\beta) z \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha\cos\beta\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \tag{1.19}$$

olmak üzere

$0 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \theta + 2\pi$, $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, $\alpha \ge 0$ ve $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ olduğunda,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re\, J(\alpha,\beta,f)\, d\theta > -\pi\cos\beta \tag{1.20}$$

olmasıdır.

Böyle fonksiyonların sınıfı $P(\alpha,\beta)$ ile gösterilir. Özellikle $P(0,0)$ yıldızıla yakın, $P(1,0)$ konvekse yakın ve $P(\alpha,0) = P(\alpha)$ α-konvekse yakın fonksiyonların sınıfıdır.

TANIM 1.7. [9] D'de analitik bir $f(z)$ fonksiyonu $f(z)f'(z)/z \neq 0$ koşulunu gerçeklesin. Bir α pozitif reel sayısı için,

$$\Re\left[(1-\alpha) z \frac{f'(z)}{\emptyset(z)} + \alpha \frac{(zf'(z))'}{\emptyset'(z)} \right] > 0 \tag{1.21}$$

koşulunu gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ yıldızıl fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonuna C_α sınıfına aittir denir.

LEMMA 1.2. $\alpha \ge 0$ olsun. D'de $F(z)$ yıldızıl, $N(z)$ analitik fonksiyonları $N(0) = F(0) = 0 = N'(0) - 1 = F'(0)-1$ koşullarını gerçeklesin. D birim diskinde,

$$\Re\left[(1-\alpha) \frac{N(z)}{F(z)} + \alpha \frac{N'(z)}{F'(z)} \right] > 0 \tag{1.22}$$

ise, $\Re\left(\frac{N(z)}{F(z)}\right) > 0$ dır.

İSPAT. D'de $\omega(z)$ analitik fonksiyonunu

$$(1.23) \qquad \frac{N(z)}{F(z)} = \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}$$

ile tanımlayalım. O halde $\omega(0) = 0$ ve $\omega(z) \neq -1, z \in D$ dir. Bir $\zeta \in D$ için $|\omega(\zeta)| = 1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$(1.24) \qquad \zeta\omega'(\zeta) = k\omega(\zeta)$$

olsun.

$$(1.25) \qquad \psi(z) = (1-\alpha)\frac{N(z)}{F(z)} + \alpha\frac{N'(z)}{F'(z)}$$

eşitliğinde (1.23), (1.24) ü kullanarak,

$$\psi(\zeta) = \frac{1-\omega(\zeta)}{1+\omega(\zeta)} - \frac{2\alpha k\omega(\zeta)}{\left(1+\omega(\zeta)\right)^2}\,\frac{F(\zeta)}{\zeta F'(\zeta)}$$

elde ederiz.

$\Re\dfrac{1-\omega(\zeta)}{1+\omega(\zeta)} = 0$, $\Re\dfrac{F(\zeta)}{\zeta F'(\zeta)} > 0$ ve $\omega(\zeta)/\left(1+\omega(\zeta)\right)^2$ reel ve pozitif olduğundan $\Re\,\psi(\zeta) \leq 0$ dır. Bu da hipoteze aykırıdır. O halde D'de $\Re\left(N(z)/F(z)\right) > 0$ dır.

Lemma 1.2.'de $F(z) = \emptyset(z)$ ve $N(z) = zf'(z)$ alarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 1.9. $\alpha \geq 0$ ve $f(z) \in C_\alpha$ ise $f(z)$, D'de konvekse yakındır.

TEOREM 1.10 $\alpha > \beta \geq 0$ ise $C_\alpha \subset C_\beta$ dir.

İSPAT. $\beta = 0$ ise Teorem 1.9. ile $C_\beta \subset C_0$ dır. $\beta \neq 0$ ve $f(z) \in C_\alpha$ olsun. Bu durumda (1.21)'i gerçekleyen bir $\emptyset(z)$ yıldızıl fonksiyonu vardır. Ayrıca Lemma 1.2. ile D'de

$$\Re\left(z\,\frac{f'(z)}{\varnothing(z)} \right) > 0 \tag{1.26}$$

dır. (1.21) ve (1.26)'dan,

$$(1-\beta)z\frac{f'(z)}{\varnothing(z)} + \beta\frac{(zf'(z))'}{\varnothing(z)}$$
$$= \frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)z\frac{f'(z)}{\varnothing(z)} + (1-\alpha)z\frac{f'(z)}{\varnothing(z)} + \alpha\frac{(zf'(z))'}{\varnothing'(z)} \right]$$

buluruz. Her iki yanın reel kısmını alarak teoremi göstermiş oluruz.

TEOREM 1.11. $f(z)$ fonksiyonunun C_α ya ait olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \neq 0$ ve $c = \frac{1}{\alpha}-1$ olmak üzere

$$f'(z) = \frac{1+c}{z[\varnothing(z)]^c}\int_0^z [\varnothing(\zeta)]^c\varnothing'(\zeta)P(\zeta)d\zeta \tag{1.27}$$

koşulunu gerçekleyen $\varnothing(z) \in ST$ ve $P(z) \in P$ fonksiyonlarının var olmasıdır.

$$f'(z) = \left(\varnothing(z)/z \right) P(z) . \tag{1.28}$$

İSPAT. $\alpha > 0$ olmak üzere $f(z) \in C_\alpha$ olsun. (1.21)'de parantez içindeki ifade D'de pozitif reel kısımlı bir $p(z)$ fonksiyonuna eşittir. Eşitliğin her iki yanını $\alpha^{-1}[\varnothing(z)]^c\varnothing'(z)$ ile çarparak

$$(czf'(z))(\varnothing(z))^{c-1}\varnothing'(z) + (\varnothing(z))^c(zf'(z))'$$
$$= (1+c)[\varnothing(z)]^c\varnothing'(z)P(z) \tag{1.29}$$

elde ederiz. (1.29)'un sol tarafı $zf'(z)(\varnothing(z))^c$ 'nin türevidir. Böylece (1.29)'un her iki yanının z'e göre integralini alarak

(1.27) yi elde ederiz. Tersine f(z),(1.27)'yi gerçeklerse kolayca $f(z) \in C_{\alpha}$ olduğu görülür.

TANIM 1.8. D birim diskinde analitik,

$$(1.30)\qquad f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı A_n olsun.

A_n sınıfına ait bir f(z) fonksiyonuna, bir α $(0 \leq \alpha < 1)$ için

$$(1.31)\qquad |\, f'(z) - 1 \,| < 1-\alpha$$

koşulunu gerçeklerse $R_n(\alpha)$ sınıfına denir.
$f(z) \in R_n(\alpha) \Rightarrow \Re\, f'(z) > \alpha$ olduğundan , $R_n(\alpha)$ sınıfı α. mertebeden konvekse yakın fonksiyonların bir alt sınıfıdır.

LEMMA 1.4. $\omega(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \ldots,(\ \omega(z) \neq 0)$ fonksiyonu D'de regüler olsun. $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ $(\ r_0 < 1)$ için $|\omega(z_0)| = \max\limits_{|z| \leq r_0} |\omega(z)|$ ise m reel ve $m \geq n \geq 1$ olmak üzere, $z_0 \omega'(z_0) = m\omega(z_0)$ dır.

TEOREM 1.12. $R_n(\alpha)$ sınıfında (1.30) ile belirli f(z) fonksiyonu için

$$(1.32)\qquad \frac{f(z)}{z} \prec 1 + \frac{(1-\alpha)z}{n+1}$$

dir.
İSPAT. $f(z) \equiv z$ için teorem doğrudur. O halde $f(z) \not\equiv z$ varsayalım. D birim diskinde, $\omega(z)$ analitik fonksiyonu

$$(1.33)\qquad \frac{f(z)}{z} = 1 + \frac{(1-\alpha)}{n+1}\omega(z)$$

ile belirlidir. Buradan $\omega(z) \neq 0$ ve $\omega(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + ..$ dir. Her $z \in D$ için $|\omega(z)| < 1$ olduğunu göstererek sonuca ulaşacağız. Bu eşitsizlik doğru olmasın. O halde Lemma 1.4'den $|\omega(z)| = 1$ eşitliğini gerçekleyen bir $z_0 \in D$ bulabiliriz. Böylece m reel ve $m \geq n \geq 1$ için $z_0\omega'(z) = m\omega(z_0)$ dır. (1.33)'den,

$$f'(z) = 1 + \frac{(1-\alpha)\{z\omega'(z)+\omega(z)\}}{n+1} \tag{1.34}$$

bulunur. z_0 noktasında,

$$\begin{aligned} f'(z_0)-1 &= \frac{(1-\alpha)\{z_0\omega'(z_0)+\omega(z_0)\}}{n+1} \\ &= \frac{(1-\alpha)(m+1)\omega(z_0)}{n+1} \end{aligned} \tag{1.35}$$

yani,

$$|f'(z_0)-1| = \frac{(1-\alpha)(m+1)}{n+1} \geq 1-\alpha$$

sonucuna varılır ki bu da f(z)'in $R_n(\alpha)$ sınıfına ait olmasına aykırıdır. O halde $|\omega(z)| < 1$, $z \in D$ dir. Sabordinasyon prensibi tanımından (1.32) elde edilir.

