MATRİS SIRALAMALARI VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

SELAHATTİN KAÇIRANLAR

Ç.Ü.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA

EYLÜL - 1991

15124

Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof.Dr.Fikri AKDENİZ

Üye Doç.Dr.Melih BORAL

Üye Doç.Dr.Veli KURT

Kod No: 494

Yukarıdaki imzaların, adı geçen, öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Ural DİNÇ

Enstitü Müdürü

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Bu tezin amacı matris sıralamalarını bir arada incelemek, bunların kendi aralarındaki ilişkileri belirlemek ve Löwner sıralamanın kullanılmasıyla özellikle lineer modellerdeki uygulamalarını göstermektir.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to investigate all together matrix orderings, point out relations between them and to show the applications especially on linear models by using Löwner ordering.

GİRİŞ

A kümesi üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise A'ya kısmi sıralı küme denir ve $\leq$, A üzerinde bir kısmi sıralama olarak adlandırılır.

Her $a,b,c \in A$ için

P1- $a \leq a$ (Yansıma)

P2- $a \leq b$, $b \leq a$ ise $a=b$ (Ters simetri)

P3- $a \leq b$, $b \leq c$ ise $a \leq c$ (Geçişme)

A kümesi üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı sadece P1 ve P3 özelliklerini sağlıyor ise A'ya ön sıralı küme denir ve $\leq$,A üzerinde bir ön sıralama olarak adlandırılır.

Matrisler kümesi de kısmi ve ön sıralı olmak üzere iki kısımda sıralanmaktadır.

Yukarıda verilen bilgilerin kullanılmasıyla , mxn tipinde kompleks/reel matrisler kümesi üzerinde yıldız(*) ve ranklar farkı (rs) kısmi sıralamaları ; kolon uzayları(s) ve tekil değerler(σ) ön sıralamaları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

(1) $A \leq^{*} B \Leftrightarrow A^{*}A=A^{*}B$ ve $AA^{*}=BA^{*}$

(2) $A \leq^{rs} B \Leftrightarrow A^{-}A=A^{-}B$ ve $AA^{=}=BA^{=}$; bazı $A^{-},A^{=} \in A^{(1)}$ için

(3) $A \leq^{s} B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B)$ ve $R(A^{*}) \subseteq R(B^{*})$

(4) $A \leq^{\sigma} B \Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$

Ayrıca; mxm tipindeki kompleks matrisler kümesi üzerinde de Löwner kısmi sıralaması aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

(5) $A \leq^{L} B \Leftrightarrow B-A$ hermityen negatif olmayan tanımlı matris

Matrisler kümesi bu şekilde değişik sıralama gruplarına ayrılarak geniş bir inceleme alanı oluşturmuştur. Kaynaklarda ilk kez Milliken ve Akdeniz(1977) tarafından negatif olmayan matrislerin Moore-Penrose inverslerine göre Löwner sıralamasıyla ilgili bir temel teorem ifade edilmiş ve matris sıralamalarının, farklı tahmin edicilerin Varyans-Kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasında nasıl kullanılacağı yine bu teoremden faydalanarak göstermişlerdir.

Daha sonra , Wu(1980) çalışmasında matrislerin sadece Moore-Penrose inverslerine göre değil farklı g-inverslerine göre de Löwner sıralamasını incelemiştir.

Bunların dışında;Drazin(1977,1978) matrislerin yıldız kısmi sıralamalarını ayrıntılı bir biçimde inceleyerek yeni bağıntılar elde etmiştir. Hartwig(1980) matrislerin ranklar farkı kısmi sıralamalarını inceleyerek bu sıralamanın verdiğimiz tanıma denk olarak,

$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow \mathrm{rank}(B-A)=\mathrm{rank}(B)-\mathrm{rank}(A)$

şeklinde de tanımlanabileceğini göstererek ranklar farkı kısmi sıralamasının gelişmesinde önemli rol oynamıştır.

Baksalary ve Hauke(1987) matrislerin tekil değer veya öz değerlere göre ön sıralaması ile ranklar farkı kısmi sıralaması arasındaki ilişkiyi incelemişler ve yeni bir kısmi sıralama tanımlamışlardır.

Marshall ve Olkin(1979) matrislerin kolon uzaylarına göre ön sıralaması üzerinde çalışmalar yaparak bu sıralamaya denk yeni bağıntılar elde etmişlerdir.

Matrislerin sıralanması bu şekilde gelişim gösterirken Löwner sıralamanın istatistikteki uygulamaları da değişik şekillerde ele alınmıştır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde çalışmamız boyunca kullanılacak bazı temel bilgiler verilecek ve negatif olmayan matrislerin genelleştirilmiş inverslerine göre sıralanması incelenecektir.

İkinci bölümde matrislerin kısmi ve ön sıralamalarının tanımları verilerek bu sıralamalar arasındaki ilişkiler ve kısmi sıralama ile ön sıralama altında genelleştirilmiş inverslere göre matris sıralamasının bazı sonuçları verilecektir.

Üçüncü bölümde idempotent matrislerin kısmi sıralamaları ve idempotentliğin sıralamalar arasındaki ilişkileri nasıl etkilediği gösterilecektir.

Son olarak dördüncü bölümde Löwner sıralamanın Lineer modellerin karşılaştırılmasında nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz.

Ayrıca;bu çalışmada yukarıda verilenlerin kullanılmasıyla tarafımızdan bazı ispat ve teoremler açığa kavuşturulmuş , Baksalary, Pukelsheim ve Styan(1980) tarafından verilen Teorem3.5.'e aksine örnek verilerek Teorem başka bir şekilde ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca,Sonuç.2.1.1.,2.1.4.,3.1.1. ve 3.1.2. yine tarafımızdan verilmiştir.

1. BÖLÜM

NEGATİF OLMAYAN MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İNVERSLERİNE GÖRE SIRALANMASI

Bu bölümde ilk olarak ,çalışmamız boyunca bize ışık tutacak olan bazı temel bilgileri vereceğiz.Daha sonra negatif olmayan matrislerin genelleştirilmiş inverslerine göre sıralanması ile ilgili kaynaklarda ilk kez (Milliken ve Akdeniz,1977) tarafından verilen temel teoremin ifade ve ispatını vereceğiz.

Ayrıca bu temel teoremden faydalanılarak Wu(1980) tarafından verilmiş olan ,bir negatif olmayan matrisin negatif olmayan genelleştirilmiş inversleri hakkında bazı sonuçları ayrıntıları ile inceleyeceğiz.

Bu bölümde $A \geq B$ gösterimi ile $A - B$ nin negatif olmayan tanımlı (n.n.d.) bir matris olduğunu göstereceğiz.

1.1.Temel Bilgiler

TANIM.1.1.1. nxn tipindeki bir A matrisi için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine simetriktir denir ve $A = A'$ ile gösterilir.

TANIM.1.1.2. A mxn tipinde bir matris olsun.Aşağıdaki dört matris denklemini sağlayan X çözümüne A matrisinin Moore-Penrose inversi veya dört koşullu g-inversi denir.A^+ ile gösterilir.Bu tanım Penrose (1955)'e aittir.

(1) $AXA = A$

(2) $XAX = X$ (1.1)

(3) $(AX)' = AX$

(4) $(XA)' = XA$

mxn tipindeki bir A matrisi için $A^{(i,j,k,l)}$ ile Penrose (1955)'e ait olan dört denklemden i-inci, j-inci, k-inci ve l-inci denklemleri sağlayan X matrisini anlarız. Bunu A matrisinin bir (i,j,k,l) g-inversi olarak adlandırırız. Sadece (1) denklemini sağlayan X matrisine A nın tek koşullu ya da g-inversi denir. (1) ve (2) denklemlerini sağlayan X matrisine de A nın iki koşullu ya da refleksif g-inversi denir.

Moore-Penrose inversin bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

Verilen bir A matrisi için bir A^+ vardır ve tektir.

$(A^+)^+ = A$ (1.2)

$(A')^+ = (A^+)'$ (1.3)

Eğer A tekil olmayan bir matris ise , $A^+ = A^{-1}$ (1.4)

$(A'A)^+=A^+(A')^+$, $(AA')^+=(A')^+A^+$ (1.5)

$\text{rank}(A)=\text{rank}(A^+)=\text{rank}(AA^+)=\text{rank}(A^+A)$ (1.6)

dir. Ayrıca;

$\text{rank}(A^{(1)})\geq\text{rank}(A), \text{rank}(A^{(2)})\leq\text{rank}(A)$ ve $\text{rank}(A^{(1,2)})=\text{rank}(A)$ (1.7)

dir.

TANIM.1.1.3. nxn tipindeki bir A matrisi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise yarı pozitif tanımlı (p.s.d.) olarak adlandırılır.

1- $A = A'$

2- $y \neq 0$ olacak şekilde en az bir y vektörü için eşitlik ve E_n deki her y için,

$y'Ay \geq 0$

ise A'ya p.s.d. matris denir. Burada E_n, nx1 tipindeki vektörlerin kümesini gösterir.

TANIM.1.1.4. nxn tipindeki bir A matrisi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise pozitif tanımlı (p.d.) olarak adlandırılır.

1- $A = A'$

2- $y \neq 0$ olacak şekilde E_n deki her y vektörü için,

$y'Ay > 0$

ise A'ya p.d. matris denir.

TANIM.1.1.5. Bir A matrisinin negatif olmayan bir matris olması için gerek ve yeter koşul A'nın ya p.d. ya da p.s.d. matris olmasıdır.

TEOREM.1.1.1. (Graybill(1983), S:396) A nxn tipinde simetrik bir matris olsun. (1a), (2a) A matrisinin p.s.d. olması için;

(1b), (2b), (3b) A matrisinin p.d. olması için gerek ve yeter koşullardır.

(1a) $B'B = A$ olacak şekilde rankı n'den küçük olan bir nxn tipinde B matrisi vardır.

(2a) A nın karekteristik kökleri pozitif ve en azından bir kökü sıfırdır.

(1b) $B'B = A$ olacak şekilde rankı n olan nxn tipinde bir B matrisi vardır.

(2b) A nın karekteristik köklerinin hepsi pozitiftir.

(3b) $a_{11} > 0; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0; \ldots\ldots\ldots; |A| > 0$

<u>TANIM.1.1.6.</u> Bir matristeki doğrusal bağımsız satır veya sütunların sayısına, o matrisin rankı denir.

$rank(A_{p\times q})=p<q$ ise A'ya tam satır ranklı

$rank(A_{p\times q})=q<p$ ise A'ya tam sütun ranklı

$rank(A_{n\times n})=n$ ise A'ya tam ranklı matris denir.

<u>TANIM.1.1.7.</u> A pxq tipinde r ranklı bir matris olsun.

$$A_{p\times q}=K_{p\times r}L_{r\times q}$$

ifadesine, K tam sütun ranklı ve L tam satır ranklı olmak üzere A matrisinin tam rank ayrışımı denir.

<u>TANIM.1.1.8.</u> $R(A)=\{y\in ¢^m: \ y=Ax, x\in ¢^n\}$ kümesine A matrisinin kolon uzayı denir. Burada $¢^m$ ve $¢^n$ sırasıyla, mx1 ve nx1 tipinde kompleks bileşenli matrislerin kümesini gösterir.

<u>TANIM.1.1.9.</u> A nxm tipinde bir matris olsun. A matrisinin sıfır uzayı; $S=\{y: Ay=0, y\in ¢^m\}$ olacak şekildeki S vektörlerin kümesi olarak tanımlanır.

<u>TEOREM.1.1.2.</u> (Rohde(1964), S:34) P_1 ve P_2 tekil olmayan matrisler ise;

$$(P_1AP_2)^{(1)}=P_2^{-1}A^{(1)}P_1^{-1}$$

dir.

<u>TEOREM.1.1.3.</u> (Pringle ve Rayner(1971), S:8) A; r ranklı, P_1 ve P_2

$$P_1AP_2=N=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde tekil olmayan matrisler ise bir G matrisinin A nın tek koşullu inversi olması için gerek ve yeter koşul G nin ;

$G=P_2N^{(1)}P_1$

formunda ifade edilebilmesidir. Burada U, V ve W keyfi matrisler olmak üzere ,

$$N^{(1)}=\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

<u>İSPAT:</u> $N^*=\begin{bmatrix} X & U \\ V & W \end{bmatrix}$

olsun. N*'ı soldan ve sağdan N ile çarparsak,

$$NN^*N=\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Dolayısıyla N^* ın, N nin tek koşullu inversi olması için gerek ve yeter koşul $X=I_r$ olmasıdır. Böylece,

$$N^{(1)}=\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

dir. Teorem. 1.1.2. den ,

$G=P_2N^{(1)}P_1$

şeklinde bulunur.

<u>TANIM.1.1.10.</u> A nxn tipinde bir matris olsun. $|A-\lambda I| = 0$ denklemine A nın karekteristik denklemi denir.

Bu denklemden bulunan n tane köke, A nın karekteristik kökleri (özdeğerleri) ve bu özdeğerlere karşılık gelen vektörlere ise A nın karekteristik vektörleri denir.

<u>TANIM.1.1.11.</u> A mxn tipinde bir matris olsun. AA' veya A'A nın pozitif özdeğerlerinin kareköküne A matrisinin, tekil değerleri (singüler value) denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

<u>TANIM.1.1.12.</u> A nxn tipinde bir matris olsun.
$[A'A$ nın maksimum karekteristik kökü$]^{1/2}$ ifadesine A matrisinin spectral normu denir ve $\|A\|_\sigma$ şeklinde gösterilir.

<u>TANIM.1.1.13.</u> nxn tipindeki bir A matrisinin kendisiyle çarpımı yine kendisini veriyorsa A matrisine idempotent'dir denir.

$A^3=A$ olan matrise de tripotent matris denir.

Şimdi de elamanları karmaşık sayılar olan matrisler için bazı tanımlar verelim.

<u>TANIM.1.1.14.</u> A ve B gerçel matrisleri için $M=A+iB$ ise $\bar{M} = A-iB$ matrisine M nin kompleks eşleniği denir.

TANIM.1.1.15. M her hangi bir matris olsun. M nin kompleks eşleniğinin transpozuna M nin eşlenik transpozu denir ve M^* , $\bar{M}'$ sembolleri ile gösterilir.

TANIM.1.1.16. Eşlenik transpozu kendisine eşit olan matrise Hermityen matris ve eşlenik transpozu tersine eşit olan matrise Üniter matris denir.

TANIM.1.1.17. A kümesi üzerinde tanımlı $\leqslant$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A kümesine kısmi sıralı küme ve $\leqslant$ bağıntısına da A üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir.

Her $a,b,c \in A$ için,

P1- $a \leqslant a$ (Yansıma)

P2- $a \leqslant b$, $b \leqslant a$ ise $a=b$ (Ters simetri)

P3- $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ ise $a \leqslant c$ (Geçişme)

TANIM.1.1.18. A kümesi üzerinde tanımlı $\leqslant$ bağıntısı sadece P1 ve P3 özelliklerini sağlıyorsa A ya ön sıralı küme ve $\leqslant$ bağıntısına da A üzerinde ön sıralama bağıntısı denir.

1.2. İki Negatif Olmayan Matrisin Moore - Penrose İnverslerinin Farkının Negatif Olmaması

LEMMA.1.2.1. A,B ve A-B matrisleri p.d. ise $B^{-1} - A^{-1}$ de p.d. dir.

İSPAT: (Graybil(1983),S:409 ve Rao(1973),S:70)

LEMMA.1.2.2. A, r ranklı nxn tipinde negatif olmayan bir matris ise $A=MM'$ olacak şekilde r ranklı bir nxr tipinde M matrisi vardır.

LEMMA.1.2.3. A nxn tipinde negatif olmayan bir matris ise her nx1 x vektörü için $x'Ax \geqslant 0$ dır.

LEMMA.1.2.4. $MM'-NN'$ negatif olmayan matris ise $N=MH$ olacak şekilde bir H matrisi vardır.

LEMMA.1.2.5. A,B ve A-B negatif olmayan matrisler ise , $\text{rank}(A) \geqslant \text{rank}(B)$ dir.

LEMMA.1.2.6. A p.d. ve I-A negatif olmayan bir matris ise , $A^{-1}-I$ da negatif olmayan bir matristir.(Burada I nxn tipinde birim matris dir.)

LEMMA.1.2.7. H rxr tipinde tekil olmayan bir matris ve M nxr tipinde r ranklı bir matris ise ,

$(MH)^{+}=H^{-1}M^{+}$

dır.

TEOREM.1.2.1. (Milliken ve Akdeniz(1977)) A,B ve A-B nxn negatif olmayan matrisler olsun. $B^{+}-A^{+}$ nın negatif olmayan bir matris olması için gerek ve yeter koşul rank(A)=rank(B) olmasıdır.

İSPAT: A ve B negatif olmayan matrisler olduğundan Lemma.1.2.2. den A=MM' ve B=NN' olacak şekilde r ranklı nxr tipinde bir M matrisi (rank(A)=r) ve s ranklı nxs tipinde bir N matrisi (rank(B)=s) vardır.

A-B negatif olmayan bir matris olduğundan, MM'-NN' negatif olmayan bir matris ve Lemma.1.2.4. den N=MH olacak şekilde bir rxs tipinde H matrisi vardır.

$A-B=MM'-MHH'M'=M(I-HH')M'$

şeklinde ifade edilebildiğinden bu I-HH' nün negatif olmayan bir matris olmasını gerektirir. Lemma.1.2.5. den de ;

$rank(A) \geq rank(B) \qquad (1)$

bulunur.

Gereklilik: $B^{+}-A^{+}$ nın negatif olmayan bir matris olduğunu varsayalım. Lemma.1.2.5. den $rank(B^{+}) \geq rank(A^{+})$ bulunur.
(1.6) dan $rank(B) \geq rank(A)$ olur. Bu ifade (1) ile birleştirilirse ,

$rank(A)=rank(B)$

olduğu bulunur.

Yeterlilik: rank(A)=rank(B) olduğunu varsayalım. O zaman H rxr tipinde tekil olmayan bir matris ve böylece HH' rxr tipinde p.d. matristir. Lemma.1.2.6. dan;

$(HH')^{-1}-I = (H')^{-1}H^{-1}-I$

negatif olmayan bir matristir. Böylece,

$(M')^{+}[(H')^{-1}H^{-1}-I]M^{+}$

negatif olmayan bir matristir. Moore-Penrose inverslerle çarpılması ile

$(M')^{+}(H')^{-1}H^{-1}M^{+}-(M')^{+}M^{+}$

matrisinin negatif olmayan bir matris olduğu bulunur. H tekil olmayan ve M r ranklı bir nxr matris olduğundan Lemma.1.2.7. den ,

$N^{+}=(MH)^{+}=H^{-1}M^{+}$

bulunur. Buradan,

$(N')^{+}=((MH)')^{+}=(H'M')^{+}=(M')^{+}(H')^{-1}$

$(M')^{+}(H')^{-1}H^{-1}M^{+} - (M')^{+}M^{+}=(N')^{+}N^{+} - (M')^{+}M^{+}$

$(N')^{+}N^{+}=(NN')^{+}=B^{+}$

$(M')^{+}M^{+}=(MM')^{+}=A^{+}$

elde edilir. Böylece; $B^{+}-A^{+}$ nın negatif olmayan bir matris olduğu bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

1.3. Bir Negatif Olmayan Matrisin Negatif Olmayan Genelleştirilmiş İnversleri Hakkında Bazı Sonuçlar

LEMMA.1.3.1. $A=QQ'$, nxn tipinde r ranklı negatif olmayan A matrisinin bir rank ayrışımı olsun. A nın (1,2) inversi G nin simetrik olması için gerek ve yeter koşul $G=HH'$ şeklinde ifade edilebilmesidir. Burada H nxr tipinde bir matris ve $H'Q=I_r$ dir.

İSPAT: Rao ve Mitra(1971,S:28) ve Pringle ve Rayner(1971,S:25) de bulunabilir.

TEOREM.1.3.1. Negatif olmayan bir A matrisinin her hangi simetrik (2)-inversi $A^{(2)}$ negatif olmayan bir matristir.

İSPAT: Her hangi bir P matrisi için $A=PP'$ ve $A^{(2)'}=A^{(2)}$ olduğundan,

$$A^{(2)}=A^{(2)}AA^{(2)}=(A^{(2)}P)(A^{(2)}P)'$$

bulunur. Teorem.1.1.1. den $A^{(2)}$ negatif olmayan bir matristir.

Özel olarak bir n.n.d. matrisin her hangi bir simetrik (1,2) inversi de n.n.d. dir.

Her hangi bir n.n.d. nxn tipinde r ranklı A matrisi ($r<n$) daima,

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P'$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada P nxn tekil olmayan bir matristir.

A matrisinin her hangi bir simetrik (1)-inversi $A^{(1)}$ in,

$$A^{(1)}=(P')^{-1}\begin{bmatrix} I_r & U \\ U' & V \end{bmatrix}P^{-1}$$

şeklinde ifade edilebileceği biliniyor. Burada U ve V sırasıyla rx(n-r) ve (n-r)x(n-r) tipinde matrislerdir. Ayrıca V simetriktir. $A^{(1)}$ simetrik matrisinin n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul $A^{(1)}$ deki ortadaki matrisin n.n.d. olmasıdır. Bu ise her zaman doğru değildir. Yani, ortadaki matris her zaman n.n.d. olmayabilir. Bu yüzden Teorem.1.3.1.'e benzer sonuçlar (1)-inversler için sağlanmaz.

TEOREM.1.3.2. r ranklı her hangi bir n.n.d. A matrisi için s rankı ile $A^{(1)}$ in n.n.d. olması için gerek ve yeter koşul $A^{(1)}$ in $A+xx'$ nün bir simetrik (1,2)-inversi olmasıdır. Burada x ; nx(s-r) tipinde ve rank(A:x)=s dir.

TEOREM.1.3.3. A nxn tipinde r ranklı n.n.d. bir matris olsun. t ranklı n.n.d. her hangi bir $A^{(1)}$ ve $r\leqslant s\leqslant t\leqslant u$ için,

$$A_s^{(1)}\leqslant A^{(1)}\leqslant A_u^{(1)}$$

olacak şekilde u ranklı $A^{(1)}_u$ ve s ranklı $A^{(1)}_s$ n.n.d. (1)-inversleri vardır.

Teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için sayısal bir örnek verelim.

ÖRNEK.1.3.1.

$$X=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A=XX'=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&2&2\\1&2&2&2\end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi A,4x4 tipinde r=2 ranklı n.n.d. bir matristir.

$$PAP'=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}=N$$

olacak şekilde P'yi elamenter satır işlemleri ile hesaplarsak;

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0&0&0\\-1/2\sqrt{2/3}&\sqrt{2/3}&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem.1.1.3. den ,

$A^{(1)}=P'N^{(1)}P$ ve

$$N^{(1)}=\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

dir.

U=0, V=0, w=0 alırsak;

$$A_s^{(1)}=1/3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $A_s^{(1)}$, s=2 ranklı n.n.d. matristir. $N^{(1)}$ de, U=V=0,

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alınırsa;

$$A^{(1)}=1/3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup $A^{(1)}$, t=3 ranklı n.n.d. matristir.

$N^{(1)}$ de; U=V=0, $W=I_2$ alınırsa;

$$A_u^{(1)}=1/3\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olup $A_u^{(1)}$, u=4 ranklı n.n.d. matristir.

$$A^{(1)}-A_s^{(1)}=1/3\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&-3&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

olup, $x'(A^{(1)}-A_s^{(1)})x=(x_2-x_3)^2\geq 0$ bulunur.

$$A_u^{(1)}-A^{(1)}=1/3\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&-3\\0&0&0&0\\0&-3&0&3\end{bmatrix}$$

olup, $x'(A_u^{(1)}-A^{(1)})x=(x_2-x_4)^2\geq 0$ bulunur.

$$A_u^{(1)}-A_s^{(1)}=1/3\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&6&-3&-3\\0&-3&3&0\\0&-3&0&3\end{bmatrix}$$

olup, $x'(A_u^{(1)}-A_s^{(1)})x=(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\geq 0$ bulunur. Görüldüğü gibi $A_s^{(1)}\leq A^{(1)}\leq A_u^{(1)}$ olacak şekilde n.n.d. (1)-inversler vardır.

<u>TEOREM 1.3.4.</u> A , r ranklı nxn tipinde n.n.d. bir matris olsun. t ranklı n.n.d. her hangi bir $A^{(2)}$ ve $r\geq s\geq t\geq u$ için ,

$$A_s^{(2)}\geq A^{(2)}\geq A_u^{(2)}$$

olacak şekilde u ranklı $A_u^{(2)}$ ve s ranklı n.n.d. $A_s^{(2)}$ (2)-inversi vardır.

<u>SONUÇ.1.3.1.</u> A r ranklı nxn tipinde n.n.d. matris ve $r_2\leq r\leq r_1$ olsun. Her hangi bir r_1 ranklı $A^{(1)}$ için ,

$$A^{(2)}\leq A^{(1)}$$

olacak şekilde r_2 ranklı $A^{(2)}$ vardır. Tam tersine r_2 ranklı her hangi bir $A^{(2)}$ için,

$$A^{(1)}\geq A^{(2)}$$

olacak şekilde r_1 ranklı $A^{(1)}$ vardır.

<u>LEMMA.1.3.2.</u> (i) A nın her hangi bir $A^{(1)}$ (1)-inversi ve $x\epsilon R(A)$ için,

$$A^{(1)}-\frac{A^{(1)}xx'A^{(1)}}{1+x'A^{(1)}x}$$

A+xx' nün bir (1)-inversidir.Benzer sonuç (1,2) ve (1,2,3,4)-inversler içinde sağlanır.

(ii) A nın her hangi bir $A^{(2)}$ (2)-inversi ve her hangi x için

$$A^{(2)}-\frac{A^{(2)}xx'A^{(2)}}{1+x'A^{(2)}x}$$

A+xx' nün bir (2)-inversidir.

<u>İSPAT:</u> (i) $x\epsilon R(A)$ olduğundan $AA^{(1)}x=x$ eşitliği elde edilir.Bu eşitlik kullanılarak matris çarpımı vasıtası ile istenilen sonuç bulunur.

(ii) Buradaki x keyfi olduğundan matris çarpımı ile hemen bulunur.

<u>LEMMA.1.3.3.</u> r ranklı bir n.n.d. M matrisi ve her hangi bir x vektörü için,

$$M-Mxx'/(1+x'Mx)$$

M gibi aynı sıfır uzayına ve r rankına sahiptir.

Lemma.1.3.2. ve Lemma.1.3.3. den faydalanılarak aşağıdaki Lemmayı verebiliriz.

<u>LEMMA.1.3.4.</u> (i) n.n.d. bir A matrisinin her hangi bir n.n.d. (1)-inversi $A^{(1)}$ ve $x\epsilon R(A)$ için,

$$(A+xx')^{(1)}\leq A^{(1)}$$

olacak şekilde A+xx' nün aynı ranka sahip bir n.n.d. $(A+xx')^{(1)}$ (1)-inversi vardır.Benzer sonuç (1,2) ve (1,2,3,4)-inverler için de sağlanır.

(ii) $x \epsilon R(A)$ kabul edilmezse (i) deki sonuç (2)-inversler için sağlanır.

<u>LEMMA.1.3.5.</u> B bir n.n.d. matris ve $x \in R(B)$ olmak üzere $A=B+xx'$ olsun.O zaman her hangi n.n.d. $A^{(1)}$ ve $A^{(2)}$ matrisleri için,

$x'A^{(1)}x<1$ ve $x'A^{(2)}x<1$

koşulları sağlanır.

<u>LEMMA.1.3.6.</u> B bir n.n.d. matris ve $A=B+xx'$ olsun.
(i) $x \in R(B)$ ise A nın her hangi bir n.n.d. $A^{(1)}$ (1)-inversi için,

$$A^{(1)}+\frac{A^{(1)}xx'A^{(1)}}{1-x'A^{(1)}x}$$

B nin bir (1)-inversidir.B nin bir (1)- inversi $A^{(1)}$ gibi aynı rank ve sıfır uzayına sahip olur.Bu yüzden her hangi bir n.n.d. $A^{(1)}$ matrisi için $A^{(1)}$ ile aynı ranka sahip ve $B^{(1)} \geq A^{(1)}$ olacak şekilde bir n.n.d. $B^{(1)}$ matrisi vardır.Benzer sonuç (2),(1,2) ve (1,2,3,4)-inversler için de sağlanır.
(ii) $x'A^{(2)}x \neq 1$ olacak şekilde A nın her hangi bir n.n.d. (2)-inversi $A^{(2)}$ için,

$$A^{(2)}+\frac{A^{(2)}xx'A^{(2)}}{1-x'A^{(2)}x}$$

B nin bir (2)-inversidir.

1.4. Sıralama Özelliklerinin Tersleri

<u>TEOREM.1.4.1.</u> A ve B sırasıyla r ve s ranklı nxn tipinde iki n.n.d. matris, $A \geq B$ ve $\bar{r},\bar{s}$; $\bar{s} \geq \bar{r} \geq r \geq s$ olacak şekilde iki pozitif tam sayı olsun.

(i) $\bar{r}$ ranklı her hangi bir n.n.d. $A^{(1)}$ (1)-inversi için $B^{(1)} \geq A^{(1)}$ olacak şekilde $\bar{s}$ ranklı bir n.n.d. $B^{(1)}$ (1)-inversi vardır.

(ii) r=s ise s ranklı her hangi bir n.n.d. $B^{(1)}$ (1)-inversi için $B^{(1)} \geq A^{(1)}$ olacak şekilde r ranklı bir n.n.d. $A^{(1)}$ (1)-inversi vardır.

TEOREM.1.4.2. $A=B+xx'$ olsun. Burada B, s ranklı n.n.d. ve $x \notin R(B)$ ($\mathrm{rank}(A)=s+1$) dir.

$x'B^{(1)}x<1$ ile $\bar{s} \geq s+1$ ranklı her hangi bir n.n.d. $B^{(1)}$ (1)-inversi için $B^{(1)} \geq A^{(1)}$ olacak şekilde $\bar{s}$ ranklı n.n.d. olmayan $A^{(1)}$ (1)-inversi vardır.

TEOREM.1.4.3. A ve B sırasıyla r ve s ranklı n.n.d. iki matris, $A \geq B$ ve $\bar{r}, \bar{s}$; $r \geq s \geq \bar{s} \geq \bar{r}$ 'yi sağlayan iki pozitif tamsayı olsun.

(i) $\bar{s}$ ranklı her hangi bir n.n.d. $B^{(2)}$ (2)-inversi için $B^{(2)} \geq A^{(2)}$ olacak şekilde $\bar{r}$ ranklı n.n.d. bir $A^{(2)}$ (2)-inversi vardır.

(ii) $r=s$ ise $\bar{r}$ ranklı her hangi bir n.n.d. $A^{(2)}$ (2)-inversi için $B^{(2)} \geq A^{(2)}$ olacak şekilde $\bar{s}$ ranklı n.n.d. bir $B^{(2)}$ (2)-inversi vardır.

TEOREM.1.4.4. $A=B+xx'$ olsun. Burada B, s ranklı n.n.d. ve $x \notin R(B)$ ($\mathrm{rank}(A)=s+1$) dir.

(i) $x'A^{(2)}x=1$ ile $\bar{s} \leq s$ ranklı her hangi bir n.n.d. $A^{(2)}$ (2)-inversi için,

$$B^{(2)} \geq A^{(2)}$$

olacak şekilde $\bar{s}$ ranklı her hangi bir n.n.d. $B^{(2)}$, (2)-inversi yoktur.

(ii) $x'A^{(2)}x<1$ eşitsizliğini sağlayan (i) deki $A^{(2)}$ ise,

$$B^{(2)} \geq A^{(2)}$$

olacak şekilde $\bar{s}$ ranklı bir n.n.d. $B^{(2)}$ (2)-inversi vardır.

TEOREM.1.4.5. A ve B, $A \geq B$ olacak şekilde r ranklı iki n.n.d. matris olsun. r ranklı A nın her hangi bir n.n.d. $A^{(1,2)}$ (1,2)-inversi için,

$$B^{(1,2)} \geq A^{(1,2)}$$

olacak şekilde r ranklı B nin bir n.n.d. $B^{(1,2)}$ (1,2)-inversi vardır. Tersi de doğrudur. Bu teoremde belirtilen durum (1,2,3) ve (1,2,4)-inversler için de geçerlidir.

2. BÖLÜM

MATRİSLERİN KISMİ SIRALAMASI

Bu bölümde öncelikle matrislerin kısmi ve ön sıralamalarının tanım ve örneklerini vereceğiz. Daha sonra bu sıralamaların çeşitli özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Ayrıca birinci bölümde olduğu gibi kısmi sıralama ve ön sıralama altında genelleştirilmiş inverslere göre matris sıralamasının çeşitli sonuç ve özelliklerini ayrıntılı bir biçimde inceleyeceğiz.

2.1. Kısmi Sıralama Tanım ve Özellikleri

__Yıldız kısmi sıralaması:__ A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun." * kısmi sıralaması " aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A \leq^* B \Leftrightarrow A^*A=A^*B \text{ ve } AA^*=BA^* \qquad (2.1)$$

(2.1) ile gösterdiğimiz yıldız kısmi sıralaması Drazin(1977, 1978)'e aittir. Yıldız sıralama daha sonra Drazin(1978) de aşağıdaki şekillerde de tanımlandı.

$$A \leq^* B \Leftrightarrow A^+A=B^+A \text{ ve } AA^+=AB^+ \qquad (2.2)$$

ve

$$A \leq^* B \Leftrightarrow A^+A=A^+B \text{ ve } AA^+=BA^+ \qquad (2.3)$$

Bu tanımların aşağıdakine denk olduğu kolayca görülür.

$$A \leq^* B \Leftrightarrow AA^+B=A=BA^+A \Leftrightarrow B^+AA^+=A^+=A^+AB^+ \qquad (2.4)$$

Şimdi yıldız kısmi sıralama için bir örnek verelim.

__ÖRNEK.2.1.1.__

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım. (2.1)'i uygulayacak olursak;

$$A^*A=A^*B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad AA^*=BA^*=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur. (2.1) gerektirmesi gerçeklendiğinden $A \leq^* B$ sonucu elde edilir.

Ranklar farkı kısmi sıralaması: A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun." rs kısmi sıralaması " bazı A^- ,$A^=$ ϵ $A^{(1)}$ için,

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow A^-A=A^-B \ \text{ ve } \ AA^= = BA^= \qquad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

Hartwig(1980) de A^- ve $A^=$ tek koşullu genelleştirilmiş inverslerin yerine aynı refleksif genelleştirilmiş inversleri yerleştirerek yeni bir kısmi sıralama tanımladı ve bunu "+ sıralama " olarak adlandırdı.

Bu tanımı şu şekilde ifade edebiliriz:

A^+ ϵ $A^{(1,2)}$ için ,

$$A^+A=A^+B \quad \text{ve} \quad AA^+=BA^+ \qquad (2.6)$$

Ayrıca (2.5) sıralamasının ,

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow \mathrm{rank}(B-A)=\mathrm{rank}(B)-\mathrm{rank}(A) \qquad (2.7)$$

ifadesine denk olduğu Hartwig(1980) de gösterilmiştir.(2.7)'nin aynı zamanda bazı B^- , $B^=$, $B^{\equiv}$ ϵ $B^{(1)}$ için,

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow BB^-A=AB^=B=AB^{\equiv}A=A \qquad (2.8)$$

şeklinde ifade edilebileceği Marsaglia ve Styan(1974) ve Cline ve Funderlic(1979) tarafından gösterilmiştir.

ÖRNEK.2.1.2.

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.rank(A)=2 ve rank(B)=3 dir.

$$B-A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla rank(B-A)=1 bulunur. rank(B-A)=rank(B)-rank(A) koşulu sağlandığından $A \leq^{rs} B$ deriz.

<u>**Kolon uzayları ön sıralaması:**</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun." s kolon uzayları sıralaması",

$$A \leq^{s} B \Leftrightarrow R(A) \subseteq R(B) \quad \text{ve} \quad R(A^*) \subseteq R(B^*) \qquad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.9)'un kullanılması ile kolon uzayları ön sıralamasının bazı B^{-} , $B^{=} \in B^{(1)}$ için,

$$A \leq^{s} B \Leftrightarrow BB^{-}A=A=AB^{=}B \qquad (2.10)$$

şeklinde de ifade edilebileceği kolayca görülür.