2. DÖNME DEĞERİ SINIRLI OLAN FONKSİYONLAR.

TANIM 2.1. $f(z)$, D'de regüler ve $f'(z) \neq 0$ olsun.
Her $r \in (0,1)$ için.

$$\int_0^{2\pi} \left| \Re\left(1 + re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)\right| d\theta \leq k\pi \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir k (≥ 2) sabiti bulunabiliyorsa $f(z)$'e dönme değeri sınırlı fonksiyon denir. (2.1)'i gerçekleyen fonksiyonların sınıfı V_K ile gösterilir.

$k_1 < k_2$ ise $V_{k_1} \subset V_{k_2}$ dir.

1917'de Loewner [21] dönme değeri sınırlı fonksiyonları tanıtmıştır. Daha sonra Paatero [31], bu sınıfta bir çok problemle ilgilenmiştir.

TEOREM 2.1. [31] $f(z) \in V_k$ ise $S = \frac{(k-2)}{2}$ ve $T = \frac{(k+2)}{2}$ olmak üzere,

$$\frac{(1-r)^S}{(1+r)^T} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r)^S}{(1-r)^T} \tag{2.2}$$

dir.

TEOREM 2.2. [31] $f(z) \in V_k$ ise,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{k}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{k/2} - \frac{1}{k} \tag{2.3}$$

dir.

TEOREM 2.3 $f(z) \in V_k$, $2 \leq k < \infty$ olsun. Bu takdirde $\alpha \in D$ olmak üzere,

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)} \tag{2.4}$$

ile tanımlanan $F(z) \in V_k$ dır.

İSPAT. $f(z) \in V_k$ olsun. $\rho \in (0,1)$ bir reel sayı ve $\alpha \in D$ olsun.

$\zeta = \dfrac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}$ olmak üzere

$$(2.5) \qquad F_\rho(z) = \frac{f(\rho\zeta)-f(\rho\alpha)}{\rho f'(\rho\alpha)(1-|\alpha|^2)}$$

ile tanımlayalım.

$F_\rho(z)$, $|z| \le 1$'de regüler, $F'_\rho(0) = 1$ ve $F'_\rho(z) \neq 0$ dır.

$$1 + z\frac{F''_\rho(z)}{F'_\rho(z)} = \left\{ 1 + \rho\zeta\frac{f''(\rho\zeta)}{f'(\rho\zeta)} \right\} \frac{(1-|\alpha|^2)z}{(\alpha+z)(1+\bar{\alpha}z)} + \frac{\alpha-\bar{\alpha}z^2}{(\alpha+z)(1+\bar{\alpha}z)}$$

elde edilir.

$z = e^{i\theta}$, $\dfrac{\alpha+e^{i\theta}}{1+\bar{\alpha}e^{i\theta}} = e^{i\phi}$, $\dfrac{1-|\alpha|^2}{|\alpha+e^{i\theta}|^2}\,d\theta = d\phi$ olsun. Bu taktirde

$$\Re\left\{ 1 + e^{i\theta}\frac{F''_\rho(e^{i\theta})}{F'_\rho(e^{i\theta})}\right\}d\theta = \Re\left\{ 1 + \rho e^{i\phi}\frac{f''(\rho e^{i\phi})}{f'(\rho e^{i\phi})}\right\}d\phi \qquad \text{dir.}$$

$$\int_0^{2\pi} \left|\Re\left\{ 1 + e^{i\theta}\frac{F''_\rho(e^{i\theta})}{F'_\rho(e^{i\theta})}\right\}\right|d\theta = \int_0^{2\pi} \left|\Re\left\{ 1 + \rho e^{i\phi}\frac{f''(\rho e^{i\phi})}{f'(\rho e^{i\phi})}\right\}\right|d\phi \le k\pi$$

olur.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\Re\left\{ 1 + re^{i\theta}\frac{F''_\rho(re^{i\theta})}{F'_\rho(re^{i\theta})}\right\}\right|d\theta$ integrali r'nin artan bir fonksiyonu olduğundan, bu son integral $0 \leq r < 1$ için üstten $k\pi$ ile sınırlıdır. Sonuç olarak, $F(z) = \lim_{\rho\to 1} F_\rho(z)$ olsun. Buradan,

$$\int_0^{2\pi} |\Re \left\{ 1 + re^{i\theta} \frac{F''(re^{i\theta})}{F'(re^{i\theta})} \right\}| d\theta \leq k\pi$$ olur ki, bu da $F(z)$'in V_k'ya ait olduğunu gösterir.

TANIM 2.2. $p_\varrho(z)$, D'de regüler olsun. $k \geq 2$ ve $0 \leq \varrho < 1$ için

$$(2.6) \qquad \int_0^{2\pi} |\frac{\Re\, p_\varrho(z)-\varrho}{1-\varrho}| d\theta \leq k\pi \quad , \; p_\varrho(0) = 1$$

ise $p_\varrho(z)$ fonksiyonuna $P_k(\varrho)$ sınıfına aittir denir.

TANIM 2.3. $f_\varrho(z)$, D'de $f_\varrho(0) = 0, f'_\varrho(0) = 1$ koşullarını gerçekleyen, regüler bir fonksiyon olsun.

$$(2.7) \qquad 1 + z\frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} \in P_k(\varrho), \; 0 \leq \varrho < 1$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna $V_k(\varrho)$ sınıfına aittir denir.
$\varrho = 0$ ise $V_k(0) = V_k$ sınıfı elde edilir. $V_k(\varrho)$, ϱ. mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfını genelleştiren bir sınıftır.

TANIM 2.4. $f_\varrho(z)$, D'de $f_\varrho(0) = 0, f'_\varrho(0) = 1$ koşullarını gerçeklesin.

$$(2.8) \qquad z\frac{f'_\varrho(z)}{f_\varrho(z)} \in P_k(\varrho)$$

ise $f_\varrho(z)$ fonksiyonuna $U_k(\varrho)$ sınıfına aittir denir. $U_k(\varrho)$ sınıfı, ϱ. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfını genelleştiren bir sınıftır.

LEMMA 2.1. $p_\varrho(z) \in P_k(\varrho)$ ise,

(2.9) $$p_\varrho(z) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+(1-2\varrho)ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dm(t)$$

olacak şekilde,

(2.10) $$\int_0^{2\pi} dm(t) = 2 \quad , \int_0^{2\pi} |dm(t)| \le k$$

ile belirli $[0,2\pi]$'de sınırlı değişimli bir fonksiyon vardır.

İSPAT. $f(z) = \dfrac{p_\varrho(z)-\varrho}{1-\varrho} = u(z) + iv(z)$ olsun.

Bu takdirde,

$$u(z) = \Re f(z) = \Re \left\{ \frac{p_\varrho(z)-\varrho}{1-\varrho} \right\} \text{ olur.}$$

$u(0) = 1$ ve $v(0) = 0$ dır.

$p_\varrho(z) \in P_k(\varrho)$ olduğundan,

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\Re\, p_\varrho(z)-\varrho}{1-\varrho} \right| d\theta \le k\pi \ , \ k \ge 2 \ , \ 0 \le |z| = r < 1$$

dir.

$\varrho < 1$ için $f(z)$, D'de regülerdir. [32] den $[0,2\pi]$'de $\int_0^{2\pi} dm(t) = 2$, $\int_0^{2\pi} |dm(t)| \le k$ ile belirli sınırlı değişimli bir $m(t)$ fonksiyonu

için $f(z) = \dfrac{p_\varrho(z)-\varrho}{1-\varrho} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dm(t)$, $|z| < 1$ dir.

Böylece, $p_\varrho(z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+(1-2\varrho)ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dm(t)$ dir.

LEMMA 2.2. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(2.11) \qquad f'_\varrho(z) = \{ f'(z) \}^{(1-\varrho)}$$

olacak şekilde bir $f(z) \in V_k$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. Paatero [32], $f(z) \in V_k$ olması için gerek ve yeter şartın

$$(2.12) \qquad f'(z) = \exp\{ -\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{-it})dm(t) \}$$

olacak şekilde (2.10)'u gerçekleyen $[0,2\pi]$'de sınırlı değişimli bir $m(t)$ fonksiyonunun var olması gerektiğini göstermiştir. (2.12) den $1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dm(t)$ dir. Ayrıca $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ olduğundan, (2.7) gerçeklenir. Yani $1 + z\dfrac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} = P_\varrho(z)$ eşitliğini gerçekleyen bir $P_\varrho(z) \in P_k(\varrho)$ vardır. Lemma 2.1.'den

$$\left\{ 1 + z\frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} - \varrho \right\} = \frac{(1-\varrho)}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, dm(t) = (1-\varrho)\left\{ 1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right\}$$

buluruz. Son eşitlikten $\dfrac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} = (1-\varrho)\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ elde ederiz. Integrasyonla Lemma gösterilir.

Lemma 2.1. ve Lemma 2.2.'den şu teorem elde edilir.

TEOREM 2.4. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho) \Leftrightarrow f'_\varrho(z) = \exp\{-(1-\varrho)\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{-it})dm(t)\}$ olacak şekilde (2.10)'u gerçekleyen bir $m(t)$ vardır.

UYARI: $k = 2$ ise $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ için,

$\Re \{ 1 + z\dfrac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} \} > \varrho$ dır. Böylece $V_k(\varrho)$ sınıfı $k = 2$ olduğunda ϱ. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfını içerir.