<u>ÖRNEK.2.1.3.</u>

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.

$$R(A)=\{ \alpha(1,2)+\beta(2,4):\alpha,\beta \in R\}$$

$$=\{ (x,2x):x=\alpha+2\beta;\alpha,\beta\in R\}$$

$$R(B)=\{ \delta(1,0)+\mu(0,1):\delta,\mu \in R\}$$

$$=\{ (\delta,\mu): \delta,\mu \in R \}$$

A matrisinin kolon uzayında aldığımız her vektör B nin kolon uzayında olduğundan , $R(A) \subseteq R(B)$ ve A ile B simetrik matrisler olduğundan $R(A^*) \subseteq R(B^*)$ olur. Dolayısıyla $A \leq^{s} B$ bulunur.

Tekil değerler ön sıralaması; A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun."σ tekil değerler sıralaması",

$$A \leq^{\sigma} B \Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \sigma(B) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır.Bu sıralamayı göstermek üzere aşağıdaki örneği verebiliriz.

ÖRNEK.2.1.4.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.$\sigma(A)=\{1\}$ ve $\sigma(B)=\{(3-\sqrt{5})/2,(3+\sqrt{5})/2,1\}$ bulunur.(2.11) den $A \leq^{\sigma} B$ olduğu görülür.

Şimdi buraya kadar gördüğümüz kısmi ve ön sıralamalarla ilgili bazı önemli özellikleri verelim.

(2.5),(2.3),(2.8) ve (2.10) ifadelerinin kullanılmasıyla,

$$A \leq^{*} B \Longrightarrow A \leq^{rs} B \Longrightarrow A \leq^{s} B \tag{2.12}$$

olduğu kolayca görülür.(2.8) ve (2.10) dan,

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow A \leq^{s} B \text{ ve } A^{(1)} \cap B^{(1)} \neq \emptyset$$

olduğu bulunur.

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow B^{(1)} \subseteq A^{(1)}$$

olması gerektiği de Mitra(1986,Teorem.2.1.) de gösterilmiştir.Ayrıca bu sonuç ile Sambamurty(1987,Teorem.1.)'inin birleştirilmesi ile,

$$A \leq^{rs} B \Leftrightarrow B^{(1,2)} \subseteq A^{(1)}$$

bulunur.Hartwig ve Styan(1987,Teorem.2.)'ye göre $A \leq^{*} B$ olması

$$U^*AV=\begin{bmatrix} D_a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U^*BV=\begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde U ve V üniter matrislerinin bulunmasını gerektirir.Burada D_a axa tipinde ve D (b-a)x(b-a) tipinde gerçel köşegen ve p.d. matrislerdir.Dolayısıyla;

$$A \leq^{*} B \Longrightarrow A \leq^{\sigma} B \tag{2.13}$$

olur.

Şimdi de daha önce birinci bölümde ele aldığımız bir sıralamayı bir kısmi sıralama olduğu için bu bölümde de ele almak ve diğer sıralamalarla aralarındaki ilişkileri incelemek istiyoruz. Löwner kısmi sıralama olarak adlandırılan bu sıralamayı aşağıdaki gibi tanımlarız.

<u>**Löwner sıralama:**</u> A ve B mxm tipinde kompleks matrisler olsun." L Löwner sıralaması" bazı K için,

$$A \leq^{L} B \Leftrightarrow B-A=KK^{*} \qquad (2.14)$$

veya buna denk olarak,

$$A \leq^{L} B \Leftrightarrow B-A \text{ hermityen n.n.d.} \qquad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu çalışmamız boyunca mxm tipindeki A ve B matrisleri için, $0 \leq^{L} A$ ile A matrisinin hermityen n.n.d. olduğunu ve $0 \leq^{L} A \leq^{L} B$ ile de A, B ve B-A matrislerinin hermityen n.n.d. olduğunu göstereceğiz.

A ve B mxm tipinde matrisler iken $A \leq^{L} B$ ile $A \leq^{*} B$, $A \leq^{r=} B$, $A \leq^{=} B$ ve $A \leq^{\sigma} B$ sıralamalarından her hangi biri arasında bilinen pek bir bağıntı yoktur. Bununla beraber ;

$$A=A^{*}\ ,\ 0 \leq^{L} B \text{ ve } A \leq^{r=} B \Longrightarrow A \leq^{L} B \qquad (2.16)$$

ve

$$A=A^{2}\ ,\ B=B^{2} \text{ ve } A \leq^{L} B \Longrightarrow A \leq^{*} B \qquad (2.17)$$

olduğunu Hartwig ve Styan(1987, Teorem.2.1. ve Teorem.2.2.) de ifade ettiler. Ayrıca;

$$0 \leq^{L} A \leq^{L} B \Longrightarrow A \leq^{=} B \qquad (2.18)$$

olduğu Baksalary ve Hauke(1987) de gösterilmiştir. (2.16) ve (2.18) gerektirmeleri bizi,

$$0 \leq^{L} A \leq^{L} B \Leftrightarrow A=A^{*}\ ,0 \leq^{L} B, A \leq^{=} B \text{ ve } AB^{-}A \leq^{L} A \qquad (2.19)$$

gerektirmesine götürür. Ayrıca bazı $B^{-} \in B^{\{1\}}$ için,

$$A \leq^{r=} B \Leftrightarrow A \leq^{=} B \text{ ve } AB^{-}A=A \qquad (2.20)$$

diyebiliriz. Dolayısıyla (2.19) ile (2.20) nin karşılaştırılması ranklar farkı kısmi sıralaması ile Löwner kısmi sıralaması arasındaki önemli bir farkı belirtir.

Bu bölümün buraya kadar olan kısmında kısmi ve ön sıralama tanımlarını ve bu sıralamalar altında matrislerin bazı özellikleri ile ilgili çeşitli sonuçları bir arada topladık. Şimdi ranklar farkı kısmi sıralaması ile tekil değerler ön sıralamasını kullanarak yeni bir kısmi sıralama tanımlayacağız.

<u>LEMMA.2.1.1.</u> $A,B\in\mathbb{C}_{m,n}$, $1\leq a\leq b$ ile rank(A)=a ve rank(B)=b olsun. $A \leq^{r*} B$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$U^*AV=diag(E,0) \text{ ve } U^*BV=diag(M,0) \qquad (2.21)$$

olacak şekilde $U\in\mathbb{C}_{m,m}$ ve $V\in\mathbb{C}_{n,n}$ üniter matrislerinin bulunmasıdır. Burada $E\in\mathbb{C}_{a,a}$ olup köşegeninde $\sigma(A)$ nın elamanları olan köşegen p.d. bir matris ve $M\in\mathbb{C}_{b,b}$ olup tekil olmayan ve bazı $F,G\in\mathbb{C}_{a,b-a}$ ve bazı köşegen p.d. $D\in\mathbb{C}_{b-a,b-a}$ için ,

$$M=\begin{bmatrix} E+FDG^* & FD \\ DG^* & D \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

formunda bir gösterime sahip olan bir matristir. Bundan başka $A \leq^* B$ olması için gerek ve yeter koşul (2.22) deki F ve G nin her ikisinin de sıfır matris olmasıdır. Yani; A ve B nin benzer şekilde tekil ayrışıma sahip ve

$$\sigma(A)\subseteq\sigma(B) \qquad (2.23)$$

olmasıdır.

Lemmanın sonuçları (2.7) ve (2.23) koşullarının birleşimi olarak tanımlanan bir ilişkinin göz önüne alınmasını sağlar. (2.7) bağıntısının $\mathbb{C}_{m,n}$ de bir kısmi sıralama ve (2.23) bağıntısının da $\mathbb{C}_{m,n}$ de bir ön sıralama tanımladığını biliyoruz. (2.7) ve (2.23) bağıntılarının $\mathbb{C}_{m,n}$ de yeni bir kısmi sıralama tanımladığı bulunur.

<u>α ve λ sıralamaları:</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun. $A \leq^{r*} B$ ve $A \leq^{\sigma} B$ ise $A \leq^{\alpha} B$ denir.

Bundan başka; Hermityen matrisler için (2.23) koşulu yerine $\lambda(A)\subseteq\lambda(B)$ koşulunun yerleştirilmesi ile $A \leq^{\lambda} B$ kısmi sıralaması tanımlanır. Burada $\lambda(.)$, (.)'nın öz değerlerini gösterir.

Lemma.2.1.1. den dolayı, $A \leq^{\alpha} B$ sıralamasının yıldız ve ranklar farkı kısmi sıralaması arasında kaldığı yukarıdaki tanımdan açıktır. Böylece (2.12) gerektirmesi,

$$A \leq^* B \Longrightarrow A \leq^{\alpha} B \Longrightarrow A \leq^{r*} B \Longrightarrow A \leq^{-} B \qquad (2.24)$$

şeklinde genişletilir. (2.24)'ü açıklamak için aşağıdaki örneği verebiliriz.

ÖRNEK.2.1.5.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&z\end{bmatrix}$$

matrislerini ele alalım.

$$\sigma(A)=\{1\} \text{ ve } \sigma(B)=\{(3-\sqrt{5})/2\ ,\ (3+\sqrt{5})/2\ ,|z|\ \}$$

bulunur. Bu durumda $z=1$ alarak (2.24) gerektirmesinin sağlandığını, $|z| \neq 1$ alarak (2.24) gerektirmesinin ters çevrilmediği görülür.

Şimdi bazı özellikleri sağlayan bir B matrisi için, $A \leq^* B$ sıralamasını sağlayan her A matrisinin aynı özelliğe sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

$$B=BB^*B \quad \text{ve} \quad A \leq^* B \Longrightarrow A=AA^*A \tag{2.25}$$

$$\|B\|_\sigma \leq 1 \text{ ve } A \leq^* B \Longrightarrow \|A\|_\sigma \leq 1 \tag{2.26}$$

$$B=BB^* \quad \text{ve} \quad A \leq^* B \Longrightarrow A=AA^* \tag{2.27}$$

$$B=B^2 \quad \text{ve} \quad A \leq^* B \Longrightarrow A=A^2 \tag{2.28}$$

Hartwig ve Styan (1986) da idempotentliğin daha zayıf olan ranklar farkı kısmi sıralaması altında bile sağlandığını ifade ettiler. Böylece (2.28),

$$B=B^2 \quad \text{ve} \quad A \leq^{rs} B \Longrightarrow A=A^2 \tag{2.29}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Fakat (2.25), (2.26) ve (2.27) gerektirmeleri $A \leq^* B$ yerine $A \leq^{rs} B$ yerleştirilirse sağlanmaz.

(2.25) ve (2.26) nın sağlanmadığı,

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak ; (2.27) nin sağlanmadığı da ,

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak görülebilir. Bununla birlikte (2.25), (2.26) ve (2.27) gerektirmeleri $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ ön sıralaması ve $A \leq^{\alpha} B$ kısmi sıralamasının kullanılması ile desteklenebilir.

TEOREM.2.1.1. $B=BB^*B$ veya $\|B\|_{\sigma} \leq 1$ ise $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$'yi sağlayan her A aynı özelliğe ve eğer $B=BB^*$ ise $A \leq^{\alpha} B$ yı sağlayan her A da aynı özelliğe sahip olur.

İSPAT: $B=BB^*B$ olması için gerek ve yeter koşul B nin sıfırdan farklı tekil değerlerinin bir olması gerektiğinden ve $\|B\|_{\sigma} \leq 1$ olması için gerek ve yeter koşul B nin en büyük tekil değerinin biri geçmemesi gerektiğinden, $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ bu iki özelliğin sağlanması için yeterlidir.

Teoremin son kısmı ise bir B matrisinin $B=BB^*$ şeklinde ifade edilebilmesi için gerek ve yeter koşulun onun aynı zamanda $B=B^2$ ve $B=BB^*B$ özelliklerini sağlaması gerçeğinin kullanılması ve (2.29)'un direkt olarak birleştirilmesi ile bulunur.

Ayrıca Tanım.2.1.1. den faydalanarak, hermityen matrisin tekil değerleri öz değerlerinin mutlak değeri olduğundan, hermityen A ve B için,

$$A \leq^{\lambda} B \Longrightarrow A \leq^{\alpha} B$$

dir.

Simetrik ve idempotent bir matrisin sıfırdan farklı özdeğerleri bir olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

SONUÇ.2.1.1. Hermityen ve idempotent A , B matrisleri için

$$A \leq^{\alpha} B \Leftrightarrow A \leq^{\lambda} B$$

dir.

İSPAT: $A \leq^{\alpha} B$ olsun. $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ dir. Buradan;

$\lambda(A^*A) \subseteq \lambda(B^*B)$ ve dolayısıyla $\lambda(A) \subseteq \lambda(B)$ bulunmuş

olur. Böylece gereklilik kısmı gösterilmiş olur.

$A \leq^{\lambda} B$ olsun. $\lambda(A) \subseteq \lambda(B)$ dir. Buradan $\lambda(A^2) \subseteq \lambda(B^2)$ diyebiliriz. Bu da $\lambda(A^*A) \subseteq \lambda(B^*B)$ olmasını gerektirir ve buradan $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ bulunur. Dolayısıyla $A \leq^{\alpha} B$ bulunmuş olur.

TEOREM.2.1.2. A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) $B^+=B^*$ ve $A \leq^{\sigma} B \Longrightarrow A^+=A^*$
(b) $BB^* \leq^{L} I_m$ ve $A \leq^{\sigma} B \Longrightarrow AA^* \leq^{L} I_m$

A ve B mxm kompleks matrisler olsun. Bu durumda da aşağıdakiler sağlanır.

(c) $B^2=0$ ve $A \leq^{=} B \Longrightarrow A^2=0$
(d) $B=B^*=B^3$, $A=A^*$ ve $A \leq^{\sigma} B \Longrightarrow A=A^3$
(e) $0 \leq^{L} B$, $A=A^*$ ve $A \leq^{r=} B \Longrightarrow 0 \leq^{L} A$
(f) $B=BB^*$, $A \leq^{r=} B$ ve $A \leq^{\sigma} B \Longrightarrow A=AA^*$
(g) $B^*B^+=B^+B^*$ ve $A \leq^{*} B \Longrightarrow A^*A^+=A^+A^*$

İSPAT: (a) ve (b) sonuçları Teorem.2.1.1. den kolayca bulunur. (2.13) ün kullanılması ile $A \leq^{\sigma} B$ tekil değerler ön sıralaması yerine $A \leq^{*} B$ yıldız sıralaması yerleştirelerek karşılık gelen sonuçların daha da kuvvetlendirilebileceğini söyleyebiliriz. Diğer yandan,

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

matrisleri $A \leq^{\sigma} B$ yerine $A \leq^{r=} B$ veya $A \leq^{L} B$ yerleştirilemiyeceğini gösterir. Yani;

$$B^+=B^* \text{ ve } A \leq^{r=} B \Longrightarrow A^+ \neq A^*$$

olur. (c) sonucu $B^2=0$ ve $A \leq^{=} B$ nin kullanılması ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$A \leq^{=} B$ ise (2.10) dan $BB^-A=A=AB^-B$

$A^2= AB^- BBB^-A= AB^- B^2B^-A= 0$

bulunur.

Bir hermityen matrisin tripotent olması için $B^+=B^*$ olması gerektiği bilindiğinden ve $B^+=B^*$ ve $A \leq^{\sigma} B$ ise $A^+=A^*$ olduğundan (d) sonucu $A=A^*$ ve $A^+=A^*$ eşitliklerinin kullanılması ile,

$$AA^+A=A \Longrightarrow AA^*A=A \Longrightarrow AAA=A \Longrightarrow A^3=A$$

şeklinde bulunur. Tekrar (2.30) daki matrisler alınarak $A \leq^{\sigma} B$ yerine $A \leq^{r=} B$ veya $A \leq^{L} B$ yerleştirilemiyeceği görülür. Bundan başka;

$$A=1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2.31)$$

matrisleri hermityen olmayan matrisler için $A \leq^{\sigma} B$ yerine $A \leq^{*} B$ yerleştirilse bile tripotentliğin sağlanmadığını gösterir. (e) sonucu (2.20) nin bir sonucudur. (2.16) nın kullanılmasıyla (e) nin sağ tarafı $0 \leq^{L} A \leq^{L} B$ ye genişletilebilir. (f) sonucu Teorem.2.1.1. den hemen bulunur. (2.12) ve (2.13) den $A \leq^{r=} B$ ve $A \leq^{\sigma} B$ yerine $A \leq^{*} B$

yerleştirilebileceği görülür. (g) sonucu $A \leq^{*} B$ iken (2.4) ün kullanılmasıyla;

$$A^{*}A^{+}=A^{+}AB^{*}B^{+}AA^{+}=A^{+}AB^{+}B^{*}AA^{+}=A^{+}A^{*}$$

şeklinde bulunur.

TEOREM.2.1.3. A ve $B \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve $\leq^{\tau}$, $\leq^{*}$ veya $\leq^{r=}$ veya $\leq^{=}$ yerine geçsin. O zaman;

$$A \leq^{\tau} B \Longrightarrow \begin{cases} B^{*}A \leq^{\tau} B^{*}B \quad \text{ve} \quad AB^{*} \leq^{\tau} BB^{*} \\ B^{+}A \leq^{\tau} B^{+}B \quad \text{ve} \quad AB^{+} \leq^{\tau} BB^{+} \end{cases} \qquad (2.32)$$

dir. Benzer özellikler Löwner kısmi sıralaması ve tekil değerler ön sıralaması için sağlanmaz. örnek olarak,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

matrislerini alarak görebiliriz. (2.1) in kullanılmasıyla, (2.32) nin birinci kısmının $\leq^{\tau}$ yerine $\leq^{*}$ yerleştirilmesiyle aşağıdaki sonucu gerektirdiği açıktır.

SONUÇ.2.1.2. $A,B \in \mathbb{C}_{m,n}$ alalım. O zaman,

$$A \leq^{*} B \Longrightarrow A^{*}A \leq^{*} B^{*}B \quad \text{ve} \quad AA^{*} \leq^{*} BB^{*} \qquad (2.33)$$

olur.