SONUÇ 2.1.

$$f_\varrho(z) \in V_k(\varrho) \Leftrightarrow f'_\varrho(z) = \frac{\{f'_{\varrho_1}(z)\}^{(\frac{k}{4}+\frac{1}{2})}}{\{f'_{\varrho_2}(z)\}^{(\frac{k}{4}-\frac{1}{2})}} \tag{2.13}$$

olacak şekilde $f_{\varrho_i}(z) \in CV(\varrho)$ $(i=1,2)$ vardır.

İSPAT. $f_\varrho(z)$ için verilen integral gösterilişinden sonuç elde edilir.

SONUÇ 2.2. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ ise, $k \geq 2$ için

$$|\arg f'_\varrho(z)| \leq (1-\varrho)k\sin^{-1}r \quad , \quad |z| = r \tag{2.14}$$

dir.

İSPAT. Lemma 2.2 ve $f_\varrho(z) \in V_k$ ise $|\arg f'_\varrho(z)| \leq k\sin^{-1}r$ gerçeğinden hareketle (2.14) ü elde ederiz.

LEMMA 2.3. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ ise, $|\alpha| < 1$ için

$$F'_\varrho(z) = \frac{f'\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)}{f'_\varrho(\alpha)(1+\bar{\alpha}z)^{2(1-\varrho)}} \quad , \ z \in D \tag{2.15}$$

ile belirli $F_\varrho(z)$ fonksiyonu $V_k(\varrho)$ ya aitdir.

İSPAT. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ olduğundan Lemma 2.2.'den

$f'_\varrho(z) = \{f'(z)\}^{(1-\varrho)}$ olacak şekilde bir $f(z) \in V_k$ vardır.

$f(z) \in V_k$ ise,(2.4) ile belirli $F(z) \in V_k$ dır. Buradan,

$$F'_{\varrho}(z) = \{F'(z)\}^{1-\varrho} = \frac{\{f'(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z})\}^{1-\varrho}}{\{f'(\alpha)\}^{(1-\varrho)}(1+\bar{\alpha}z)^{2(1-\varrho)}}$$

$$= \frac{f'_{\varrho}(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z})}{f'_{\varrho}(\alpha)(1+\bar{\alpha}z)^{2(1-\varrho)}}$$

olacak şekilde bir $F_{\varrho}(z) \in V_k(\varrho)$ vardır.

TEOREM 2.5. $f_{\varrho}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \in V_k(\varrho)$ olsun. Bu takdirde

$$|A_2| \le \frac{k(1-\varrho)}{2}, \quad k \ge 2 \tag{2.16}$$

dir.

İSPAT. $f_{\varrho}(z) \in V_k(\varrho)$ olduğundan, $f'_{\varrho}(z) = \{f'(z)\}^{(1-\varrho)}$ olacak biçimde bir $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots \in V_k$ vardır. (2.11) eşitliği

$$1 + 2A_2z + 3A_3z^2 + \ldots = 1 + 2(1-\varrho)a_2z + [3a_3(1-\varrho) - 2\varrho(1-\varrho)a_2^2]z^2 + \ldots$$

şeklinde yazılabilir. Katsayıları karşılaştırarak ve [43] den faydalanarak

$$|A_2| = (1-\varrho)|a_2| \le (1-\varrho)\frac{k}{2}, \quad k \ge 2$$

elde ederiz.

TEOREM 2.6. $f_{\varrho}(z) \in V_k(\varrho)$ olsun. Bu takdirde $f_{\varrho}(z)$,

$$|z| \le R_{\varrho} = \frac{k(1-\varrho) - \sqrt{k^2(1-\varrho)^2 - 4(1-2\varrho)}}{2(1-2\varrho)}$$

için konvekstir. Ayrıca $f_{\varrho}(z)$, $|z| \le \dfrac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ için ϱ. mertebeden konvekstir.

İSPAT. $f_\varrho(z) \in V_k(\varrho)$ olsun. (2.15) ile belirli $F_\varrho(z)$ fonksiyonu $V_k(\varrho)$'a aittir. (2.16)'dan yararlanarak,

$$\left| \frac{F''_\varrho(0)}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''_\varrho(\alpha)}{f'_\varrho(\alpha)} (1-|\alpha|^2) - 2(1-\varrho)\bar{\alpha} \right| \le \frac{k(1-\varrho)}{2}, \quad |\alpha| < 1$$

elde ederiz. Böylece

$$\left| \frac{f''_\varrho(\alpha)}{f'_\varrho(\alpha)} - \frac{2(1-\varrho)\bar{\alpha}}{1-|\alpha|^2} \right| \le \frac{(1-\varrho)k}{1-|\alpha|^2}$$

eşitsizliğindeki α, D'de keyfi bir kompleks sayı olduğundan α yı z ile değiştirerek eşitsizlik

$$\left| z \frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} - \frac{2(1-\varrho)|z|^2}{1-|z|^2} \right| \le \frac{k(1-\varrho)|z|}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1 \tag{2.17}$$

şeklini alır.

(2.17)'den $\Re \left\{ 1 + z \frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} \right\} \ge \frac{1-k(1-\varrho)r+(1-2\varrho)r^2}{1-r^2}$, $|z| = r$ dir.

Sonuçta $|z| = r < R_\varrho = \dfrac{(1-\varrho)k-\sqrt{k^2(1-\varrho)^2-4(1-2\varrho)}}{2(1-2\varrho)}$ için

$\Re \left\{ 1 + z \frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} \right\} > 0$ dır. Ayrıca $1 - kr + r^2 > 0$ yani

$r \le \dfrac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ için $\Re \left\{ 1 + z \frac{f''_\varrho(z)}{f'_\varrho(z)} \right\} > \varrho$ bulunur.

Bu eşitsizlikler

$$f'_{\varrho}(z) = \frac{(1-z)^{(k/2-1)(1-\varrho)}}{(1+z)^{(k/2+1)(1-\varrho)}} \tag{2.18}$$

ile belirli $f_{\varrho}(z)$ için kesindir.

SONUÇ 2.2. $f_{\varrho}(z) \in V_k(\varrho)$ olsun. O halde $f_{\varrho}(z)$,

$$\varrho \geq \frac{k+1}{k+2} \tag{2.19}$$

için yalınkattır.

İSPAT. $f_{\varrho}(z) \in V_k(\varrho)$ olduğundan, (2.17)'den

$$\left| \frac{f''_{\varrho}(z)}{f'_{\varrho}(z)} \right| \leq \frac{(k+2|z|)(1-\varrho)}{(1-|z|^2)} < \frac{(k+2)(1-\varrho)}{(1-|z|^2)}$$

bulunur. Oysa bir $\beta \leq 1$ için D'de $\left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{\beta}{1-|z|^2}$

gerçekleşiyorsa, $F(z)$'in D'de yalınkat olduğu gerçeğinden hareketle, $f_{\varrho}(z)$'de $(k+2)(1-\varrho) \leq 1$ için yani $\varrho \geq \frac{k+1}{k+2}$ için D'de yalınkattır.

$V_k(\varrho)$ ve $U_k(\varrho)$ sınıflarının tanımlarından faydalanmayla aşağıdaki teorem ve sonuçlara ulaşılır.

TEOREM 2.7. [34] $f(z) \in V_k(\varrho) \Leftrightarrow zf'_{\varrho}(z) \in U_k(\varrho)$

SONUÇ 2.3.

$$f_{\varrho}(z) \in U_k(\varrho) \Leftrightarrow f_{\varrho}(z) = z\exp\left\{-(1-\varrho)\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{-it})dm(t)\right\} \tag{2.20}$$

olacak şekilde (2.10)'u gerçekleyen, $[0,2\pi]$'de sınırlı değişimli bir $m(t)$ fonksiyonu vardır.

TEOREM 2.8. $f_{\varrho}(z) \in U_k(\varrho) \Leftrightarrow f_{\varrho}(z) = \dfrac{\{s_{\varrho_1}(z)\}^{\frac{k}{4}+\frac{1}{2}}}{\{s_{\varrho_2}(z)\}^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}}$

olacak şekilde $S_{\varrho_i}(z) \in ST(\varrho)$ $(i = 1,2)$ fonksiyonları vardır.

TEOREM 2.9. $f_{\varrho}(z) \in U_k(\varrho)$ ise, $|z| = r < 1$ için

$$(2.21) \qquad r\left\{ \frac{(1-r)^{\frac{k}{2}-1}}{(1+r)^{\frac{k}{2}+1}} \right\}^{(1-\varrho)} \le |f_{\varrho}(z)| \le r\left\{ \frac{(1+r)^{(\frac{k}{2}-1)}}{(1-r)^{(\frac{k}{2}+1)}} \right\}^{(1-\varrho)}$$

dir.

TANIM 2.5. D'de regüler ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını gerçekleyen fonksiyonların sınıfı A olsun.

TANIM 2.6. $f(z) \in A$ fonksiyonu D'de $f'(z) \neq 0$ koşulunu sağlasın. $b \in \mathbb{C}$ olmak üzere, her $z = re^{i\theta}$ için

$$(2.22) \qquad \int_0^{2} \left| \Re\left(1 + \frac{1}{b}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right| d\theta \le k\pi$$

eşitsizliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonuna $V_k(b)$ sınıfına aittir denir. $V_k(b)$ sınıfının fonksiyonlarına b.mertebeden dönme değeri sınırlı fonksiyonlar denir.

b ve k nın farklı değerleri için, daha önceden bir çok yazar tarafından çalışılmış alt sınıflar elde edilir. Örnek olarak, $V_k(1)$, V.Paatero [31] tarafından tanıtılmış olan dönme değeri sınırlı V_k fonksiyonlar sınıfıdır. $V_2(b)$, Wiatrowski [51] tarafından tanıtılmış olan b.mertebeden $(b \in \mathbb{C})$ konveks fonksiyonların sınıfıdır.

LEMMA 2.4. $f(z) \in V_k(b)$ ise,

$$(2.23) \qquad f'(z) = \exp\left\{ -b\int_0^{2\pi} \log(1-ze^{it})dm(t) \right\}$$

olacak şekilde (2.10)'u gerçekleyen bir $m(t)$ vardır.

İSPAT. $f(z) \in V_k(b)$ ise (2.22) her $z \in D_r$ için gerçeklenir. Buradan [31]'den,

$$1 + \frac{1}{b} z \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{it}}{1-ze^{it}} dm(t)$$

elde edilir.

LEMMA 2.5. $f(z) \in V_k(b)$ olması için gerek ve yeter şart ,

$$(2.24) \qquad f'(z) = [\, g'(z) \,]^{b}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in V_k(1) = V_k$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İSPAT. (2.24)'in logaritmik türevini alarak

$1 + \frac{1}{b} z \frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + z \frac{g''(z)}{g'(z)}$ eşitliğini buluruz. Bu eşitliktende

her $z = re^{i\theta}$ için,

$$\int_0^{2\pi} \left| \Re \left(1+\frac{1}{b} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \Re \left(1+z \frac{g''(z)}{g'(z)} \right) \right| d\theta$$

sonucuna ulaşırız.

LEMMA 2.6. $f(z) \in V_k(b)$ olması için gerek ve yeter şart

$$(2.25) \qquad f'(z) = \frac{[g'(z)]^{\frac{k}{4}+\frac{1}{2}}}{[h'(z)]^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}}$$

olacak şekilde $V_2(b)$'de $g(z)$ ve $h(z)$ gibi iki fonksiyonun var olmasıdır.

İSPAT. Her $m(t)$ sınırlı değişimli fonksiyonu için, $\int_0^{2\pi} du(t) \leq \frac{k}{2}+1$ ve $\int_0^{2\pi} dv(t) \leq \frac{k}{2} -1$ olmak üzere $m(t) = u(t) - v(t)$ eşitliğini sağlayan $u(t)$ ve $v(t)$ gibi iki azalmayan fonksiyon vardır. (2.23)'den faydalanarak Lemmayı kolayca elde ederiz.

TEOREM 2.10. $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 +\ldots \in V_k(b)$ ise,

(2.26) $$|a_2| \leq \frac{k}{2}|b|$$

dir. Sonuç kesindir.

İSPAT. $f(z) \in V_k(b)$ ise Lemma 2.5.'den ,

$f'(z) = [g'(z)]^b$ olacak şekilde bir $g(z) = z + b_2z^2+\ldots \in V_k(1)$ fonksiyonu vardır.

Yukarıdaki eşitliği kuvvet serisine açarak

$$1 + 2a_2z + 3a_3z^2 +\ldots = [1 + 2b_2z + 3b_3z^2 +\ldots]^b$$

buluruz. Katsayıları karşılaştırarak $a_2 = bb_2$ sonucuna ulaşırız. Oysa [27]'den, $|b_2| \leq \frac{k}{2}$ dır. Böylece $|a_2| \leq \frac{k}{2}|b|$ dir. (2.26)'da eşitlik,

(2.27) $$f'(z) = \left[\frac{(1-\varepsilon_1 z)^{\frac{k}{2}-1}}{(1-e_1z)^{\frac{k}{2}+1}}\right]^b, \quad |\varepsilon_1| = |e_1| = 1$$

şeklindeki $f(z)$ fonksiyonunda $\varepsilon_1 = -1$ ve $e_1 = 1$ değerleri için gerçeklenir.

TEOREM 2.11. $f(z) \in V_k(b)$ ve $\alpha \in D$ olsun.

$$(2.28) \qquad F'(z) = \frac{f'\left(\frac{\alpha+z}{1+\bar{\alpha}z}\right)}{f'(\alpha)(1+\bar{\alpha}z)^{2b}}, \quad F(0) = 0$$

ile belirli $F(z)$ fonksiyonu $V(b)$'ye aittir

İSPAT. $f(z) \in V_k(b)$ olsun. Lemma 2.5 ile

$f'(z) = [g'(z)]^b$ olacak şekilde $g(z) \in V_k(1)$ fonksiyonu vardır.

[43] ile, $g(z) \in V_k(1)$ ise

$$G(z) = \frac{g\left[\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right] - g(\alpha)}{g'(\alpha)(1-|\alpha|^2)}$$

ile belirli $G(z)$ fonksiyonunu $V_k(1)$ sınıfındadır.

O halde $F'(z) = [G'(z)]^b$ eşitliğini gerçekleyen bir $F(z) \in V_k(b)$ fonksiyonu vardır.

Sonuçta ,

$$F'(z) = \frac{\left[g'\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)\right]^b}{[g'(\alpha)]^b(1+\bar{\alpha}z)^{2b}} = \frac{f'\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)}{f'(\alpha)(1+\bar{\alpha}z)^{2b}}$$

elde edilir.

TEOREM 2.12. $f(z) \in V_k(b)$ ve r_0

$$(2.29) \qquad 1 - k|b|r + (2\Re\, b-1)r^2 = 0$$

denkleminin en küçük bir pozitif kökü olmak üzere $f(z)$, $|z| < r_0$ için konvekstir. Sonuç kesindir.

İSPAT. $f(z) \in V_k(b)$ ise, (2.28) ile belirli $F(z)$ fonksiyonu $V_k(b)$ ye aittir.

$F(z) = z + A_2z^2 + \ldots$ için (2.26) dan $|A_2| \le \frac{k}{2}|b|$

Oysa $A_2 = \frac{F''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left\{ (1-|\alpha|^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} - 2b\bar{\alpha} \right\}$ eşitliğinde α yı z

ile değiştirerek

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2b|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{k|b||z|}{1-|z|^2}$$

sonucuna ulaşırız. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\Re\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{1-k|b|r+(2\Re(b)-1)r^2}{1-r^2}, \quad |z| = r$$

buluruz. Böylece, r_0, (2.29) un en küçük pozitif bir kökü olmak üzere $|z| < r_0$ için,

$$\Re\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad \text{dır.}$$

Sonuç,(2.27) ile belirli fonksiyon için, $z = r$ de

$$\varepsilon_1 = \frac{r-e^{-i\delta}}{1-re^{-i\delta}}, \quad e_1 = \frac{r+e^{-i\delta}}{1+re^{-i\delta}}, \quad \delta = \arg b$$

için kesindir.

TEOREM 2.13. $|b| < \frac{1}{k}$ ise, $f(z) \in V_k(b)$ fonksiyonu D'de yalınkattır.

İSPAT. $f(z) \in V_k(b)$ ise

$$\left| (1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2b|z|^2 \right| \leq k|b||z| < k|b|$$

dir.

3. BAZİLEVİC FONKSİYONLARI

TANIM 3.1. $f(z) \in A$ olsun.

$$f(z)=\left[(\alpha+i\beta)\int_0^z p(t)g(t)^{\alpha}t^{i\beta-1}dt\right]^{1/(\alpha+i\beta)} \quad (\beta,\alpha \text{ reel ve } \alpha>0) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $p(z) \in P$ ve bir $g(z) \in ST$ varsa $f(z)$ fonksiyonuna $\beta(\alpha,\beta,g,p)$ sınıfına aittir denir. Bu sınıf kısaca B ile gösterilir.

TANIM 3.2. $\alpha > 0$ reel sayı ve $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$ D'de analitik olsun.

$$\Re\left\{ zf'(z)f^{\alpha-1}(z)/g^{\alpha}(z) \right\} > 0 \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in ST$ varsa, $f(z)$ fonksiyonuna $B(\alpha)$ sınıfına aittir denir. Bu sınıfa ait olan fonksiyonlara, α-tipli Bazilevic fonksiyonları denir.

TANIM 3.3 $\alpha > 0$ reel sayı ve $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$, D'de analitik olsun.

$$\Re\left\{ zf'(z)f^{\alpha-1}(z)/z^{\alpha} \right\} > 0 \tag{3.3}$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna $B_1(\alpha)$ sınıfına aittir denir.
$\alpha = 1$ için $B(1) = CC$, $\alpha = 0$ için $B(0) = B_1(0) = ST$ elde edilir.
Her $f(z) \in B_1(\alpha)$, $g(z) = z$ yıldızıl fonksiyonuna göre α-tipli Bazilevic fonksiyonudur.

LEMMA 3.1. $f(z) \in ST$ ve $\alpha > 0$ bir tamsayı ise, (3.4) $$F^{\alpha}(z) = \frac{\alpha+1}{z}\int_0^z f^{\alpha}(t)dt$$

ile belirli F(z) fonksiyonu ST sınıfındadır.