$\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ iken $\sigma(A^{*}A)=\sigma(AA^{*}) \subseteq \sigma(BB^{*})=\sigma(B^{*}B)$ olduğu açıktır. Buna rağmen (2.33) deki gerektirmelerin hiç birisi $\leq^{*}$ yerine $\leq^{\alpha}$ sıralaması yerleştirilirse sağlanmaz. Bu durumu,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini alarak görebiliriz. Teorem.2.1.3. ün bir başka sonucu,

$$A \leq^{*} B \Longrightarrow A^{+}A \leq^{*} B^{+}B \quad \text{ve} \quad AA^{+} \leq^{*} BB^{+} \qquad (2.34)$$

dir. Bu sonuç, Drazin(1977) tarafından verilen,

$$A^{*}A \leq^{*} B^{*}B \Longrightarrow A^{+}A \leq^{*} B^{+}B$$

ve

$$AA^{*} \leq^{*} BB^{*} \Longrightarrow AA^{+} \leq^{*} BB^{+}$$

özellikleri ile (2.33) ün birleştirilmesiyle yine Drazin(1977, Sonuç7.4) tarafından bulunmuştur. (2.34) sonucu aşağıdaki sonuç.2.1.3. 'e indirgenebilir. Diğer yandan (2.33), ranklar farkı kısmi sıralaması ve Löwner kısmi sıralaması için sağlanmaz. Bu durum,

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak görülebilir.

SONUÇ.2.1.3. $A,B \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. O zaman,

$$A \leq^{=} B \Leftrightarrow A^{+}A \leq^{*} B^{+}B \quad \text{ve} \quad AA^{+} \leq^{*} BB^{+}$$

dir.

(2.34) sonucunun bir genişlemesini Hartwig(1979, Sonuç1. (xi)) den faydalanarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

SONUÇ.2.1.4.

$$A \leq^{*} B \Leftrightarrow AA^{+} \leq^{*} BB^{+}\ ,\ A^{+}A \leq^{*} B^{+}B \ \text{ ve } \ BA^{+}B=AB^{+}A=A$$

dir.

Kolon uzayları yarı sıralamasının her hangi sıfırdan farklı skalerlerle matrislerin çarpılması altında korunduğu açıktır. Tekil değerler ön sıralaması ve Löwner sıralama sıfırdan farklı skalerlerin kullanılmasının mümkün olmamasına rağmen çok daha hassastır. Bununla birlikte yıldız kısmi sıralama ve ranklar farkı kısmi sıralaması daha da hassastır. Bunu aşağıdaki teoremde ifade edebiliriz.

TEOREM.2.1.4. $A,B \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve $a,b \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $A \neq 0$ ve $A \leq^{*} B$ veya $A \leq^{rs} B$ ise O zaman ne $aA \leq^{*} bB$ ne de $aA \leq^{rs} bB$ sıralamaları $a=0$ veya $a=b$ aşikar durumu haricinde sağlanmayabilir.

Diğer yandan;

$$A \leq^{*} B \Leftrightarrow B-A \leq^{*} B \ \text{ ve } \ A \leq^{rs} B \Leftrightarrow B-A \leq^{rs} B$$

olduğu açıktır. Bu gerektirmeler $\leq^{\alpha}$ sıralaması için geçerli değildir. Örnek olarak yine,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak görülebilir. Bu matrisler için $A \leq^{\alpha} B$ olduğu görülür. Fakat,

$$\sigma(B-A)=\{1,2\} \subsetneq \{(3-\sqrt{5})/2, 1, (3+\sqrt{5})/2\}=\sigma(B)$$

dir. Bundan başka, $A \leq^{\alpha} B$ ve $B-A \leq^{\alpha} B$ bağıntıları aynı anda sağlansa bile bunlar $A \leq^{*} B$ yıldız kısmi sıralamasını gerektirmez. Bu durum,

$$A=\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak görülebilir. Bu durumda;
$\text{rank}(B)=4$, $\text{rank}(A)=\text{rank}(B-A)=2$ ve
$\sigma(A)=\sigma(B-A)=\{2,2\} \subseteq \{1,2,2,3\}=\sigma(B)$ dir. Fakat $AB \neq A^2$ olmaktadır.

Şimdi de matrislerin iki özel çarpımı ile ilgili sıralama özelliklerini verelim.

TANIM.2.1.2. A $m_2 x n_2$ ve B $m_1 x n_1$ tipinde iki matris olsun. A ve B matrislerinin **direkt çarpımı** $m_1 m_2 \times n_1 n_2$ boyutlu bir C matrisi olup,

$$C=\begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n_1} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{m_1} & Ab_{m_2} & \cdots & Ab_{m_1 n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1n_1}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2n_1}A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m_1 1}A & b_{m_1 2}A & \cdots & b_{m_1 n_1}A \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır ve $A \otimes B$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK.2.1.6.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun.

A ve B nin direkt çarpımı,

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & -3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dir.

<u>TANIM.2.1.3.</u> $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ olmak üzere aynı tipte iki matris olsun. A ile B nin karşılık gelen elamanlarının çarpımına A ile B nin <u>Hadamard çarpımı</u> denir ve $A*B$ şeklinde gösterilir.

<u>ÖRNEK.2.1.7.</u>

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$A*B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 8 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

<u>LEMMA.2.1.2.</u> Sıfırdan farklı her hangi K_1 , $K_2 \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve L_1 , $L_2 \in \mathbb{C}_{p,q}$ ve bazı $s \neq 0$ için;

$$K_1\otimes L_1 = K_2\otimes L_2 \Leftrightarrow K_1=sK_2 \text{ ve } sL_1=L_2$$

dir.

<u>TEOREM.2.1.5.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve $C,D \in \mathbb{C}_{p,q}$ olacak şekilde sıfırdan farklı matrisler olsun. O zaman;

(a) $A\otimes C \leq^{*} B\otimes D \Leftrightarrow A \leq^{*} sB$ ve $sC \leq^{*} D$, bazı $s \neq 0$ için

(b) $A\otimes C \leq^{rs} B\otimes D \Leftrightarrow A \leq^{rs} sB$ ve $sC \leq^{rs} D$, bazı $s \neq 0$ için

(c) $A\otimes C \leq^{s} B\otimes D \Leftrightarrow A \leq^{s} B$ ve $C \leq^{s} D$

dir.

İSPAT: (2.1) den , $A \otimes C \leq^* B \otimes D$ sıralaması,

$$A^*A \otimes C^*C = A^*B \otimes C^*D$$

ve (2.35)

$$AA^* \otimes CC^* = BA^* \otimes DC^*$$

ifadesine denktir. Lemma.2.1.2. den (2.35),

$$A^*A=s_1A^*B \ , \ s_1C^*C=C^*D$$

(2.36)

$$AA^*=s_2BA^* \ , \ s_2CC^*=DC^*$$

eşitliklerine denktir. (2.36) daki s_1 ve s_2 nin aynı alınması (a) nın ispatını tamamlar.

(b) ve (c) ifadeleri (2.8) ve (2.10)' un kullanılmasıyla benzer şekilde bulunur.

Teorem.2.1.4. ve Teorem.2.1.5. 'in birleştirilmesi bizi aşağıdaki sonuca götürür.

SONUÇ.2.1.5. A , $B \in ¢_{m,n}$ olsun. $\leq^{\tau}$, $\leq^*$ veya $\leq^{r*}$ yerine geçsin. O zaman;

$$A \otimes A \leq^{\tau} B \otimes B \Leftrightarrow A \leq^{\tau} B \text{ veya } A \leq^{\tau} (-B)$$

dir.

$\sigma(K \otimes L)$, K nın tüm mümkün olan sıfırdan farklı tekil değerleri ile L nin tekil değerlerinin çarpımından meydana geldiğinden her hangi A , $B \in ¢_{m,n}$ ve C , $D \in ¢_{p,q}$ için;

$$A \leq^{\sigma} B \text{ ve } C \leq^{\sigma} D \Longrightarrow A \otimes C \leq^{\sigma} B \otimes D$$

olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir.

<u>TEOREM.2.1.6.</u> $A, B \in \mathbb{C}_{m,n}$, $C, D \in \mathbb{C}_{n,n}$ ve A ile C, A ile D veya B ile C hermityen n.n.d. olsun. Bu durumda,

$$A \leq^{L} B \text{ ve } C \leq^{L} D \Longrightarrow A \otimes C \leq^{L} B \otimes D$$

elde edilir.

<u>İSPAT:</u> $0 \leq^{L} A$ ve $0 \leq^{L} D$ ise $A \leq^{L} B$ ve $C \leq^{L} D$ olması,

$$0 \leq^{L} A \otimes (D-C)+(B-A) \otimes D = B \otimes D - A \otimes C \qquad (2.37)$$

eşitliğini gerektirir. Bu ise bulmamız gereken sonuçtur.

Benzer şekilde $0 \leq^{L} B$ ve $0 \leq^{L} C$ ise, O zaman

$$0 \leq^{L} B \otimes (D-C) + (B-A) \otimes C = B \otimes D - A \otimes C$$

olur. Yani; istenilen sonuç elde edilir. $0 \leq^{L} C$ ve $C \leq^{L} D$, $0 \leq^{L} D$ 'yi gerektirdiğinden $0 \leq^{L} A$ ve $0 \leq^{L} C$ olduğu durum (2.37) vasıtasıyla bulunur.

Teorem.2.1.6. dan faydalanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

<u>SONUÇ.2.1.6.</u> $A, B, C, D \in \mathbb{C}_{m,m}$ ve A ile C, A ile D veya B ile C hermityen n.n.d. matrisler olsun. Bu durumda,

$$A \leq^{L} B \text{ ve } C \leq^{L} D \Longrightarrow A*C \leq^{L} B*D \qquad (2.38)$$

olur.

Teorem.2.1.6. ve yukarıdakilerin kullanılması ile (2.38) in bir benzeri yıldız ve ranklar farkı sıralamaları altında sağlanır mı diye sorabiliriz. Her iki durumda da cevap olumsuzdur. Bu durum,

$$A=C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=D=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri alınarak görülebilir.

2.2. Bir Matrisin Genelleştirilmiş İnversleri Arasındaki Sıralamalar

Drazin(1978) Teorem.2. de A^{+} nın yıldız sıralamaya göre $A^{\langle 2,3,4\rangle}$ kümesinde en büyük elaman ve $A^{\langle 1,3,4\rangle}$ kümesinde en küçük elaman olduğunu belirtmiştir. Yani; her $H \in A^{\langle 2,3,4\rangle}$ ve $G \in A^{\langle 1,3,4\rangle}$ için

$$H \le^{*} A^{+} \le^{*} G \qquad (2.39)$$

olur.

$A^{+} \le^{*} G$ kısmı Drazin(1977) deki sonuç 2.6. nın bir sonucudur. İfade edilen şey,

$$A \le^{*} B \Leftrightarrow A^{+}BA^{+}=A^{+} \ , \ A^{+}B=(A^{+}B)^{*} \ , \ BA^{+}=(BA^{+})^{*}$$

dir.

$H \le^{*} A^{+}$ kısmı ise,

$$A \le^{*} B \Leftrightarrow AB^{+}A=A \ , \ AB^{+}=(AB^{+})^{*} \ , \ B^{+}A=(B^{+}A)^{*}$$

tanımı vasıtasıyla bulunur.

Şimdi bir $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ için A nın $A^{\langle 1\rangle}$ ve $A^{\langle 2\rangle}$ inverslerinin yıldız kısmi sıralamaları arasındaki yeni ilişkileri verebiliriz.

<u>TEOREM.2.2.1.</u> $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. i=3 veya i=4 için,

$$G_o \in A^{\langle 1,i\rangle} \ , \ G_o \le^{*} G \Longrightarrow G \in A^{\langle 1\rangle} \qquad (2.40)$$

dir.

<u>İSPAT:</u> i=3 ise $G_o \in A^{\langle 1,3\rangle}$ olduğundan,

$AG_oA=A$ ve $(AG_o)^{*} = AG_o$ ve $G_o \le^{*} G$ varsayımından,

$G_o^{*} G_o = G_o^{*} G$ ve $G_o G_o^{*} = G G_o^{*}$ eşitliklerine sahibiz.

$A = AG_oA = (AG_o)^{*}A = G_o^{*}A^{*}A$ olur.

$AGA=AGG_o^{*}A^{*}A=AG_oG_o^{*}A^{*}A=AG_o(AG_o)^{*}A=AG_oAG_oA=AG_oA=A$

bulunur.

i=4 için de benzer şekilde bulunur.

$G_o \in A^{(1,i)}$ koşulu $G_o \in A^{(1)}$ koşuluna indirgenirse (2.40)'ın doğru olmadığını söyleyebiliriz. Aksine örnek, $t_o=u_o=v_o=w_o=1$ ve $t=w=0, u=v=2$ olmak üzere,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_o=\begin{bmatrix} t_o & u_o \\ v_o & w_o \end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

matrisleridir. Bundan başka, (2.40)'ın sol tarafındaki yıldız sıralamanın ters çevrildiği her iki durumda G nin, A nın tek koşullu inversi olması gerekmez.

$t_o=w_o=1, u_o=v_o=0$ ve $t=v=u=0, w=1$ ile (2.41) bir aksine örnek olur. Bununla beraber, tersine çevrilen sıralama sağlanır ve G nin A nın bir tek koşullu inversi olduğu bilinirse, G matrisi G_o gibi aynı ek özelliklere sahiptir. Bu durum aşağıdaki teorem ile verilir.

TEOREM 2.2.2. $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. i=3 veya i=4 için,

$$G \in A^{(1)}, G_o \in A^{(1,i)}, G \leq^{*} G_o \Longrightarrow G \in A^{(1,i)} \tag{2.42}$$

dir.

İSPAT: i=3 ise varsayımlar kullanılarak,

$$A(G-G_o)(G-G_o)^*A^* = A(G_oG_o^* - GG^*)A^* = AG_o-AGG^*A^* \tag{2.43}$$

ve

$$AG_o = AGAG_o = AGG_o^*A^* = AGG^*A^* \tag{2.44}$$

bulunur. (2.43) ile (2.44)'ün birleştirilmesi $AG=AG_o$ eşitliğini verir. $(AG_o)^* = AG_o$ olduğundan bu i=3 için ispatı tamamlar.

i=4 için de teoremin koşullarının sağlandığı benzer şekilde kolayca bulunur.

Eğer (2.42) nin sol tarafındaki yıldız sıralama ters çevrilirse, G matrisi G_o'ın ek özelliğine sahip olma ihtiyacını duymayacaktır. i=3 için aksine örnek, $t_o=v_o=1, u_o=w_o=0$ ve $t=v=w=1, u=-1$ ile (2.41) dir. Bununla beraber G_o benzer şekilde iki ek özelliğe sahip olursa durum değişir.

<u>TEOREM.2.2.3.</u> $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun.O zaman,

$$G_o \in A^{(1,3,4)}, \; G_o \leq^* G \Longrightarrow G \in A^{(1,3,4)}$$

dir.

<u>İSPAT:</u> Teorem.2.1.1. ,$G \in A^{(1)}$ olmasını gerektirir.Bundan başka,

$$AG=AG_oAG=AA^*G_o{}^*G=AA^*G_o{}^*G_o=A(G_oA)^*G_o=AG_o$$

bulunur.$AG_o=(AG_o)^*$ olduğundan $AG=(AG)^*$ dır.

$$GA=GAG_oA=GG_o{}^*A^*A=G_oG_o{}^*A^*A=G_oA$$

dır.$G_oA=(G_oA)^*$ olduğundan $GA=(GA)^*$ bulunmuş olur.Dolayısıyla $G\in A^{(1,3,4)}$ olduğu gösterilmiş olur.

(2.12) nin kullanılmasıyla , (2.39)'un aşikar sonucu A^+ nın hem de ranklar farkı kısmi sıralamasına göre $A^{(1,3,4)}$'ün en küçük elamanı olmasıdır.Bununla beraber;Teorem.2.2.1. ,2.2.2. ve 2.2.3. 'ün hiç birisi yıldız sıralama yerine ranklar farkı kısmi sıralaması yerleştirilirse doğru kalmaz.Aksine örnek birinci ve üçüncü durumda $t_o=1$, $u_o=v_o=w_o=0$ ve $t=2$, $u=v=w=1$ alarak , ikinci durum $(i=3)$ de $t_o=w_o=1$, $u_o=v_o=0$ ve $t=u=1$, $v=w=0$ alınarak (2.41) matrislerinin kullanılması ile bulunur.

Benzer sonuçlar şimdi A nın $A^{(2)}$ inversleri için verilecek.Birincisi ranklar farkı kısmi sıralaması kullanılarak ifade edilebilir.

<u>TEOREM.2.2.4.</u> $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ alalım.O zaman,

$$H_o \in A^{(2)}, \; H \leq^{rs} H_o \Longrightarrow H \in A^{(2)}$$

dir.

<u>İSPAT:</u> (2.8)'in kullanılmasıyla her hangi bir $H_o^- \in H_o^{(1)}$ için,

$$H_oH_o^-H = HH_o^-H_o = HH_o^-H = H$$

olduğunu biliyoruz.Buradan,

$$HAH = HH_o^- H_o A H_o H_o^- = HH_o^- H = H$$

bulunur.

Şimdi aynı konuyla ilgili olarak Baksalary, Pukelsheim ve Styan(1989) tarafından ifade edilen aşağıdaki durum için aksine bir örnek verelim.

$A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. O zaman i=3 veya i=4 için,

$$H \in A^{(2)}, H_o \in A^{(2,i)}, H_o \leq^* H \Longrightarrow H \in A^{(2,i)}$$

dir.

<u>ÖRNEK.2.1.1.</u>

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad H_o=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

olsun.

$$HAH=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=H$$

Buradan $H \in A^{(2)}$ denir.

$$H_oAH_o=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=H_o$$

bulunur. Dolayısıyla $H_o \in A^{(2)}$ denir. i=3 için,

$$AH_o=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan $AH_o=(AH_o)^*$ olduğu görülür. $H_o \leq^* H$ midir?

$$H_o \leq^* H \Leftrightarrow H_o^*H_o=H_o^*H \text{ ve } H_oH_o^*=HH_o^*$$

olduğunu biliyoruz.

$$H_o{}^*H_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_o{}^*H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_oH_o{}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$HH_o{}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $H_o \leqslant^* H$ olduğu görülür. Teoreme göre $i=3$ için AH nin simetrik olması gerekir. Fakat;

$$AH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup, simetrik değildir. Benzer şekilde $i=4$ için HA nın simetrik olmadığı görülür.