İSPAT. (3.4) den,

$$\alpha z\frac{F'(z)}{F(z)} = \left[\ zf^{\alpha}(z)-\int_0^z f^{\alpha}(t)dt\right] \Big/ \int_0^z f(t)^{\alpha}dt = \frac{N(z)}{D(z)}$$

bulunur. [19] ile D(z), D'de yıldızıldır.
Bölüm III,Lemma 1.2.'de $\alpha = 1$ alarak, $F(z) \in ST$ sonucuna varırız.

TEOREM 3.1. $f(z) \in B(\alpha), \alpha > 0$ tamsayı olsun.(3.4) ile belirli F(z) fonksiyonu, $B(\alpha)$ ya aittir.

İSPAT. (3.4) deki F(z) fonksiyonu için,

(3.5) $$\alpha z\frac{F'(z)}{F(z)^{1-\alpha}} = \frac{(\alpha+1)}{z}\left[\ zf^{\alpha}(z)-\int_0^z f(t)^{\alpha}dt\ \right]$$

buluruz.
$f(z) \in B(\alpha)$ olduğundan (3.2) yi gerçekleyen bir $g(z) \in ST$ vardır.

(3.6) $$G(z)^{\alpha} = \frac{\alpha+1}{z}\int_0^z g(t)^{\alpha}dt$$

ile belirli G(z) fonksiyonu Lemma 3.1 den dolayı yıldızıldır.
(3.5) ve (3.6) dan,

$$\frac{\alpha zF'(z)}{F(z)^{1-\alpha}G(z)^{\alpha}} = \left[\ zf(z)^{\alpha}-\int_0^z f(t)^{\alpha}dt\ \right] \Big/ \int_0^z g(t)^{\alpha}dt = \frac{N(z)}{D(z)}$$

elde ederiz. Bölüm 3. Lemma 1.2,'de, $\alpha = 1$ için sonuca ulaşırız.

LEMMA 3.2. $f(z) \in B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$ tamsayı olsun. Bu takdirde

(3.7) $$\Re\left(\ f(z)/z\ \right)^{\alpha} > 0$$

İSPAT. $f(z) \in B_1(\alpha)$ ise

$$\Re \{ zf'(z)/(f(z)^{1-\alpha}z^{\alpha}) \} = \Re \frac{d(f(z)^{\alpha})/dz}{d(z^{\alpha})/dz} > 0 \text{ dir.}$$

Lemma 3.1.2. ile $\Re (f(z)/z)^{\alpha} > 0$ dir.

TEOREM 3.2. $f(z) \in B_1(\alpha)$, $\alpha > 0$ bir tamsayı olsun.
Her $\beta \geq 0$ için

$$F_1(z)^{\alpha+\beta} = z^{\beta}f(z)^{\alpha} \tag{3.8}$$

ile belirli $F_1(z)$ fonksiyonu $B_1(\alpha+\beta)$ ya aittir.

İSPAT. $F_1(z)$'in verilişinden,

$$\frac{(\alpha+\beta)F_1'(z)}{F_1(z)^{1-(\alpha+\beta)}} = \beta z^{\beta-1}f(z)^{\alpha} + \frac{\alpha z^{\beta}f'(z)}{f(z)^{1-\alpha}}$$

veya

$$\frac{(\alpha+\beta)zF_1'(z)}{F_1(z)^{1-(\alpha+\beta)}z^{\alpha+\beta}} = \beta \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha} + \frac{\alpha zf'(z)}{f(z)^{1-\alpha}z^{\alpha}}$$

buluruz. Lemma 3.2. ve $f(z) \in B_1(\alpha)$ olduğu gerçeğinden hareketle teorem kolayca elde edilir.
Louis Brickman [8], bir fonksiyonun yalınkatlığı için aşağıdaki teoremi vermiştir.

TEOREM 3.3. $f(z)$, D'de analitik, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ olsun. $f(z)$'in D de yalınkat olması için gerek ve yeter şart

$$\Re \{ zf'(z)/h(f(z)) \} > 0$$

eşitsizliğini sağlayan $f(D)$'de analitik bir $h(\omega)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Bu teoremden yararlanarak, α-tipli Bazilevic fonksiyonlarının yalınkatlığını gösterebiliriz. $B(\alpha)$'nın tanımından,

$$\Re \{ zf'(z)/f(z)^{1-\alpha}g(z)^{\alpha} \} > 0$$

dır. $h(f(z)) = f(z)^{1-\alpha} g(z)^{\alpha}$ eşitliğini gerçekleyen $h(\omega)$ analitik fonksiyonu var mıdır?

$f(z) = \omega$ ile

$$h(\omega) = \omega^{1-\alpha} g(f^{-1}(\omega))^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanan $h(\omega)$ fonksiyonu $f(D)$'de analitiktir. Sonuçta, α-tipli Bazilevic fonksiyonları D'de yalınkattır.

TANIM 3.4. D'de $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ile normalize edilmiş,

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in ST(\beta), \quad m > 0$$

olmak üzere,

$$f(z) = \left\{ m \int_0^z [g(s)]^m s^{-1} ds \right\}^{1/m} \tag{3.9}$$

ile belirli fonksiyonlara $B_\beta(m)$ sınıfına aitdir denir.

TEOREM 3.4. [26] $f \in B_\beta(\frac{1}{\alpha})$, $\alpha > 0 \Leftrightarrow f \in \alpha\text{-}CV(\beta)$ $\begin{pmatrix} \alpha > 0 \\ 0 \le \beta < 1 \end{pmatrix}$ dir. Ayrıca NASR [26], $f \in \alpha\text{-}CV(\beta)$ ise f fonksiyonunun β. mertebeden mertebeden yıldızıl, $\alpha \ge 1$ içinde $f(z)$'in β. mertebeden konveks olduğunu göstermiştir.

4. QUASI KONVEKS FONKSİYONLAR

Noor ve Thomas [28]'de quasi konveks fonksiyonların sınıfının tanımı vermiştir.

TANIM 4.1. f(z) fonksiyonu D'de regüler ve normalize edilmiş olsun

$$(4.1) \qquad \Re \frac{(zf'(z))'}{g'(z)} > 0$$

olacak şekilde bir $g(z) \in CV$ varsa, f(z) fonksiyonuna D'de quasi konveks denir. Böyle fonksiyonların sınıfı Q_{CV} ile gösterilir.

(4.1)'de $g(z) = f(z)$ alınırsa, konveks fonksiyonların sınıfının quasi-konveks fonksiyonların bir alt sınıfı olduğu görülür.
1989'da Shanmugam [46],Noor ve Thomas'ın sınıfını genelleştirerek α-quasi konveks fonksiyonlar sınıfını tanıtmıştır.

TANIM 4.2. $\alpha \geq 0$ olsun.
f(z) fonksiyonu D birim diskinde holomorfik, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ koşulları ile normalize edilmiş olsun.

$$(4.2) \qquad \left| (1-\alpha)\arg \frac{zf'(z)}{g(z)} + \alpha\arg \frac{(zf'(z))'}{g'(z)} \right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde bir $g(z) \in \alpha$-CV fonksiyonu varsa, f(z) fonksiyonuna α-quasi konveks denir ve $f(z) \in Q_{CV}(\alpha)$ şeklinde gösterilir.
$Q_{CV}(0)$, konvekse yakın fonksiyonların, $Q_{CV}(1)$, quasi konveks fonksiyonların sınıfıdır.

TANIM 4.3. D'de holomorfik, $f(0)=0, f'(0)=1$ koşullarını gerçekleyen ve $\alpha \geq 0$ için $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1+2\pi$, $z = re^{i\theta}$, $r < 1$

olmak üzere

$$(4.3) \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re \left\{ (1-\alpha)z\frac{f'}{f} + \alpha\left(1+z\frac{f''}{f'}\right) \right\} d\theta > -\pi$$

eşitsizliğini sağlayan f(z) fonksiyonlarının sınıfı $P(\alpha)$ olsun. Bharati [4], $f \in P(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şartın,

$$(4.4) \qquad \Re \left\{ \frac{z^{\alpha} f'^{\alpha}(z) f^{1-\alpha}(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

olacak şekilde bir g(z) yıldızıl yalınkat fonksiyonunun var olması gerektiği sonucuna varmıştır.

TEOREM 4.1. [35] $\beta, v \in \mathbb{C}$,h(z) D'de konveks yalınkat ve h(0) = 1, $\Re\,(\beta h(z)+v) > 0$ olsun. q(z) fonksiyonu D'de holomorfik ve q(0)=1 ve $q(z) \prec h(z)$ olsun. $p(z) = 1 + p_1 z + \ldots$ D'de holomorfik ise,

$$(4.5) \qquad p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta q(z)+v} \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec h(z)$$

dir.

TEOREM 4.2. $\alpha \geq 1$ için, $Q_{cv}(\alpha) \subseteq Q_{cv}(0) = CC$

dir.

İSPAT. $f \in Q_{cv}(\alpha)$ olsun. O halde (4.2) eşitsizliğini gerçekleyen bir $g(z) \in \alpha$-CV vardır. (4.2) şartı,

$$(4.6) \qquad \Re \left\{ \frac{[zf'(z)]^{1-\alpha}[zf'(z)]'^{\alpha}}{g^{1-\alpha}(z)g'^{\alpha}(z)} \right\} > 0$$

eşitsizliğine eşdeğerdir. (4.6) dan $|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\frac{[zf'(z)]'[zf'(z)]^{(1-\alpha)/\alpha}}{g^{(1-\alpha)/\alpha}(z)g'(z)} = p^{1/\alpha}(z) \tag{4.7}$$

yazılabilir. $P(z) = z\,\frac{f'(z)}{g(z)}$ olsun. Bu takdirde,

$$\frac{[zf'(z)]'}{g'(z)} = P(z) + \frac{zP'(z)}{zg'(z)/g(z)}$$

elde edilir. Son bağıntılar (4.5)'de kullanılırsa,

$$\left[P(z) + \frac{zP'(z)}{zg'(z)/g(z)}\right] P^{(1-\alpha)/\alpha}(z) = p^{1/\alpha}(z)$$

bulunur.