Aksine örnek verdiğimiz yukarıdaki teoremi şu şekilde ifade ve ispat edebiliriz.

TEOREM.2.2.5. $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. O zaman $i=3$ veya $i=4$ için,

$$H \in A^{(2)}, H_o \in A^{(2,i)}, H \leqslant^* H_o \Longrightarrow H \in A^{(2,i)}$$

dir.

İSPAT: (2.3) ve (2.4) den,

$$H \leq^{*} H_o \Leftrightarrow H^{+}H=H^{+}H_o \text{ ve } HH^{+}=H_oH^{+}$$

ve

$$H \leq^{*} H_o \Leftrightarrow HH^{+}H_o=H=H_oH^{+}H \Leftrightarrow H_o^{+}HH^{+}=H^{+}=H^{+}HH_o$$

bağıntılarını elde ederiz. Buradan;

$$AH=AH_oH^{+}H=(H_o)^{*}A^{*}H^{+}H=(H_o)^{*}A^{*}H^{*}(H^{+})^{*}=(H^{+}HAH_o)^{*}=(H^{+}H_o)^{*}=(H^{+}H)^{*}=H^{+}H$$

bulunup AH nin simetrik olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$HA=HH^{+}H_oA=HH^{+}(H_oA)^{*}=(H^{+})^{*}H^{*}A^{*}(H_o)^{*}=(H_oAHH^{+})^{*}=(H_oAH_oH^{+})^{*}=(H_oH^{+})^{*}=HH^{+}$$

bulunup, HA nın simetrik olduğu görülür.

Teorem.2.2.5. için aşağıdaki örneği verebiliriz.

ÖRNEK.2.2.2.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad H_o=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

olsun. Teorem.2.2.5.'in varsayımlarını sağladıkları için AH ve HA nın simetrik olduğu görülür.

TEOREM.2.2.6. $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ olsun. O zaman,

$$H_o \in A^{(2,3,4)}\ ,\ H \leq^{*} H_o \Longrightarrow H \in A^{(2,3,4)}$$

dir.

İSPAT: Teorem.2.2.4. den $H_o \in A^{(2)}$, $H \leq^{rs} H_o$ olduğundan $H \in A^{(2)}$ bulunur. Bundan başka, (2.4)'ün kullanılmasıyla $AH=H^{+}H$ ve benzer şekilde $HA=HH^{+}$ bulunur. Dolayısıyla, $H \in A^{(2,3,4)}$ olduğu bulunmuş olur.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad H_o=\begin{bmatrix}0&0&y\\0&z&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix} \qquad (2.45)$$

(2.45) matrisleri y=z=1 alınması ile Teorem.2.2.6. nın yıldız sıralama yerine ranklar farkı kısmi sıralaması yerleştirildiğinde doğru olmadığını gösterir.

Bu bölümün bu kısmında Wu(1980) nin birinci bölümde belirttiğimiz Teorem.1.3.3. ve Teorem.1.3.4. 'üne işaret edeceğiz.

TEOREM.2.2.7. $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve rank(A)=p olsun. O zaman, her hangi bir r ranklı $G_r \in A^{(1)}$ ve her hangi $p \leq q \leq r \leq s$ için;

$G_q \leq^{rs} G_r \leq^{rs} G_s$

olacak şekilde sırasıyla q ve s ranklı $G_q, G_s \in A^{(1)}$ vardır.

TEOREM.2.2.8. $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve rank(A)=p olsun. O zaman, her hangi bir r ranklı $H_r \in A^{(2)}$ ve her hangi $s \leq r \leq q \leq p$ için;

$H_s \leq^{rs} H_r \leq^{rs} H_q$

olacak şekilde sırasıyla q ve s ranklı $H_q, H_s \in A^{(2)}$ vardır.

Teorem.2.2.7. ve 2.2.8. deki dört sonuçtan üçü ranklar farkı sıralaması yerine yıldız sıralama yerleştirildiğinde sağlanmaz. Bunu aşağıdaki örnek vasıtasıyla daha iyi görebiliriz.

ÖRNEK.2.2.3.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad G_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad G_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Bu durumda $G \leq^{*} G_2$ olacak şekilde bir ranklı $G \in A^{(1)}$ yoktur ve $G_1 \leq^{*} G$ olacak şekilde iki ranklı $G \in A^{(1)}$ yoktur. ilave olarak eğer,

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad H_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

ise $H_1 \leq^{*} H$ olacak şekilde bir ranklı $H \in A^{(2)}$ yoktur. Bununla beraber A nın bir $A^{(2)}$ inversinden önde gelen başka bir $A^{(2)}$ inversi daima bulunabilir.

<u>TEOREM.2.2.9.</u> $A \in \mathbb{C}_{m,n}$ ve rank(A)=p olsun.r ranklı her hangi bir $H_r \in A^{(2)}$ ve her hangi $s \leq r \leq p$ için;

$$H_s \leq^* H_r$$

olacak şekilde s ranklı $H_s \in A^{(2)}$ vardır.

2.3.Genelleştirilmiş İnvers Altında Matris Sıralamasının Ters Çevrilmesi veya Korunması

Drazin(1978,sonuç1) de,

$$A \leq^* B \Leftrightarrow A^+ \leq^* B^+ \qquad (2.46)$$

olduğunu gösterdi.Bu ifadenin anlamı,Moore-Penrose invers yıldız sıralamaya göre yön değiştirmemektedir.(2.46) ile (2.39)'un birleştirilmesi her $H_A \in A^{(2,3,4)}$ ve her $G_B \in B^{(1,3,4)}$ için;

$$A \leq^* B \Longrightarrow H_A \leq^* A^+ \leq^* B^+ \leq^* G_B \qquad (2.47)$$

olduğunu gösterir.(2.47) nin bir kısmı (2.46)'yı geneleştirmek için kullanılabilir.

<u>TEOREM.2.3.1.</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun.O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $A \leq^* B$

(b) $A^+ \leq^* G_B$, her $G_B \in B^{(1,3,4)}$ için

(c) $A \leq^- B$ ve $A^+ \leq^* G_B$,bazı $G_B \in B^{(1,3,4)}$ için

<u>İSPAT:</u> (a) ise (b) kısmı (2.47) de bulunmaktadır.(b) koşulu $A^+ \leq^* B^+$ 'yı gerektirir.O zaman (2.12),$A^+ \leq^- B^+$ olmasını sağlar.Bu da $A \leq^- B$ 'ye denktir.(c) sağlanır ise (2.4) ve (2.10) dan;

$$A G_B B = A = B G_B A$$

ve

$$A^+AG_B=A^+=G_BAA^+ \qquad (2.48)$$

olduğu bulunur.Sonuç olarak (2.48) deki ikinci eşitliğin B ile önden ve birinci eşitliğin B ile arkadan çarpılması ile sırasıyla,

$$BA^+=AA^+ \text{ ve } A^+A=A^+B$$

eşitlikleri bulunur.(2.3) den $A \leq^* B$ sonucuna varırız.

(2.46)'ya benzer bir sonuç ranklar farkı kısmi sıralaması için sağlanmaz. Sağlanmadığını göstermek için örnek olarak,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini alabiliriz. Bu örnek için $A \leq^{rs} B$ fakat $A^{+} \leq^{rs} B^{+}$ değildir. Bununla beraber Hartwig ve Styan(1986, teorem3) de,

$$A \leq^{rs} B \text{ ve } A^{+} \leq^{rs} B^{+} \Leftrightarrow A^{+}BA^{+}=A^{+}$$

olması gerektiğini gösterdiler.

<u>TEOREM.2.3.2.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,n}$, $H_A \in A^{(2)}$ ve $G_B \in B^{(1)}$ olsun. O zaman;

$$A \leq^{rs} B \text{ ve } G_B \leq^{rs} H_A$$

sıralamaları $A=B$ ve $H_A=G_B$ aşikar durumu hariç aynı anda sağlanmaz.

<u>İSPAT:</u> $A \leq^{rs} B$ ve $G_B \leq^{rs} H_A$ ise (2.12);

(1) $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(B)$ ve $\operatorname{rank}(G_B) < \operatorname{rank}(H_A)$ olmasını gerektirir. Fakat $H_A \in A^{(2)}$ ve $G_B \in B^{(1)}$ olduğundan,

$\operatorname{rank}(H_A) \leq \operatorname{rank}(A)$ ve $\operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(G_B)$ olur. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(G_B) \leq \operatorname{rank}(H_A) \leq \operatorname{rank}(A) \Longrightarrow \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(A) \\ \text{ve} \\ \operatorname{rank}(H_A) \leq \operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(G_B) \Longrightarrow \operatorname{rank}(H_A) \leq \operatorname{rank}(G_B) \end{array}\right\} \quad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$ ve $\operatorname{rank}(H_A)=\operatorname{rank}(G_B)$ eşitlikleri elde edilir. (2.7), sonuç olarak $A=B$ ve $H_A=G_B$ eşitliklerini verir.

(2.12) nin kullanılmasıyla Teorem.2.3.2. nin hem de yıldız sıralama için sağlandığı görülür. Yukarıdakilere ters olarak Moore-Penrose invers, Hermityen n.n.d. matrislerin sadece eşit ranklılarının kümesi içinde ters yönde sıralamayı sağlar. Bu durumu daha önce birinci bölümde daha değişik bir biçimde ifade etmiştik. Bu bölümde de aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

<u>TEOREM.2.3.3.</u> A ve B mxm tipinde kompleks hermityen n.n.d. matrisler olsun.O zaman aşağıdaki üç koşuldan her hangi ikisi üçüncüsünü gerektirmektedir.

(a) $A \leq^L B$

(b) rank(A)=rank(B)

(c) $B^+ \leq^L A^+$

(2.18) den Teorem.2.3.3. deki (b) koşulu yerine R(A)=R(B) yerleştirilebileceği açıktır.Hem de hermityen n.n.d. matrislere kısıtlamanın önemli olduğunu not edebiliriz.Örnek olarak,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrislerini alabiliriz.Burada A, n.n.d. değildir.Dolayısıyla Teorem.2.3.3. 'ün koşulları sağlanmaz.

Bundan sonra $A^{(1,2,H)}$ ile hermityen n.n.d. $A \in \mathbb{C}_{m,m}$ matrisinin hermityen refleksif genelleştirilmiş inverslerinin kümesini göstereceğiz. $A^{(1,2,H)}$ deki tüm matrislerin hermityen n.n.d. ve hem de $A^+ \in A^{(1,2,H)}$ olduğu gözlenir.

<u>TEOREM.2.3.4.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$ hermityen n.n.d. matrisler olsun.O zaman her hangi bir $G_A \in A^{(1,2,H)}$ ve $G_B \in B^{(1,2,H)}$ için,

$$A \leq^L B \text{ ve } G_B \leq^* G_A \Leftrightarrow A \leq^* B \text{ ve } G_B \leq^L G_A$$

dir.

<u>İSPAT:</u> $A \in G_A^{(1)}$ olduğundan (2.19)'un kullanılmasıyla "ise" kısmının ispatı,

$$G_B A G_B \leq^L G_B \qquad (2.49)$$

ifadesine indirgenir. Fakat (2.49), $G_B(A-B)G_B \leq^L 0$ ifadesine denktir. Bu $G_B=G_B^*$ ve $A \leq^L B$ nin bir açık sonucudur.

A,B nin hermityen n.n.d. olması ve $A \leq^L B$ ile birlikte (2.19) kullnılırsa $A \leq^* B$ bulunur.

Ters gerektirme de benzer şekilde bulunur.

$A \leq^{L} B$ sıralamasının ters çevrilmesi problemine farklı bir yaklaşım aşağıdaki sonuçlardır.

<u>TEOREM.2.3.5.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$ hermityen n.n.d. matrisler olsun. Eğer $A \leq^{L} B$ ise o zaman her hangi $G_A \in A^{(1,2,H)}$ ve $G_B \in B^{(1,2,H)}$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $G_B \leq^{L} G_A$

(b) $G_B \leq^{*} G_A$

(c) $R(G_A)=R(G_B)$

(d) $AG_A=BG_B$

Teorem.2.3.5.'in bir basit sonucunu daha önce birinci bölümde Teorem.1.4.5. olarak vermiştik. Bu bölümde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

<u>TEOREM.2.3.6.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$ hermityen n.n.d. matrisler olsun. Eğer $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$ ve $A \leq^{L} B$ ise her hangi bir $G_A \in A^{(1,2,H)}$ için bir $G_B \in B^{(1,2,H)}$ vardır ve her hangi $G_B \in B^{(1,2,H)}$ için $G_B \leq^{L} G_A$ olacak şekilde bir $G_A \in A^{(1,2,H)}$ vardır.

Bununla beraber (2.49) sıralaması, genelleştirilmiş inverslerin refleksif olması gerekmediği zaman da sağlanabilir. Bunu birinci bölüm Teorem.1.4.1. de göstermiştik. Bu sonucun birinci kısmı yeni ve daha kısa olarak aşağıdaki Teorem.2.3.7. deki gibi yeniden oluşturulabilir. Bundan böyle, $A^{(1,\geq)}$ ve $A^{(2,\geq)}$ ile sırasıyla tüm hermityen n.n.d. iç(inner) ve dış(outer) inverslerin kümesini göstereceğiz.

<u>TEOREM.2.3.7.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$, $0 \leq^{L} A \leq^{L} B$ olacak şekilde matrisler ve a,b $\mathrm{rank}(B) \leq b \leq a \leq m$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsun. O zaman b ranklı her hangi bir $G_B \in B^{(1,\geq)}$ için $G_B \leq^{L} G_A$ olacak şekilde a ranklı bir $G_A \in A^{(1,\geq)}$ vardır.

<u>TEOREM.2.3.8.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$, $0 \leq^{L} A \leq^{L} B$ olacak şekilde matrisler ve $G_A \in A^{(1,2,H)}$ ve $G_B \in B^{(1,2,H)}$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $G_A \leq^L G_B$

(b) $AG_B = AG_A$

(c) $G_A \leq^{rs} G_B$

<u>İSPAT:</u> (2.19)'un kullanılmasıyla, $0 \leq^L A-AG_BA = A(G_A-G_B)A$ olduğu bulunur.(a) ile bunun birleştirilmesi, $A(G_B-G_A)A=0$ eşitliğini verir.Böylece (b) sağlanır.(b) ise (c) ve (c) ise (a) sırasıyla (2.5) ve (2.16) dan doğrudan doğruya bulunduğundan ispat tamamlanır.

<u>TEOREM.2.3.9.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$, $A \leq^* B$ olacak şekilde hermityen n.n.d. matrisler ve $G_A \in A^{(1,2,H)}$ ve $G_B \in B^{(1,2,H)}$ olsun. O zaman

$$G_A \leq^* G_B \Leftrightarrow G_A \leq^L G_B \text{ ve } G_AG_B = G_BG_A$$

dir.

<u>İSPAT:</u> Gerek kısmı (2.16),(2.12) ve (2.1)'in kullanılmasıyla aşikar olarak bulunur.

Yeter kısmının ispatı için Teorem.2.3.8.'i kullanacak olursak, $AG_B=AG_A$ eşitliğini ve buradan,

$$G_AG_B = G_AAG_AG_B = G_AAG_BG_A = G_AAG_A{}^2 = G_A{}^2$$

eşitliklerini elde ederiz.Bu da ispatı tamamlar.

$G_A=A^+$ alınırsa Teorem.2.3.9. daki koşulun birleştirilmesi iptal edilebilir.Bunu aşağıdaki sonuçtaki gibi verebiliriz.

<u>SONUÇ.2.3.1.</u> $A,B \in \mathbb{C}_{m,m}$, $A \leq^* B$ olacak şekilde hermityen n.n.d. matrisler ve $G_B \in B^{(1,2,H)}$ olsun.O zaman;

$$A^+ \leq^* G_B \Leftrightarrow A^+ \leq^L G_B$$

olur.

3. BÖLÜM

KISMi SIRALI iDEMPOTENT MATRiSLER

Bu bölümde üç kısmi sıralamayı göz önüne alacağız. Bunlar daha önce de tanımladığımız;

(1) $A \leq^{L} B \Leftrightarrow B-A$ hermityen n.n.d.

(2) $A \leq^{*} B \Leftrightarrow A^{*}A=A^{*}B$ ve $AA^{*}=BA^{*}$

(3) $A \leq^{rs} B \Leftrightarrow \mathrm{rank}(B-A)=\mathrm{rank}(B)-\mathrm{rank}(A)$

sıralamalarıdır.

Özellikle E ve F kompleks idempotent matrisleri için(Hermityen olmaları gerekmez);

$E \leq^{L} F \Longrightarrow E \leq^{*} F \Longrightarrow E \leq^{rs} F$

ve

$E \leq^{rs} F$ ve $F-E=(F-E)^{*}$ iken $E \leq^{L} F$

olduğunu ve Ayrıca,

G ve H nin her ikiside hermityen ve hem de H n.n.d. ise

$G \leq^{*} H \Longrightarrow G \leq^{rs} H \Longrightarrow G \leq^{L} H$

olduğunu ve G ve H ortogonal projektörler(Hermityen ve idempotent) ise üç matris sıralamasının aynı olduğunu göstereceğiz. Yani; bu bölümdeki amacımız:

(a) Kısmi sıralamalar altında idempotent matrislerin özelliklerini

(b) üç kısmi sıralamanın birleşmesinde idempotent matrislerin oynadığı rolü

(c) Bir kısmi sıralamanın idempotent matrisler yoluyla başka bir kısmi sıralamayı incelemek için nasıl kullanılabildiğini göstermektir. Bu amaç doğrultusunda bazı Lemma ve Teoremler verelim.

<u>LEMMA.3.1.1.</u> A,B nxn kompleks matrisler olsun.Hermityen olmaları gerekmez.O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $A \leq^{L} B$;Yani,bazı C için $B-A=CC^*$

(b) $B-A=(B-A)^*$ ve tüm $ch(B-A)\geq 0$

(c) $k^*(B-A)k \geq 0$,tüm nx1 kompleks k vektörü için

(a) ve (c) den n satırlı her kompleks K matrisi için;

$$A \leq^{L} B \Leftrightarrow K^*AK \leq^{L} K^*BK \qquad (3.1)$$

bulunur.A ve B nin her ikiside hermityen ise,

$$0 \leq^{L} A \leq^{L} B \Longrightarrow \mathrm{rank}(A,B)=\mathrm{rank}(B) \qquad (3.2)$$

ve

$$A \leq^{L} B \Longrightarrow ch_i(A) \leq ch_i(B) \;;\; i=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (3.3)$$

dir.Burada ch_i,i'inci gerçel en büyük özdeğeri gösterir.(3.3)'ün sağ tarafındaki eşitliğin tüm $i=1,2,\ldots\ldots,n$ değerlerinde sağlanması için gerek ve yeter koşul A=B olmasıdır.

<u>LEMMA.3.1.2.</u> A ve B, $b>a\geq 1$ ile sırasıyla a ve b ranklı mxn tipinde kompleks matrisler olsun.O zaman aşağıdakiler denktir.

(a) $A \leq^{*} B$, Yani; $A^*A=A^*B$ ve $AA^*=BA^*$

(b)

$$A=U\begin{bmatrix} D_a & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^* \quad \text{ve} \quad B=U\begin{bmatrix} D_a & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}V^*$$

olacak şekilde sırasıyla mxm ve nxn tipinde U ve V üniter matrisleri vardır.Burada,D_a ve D sırasıyla axa ve (b-a)x(b-a) tipinde p.d. köşegen matrislerdir.

(c) $A \leq^{rs} B$ ve $(B-A)^+ = B^+ - A^+$

Buradan, $A \leq^{*} B$ ve rank(A)=rank(B) ise veya A tam ranklı ise A=B olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma.3.1.2. deki (a) $\Leftrightarrow$ (b) den $A \leq^{*} B$ olması için gerek ve yeter koşulun A ve B nin aynı tekil değer ayrışımına sahip olmasıdır diyebiliriz. Yani; A nın sıfırdan farklı her tekil değeri hem de B nin tekil değeridir. $A \leq^{*} B$ (veya yalnız $A \leq^{rs} B$) ve a=b ise A=B olur. (a) $\Leftrightarrow$ (c) Hartwig ve Styan(1986) tarafından gösterildi.

<u>LEMMA.3.1.3.</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $A \leq^{rs} B$, Yani; $\operatorname{rank}(B-A)=\operatorname{rank}(B)-\operatorname{rank}(A)$

(b) $A=AB^{-}A$ ve $\operatorname{rank}(A:B)=\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

(c) $A=AB^{-}A=AB^{-}B=BB^{-}A$

(d) $\operatorname{rank}(B-A)=\operatorname{rank}[(I-AA^{-})B]=\operatorname{rank}[B(I-A^{-}A)]$

(e) $B-A \leq^{rs} B$

Burada, A^{-} ve B^{-} her hangi bir tek koşullu inverstir. Eğer (b), (c) veya (d) koşulları her hangi özel A^{-} ve B^{-} tek koşullu genelleştirilmiş inversleri için sağlanır ise tüm koşullar, her tek koşullu genelleştirilmiş inversler için sağlanır.

Lemma.3.1.2. den,

$$A \leq^{*} B \Longrightarrow A \leq^{rs} B \qquad (3.4)$$

bulunur. Aşağıdaki gibi yıldız sıralamayı tanımlamak için ranklar farkı kısmi sıralaması kullanılabilir.

<u>LEMMA.3.1.4.</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun. O zaman,

$$A \leq^{*} B \Leftrightarrow A^{*}A \leq^{rs} A^{*}B \quad \text{ve} \quad AA^{*} \leq^{rs} BA^{*} \qquad (3.5)$$

dir. $A \leq^{*} B$ nin tanımını hatırlarsak, (3.5)'in sağ tarafındaki $\leq^{rs}$ yerine = koyulmuş halidir.

Lemma.3.1.4.'ü ispat etmek için,

$$A^*(B-A) \leq^{rs} A^*B \Leftrightarrow A^*A \leq^{rs} A^*B \Longrightarrow A^*A=A^*B \qquad (3.6)$$

olduğunu not etmek yeterlidir. (3.6) nın sol tarafı,

$$\mathrm{rank}(A^*A) \leq \mathrm{rank}(A^*B) \leq \mathrm{rank}(A^*) = \mathrm{rank}(A^*A) \qquad (3.7)$$

eşitsizliğini gerektirir. O zaman, A ve B nin her ikisi de kare matris ise aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

<u>TEOREM.3.1.1.</u> G ve H nxn tipinde kompleks hermityen matrisler ve H n.n.d. olsun. O zaman,

$$G \leq^{*} H \Longrightarrow G \leq^{rs} H \Longrightarrow G \leq^{L} H \qquad (3.8)$$

dir.

<u>İSPAT:</u> (3.8) deki sadece ikinci gerektirmeyi ispat etme ihtiyacını duyarız. Çünkü, birinci gerektirme aşikardır. Lemma.3.1.3. (a) ⇔ (e) den, $G \leq^{rs} H \Leftrightarrow H-G \leq^{rs} H$ ve böylece Lemma.3.1.3. (a)$\Longrightarrow$(b) gerektirmesinden, $H-G=(H-G)H^{-}(H-G) \geq^{L} 0$ olduğunu görürüz. Bu, H^{-} 'in hermityen n.n.d. olarak seçilebilmesinden bulunur.

(3.8) deki ikinci gerektirme Baksalary, Kala ve Klaczynski (1983)'in (17) ifadesini genelleştirir. Onlar, G ve H nin her ikisinin de hermityen n.n.d. olduğunu varsaymışlardı.

Teorem.3.1.1. den, sıralı matrisler hermityen ve hem de en büyüğü n.n.d. ise Löwner sıralamanın en zayıf olduğunu görürüz. Teorem.3.1.2. de matrisler idempotent olduğu zaman hermityenlik gerekmeksizin, Löwner sıralamanın en güçlü olduğunu göreceğiz. Teorem.3.1.2. ve 3.1.3. 'ü ifade edebilmek için aşağıdaki üç Lemma'ya ihtiyaç duyarız.

<u>LEMMA.3.1.5.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler ve F-E,

$$\mathrm{rank}[(F-E)^2]=\mathrm{rank}(F-E) \qquad (3.9)$$

ile negatif olmayan gerçel özdeğerlere sahip olsun. O zaman, F-E idempotent matristir.

<u>LEMMA.3.1.6.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler olsun. Hermityen olmaları gerekli değildir. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) F-E idempotent

(b) EF+FE = 2E (3.10)

(c) E=EF=FE

<u>İSPAT:</u> $F-E=(F-E)^2 \Leftrightarrow EF+FE=2E \Longrightarrow$ (b) bulunur.(b) ise (c)'yi bulmak için,EF+FE=2E eşitliğini soldan E ile çarpalım.

$$EF+EFE=2E$$

bulunur.EF+FE=2E ifadesini sağdan E ile çarpalım.

$$EFE+FE=2E$$

bulunur.Elde edilen bu iki eşitlikten,EF=FE=E olduğu görülür.

<u>LEMMA.3.1.7.</u> A ve X kompleks matrisleri,

$$\text{rank}(AX)=\text{rank}(A) \tag{3.11}$$

eşitliğini sağlayan,sırasıyla mxn ve nxk tipinde matrisler olsun. O zaman her pxm kompleks P matrisi için,

$$\text{rank}(PAX)=\text{rank}(PA) \tag{3.12}$$

ve her pxm kompleks P ve Q matrisleri için,

$$PAX=QAX \Longrightarrow PA=QA \tag{3.13}$$

olur.$X=A^*$ iken (3.11) sağlanır ve (3.12) ve (3.13)'ü "yıldız kısaltma" olarak adlandırırız.

<u>TEOREM.3.1.2.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler olsun.Hermityen olmaları gerekli değildir.O zaman,

$$E \leq^{L} F \Longrightarrow E \leq^{*} F \Longrightarrow E \leq^{rs} F \tag{3.14}$$

dir.

<u>İSPAT:</u> Sadece birinci gerektirmeyi ispat edeceğiz.F-E hermityen n.n.d. olduğundan,F-E negatif olmayan özdeğerlere sahip ve (3.9) sağlanır.Böylece Lemma.3.1.5. uygulanır.Dolayısıyla,F-E idempotenttir.Lemma.3.1.6. dan (3.10)'un sağlandığını görürüz ve böylece,

$$E(F-E)^*=E(F-E)=0=(F-E)E=(F-E)^*E \tag{3.15}$$

dir.Buradan, $E \leq^{*} F$ olduğu yıldız sıralamanın tanımından görülür.

Teorem.3.1.1. ve 3.1.2.'nin birleştirilmesi Teorem.3.1.3.'ün birinci kısmını verir.

<u>TEOREM.3.1.3.</u> E ve F kompleks hermityen idempotent matrisler olsun.O zaman,

$$E \leqslant^{L} F \Leftrightarrow E \leqslant^{*} F \Leftrightarrow E \leqslant^{r=} F \qquad (3.16)$$

ve (3.16) daki sıralamalardan her hangi birinin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$E=EFE \qquad (3.17)$$

olmasıdır.Yani;F'nin ,E'nin bir tek koşullu inversi olmasıdır.

<u>İSPAT:</u> Yıldız sıralamanın tanımının kullanılmasıyla,

$$E \leqslant^{*} F \Leftrightarrow E=EF \Leftrightarrow (E-EF)(E-EF)^{*}=0 \Leftrightarrow E=EFE \qquad (3.18)$$

elde edilir.

<u>SONUÇ.3.1.1.</u> A ve B mxn tipinde kompleks matrisler olsun.

$$A \leqslant^{*} B \Longrightarrow A^{+}A \leqslant^{\tau} B^{+}B \text{ ve } AA^{+} \leqslant^{\tau} BB^{+}$$

dir.Burada ?; $\leqslant^{L}$,$\leqslant^{r=}$ ve $\leqslant^{=}$ yerine geçmektedir.

Şimdi de; F verilen idempotent bir matris iken,F den küçük olan bir A matrisini tanımlamaya çalışacağız.Yani; $A \leqslant^{\tau} F$ olacak şekildeki tüm A matrislerini tanımlamaya çalışacağız.Burada $\leqslant^{\tau}$,bölümün giriş kısmında tanımladığımız (1),(2) ve (3) sıralamalarıdır.

<u>TEOREM.3.1.4.</u> F nxn tipinde kompleks idempotent bir matris olsun.Hermityen olması gerekmez.O zaman,

$$A \leqslant^{*} F \Longrightarrow A^{2}=A \qquad (3.19)$$

$$A \leqslant^{r=} F \Longrightarrow A^{2}=A \qquad (3.20)$$

$$A \leqslant^{L} F \not\Longleftrightarrow A^{2}=A \qquad (3.21)$$

dir.

$A \leqslant^{L} F$ Löwner sıralamasının,A nın idempotent olmasını garanti etmek için yeterli olmadığını görmek için,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leqslant^{L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=F=F^{2} \qquad (3.22)$$

matrislerini göz önüne alalım.(3.22) den $A^{2}=0$ ve böylece $A^{2} \neq A$ olduğu görülür.

$B^- = F^- = I$ alınması ile Lemma.3.1.3. (a) $\Leftrightarrow$ (c) den ;

$$A \leq^{r*} F \Leftrightarrow A^2 = A = AF = FA \qquad (3.23)$$

bulunur. Burada F, Teorem.3.1.4. deki gibi nxn kompleks idempotent matristir. (Hermityen olması gerekmez.)

<u>TEOREM.3.1.5.</u> F nxn kompleks hermityen idempotent bir matris olsun. O zaman,

$$A \leq^{*} F \Longrightarrow A^2 = A = A^* \qquad (3.24)$$

$$A \leq^{r*} F \begin{cases} \Longrightarrow A^2 = A \\ \not\Longrightarrow A = A^* \end{cases} \qquad (3.25)$$

$$A \leq^{L} F \begin{cases} \not\Longrightarrow A^2 = A \\ \Longrightarrow A = A^* \end{cases} \qquad (3.26)$$

dir.

<u>İSPAT:</u> (3.24), (3.25) ve (3.26) nın birinci kısımları Teorem.3.1.4. den bulunur. $A \leq^{*} F$ ise $A = A^*$ olduğunu görmek için (2) tanımı, (3.4) ve (3.23)'ün göz önüne alınmasıyla,

$$A^*A = A^*F = FA = A \qquad (3.27)$$

bulunur.

$A \leq^{r*} F \not\Longrightarrow A = A^*$ olduğunu görmek için,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq^{r*} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = F \qquad (3.28)$$

matrislerini göz önüne alalım.

$A \leq^{L} F$ ise $A = A^*$ olması F ve F-A nın hermityen olmasından bulunur.

Teorem.3.1.5. deki hermityen idempotent F matrisi, I birim matrisine eşit ise Teorem.3.1.6. da ranklar farkı sıralamasına göre küçük olan tüm matrislerin idempotent olmak zorunda olduğunu, Yıldız sıralamaya göre küçük olan matrislerin hem idempotent hem de hermityen olmak zorunda olduğunu Teorem.3.1.7. de görebiliriz. Löwner sıralamaya göre I birim matrisinden küçük olan bir A matrisinin hermityen olmak zorunda olduğunu ve onun en büyük özdeğerinin bir olduğunu, sırasıyla (3.26) ve (3.3) den söyleyebiliriz.

<u>TEOREM.3.1.6.</u> A nxn tipinde kompleks matris(hermityen olması gerekli değildir.) olsun. O zaman aşağıdaki beş koşul denktir.

(a) $A \leq^{rs} I$

(b) $A=A^2$

(c) $A \leq^{*} F$, bazı $F=F^2$ için

(d) $A \leq^{rs} F$, bazı $F=F^2$ için

(e) $A \leq^{L} F$ ve $AF=FA$, bazı $F=F^2$ ve tüm $ch(A)=0$ veya $ch(A)=1$ için

<u>TEOREM.3.1.7.</u> A nxn tipinde kompleks matris(hermityen olması gerekli değildir.) olsun. O zaman aşağıdaki altı koşul denktir.

(a) $A \leq^{*} I$

(b) $A=A^2=A^*$

(c) $A \leq^{rs} A^*A$

(d) $A \leq^{*} F$, bazı ortogonal projektör F matrisi için

(e) $A \leq^{L} F$, bazı ortogonal projektör F ve tüm $ch(A)=0$ veya $ch(A)=1$ için

(f) $0 \leq^{L} A \leq^{L} F$ ve $(F-A)^2=(F-A)$, bazı ortogonal projektör F matrisi için

Şimdi de E verilen idempotent bir matris iken, E den büyük olan bir B matrisi nasıl tanımlanır? sorusuna cevap vermeye çalışalım. Yani; $E \leq^{T} B$ olacak şekildeki tüm B matrislerini tanımlamaya çalışacağız. Burada $\leq^{T}$, yine bölümün başında tanımladığımız (1), (2) ve (3) sıralamalarıdır.

<u>TEOREM.3.1.8.</u> E ve B nxn tipinde kompleks matrisler ve E idempotent (Hermityen olmaları gerekli değildir.) olsun. O zaman,

$$E \leq^{rs} B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(B-E)=\operatorname{rank}(B-BE)=\operatorname{rank}(B-EB) \qquad (3.29)$$

Eğer E nin hermityen olması eklenirse,

$$E \leq^{*} B \Leftrightarrow E=BE=EB \qquad (3.30)$$

ve

$$E \leq^{*} B \text{ ve } I-E \leq^{*} B \Leftrightarrow B=I \qquad (3.31)$$

olur.

<u>İSPAT:</u> (3.29) tanımı, Lemma.3.1.3. (a) $\Leftrightarrow$ (d) den bulunur. Yıldız sıralamanın tanımı kullanılarak da (3.30) ve (3.31) bulunur. Eğer (3.29) ve (3.30) da E=I alınırsa,

$$I \leq^{rs} B \Leftrightarrow I \leq^{*} B \Leftrightarrow B=I \qquad (3.32)$$

bulunur.

Böylece, ya ranklar farkı kısmi sıralaması ya da yıldız sıralamaya göre birim matristen büyük olan matris, birim matrisin kendisidir diyebiliriz.

Gerçekten; Eğer $A \leq^{rs} B$ veya $A \leq^{*} B$ ise bazı mxn tipindeki kompleks A ve B matrisleri için, A tam ranka sahip ise B=A olur. Yıldız sıralama için bu eşitliği görelim.

A tam kolon ranklı ise $A^{+}A=I$ ve A tam satır ranklı ise $AA^{+}=I$ olur. Yıldız sıralamanın tanımını ve yukarıdaki iki eşitliği kullanırsak;

$$AA^{+}A=AA^{+}B=B \Longrightarrow A=B$$

$$AA^{+}A=BA^{+}A=B \Longrightarrow A=B$$

bulunur. Ranklar farkı kısmi sıralaması için de benzer şekilde bulunur.

Bu bölümde son olarak E ve F nin her ikiside idempotent iken kısmi sıralamaların özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

TEOREM.3.1.9. E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler (Hermityen olmaları gerekmez.) olsun. O zaman aşağıdaki dokuz koşul denktir.

(a) $E \leq^{rs} F$, Yani; $\mathrm{rank}(F-E)=\mathrm{rank}(F)-\mathrm{rank}(E)$

(b) $F-E=(F-E)^2$

(c) $E \leq^{*} E+(I-F)^*$

(d) $I-F \leq^{rs} I-E$

(e) $E=EF=FE$

(f) $EF+FE=2E$

(g) $\mathrm{rank}(F-E)=\mathrm{rank}(F-EF)=\mathrm{rank}(F-FE)$

(h) $\mathrm{rank}(E,F)=\mathrm{rank}(F)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}$

(i) $\mathrm{rank}[(F-E)^2]=\mathrm{rank}(F-E)$ ve tüm $ch(F-E)\geq 0$

ve o zaman,

$$\mathrm{rank}(E)=\mathrm{rank}(EF^*)=\mathrm{rank}(E^*F) \qquad (3.33)$$

ve

$$\mathrm{rank}(F-E)=\mathrm{rank}[(F-E)F^*]=\mathrm{rank}[(F-E)^*F] \qquad (3.34)$$

dir.