$P^{1/\alpha}(z) = p_1(z)$ ve $zg'(z)/g(z) = q(z)$ olarak kabul edilirse

$p_1(z) + \dfrac{zp_1'(z)}{q(z)} = p^{1/\alpha}(z)$ elde edilir.

$g \in \alpha\text{-}CV \subseteq ST$ olduğundan, D'de $\Re\, q(z) > 0$ ve $\alpha \geq 1$ için $|\arg p^{1/\alpha}(z)| < \frac{\pi}{2\alpha}$. $p^{1/\alpha}(z)$, $|\arg\xi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ konveks cümlesinde bulunur. $\beta = 1$, $\gamma = 0$ ve $h(z) = [(1-z)/(1+z)]^{\alpha}$ alınırsa Teorem 4.1 den $|\arg p_1(z)| < \frac{\pi}{(2\alpha)}$ veya $|\arg P(z)| < \frac{\pi}{2}$ elde edilir ki bu da $f \in Q_{cv}(0) = CC$ olduğunu gösterir.

$Q_{cv}(\alpha)$ sınıfındaki her $f(z)$ fonksiyonu konvekse yakın olduğundan, $Q_{cv}(\alpha)$, $(\alpha \geq 1)$, S sınıfının bir alt sınıfıdır.

TEOREM 4.3. $\alpha \geq 1$ ve $0 \leq \beta \leq \alpha$ için,

$$Q_{cv}(\alpha) \subseteq Q_{cv}(\beta) \tag{4.8}$$

dir.

İSPAT. $\beta = 0$ durumunu Teorem 4.2.'de gösterdik. $\beta > 0$ varsayalım. $f \in Q_{cv}(\alpha)$ olsun. O halde $p(z) = zf'(z)/g(z)$ ve $q(z) = zg'(z)/g(z)$ olmak üzere,

$$\left| (1-\alpha)\arg p(z) + \alpha\arg\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{q(z)}\right) \right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde bir $g \in \alpha\text{-}CV$ vardır.

$$\left| (1-\beta)\arg p(z) + \beta\arg\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{q(z)}\right) \right|$$

$$\leq \frac{\beta}{\alpha}\left| (1-\alpha)\arg p(z) + \alpha\arg\left(p(z)+\frac{zp'(z)}{q(z)}\right) \right| + \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)|\arg p(z)|$$

$$\leq \frac{\beta}{\alpha}\frac{\pi}{2} + \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

sonucundan $f \in Q_{cv}(\beta)$ elde edilir.

TEOREM 4.4. $f \in Q_{cv}(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in P(\alpha)$

İSPAT. $f \in Q_{cv}(\alpha)$ ise, $g \in \alpha\text{-}CV$ olmak üzere

$$\Re\left\{ \frac{z^{\alpha}(zf'(z))^{1-\alpha}(zf'(z))'^{\alpha}}{z^{\alpha}g^{1-\alpha}(z)g'^{\alpha}(z)} \right\} > 0$$

dir. Bir $\emptyset \in ST$ için

$z^{\alpha}g^{1-\alpha}(z)g'^{\alpha}(z) = \emptyset(z)$

bulunur. Buradan,

$$\Re\left\{ \frac{z^{\alpha}(zf'(z))^{1-\alpha}(zf'(z))'^{\alpha}}{\emptyset(z)} \right\} > 0$$

eşitsizliği ile $zf'(z) \in P(\alpha)$ olduğunu görürüz. Tersi ise kolayca elde edilir.

TEOREM 4.5. $\bigcap_{\alpha\geq 1} Q_{cv}(\alpha) = CV$ dir.

İSPAT. $f \in Q_{cv}(\alpha)$ olsun. O halde,

$$\left| \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\arg z\frac{f'(z)}{g(z)} + \arg \frac{[zf'(z)]'}{g'(z)} \right| < \frac{\pi}{2\alpha}$$

olacak şekilde bir $g \in \alpha\text{-}CV$ vardır.

$\alpha \to \infty$ limit durumunda,

$$\left| \arg \frac{[zf'(z)]'}{g'(z)} - \arg \frac{zf'(z)}{g(z)} \right| = 0$$

yani

$$\left| \arg \frac{[zf'(z)]'g(z)}{zf'(z)\ g'(z)} \right| = 0$$

buluruz. Buradan,

$$\frac{(zf'(z))'}{f'(z)} \ \frac{g(z)}{zg'(z)} = m$$

olacak şekilde pozitif bir m sayısı vardır. Son eşitlik

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = m\ \frac{zg'(z)}{g(z)}$$

şeklinde yazılırsa, $g \in \alpha\text{-}CV \subseteq ST$ ve $m > 0$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonunun konveks bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır.

Sonuçta $\bigcap_{\alpha\geq 1} Q_{cv}(\alpha) \subseteq CV$ bulunur. Tersine $f(z)$ konveks bir fonksiyon ise $g(z) = f(z)$ alınırsa $f \in Q_{cv}(\infty)$ olduğu görülür.

Buradan, $\bigcap_{\alpha\geq 1} Q_{cv}(\alpha) \supseteq CV$ dir.

Teorem 4.4.ve Teorem 4.5.'den $\bigcap_{\alpha\geq 1} P(\alpha) = ST$ olduğu sonucuna varılır.

BÖLÜM 4

HARMONİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Clunie ve Sheil-Small [10], D birim diskinde harmonik yalınkat fonksiyonlarda ilk çalışmayı başlatmışlardır. Bu fonksiyonlar D birim diskinde, h(z) ve g(z) analitik fonksiyonlar olmak üzere $f(z) = \overline{g}(z) + h(z)$ şeklinde yazılabilir.

D'de yalınkat $h(0)=h'(0)-1=g(0)=0$ koşulları ile normalize edilmiş harmonik f(z) fonksiyonlarının sınıfı S_H , $g'(0) = 0$ koşulunu gerçekleyen $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı da S_H^0 ile gösterilir.

Böylece S_H sınıfına ait fonksiyonlar

$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ analitik fonksiyonlar olmak üzere,

$$(1.1) \qquad f(z) = \overline{g}(z) + h(z)$$

şeklinde yazılabilir.

f fonksiyonunun Jakobiyeni ,

$$(1.2) \qquad j_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

ile belirlidir.

$j_f(z) \neq 0$ ise f(z) fonksiyonuna D'de yerel 1-1 denir. f(z) harmonik fonksiyonunun yerel 1-1 ve yön koruyan olması için gerek ve yeter koşul,

$$(1.3) \qquad |g'(z)| < |h'(z)|$$

olmasıdır.

Bu tür dönüşümlere yerel yalınkat denir. $f(z)$, D'de 1-1 ve yön koruyan ise, f yalınkattır. Analitik bir φ fonksiyonu ile f harmonik fonksiyonunun $f \circ \varphi$ bileşke fonksiyonu harmoniktir. ψ analitik ise, genelde $\psi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez.

$f = \overline{g} + h \in S_H^O$ için, (1.2) ve Schwarz Lemmasından

$$|g'(z)| < |zh'(z)| \tag{1.4}$$

elde ederiz. (1.3) eşitsizliği ve Schwarz Lemmasından $f \in S_H$ için,

$$|b_1| < 1 \tag{1.5}$$

elde edilir. Her $f \in S_H$ için

$$f_O = \frac{f - b_1\overline{f}}{1-|b_1|^2} \tag{1.6}$$

fonksiyonu S_H^O sınıfına aitdir. Tersine (1.6)'dan elde edilen $f = f_O + b_1\overline{f_O}$ eşitliği de S_H^O sınıfından S_H sınıfına geçişi sağlar ve böylece S_H^O için elde edilen bazı sonuçlardan S_H sınıfı için sonuçlar çıkarılabilir.

S_H bir normal aile ve S_H^O bir kompakt normal ailedir. S_H'nın kapanışı $\overline{S}_H = \{ f \in S_H : f = f_O + \varepsilon\overline{f_O}, |\varepsilon| \le 1, f_O \in S_H^O \}$ dır ve $\overline{S_H}$ nın kapalı konveks zarfının her uç (extreme) noktası ∂S_H'dadır. f_O S_H^O ın bir uç noktası olmak üzere $f = f_O + e^{i\alpha}\overline{f_O}$ şeklinde yazılabilir. Harmonik yalınkat fonksiyonlarda çalışmanın bir çok güçlükleri vardır. Bu durumları yeri geldikçe vurgulayacağız.

Caratheodory teoreminden bilindiği gibi, $(F_n) \subset S$ fonksiyonlar dizisinin bir $F \in S$ fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşul $(F_n(D))$ bölgeler dizisinin $F(D)$'ye çekirdek yakınsama anlamda yakınsamasıdır. Oysa bu durum S_H^O da doğru değildir. $(f_n) \subset S_H^O$ fonksiyonlar dizisi için $f_n(D) \to f(D)$ yakınsaması (f_n) dizisinin f'e yakınsamasını gerektirmez. Bu ise $f_1 \neq f_2$ olmak üzere

$f_1(D) = f_2(D)$ koşulunu gerçekleyen $f_1, f_2 \in S_H^O$ fonksiyonlarının var olması gerçeğinden elde edilir.
Örnek olarak, $f_1(z) = \frac{z}{1-z}$, $f_2(z) = \Re\left(\frac{z}{1-z}\right) + i\Im\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\}$ alalım.

Her iki fonksiyon da S_H^O sınıfındadır ve D'yi $\{\Re\,\omega > -\frac{1}{2}\}$ üzerine

resmeder. S_H^O sınıfında, analitik durumdakinden daha zayıf olan şu sonuç elde edilir. $(f_n) \subset S_H^O$ fonksiyonlar dizisi D diskinde f fonksiyonuna yakınsasın ve Ω, $(f_n(D))$ nin çekirdeği ise $f(D) \subseteq \Omega$ dır. Analitik durumdakine benzer olarak, $f(D)$ nin konveksliği $f(|z| < r)$ $(r < 1)$ nın konveksliğini gerektirmez. Bir E bölgesinin tümleyeni yarı doğruların birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, E ye konvekse yakın bir bölge denir. Her yıldızıl bölge konvekse yakındır. Orijin ve $e^{i\varphi}$ yi birleştiren doğru parçasının E ile arakesiti bir doğru ise E bölgesine φ $(0 \le \varphi < \pi)$ yönünde konveks denir. Böyle bölgeler konvekse yakındır. Konveks bölgeler her yönde konvekstir.

K, K_H ve K_H^O sırasıyla S, S_H ve S_H^O'ın $f(D)$ resmi konveks olan f fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfları C, C_H ve C_H^O da $f(D)$ resmi konvekse yakın resim bölgeli f fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfları göstersin.
Clunie ve Sheil-Small [10]'un çalışmasında önemli teorem ve sonuçları aşağıda verilmiştir.

TEOREM 1.1. $f = \overline{g} + h$ fonksiyonunun K_H sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul, (1.7) $$h(z) - e^{i\varphi}g(z) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

analitik fonksiyonlarının $\varphi/2$ yönünde konveks olmasıdır. Bu durumda, $h(z) + \varepsilon g(z)$ $(|\varepsilon| \leq 1)$ fonksiyonları konvekse yakındır.

Özellikle h konvekse yakındır. Sonuç olarak K_H^O kompakt bir sınıftır.

TEOREM 1.2. $f = \overline{g} + h \in K_H$ ise,

(1.8) $$\left| \frac{g(z_1)-g(z_2)}{h(z_1)-h(z_2)} \right| < 1 \quad , \ |z_1|, |z_2| < 1$$

TEOREM 1.3. $f \in K_H^O$ ise

(1.9) $$\{ |\omega| < \tfrac{1}{2} \} \subseteq f(D)$$

dir.

TEOREM 1.4. $f \in K_H^O$ ise, $n = 1,2,...$ için

(1.10) $$\Big| |a_n(f)| - |b_n(f)| \Big| \leq 1 \quad ,$$

(1.11) $$| b_n(f) | \leq \frac{n-1}{2} \quad ,$$

(1.12) $$| a_n(f) | \leq \frac{n+1}{2} .$$

TEOREM 1.5. $f \in C_H$ ise,

(1.13) $$|a_n(f)| \leq \frac{1}{3}(2n^2+1) \quad (n = \mp 1, \mp 2, ...)$$

harmonik yalınkat fonksiyonlar sınıfında bir çok açık problem vardır. Bunlardan önemli olanları şu şekilde sıralanabilir.

1. 1/4-teoreminin harmonik benzeri olarak, $f \in S_H^O$ ise,

$\{ \ |\omega| < \frac{1}{16} \ \} \subseteq f(D)$ dir. Mümkün en iyi sabit nedir ?

2. S^O_H ve S nin uç noktaları arasında bir bağıntı var mıdır ?

Hengartner ve Schober [14], E ve G nin çeşitli özel durumları için E bölgesini G bölgesine resmeden harmonik yön koruyan fonksiyonların $S_H(E,G)$ sınıfını incelemişlerdir.
Konform tasvirlerin tersine harmonik tasvirler resim bölgeleri ile belirli değildir. Bu nedenle bir E bölgesini bir G bölgesi üzerine resmeden harmonik yön koruyan yalınkat tasvirlerin sınıfı olan $S_H(E,G)$ sınıfında çalışmak doğaldır.
Orijini içeren basit bağlantılı bir bölge $D\neq\mathbb{C}$ ve $\Omega = \{\omega : |\Im\, \omega| < \pi/4\}$ olsun.
$S_H(E,\Omega)$, $u(0)=v(0)=0$, $u_y(0)=v_x(0)=0$ ve $u_x(0)=v_y(0) > 0$ koşulları ile normalize edilmiş, E den Ω üzerine $f = u+iv$ şeklindeki harmonik yön koruyan yalınkat tasvirlerin sınıfıdır. Ψ_E, E'den D birim diski üzerine $\Psi_E(0)=0$, $\Psi'_E(0) > 0$ koşulları ile normalize edilmiş konform bir tasvir olsun. $S_H(E,\Omega) = S_H(D,\Omega) \circ \Psi_E$ olduğundan, $S_H(D,\Omega)$ sınıfında bir çok problemi incelemek $S_H(E,\Omega)$ sınıfındaki problemleri incelemeye denktir.
Hengartner ve Schober, $\overline{S_H(E,\Omega)}$ ve P sınıfları arasında bir izomorfizma vermişlerdir. Bunlara ek olarak, $\tilde{D} = \{ z: |z| > 1 \}$ de tanımlı, ∞'u ∞'a resmeden harmonik, yön koruyan yalınkat tasvirleri çalışmışlardır.
Bu tasvirler, $h(z) = \alpha z + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ ve $g(z) = \beta z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}$ $\tilde{D}$'da analitik ve $|\alpha| > |\beta|$ olmak üzere, $f(z) = A\log|z| + h(z) + \overline{g(z)}$ şeklindedir.

$$f(z) = z + A\log|z| + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k} + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}}$$

şeklindeki harmonik, yön koruyan, yalınkat tasvirlerin Σ_H sınıfının

kompakt ve $|A| \leq 2$, $|b_1| \leq 1$ olduğunu göstermişlerdir.
Avcıve Zlotkiewicz [2], harmonik yalınkat fonksiyonların iki özel alt sınıfında çalışmışlardır.

TANIM 1.1.

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ , \ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{1.14}$$

fonksiyonları D'de analitik ve $f(z) = h(z) + \overline{g}(z)$ olsun.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) \leq 1-|b| \quad , \ 0 \leq |b_1| < 1 \tag{1.15}$$

koşulunu gerçekleyen $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı HS ile,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2(|a_n| + |b_n|) \leq 1-|b_1| \quad , \ 0 \leq |b_1| < 1 \tag{1.16}$$

koşulunu gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfını da HC ile tanımlamışlardır $b_1 = 0$ koşulunu gerçekleyen $f \in HS$ (HC) fonksiyonlarının sınıfını HS^O (HC^O) ile göstermişlerdir.

h,g,H,G ,(1.14) şeklinde ve $f(z) = h(z)+\overline{g(z)}$,$F(z) = H(z)+\overline{G(z)}$ ise f ve F 'nin konvolüsyonunu

$$f * F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n B_n z^n} \tag{1.17}$$

ile, integral konvolüsyonunu da

$$f \lozenge F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n A_n}{n} z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n B_n}{n} z^n} \tag{1.18}$$

ile tanımlamışlardır.

f fonksiyonunun δ-civarı

$$N_{\delta}(f) = \{ F: \sum_{n=2}^{\infty} n(|a_n - A_n| + |b_n - B_n|) + |b_1 - B_1| \le \delta \}$$

dır. Avcı ve Zlotkiewicz [2] 'in HS ve HC sınıflarındaki sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

TEOREM 1.6. HS sınıfı yön koruyan, harmonik yalınkat fonksiyonları içerir.

TEOREM 1.7. HS^O sınıfının her üyesi D yi orijine göre, yıldızıl bir bölgeye resmeder.

TEOREM 1.8. HC^O sınıfının fonksiyonları D_r yi konveks bölgelere resmeder.

HS^O sınıfında her fonksiyon $r < \frac{1}{2}$ olmak üzere D_r diskini konveks bölgelere resmeder.

$$f = \bar{g} + h \in HS^O \text{ ise } G(z) = \int_0^1 \frac{f(tz)}{t}\,dt = \int_0^z \frac{h(u)}{u}\,du + \overline{\int_0^z \frac{g(u)}{u}\,du}$$

fonksiyonu, (1.16) koşulunu gerçekler. Böylece G(z) konveks harmonik bir fonksiyondur. Buna karşılık, G(z) fonksiyonunun konveksliği h(z) fonksiyonunun yıldızıllığını gerektirmez.

UYARILAR:

1) $f_n(z) = z + \frac{n}{n+1}\bar{z}$ fonksiyonları HS sınıfındadır ve $z + \bar{z}$ ye düzgün yakınsar. Fakat $z + \bar{z}$ fonksiyonu HS sınıfına ait değildir. Böylece HS kompakt değildir.

2) $f \in HS$ ise, her bir r ($0 < r < 1$) için $r^{-1}f(z) \in HS$

3) $f \in HS$ ve $f_O(z) = \dfrac{f(z) - b_1\overline{f(z)}}{1-|b_1|^2}$ ise $f_O \in HS^O$ dır.

TEOREM 1.9. $f(z) = z + b_1\bar{z} + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n z^n + b_n \bar{z}^n) \in HC$ olsun.

$\delta \leq \frac{1}{2}(1-|b_1|)$ ise , $N_\delta(f) \subset HS$ dir.

D'yi konveks bir bölgeye resmeden, $b_1=0$ olmak üzere $f(z)=h(z)+\bar{g}(z)$ şeklindeki harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfı K_H^O olsun.

[51,Teo.5.10]'dan $2|A_n| \leq n+1$, $2|B_n| \leq n-1$ kesin eşitsizlikleri vardır.

TEOREM 1.10. $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}[A_n z^n + B_n \bar{z}^n] \in K_H^O$ olsun. O halde

i) $f(z) \in HC^O$ ise $f * F$ yıldızıl yalınkat ve $f \diamond F$ konvekstir.

ii) $f(z)$ fonksiyonu $\sum_{n=2}^{\infty} n^3[|a_n|+|b_n|] \leq 1$ koşulunu gerçeklerse $f * F$ konveks yalınkattır.

İSPAT.

i) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n z^n + b_n \bar{z}^n)$ ise, $f * F$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n[|a_n A_n|+|b_n B_n|] \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^2[|a_n|\left|\frac{A_n}{n}\right|+|b_n|\left|\frac{B_n}{n}\right|] \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^2[|a_n|+|b_n|] \leq 1$$

elde edilir. Buradan, $f * F \in HS^O$ dır. $\int_0^1 \frac{f*F(tz)}{t}\,dt = f \diamond F(z)$ dönüşümünden $f \diamond F(z) \in HC^O$ olduğu görülür.

TEOREM 1.11. $h \in HS$ ise

i) $|h(z)| \leq |z|(1+|b_1|) + \frac{1-|b_1|}{2}|z|^2$

ii) $(1-|b_1|)(|z|-\frac{|z|^2}{2}) \leq |h(z)|$

dir.

Teorem 1.11. den HS sınıfı düzgün sınırlıdır. Böylece Normaldir. Ayrıca HS^O sınıfı kompakt ve konvekstir.

KAYNAKÇA

[1] Aouf, M.K., On the coefficients of some classes of starlike and convex functions of complex order, Journal of Natural Sciences and Mathematics, Vol. 28, No.1(April 1988), 107-120.

[2] Avcı, Y., Zlotkiewicz, E., On harmonic univalent mappings, Ann.Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect.A, 44(1990), 1-7.

[3] Başgöze, T., Keogh, F.R, The Hardy class of a spirallike function and its derivative, Proc. Amer. Math.Soc.,26(1970), 266-269.

[4] Bharati, R., On alpha-close-to-convex functions, Proc.Indian Acad.Sci.A, 88A (1979), 93-103.

[5] Bieberbach, L., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises Vermitteln, Sitzugsberiche Preussische Akademie der Wissenschaften, (1916), 940-955.

[6] De Branges, L., A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Mathematica, 154(1985), 137-152.

[7] Brannan, D., Clunie, J, Kirwan, W., Coefficient estimates for a class of starlike functions, Canad. J. Math., 22(1970), 476-485.

[8] Brickman, L., Subordinate families of analytic functions, Illinois J. Math., 15(1971), 241-248.

[9] Chichra, P.N., New Subclasses of the class of close-to-convex functions, Proceedings of the American Mathematical Socity, 62(1977), 37-43.

[10] Clunie, J., Sheil-Small, T., Harmonic univalent functions, Ann. Acad, Sci. Fenn. Ser. A I Math., 9(1984), 3-25.

[11] Garabedian, P.R, Schiffer, M., A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Arch. Rational Mech. Anal., 4(1955), 427-455.

[12] Goodman, W., Univalent functions I, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.

[13] Gronwall, T., Sur la deformation dans la representation conforme, C. R. Acad. Sci. Paris, 162(1916), 249-252.

[14] Hengartner, W., Schober, G., Univalent Harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc, Cilt 299, Sayı 1, (1987), 1-31.

[15] Jack, I.S., Functions starlike and convex of order α, J. London Math. Soc(2), 3(1971), 469-474.

[16] Janowski, W., Extremal problems for a family of functions with positif real part and for some related families, Ann. Polon. Math, 23(1970), 159-177.

[17] Kaplan, W., Close-to-convex schlicht functions, Mich. Math. J., 1(1952), 169-185.

[18] Kasi, M.S., Alpha-spiral-close-to-convex functions, Bull. Cal. Math. Soc. 80(1988), 297-302.

[19] Libera, R.J., Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. (4), 16(1965), 755-758.

[20] Libera, R.J., Univalent α-spiral functions, Canad. J. Math., 19(1967), 449-456.

[21] Lowner, K., Untersuchungen über die Verzerrung bei Konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, Leipzig Berichte, 69(1917), 89-106.

[22] Löwner, K., Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math.Ann., 89(1923), 102-121.

[23] Marx, A., Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann., 107(1932/33), 40-67.

[24] Miller, S.S., On a class of starlike functions, Annales Polonice Mathematica, 32(1976), 77-81.

[25] Mocanu, P.T., Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representation conforme, Mathematica(Cluj).11, 34(1969), 127-133.

[26] Nasr, M., On Bazilevic functions and generalized convexity, Rev.Roumaine.Math.Pures et Appl 9, 22(1977), 1279-1281.

[27] Noonan, J.W., Coefficients of functions with bounded boundary rotation, Proc.Amer.Math.Soc., 29(1971), 307-312.

[28] Noor, K.I., Thomas, D.K., Quasi-convex univalent functions, Internat, J.Math.Sci. 2, 3(1980), 256-266.

[29] Obradovic, M., On some sufficient conditions for α-convexity of order β., Ann.Univ.Mariae Curie-Sklodowska Sect.A, 41 (1987), 75-78.

[30] Obradovic, M., Owa, S, Some properties of λ-spiral functions of order α, Math.Japonica.3, 33(1988), 439-444.

[31] Paatero, V., Über die konforme Abbildung von Gebieten deren Rander von beschrankter Drehung sind, Ann. Acad. Sci. Fenn. A., 33(1931), 1-78.

[32] Paatero, V, Über Gebiete von beschrankter Randdrehung, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.9, 37(1933).

[33] Padmanabhan, K.S., On certain classes of starlike functions in the unit disk, J. Indian Math. Soc., 32(1968), 89-103.

[34] Padmanabhan, K.S., Parvatham, R., Properties of a class of functions with bounded boundary rotation, Ann. Polon. Math. 3, 31(1975/76), 311-323.

[35] Padmanabhan, K.S., Parvatham, R., Bull. Aust. Math. Soc., 32(1985), 321-330.

[36] Pfaltzgraff, J., Univalence of the integral $[f'(z)]^{\lambda}$, Bull. London Math. Soc. 3, 7(1975), 254-256.

[37] Polya, G., Schoenberg, Z.J., Remarks on the de la Vallee Poussin means and convex conformal maps of the circle, Pacific. J. Math., 8(1958), 295-334.

[38] Reade, M., On close-to-convex univalent functions, Mich. Math. , 3(1955), 59-62.

[39] Robertson, M.S., On the theory of univalent functions, Ann. Math. , 37(1936), 374-408.

[40] Robertson, M.S., Applications of the subordination principle to univalent functions, Pacific J. Math., 11(1961), 315-324.

[41] Robertson, M.S.,Radii of star - likeness and close - to - convexity, Proc.Amer.Math.Soc.,16(1965), 847-852.

[42] Robertson,'M.S., Univalent functions f(z) for which zf'(z) is spirallike, Mich.Math.J., 16(1969), 97-101.

[43] Robertson, M.S., Coefficients of functions with bounded boundary rotation, Canad.J.Math., 21(1969), 1477-1482.

[44] Robertson, M.S., Characterization of the class of starlike univalent functions, Michigan Math.J., 26(1979), 65-69.

[45] Ruscheweyh, S., Sheil-Small, T., Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg Conjecture, Comment Math.Helv., 48(1973), 119-135.

[46] Shanmugam, T.N., On α-quasi convex functions, Indian J.Pure appl.9, 20(1989), 915-922.

[47] Silvia, E.M., On a subclass of spirallike functions, Proc. Amer. Math. ,44(1974), 411-420.

[48] Spacek, L., Contribution a la theorie des functions univalentes, Casopis Pest.Math., 62(1932), 12-19.

[49] Strohacker, E., Beitrage zur Theorie der Schlichten Funktionen, Math.Z., 37(1933), 356-380.

[50] Suffridge, T.J., Some remarks on convex maps of the unit disk, Duke Math.J., 37(1970), 775-777.

[51] Wiatrowski, P., The coefficients of a certain family of holomorphic functions, Zeszyty Nauk.Univ. Lodz.Nauki Math. Przyrod. Ser II.Zeszyt 39 Mat, (1971), 75-85.

[52] Zamorski, J., About the extremal spiral schlicht functions, Ann.Polon.Math., 9(1960/61), 265-273.