İSPAT: (a)⇒(e)⇒(g)⇒(h) gerektirmeleri Lemma.3.1.3. (a)⇒(c)⇒(d)⇒(b) ifadelerinde $A^-=B^-=I=E^-=F^-$ alınmasıyla bulunur. (a)⇒(e) den, (d) ⇒ $I-F=(I-F)(I-E)=(I-E)(I-F)$ bulunur. Bu da (e)'ye indirgenir. (i), Lemma.3.1.5. den bulunur. (a) ise (3.33) olduğunu göstermek için (a) ise (e) olmasından $E=EF$ ve böylece,

$$\mathrm{rank}(EF^*)=\mathrm{rank}(EFF^*)=\mathrm{rank}(EF)=\mathrm{rank}(E)$$

olduğunu not edebiliriz.(3.12) yıldız kısaltmasını kullanarak (a)'nın (3.34)'ün tamamını ve (3.33)'ün kalanını gerektirmesi benzer şekilde bulunur.

TEOREM.3.1.10. E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler(Hermityen olmaları gerekmez.) olsun.O zaman aşağıdaki dokuz koşul denktir.

(a) $E \leq^* F$, Yani; $E^*(F-E)=0=(F-E)E^*$

(b) $EE^* \leq^* FF^*$ ve $E^*E \leq^* F^*F$

(c) $EE^* \leq^{rs} FF^*$ ve $E^*E \leq^{rs} F^*F$

(d) $EE^* \leq^{L} FF^*$ ve $E^*E \leq^{L} F^*F$

(e) $FF^*-EE^*=(F-E)(F-E)^*$ ve $F^*F-E^*E=(F-E)^*(F-E)$

(f) $F-E \leq^{rs} I-E^*$

(g) $EE^*E=EF^*F=FF^*E$

(h) $EE^*E=EF^*E$ ve $(EE^*)^2=EF^*FE^*$ ve $(E^*E)^2=E^*FF^*E$

(i) $E^*+F-E \leq^{rs} I$ ve $F-E \leq^{rs} I$

Bu bölümün başında da belirttiğimiz gibi $E \leq^* F$ kısmi sıralaması $E \leq^{rs} F$ kısmi sıralamasından daha güçlüdür.Teorem.3.1.11. de, $E \leq^{rs} F$ sıralamasına bazı koşullar eklendiğinde $E \leq^* F$ ile çift yönlü bir gerektirme oluşturduğunu görebiliriz.

TEOREM.3.1.11. E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler(Hermityen olmaları gerekmez.) olsun.O zaman,

$$E \leq^* F, \text{ Yani; } E^*(F-E)=0=(F-E)E^* \qquad (3.35)$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$E \leq^{rs} F, \text{ Yani; } \mathrm{rank}(F-E)=\mathrm{rank}(F)-\mathrm{rank}(E) \qquad (3.36)$$

ve aşağıdaki beş koşuldan her hangi birinin sağlanmasıdır.

(a) $EF^{*} \leq^{*} FF^{*}$ ve $F^{*}E \leq^{*} F^{*}F$

(b) $EF^{*} \leq^{L} FF^{*}$ ve $F^{*}E \leq^{L} F^{*}F$

(c) $E^{*}F \leq^{rs} E^{*}E$ ve $FE^{*} \leq^{rs} EE^{*}$

(d) $EE^{+}F=FE^{+}E$

(e) $EE^{+}F\ FE^{+}E=FE^{+}E\ EE^{+}F$

<u>TEOREM.3.1.12.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler olsun.Hermityen olmaları gerekmez.O zaman aşağıdaki dokuz koşul denktir.

(a) $E \leq^{L} F$, Yani; $F-E$ hermityen n.n.d.

(b) $F-E=(F-E)^{2}=(F-E)^{*}$

(c) $I-F \leq^{L} I-E$

(d) $E \leq^{rs} F$ ve $(F-E)=(F-E)^{*}$

(e) $E \leq^{rs} F$ ve $F-E \leq^{L} I$

(f) $E \leq^{*} F$ ve $I-F \leq^{*} I-E$

(g) $F-E \leq^{*} I$

(h) $F-E \leq^{rs} I-E^{*}$ ve $F-E \leq^{rs} F^{*}$

(i) $E^{*}+F-E \leq^{rs} I$ ve $F-E \leq^{rs} F^{*}$

ve O zaman,

$$E(F-E)^{+}F=0 \tag{3.37}$$

dir.

<u>İSPAT:</u> Lemma.3.1.5. den , (a) ise (b) olduğunu görürüz. (b) ise (a) $\Leftrightarrow$ (c) olduğu açıktır. (d) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (e) olduğunu görmek için Teorem.3.1.9. (a) $\Leftrightarrow$ (b) ve I-(F-E) nin hermityen idempotent olduğunu kullanırız. (e) ise (d) hemen bulunur. (f) ise (g) ise (b) ise (f) yıldız sıralamanın tanımından hemen bulunur. (f) $\Leftrightarrow$ (h) olduğunu görmek için , Teorem.3.1.10. (a) $\Leftrightarrow$ (f) ifadesini iki kez kullanırız. (i) $\Leftrightarrow$ (f) olduğunu görmek için, Teorem.3.1.10. (i) $\Leftrightarrow$ (f)'yi kullanırız.

Şimdiye kadar olan sonuçlar, ne E ne de F idempotent matrislerinin hermityenliği gerekmeksizin korundu. Şimdi E ve F nin her ikiside idempotent ve ya E ya da F nin hermityen olması durumunu inceleyeceğiz.

<u>LEMMA.3.1.8.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler ve hem de E hermityen olsun. Fakat F nin hermityen olması gerekli değildir. O zaman aşağıdaki dört koşul denktir.

(a) $E \le^{L} FF^{*}$

(b) $E=FE$

(c) $FF^{*}=E+F(I-E)F^{*}$

(d) $FF^{*}=E+(F-E)(F-E)^{*}$

<u>İSPAT:</u> (3.2) den, (a) ise (b) olduğunu görürüz. (b) ise (c) ise (a) ve (b) ise (d) ise (a) olduğunu göstermek kolaydır.

<u>TEOREM.3.1.13.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler ve hem de E hermityen olsun. Fakat F nin hermityen olması gerekli değildir. O zaman,

$$E \le^{*} F \Leftrightarrow E \le^{rs} F \Leftrightarrow E \le^{*} FF^{*} \Leftrightarrow E \le^{rs} FF^{*} \qquad (3.38)$$

dir.

Çift sonuçlar, F yerine F^{*} yerleştirilmesi ile bulunur.

<u>İSPAT:</u> $E \leq^{rs} FF^*$ ise $E \leq^{rs} F$ olduğunu ispat etmek yeterlidir. Bunu yapmak için Lemma.3.1.8. (d) den,

$E \leq^{rs} FF^*$ ise $FF^*-E=(F-E)(F-E)^*$

olduğunu ve (3.8)'i kullanırız. Her iki yanın ranklarının alınmasıyla ispat tamamlanır.

Ayrıca Teorem.3.1.13. de,

$E \leq^* F$ ise $E \leq^L FF^*$ (3.39)

olduğunu gördük.

<u>TEOREM.3.1.14.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler ve hem de E hermityen olsun. Fakat F nin hermityen olması gerekli değildir. O zaman $E \leq^* F$, aşağıdaki üç koşuldan her hangi biri ile birleştirilen Lemma.3.1.8. deki (a) - (d)'ye kadar olan dört ifadeden her hangi birisine denktir.

(i) $F^+-E=(F-E)^-$, Yani; $(F-E)(F^+-E)(F-E)=(F-E)$

(ii) $EF^+F=F^+FE$

(iii) $EF=(EF)^*$

<u>TEOREM.3.1.15.</u> E ve F nxn tipinde kompleks idempotent matrisler ve F hermityen olsun. Fakat, E nin hermityen olması gerekmez. O zaman aşağıdaki yedi koşul denktir.

(a) $E \leq^* F$

(b) $EE^* \leq^* F$

(c) $EE^* \leq^{rs} F$

(d) $EE^* \leq^L F$

(e) $EE^* \leq^{rs} EF$

(f) $EE^* = EF$

(g) $EE^*E = EF$ ve o zaman , $E=E^*$ olur.

Çift sonuçlar, E yerine E^* yerleştirilmesiyle bulunur.

<u>TEOREM.3.1.16.</u> E ve F $n\times n$ tipinde kompleks ortogonal projektörler olsun. O zaman aşağıdaki dokuz koşul denktir.

(a) $E \leq^{L} F$

(b) $E \leq^{*} F$

(c) $E \leq^{rs} F$

(d) $F=E^{-}$, Yani; $E=EFE$

(e) $F-E \leq^{*} I$

(f) $E \leq^{rs} EF$

(g) $I-F \leq^{L} I-E$

(h) $I-F \leq^{*} I-E$

(ı) $I-F \leq^{rs} I-E$

Şimdi, (2.34) sonucu ve Teorem.3.1.16.'yı kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

<u>SONUÇ.3.1.2.</u> E ve F $m\times n$ tipinde kompleks her hangi iki matris olsun. $E \leq^{*} F$ ise, O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(a) $I-FF^{+} \leq^{*} I-EE^{+}$

(b) $I-FF^{+} \leq^{L} I-EE^{+}$

(c) $I-FF^{+} \leq^{rs} I-EE^{+}$

4.BÖLÜM

MATRİS SIRALAMALARININ İSTATİSTİKTEKİ KULLANIMLARI

Bu bölümde genel amaç olarak Löwner sıralamanın, Lineer Modellerin karşılaştırılmasında nasıl kullanıldığını inceleyeceğiz. Bu amaç doğrultusunda, bu bölümde kullanacağımız bazı tanımları vereceğiz.

4.1.Kovaryansları Bilinen Lineer Modellerin Karşılaştırılması

TANIM.4.1.1. Y bir rastgele değişken ve

$f(Y_s)=P(Y=Y_s)$,s=1,2,.....,k

olsun.Y nin beklenen değeri,

$$E(Y)=\sum_{s=1}^{k} Y_s \, f(Y_s)$$

şeklinde tanımlanır.

Beklenen değer operatörü E nin önemli bir özelliği:

$E(a+cY)=a+c\,E(Y)$, a ve c sabitlerdir.

dir.Bunun özel durumları:

$E(a)=a$

$E(cY)=cE(Y)$

$E(a+Y)=a+E(Y)$

dir.

TANIM.4.1.2. Y rastgele değişkeninin varyansı $\sigma^2(Y)$ ile gösterilir ve

$\sigma^2(Y)=E\{[Y-E(Y)]^2\}$

şeklinde tanımlanır.Bu tanıma denk bir ifade,

$\sigma^2(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

dir.

Y nin bir lineer fonksiyonunun varyansı a+cY nin varyansı olarak gösterilir.

$\sigma^2(a+cY)=c^2\sigma^2(Y)$, a ve c sabitlerdir.

dir.Bu sonucun özel durumları:

$\sigma^2(a+Y)=\sigma^2(Y)$

$\sigma^2(cY)=c^2\sigma^2(Y)$

dir.

TANIM.4.1.3. Y ve Z rastgele değişkenlerinin kovaryansı $\sigma(Y,Z)$ ile gösterilir ve

$$\sigma(Y,Z)=E\{[E-E(Y)][Z-E(Z)]\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma denk bir ifade,

$$\sigma(Y,Z)=E(YZ)-[E(Y)][E(Z)]$$

dir.

a_1+c_1Y ve a_2+c_2Y nin kovaryansı ,$\sigma(a_1+c_1Y,a_2+c_2Y)$ ile gösterilir ve

$\sigma(a_1+c_1Y,a_2+c_2Y)=c_1c_2\sigma(Y,Z)$;a_1,a_2,c_1,c_2 sabitlerdir.

şeklinde tanımlanır. Bunun özel durumları:

$$\sigma(c_1Y,c_2Z)=c_1c_2\sigma(Y,Z)$$

$$\sigma(a_1+Y,a_2+Z)=\sigma(Y,Z)$$

dir.

Tanım.4.1.3. den, $\sigma(Y,Y)=\sigma^2(Y)$ bulunur. Burada $\sigma^2(Y)$, Y nin varyansıdır.

TANIM.4.1.4. $Y_1,Y_2,\ldots\ldots,Y_n$ gözlem değerlerinden oluşan, Y rastgele vektörünü göz önüne alalım. Her bir rastgele değişken $\sigma^2(Y_i)$ varyansına ve her hangi iki rastgele değişken, $\sigma^2(Y_i,Y_j)$ kovaryansına sahip olmak üzere $\sigma^2(Y)$ ile gösterilen Y nin Varyans-Kovaryans matrisi,

$$\sigma^2(Y)=\begin{bmatrix} \sigma^2(Y_1) & \sigma(Y_1,Y_2) & \ldots\ldots & \sigma(Y_1,Y_n) \\ \sigma(Y_2,Y_1) & \sigma^2(Y_2) & \ldots\ldots & \sigma(Y_2,Y_n) \\ . & & \ldots\ldots & . \\ . & & \ldots\ldots & . \\ \sigma(Y_n,Y_1) & \sigma(Y_n,Y_2) & \ldots\ldots & \sigma^2(Y_n) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

$\sigma(Y_2,Y_1)=\sigma(Y_1,Y_2)$ olduğundan, $\sigma^2(Y)$ matrisi simetriktir.

TANIM.4.1.5. $E(T)=\theta$ ise T istatistiğine bir θ paremetresinin yansız tahmin edicisi denir. θ paremetresinin lineer ve minumum varyanslı yansız tahmin edicisine en iyi lineer yansız tahmin edici denir.

Kovaryansları bilinen bir lineer model $L(X\beta,V)$ ile gösterilir ve

$$Y=X\beta+\epsilon \;,\; E(\epsilon)=0 \;,\; Var(\epsilon)=V$$

vasıtasıyla temsil edilir. Burada Y nx1 tipinde gözlemlerin rastgele vektörü, X nxp tipinde sabitlerin matrisi, β px1 tipinde paremetreler vektörü ve ϵ nx1 tipinde sıfır ortalamalı, V Varyans-Kovaryans matrisli (Singüler veya Singüler olmayan) hataların vektörüdür.

Yukarıdaki şekilde bir lineer model genel halde matris formunda aşağıdaki gibi verilir.

$$Y_{n\times 1}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X_{n\times p}=\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \ldots\ldots X_{1,p-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \ldots\ldots X_{2,p-1} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \quad\quad X_{n,p-1} \end{bmatrix}$$

$$\beta_{p\times 1}=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} \qquad \epsilon_{n\times 1}=\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ . \\ . \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

$$E(\epsilon)=E\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \epsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\epsilon_1) \\ E(\epsilon_2) \\ . \\ . \\ . \\ E(\epsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Var(\epsilon)=V=\begin{bmatrix} \sigma^2(\epsilon_1) & \sigma(\epsilon_1,\epsilon_2) & \ldots\ldots & \sigma(\epsilon_1,\epsilon_n) \\ \sigma(\epsilon_2,\epsilon_1) & \sigma^2(\epsilon_2) & \ldots\ldots & \sigma(\epsilon_2,\epsilon_n) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \sigma(\epsilon_n,\epsilon_1) & \sigma(\epsilon_n,\epsilon_2) & & \sigma^2(\epsilon_n) \end{bmatrix}$$

Şimdi temel teoremlerimizi ifade edebilmek için aşağıdaki iki lemma'yı verebiliriz.

<u>LEMMA.4.1.1.</u> Her hangi bir simetrik n.n.d. A matrisi için,

$$\sup\left\{ \frac{(z'y)^2}{z'A^-z} : z\neq 0 \ , \ z\epsilon R(A) \right\} = y'Ay$$

dir ve $k\neq 0$ için $z=kAy$ ise eşitlik bulunur.

İSPAT: Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden,

$(x'Ay)^2 \leq (x'Ax)(y'Ay)$

olduğunu biliyoruz. g-inversin tanımı ve $z=Ax$ alınmasıyla sonuç ispatlanır.

Bu bölümde de ,her hangi iki n.n.d. A ve B matrisleri için $A \geq B$ nin anlamı $A-B$ n.n.d. demektir. Yani, $A \geq^{L} B$ anlamındadır.

LEMMA.4.1.2. Her hangi n.n.d. iki kxk tipindeki Q_1 ve Q_2 matrisi için,

$Q_1 \geq Q_2 \Leftrightarrow$
(i) $R(Q_2) \subseteq R(Q_1)$

(ii) $v'Q_1^- v \leq v'Q_2^- v$, her hangi $v \in R(Q_2)$ için

dir. Burada, $Q_i^- \in Q_i^{(1)}$ dir.

İSPAT: "Gereklilik" (i) aşikardır. (ii)'yi ispat etmek için (ii) deki ifadelerin Q_i^-, g-inversinin seçiminden bağımsız olduğunu not edelim. $Q_1 \geq Q_2$ olduğundan Teorem.1.4.1. den, $Q_1^- \leq Q_2^-$ olacak şekilde bir çift Q_1^- ve Q_2^- g-inversi vardır. Böylece (ii) ispatlanır.

"Yeterlilik" Her hangi bir kx1 y vektörü için,

$y'Q_1y \geq y'Q_2y$

olduğunu ispatlamak isteriz. Lemma.4.1.1. den,

$y'Q_iy=\sup\{(z'y)^2 / z'Q_i^-z \;:\; z\neq 0 \;, z\in R(Q_i)\}$

dir. Varsayımdan, her $z\in R(Q_2) \subseteq R(Q_1)$ için,

$z'Q_1^-z \leq z'Q_2^-z$

olduğu biliniyor. Bu durum (i) ile birlikte ispatı tamamlar.

Şimdi bu bölümün ana sonucunu ispat etmek için hazırız.

TEOREM.4.1.1. $d_1=L(X_1\beta, V_1)$ ve $d_2=L(X_2\beta, V_2)$ lineer modelleri için $d_1 \geq d_2$ olması için gerek ve yeter koşul her hangi $k>0$ için,

$$X'_1(V_1+kX_1X'_1)^-X_1 \geq X'_2(V_2+kX_2X'_2)^-X_2 \qquad (4.1)$$

olmasıdır.

İSPAT: Rao(1973, S:300) den, d_i altında $c'\beta$ nın en iyi lineer yansız tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_i=(X'_iT_i^-X_i)^-X'_iT_i^-y_i$$

ile $c'\hat{\beta}_i$ dır. Burada, $T_i=V_i+kX_iX'_i$ ve k her hangi bir pozitif skalerdir. d_i altında $c'\hat{\beta}_i$ nın varyansı,

$$\mathrm{Var}(c'\hat{\beta}_i)=c'(X'_iT_i^-X_i)^-c-kc'c \qquad (4.2)$$

dir.

Lemma.4.1.2. ve (4.2) den $d_1 \geq d_2$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$R(X'_2) \subset R(X'_1) \qquad (4.3)$$

ve her hangi $c \in R(X'_2)$ için,

$$c'(X'_1T_1^-X_1)^-c \leq c'(X'_2T_2^-X_2)^-c \qquad (4.4)$$

olmasıdır.

T_i nin tanımından $R(X_i) \subset R(T_i)$ olduğundan, $X'_iT_i^-X_i$ T_i^- g-inversinden bağımsız ve bu yüzden n.n.d. dir.

İspat için geriye kalan (4.1)'in (4.3) ve (4.4)'e denk olduğudur. Lemma.4.1.2. den, (4.1)

$$R(X'_2T_2^-X_2) \subset R(X'_1T_1^-X_1) \qquad (4.5)$$

ve her hangi $c \in R(X'_2T_2^-X_2)$ için

$$c'(X'_1T_1^-X_1)^-c \leq c'(X'_2T_2^-X_2)^-c \qquad (4.6)$$

ifadelerine denk olur. (4.3) ve (4.4)'ün (4.5) ve (4.6)'ya denk olduğunu ispatlamak için geriye kalan i=1,2,...,k için,

$$R(X'_iT_i^-X_i)=R(X'_i)$$

olduğunu göstermektir. Bu da Rao(1973, S:300) den bulunur.

UYARI: (4.1) koşulu yerine daha genel olarak,

$$X'_1(V_1+X_1UX'_1)^-X_1 \geqslant X'_2(V_2+X_2UX'_2)^-X_2 \qquad (4.7)$$

yerleştirilebilir. Burada U, i=1,2 için

$$\text{rank}(V_i+X_iUX'_i)=\text{rank}(V_i:X_i) \qquad (4.8)$$

ve

$$V_i+X_iUX'_i \quad \text{n.n.d.} \qquad (4.9)$$

koşullarını sağlayan her hangi bir simetrik matristir. $R(X_i) \subset R(V_i)$ veya V_i tekil olmayan bir matris ise (4.8) ve (4.9)'u sağlayan U'nun sıfır olduğunu görmek kolaydır.

Bu uyarı ile aşağıdaki sonuç, Teorem.4.1.1.'in özel bir durumu olarak bulunur.

SONUÇ.4.1.1. $d_i=L(X_i\beta,V_i)$, i=1,2 olsun.

(a) i=1,2 için $R(X_i) \subset R(V_i)$ ise $d_1 \geqslant d_2$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$X'_1V_1^-X_1 \geqslant X'_2V_2^-X_2$$

olmasıdır.

(b) V_1 ve V_2 tekil olmayan matrisler ise $d_1 \geqslant d_2$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$X'_1V_1^{-1}X_1 \geqslant X'_2V_2^{-1}X_2$$

olmasıdır.

V_1 tekil olmayan bir matris ve V_2 tekil ise U=0, (4.8) ve (4.9)'u sağlamaz ve

$$X'_1V_1^{-1}X_1 \geqslant X'_2T_2^-X_2$$

gibi bir koşul $d_1 \geqslant d_2$ sıralamasını tanımlamaz. Bu durumda Teorem.4.1.1. veya yukarıdaki uyarıda bulunan onun daha genel bir uygulamasını kullanmalıyız.

Sonuç.4.1.1. (b) nin gereklilik kısmı Ehrenfeld(1955) ve Kiefer(1959) da ispat edildi.Sonuç.4.1.1. (a),Stepniak ve Torgersen(1981)'in uyarı 2.'sinde not edildi.

Şimdi de $d_1=L(X_1\beta,V_1)$'in tam manasıyla $d_2=L(X_2\beta,V_2)$ den daha iyi olmasını araştıracağız.

$d_1 > d_2$ olması için gerek ve yeter koşul $d_1 \succcurlyeq d_2$ ve aşağıdakilerden ikisinden birinin doğru olarak sağlanmasıdır.

(a) $R(X'_2) \subsetneq R(X'_1)$

(b) Bazı $c \in R(X'_2)$ için $Var(c'\hat{\beta}_1) < Var(c'\hat{\beta}_2)$

<u>TEOREM.4.1.2.</u> $d_1 > d_2$ olması için gerek ve yeter koşul,her hangi $k>0$ için,

$$M_1(k) \succcurlyeq M_2(k) \text{ ve } M_1(k) \neq M_2(k)$$

olmasıdır.Burada,

$$M_i(k)=X'_i(V_i+kX_iX'_i)^-X_i$$

şeklindedir.

Teorem.4.1.2. ,Lemma.4.1.2. nin aşağıdaki yeni şeklinin ispatta Lemma.4.1.2. nin rolü yerine geçmesi hariç Teorem.4.1.1. deki gibi aynı yolla ispat edilebilir.

$Q_1 \succcurlyeq Q_2$ ve $Q_1 \neq Q_2$ olması için gerek ve yeter koşul Lemma.4.1.2. nin (i) ve (ii) koşulları ve aşağıdakilerden ikisinden birinin doğru olarak sağlanmasıdır.

(iii) $R(Q_2) \subsetneq R(Q_1)$

(iv) Bazı $v \in R(Q_2)$ için $v'Q_1^-v < v'Q_2^-v$

Modellerin denk olmasının bir doğal tanımı: d_1 denktir d_2 olması için gerek ve yeter koşul $d_1 \succcurlyeq d_2$ ve $d_2 \succcurlyeq d_1$ olmasıdır.iki modelin denkliği $d_1 \simeq d_2$ şeklinde gösterilir.

<u>TEOREM.4.1.3.</u> $d_1 \simeq d_2$ olması için gerek ve yeter koşul her hangi $k>0$ için,

$$M_1(k)=M_2(k)$$

olmasıdır.

Bu aşikar olarak Teorem.4.1.1. den bulunur.

4.2. Matris Sıralamasının Kullanılmasıyla Cochran Teoreminin İfade Edilmesi

<u>TEOREM.4.2.1.</u> (Cochran Teoremi) $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$; $n(0,\sigma^2)$ normal dağılımından alınan bir rastgele örneklemi göstersin.

$$\sum_{1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots + Q_k$$

şeklinde olsun. $Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_k$ rastgele değişkenlerinin karşılıklı Stokhastik bağımsız ve Q_j / σ^2 nin $\chi^2(r_j)$ olması için gerek ve yeter koşul $j=1,2,\ldots\ldots,k$ için,

$$\sum_{1}^{k} r_j = n$$

olmasıdır. Burada Q_j , $j=1,2,\ldots\ldots,k$ için r_j ranklı A_j matrisi ile $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$'i içinde bulunduran bir kuadratik formdur.

Şimdi matris terimleri kullanılarak, Cochran Teoreminin uyarlaması genişletilmiş olarak verilebilir.

<u>TEOREM.4.2.2.</u> $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ mxm tipinde simetrik matrisler ve $A=A_1+A_2+\ldots+A_k$ olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

(a) $\mu(A_i) \subseteq \{c_1, c_2\}$, tüm $i=1,2,\ldots\ldots,k$ için

(b) $A_i A_j = 0$, tüm $i,j=1,2,\ldots\ldots,k$; $i \neq j$ için

(c) $\mu(A) \subseteq \{c_1, c_2\}$

(d) $A_i \leq^{\wedge} A$, tüm $i=1,2,\ldots\ldots,k$ için

Burada (a) ve (c) deki $\mu(.)$ kümeleri, c_1 ve c_2 sıfırdan farklı gerçel sayılar iken, sıfırdan farklı tüm özdeğerleri göstermektedir. O zaman ,

(a) ve (b) $\Leftrightarrow$ (c) ve (d)

dir.

İSPAT: Styan ve Takemura(1983,Teorem 4.) de, (b) sağlanır ise A nın sıfırdan farklı tüm özdeğerlerinin kümesinin i=1,2,....,k için tüm A_i nin sıfırdan farklı özdeğerlerinin kümesi ile aynı olduğunu gösterdiler. Bu yüzden (a) ve (b) nin sağlanması (c) nin sağlanmasını gerektirir. Bundan başka (b) nin bir sonucu, tüm i=1,2,..,k için,

$$AA_i=A_iA=A_i^2 \text{ ,Yani; } A_i \leq^* A \qquad (4.10)$$

olur. Hartwig ve Styan(1986) daki Sonuç 1.'in kullanılmasıyla, kompleks ve hermityen A,B için,

$$A \leq^* B \Longrightarrow A \leq^{\wedge} B$$

olduğu açıktır. Böylece (4.10), (d)'yi gerektirir.

Tersine (c) ve (d) nin (a)'yı gerektirdiği açıktır. Şimdi,

$$A=c_1P_1+c_2P_2 \qquad (4.11)$$

ve

$$A_i=c_1P_{i1}+c_2P_{i2} \quad , \; i=1,2,...,k \qquad (4.12)$$

alalım. Burada P_1,P_2 ve P_{i1},P_{i2} ; $P_1P_2=0$ ve $P_{i1}P_{i2}=0$ olacak şekilde simetrik ve idempotent matrislerdir.

Marsaglia ve Styan(1987) deki Teorem 17.'nin kullanılmasıyla (d) nin bir sonucu i=1,2,...,k için,

$$AA^+A_i=A_iA^+A_i \qquad (4.13)$$

ve (4.11) den,

$$A^+=P_1/c_1+P_2/c_2 \quad \text{ve} \quad AA^+=P_1+P_2$$

bulunur. Böylece (4.13) deki eşitliğin önden ve arkadan P_{i1} ile çarpılması,

$$(1-c_1/c_2)P_{i1}P_2P_{i1}=0$$

eşitliğini verir. $c_1 \neq c_2$ olduğundan bu, $P_2P_{i1}=0$ olmasını gerektirir. $P_2P_{i1}=0$ ile $AA^+A_iP_{i1}=A_iP_{i1}$ sonucunun birleştirilmesi, $P_1P_{i1}=P_{i1}$ eşitliğini verir. Benzer şekilde, $P_1P_{i2}=0$ ve $P_2P_{i2}=P_{i2}$ bulunur. Şimdi,

$$AA_i=c_1{}^2P_{i1}+c_2P_{i2}$$

ve böylece, $i=1,2,\ldots,k$,için

$$AA_i=A_iA$$

bulunur. Marsaglia ve Styan(1987, Teorem 15.)'in kullanılmasıyla bu (b) sonucunu verir.

Kuadratik formların terimlerinin kullanılmasıyla Cochran Teoreminin bir uyarlaması da aşağıdaki Teorem.4.2.3. deki gibi verilir.

TEOREM.4.2.3. $A_1,A_2,\ldots\ldots,A_k$ simetrik matrisler, $A=A_1+\ldots+A_k$ ve c_1 ve c_2 , $c_1 \neq c_2$ olacak şekilde sıfırdan farklı gerçel sayılar olsun. Bundan başka; $X \sim N(0,I)$, $q=x'Ax$ ve $i=1,2,\ldots\ldots,k$ için $q_i=x'A_ix$ olsun. O zaman,

(a) q_i , $c_1\chi^2_{i1} + c_2\chi^2_{i2}$ gibi dağılır. $(i=1,2,\ldots\ldots,k)$

ve

(b) $q_1,q_2,\ldots\ldots,q_k$ bağımsız olarak dağılır.

olması için gerek ve yeter koşul

(c) q , $c_1\chi^2_1 + c_2\chi^2_2$ gibi dağılır.

ve

(d) $A_i \overset{\wedge}{<} A$, $i=1,2,\ldots,k$

dir.

Burada ,(a) daki her bir i için χ^2_{i1} ve χ^2_{i2} ve (c) deki χ^2_1 ve χ^2_2 bağımsız merkezi ki-kare değişkenleridir. Bazıları sıfır serbestlik derecesine sahip olabilir.

ÖZET

Bugün, matris sıralamaları istatistikte özellikle lineer modellerde önemli uygulamalara sahip olduğundan matris teorisinde çok önemli bir kavramdır.

Bilinen cebirsel sıralama bağıntıları matrisler kümesinde geçerlidir. Bu durum matrislerin bazı kısmi ve ön sıralamalarına götürür. Tanımlanan sıralama bağıntıları yakın ilişkiye sahiptir. Bu yüzden sıralamalar arasındaki ilişkiler çalışıldı.

Matrislerin tanımlı olduğu kümeye göre, tanımlanan sıralama bağıntıları farklı olduğundan idempotent matrislerin kısmi sıralamaları da çalışıldı.

Ek olarak, Löwner sıralamanın istatistikte nasıl ve nerede uygulanabildiği çalışıldı.

SUMMARY

Today,The matrix ordering is very important concept in matrix theory because It has especially important applications on linear models in statistics.

Known algebraical ordering relations is valid on matrix sets.This case leads on some partial ordering and preordering of matrices.

The defined ordering relations has the close relation.So that the relations between them are studied.

Because according to the definition set of matrices the defined ordering relations differs,The partial ordering of idempotent matrices are studied.

In addition,How and Where Löwner ordering is applicable in statistics is studied.

KAYNAKLAR

1. BAKSALARY, J.K., KALA, RADOSLAV and KLACZYNSKI, K., (1983). The Matrix inequality M ⩾ B*MB. Linear Algebra and its Applications. 54, S.77-86.
2. BAKSALARY, J.K. and HAUKE, J., (1984). Inheriting independence and chi-squaredness under certain matrix orderings. Statist. Probab Lett. 2, S.35-38.
3. BAKSALARY, J.K., (1986). A relationship between the star and minus orderings. Linear Algebra and its Applications. 82, S.163-167.
4. BAKSALARY, J.K. and HAUKE, J., (1987). Partial Orderings of Matrices Referring to singular values or Eigenvalues. Linear Algebra and its Applications. 96, S.17-26.
5. BAKSALARY, J.K., PUKELSHEiM, F. and STYAN, G.P.H., (1989). Some Properties of Matrix Partial orderings. Linear Algebra and its Appl. 119, S.57-85.
6. CLiNE, R.E. and FUNDERLiC, R.E., (1979). The rank of a difference of matrices and associated generalized inverses. Linear Algebra and its Applications. 24, S.185-215.
7. DRAZiN, M.P., (1977). Natural Structures on rings and semigroups with involution, unpublished manuscript.
8. DRAZiN, M.P., (1978). Natural Structures on semigroups with involution. Bull. Amer. Math. Soc. 84, S.139-141.
9. EHRENFELD, S., (1955). Complete class theorem in experimantal design. Proceedings of the Third Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. 1, S.69-75.
10. GRAYBiLL, F.A., (1983). Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth. California. (461)S.
11. HARTWiG, R.E., (1980). How to partially order regular elements. Math. Japon. 25, S.1-13.
12. HARTWiG, R.E. and STYAN, G.P.H., (1986). On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity. Linear Algebra Appl. 82, S.145-161.

13. HARTWiG, R.E. and STYAN, G.P.H., (1987). Partially ordered idempotent matrices. in Proceedings of the second international Tampere Conference in Statistics (T. Pukkila and S. Puntanen, Eds.), Dept. of Mathematical Sciences, Univ. of Tampere, Tampere, Finland, S.361-383.

14. KIEFER, J., (1959). Optimum experimantal designs. J. Roy. Statist. Soc. B 21, S.272-304.

15. MARSAGLiA, G. and STYAN, G.P.H., (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. Linear and Multilinear Algebra. 2, S.269-292.

16. MiLLiKEN, G.A. and AKDENiZ, F., (1977). A theorem on the difference of the generalized inverses of two nonnegative definite matrices. Communications in Statistics, Part A-Theory and Methods, 6, S.73-79.

17. MiTRA, S.K., (1986). The minus partial order and the shorted matrix. Linear Algebra Appl. 83, S.1-27.

18. NETER, J. and WASSERMAN, W., (1974). Applied Linear Statistical Models. Homewood. Illinois. (842)S.

19. PENROSE, R., (1955). A generalized inverse for matrices. Proc. Comb. Phil. Soc. 51, S.406-413.

20. PRiNGLE, R.M. and RAYNER, A.A., (1971). Generalized inverse matrices with applications to statistics. Hafner Publishing Com. New York. (127)S.

21. RAO, C.R. and MiTRA, S.K., (1971). Generalized inverse of Matrices and its Applications. Wiley. New York. (265)S.

22. RAO, C.R., (1973). Linear statistical inference and its Applications, 2 nd Edition. John Wiley and Sons. New York. (625)S.

23. ROHDE, C.A., (1964). Contributions to the theory, computation and application of generalized inverses. Mimeo No:392, Institute of statistics, Univ. North. Carolina, Raleigh.

24. SAMBAMURTY, P., (1987). Characterisation of a matrix by its subclass of g-inverses. Sankhya Ser. A. 49, S.412-414.

25. SEARLE, S.R., (1982). Matrix Algebra Useful for Statistics. Chichester. New York. (438)S.

26.STEPNiAK,C. and TORGERSEN,E.N.,(1981). Comparison of linear models with partially known covariances with respect to unbiased estimation. Scand. J. Statist. 8, S. 183-184.

27.STEPNiAK,C.,WANG,S.G. and WU,C.F.J.,(1984). Comparison of linear experiments with known covariances. The Annals of Statistics. No: 1, 12, S. 358-365.

28.STYAN,G.P.H. and TAKEMURA,A.,(1983). Rank addivity and matrix polynomials. in studies in Econometrics. Time series and Multivariate statistics in Honor of Theodere W. Anderson (S.Karlin, T.Amemiya and L.A.Goodman, Eds.), Acedemic. New York. S. 545-558.

29.WU,C.F.,(1980). On some ordering properties of the Genaralized inverses of Nonnegatif Definit Matrices. Linear Algebra and its Applications. 32, S. 49-60.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince her türlü yardımını esirgemeyen ve çalışmalarımda beni yönlendiren sayın hocam Prof.Dr.Fikri Akdeniz'e ve değerli arkadaşım Arş.Gör.Sadullah Sakallıoğlu'na teşekkür ederim.

ÖZGEÇMIŞ

01.Ocak.1966 tarihinde Osmaniye'de doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Osmaniye'de tamamladım. Üniversite öğrenimime, Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Ekim-1984 döneminde başlayıp Haziran-1988 döneminde mezun oldum. Daha sonra Şubat-1989'da Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı bölümde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi