15125

TEK DEĞİŞKENLİ DAĞILIM MODELLERİ

HAMZA EROL

Ç.Ü.
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADANA
EYLÜL-1991

Çukurova üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof.Dr. Fikri AKDENİZ

üye Prof.Dr. Yusuf ÜNLÜ

üye Prof.Dr. Nejat ERK

Kod No:495

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Ural DİNÇ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖZ

Bu çalışmadaki esas amaç, istatistiksel dağılımların temelini oluşturan, yaygın olarak kullanılan, çekirdek dağılımlar olarak nitelendirilebilen, tek değişkenli kesikli ve sürekli tipteki dağılım modellerini araştırmaktır. Bu araştırmada, dağılımların olasılık fonksiyonları veya olasılık yoğunluk fonksiyonları, dağılım fonksiyonları, olasılık çıkaran fonksiyonları, moment çıkaran fonksiyonları, merkez ya da ortalama etrafındaki r-inci momentleri, merkezi ölçütleri: ortalama, mod ve medyan; varyansları, standart sapmaları, çarpıklıkları ve sivrilikleri, karakteristik fonksiyonları ve kümülant fonksiyonları hesaplanmıştır.

Bu hesaplamalarda, Loglojistik dağılımın, Maxwell dağılımının ve Standart üçgensel dağılımın merkez etrafındaki r-inci momentleri ve Standart üçgensel dağılımın da moment çıkaran fonksiyonu bulunmuş ve bunlara bağlı olarak diğer bilinmeyen özellikleri elde edilmiştir.

Modellerin parametre tahminleri yapılmıştır. Uygulama alanları örneklerle gösterilmiş, standart ya da standartlaştırılmış halleri ve diğer dağılımlarla olan ilişkileri verilmiştir.

Modellerin değişik parametre değerlerine göre değişimleri grafiklerle gösterilmiştir. Bu grafikler GNUPLOT paket proğramı kullanılarak elde edilmiştir.

ABSTRACT

The purpose of this work is to review probability functions, probability density functions, distribution functions, probability generating functions, moment generating functions, r-th moments about the orijin and mean, central tendency: mean, median and mode, variance, standart deviation, skewness and kurtosis, characteristic functions and cumulant functions of well-known and having wide application of univariate discreate and continuous distribution models.

In this work we find the r-th moment about the orijin of Loglojistic distribution, Maxwell distribution and Standart Triangular distribution. In addition to this, we find also the moment generating function of Standart Triangular distribution and by use of these we get the unknown properties of related distributions.

We investigate the estimators of parameters of distributions, show the application areas with examples, give the standart and standartized forms and give also the relations between them.

We give the graphs with different parameter values by using GNUPLOT package program.

GİRİŞ

Modern bilimlerin tüm alanlarındaki en önemli gelişmelerden bir tanesi, çoğu problemlere deterministik çözümler arama yerine daha çok probabilistik çözümler arama yoluna gidilmesidir. Bunun nedeni ise, çağımızın karmaşık yapıdaki problemlerinin çözümlerinde deterministik modellerin yetersiz kalmasıdır.

Ayrıca, birbirine denk kabul edilen deterministik modellerin verimliliği de yeterli olmamaktadır. Bunun nedeni de bir çok faktörün bu modelleri etkileyerek bazı değişimler meydana getirmesidir. Bu nedenle, değişimlerin olduğu problemlerin çözümlerinde, bu değişimleri iyi tanımlayan probabilistik modellerin kullanılması gerekmektedir. Değişimlere örnek vermek gerekirse:

Değişimin bir tipi, tüm elemanlarının denk olmadığı, elemanlarının ±% 10'luk bir değişim gösterdiği resistörlerin bir sınıfından seçilen resistörün kullanılmasından kaynaklanır.

Değişimin diğer bir tipi ise, aynı tip elemanın değişik zamanlarda kullanılmasından kaynaklanır. Değişimin bu tipi, bir radyo alıcısının verimliliğiyle gösterilebilir.

Böyle değişimler gözlendiğinde, bunun bir probabilistik modele uygulanmasının iki nedeni vardır. Probabilistik modeller bize bazı yeni soruları ortaya koymamıza ve daha önce deterministik terimlerle oluşturulan sorulara daha anlamlı cevaplar bulmamıza neden olur.

Birinci neden "bu bilgisayar ne kadar güvenilirdir?". Eğer biz iyi yada kötü gibi niteleyici kelimeler kullanmak istemiyorsak, güvenirliliği tanımlamak için olasılığa gereksinim vardır.

İkinci neden ise, "Eğer herbiri 1.0±0.1 birim uzunlukta olan parçalarlardan 20 tanesini uç uca eklersek toplam uzunluk nedir?". Bu durumda deterministik cevap, 20±2.0'dır. Bu sonuç olasıdır. Bununla birlikte, pratik varsayımlarla toplam uzunluğun 18.1'den küçük veya 21.9'dan büyük olması yani sıfır etrafındaki cevap 20±2.0'dır. Bu cevap, örneğin bir mühendis açısından memnuniyet verici değildir. Diğer bir ifadeyle, bu probleme probabilistik yaklaşımda bulunulmazsa, cevap pahalıya mal olabilir.

Haberleşme sistemleri, örneğin radyo, televizyon, radar gibi, kurulurken en önemli problem sinyal almak ve ses veya görüntü vermektir. Probabilistik modeller anlamlı sesleri veya görüntüleri tanımlamada uygundur. Bunun anlamı, modern haberleşme donanımı, probabilistik modeller üzerine kurulur. Bu uygulama, probabilistik modellerin uyarlanması ve çalışılması için nedenleri gösterir. Diğer bazı nedenleri şöyle sıralayabiliriz:

1) üretim kalitesini ekonomik olarak kontrol etmek için örneklem planları kurmak.

2) Karmaşık bir sistemde, parçaların optimum fazlalığını belirlemek. örneğin ağırlık kısıtlamaları olan bir uzay aracı.

3) Eski verileri kullanarak, bir başarı testi bazında bilgisayar prоğramcılarının potansiyel başarı ve başarısızlığı arasında oranlama yapmak.

4) Tüketiciye verilen faturaların fazlalığını ölçebilecek bir örneklem geliştirmek.

5) Değişik zamanlarda, değişik yollarla alınan kayıtların kullanılmasıyla uzaydaki bir cismin konumunu belirlemek

6) üretim mallarına zarar vermeyen, üretim hatalarından kaynaklanan başarısızlığın yüksek bir oranını çözebilecek ilk ateşleme ve ivme koşullarını belirlemek.

7) üretim verimliliğiyle ilgili olarak, gelecekteki üretimin kontrolü için belirleyici limitleri oluşturmak.

8) Bir kimyasal maddenin özellikleri üzerinde, işlem koşullarının etkisini belirlemek için gelişme proğramı planlamak ve elde edilen verileri değerlendirmek.

9) Elemanlarının değişebilirliği ve aralarındaki bağıntılar hakkındaki bilgileri kullanarak, büyük bir sistemin verimliliğindeki düzensiz değişmeleri tahmin etmek.

10) Gerekli olan elektrik gücü için ihtiyacı karşılayabilecek en yüksek olasılıkta gerekli elektrik üretim düzeyini bulmak.

11) Değişik zaman aralıklarında, üretim değişimlerinin sonuçlarını araştırmak.

12) Bir üretimin verimliliği üzerinde, değişen cevrenin, ortamın etkilerini hesaplamak.

13) Yansız okuma yada ölçüm yapabilecek bir aygıt geliştirmek.

Yukarıdaki örnekleri çoğaltabilir, uygulama alanlarını da genişletebiliriz.

Biz bu çalışmada, tek değişkenli dağılım modellerini ele aldık. Tezimiz üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel bilgiler, tanımlar ve gösterimler, ikinci bölümde, kesikli tip çekirdek dağılım modelleri ve üçüncü bölümde ise, sürekli tip çekirdek dağılım modelleri ele alınmıştır.

Tek değişkenli dağılım modelleri çeşitli şekilde sınıflandırılabilir. Biz sınıflandırmayı, çekirdek modeller, birleştirilmiş modeller, karıştırılmış modeller, genelleştirilmiş modeller ve çoklu modeller olarak yaptığımızda, çalışma alanımız çekirdek modellerdir. Bu alanı seçmemizin nedenleri olarak; Bu konuda daha karmaşık modeller üzerinde çalışmalar için bir baz oluşturmasını, konunun özünü vermesini, çok kullanılmalarını, yaygın uygulama alanlarının olmasını verebiliriz.

Bu çalışmaya başlamadan önce kararlaştırdığımız modellerin tamamı incelenmiştir.

Kesikli tipte yaklaşık olarak, 137 dağılım modeli vardır. Bu modellerden 12 tanesi birleştirilmiş, 14 tanesi karıştırılmıs, 27 tanesi genelleştirilmiş ve 37 tanesi çoklu modeldir. Bunların toplam sayısı, 90 dır. Bizim çalışma alanımızda toplam 47 model vardır. Bu modellerden 10 tanesinin özellikleri incelenmiştir. Kesikli tipteki modeller üzerindeki çalışma alanımızda yaklaşık olarak, %21'lik bir çalışma gerçekleştirilmiştir.

Sürekli tipte yaklaşık olarak 151, dağılım modeli vardır. Bu modellerin 12 tanesi birleştirilmiş ve 18 tanesi de genelleştirilmiş modeldir. Bunların toplam sayısı 30'dur. Bizim çalışma alanımızda toplam 121 model vardır. Bu modellerden 48 tanesinin özellikleri incelenmiştir. Sürekli tipteki modeller üzerindeki çalışma alanımızda yaklaşık olarak, %40'lık bir çalışma gerçekleştirilmiştir.

Tüm kesikli ve sürekli tipteki dağılım modelleri üzerindeki çalışma alanımızda yaklaşık olarak, ortalama %35'lik bir çalışma gerçekleştirilmiştir.

1.BÖLÜM

TANIMLAR TEMEL BİLGİLER VE GÖSTERİMLER

Bu bölümde kullanacağımız tanımları, temel bilgileri ve gösterimleri vereceğiz.

1.1 Tanımlar

TANIM 1.1.1 Bir rastgele deney, madeni bir paranın havaya fırlatılması, hilesiz bir zarın yuvarlanması veya belirli bir günde gözlenen yağmur miktarı gibi sonucu şansa bağlı olan deneydir.

TANIM 1.1.2 Bir rastgele deneyin olanaklı sonuçlarının kümesine, S örnek uzayı denir. S örnek uzayının bir elemanına örnek nokta denir.

TANIM 1.1.3 Herhangi bir rastgele deneyin S örnek uzayının bir alt kümesine bir olay denir.

ÖRNEK 1.1.1 Madeni bir paranın havaya fırlatılması, rastgele bir deneydir. Bu rastgele deneyin S örnek uzayı S={Y,T} dir. Burada Y paranın yazı yüzünü, T paranın tura yüzünü göstermektedir. Bu rastgele deneyde paranın yazı yüzünün üste gelmesi bir olaydır.

TANIM 1.1.4 Bir A olayının P(A) ile gösterilen olasılığı

$$p(A)=\frac{\text{A olayının sonuçlarının sayısı}}{\text{S örnek uzayının sonuçlarının sayısı}} \qquad (1.1.1)$$

dır.

ÖRNEK 1.1.2 örnek 1.1.1' deki A olayının P(A) ile gösterilen olasılığını hesaplayalım.

$$P(A)=1/2$$
$$=0.5$$

bulunur.

TANIM 1.1.5 Bir rastgele değişken, bir S örnek uzayını bir A olayına dönüştüren fonksiyondur.

Verilen bir rastgele deneydeki bağıntılarla değişik rastgele değişkenler tanımlanabilir.

ÖRNEK 1.1.3 İki madeni paranın havaya fırlatılması deneyinde, gözlenen yazıların sayısı bir rastgele değişkendir, gözlenen turaların sayısı diğer bir rastgele değişkendir.

İstatistiksel dağılımların incelenmesinde değişken kavramıyla çalışmak kolaylık sağlar. Bir değişken, bir rastgele değişken fikrinin genelleştirilmesidir ve benzer rastgele özelliklere sahiptir. Bir değişken, özel tipteki rastgele deney belirtilmeden tanımlanır.

<u>ÖRNEK 1.1.4</u> Bir madeni paranın havaya fırlatılması deneyindeki gözlenen yazıların sayısı ve gözlenen turaların sayısı aynı değişken şeydir. Çünkü sonuçları etkileyen faktör aynıdır.

<u>TANIM 1.1.6</u> X bir değişkeni ve R_x'de, bu değişkenin alabileceği tüm degerlerin, gerçel sayılarının kümesi olsun R_x'e X değişkeninin tanım kümesi denir.

<u>ÖRNEK 1.1.5</u> İki madeni paranın havaya fırlatılması deneyini ele alalım. Bu deneyde, gözlenen yazıların sayısıyla ilgilenelim. Rastgele değişkenin tanım kümesi $R_x=\{0,1,2\}$, yazıların kümesidir. Çünkü sonuçta hiç yazı gelmeyebilir, bir yazı gelebilir veya her ikisi de yazı gelebilir.

<u>TANIM 1.1.7</u> Genel bir değişken X için x bir gerçel sayı olmak üzere, R_x tanım kümesinin bir elemanını göstersin. x' e X değişkeninin aldığı değer denir.

<u>ÖRNEK 1.1.6</u> örnek 1.1.5'teki deneyde $x\in\{0,1,2\}$ yazılır. Yani x, {0,1,2} yazılar kümesinin bir elemanıdır.

<u>TANIM 1.1.8</u> "X=x" in anlamı, X değişkeninin aldığı değer x olmak üzere, $Prob[X\leq x]$ ifadesine, X değişkeninin x'ten küçük veya eşit olması durumundaki olasılık denir.

<u>TANIM 1.1.9</u> α bir gerçel sayı olmak üzere, X değişkeninin x 'ten küçük veya eşit olması durumundaki olasılığını göstersin. R_x^{α}, $Prob[X\leq x]$ olasılığının tüm değerlerinin kümesi olsun.

Sürekli tipteki bir değişken için $R_x^{\alpha}=[0,1]$ kapalı aralığıdır.

Kesikli tipteki bir değişken için R_x^{α}, $[0,1]$ aralığının bir alt kümesidir.

O halde, R_x^{α}'ya bir değişken için olasılık tanım kümesi denir.

Biz x sembolünü, bir rastgele değişkeni göstermek için kullanacağız.

ÖRNEK 1.1.7 örnek 1.1.5 'deki deneyde,

$Prob[x \leq 0]=1/4$

$Prob[x \leq 1]=3/4$

$Prob[x \leq 2]=1$

ve böylece $R_x^{\alpha}=\{1/4,3/4,1\}$ dir.

TANIM 1.1.10 Kesikli tipteki bir x rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu, rastgele degişkenin olanaklı tüm değerleriyle ilgili olasılıklarını veren f(x) ifadesidir.

$$f(x)=Prob[x=x_i] \qquad i=1,2,3,... \qquad (1.1.2)$$

dir. Burada,

1) Her $x_i \in R_x$ için, $f(x_i) \geq 0$ dır. (1.1.2.a)

2) Her $x_i \in R_x$ için, $\sum_{x} f(x_i)=1$ dir. (1.1.2.b)

TANIM 1.1.11 Kesikli tipteki bir rastgele değişkenin, x ile verilen değerden küçük veya eşit olması durumundaki olasılığına, birikimli dağılım fonksiyonu yada rastgele degişkenin dağılım fonksiyonu denir.

$$Prob[x \leq x_i]=F(x_i)= \sum_{x \leq x_i} f(x_i) \qquad i=1,2,3,... \qquad (1.1.3)$$

dir. Burada,

1) Her $x_i \in R_x$, için $0 \leq F(x_i) \leq 1$ dir. (1.1.3.a)

2) Her x_i ve $x_j \in R_x$ için, $x_i \geq x_j$ olmak üzere,
$F(x_i) \geq F(x_j)$ dir. (1.1.3.b)

3) Her $x_i \in R_x$ için, $Prob[x > x_i]=1-F(x_i)$ dir. (1.1.3.c)

TANIM 1.1.12 Sürekli tipteki bir rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, rastgele değişkenin olanaklı tüm değerleriyle ilgili olasılıklarını veren f(x) fonksiyonudur.

$$f(x)= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Prob[x_i \leq x \leq x_i+\Delta x]}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\{F(x)\} \qquad (1.1.4)$$

dir. Burada,

1) Her $x_i \in R_x$ için, $f(x_i) \geq 0$ dır. (1.1.4.a)

2) Her $x_i \in R_x$ için, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_i)dx_i = 1$ dir. (1.1.4.b)

TANIM 1.1.13 Sürekli tipteki bir X rastgele değişkeninin, x ile verilen değerden küçük yada eşit olması durumundaki olasılığa birikimli dağılım fonksiyonu denir.

$$Prob[x \le x_i] = F(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(u)du \qquad (1.1.5)$$

dur. Burada,

1) Her x_i ve $x_j \in R_x$ için,
$Prob[x_i \le x \le x_j] = F(x_j) - F(x_i)$ dır. (1.1.5.a)

2) Her $x_i \in R_x$ için, $Prob[x > x_i] = 1 - F(x_i)$ dır. (1.1.5.b)

3) $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_i) = F(-\infty) = 0$ ve $\lim_{x_i \to +\infty} F(x_i) = F(+\infty) = 1$ dir. (1.1.5.c)

4) Her $x_i \in R_x$ için, $F(x_i) \ge 0$ dır. (1.1.5.d)

5) Her x_i ve $x_j \in R_x$ için $x_i \ge x_j$ olmak üzere,
$F(x_i) \ge F(x_j)$ dır. (1.1.5.e)

$x_i \in R_x$ ve $\alpha \in R_x^{\alpha}$ için, F veya F_x ile gösterilen bir x_i rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu, R_x'i R_x^{α}' ya dönüştüren öyle fonksiyondur ki,

$$F(x_i) = Prob[x \le x_i] = \alpha \qquad i=1,2,3,... \qquad (1.1.6)$$

dır.

1.2 Dağılımın Parametreleri

Her değişkenin ilgili bir dağılım fonksiyonu vardır. Bazı değişken guruplarının dağılım fonksiyonları birinden diğerine sadece parametrelerinin değerlerindeki değişimle değişir. Dağılım fonksiyonlarındaki parametrelerin detaylı seçimi çok önemlidir. Çünkü parametrelerin fiziksel yada geometrik anlamları vardır. Biz üç tip parametre ile ilgileneceğiz. Bunlar dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

1) Konum parametresi: Değişkenin değişim aralığının yada tanım kümesinin genellikle orta noktasıdır.

2) Yayılım parametresi: Değişkenin aldığı x değerinin ölçümünü belirleyen parametredir.

3) Şekil parametresi: Değişkenin belirtilmiş bir tipiyle ilgili şeklinin, bir ailesi içerisindeki dağılım fonksiyonunun şeklini belirleyen parametredir.

1.3 Dağılımın Merkezi ölçütleri

Bir rastgele değişkenin dağılımı hakkındaki bilgileri birkaç tanımlayıcı değerlerle özetlemek isteyebiliriz. Genellikle biz dağılımın merkezi ile ilgileniriz. Burada dağılımın merkezini tanımlayan üç çeşit ölçütü ele alacağız.

1) Beklenen değer yada ortalama:

Dağılımın merkezi ölçütlerinden en iyi bilineni, beklenen değer veya aritmetik ortalamadır.

TANIM 1.3.1 f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin beklenen değeri,

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{1.3.1}$$

dir.

TANIM 1.3.2 f(x) olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin beklenen değeri,

$$E(x)=\sum_{x} xf(x) \tag{1.3.2}$$

dir.

2) Medyan yada ortanca değer:

Dağılımın merkezi ölçütlerinden diğeri medyandır.

TANIM 1.3.3 f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin medyanı,

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)du=0.5 \tag{1.3.3}$$

eşitliğini sağlayan x değeridir.

TANIM 1.3.4 f(x) olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin medyanı,

$$\sum_{u}^{x} f(u)=0.5 \qquad (1.3.4)$$

eşitliğini sağlayan x değeridir.

3) Mod yada tepe noktası:

Dağılımın merkezi ölçütlerinden bir diğeri ise modtur.

TANIM 1.3.5 Sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin modu, bir tek maksimum varsa olasılık yoğunluk fonksiyonunun maksimumu ile ilgili değerdir.

TANIM 1.3.6 Kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin modu, en yüksek olasılığa sahip rastgele değişkenin değeridir.

Dağılımın bu üç merkezi ölçütünü karşılaştırmak gerekirse: genelde mod, iyi bir dağılımın merkezi ölçütü değildir. Çünkü verilerin herhangi bir gurubuna bağlıdır. Bir örneklemde en yüksek değer iki tane olabilir. Böyle dağılımlara "bimodal" dağılım denir. Medyan verileri iki parçaya ayırır. Bazen medyana ortanca değer de denir. Medyan, modtan daha iyi bir dağılımın merkezi ölçütüdür. Ortalama yada verilerin aritmetiksel ortalaması, en çok kullanılan ve iyi bir dağılımın merkezi ölçütüdür.

1.4 Verilerin Ortalamasının Medyanının ve Modunun Hesaplanması

$x_1,x_2,...,x_n$ n hacimlik bir gözlem olsun.

1) x ile gösterilen veri ortalaması,

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.4.1)$$

dır.

2) $x_1,x_2,...,x_n$ 'lerin küçükten büyüğe doğru sıralanmış hali $x'_1,x'_2,...,x'_n$ olsun. Bu durumda,

$$
\text{medyan}=\begin{cases} \text{n tek ise,} & x'_{\frac{1}{2}(n+1)} \\ \text{n çift ise,} & (x'_{\frac{1}{2}n}+x'_{\frac{1}{2}n+1})/2 \end{cases} \qquad (1.4.2)
$$

dır.

3) Gözlemlerin en büyük sayısının bulunduğu sınıf frekansının merkez noktası, mod olarak alınır.

1.5 Dağılımın Diğer Tanımlayıcı özellikleri

<u>TANIM 1.5.1</u> $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin μ'_r ile gösterilen merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$
\mu'_r=E(x^r)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \qquad (1.5.1.a)
$$

veya

$$
\mu'_r=\left(\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right)\bigg|_{t=0}=(-i)^r\left(\frac{d^r \xi(t)}{dt^r}\right)\bigg|_{t=0} \qquad (1.5.1.b)
$$

dir.

Burada $M(t)$ ve $\xi(t)$ sırasıyla, (1.7.7.a) ve (1.7.8.a)'da verilen fonksiyonlardır.

<u>TANIM 1.5.2</u> $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin μ'_r ile gösterilen merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$
\mu'_r=E(x^r)=\sum_x x^r f(x) \qquad (1.5.2.a)
$$

veya

$$
\mu'_r=\left(\frac{d^r M(t)}{dt^r}\right)\bigg|_{t=0}=(-i)^r\left(\frac{d^r \xi(t)}{dt^r}\right)\bigg|_{t=0} \qquad (1.5.2.b)
$$

dir.

Burada $M(t)$ ve $\xi(t)$ sırasıyla, (1.7.5.a) ve (1.7.6.a)'da verilen fonksiyonlardır.

<u>TANIM 1.5.3</u> f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin μ_r ile gösterilen ortalama etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu_r=E[(x-\mu'_1)^r]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu'_1)^r f(x)dx \qquad (1.5.3)$$

dir.

<u>TANIM 1.5.4</u> f(x) olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin μ_r ile gösterilen ortalama etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu_r=E[(x-\mu'_1)^r]=\sum_x (x-\mu'_1)^r f(x) \qquad (1.5.4)$$

dir.

<u>TANIM 1.5.5</u> Ortalama etrafındaki ikinci moment, dağılımın yayılımının bir ölçütü olan varyansıdır.

1) Sürekli tipteki bir x rastgele değişkeni için,

$$Var(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu'_1)^2 f(x)dx \qquad (1.5.5.a)$$

2) Kesikli tipteki bir x rastgele değişkeni için,

$$Var(x)=\sum_x (x-\mu'_1)^2 f(x) \qquad (1.5.5.b)$$

dir.

<u>TANIM 1.5.6</u> Kesikli veya sürekli tipteki bir x rastgele değişkeninin standart hata yada standart sapması,

$$SS(x)=\sqrt{Var(x)} \qquad (1.5.6)$$

dir.

<u>TANIM 1.5.7</u> Dağılımın α_3 veya $\sqrt{\beta_1}$ ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \qquad (1.5.7)$$

dir.

Tek bir tepesi bulunan "unimodal" dağılımlarda,

$\alpha_3<0$ ise, dağılım sola çarpıktır. (1.5.7.a)

$\alpha_3>0$ ise, dağılım sağa çarpıktır. (1.5.7.b)

$\alpha_3=0$ ise, dağılım simetriktir. (1.5.7.c)

denir.

TANIM 1.5.8 Dağılımın α_4 veya β_2 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{\mu_4}{\mu_2{}^2} \qquad (1.5.8)$$

dir.

Tek bir tepesi bulunan "unimodal" dağılımlarda,

$\alpha 4>3$ ise, dağılım normal dağılımdan daha sivridir. (1.5.8.a)

$\alpha 4<3$ ise, dağılım normal dağılımdan daha basıktır. (1.5.8.b)

1.6 Verilerden Dağılımın Merkezi Momentlerinin Çarpıklığının ve Sivriliğinin Tahmini

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ n hacimlik rastgele bir örneklem olsun. Eğer olasılık yoğunluk fonksiyonun paremetre değerleri ve dağılımın çarpıklığı ve sivriliği bilinmiyorsa, μ'_r yerine,

$$m'_r=E(x^r)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^r \qquad (1.6.1)$$

alınarak hesaplanabilir. özel olarak,

$$m'_1=x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.6.2)$$

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2 \qquad (1.6.3)$$

ve

$$m_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^3 \qquad (1.6.4)$$

dir.

Burada m_2, μ_2 veya σ^2 ile gösterilen dağılımın varyansının bir tahminidir. Bu tahmin, $\hat{\sigma}^2$ ile gösterilir. m_2'ye varyansın "yanlı tahmini" denir. Buna karşılık gelen ve S^2 örneklem varyansı olarak bilinen "yansız tahmini" ise,

$$S^2=\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2 \tag{1.6.5}$$

dir.

Verilerin σ ile gösterilen standart sapmasının tahmini ise S^2'nin karekökü alınarak hesaplanır.

α_3 ve α_4 'ün tahminleri sırasıyla,

$$\hat{\alpha}_3=\frac{m_3}{m_2^{\,3/2}} \tag{1.6.6}$$

ve

$$\hat{\alpha}_4=\frac{m_4}{m_2^{\,2}} \tag{1.6.7}$$

dir.

1.7 Diğer Tanımlar

<u>TANIM 1.7.1</u> x_i bir rastgele değişken ve $F(x_i)$ bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$S(x_i)=\mathrm{Prob}[x>x_i]=1-F(x_i) \tag{1.7.1}$$

fonksiyonuna Survival fonksiyon denir.

<u>TANIM 1.7.2</u> $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkenin survival fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla $S(x)$ ve $F(x)$ olmak üzere,

$$\text{i) } h(x)=\frac{f(x)}{S(x)} \quad \text{veya} \quad \text{ii) } h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)} \tag{1.7.2}$$

fonksiyonuna hazard fonksiyonu denir.

<u>TANIM 1.7.3</u> $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkenin survival fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla $S(x)$ ve $F(x)$ olmak üzere,

$$\text{i) } h(x)=\frac{f(x+1)}{S(x)} \quad \text{veya} \quad \text{ii) } h(x)=\frac{f(x+1)}{1-F(x)} \tag{1.7.3}$$

fonksiyonuna hazard fonksiyonu denir.

TANIM 1.7.4 $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkenin, $P(t)$ ile gösterilen olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$P(t)=E(t^{x})=\sum_{x} t^{x}f(x) \tag{1.7.4}$$

dir.

TANIM 1.7.5 $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkeninin, $M(t)$ ile gösterilen moment çıkaran fonksiyonu $h>0$ ve $|t|<h$ olmak üzere,

$$M(t)=E(\exp(tx))=\sum_{x} \exp(tx)f(x) \tag{1.7.5.a}$$

veya

$$M(t)=1+\mu'_1 t+\mu'_2 t^2/2!+\ldots+\mu'_r t^r/r!+\ldots \tag{1.7.5.b}$$

dır.

TANIM 1.7.6 $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip kesikli tipteki bir x rastgele değişkenin, $\Phi(t)$ ile gösterilen karakteristik fonksiyonu $i^2=-1$ olmak üzere,

$$\Phi(t)=M(it)=\sum_{x} \exp(itx)f(x) \tag{1.7.6.a}$$

veya

$$\Phi(t)=1+\mu'_1(it)+\mu'_2(it)^2/2!+\ldots+\mu'_r(it)^r/r!+\ldots \tag{1.7.6.b}$$

dir.

TANIM 1.7.7 $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkenin, $M(t)$ ile gösterilen moment çıkaran fonksiyonu $h>0$ ve $|t|<h$ olmak üzere,

$$M(t)=E(\exp(tx))=\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx)f(x)dx \tag{1.7.7.a}$$

veya

$$M(t)=1+\mu'_1t+\mu'_2t^2/2!+\ldots+\mu'_rt^r/r!+\ldots \qquad (1.7.7.b)$$

dir.

TANIM 1.7.8 $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli tipteki bir x rastgele değişkenin, $\Phi(t)$ ile gösterilen karakteristik fonksiyonu $i^2=-1$ olmak üzere,

$$\Phi(t)=M(it)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)f(x)dx \qquad (1.7.8.a)$$

veya

$$\Phi(t)=1+\mu'_1(it)+\mu'_2(it)^2/2!+\ldots+\mu'_r(it)^r/r!+\ldots \qquad (1.7.8.b)$$

dir.

TANIM 1.7.9 $\Phi(t)$ karakteristik fonksiyona sahip bir x rastgele değişkenin, $K(t)$ ile gösterilen kumulant fonksiyonu,

$$K(t)=\log(\Phi(t)) \qquad (1.7.9)$$

dir.

Biz tüm hesaplamalarda, doğal (e tabanına göre) logaritmayı kullanacağız.

1.8 Değişkenlerin Fonksiyonların Dağılımların Gösterimleri ve Kısaltmalar

α ve β parametreli bir x rastgele degişkeni, $x:\alpha,\beta$ ile gösterilir.

Bir $x:\alpha,\beta$ degiskeni için dağılım fonksiyonu, $Fx(x:\alpha,\beta)$ ile gösterilir. Eğer değişken ismi içerikte belirtilmiş ise, sadece $F(x:\alpha,\beta)$ yazılabilir. Benzer kullanımlar diğer fonksiyonlara da uygulanabilir. Bir $x:\alpha,\beta$ degişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu, $f(x:\alpha,\beta)$ veya $f_x(\alpha,\beta)$ ile gösterilir.

Bir $x:\alpha,\beta$ degişkeni, örneğin $OD(x:\alpha,\beta)$ dağılımına sahip ise, $x\sim OD(\alpha,\beta)$ veya $x\sim OD_x(\alpha,\beta)$ şeklinde yazılır. "~", (2.1.1.1)'de tanımlanmıştır.

Kullanılacak kısaltmalar ve anlamları:

r.d : Rastgele değişken.

o.f : Olasılık fonksiyonu.

d.f : Dağılım fonksiyonu.

o.ç.f	: Olasılık çıkaran fonksiyon.
m.ç.f	: Moment çıkaran fonksiyon.
o.y.f	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu.
o.o.f	: Ortak olasılık fonksiyonu.
o.o.y.f	: Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu.

2. BÖLÜM
KESİKLİ TİP DAĞILIM MODELLERİ

Bu bölümde, kesikli tipteki dağılımları inceleyeceğiz.

2.1 Bernoulli Dağılımı

Çoğu uygulamalarda, bir deneme için genellikle "başarı" yada "başarısız" olarak nitelendirilen iki olanaklı sonuçla ilgileniriz. örneğin, havaya fırlatılan madeni bir paranın tura yüzünün üste gelmesi, hilesiz bir zarın yuvarlanmasında 6' nın üste gelmesi veya iyice karıştırılmış 52'lik bir desteden çekilen kartın karo dörtlü gelmesi gibi.

TANIM 2.1.1 Bir rastgele deneyin olanaklı iki sonucu varsa, bu deneye Bernoulli deneyi yada bir Bernoulli denemesi denir.

Bir Bernoulli deneyinin yada bir Bernoulli denemesinin iki olanaklı sonucu, eğer deneme başarılı ise "S" veya "1", deneme basarısız ise ise "F" veya "0" ile gösterilir.

TANIM 2.1.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$f(1)=\mathrm{Prob}[x=1]=p$

$f(0)=\mathrm{Prob}[x=0]=1-p=q$

veya

$$f(x:p)=\mathrm{Prob}[x=x_i]=p^{x}(1-p)^{1-x} \qquad (2.1.1)$$

$x_i=0,1 \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$

ise x r.d'ne Bernoulli dağılımına sahiptir denir.

Bernoulli dağılımında $R_x=\{0,1\}$, $0<p<1$ ve $q=1-p$ dir.

Bernoulli dağılımını, $B(x:1,p)$ veya $B_x(1,p)$ ve ilgili Bernoulli degişkenini, $B:1,p$ ile göstereceğiz. Bernoulli dağılımının p parametresi, Bernoulli deneyinde başarı olasılıgıdır. Bernoulli deneyinde başarısızlık olasılığı ise, $q=1-p$ dir.

Bernoulli dağılımına, Nokta Binomial dağılım da denir.

TEOREM 2.1.1 Bernoulli dağılımının d.f,

$F(0)=1-p$

$F(1)=p \qquad 0<p<1$

veya

$$F(x:p)=\sum_{y=0}^{x} p^{y}(1-p)^{1-y} \qquad x=1,2 \qquad 0<p<1 \qquad (2.1.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:p)=\sum_{y=0}^{x} p^{y}(1-p)^{1-y}$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.1.2</u> Bernoulli dağılımının o.ç.f,

$$P(t:p)=q+pt \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.1.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:p)=\sum_{x=0}^{1} (tp)^{x}(1-p)^{1-x}=q+pt$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.1.3</u> Bernoulli dağılımının m.ç.f,

$$M(t:p)=q+\exp(t)p \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.1.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:p)=\sum_{x=0}^{1} \exp(tx)p^{x}(1-p)^{1-x}=q+\exp(t)p$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.1.4</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Bernoulli dağılımına sahip ise,

$$E(x)=p \qquad 0<p<1 \qquad (2.1.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M'(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M'(t)=\exp(t)p$$

dir. O halde,

$$E(x)=p \qquad 0<p<1$$

bulunur.

TEOREM 2.1.5 Kesikli tipteki bir x r.d, Bernoulli dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=pq \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.1.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.5.b)'den $Var(x)=\sum_x (x-\mu'_1)^2 f(x)$ dir.

$$Var(x)=\sum_x x^2 f(x)-2\mu'_1\sum_x xf(x)+(\mu'_1)^2$$

$$=E(x^2)-\{E(x)\}^2 \qquad (2.1.6.a)$$

dır. (1.5.2.b)'den $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M''(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=\exp(t)p$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=p \qquad 0<p<1 \qquad (2.1.6.b)$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.1.6.b) ve (2.1.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=pq$$

bulunur.

TEOREM 2.1.6 Kesikli tipteki bir x r.d, Bernoulli dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{(pq)} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.1.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.1.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\sqrt{(pq)}$$

bulunur.

TEOREM 2.1.7 Kesikli tipteki bir x r.d, Bernoulli dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=(q-p)/\sqrt{(pq)} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.1.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.4)'den $\mu_3=E[(x-\mu'_1)^3]=\sum_x (x-\mu'_1)^3 f(x)$ dir.

$$\mu_3=\sum_x x^3 f(x)-3(\mu'_1)\sum_x x^2 f(x)+3(\mu'_1)^2\sum_x xf(x)-(\mu'_1)^3$$

$$=E(x^3)-3E(x)E(x^2)+2\{E(x)\}^3 \qquad (2.1.8.a)$$

dır. (1.5.2.b)'den $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}|_{t=0}=M'''(t)|_{t=0}$ dir.

$M'''(t)=p\exp(t)$ dir. O halde,

$E(x^3)=p$ (2.1.8.b)

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.1.8.b), (2.1.6.b) ve (2.1.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=pq(q-p)$ elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(q-p)/\sqrt{(pq)}$ $0<p<1$ $q=1-p$

bulunur.

<u>TEOREM 2.1.8</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Bernoulli dağılımına sahip ise α_4, ile gösterilen sivriliği,

$\alpha_4=-3+1/(pq)$ $0<p<1$ $q=1-p$ (2.1.9)

dir.

İSPAT: (1.5.4)'den $\mu_4=E[(x-\mu'_1)^4]=\sum_x(x-\mu'_1)^4f(x)$ dir.

$$\mu_4=\sum_x x^4f(x)-4\mu'_1\sum_x x^3f(x)+6(\mu'_1)^2\sum_x x^2f(x)-4(\mu'_1)^3\sum_x xf(x)+(\mu'_1)^4$$

$$=E(x^4)-4E(x)E(x^3)+6\{E(x)\}^2E(x^2)-3\{E(x)\}^4 \quad (2.1.9.a)$$

dır. (1.5.2.b)'den $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}|_{t=0}=M^{(iv)}(t)|_{t=0}$ dir.

$M^{(iv)}(t)=p\exp(t)$ dir. O halde,

$E(x^4)=p$ (2.1.9.b)

elde edilir.

(2.1.9.a)'da (2.1.9.b), (2.1.8.b), (2.1.6.b) ve (2.1.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=pq(1-3pq)$ elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=-3+1/(pq)$ $0<p<1$ $q=1-p$

bulunur.

Bernoulli Dağılımı daha geniş ve detaylı olarak, genel halde Binomial dağılımı bölümünde incelenecektir.

2.1.1 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

İnceleyeceğimiz kesikli tip dağılımların çoğu, Bernoulli denemelerinin yapılmasıyle elde edilmiş dağılımlardır. Bu dağılımlar kısıtlanmış Bernoulli deneme dizileridir.

TANIM 2.1.1.1 X ve Y herhangi iki r.d olmak üzere,

1) $X \sim Y$ (2.1.1.1.a)

2) $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ (2.1.1.1.b)

3) $X \sim Y$ ve $Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ (2.1.1.1.c)

koşullarını sağlayan "~" bağıntısına, dağılımların denklik bağıntısı denir. (Hasting ve Peacock, 1975 s:19)

Burada X~Y'nin anlamı:"X r.d, Y r.d gibi dağılmıştır." veya "X r.d, yaklaşık olarak Y r.d'nin dağılımına sahiptir." dir.

Kısıtlanmış Bernoulli deneme dizileri arasındaki bağıntılar için kısaca dağılımları ve bu dağılımların değişkenlerinin gösterim ve anlamlarını verelim:

1) Binom dağılımı B(x:n,p); B:n,p

"n tane Bernoulli deneme dizisindeki başarıların toplam sayısı".

2) Geometrik dağılım G(n:p); G:p

"ilk başarıyı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı".

3) Paskal dağılımı C(n:x,p); C:x,p

"x başarı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı".

4) Neğatif Binom Dağılımı NB(y:x,p); Y:x,p

"x-inci başarı da dahil olmak üzere, x başarı elde etmek için gerekli denemelerdeki başarısızlıkların sayısı".

dır. Burada,

p:Bernoulli olasılık parametresi yada bir tek denemedeki başarı olasılığını.

n:deneme sayısını.

x:başarıların sayısını.

y:başarısızlıkların sayısını.

göstermektedir.

1) Bernoulli dağılımı, Binomial dağılımın n=1 özel halidir.

B(x:n,p) dağılımına sahip bir x r.d'nin o.f,

$$f(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \qquad (2.1.1.2)$$

$0<p<1 \quad q=1-p \quad x=0,1,2,...,n$

dir.

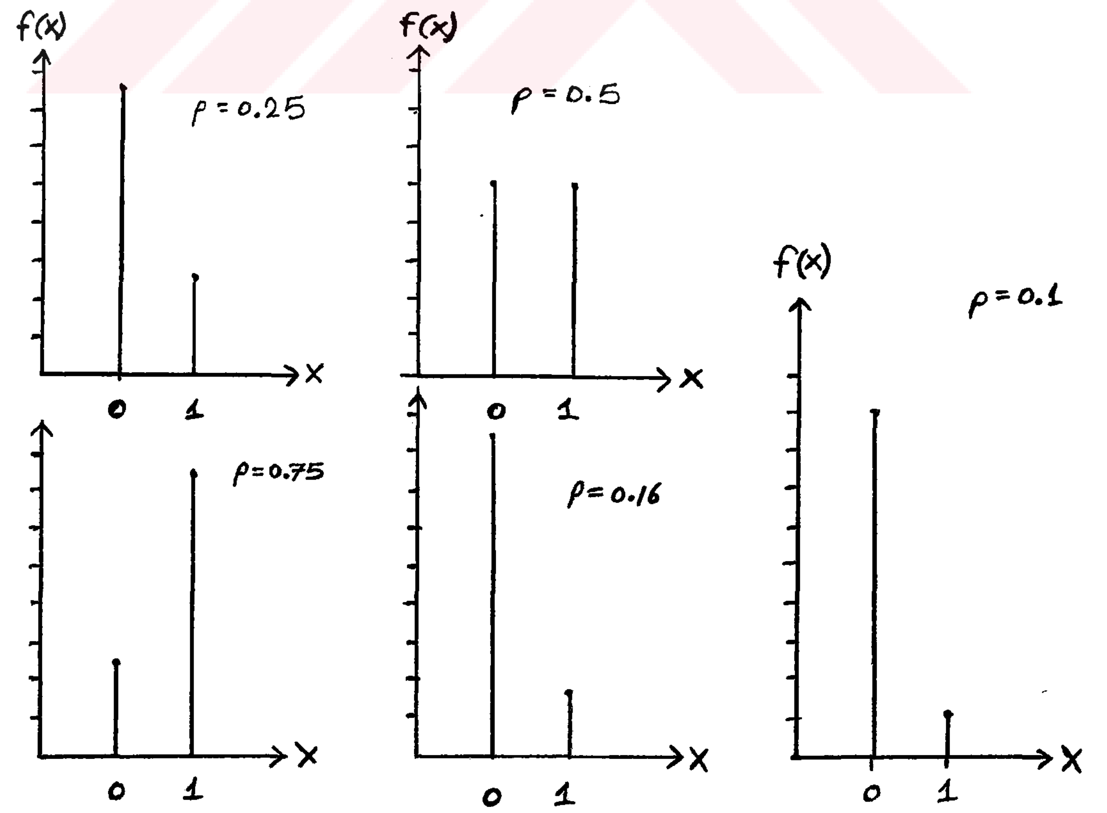
Binomial dağılımında, özel alarak n=1 alalım. Bunun anlamı bir tek Bernoulli denemesi yapılacaktır. Deneme ya başarılıdır yada başarısızdır. Biz Binomial değişkenini $B:n,p$ ile göstermiştik. O halde n=1 özel durumu için Binom değişkeni $B:1,p$ olur, buda Bernoulli değişkenidir. n=1 özel durumu için (2.1.1.2)'deki o.f,

$$f(x;1,p)=\binom{1}{x}p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1 \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

$$=p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1 \qquad 0<p<1.$$

dir. Bu da, (2.1.1)'deki o.f eşittir.

Sonuç olarak, Binomial dağılımında n=1 özel durumu, Bernoulli dağılımını verir.



Şekil 1. Bernoulli Dağılımının p parametresinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

2.2 Binomial Dağılımı

Tekrarlı olarak Bernoulli denemelerinin yapıldığı bir deneyi düşünelim. Bu tip deneye de Binom deneyi denir. örneğin, madeni bir paranın 5 kez havaya fırlatılmasında, gözlenen turaların toplam sayısı deneyi gibi.

<u>TANIM 2.2.1</u> Kesikli tipteki bir x r.d, n bağımsız denemenin başarılı olanların toplam sayısı olsun. Bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p, başarısız olma olasılığı q=1-p ise, aşağıdaki 4 koşulu sağlayan x r.d'ne Binomial r.d denir.

1) Herbir deneme için yalnız iki olanaklı sonuç vardır.
2) Başarma olasılığı p, her bir deneme için aynıdır. Başarısızlık olasılığı q=1-p dir.
3) Denemeler birbirinden bağımsızdırlar.
4) Deneme sayısı n sabittir ve denemeler yenilenebilir.

(Akdeniz, 1984 s:176)

<u>TANIM 2.2.2</u> Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:n,p)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad (2.2.1.a)$$

veya,

$$f(x:n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x} \qquad (2.2.1.b)$$

$x=0,1,\ldots,n \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$

ise x r.d'ne Binomial dağılımına sahiptir denir.

Binomial dağılımında, $R_x=\{0,1,2,\ldots,n\}$, $0<p<1$ ve $q=1-p$ dir.

Binomial dağılımını, $B(x:n,p)$ veya $B_x(n,p)$ ve ilgili Binomial degişkenini, $B:n,p$ ile göstereceğiz. Binomial dağılımının n ve p parametreleri sırasıyla, deneme sayısı ve Bernoulli olasılık parametresidir.

TEOREM 2.2.1 Binomial dağılımının d.f,

$$F(x:n,p)=\sum_{y=0}^{x}\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y} \qquad 0<p<1 \qquad (2.2.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:n,p)=\sum_{y=0}^{x}\binom{n}{y}p^{y}(1-p)^{n-y}$$

bulunur.

TEOREM 2.2.2 Binomial dağılımının o.ç.f,

$$P(t:n,p)=(q+pt)^{n} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.2.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:n,p)=\sum_{x=0}^{n}(pt)^{x}q^{n-x}$$

dir. Binom teoreminden,

$$\sum_{x=0}^{n}(pt)^{x}q^{n-x}=(q+pt)^{n}$$ dir. O halde,

$$P(t:n,p)=(q+pt)^{n}$$

bulunur.

TEOREM 2.2.3 Binomial dağılımının m.ç.f,

$$M(t:n,p)=(q+\exp(t)p)^{n} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.2.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:n,p)=\sum_{x=0}^{n}(\exp(tp))^{x}q^{n-x}$$

dir. Binom teoreminden,

$$\sum_{x=0}^{n}(\exp(tp))^{x}q^{n-x}=(q+\exp(t)p)^{n}$$ dir. O halde,

$$M(t:n,p)=(q+\exp(t)p)^{n}$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.2.4</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Binomial dağılımına sahip ise,

$$E(x)=np \qquad 0<p<1 \qquad (2.2.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}|_{t=0}=M'(t)|_{t=0}$ dir.

$M'(t)=n(q+\exp(t)p)^{n-1}$

dir. O halde,

$E(x)=np \qquad 0<p<1$

bulunur.

<u>TEOREM 2.2.5</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Binomial dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=npq \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.2.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}|_{t=0}=M''(t)|_{t=0}$ dir.

$M''(t)=np\exp(t)[\exp(t)p+q]^{n-1}\{(n-1)p\exp(t)/(\exp(t)p+q)+1\}$

dir. O halde,

$$E(x^2)=n(n-1)p^2+np \qquad (2.2.6.a)$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.2.6.a) ve (2.2.5) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=npq$

bulunur.

<u>TEOREM 2.2.6</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Binomial dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{(npq)} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.2.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.2.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{(npq)}$

bulunur.

<u>TEOREM 2.2.7</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Binomial dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=(q-p)/\sqrt{(npq)} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.2.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}|_{t=0}=M'''(t)|_{t=0}$ dır.

$M'''(t)=np\exp(t)(q+\exp(t)p)^{n-1}$
$[(n-1)(n-2)\exp(2t)t^2/(q+\exp(t)p)^2+$
$3(n-1)\exp(t)p/(q+\exp(t)p)+1]$

dir. O halde

$E(x^3)=np[(n-1)(n-2)p^2+3(n-1)p+1]$ (2.2.8.a)

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.2.8.a), (2.2.6.a) ve (2.2.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=npq(q-p)$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(q-p)/\sqrt{(npq)}$ $\quad 0<p<1 \quad q=1-p$

bulunur.

TEOREM 2.2.8 Kesikli tipteki bir x r.d, Binomial dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$\alpha_4=3-(6/n)+(1/(npq))$ $\quad 0<p<1 \quad q=1-p$ (2.2.9)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}|_{t=0}=M^{(iv)}(t)|_{t=0}$ dir.

$M^{(iv)}(t)=np\exp(t)(q+\exp(t)p)^{n-1}$
$[(n-1)(n-2)(n-3)p^3\exp(3t)/(q+\exp(t)p)^3$
$+6(n-1)(n-2)p^2\exp(2t)/(q+\exp(t)p)^2$
$+7(n-1)p\exp(t)/(q+\exp(t)p)+1]$

dir. O halde,

$E(x^4)=np[(n-1)(n-2)(n-3)p^3+6(n-1)(n-2)p^2+7(n-1)p+1]$ (2.2.9.a)

elde edilir.

(2.1.9.a)'da, (2.2.9.a), (2.2.8.a), (2.2.6.a) ve (2.2.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=npq(1+3pq(n-2))$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=3-(6/n)+(1/(npq))$ $\quad 0<p<1 \quad q=1-p$

bulunur.

TEOREM 2.2.9 Binomial dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$\xi(t:n,p)=(q+\exp(t)p)^n \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$ (2.2.10)

dir.

İSPAT: (1.7.6.a)'daki eşitliği kullanarak, (2.2.4)'de, t yerine it alındığında,

$\xi(t:n,p)=(q+\exp(t)p)^n$

bulunur.

TEOREM 2.2.10 Binomial Dağılımının modu,

$(n+1)p-1\leq x\leq(n+1)p$ (2.2.11)

dir.

İSPAT: (2.2.1.b)'deki o.f alalım ve $\dfrac{f(x)}{f(x-1)}$ oranına bakalım.

$$f(x)=\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{(n-x)} \qquad (2.2.12)$$

$$f(x-1)=\frac{(n-1)!}{(n-(x-1))!(x-1)!}p^{(x-1)}q^{(n-(x-1))}$$

$$\frac{f(x)}{f(x-1)}=\frac{p(n-x+1)!(x-1)!}{q(n-x)!x!}=\frac{p(n-x+1)}{qx}$$

bulunur.

$f(x)>f(x-1)$ ise, f fonksiyonu artandır $<=>$ $p(n-x+1)>qx$.
$p(n-x+1)>qx=(1-p)x$ $=>np-px+p>x-px$ $=>$ $np+p>x$ $=>$ $p(1+n)>x$ dir. $m=p(1+n)$ olsun.

1) m bir tamsayı değilse, $x\leq m$ için f(x) artandır. $x>m$ için f(x) azalandır.

2) m bir tamsayı ise x=m 'de f(x) maksimumdur. $f(x)=f(x-1)$ dır. O halde $x=m-1$ f(x) fonksiyonunu maksimum yapan ikinci noktadır.

Sonuç olarak $m-1\leq x\leq m$ bulunur. (Rousas, 1973 s:76)

2.2.1 Binomial Dağılımının Uygulama Alanları

n bağımsız Bernoulli deneyinde başarıların toplam sayısı x=0,1,...,n dir. Binomial deneyinin, $\underbrace{SSS...S}_{x}\underbrace{FFF...F}_{n-x}$ dizisini ele alalım. Burada S başarıyı, F ise başarısızlığı göstermektedir. Çarpım teoreminden, (Akdeniz, 1984 s:18) yukarıdaki dizinin olasılığı $p^x(1-p)^{n-x}$ 'tir. Denemeler birbirlerinden bağımsız olduklarından; bir gurupta x, diğer gurupta (n-x) sonuç bulunan n sonucun farklı dizilerinin sayısı, $\binom{n}{x}$'tir. Bir defada bir olay elde edileceğinden olaylar ayrıktır. Toplama teoreminden, (Akdeniz, 1984 s:17) x r.d'nin o.f,

$$f(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{(n-x)} \qquad x=0,1,2,...,n \qquad 0<p<1$$

bulunur.

Binomial dağılımın en yaygın uygulamalarının olduğu alanlar: kalite kontrol ve güvenirliliktir. Bu alanlarda Binomial dağılımının tipik bir örneğini inceleyelim.

ÖRNEK 2.2.1.1 Fabrikalarda mamüller büyük miktarlarda üretilmektedir. üretilen bu mamüllerden 20 birimlik bir pay, örneklem alınsın. Bu örneklemde, 3 yada daha az kusurlu birim bulunduğunda mamül üretilecektir. Eğer mamülü üretim işlemi %10 hatalı ise pay yada örneklemin kabuledilebilirlik olasılığı nedir?

Diğer bir ifadeyle herbiri 0.1 başarı olasılığına sahip 20 bağımsız Bernoulli denemesinde 3 yada daha az başarı elde etme olasılığı nedir?

Bu n=20 ve p=0.1 parametreli bir Binomial dağılımıdır. q=1-p den q=1-0.1=0.9 bulunur.

$Prob[x\leq 3]=F(3;20,0.1)$'dir. (2.2.2)'den ,

$$F(3;20,0.1)=\sum_{y=0}^{3}\binom{20}{y}(0.1)^y(0.9)^{20-y}=0.86705 \text{ bulunur.}$$

O halde, $Prob[x \leq 3]=0.86705$'tir.

Bazı uygulamalarda, Binomial dağılıma Normal dağılımla yaklaşım daha pratik olabilir.

Binomial dağılımı, p=0.5 için simetriktir. p=0.5 olduğunda Binomial dağılım, n çok büyük olduğunda simetriye yakınsar. Eğer n çok büyük ve p=0.5'e çok yakın ise bu yakınsama daha da hızlı olur.

n büyüdüğünde, Binomial dağılımına aynı ortalama, $\mu=np$ ve varyans, $\sigma^2=npq$ ile bir normal dağılımla yaklaşılabilir. Bu yaklaşım np ve npq 'nun her ikisininde en az 5 olduğu durumlarda iyi sonuç verir. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:144).

Şimdi bununla ilgili bir örneği inceleyelim.

<u>ÖRNEK 2.2.1.2</u> Bir fabrikada çalışan işçilerin yüzde 40 sendika üyesidir. Bir gazete araştırmasında bu fabrikada çalışan 100 işçi rastgele seçiliyor. 100 kişilik örneklemde 50 yada daha fazla kişinin sendika üyesi olması olasılığı nedir?

Bu örneklem, 100 Bernoulli denemesinden oluşuyor. Dolayısıyla bu, n=100 ve p=40/100=0.4 parametreli Binomial dağılımıdır.

$\mu=np \Rightarrow \mu=40$ ve $\sigma^2=npq \Rightarrow \sigma^2=np(1-q)=40(1-0.4)=24$ ve $\sigma=4.9$ bulunur.

μ ve σ^2 'nin her ikiside 5 'ten büyük, dolayısıyla Bianomial dağılımına, Normal dağılımla yaklaşımda bulunabiliriz.

Şimdi $\mu=40$ ve $\sigma=4.9$ parametreli bir Normal dağılımdan alınmış bir örneklemde 49.5' den daha büyük bir değer elde etme olasılığını bulacağız. 50 yerine 49.5 aldık, çünkü kesikli tipteki bir dağılım olan Binomial dağılımına sürekli tipte bir dağılım olan Normal dağılımla yaklaşırken, x=50 noktası yerine $x_1=49.5$'den $x_2=50.5$ aralığı alınır.

Biz standart Normal dağılım için $(x_1-\mu)/\sigma$'nın sağındaki kısmın alanını bulmak istiyoruz.

$[(x_1-\mu)/\sigma]=[(49.5-40)/4.9]=1.939$ bulunur. Standart Normal dağılım ($\mu=0$ ve $\sigma=1$ parametreli Normal Dağılım) tablosuna baktığımızda, 0.0263 gibi bir değer bulunur. Yani rastgele seçilen 100 kişiden 50 yada daha fazlasının sendika üyesi olması şansı 0.0263'tür.

(Staff of Computation Labroratory, 1955)'deki tablolandırmada sonuç,

$$\mathrm{Prob}[x \geq 50] = \sum_{y=50}^{100} \binom{100}{y} (0.4)^{y}(0.6)^{100-y} = 0.0271 \text{ dir.}$$

Bu değerle, Standart Normal dağılım ile yapılan yaklaşımda elde edilen değer, birbirlerine çok yakındır.

Eğer biz 50 yada daha az sendika üyesi olma olasılığını hesaplamak isteseydik, Standart Normal dağılım için $[(x_2-\mu)/\sigma] = [(50.5-40)/4.9]=2.14$ ' ün solundaki alanı hesaplayacaktık.

2.2.2 Binomial Dağılımının Parametre Tahminleri

Genelde deneysel verilerden, yani n denemedeki başarıların toplam sayısından, p tahmin edilir. p parametresi için bir tahmin,

$$p = \frac{\text{Başarıların sayısı}}{\text{Deneme sayısı}} = \frac{x}{n} \qquad (2.2.2.1)$$

dir.

ÖRNEK 2.2.2.1 Bir üretim payından alınmış bir örneklemde 10 parçadan üçünün kusurlu olması durumunda, bu üretim payındaki kusurluluk yüzdesi hakkında ne söylenebilir?

(2.2.2.1)' den, p =3/10=0.3 bulunur. Yani kusurluluk yüzdesi 0.3'tür.

ÖRNEK 2.2.2.2 Bir pazarlama, danışmanlık şirketi yeni bir mamül için piyasa araştırması yapıyor. Bu araştırma için rasgele seçilmiş 100 kişilik bir örneklemden 32 kişi yeni bir model müzik seti almak istiyor. Bu bilgilerden yeni bir model müzik seti alacak bireylerin p oranı hakkında ne söylenebilir?

(2.2.2.1)'den, p=32/100=0.32 bulunur.

Şimdi p 'nin maksimum likelihood tahmin edicisini hesaplayalım.

1) p 'nin tahmini: $n_1, n_2, \ldots, n_n$ veya enazından $\sum_{i=1}^{n} n_i$ biliniyorken,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ n_i $i=1,2,\ldots,n$ ve p parametreli Binomial dağılımdan alınmış n hacimlik rasgele bir örneklem olsun.

x_i $i=1,2,\ldots,n$'lerin o.o.f ları,

$$f(x_1,\ldots,x_n : n_1,\ldots n_n, p) = \binom{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} (n_i - x_i)} \qquad (2.2.2.2)$$

$L(p) = f(x_1,\ldots,x_n : n_1,\ldots,n_n, p)$ olsun. $L(p)$' nin logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(p)\} = \ln\left\{\binom{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right\} + \ln(p)\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} (n_i - x_i) \qquad (2.2.2.3)$$

(2.2.2.3)'ün p'ye göre türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$\frac{d[\ln\{L(p)\}]}{dp} = (1/p)\sum_{i=1}^{n} x_i - \{1/(1-p)\}\sum_{i=1}^{n} (n_i - x_i) = 0$$

Buradan $\hat{p} = (\sum_{i=1}^{n} x_i)/(\sum_{i=1}^{n} n_i)$ bulunur. $\hat{p}$, p için yansız bir tahmin edicidir. Yani,

$$E(\hat{p}) = p \qquad (2.2.2.4)$$

dir.

Burada n_i'lerin tahmini o kadar önemli değildir.

x r.d, n ve p parametreli Binomial dağılıma sahip olsun. Bu x r.d 'nin bir tek gözlenen değeri verildiginde p biliniyorsa, n için doğal tahmin edici (x/p) dir. Bu n için yansız bir tahmin edicidir.

Eger ne n, ne de p bilinmiyorsa, bir tek gözlem için n ve p 'yi tahmin etmek mümkün değildir. Bununla birlikte $x_1, x_2, \ldots, x_n$'lerin hepsi aynı eşit n ve p parametreli Binomial dağılıma sahip ise $n=n_1=n_2=\ldots=n_n$ momentleri karşılaştırma metodu ile n ve p tahmin edilir.

$m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.5)'deki gibi alınsın. Binomial dağılımının beklenen değeri ve varyansı, (2.2.5) ve (2.2.6)'dan sırasıyla, $E(x)=np$ ve $Var(x)=npq$ dir. $m_1=np$ ve $m_2=np(1-p)$ alalım. Buradan,

$n=m_1^2/(m_1-m_2)$ ve $p=1-(m_2/m_1)$

elde edilir. O halde, n ve p'nin tahminleri,

$\hat{n}=\bar{x}^2/(\bar{x}-S^2)$ ve $\hat{p}=1-(S^2/\bar{x})$

bulunur.

Burada bir şeye dikkat etmek gerekiyor: Eger $\bar{x}$, S^2' den küçük ise, n negatif olur. Bu da Binomial dağılımının, veriler için uygun bir model olmadığını gösterir.

2.2.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

Bölüm 2.1.1'de açıklandığı gibi Bernoulli dağılımı, Binomial dağılımın n=1 özel halidir.

Bu bölümde Binom dağılımı ile Poisson dağılımı arasındaki bağıntıyı inceleyeceğiz.

$B(x:n,p)$ ile gösterilen Binomial dağılımının, (2.2.1.a)'daki o.f alalım.

$$f(x:n,p)=\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$n!=1.2.3.\ldots.\underbrace{(n-x-1)(n-x)(n-x+1)\ldots(n-1)n}_{x \text{ terim var}}$$

$$f(x:n,p)=\frac{(n-x+1)\ldots(n-1)n}{x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

pay ve paydayı n^x ile çarpalım,

$$f(x:n,p)=\frac{(n-x+1)\ldots(n-1)n}{x!n^x}(np)^x(1-p)^{n-x}$$

$\tau=np$ olsun. Bu aynı zamanda Binom dağılımının beklenen değerine eşit.

$$f(x:n,p)=(1-\frac{x-1}{n})(1-\frac{x-2}{n})\ldots(1-\frac{1}{n})\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}\frac{\tau^x}{x!}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}}(1-\frac{x-1}{n})(1-\frac{x-2}{n})\ldots(1-\frac{1}{n})\frac{1}{(1-p)^x}=1 \text{ dir.}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}}(1-p)^n=\exp(-\tau) \text{ bulunur.}$$

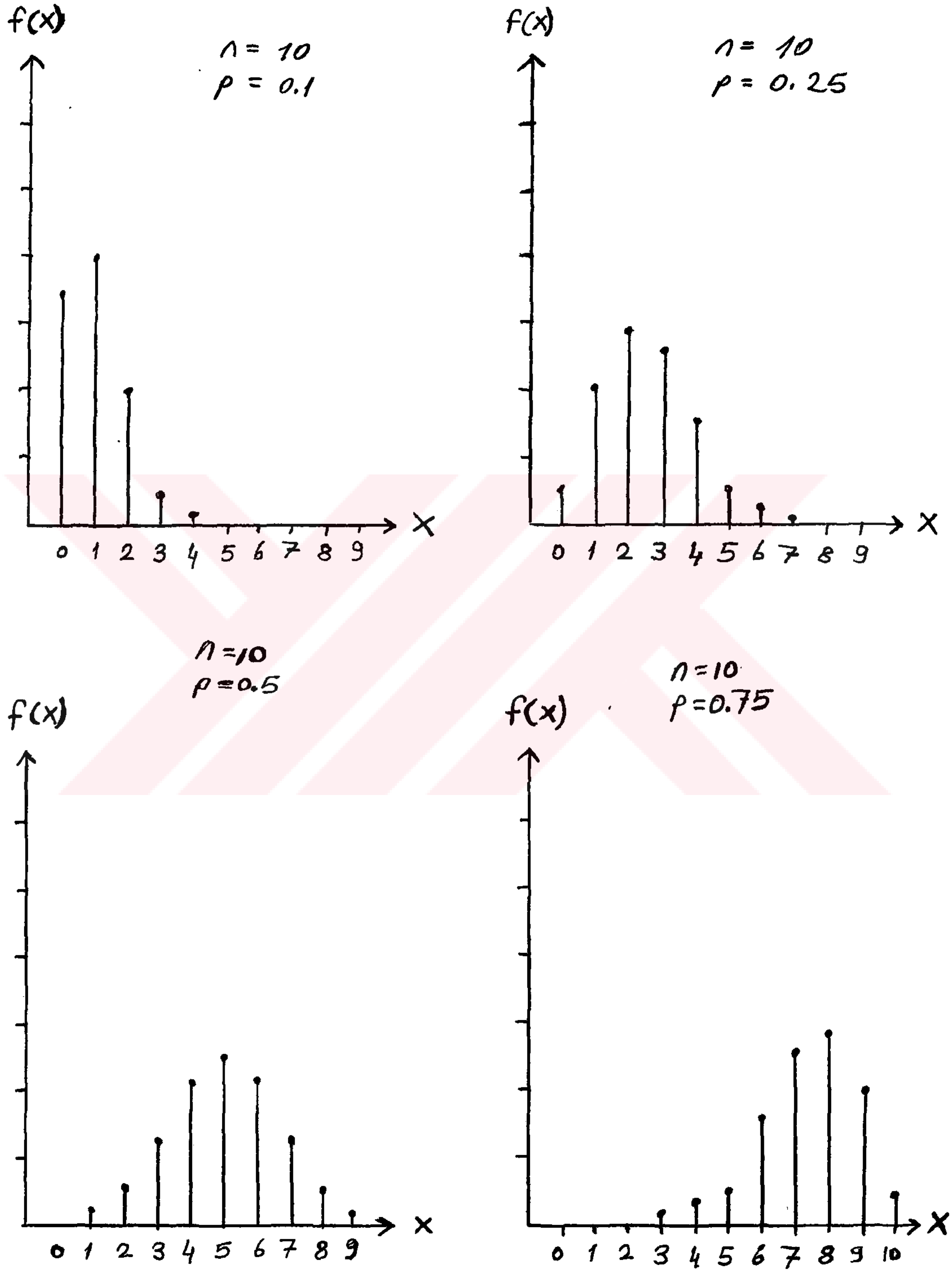
Yani,

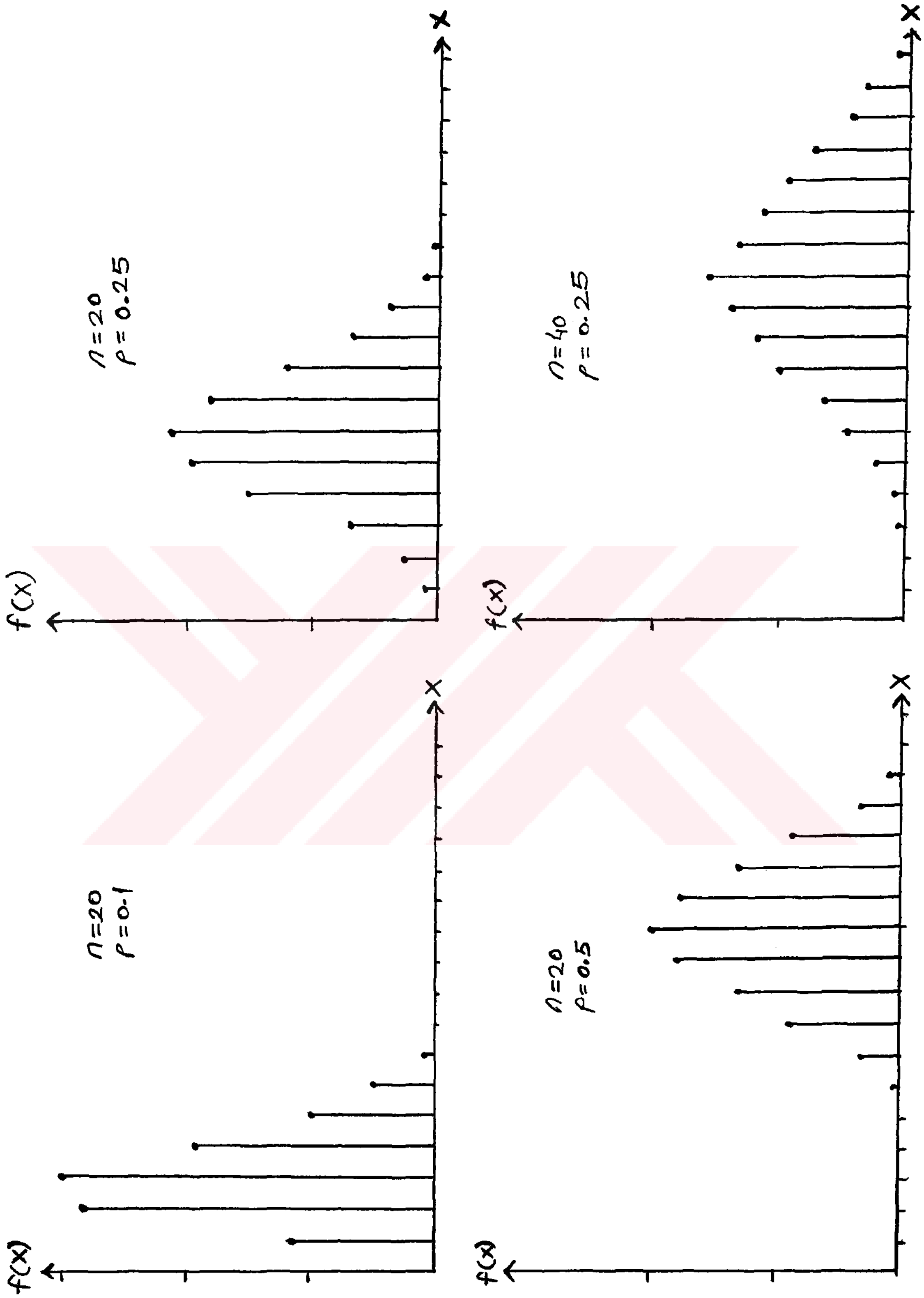
$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} f(x:n,p)=\frac{\exp(-\tau)\ \tau^x}{x!}$$

dir. Buda (2.8.1)'deki Poisson dağılımının o.f'dur.

Sonuç olarak, Binomial dağılımda $n\to\infty$, $p\to 0$ ve $\tau=np$ alındığında Poisson dağılımına yakınsar.

Şekil 2. Binomial Dağılımının n ve p parametrelerinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.





Şekil 3. Binomial Dağılımının n ve p parametrelerinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

2.3 Pascal Dağılımı

Her bir denemede başarı olasılığı p olan bagımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığı bir deneyi düşünelim.

TANIM 2.3.1 k başarı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı Pascal r.d'dir.

TANIM 2.3.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{x-k} \qquad (2.3.1)$$

$x=k,k+1,...$ $\quad k=1,2,3,...$ $\quad 0<p<1$

ise x r.d'ne Pascal dağılımına sahiptir denir.

TANIM 2.3.3 Bununla birlikte, k başarı elde etmek için yapılan denemelerdeki başarısızlıkların sayısı da Pascal r.d dir.

TANIM 2.3.4 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:k,p)=\binom{x+k-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{x} \qquad (2.3.2)$$

$x=0,1,2,...$ $\quad k=1,2,3,...$ $\quad 0<p<1$

ise x r.d'ne Pascal dağılımına sahiptir denir.

Pascal dağılımında $k=1,2,3,....$ olmak üzere, $R_{x}=\{k,k+1,k+2,...\}$ ve $0<p<1$ dir.

önce $f(w)=[1/(1-w)^{r}]$ fonksiyonunu $w_{o}=0$ etrafındaki Taylor seri açılımına bakalım.

f(w)'nun, $w_{o}=0$ etrafındaki Taylor seri açılımı,

$$f(w)=\frac{1}{(1-w)^{r}}=1+\frac{r}{1!}w+\frac{r(r+1)}{2!}w^{2}+\frac{r(r+1)(r+2)}{3!}w^{3}+\ ... \qquad (2.3.3)$$

dır.

Pascal dağılımını, $C(x:k,p)$ veya $C_{x}(k,p)$ ve ilgili Pascal değişkenini, $C:k,p$ ile göstereceğiz. Pascal dağılımının k ve p parametreleri sırasıyla, başarı sayısı ve Bernoulli olasılık parametreleridir.

Pascal dağılımına, Binomial bekleme zamanı dağılımı da denir.

Biz Pascal dağılımı ile ilgili hesaplamalarda, (2.3.1)'deki o.f kullanacağız.

TEOREM 2.3.1 Pascal dağılımının d.f,

$$F(x:k,p)=\sum_{y=k}^{x}\binom{y-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{y-k} \qquad (2.3.4)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:k,p)=\sum_{y=k}^{x}\binom{y-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{y-k}$$

bulunur.

TEOREM 2.3.2 Pascal dağılımının o.ç.f,

$$P(t:k,p)=[pt/(1-tq)]^{k} \quad k=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p \qquad (2.3.5)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:k,p)=(p/q)^{k}\sum^{\infty}\binom{x-1}{k-1}(tq)^{x} \quad \text{dir.}$$

$y=x-k$ alalım. $y=x-k \Rightarrow x=y+k$

$$P(t:k,p)=(pt)^{k}\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k-1}(tq)^{y} \quad \text{dir.}$$

(2.3.3)'den $\sum_{y=0}^{\infty}\binom{y+k-1}{k-1}(tq)^{y}=\frac{1}{(1-tq)^{k}}$ dır. O halde,

$$P(t:k,p)=\left(\frac{pt}{1-tq}\right)^{k} \quad k=1,2,3,\ldots. \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

TEOREM 2.3.3 Pascal dağılımının m.ç.f,

$$M(t:k,p)=\left(\frac{p\exp(t)}{1-\exp(t)q}\right)^{k} \quad k=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p \qquad (2.3.6)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:k,p) = (p/q)^k \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} (\exp(t)q)^x \text{ dir.}$$

y=x−k alalım. y=x−k => x=y+k

$$M(t:k,p)=\left(\frac{p\exp(t)}{q}\right)^k \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k-1}{k-1} (\exp(t)q)^y \text{ dir.}$$

$$(2.3.3)\text{'den } \sum_{y=0}^{\infty} \binom{y+k-1}{k-1} (\exp(t)q)^y = \frac{1}{(1-\exp(t)q)^k} \text{ dır. O halde,}$$

$$M(t:k,p)=\left(\frac{p\exp(t)}{1-\exp(t)q}\right)^k \quad k=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.4</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Pascal dağılımına sahip ise,

$$E(x)=k/p \qquad k=1,2,3,\ldots \qquad 0<p<1 \qquad (2.3.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M'(t)=k\left(\frac{p\exp(t)}{1-\exp(t)q}\right)^{(k-1)} \frac{p\exp(t)}{(1-\exp(t)q)^2}$$

dir. O halde,

$$E(x)=k/p \qquad k=1,2,3,\ldots \qquad 0<p<1$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.5</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Pascal dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=(kq)/p^2 \qquad k=1,2,3,\ldots \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.3.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=\frac{k(p\exp(t))^{k}(k+\exp(t)q)}{(1-\exp(t)q)^{(k+2)}}$$

dir. O halde,

$E(x^2)=(k^2+qk)/p^2$ (2.3.8.a)

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.3.8.a) ve (2.3.7) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=(kq)/p^2$ $k=1,2,3,...$ $0<p<1$ $q=1-p$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.6</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Pascal dağılımına sahip ise,

$SS(x)=\sqrt{(kq)}/p$ $k=1,2,3,...$ $0<p<1$ $q=1-p$ (2.3.9)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.3.8) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{(qk)}/p$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.7</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Pascal dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$\alpha_3=(2-p)/\sqrt{(kq)}$ $k=1,2,3,...$ $0<p<1$ $q=1-p$ (2.3.10)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M'''(t)=\frac{k(p\exp(t))^{k}}{(1-\exp(t)q)^{(k+3)}}[k^2+3kq\exp(t)+q^2\exp(2t)+q\exp(t)]$$

dir. O halde,

$E(x^3)=k(k^2+3kq+q^2+q)/p^3$ (2.3.10.a)

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.3.10.a), (2.3.8.a) ve (2.3.7) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=kq(q+1)/p^3$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(2-p)/\sqrt{(kq)}$ $k=1,2,3,...$ $0<p<1$ $q=1-p$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.8</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Pascal dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=3+(6/k)+[p^2/(kq)] \quad k=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p \qquad (2.3.11)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^4)=\dfrac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M^{(iv)}(t)=\frac{1}{(1-\exp(t)q)^{(k+4)}}\{k(p\exp(t))^k[k(1-\exp(t)q)+(k+3)\exp(t)q]+[3kq\exp(t)+2q^2\exp(2t)+q\exp(t)]k(p\exp(t))^k(1-\exp(t)q)\}$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=(k^4+6k^3q+7k^2q^2+4k^2q+kq^3+4kq^2+kq)/\ p^4 \qquad (2.3.11.a)$$

elde edilir.

(2.1.9.a)'da, (2.3.11.a), (2.3.10.a), (2.3.8.a) ve (2.3.7) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=(3k^2q^2+kq^3+4kq^2+kq)/p^4$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=3+(6/k)+[p^2/(kq)]$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.3.9</u> Pascal Dağılımının Karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t)=[p\exp(it)/(1-\exp(it)q)]^k \qquad (2.3.12)$$

$$k=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

dir.

İSPAT: (1.7.6.a)'daki eşitliği kullanarak, (2.3.6)'da, t yerine it alındığında,

$$\Phi(t)=[p\exp(it)/(1-\exp(it)q)]^k$$

bulunur.

2.3.1 Pascal Dağılımının Uygulama Alanları

Pascal dağılımı, daha ileriki bölümde inceleyeceğimiz, k ve p parametreli Negatif Binomial dağılımının, k parametresinin pozitif tamsayı olduğu özel halidir. Daha detaylı olarak Negatif Binomial dağılımı bölümünde incelenecektir.

Pascal dağılımı ile ilgili basit bir örneği inceleyelim.

ÖRNEK 2.3.1.1 Her bir denemede başarı olasılığı 0.4 olan bir deneyde, üçüncü başarıyı onuncu denemede elde etme olasılığını hesaplayalım.

$$f(x:k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k} \quad x=k,k+1,\ldots \quad k=1,2,\ldots \quad 0<p<1$$

$$f(10:3,0.4)=\binom{9}{2}(0.4)^3(0.6)^7=0.0645$$

bulunur.

2.3.2 Pascal Dağılımının Parametre Tahmini

k-ıncı başarıda dahil olmak üzere, k başarı elde etmek için gerekli denemelerin bir dizisini düşünelim. x deneme sayısı olmak üzere p 'nin tahmini, p=k/x 'tir. Bu aynı zamanda, (2.2.2.4)'deki koşulu sağladığı için yansız bir tahmin edicidir. Yani, $E(p)=E(k/x)=k/E(x)=k/(k/p)=p$ dir.

Şimdi momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak, k ve p parametrelerinin tahminlerini hesaplayalım.

$m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.5)'deki gibi alınsın. Pascal dağılımının beklenen değeri ve varyansı, (2.3.7) ve (2.3.8)'den sırasıyla, $E(x)=k/p$ ve $Var(x)=(kq)/p^2$ dir. $m_1=k/q$ ve $m_2=(kq)/p^2$ alalım. Buradan,

$p=m_1/(m_1+m_2)$ ve $k=m_1^2/(m_1+m_2)$

bulunur. O halde, k ve p'nin tahminleri,

$\hat{k}=\bar{x}^2/(\bar{x}+S^2)$ ve $\hat{p}=\bar{x}/(\bar{x}+S^2)$

dir.

2.3.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Hastings ve Peacock, 1975 s:29)'da verilen bağıntı:

1) Pascal dağılımı ile Neğatif Binomial dağılımı arasındaki ilişki:

$C:x,p \sim x+Y:x,p$

dir.

2.4 Geometrik Dağılım

Her bir denemede başarı olasılığı p, başarısızlık olasılığı q olan bağımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığı bir deneyi düşünelim.

TANIM 2.4.1 İlk başarı elde etmek için gerekli denemelerdeki başarısızlıkların sayısı, Geometrik r.d'dir.

TANIM 2.4.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:p)=pq^{x} \quad x=0,1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad (2.4.1)$$

ise x r.d'ne Geometrik dağılıma sahiptir denir.

TANIM 2.4.3 Bununla birlikte, ilk başarıyı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı da Geometrik r.d'dir.

TANIM 2.4.4 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:p)=pq^{x-1} \quad x=1,2,3,\ldots \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad (2.4.2)$$

ise x r.d'ne Geometrik dağılımına sahiptir denir.

Geometrik dağılımı, $G(x:p)$ veya $G_x(p)$ ve ilgili Geometrik degişkeni, $G:p$ ile göstereceğiz. Geometrik dağılımın p parametresi, Bernoulli olasılık parametresidir.

Biz Geometrik dağılımla ile ilgili hesaplamalarda (2.4.2)'deki o.f kullanacağız.

Geometrik dağılımda $R_x=\{1,2,3,\ldots\}$, $0<p<1$ ve $q=1-p$ dir.

TEOREM 2.4.1 Geometrik dağılımın d.f,

$$F(x:p)=1-q^{x} \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad (2.4.3)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$F(x:p)=\sum_{y=1}^{x} pq^{y-1}$ dir. Geometrik serinin kısmi toplamında,

$$\sum_{y=1}^{x} q^{y-1}=\frac{1-q^{x}}{1-q}$$ dır. O halde,

$$F(x:p)=1-q^{x} \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

TEOREM 2.4.2 Geometrik dağılımın o.ç.f,

$$P(t:p)=pt/(1-tq) \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad (2.4.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:p)=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(tq)^{x}=pt\sum_{x=1}^{\infty}(tq)^{x-1}$$ dir. Geometrik serinin toplamından,

$$\sum_{x=1}^{\infty}(tq)^{x-1}=\frac{1}{1-tq}$$ dur. O halde,

$P(t:p)=pt/(1-tq)$

bulunur.

TEOREM 2.4.3 Geometrik dağılımın m.ç.f,

$$M(t:p)=p\exp(t)/(1-\exp(t)q) \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.4.5)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:p)=p\exp(t)\sum_{x=1}^{\infty}(\exp(t)q)^{x-1}=\frac{p\exp(t)}{1-\exp(t)q}$$

bulunur.

TEOREM 2.4.4 Kesikli tipteki bir x r.d, Geometrik dağılıma sahip ise,

$$E(x)=1/p \qquad 0<p<1 \qquad (2.4.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dir.

$M'(t)=p\exp(t)/(1-\exp(t)q)^2$

dir. O halde,

$E(x)=1/p \quad 0<p<1$

bulunur.

TEOREM 2.4.5 Kesikli tipteki bir x r.d, Geometrik dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=q/p^2 \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p \qquad (2.4.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$M''(t)= [p\exp(t)+pq\exp(2t)]/(1-\exp(t)q)^3$

dir. O halde,

$E(x^2)=(1+q)/p^2 \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$ (2.4.7.a)

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.4.7.a) ve (2.4.6) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=q/p^2$

bulunur.

TEOREM 2.4.6 Kesikli tipteki bir x r.d, Geometrik dağılıma sahip ise,

$SS(x)=\sqrt{q}/p \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$ (2.4.8)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.4.7) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{q}/p$

bulunur.

TEOREM 2.4.7 Kesikli tipteki bir x r.d Geometrik dağılıma sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$\alpha_3=(2-p)/\sqrt{q} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$ (2.4.9)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$M'''(t)=p\exp(t)[1+4q\exp(t)+q^2\exp(2t)]/(1-\exp(t)q)^4$

dir. O halde,

$E(x^3)=(1+4q+q^2)/p^3$ (2.4.9.a)

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.4.9.a), (2.4.7.a) ve (2.4.6) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=q(q+1)/p^3$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(2-p)/\sqrt{q} \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$

bulunur.

TEOREM 2.4.8 Kesikli tipteki bir x r.d, Geometrik dağılıma sahip ise α_4, ile gösterilen sivriliği,

$\alpha_4=9 + p^2/q \qquad 0<p<1 \qquad q=1-p$ (2.4.10)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M^{(iv)}(t)=\frac{\exp(t)}{1-\exp(t)q)^5}\{(p+8pq\exp(t)+3pq^2\exp(2t)(1-\exp(t)q$$
$$+4q\exp(t)(p+4pq\exp(t)+pq^2\exp(2t)\}$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=(q^3+11q^2+11q+1)/p^4 \quad 0<p<1 \quad q=1-p \qquad (2.4.10.a)$$

elde edilir.

(2.1.9.a)'da, (2.4.10.a), (2.4.9.a), (2.4.7.a) ve (2.4.6) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=(9q^2+qp^2)/p^4$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4= 9 +(p^2/q) \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.4.8</u> Geometrik dağılımın karakteristik fonksiyonu,

$$\xi(t)=p\exp(it)/(1-\exp(it)q) \quad 0<p<1 \quad q=1-p \qquad (2.4.11)$$

İSPAT: (1.7.6.a)'daki eşitliği kullanarak, (2.4.5)'de, t yerine it alındığıda,

$$\xi(t)=p\exp(it)/(1-\exp(it)q) \quad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

2.4.1 Geometrik Dağılımın Uygulama Alanları

Bağımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığı bir deneyi düşünelim. Bu deneye ilk başarıyı elde edene kadar devam edelim. İlk başarıyı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı yada bekleme zamanı geometrik r.d'dir. örneğin madeni bir paranın tura yüzünün üste gelinceye kadar havaya fırlatılması deneyinde, ilk turayı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı; Hilesiz bir zarın 6 gelinceye kadar yuvarlanması deneyinde, ilk 6 'yı elde etmek için gerekli denemelerin sayısı gibi.

Bağımsız Bernoulli denemeleri deneyinde ilk başarıyı elde etmek için gereken denemelerin sayısı $x=1,2,3,\ldots$, pozitif tamsayı değerlerin sonsuz sayısı olabilir. Yani $R_x=\{1,2,3,\ldots.\}$ tür.

İlk başarıyı elde etmek için yapılan denemelerin bir dizisini alalım.

$$\underbrace{FFF\ldots F}_{x-1}\underbrace{S}_{1}$$

Bu dizide F ve S'ler sırasıyla başarıyı ve başarısızlığı göstermektedir. Çarpım teoreminden (Akdeniz, 1984 s:18) yukarıdaki dizinin olasılığı, yani ilk (x-1) denemenin başarısız, son 1 denemenin başarılı olması olasılığı, $p^1(1-p)^{x-1}$ 'dir. Bu şekilde tek bir dizi bulunduğundan, x r.d'nin o.f (2.4.2)'deki gibi olur.

Eğer biz, x-inci denemede ilk başarısızlığın olma olasılığı ile ilgilenmiş olsaydık, x r.d'nin o.f,

$$f(x:1-p)=f(x:q)=p^{x-1}(1-p)=(1-q)^{x-1}q \qquad x=1,2,\ldots \qquad (2.4.1.1)$$

olacaktı. Bu durumla ilgili aşağıdaki örneği inceleyelim. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:153).

<u>ÖRNEK 2.4.1.1</u> Bir uzay merkezi 5 tane uzay aracı yapmıştır. Yapılan bu uzay araçlarından rastgele 4 tanesi seçiliyor ve deneme uçuşlarına tabi tutuluyor. Bu uçuşlardan dördüde başarılı ise, diğer araç deneme uçuşuna tabi tutulmayacaktır.

a) Herhangi bir deneme uçuşunda başarının olasılığını p nin fonksiyonu cinsinden ifade ediniz?

b) 4 başarılı uçuştan sonra, 1 başarısız uçuş olması olasılığı nedir?

$$f(x:1-p)=p^{x-1}(1-p) \qquad 0<p<1 \qquad x=1,2,3,\ldots$$

a)'nın çözümü için x=5'tir. O halde, $f(5:1-p)=p^4(1-p)$

Burada,

$p=0$ ve $p=1$ durumlarında $f(5:1-p)=0$ dır.

$p=0$ için denenmemiş uçuş başarısızdır. Denenmiş uçuş başarılıdır.

$p=1$ için denenmemiş veya denenmemiş uçuşlar başarılıdır.

4 başarılı uçuştan sonra yapılacak olan 1 uçuşun

başarısız uçuş olması olasılığı,

$$\frac{d}{dp}\{p^4(1-p)\}=0$$

çözümüdür.

$$\frac{d}{dp}\{p^4(1-p)\}=4p^3(1-p)-p^4=0 \Rightarrow 4-5p=0 \Rightarrow p=4/5=0.8$$

bulunur. Yani 4 başarılı uçuş dizisinin, 1 başarısız uçuş takip etmesi için p=0.8 olmalıdır. $p \neq 0.8$ olduğunda $f(5;1-0.8)=(0.8)^4(0.2)=0.082$ bulunur.

2.4.2 Geometrik Dağılımın Parametre Tahmini

İlk başarıyı elde etmek için gerekli denemelerin bir dizisini alırsak, x deneme sayısını göstermek üzere p'nin kestiricisi

$$\hat{p}=1/x$$

dir. Bu aynı zamanda (2.2.2.4) koşulunu sağladığından, yansız bir kestiricidir.

Şimdi p'nin maksimum likelihood kestiricisini bulalım.

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ her biri p parametreli Geometrik dağılımdan alınmış n hacimlik rasgele bir örneklem olsun.

x_i, $i=1,2,\ldots,n$'lerin o.o.f'ları,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;p)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)} \qquad (2.4.2.1)$$

dir.

$L(p)=f(x_1,\ldots,x_n;p)$ olsun. $L(p)$ 'nin logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(p)\}=n\ln(p)+\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}(x_i-1) \qquad 0<p<1 \qquad (2.4.2.2)$$

(2.4.2.2)'ün p'ye göre türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$\frac{d[\ln\{L(p)\}]}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)=0$$

Buradan $\hat{p}=1/\bar{x}$ bulunur. $\hat{p}$, p için yansız bir kestiricidir.

2.4.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Hastings ve Peacock, 1975 s:29)'da verilen bağıntılar:

1) Geometrik dağılım ile Pascal dağılımı arasındaki ilişki:

i- $\sum_{i=1}^{x} G_i : p \sim C : x, p$

ve

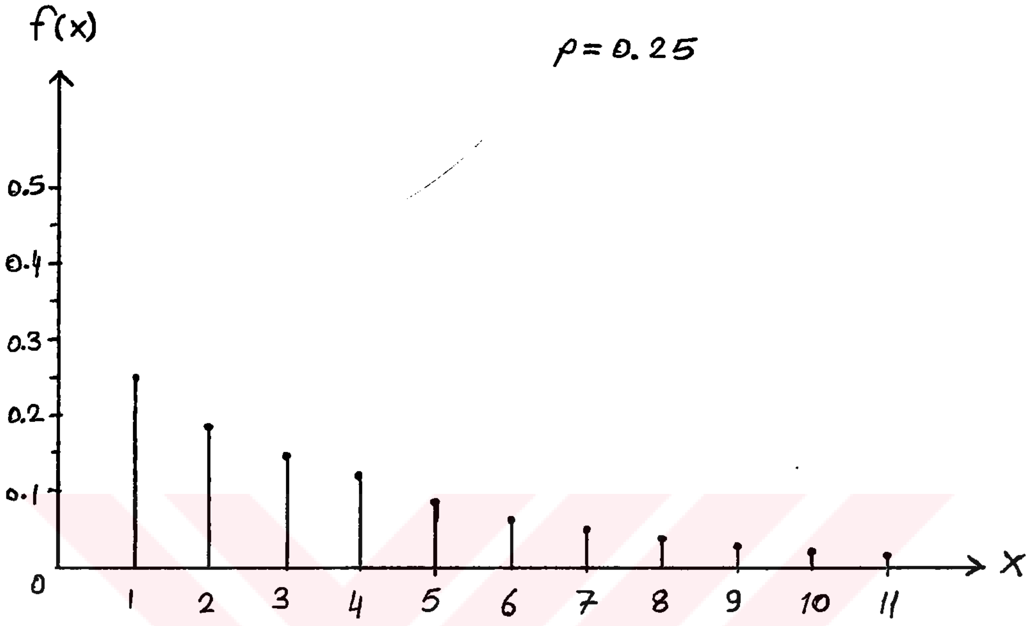
ii- $G_i : p \sim C : 1, p$

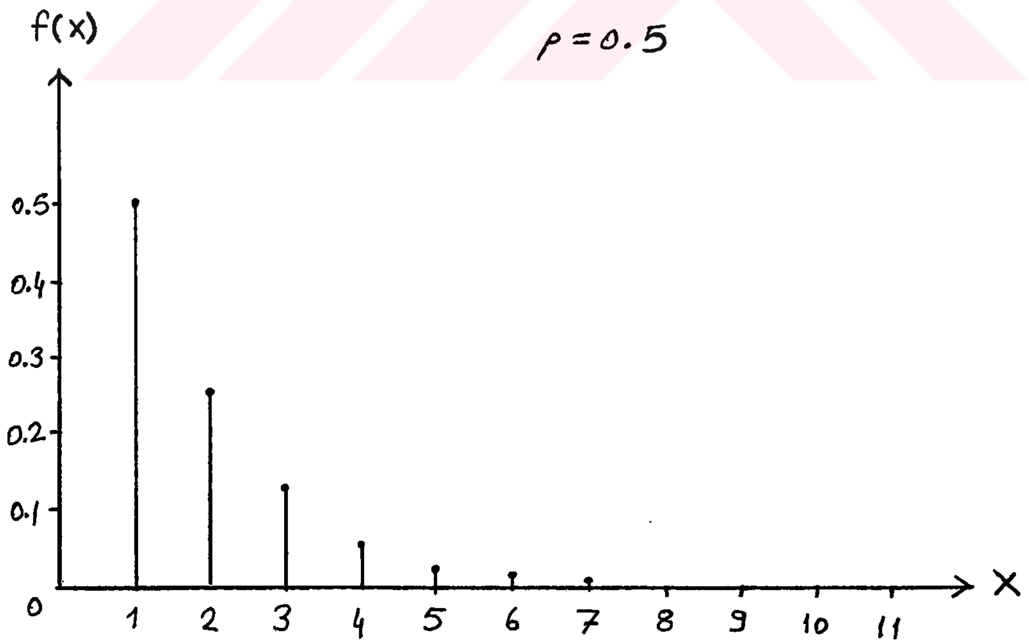
dir.

2) Geometrik dağılım ile Neğatif Binomial dağılımı arasındaki ilişki:

$\sum_{i=1}^{x} G_i : p \sim x + Y : x, p$

dir.





Şekil 4. Geometrik Dağılımın p parametresinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

2.5 Negatif Binomial Dağılım

Birbirinden bağımsız Bernoulli denemelerinin yapıldığı bir deneyi düşünelim. Bu deneyi k başarı elde edene kadar tekrarlayalım.

TANIM 2.5.1 Negatif Binomial r.d x, Bernoulli denemelerinin bir dizisinde, k-ıncı başarıdan önceki başarısızlıkların toplam sayısıdır.

TANIM 2.5.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:k,p)=\binom{k+x-1}{x}p^k(1-p)^x \qquad (2.5.1)$$

$x=0,1,\ldots \quad 0<k<\infty \quad 0<p<1$

ise x r.d'ne Negatif Binomial dağılımına sahiptir denir.

Negatif Binomial dağılımında, $R_x=\{0,1,2,\ldots\}$ ve $0<p<1$ dir.

Negatif Binomial dağılımını, NB(x:k,p) veya $NB_x(k,p)$ ve ilgili Negatif Binomial degişkenini, Y:k,p ile göstereceğiz. Negatif Binomial dağılımının k ve p parametreleri sırasıyla, başarı sayısı ve Bernoulli olasılık parametresidir.

Negatif Binomial dağılım, (2.4.1)'de verilen o.f'nun genel halidir.

TEOREM 2.5.1 Negatif Binomial dağılımının d.f,

$$F(x:k,p)=\sum_{y=0}^{x}\binom{k+y-1}{y}p^kq^y \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:k,p)=\sum_{y=0}^{x}\binom{k+y-1}{y}p^kq^y \qquad 0<p<1 \quad q=1-p$$

bulunur.

TEOREM 2.5.2 Negatif Binomial dağılımının o.ç.f,

$$P(t)=[p/(1-tq)]^k \quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:k,p)= p^{k} \sum_{x=0} \binom{k+x-1}{x} (tq)^{x}$$ dir. (2.3.3)'den,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (tq)^{x} = \frac{1}{(1-tq)^{k}}$$ dir. O halde,

$$P(t:k,p)=[p/(1-tq)]^{k} \qquad 0<p<1 \; , \quad q=1-p$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.3</u> Negatif Binomial dağılımının m.ç.f,

$$M(t:k,p)=[p/(1-\exp(t)q)]^{k} \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:k,p) = p^{k} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (\exp(t)q)^{x}$$ dir. (2.3.3)'den,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{k+x-1}{x} (\exp(t)q)^{x} = \frac{1}{(1-\exp(t)q)^{k}}$$ dir. O halde,

$$M(t:k,p)=[p/(1-\exp(t)q)]^{k} \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.4</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Negatif Binomial dağılımına sahip ise,

$$E(x)=(kq)/p \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M'(t)=k\left(\frac{p}{1-\exp(t)q}\right)^{(k-1)}\left(\frac{pq\exp(t)}{(1-\exp(t)q)^{2}}\right)$$

dir. O halde,

$$E(x)=(kq)/p \qquad 0<p<1 \; , \; q=1-p \; , \; 0<k<\infty$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.5</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Negatif Binomial dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=(kq)/p^2 \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}|_{t=0}=M''(t)|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=k\left(\frac{p}{1-exp(t)q}\right)^{(k-1)}\left[\frac{kpq^2exp(2t)+pqexp(t)}{(1-exp(t)q)^3}\right]$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=(k^2q^2+kq)/p^2 \qquad (2.5.6.a)$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.5.6.a) ve (2.5.5) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=(kq)/p^2$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.6</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Negatif Binomial dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{(kq)}/p \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.5.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{(kq)}/p$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.7</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Negatif Binomial dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=(q+1)/\sqrt{(kq)} \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}|_{t=0}=M'''(t)|_{t=0}$ dir.

$$M'''(t)=\frac{kp^kqexp(t)}{(1-exp(t)q)^{(k+3)}}[k^2q^2exp(2t)+3kqexp(t)+qexp(t)+1]$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=kq(k^2q^2+3kq+q+1)/p^3 \qquad (2.5.8.a)$$

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.5.8.a), (2.5.6.a) ve (2.5.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=kq(q+1)/p^3$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(q+1)/\sqrt{(kq)}$ $\quad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.8</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Negatif Binomial dağılımına sahip ise α_4, ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=3+(6/k)+(p^2/(kq)) \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.9)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M^{(iv)}(t)=\frac{kp^k}{(1-\exp(t)q)^{(k+4)}}\{qexp(t)[3k^2q^2\exp(2t)+6kq\exp(t)+2q\exp(t)+1](1-etq)+(k+3)\exp(2t)q^2[k^2q^2\exp(2t)+3kq\exp(t)+q\exp(t)+1]\}$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\frac{kq}{p^4}[k^3q^3+3k^2pq^2+6kpq+2pq+3k^2q^2+k+10kq^2+kq+3k^2q^3+3q^2+3q] \qquad (2.5.9.a)$$

elde edilir.

(2.1.9.a)'da, (2.5.9.a), (2.5.8.a), (2.5.6.a) ve (2.5.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=kq(3kq+6q+p^2)/p^4$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=3+(6/k)+(p^2/(kq))$

bulunur.

<u>TEOREM 2.5.9</u> Negatif Binomial dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t)=[p/(1-\exp(it)q]^k \qquad 0<p<1 \quad q=1-p \quad 0<k<\infty \qquad (2.5.10)$$

dir.

İSPAT: (1.7.6.a)'daki eşitliği kullanarak, (2.5.4)' de, t yerine it alındığında,

$\Phi(t)=[p/(1-\exp(it)q]^{k}$ $0<p<1$ $q=1-p$ $0<k<\infty$
bulunur.

2.5.1 Negatif Binomial Dağılımının Uygulama Alanları

Negatif Binomial dağılımının uygulandığı alanları şöyle sıralayabiliriz:

1) Kaza istatistik hesablarına uygulamalar.
(Arbous ve Kerich, 1951), (Greenwood ve Yule, 1920).

2) Doğum ve ölüm işlemlerine uygulamalar.
(Furry, 1939), (Kendal, 1949)

3) Psikolojik verilere uygulamalar.
(Sichel, 1951)

4) Tüketici harcamalarının dağılımına uygulamalar.
(Chatfield ve Goodhardt, 1966)

5) Tıp ve Askeri alanlardaki uygulamalar.
(Bennett ve Birch, 1964), (Chew, 1964)

Negatif Binomial dağılım, bazen kısıtlamalardan dolayı Poisson dağılımının uygulanamadığı durumlarda kullanılır. örneğin, her bireydeki çürük dişlerin sayısının dağılımını ele alalım. Bazı kişilerin dişleri, diş çürüklüğüne karşı, diğer kişilere göre daha dayanıklıdır. Yani çürük diş sayısı oranı τ, (Poisson dağılımının τ parametresi) bireyden bireye değişir. τ bireyden bireye değiştiğinde, Negatif Binomial dağılımı Poisson dağılımından, oluşumların sayısı için daha uygun bir dağılımdır. Daha geniş bilgi için (Freeman, 1963), (Johnson ve Leone, 1964) ve (Hald, 1952) incelenebilir.

Ayrıca Negatif Binomial dağılımı, Binomial dağılımı ve Poisson dağılımı arasında bir seçim yapma zorunluluğu olduğunda, eğer,

Varyans > Ortalama ise, Negatif Binomial dağılım.
Varyans < Ortalama ise, Binomial dağılım.
Varyans = Ortalama ise, Poisson dağılım

model olarak alınabilir. (Hasting ve Peacock, 1975 s:95)

2.5.2 Negatif Binomial Dağılımının Parametre Tahminleri

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ k ve p parametreli Negatif Binomial dağılımdan alınmış n hacimlik rasgele bir örneklem olsun.

Şimdi momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak, k ve p parametrelerini tahmin edelim.

$m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ sırasıyla (1.6.2) ve (1.6.5)'deki gibi alınsın. Negatif Binomial dağılımının, beklenen değeri ve varyansı, (2.5.5) ve (2.5.6)'dan sırasıyla, $E(x)=(kq)/p$ ve $Var(x)=(kq)/p^2$ dir. $m_1=(kq)/p$ ve $m_2=(kq)/p^2$ alalım. Buradan,

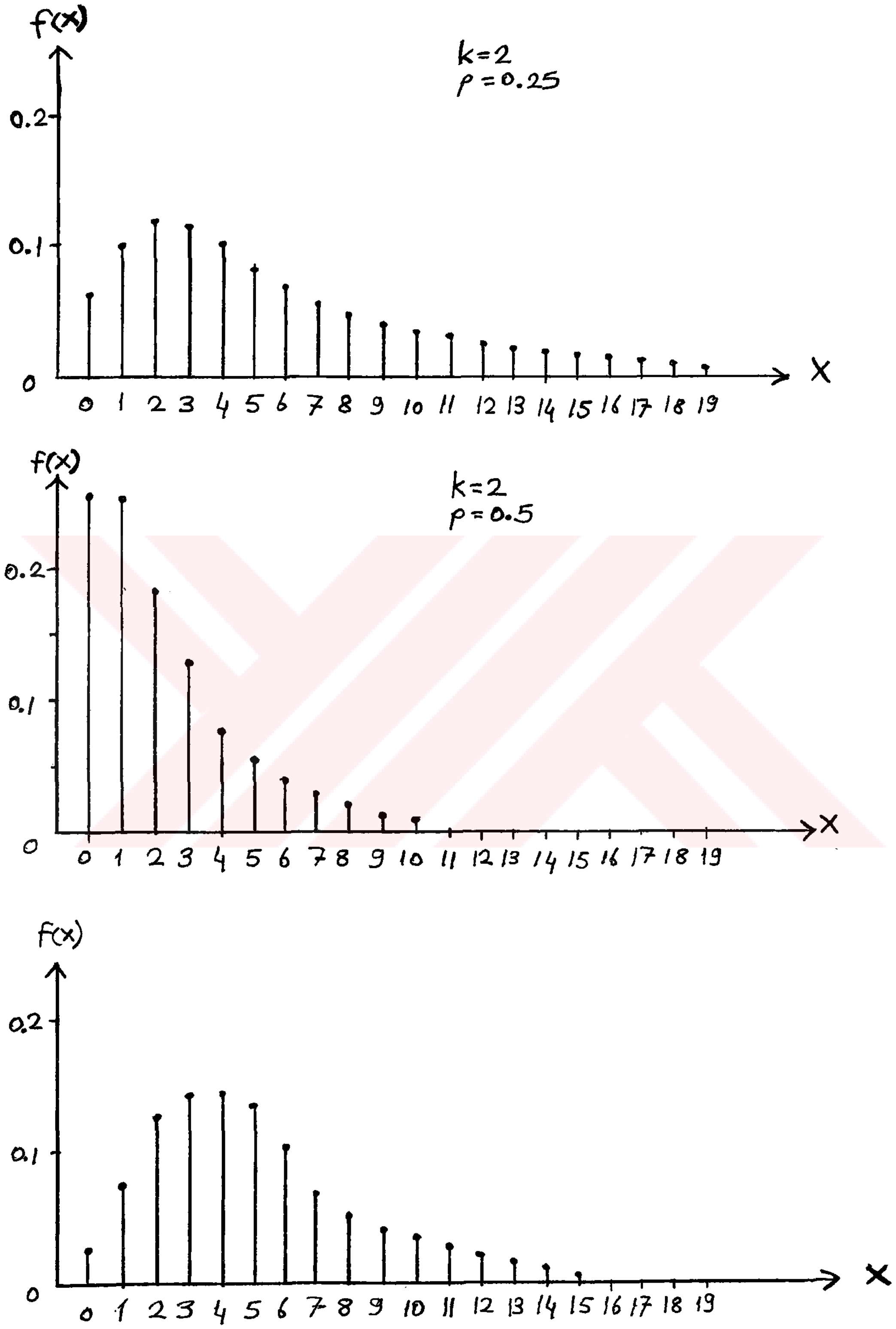
$k=m_1^2/(m_2-m_1)$ ve $p=m_1/m_2$

bulunur. O halde k ve p'nin taminleri,

$\hat{k}=\bar{x}^2/(S^2-\bar{x})$ ve $\hat{p}=\bar{x}/S^2$

dir.

Burada bir şeye dikkat etmek gerekiyor: Eger $\bar{x}$, S^2'den büyük ise k negatif olur. Bu da Negatif Binomial dağılımının veriler için uygun bir model olmadığını gösterir.



Şekil 5. Negatif Binomial Dağılımının n ve p parametrelerinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

2.6 Hipergeometrik Dağılım

TANIM 2.6.1 N hacimlik bir kitlenin, birinci tip elemanlarının sayısı m olsun. Yine yerine koymaksızın, n hacimlik rastgele bir örneklem seçelim . Bu örneklemdeki birinci tip elemanların sayısı x Hipergeometrik r.d'dir.

TANIM 2.6.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:N,m,n)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (2.6.1)$$

$x=0,1,...,n$, $x\leq m$, $(n-x)\leq(N-m)$, $N=2,3,...$, $m=1,2,...$ $m<N$ $n=1,2,3,...,n$; $n<N$

ise x r.d'ne Hipergeometrik dağılıma sahiptir denir.

Hipergeometrik dağılımda, $R_x=\{0,1,2,...,n\}$, $x\leq m$, $(n-x)\leq(N-m)$, $N=2,3,...$, $m=1,2,...$ $m<N$ $n=1,2,3,...,n$; $n<N$ dir.

Hipergeometrik dağılımı, $HG(x:N,m,n)$ veya $HG_x(N,m,n)$ ve ilgili Hipergeometrik değişkenini, $HG:N,m,n$ ile göstereceğiz.

TEOREM 2.6.1 Hipergeometrik dağılımının d.f,

$$F(x:N,m,n)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{x}\binom{m}{y}\binom{N-m}{n-y} \qquad (2.6.2)$$

$x=0,1,...,n$, $x\leq m$, $(n-x)\leq(N-m)$, $N=2,3,...$, $m=1,2,...$ $m<N$ $n=1,2,3,...,n$; $n<N$

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:N,m,n)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{y=0}^{x}\binom{m}{y}\binom{N-m}{n-y}$$

bulunur.

TANIM 2.6.3 Kesikli tipteki bir x r.d, hipergeometrik dağılıma sahip ise, r-inci faktöriyel momenti,

$$\mu_{(r)}=E(x^{(r)})=\frac{n^{(r)}m^{(r)}}{N^{(r)}} \qquad (2.6.3)$$

dir. (Johnson ve Kotz 1969, s:144)

TANIM 2.6.4 Kesikli tipteki bir x r.d, hipergeometrik dağılıma sahip ise, sıfır yada merkez etrafındaki momentlerinin, azalan faktöriyel momentler cinsinden ifadesi,

$$E(x)=\mu'_1=\mu_{(1)} \qquad (2.6.3.a)$$

$$E(x^2)=\mu'_2=\mu_{(2)}+\mu_{(1)} \qquad (2.6.3.b)$$

$$E(x^3)=\mu'_3=\mu_{(3)}+3\mu_{(2)}+\mu_{(1)} \qquad (2.6.3.c)$$

$$E(x^4)=\mu'_4=\mu_{(4)}+6\mu_{(3)}+7\mu_{(2)}+\mu_{(1)} \qquad (2.6.3.d)$$

ve,

azalan faktöriyel $h^{(j)}=h(h-1)(h-2)\ldots(h-j+1)$ (2.6.4.a)

artan faktöriyel $h^{(j)}=h(h+1)(h+2)\ldots(h+j-1)$ (2.6.4.b)

şeklindedir. (Johnson ve Kotz 1969, s:19)

TEOREM 2.6.2 Kesikli tipteki bir x r.d, Hipergeometrik dağılıma sahip ise,

$$E(x)=(nm)/N \qquad (2.6.5)$$

$N=2,3,\ldots$, $m=1,2,\ldots$ $m<N$ $n=1,2,3,\ldots,n;$ $n<N$

dir.

İSPAT: (2.6.3.a)'dan, $E(x)=\mu_{(1)}$ dir. (2.6.3)'den,

$$\mu_{(1)}=\frac{n^{(1)}m^{(1)}}{N^{(1)}}$$

dir. (2.6.4.a)'yı kullanarak, $n^{(1)}=n$, $m^{(1)}=m$ ve $N^{(1)}=N$ elde edilir.

$$E(x)=(nm)/N$$

bulunur.

TEOREM 2.6.3 Kesikli tipteki bir x r.d, Hipergeometrik dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=\frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)} \qquad (2.6.6)$$

dir.

İSPAT: (2.6.3.b)'den, $E(x^2)=\mu_{(2)}+\mu_{(1)}$ dir. (2.6.3)'den,

$$\mu_{(2)}=\frac{n^{(2)}m^{(2)}}{N^{(2)}}$$ dir. (2.6.4.a)'yı kullanarak, $n^{(2)}=n(n-1)$, $m^{(2)}=m(m-1)$ ve $N^{(2)}=N(N-1)$ elde edilir.

$$\mu_{(2)}=\frac{n(n-1)m(m-1)}{N(N-1)}$$ dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{n(n-1)m(m-1)+nm(N-1)}{N(N-1)} \qquad (2.6.6.a)$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.6.6.a) ve (2.6.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.6.4</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Hipergeometrik dağılıma sahip ise,

$$SS(x)=\frac{1}{N}\sqrt{\left\{\frac{nm(N-m)(N-n)}{N(N-1)}\right\}} \qquad (2.6.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.6.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{1}{N}\sqrt{\left\{\frac{nm(N-m)(N-n)}{N(N-1)}\right\}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.6.5</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Hipergeometrik dağılıma sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{(N-2m)(N-2n)\sqrt{(N-1)}}{(N-2)\sqrt{\{mn(N-m)(N-n)\}}} \qquad (2.6.8)$$

dir.

İSPAT: (2.6.3.c)'den, $E(x^3)=\mu_{(3)}+3\mu_{(2)}+\mu_{(1)}$ dir. (2.6.3)'den,

$$\mu_{(3)}=\frac{n^{(3)}m^{(3)}}{N^{(3)}}$$ dir. (2.6.4.a)'yı kullanarak,

$n^{(3)}=n(n-1)(n-2)$, $m^{(3)}=m(m-1)(m-2)$ ve $N^{(3)}=N(N-1)(N-2)$ elde edilir.

$$\mu_{(3)}=\frac{n(n-1)(n-2)m(m-1)(m-2)}{N(N-1)(N-2)}$$ dir. O halde,

$$E(x^3)=\frac{mn\{(n-1)(m-1)[(n-2)(m-2)+3(N-2)]+(N-1)(N-2)\}}{N(N-1)(N-2)} \quad (2.6.8.a)$$

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.6.8.a), (2.6.6.a) ve (2.6.5) yerine konulduğunda,

$$\mu_3=\frac{mn(N-m)(N-2m)(N-n)(N-2n)}{N^3(N-1)(N-2)}$$ elde edilir. (1.5.7)'deki eşitliği kullanarak,

$$\alpha_3=\frac{(N-2m)(N-2n)\sqrt{(N-1)}}{(N-2)\sqrt{\{mn(N-m)(N-n)\}}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 2.6.6</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Hipergeometrik dağılıma sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{N^2(N-1)}{N(N-2)(N-3)(N-n)}\left[\frac{N(N+1)-6n(N-n)}{m(N-m)}+\frac{3n(N-n)(N+6)}{N^2}-6\right] \quad (2.6.9)$$

İSPAT: (2.6.3.d)'den, $E(x^4)=\mu'_4=\mu_{(4)}+6\mu_{(3)}+7\mu_{(2)}+\mu_{(1)}$ dir. (2.6.3)'den,

$$\mu_{(4)}=\frac{n^{(4)}m^{(4)}}{N^{(4)}}$$ dir. (2.6.4.a)'yı kullanarak,

$n^{(4)}=n(n-1)(n-2)(n-3)$, $m^{(4)}=m(m-1)(m-2)(m-3)$ ve $N^{(3)}=N(N-1)(N-2)(n-3)$ elde edilir.

$$\mu_{(4)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)m(m-1)(m-2)(m-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \quad \text{dir.}$$

$E(x^4)$ hesaplandıktan sonra, (2.1.9.a)'da, $E(x^4)$, (2.6.8.a), (2.6.6.a) ve (2.6.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\frac{mn(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}\{N^3(N+1)-6nN^2(N-n)+3m(N-m)[n(N-n)(N+6)-2N^2]\}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\frac{N^2(N-1)}{N(N-2)(N-3)(N-n)}\left[\frac{N(N+1)-6n(N-n)}{m(N-m)}+\frac{3n(N-n)(N+6)}{N^2}-6\right]$$

bulunur.

2.6.1 Hipergeometrik Dağılımın Uygulama Alanları

Hipergeometrik dağılım küçük üretim payından alınan örneklemleri içeren problemlere sık sık uygulanır. N birimlik bir üretim payından rastgele seçilmiş, n birimlik örnekleminden tam m biriminin kusurlu olması olasılığını verir.

N birimlik bir üretim payından, n birimlik bir örneklem toplam $\binom{N}{n}$ benzer yolla elde edilir. Aynı şekilde m kusurlu birimin x birimi $\binom{m}{x}$ değişik yolla elde edilir. Böyle her bir kombinasyon için (N−m) kusursuz elemanların (n−x) biriminde, $\binom{N-m}{n-x}$ tane vardır. Bu nedenle x kusurlu birim ve (N−m) kusursuz birimi elde etmenin toplam sayısı $\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}$ dir.

O halde,

$$f(x;N,m,n)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$x=0,1,\ldots,n$, $x\leq m$, $(n-x)\leq(N-m)$, $N=2,3,\ldots$, $m=1,2,\ldots$ $m<N$ $n=1,2,3,\ldots,n$; $n<N$ dir.

Kab modeli olarak; Bir kapta 4 beyaz ve 6 siyah top vardır. Tekrar yerine koymaksızın 3 top çekiliyor. x r.d, çekilen siyah topların sayısı, Hipergeometrik dağılıma sahiptir.

Hipergeometrik dağılımın kalite kontrol alanındaki bir uygulamasını ele alalım.

ÖRNEK 2.6.1.1 25 adet yüksek emniyetli elektron tübü için alım yapılacaktır. Bu tüplerden rastgele 5 adedi seçiliyor ve ömürleri deneniyor. Bu denemede 2 den daha az tüp kusurlu olursa kalan 20 tüp kabul edilecek, diğer durumlarda tamamı rededilecektir.

Teklif edilen 25 tüpten dördü kusurlu ise, teklifin kabul edilebilirlik olasılığını hesaplayalım.

Eğer seçilen örneklem 0 ve 1 kusurlu tüp bulundurursa teklif kabul edilecektir. Bu nedenle,

$$\text{Prob}[x<2]=\sum_{y=0}^{1} f(y;25,5,4)=\sum_{y=0}^{1}\frac{\binom{4}{y}\binom{25-4}{5-y}}{\binom{25}{4}}=0.834$$

Sonuç olarak kabul edilebilirlik, yaklaşık olarak 6 üzerinden beştir. Teklif kabul edilebilir.

Hipergeometrik dağılımın ilginç bir uygulaması, bir bölgedeki hayvan kitlesinin hacmini tahmin etme işlemidir.

Bu tip uygulamalar, 1896 yıllarına kadar dayanır.

ÖRNEK 2.6.1.2 Küçük bir göldeki veya bir üretim havuzundaki balık sayılarını, bu sayıya N diyelim, tahmin etmek isteyelim. (Chapman 1952) , (Petersen 1896)

Bu iş için ilk olarak belirli bir sayıda balık yakalanır. Bu sayıya m diyelim. Yakalanan balıklar işaretlenir veya numaralandırılır. Göle yada üretim havuzuna tekrar salıverilir. Kısa bir süre sonra, ki bu süre işaretlenmiş yada numaralandırılmış balıkların doğal ortama uyumunu sağlayacak, yani rastgele dağılmış olana kadar olmalı; fakat kitle hacmini, sayısını etkileyecek derecede büyük doğal değişimler için yeterli derecede uzun olmamalıdır.

Sonra gölden yada üretim havuzundan, n hacimlik bir örneklem alınır ve x sayıdaki işaretlenmiş yada numaralandırılmış balık sayısına bakılır.

N 'nin maksimum olasılık tahmin edicisi yaklaşık olarak,

$$(nm)/x$$

dir.

$$\frac{(n+1)(m+1)}{(x+1)} - 1 \quad \text{veya} \quad \frac{(n+2)(m+2)}{(x+2)}$$

tahmin edicileri de kullanılabilir. (Johnson ve Kotz, 1967 s:152)

Hipergeometrik dağılımın dilbilim problemlerine uygulaması da vardır. Geniş bilgi için (Ross, 1950) incelenebilir.

2.6.2 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

Bu bölümde Hipergeometrik dağılım ile binomial dağılım ve Hipergeometrik dağılım ile Poisson dağılımı arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

1) Hipergeometrik dağılım ile Binomial dağılımı arasındaki ilişki:

HG(x:N,m,n) ile gösterilen Hipergeometrik dağılımın (2.6.1)'deki o.f'nunu alalım.

$$f(x;N,m,n)=\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=0,1,2,...,n$$

burada, r=n ve m+n=N => n=N-m alalım. (2.6.1)'deki o.f

$$f(x;n,m,r)=\frac{\binom{m}{x}\binom{n}{r-x}}{\binom{n+m}{n}} \qquad x=0,1,2,...,n$$

olur.

$$f(x;n,m,r)=\frac{r!\ m!\ n!\ (m+n-r)!}{(r-x)!\ x!\ (m-x)!\ (n-r+x)!\ (m+n)!}$$

kısaltmalardan sonra,

$$f(x;n,m,r)=\binom{r}{x}\frac{\overbrace{[m-(x-1)]...(m-1)m}^{x \text{ terim var}}\overbrace{[n-(r-x-1)]...(n-1)n}^{r-x \text{ terim var}}}{[(m+n)-(r-1)]...[(m+n)-1](m+n)}$$

yukarıdaki f(x;n,m,r) ifdesinin pay ve paydasını (m+n)'ye bölelim.

$p=\frac{m}{m+n}$ ve $q=\frac{n}{m+n}$ olsun. f(x;m,n,r)'nin m,n ->∞ limitini alalım,

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} f(x;n,m,r)=\binom{r}{x}p^x q^{r-x} \qquad 0<p<1\ ,\ q=1-p\ ,\ x=0,1,2,...,n$$

r=n alalım. Sonuç,

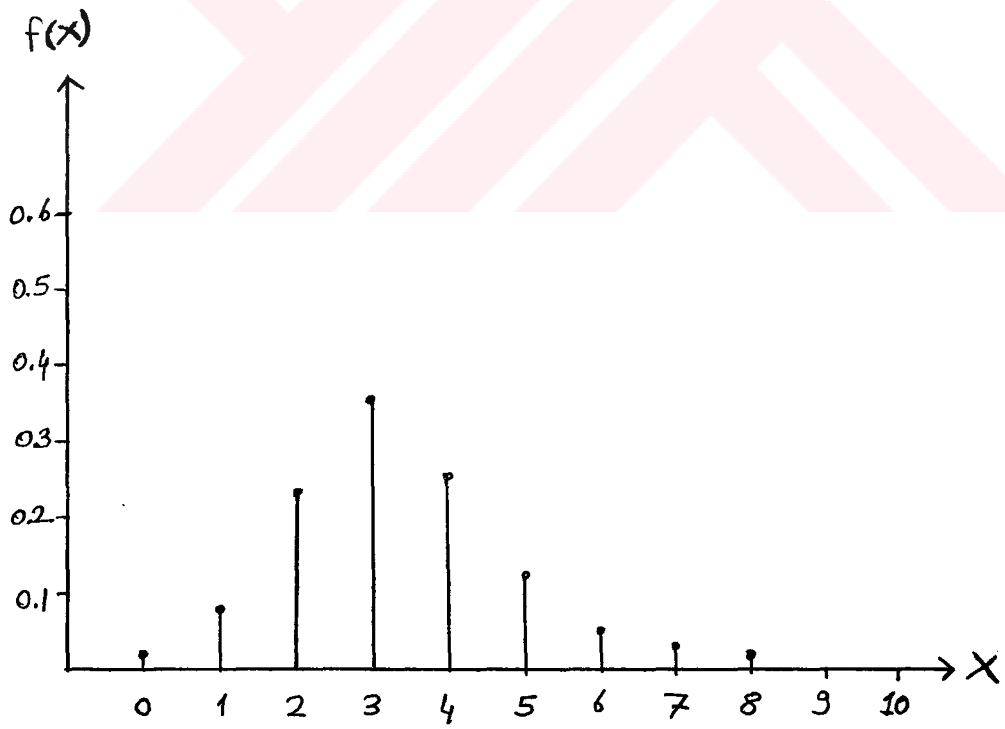
$$= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad 0<p<1 \ , \ q=1-p \ , \ x=0,1,2,\ldots,n$$

olur. Bu da, (2.2.1.b)'deki o.f'dur.

Sonuç olarak, (2.6.2)'deki o.f'nunda, $N \to \infty$, $m \to \infty$ ve $m/N \to p$ Hipergeometrik dağılım, Binomial dağılımına yakınsar.

2) Hipergeometrik dağılım ile Poisson dağılımı arasındaki ilişki:

(2.6.2)'deki N,m ve n parametreli Hipergeometrik dağılımda: $m \to \infty$, $N \to \infty$, $n \to \infty$, $\frac{m}{N} \to 0$ ve $\frac{nm}{N} \to \tau$ olduğunda, Hipergeometrik dağılım , τ parametreli Poisson dağılımına yakınsar. (Patil, Boswell, Joshi, Ratnaparkhi, Rao 1984 s: 48)



Şekil 6. Hipergeometrik Dağılımın N=25 n=10 ve m=8 parametre değerlerine göre o.f'nun grafiği.

2.7 Kesikli Düzgün Dağılım

TANIM 2.7.1 Bir deney, tümü eşit olasılıklı n ayrık sonuç versin. Kesikli tipteki bir x r.d, tümü eşit olasılıklı, n olanaklı sonuca sahip ise, x r.d'ne kesikli düzgün r.d denir.

TANIM 2.7.2 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x;a,b)=\frac{1}{b} \quad a\leq x\leq a+b-1 \ , \ a<b \text{ ve } x \text{ bir tamsayıdır.} \qquad (2.7.1)$$

ise x r.d'ne Kesikli Düzgün dağılıma sahiptir denir.

Kesikli Düzgün dağılımda $R_x=\{\ \ldots,-1,0,1,\ldots\}$ dir.

Kesikli Düzgün dağılımı, D(x;a,b) veya $D_x(a,b)$ ve ilgili Kesikli Düzgün degişkenini, D:a,b ile göstereceğiz. Kesikli Düzgün dağılımın a ve b parametreleri sırasıyla, dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ sonlu kitlesinden alınmış rastgele bir gözlem, $\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ görüntü kümeli bir Kesikli Düzgün Dağılıma sahiptir.

$$f(x)=\frac{1}{n} \quad x=x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n \text{ dir.}$$

özel olarak, $x_i=i$, $i=1,2,3,\ldots,n$ durumu incelenebilir.

TEOREM 2.7.1 Kesikli Düzgün Dağılımın d.f,

$$F(x;a,b)=\frac{x-a+1}{b} \quad a\leq x\leq a+b-1 \qquad (2.7.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;a,b)=\sum_{y=a}^{x}\frac{1}{b}=\underbrace{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{x-a+1 \text{ terim var}} \text{ dir. O halde,}$$

$$F(x;a,b)=\frac{x-a+1}{b}$$

bulunur.

TEOREM 2.7.2 Kesikli Düzgün Dağılımın o.ç.f,

$$P(t:a,b)=\frac{t^{a}(t^{b}-1)}{b(t-1)} \qquad (2.7.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:a,b) = \sum_{x=a}^{a+b-1} t^{x}\frac{1}{b} = \frac{1}{b}[t^{a}+t^{(a+1)}+....+t^{(a+b-1)}]$$

$$=\frac{1}{b}(t^{a})[t^{1}+t^{2}+....+t^{(b-1)}]$$ dir. Kısmi toplamdan,

$$[t^{1}+t^{2}+....+t^{(b-1)}] = \frac{t^{b}-1}{t-1}$$ dir. O halde,

$$P(t:a,b)=\frac{t^{a}(t^{b}-1)}{b(t-1)}$$

bulunur.

TEOREM 2.7.3 Kesikli tipteki bir x r.d, Kesikli düzgün dağılıma sahip ise,

$$E(x)=[a+(b-1)/2] \qquad (2.7.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$E(x)=\frac{1}{b}\sum_{x=a}^{a+b-1} x$$

$y=x-a \Rightarrow x=y+a$ dir.

$$\sum_{x=a}^{a+b-1} x = \sum_{y=0}^{b-1}(y+a)= \sum_{y=0}^{b-1} y + a\sum_{y=0}^{b-1} 1 =\frac{(b-1)b}{2}+ab$$

elde edilir. O halde,

$$E(x)=\frac{1}{b}\sum_{x=a}^{a+b-1} x = \frac{1}{b}\left(\frac{(b-1)b}{2}+ab\right)=a+\frac{b-1}{2}$$

bulunur.

TEOREM 2.7.4 Kesikli tipteki bir x r.d, Kesikli düzgün dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=[(b^2-1)/12] \tag{2.7.5}$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$E(x^2)=\frac{1}{b}\sum_{x=a}^{a+b-1} x^2$$

$y=x-a \Rightarrow x=y+a$ dir.

$$\sum_{x=a}^{a+b-1} x^2 = \sum_{y=0}^{b-1}(y+a)^2=\sum_{y=0}^{b-1} y^2 +2a\sum_{y=0}^{b-1} y+a^2\sum_{y=0}^{b-1} 1$$

$$=[\frac{(b-1)b(2b-1)}{6}+2a\frac{(b-1)b}{2}+a^2b]$$ dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{(b-1)(2b-1)}{6}+a(b-1)+a^2 \tag{2.7.5.a}$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.7.5.a) ve (2.7.4) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=[(b^2-1)/12]$

bulunur.

TEOREM 2.7.5 Kesikli tipteki bir x r.d, Kesikli düzgün dağılıma sahip ise,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(b^2-1)}}{2\sqrt{3}} \tag{2.7.6}$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.7.5) yerine konulduğunda,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(b^2-1)}}{2\sqrt{3}}$$

bulunur.

TEOREM 2.7.6 Kesikli tipteki bir x r.d, Kesikli düzgün dağılıma sahip ise α_3, ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \tag{2.7.7}$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$E(x^3)=\frac{1}{b}\sum_{x=a}^{a+b-1} x^3$$

$y=x-a \Rightarrow x=y+a$ dir.

$$\sum_{x=a}^{a+b-1} x^3 = \sum_{y=0}^{b-1}(y+a)^3 = \sum_{y=0}^{b-1} y^3 + 3a\sum_{y=0}^{b-1} y^2 + 3a^2\sum_{y=0}^{b-1} y + a^3 b \quad \text{dir.}$$

O halde,

$$E(x^3)=\frac{1}{4}(b-1)^2 b+\frac{1}{2}a(b-1)(2b-1)+\frac{3}{2}a^2(b-1)+a^3 \qquad (2.7.7.a)$$

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.7.7.a), (2.7.5.a) ve (2.7.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=0$ dır. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0$

bulunur.

2.7.1 Kesikli Düzgün Dağılımın Uygulama Alanları

Kesikli Düzgün Dağılım, tüm olanaklı sonuçları eşit olasılığa sahip, birbirinden bağımsız olaylara uygulanır. örneğin, düzgün bir zarın atılması olayında, herbir yüzün üste gelmesi, kesikli Düzgün Dağılıma sahiptir.

2.7.2 Kesikli Düzgün Dağılımın Parametre Tahminleri

Kesikli Düzgün Dağılımın sırasıyla, konum ve yayılım parametreleri a ve b'nin, tahminlerini, momentleri karşılaştırma metodu ile hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ a ve b parametreli Kesikli Düzgün dağılımdan alınmış rastgele bir örneklem olsun.

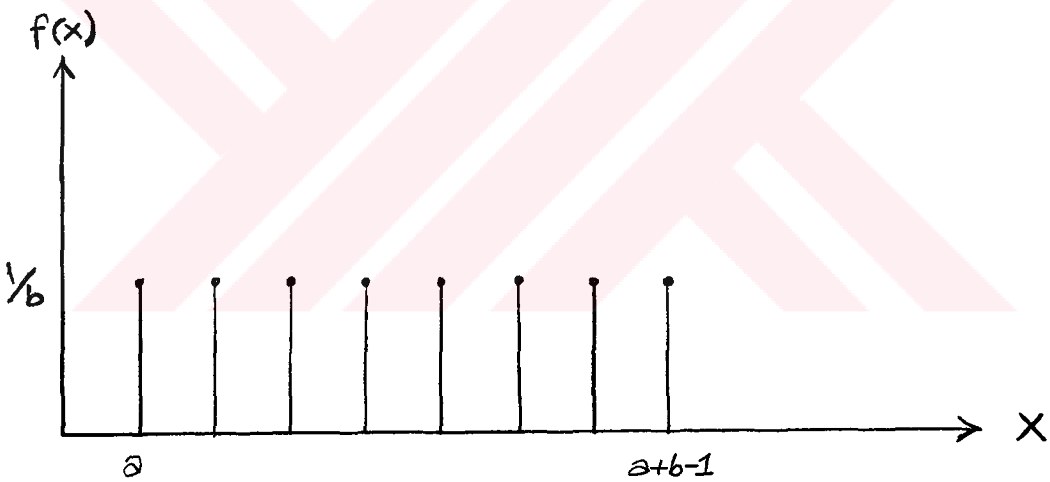
$m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.5)'deki gibi alınsın. Kesikli Düzgün dağılımın Beklenen değeri ve varyansı, (2.7.2) ve (2.7.3)'den sırasıyla, $E(x)=[(b-1)/2+a]$ ve $Var(x)=(b^2-1)/12$ dir. $m_1=[(b-1)/2+a]$ ve $m_2=(b^2-1)/12$ alalım. Buradan,

$$a=m_1 - \frac{\sqrt{(12m_2+1)}-1}{2} \quad \text{ve} \quad b=\sqrt{(12m_2+1)}$$

bulunur. O halde, a ve b 'nin tahminleri,

$$\hat{a}=\bar{x}-\frac{\sqrt{(12S^2+1)}-1}{2} \quad \text{ve} \quad \hat{b}=\sqrt{(12S^2+1)}$$

dir.



Şekil 7. Kesikli Düzgün Dağılımın o.f'nun grafiği.

2.8 Poisson Dağılımı

TANIM 2.8.1 Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x:\tau)=\exp(-\tau)\frac{\tau^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.1)$$

ise x r.d'ne Poisson dağılımına sahiptir denir.

Burada $f(x:\tau)$, belirtilmiş veya tanımlanmış bir zaman aralığında, tam x olayın olması olasılığıdır.

Poisson dağılımında $R_x=\{0,1,2,\ldots\}$ ve $0<\tau<\infty$ dır.

Poisson dağılımını, $P(x:\tau)$ veya $P_x(\tau)$ ve ilgili Poisson degişkenini, $P:\tau$ ile göstereceğiz. Poisson dağılımının τ parametresi, belirtilmiş bir zaman aralığında olayların ortalama oluş oranıdır.

TEOREM 2.8.1 Poisson dağılımının d.f,

$$F(x:\tau)=\exp(-\tau)\sum_{y=0}^{x}\frac{\tau^y}{y!} \qquad x=0,1,2,\ldots \qquad 0<\tau<+\infty \qquad (2.8.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\tau)=\exp(-\tau)\sum_{y=0}^{x}\frac{\tau^y}{y!}$$

bulunur.

TEOREM 2.8.2 Poisson dağılımının o.ç.f,

$$P(t:\tau)=\exp\{\tau(t-1)\} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.4)'deki eşitliği kullanarak,

$$P(t:\tau)=\exp(-\tau)\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\tau t)^x}{x!}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\tau t)^x}{x!}=\exp(\tau t)$$ dir. O halde,

$$P(t:\tau)=\exp\{\tau(t-1)\} \qquad 0<\tau<\infty$$

bulunur.

TEOREM 2.8.3 Poisson dağılımının m.ç.f,

$$M(t:\tau)=\exp\{\tau(\exp(t)-1)\} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\tau)=\exp(-\tau)\sum_{x=0}^{n}\frac{(\tau\exp(t))^x}{x!}$$

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{(\tau\exp(t))^x}{x!} = \exp(\tau\exp(t))$$ dir. O halde,

$$M(t:\tau)=\exp\{\tau(\exp(t)-1)\} \qquad 0<\tau<\infty$$

bulunur.

TEOREM 2.8.4 Kesikli tipteki bir x r.d, Poisson dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\tau \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M'(t)=\tau\exp\{\tau(\exp(t)-1)+t\}$$

dir. O halde,

$$E(x)=\tau \qquad 0<\tau<\infty$$

bulunur.

TEOREM 2.8.5 Kesikli tipteki bir x r.d, Poisson dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\tau \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=\exp\{\tau(et-1)\}[\tau^2\exp(2t)+\tau\exp(t)]$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\tau^2+\tau \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.6.a)$$

elde edilir.

(2.1.6.a)'da, (2.8.6.a) ve (2.8.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\tau$$

bulunur

<u>TEOREM 2.8.6</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Poisson dağılımına sahip ise,

$SS(x)=\sqrt{\tau} \quad 0<\tau<\infty$ (2.8.7)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (2.8.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{\tau}$

bulunur.

<u>TEOREM 2.8.7</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Poisson dağılımına sahip ise α_3, ile gösterilen çarpıklığı,

$\alpha_3=1/\sqrt{\tau} \qquad 0<\tau<\infty$ (2.8.8)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}|_{t=0}=M'''(t)|_{t=0}$ dir.

$M'''(t)=\tau\exp\{\tau(\exp(t)-1)+t\}[\tau^2\exp(2t)+3\tau\exp(t)+1]$

dir. O halde,

$E(x^3)=\tau(\tau^2+3\tau+1)$ (2.8.8.a)

elde edilir.

(2.1.8.a)'da, (2.8.8.a) , (2.6.6.a) ve (2.8.5) yerine konulduğunda,

$\mu_3=\tau$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3= 1/\sqrt{\tau} \qquad 0<\tau<\infty$

bulunur.

<u>TEOREM 2.8.8</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Poisson dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$\alpha_4=3+(1/\tau)$ (2.8.9)

dir.

İSPAT: (1.5.2.b)'den, $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}|_{t=0}=M^{(iv)}(t)|_{t=0}$ dır.

$M^{(iv)}(t)=\tau\exp\{\tau(\exp(t)-1)+t\}[\tau^3\exp(3t)+6\tau^2\exp(2t)+7\tau\exp(t)+1]$

dir. O halde,

$E(x^4)=\tau(\tau^3+6\tau^2+7\tau+1)$ (2.8.9.a)

elde edilir.

(2.1.9.a)'da, (2.8.9.a), (2.8.8.a), (2.8.6.a) ve (2.8.5) yerine konulduğunda,

$\mu_4 = 3\tau^2 + \tau$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4 = 3 + 1/\tau$

bulunur.

<u>TEOREM 2.8.9</u> Poisson Dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t) = \exp\{\tau(\exp(it)-1)\} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.10)$$

dir.

İSPAT: (1.7.6.a)'daki eşitliği kullanarak, (2.8.4)'de, t yerine it alındığında,

$\Phi(t) = \exp\{\tau(\exp(it)-1)\} \qquad 0<\tau<\infty$

bulunur.

<u>TEOREM 2.8.10</u> Poisson Dağılımının modu,

$$\tau - 1 \leq x < \tau \qquad (2.8.11)$$

dir.

İSPAT: (2.8.1)'deki o.f alalım ve $\dfrac{f(x)}{f(x-1)}$ oranına bakalım.

$$f(x) = \exp(-\tau)\frac{\tau^{x}}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots \quad 0<\tau<\infty$$

$$f(x-1) = \exp(-\tau)\,\frac{\tau^{x}x}{x!}$$

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = \frac{\tau}{x}$$

bulunur.

$f(x) > f(x-1)$ ise f fonksiyonu artandır $\Leftrightarrow \tau > x$.

1) τ bir tamsayı değilse, $x \leq \tau$ için $f(x)$ artandır. $x>\tau$ için $f(x)$ azalandır.

2) τ bir tamsayı ise, $x=m$'de $f(x)$ maksimumdur. $f(x)=f(x-1)$ dır. O halde, $x=\tau-1$ $f(x)$ fonksiyonunu maksimum yapan ikinci noktadır.

Sonuç olarak, $\tau-1\leq x<m$ bulunur.

2.8.1 Poisson Dağılımının Uygulama Alanları

Poisson dağılımı, sabit bir oranda olan bağımsız olayların oluşumunu göstermede kullanılır.

Belirtilmiş bir zaman aralığında, bir mağazaya gelecek tam x tüketicinin olasılığı, bir Binomial modele uymaz. Bunun nedenlerini şöyle sıralayabiliriz. Birinci olarak, örneklem hacminin belli olmayışıdır. Bir kasabadaki mağazanın müşterileri, o kasabanın yaşayanları, komşu kasabada yaşayanlar veya tüm şehirde , hatta ülkedeki kimseler olabilir. İkinci olarak, müşteriler mağazaya tek olarak değilde, birden fazla olarak veya guruplar halinde gelebilirler. Yani herbir denemenin olasılığı eşit değildir.

Herbir denemenin olasılığı ve toplam deneme sayısı yerine, tanımlanmış yada belirli bir zaman aralığında gelenlerin sayısının ortalaması, uygun olabilir. Bu da Poisson Dağılımını, istatistiksel bir model olarak tanımlamada kullanılan bilgilerdir.

Poisson Dağılımı, eşit zaman aralıklarında veya eşit alanlarda yada eşit hacimlerde olan olayların sayısını gösterir. Olaylar bağımsızdırlar ve sabit bir ortalama oranda olurlar.

Bu olaylara örnekler olarak:

1) Tanımlanmış bir zaman aralığında, bir radyoaktif kaynaktan yayılan alfa parçaçıklarının sayısı.

2) Tanımlanmış bir zaman aralığında olan trafik kazalarının sayısı.

3) Bir günde telefon santraline gelen bağlantı isteklerinin sayısı.

4) Sabit alanlar üzerindeki veya hacimler içerisindeki olaylar ki bu olaylar, maddenin benzer parçacıklarında kusurların sayısını kapsarlar.

a- Lam serisi üzerindeki bakterilerin sayısı.

b- İkinci dünya savaşı esnasında Londra' nın eşit bölgelerine düşen bombaların sayısı.

Poisson Dağılımı için şartlar bozulduğunda yada gerekler sağlanmadığında, örneğin mağazaya müşterilerin guruplar halinde gelmesi gibi, bir Poisson modeliyle hesaplanan olasılıklar doğru olmayacaktır.

Bir Poisson dağılımı için varsayımların uygun olup olmadığını tahmin edemediğimizde, uygun veriler, modeli hesaplamada kullanılabilir. Eğer Poisson Dağılımı yeterli bir gösterim oluşturmuyorsa, değişik modellere bakılır.

Mümkün alternatif model, Negatif Binomial Dağılımıdır. Bu model, olayların oluşum oranları τ nın sabit olmadığı durumlarda uygulanır.

2.8.2 Poisson Dağılımının Parametre Tahmini

Poisson Dağılımının τ parametresinin, maksimum likelihood tahmin edicisini hesaplayalım.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ τ parametreli Poisson dağılımdan alınmış n hacimlik rasgele bir örneklem olsun.

x_i i=1,2,...,n'lerin o.o.f,

$$f(x_1,\ldots,x_n:\tau)=\frac{\tau^{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \exp(-n\tau)\right)}}{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$L(\tau)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n:\tau)$ olsun. L(p)'nin logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(p)\}= \ln(\tau)\sum_{i=1}^{n} x_i-n\tau-\ln\{\prod_{i=1}^{n} x_i\} \qquad 0<\tau<\infty \qquad (2.8.2.1)$$

(2.8.2.1)'in τ'ye göre türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$\frac{d[\ln\{L(\tau)\}]}{d\tau}=(1/\tau)\sum_{i=1}^{n}x_i-n=0$$

Buradan, τ'nın tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}=(\sum_{i=1}^{n}x_i)/n=\bar{x}$$

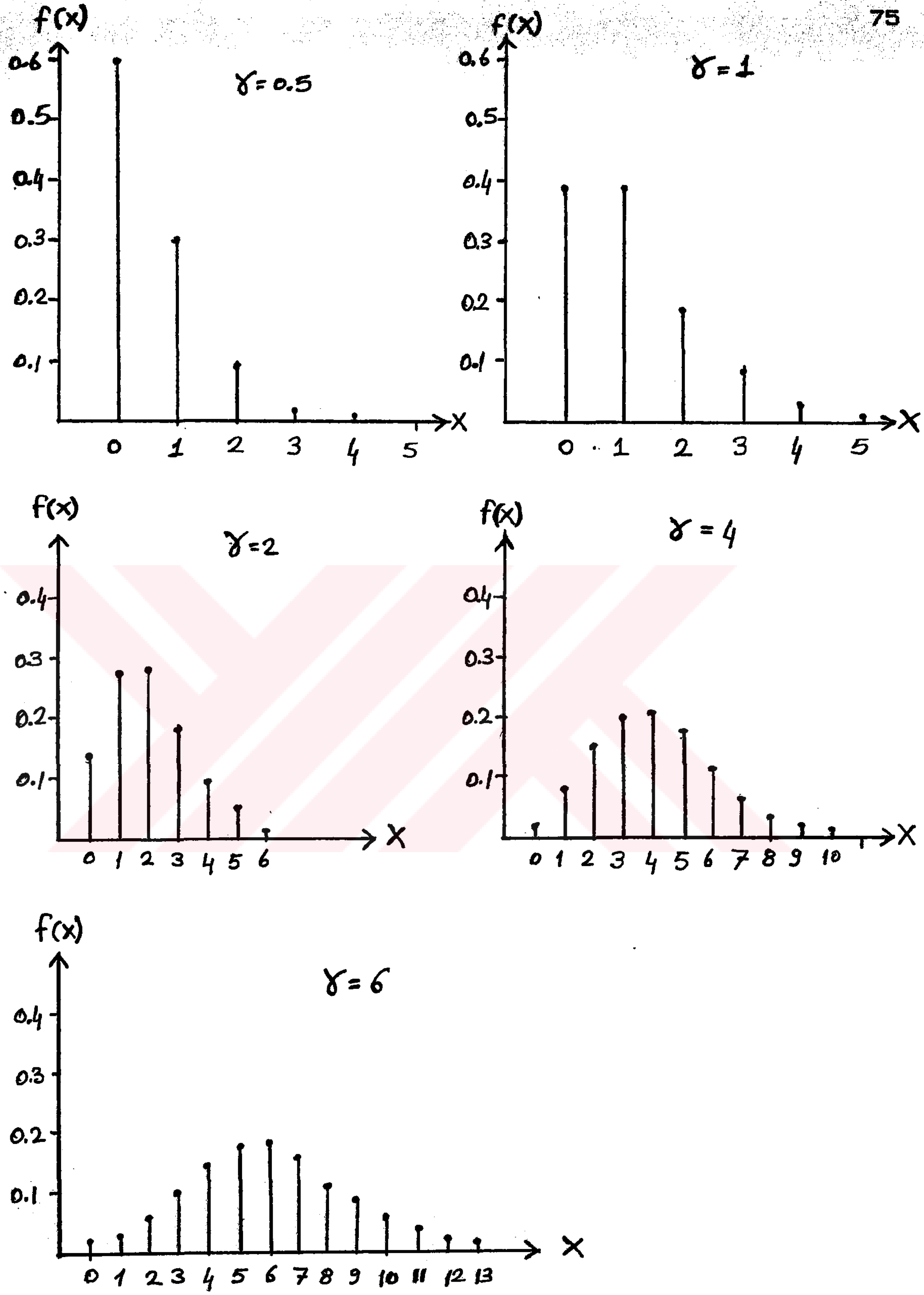
bulunur.

2.8.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

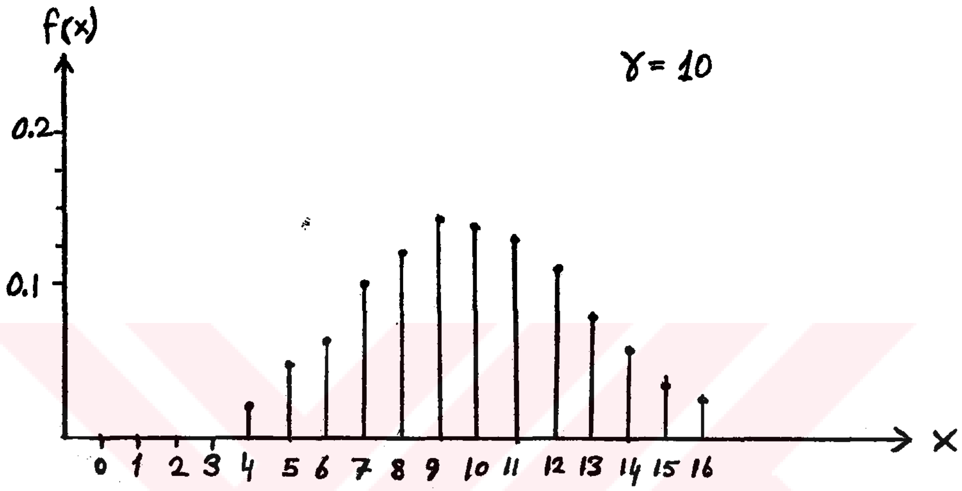
(Hastings ve Peacock, 1975 s:110)'da verilen bağıntılar:

1) $P_1:\tau_1+P_2:\tau_2+...+P_n:\tau_n \sim P:\tau_1+\tau_2+...+\tau_n$

dir.



Şekil 8. Poisson Dağılımının τ parametresinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.



Şekil 9. Poisson Dağılımının τ=10 parametre değeri için o.f'nun grafiği.

2.9 Yarı (Quasi) Binomial Dağılım

Bernoulli tipi denemelerin yapıldığı birçok deneylerde, gözlenen sonuçlar yada sayımlar tanım 2.2.1'deki Binomial modele uymazlar, Binomial modelden daha az yada daha fazla sapma (değişim) gösterirler. Bunun nedeni, yaşayan canlılar tarafından ve/veya onların karşılaştıkları özel koşullar nedeniyle kullanılan fazladan etkilerdir. Bu tip durumları Binomial modele uydurmak için, Binomial model, değişik yollarla genelleştirilmiştir. Bu amaçla (Consul, 1974) Yarı Binomial Dağılım denilen bir kab modeli geliştirdi.

Bir Binomial model, tanım 2.2.1'deki özellikleri sağlayan tekrarlı Bernoulli denemelerinden oluşur. Bir laboratuvar deneyinde, bir deneme için p'nin sabit olduğu gösterilebilir ve uygulamalarda kontrol edilebilir. Bununla birlikte, canlıların yaşadığı ortamlarda p'nin değeri, duruma göre değişir. Bu değişimler genlerin kalıtımından, psikolojik etkilerden, sosyal birliktelikten, daha önceki deneyimlerden, başarı için beklentiden veya karşılaşılan ortak bir tehlikeden, çevrede değişimler için gerekli olan düzenlemelerden kaynaklanabilir. Bu nedenle gözlenen sonuçlar yada sayımlar, bir Binomial modele uymazlar yada Binomial modelden az yada daha fazla sapma gösterirler. Binomial modeldeki bu daha az yada daha fazla sapmalara, extra Binomial sapması denilir. (Consul, 1974) bir oyuncunun önceden belirlediği bir taktiğe dayalı basit bir kap modeli geliştirdi ve kesikli tipteki bir x r.d için Yarı Binomial dağılımı elde etti.

<u>TANIM 2.9.1</u> Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x;m,p,\emptyset)=\binom{m}{x}p(p+x\emptyset)^{x-1}(1-p-x\emptyset)^{m-x} \qquad (2.9.1)$$

$$x=0,1,2,3,\ldots,m\ ,\ 0\le p\le 1\ ,-\frac{p}{m}<\emptyset<\frac{1-p}{m}\ ,\ q=1-p$$

ise x r.d'nine, Yarı Binomial Dağılımına sahiptir denir. (Consul, 1990)

Buna göre, tanım 2.2.1'deki yalnız 1 ve 4 koşullarını yani Binomial modelin sadece yarı koşulunu sağladığı için bu dağılıma Yarı Binomial Dagılım denilir. Buna göre Yarı Binomial Dağılımında,

1) Herbir deneme için yalnız iki olanaklı sonuç vardır.

2) Deneme sayısı sabittir.

koşulları sağlanır.

Yarı Binomial Dağılımını, $QBD(x:m,p,\varnothing)$ veya $QBD_x(m,p,\varnothing)$ ve ilgili Yarı Binomial değişkenini, $QBD:m,p,\varnothing$ ile göstereceğiz. x r.d, m denemedeki başarıların toplam sayısını gösterir.

Yarı Binomial Dağılımının m,p ve $\varnothing$ parametreleri sırasıyla; deneme sayısını, birinci denemedeki başarı olasılığını ve sonraki denemeler için başarı katsayısıdır. m denemede birinci deneme için başarı olasılığı p ve sonraki herbir denemedeki başarı olasılığı $p+x\varnothing$ dir. Bunun anlamı ise $\varnothing$'nin pozitif yada negatif oluşuna göre, başarının olasılığı artar veya azalır, aynı zamanda direk olarak başarı sayısı ile doğru orantılıdır.

$\varnothing=0$ özel halinde Yarı Binomial Dağılımı, bir Binomial modele indirgenir.

<u>TEOREM 2.9.1</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Yarı Binomial Dağılımına sahip ise "X=x+1"'deki olasılığı,

$$\mathrm{Prob}[X=x+1]=\frac{m-x}{x+1}\,\frac{p+x\varnothing}{1-p-x\varnothing}\left(1+\frac{\varnothing}{p+x\varnothing}\right)^{x}\left(1-\frac{\varnothing}{1-p-x\varnothing}\right)^{m-x-1}\mathrm{Prob}[X=x] \qquad (2.9.2)$$

$x=1,2,3,\ldots,m-1$

dir.

İSPAT: Bir x r.d 'nin "X=x"'deki olasılığı, (1.1.2)'den, $f(x)=\mathrm{Prob}[X=x]$ dir. O halde,

$$\mathrm{Prob}[X=x]=f(x:m,p,\varnothing)=\binom{m}{x}p(p+x\varnothing)^{x-1}(1-p-x\varnothing)^{m-x}$$

$$x=0,1,2,3,\ldots,m\ ,\ 0\le p\le 1\ ,\ -\frac{p}{m} < \theta < \frac{1-p}{m}\ ,\ q=1-p$$

elde edilir.

$$Prob[X=x+1]=\binom{m}{x+1}p(p+x\theta+\theta)^{x}(1-p-x\theta+\theta)^{m-x-1}$$

$$=\frac{m!}{(m-x-1)!(x+1)!}p(p+x\theta+\theta)^{x}(1-p-x\theta+\theta)^{m-x-1}$$

$$=\binom{m}{x}\frac{(m-x)}{(x+1)}p(p+x\theta+\theta)^{x}(1-p-x\theta+\theta)^{m-x-1}$$

pay ve paydayı, $(p+x\theta)^{x}(1-p-x\theta)^{m-x-1}$ ile çarpıp gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra,

$$=\binom{m}{x}p(p+x\theta)^{x-1}(1-p-x\theta)^{m-x}\frac{1}{1-p-x\theta}(p+x\theta)\left(1-\frac{\theta}{1-p-x\theta}\right)^{m-x-1}\left(1+\frac{\theta}{p+x\theta}\right)^{x}\frac{m-x}{x+1}$$

$$Prob[X=x+1]=\frac{m-x}{x+1}\,\frac{p+x\theta}{1-p-x\theta}\left(1+\frac{\theta}{p+x\theta}\right)^{x}\left(1-\frac{\theta}{1-p-x\theta}\right)^{m-x-1}Prob[X=x]$$

bulunur. Böylece olasılıklar, sıralı olarak hesaplanabilir.

(2.9.1)'in "X=0" deki olasılığı,

$$Prob[X=0]=f(0)=(1-p)^{m} \qquad (2.9.3)$$

dir.

<u>TEOREM 2.9.2</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Yarı Binomial Dağılımına sahip ise,

$$E(x)= mp\sum_{k=0}^{m-1}\theta^{k}(m-1)_{(k)} \qquad (2.9.4)$$

dir. (Consul 1990)

Burada $(m-1)_{(k)}=(m-1)(m-2)\ldots(m-k)$ ve $(m-1)_{(0)}=1$ dir.

1) $\emptyset>0$ için,

$$mp(1+\emptyset)^{m-1}<E(x)<mp(1+\emptyset)(1-\emptyset(m-2))^{-1}$$

2) $\emptyset<0$ için,

$$mp[1-\emptyset(m-1)]<E(x)<mp\{1+\emptyset(m-1)[1+\emptyset(m-2)]\}$$

dir.

Bunun anlamı; Yarı Binomial Dağılımının ortalaması yada beklenen değeri, $\emptyset$ azaldığında sola ve $\emptyset$ arttığında sağa kayar.

<u>TEOREM 2.9.3</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Yarı Binomial Dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= mp(m-1)p\emptyset-m(m-1)p^2\emptyset \sum_{k=0}^{m-1} \emptyset^k(m-2)_{(k)}[(k+2)^2-km]+$$
$$\frac{1}{2}\, m(m-1)p\emptyset \sum_{k=0}^{m-2} (k+2)(k+3)\emptyset^k(m-2)_{(k)}-$$
$$m^2(m-1)^2p^2\emptyset^2[\sum_{k=0}^{m-2} \emptyset^k(m-2)_{(k)}]^2 \qquad (2.9.5)$$

dir. (Consul, 1990)

Buna göre;

1) $p<(3/4)$ olduğunda, $\emptyset$ 'nin değerlerindeki artış ile Var(x) artar.

2) $p>(3/4)$ olduğunda, $\emptyset$ 'nin değerlerindeki artış ile Var(x) azalır.

Bunun anlamı da, Yarı Binomial Dağılımda $\emptyset$ ve p'nin değerlerine bağlı olarak pozitif veya negatif extra Binomial sapmaları olur.

<u>TEOREM 2.9.4</u> Yarı Binomial Dağılımının modu, M Yarı Binomial Dağılımının modunu göstertermek üzere,

$$\emptyset^2M^3-(2m-3)\emptyset^2M^2+\{1-p[1-(m-3)\emptyset]-2\emptyset-2m\emptyset[1+(1-m)\emptyset]\}M$$
$$+(1-p)^2-mp[1-p-(m+1)\emptyset]>0 \qquad (2.9.6)$$

eşitsizliğinin pozitif kökü ile, $(m+1)(p-2\emptyset)\{1-(m+3)\emptyset\}^{-1}$ arasındadır.

(2.9.6) eşitsizliğinin 0 ile $(m+1)(p-2\emptyset)/[1-(m+3)\emptyset]$ arasında bir gerçel kökü vardır. Bu kök, M için bir alt sınırdır.

2.9.1 Yarı Binomial Dağılımın Uygulama Alanları

Yarı Binomial Dağılımı, dört gurup klasik verilere uygulanmıştır. Bu uygulamalar, daha önce bu dört guruba uygulanan en iyi modellerle karşılaştırılmıştır.

Bu dört gurup veri:

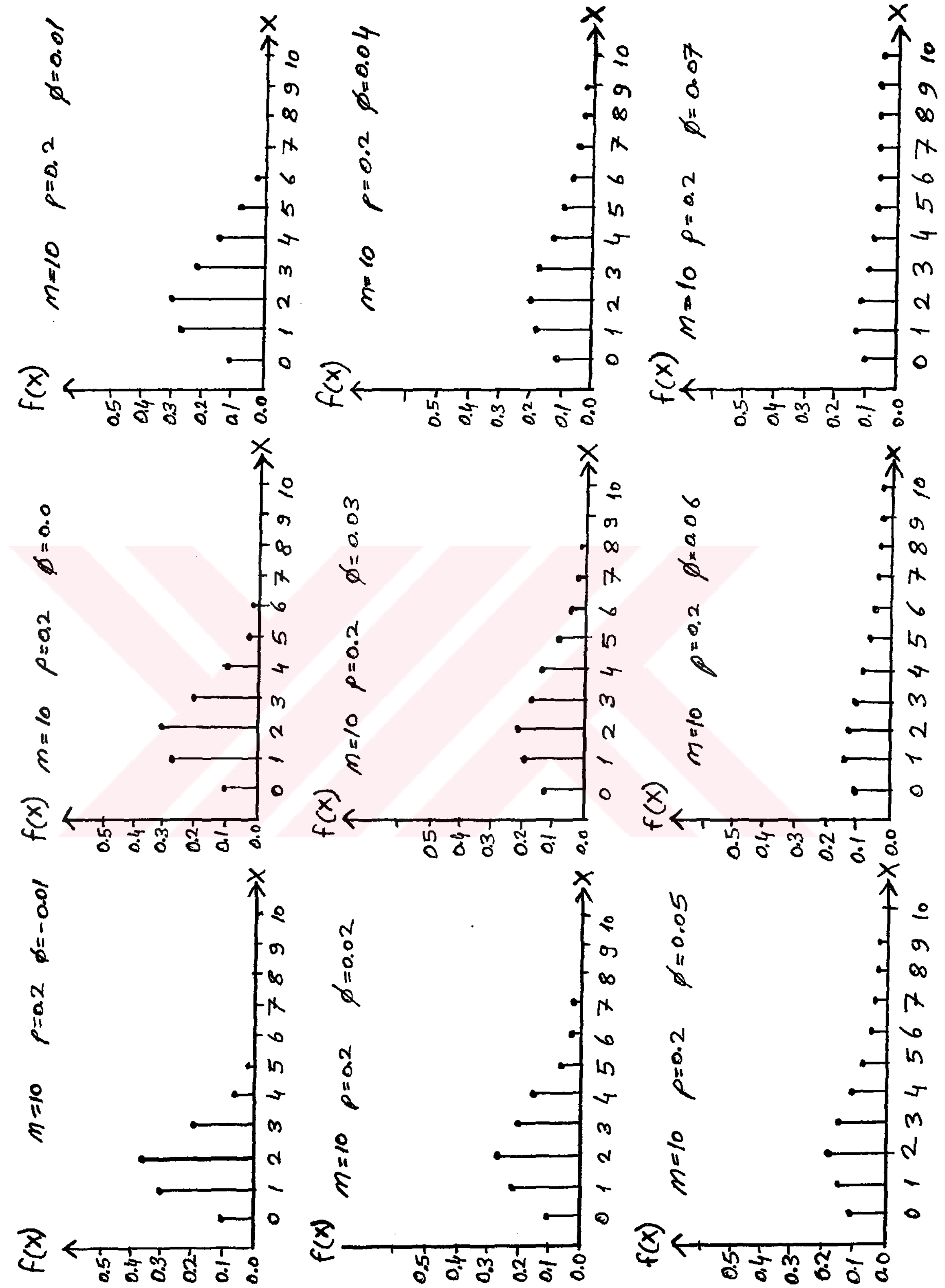
1) Haemacytometer 'in 400 karesinde gözlenen maya hücrelerinin dağılımına uygulama. (Crow ve Bardwell, 1963) tarafından çalışılmıştır.

2) Avrupa mısır üretimi üzerine McGuire, Brindley ve Bancroft 'un verilerine uygulama. (Crow ve Bardwell, 1963) tarafından çalışılmıştır.

3) 7640 Lespedeza Capitata bitkisi üzerine, Beal ve Rescia 'nın verilerine uygulama. (Katti ve Gurland, 1962) tarafından çalışılmıştır.

4) Dakikanın 1/8 oranı bir aralıkta, bir polonium çubuğu tarafından emilen alfa parçaçıklarının sayısının dağılımı üzerine, Rutherford ve Geiger ' in verilerine uygulama. (Crow ve Bardwell, 1963) tarafından çalışılmıştır.

uygulamalarından oluşmaktadır.



Şekil 10. Yarı Binomial Dağılımının m, p ve Ø parametrelerinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

2.10 Geeta Dağılımı

(Consul, 1990) tarafından, pozitif tamsayılar kümesi üzerinde yeni bir kesikli tip dağılım tanımlanmıştır. Bu dağılıma Geeta dağılımı denilmiştir.

Kesikli tipte bilinen üç L-şekilli veya J-şekilli dağılım vardır. Bunlar, Logaritmik Seri dağılımı, Kesikli Pareto Dağılımı ve Yale Dağılımıdır. (Johnson ve Kotz, 1969) Bu üç L-şekilli veya J-şekilli dağılımların bir tek parametreleri vardır. Bu nedenle de karmaşık veri kümelerinin ihtiyaçlarını karşılamada yeterli değildir.

Yeni tanımlanan Geeta dağılımının, iki parametresi vardır. Geeta dağılımı L-şekilli veya J-şekillidir. Geeta dağılımı diğer L-şekilli veya J-şekilli modellerden daha kullanışlıdır.

<u>TANIM 2.10.1</u> Kesikli tipteki bir x r.d'nin o.f,

$$f(x;\theta,\beta)=\frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x}\theta^{x-1}(1-\theta)^{\beta x-x} \qquad (2.10.1)$$

$$x=1,2,3,\ldots \qquad 0<\theta<1 \qquad 1<\beta<1/\theta$$

ise x r.d'ne Geeta dağılımına sahiptir denir.

Geeta dağılımında $R_x=\{1,2,3,\ldots\}$, $0<\theta<1$ ve $1<\beta<1/\theta$ dir. Buradan her $x\in R_x$ için $f(x;\theta,\beta)\geq 0$ bulunur. Dolayısıyla (1.1.2.a) gerçeklenir. $f(x;\theta,\beta)$'in (1.1.2.b)'yi gerçeklediğini gösrelim. Bunun için, Geeta dağılımının θ parametresinin $\theta=u(1-\theta)^{1-\beta}$, $\beta>1$ dönüşnümüyle Lagrange açılımını yapacağız.

θ'nın Lagrange açılımı,

$$\theta=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{u^x}{x!}\frac{d^{x-1}}{d\theta^{x-1}}\left[(1-\theta)^{x-\beta x}\right]_{\theta=0} \qquad (2.10.2)$$

dır.

$$\theta=\frac{u^1}{1!}+\frac{u^2}{2!}\frac{d}{d\theta}\left[(1-\theta)^{2(1-\beta)}\right]_{\theta=0}+\frac{u^3}{3!}\frac{d^2}{d\theta^2}\left[(1-\theta)^{3(1-\beta)}\right]_{\theta=0}+\ldots$$

dır.

$$T_0=\frac{d^0}{d\emptyset^0}\left[(1-\emptyset)^{1-\beta}\right]_{\emptyset=0}=1$$

$$T_1=\frac{d}{d\emptyset}\left[(1-\emptyset)^{2(1-\beta)}\right]_{\emptyset=0}=2(\beta-1)$$

$$T_2=\frac{d^2}{d\emptyset^2}\left[(1-\emptyset)^{3(1-\beta)}\right]_{\emptyset=0}=3(\beta-1)(3\beta-2)$$

$$T_3=\frac{d^3}{d\emptyset^3}\left[(1-\emptyset)^{4(1-\beta)}\right]_{\emptyset=0}=4(\beta-1)(4\beta-3)(4\beta-2)$$

.

.

.

O halde,

$$\emptyset=\frac{u^1}{1!}1+\frac{u^2}{2!}(2\beta-2)+\frac{u^3}{3!}(3\beta-3)(3\beta-2)+\frac{u^4}{4!}(4\beta-4)(4\beta-3)(4\beta-2)+\ldots \tag{2.10.3}$$

$\emptyset=u(1-\emptyset)^{1-\beta} \Rightarrow u=\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}$ dir.

(2.10.3)'de, u'nun değeri yerine konulduğunda,

$$\emptyset=\frac{\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}}{1!}1+\frac{[\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}]^2}{2!}(2\beta-2)+\frac{[\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}]^3}{3!}(3\beta-3)(3\beta-2)$$

$$\ldots+\frac{[\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}]^y}{y!}(y\beta-y)(y\beta-y+1)\ldots(\beta y-2)+\ldots \qquad 1\leq y<\infty$$

$$\emptyset=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{[\emptyset(1-\emptyset)^{\beta-1}]^x}{x!}(\beta x-x)(\beta x-x+1)\ldots(\beta x-2)$$

$$\emptyset=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(\beta x-x)(\beta x-x+1)\ldots(\beta x-2)\emptyset^x(1-\emptyset)^{\beta x-x}}{x!}$$

pay ve paydayı $(\beta x-1)(\beta x-x-1)!$ ile çarpalım.

$$\theta=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\beta x-1}\;\frac{123\ldots(\beta x-x-1)(\beta x-x)(\beta x-x+1)\ldots(\beta x-2)(\beta x-1)}{(\beta x-x-1)!\qquad x!}\;\theta^{x}(1-\theta)^{\beta x-x}$$

bazı düzenlemelerden sonra,

$$\theta=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\beta x-1}\;\frac{(\beta x-1)!}{(\beta x-x-1)!\,x!}\;\theta^{x}(1-\theta)^{\beta x-x}$$

$$\theta=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{\beta x-x}$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{\beta x-x}=1 \qquad (2.10.4)$$

(2.10.4) eşitliginin sol tarafındaki ifade (2.10.1)'deki o.f'na eşittir.

Geeta dağılımını, GE$(x:\theta,\beta)$ veya GE$_x(\theta,\beta)$ ve ilgili Geeta değişkenini, GE$:\theta,\beta$ ile göstereceğiz. Geeta dağılımının parametreleri θ ve β dir. Geeta dağılımının (2.10.1)'deki o.f'nunda, $\beta\to 1$ iken bir tek $x=1$ noktasında bozulur.

Aynı zamanda Geeta dağılımı, $x=1$ noktasında, θ ve β parametrelerinin tüm değerleri için bir maksimumu vardır. Geeta dağılımı L-şekillidir.

<u>TEOREM 2.10.1</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Geeta dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{1-\theta}{1-\beta\theta} \qquad (2.10.5)$$

dir. (Consul 1990)

<u>TEOREM 2.10.2</u> kesikli tipteki bir x r.d, Geeta dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{(\beta-1)\theta(1-\theta)}{(1-\beta\theta)^{3}} \qquad (2.10.6)$$

Eger,

$$\mu = E(x) = \frac{1-\emptyset}{1-\beta\emptyset} \tag{2.10.7}$$

ise varyansın μ cinsinden ifadesi,

$$Var(x) = \frac{\mu(\mu-1)(\beta\mu-1)}{(\beta-1)} \tag{2.10.8}$$

dir. (Consul 1990)

<u>TEOREM 2.10.3</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Geeta dağılımına sahip ise, "X=x+1"'deki olasılığı,

$$Prob[X=x+1] = \prod_{i=1}^{k} \left[1 + \frac{\beta}{k\beta-i}\right]\left[\frac{\mu-1}{\mu}\right]\left[\frac{(\beta-1)\mu}{\beta\mu-1}\right]^{n} Prob[X=x] \tag{2.10.9}$$

$k=2,3,4,...$

dır. (Consul, 1990)

özel olarak,

$$f(1) = (1-\emptyset)^{n-1} \tag{2.10.9.a}$$

dir.

(2.10.9.a)'daki ifadeyi, μ cinsinden yazacak olursak,

(2.10.7)'den, $\mu = \dfrac{1-\emptyset}{1-\beta\emptyset}$ dir. O halde,

$$
\begin{aligned}
(1-\emptyset) &= \mu(1-\beta\emptyset) \\
&= \mu(1-\beta+\beta-\beta\emptyset) \\
&= \mu[(1-\beta)+\beta(1-\emptyset)] \\
&= \mu(1-\beta)+\mu\beta(1-\emptyset)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan,

$$(1-\emptyset) = \frac{(\beta-1)\mu}{(\mu\beta-1)} \tag{2.10.9.b}$$

elde edilir.

(2.10.9.a)'da, (2.10.9.b) yerine koyulduğunda,

$$f(1) = Prob[X=1] = \left[\frac{(\beta-1)\mu}{(\mu\beta-1)}\right]^{n-1}$$

bulunur. Aynı şekilde,

$$f(2)=Prob[X=2]=\frac{\mu-1}{\mu}\left[\frac{(\beta-1)\mu}{(\mu\beta-1)}\right]^{2\beta-1}$$

dir.

<u>TEOREM 2.10.4</u> Geeta dağılımının o.ç.f,

$$P(t;\theta,\beta)=\sum_{x=1}^{\infty} t^{x}\frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x}\theta^{x-1}(1-\theta)^{\beta x-x}$$

$x=1,2,3,\ldots \qquad 0<\theta<1 \qquad 1<\beta<1/\theta$

dir. (Consul, 1990)

<u>TEOREM 2.10.5</u> Kesikli tipteki bir x r.d, Geeta dağılımına sahip ise, ortalama etrafındaki k-ıncı momenti,

$$\mu_k=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x}\theta^{x-1}(1-\theta)^{\beta x-x}(x-\mu)^{k} \qquad (2.10.10.a)$$

ve (k+1)-inci momenti için sıralı bağıntı,

$$\mu_{k+1}=\mu\theta\left[\frac{d\mu_k}{d\theta}+\left(\frac{k(\beta-1)}{(1-\beta\theta)^2}\right)\mu_{k-1}\right] \qquad k=2,3,\ldots \qquad (2.10.10.b)$$

$\mu_1=0$ ve $\mu_2=\sigma^2$ dir.

(2.10.10.b) de k=2 ve k=3 alındığında sırasıyla,

$$\mu_3=\frac{(1-\theta)\theta(\beta-1)[1+2\beta\theta-2\theta-\beta\theta^2]}{(1-\beta\theta)^5}$$

ve

$$\mu_4=\frac{3(\beta-1)^2\theta^2(1-\theta)^2}{(1-\beta\theta)^6}+\frac{(\beta-1)\theta(1-\theta)}{(1-\beta\theta)^7}[1-6\theta+6\theta^2+\beta\theta(8-18\theta+8\theta^2)+\beta^2\theta^2(6-6\theta+\theta^2)]$$

bulunur.

2.10.1 Geeta Dağılımının Parametre Tahminleri

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri μ ve β parametreli Geeta dağılımına sahip, n hacimlik rastgele bir örneklem olsun.

Momentleri karşılaştırma metodu ile μ ve β 'nın tahmin edicilerini hesaplayalım.

$m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ sırasıyla, (2.6.2) ve (1.6.5)'deki gibi alınsın. Geeta dağılımının beklenen değeri ve varyansı, (2.10.5) ve (2.10.8)'den sırasıyla, $E(x)=\dfrac{1-\emptyset}{1-\beta\emptyset}$ ve

$$Var(x)=\frac{\mu(\mu-1)(\beta\mu-1)}{(\beta-1)}$$ dir. $$m_1=\frac{1-\emptyset}{1-\beta\emptyset}$$ ve

$$m_2=\frac{\mu(\mu-1)(\beta\mu-1)}{(\beta-1)}$$ alalım. Buradan,

$$\mu=m_1 \quad \text{ve} \quad \beta=\frac{m_2-m_1(m_1-1)}{m_2-m_1^2(m_1-1)}$$

bulunur. O halde, μ ve β'nın tahminleri,

$$\hat{\mu}=\bar{x} \quad \text{ve} \quad \hat{\beta}=\frac{S^2-\bar{x}\ (\bar{x}-1)}{S^2-\bar{x}^{\,2}(\bar{x}-1)}$$

dır.

2.10.2 Geeta Dağılımının Uygulama Alanları

Geeta dağılımının uygulaması olarak, (Consul, 1990) tarafından oluşturulan iki modelden birincisi olan kap modelini ele alacağız.

Kap modelleri genellikle verilen bir modelin oluşturulması için prensipleri açıklamak amacıyla kurulur. Kap modellerinin birçok tipi (Johnson ve Kotz, 1977), (Consul, 1974), (Consul ve Mittal, 1975) ve (Famoge ve Consul, 1988) tarafından detaylı bir şekilde tanımlanmıştır.

Bu kesimde ele alacağımız kab modelini (Consul, 1990), x kesikli tip r.d'nin o.f'nunu, (2.10.1)'deki olan Geeta dağılımı olarak tanımlamış ve çalışmıştır.

(Consul, 1990) tarafından tanımlanan kab modeli, A ve B gibi iki kab sistemine dayanır. Burada A kabında belirli

1) Oyuncu $\beta \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı seçerek stratejiyi belirler.

2) Oyuncu A kabından topları tek tek çeker ve aynı renk top, B kabına koyulur. B kabındaki beyaz topların sayısı, B kabındaki siyah topların sayısını $(\beta-1)$ geçene kadar top çekme işlemine devam edilir. Bu koşul bozulduğunda oyuncu oyunu kaybeder.

3) B kabındaki siyah ve beyaz topların sayısı sırasıyla, $(x-1)$ ve $(\beta-1)x$ olduğunda $x=1,2,3,...$ olmak üzere, oyuncu oyunu kazanmış ilan edilir.

Şimdi x r.d 'nin değişik değerleri için, oyunu kazanma olasılığını hesaplayalım. Burada Bernoulli tipi denemeler yapılmaktadır. Bernoulli denemesinde siyah top çekme olasılığı $\emptyset$ ve beyaz top çekme olasılığı $(1-\emptyset)$ dir.

$f(x=1)=$Prob[$(\beta-1)$ beyaz top ve 0 siyah top çekme]

$$=(1-\emptyset)^{(\beta-1)} \qquad (2.10.3.1)$$

$f(x=2)=$Prob[$(2\beta-2)$ beyaz top ve 1 siyah top çekme;
öyleki siyah top $(\beta-1)$-inci çekimde yapılmıştır.]

$$=\binom{\beta-1}{1}\emptyset(1-\emptyset)^{(2\beta-2)}=(\beta-1)\emptyset(1-\emptyset)^{(2\beta-2)} \qquad (2.10.3.2)$$

Bu işlemler x r.d'nin büyük değerlerinin tümü için kolay olmayacaktır. üçüncü koşula göre, $(x-1)$ siyah topla oyunu kazanmak için oyuncu toplam $(\beta-1)x+(x-1)=\beta x-1$ top çekmelidir.

Çekim yada deneme dizisindeki $(\beta-1)x$ beyaz topların herbirini, (-1) ve siyah topların herbirini, $(+1)$ ile gösterelim. İkinci koşula göre oyuncu, B kabındaki beyaz topların sayısı, $(\beta-1)(x-1)$'i geçtiği sürece oyunda kalabilir. Yani oyuncu $(x-1)$-inci siyah topu çekmeden önce en az $[(\beta-1)(x-1)+1]$ beyaz top çekmek zorundadır. Diğer bir ifadeyle, (-1) ve $(+1)$'lerin dizisinde, Sx ile gösterilen kısmi toplamı $\leq x-1-[(\beta-1)(x-1)+1]=(2-\beta)(x-1)-1$ olmalıdır. Bu nedenle oyuncu,

$$S_x \leq (2-\beta)(x-1)-1 \qquad x=1,2,3,... \qquad (2.10.3.3)$$

olduğu sürece oyunda kalabilir.

Mümkün bir kazanma için tam (x−1) siyah top ve y beyaz top çekme olasılığını,

$f(x-1,y)=\emptyset^{x-1}(1-\emptyset)^{y}$ $x=1,2,...$ $y=0,1,...$ (2.10.3.4)

ile gösterelim.

Burada $f(x-1,y)$, y'nin daima $(\beta-1)(x-1)$ geçme dizisinin sayısını gösterir. Buna göre,

$f(x-1,y)=0$ $y\leq(\beta-1)(x-1)$ (2.10.3.5)

dir. $y=(\beta-1)x$ olduğunda oyun sona erer ve oyuncu kazanır. Yani oyunu kazanma olasılıkları,

$Prob[X=x]=f(x-1,\beta x-x)\emptyset^{x-1}(1-\emptyset)^{\beta x-x}$ (2.10.3.6)

dır. Burada $x=1,2,3,...$ dir.

Bir dizideki en son çekim bir beyaz top (−1) veya bir siyah top (+1) olacağından, eşitlikleri

$f(x-1,y)=f(x-2,y)+f(x-1,y-1)$ $y>(\beta-1)(x-1)+1$ (2.10.3.7)

ve

$f(x-1,y)=f(x-2,y)$ $y=(\beta-1)(x-1)+1$ (2.10.3.8)

şeklinde yazabiliriz. Birinci koşuldan dolayı,

$f(0,y)=f(1,0)=1$ (2.10.3.9)

olduğunu biliyoruz. (2.10.3.5)'den, tüm x'ler için

$f(x-1,(\beta-1)(x-1))=0$ (2.10.3.10)

sonucunu çıkarabiliriz. (2.10.3.7) ve (2.10.3.8)'in ardışık uygulamalarıyla,

$$f(1,y)=\sum_{i=\beta}^{y}f(0,i)+f(1,\beta-1)$$

$=y-(\beta-1)$ {(2.10.3.9) ve (2.10.3.10)'dan}

$$=\frac{y-(\beta-1)}{y+1}\binom{y+1}{1} \quad (2.10.3.11)$$

benzer şekilde,

$$f(2,y)=f(1,y)+f(2,y-1)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}f(1,y-i)+f(2,2\beta-2)$$ burada, $k=y-2\beta+1$ dir.

$$=\sum_{i=0}^{k} f(y-i-(\beta-1)) \quad \{(2.10.3.10) \text{ ve } (2.10.3.11)\text{'den}\}$$

$$=\frac{y-2(\beta-1)}{y+2}\binom{y+2}{2} \qquad (2.10.3.12)$$

Verilen bazı f(x,y)'ler için aşağıdaki bağıntıyı ele alalım.

$$f(x,y) = \frac{y-x(\beta-1)}{y+x}\binom{y+x}{x} \qquad (2.10.3.13)$$

(2.10.3.7), (2.10.3.8) ve (2.10.3.13) kullanılarak x'in daha büyük değerleri için,

$$f(x+1,y)=\sum_{i=0}^{h} f(x,y-i) \qquad \text{burada, } h=y-x\beta+x-\beta \text{ dir.}$$

$$= \sum_{i=0}^{h} \frac{y-i-x(\beta-1)}{y-i+x}\binom{y-i+x}{x} \qquad \{(2.10.3.13)\text{'den}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{h}\binom{y-i+x}{x} - \beta\sum_{i=0}^{h}\binom{y+x-1-i}{x-1}$$

Aşağıdaki birleştirme formülünü kullanarak,

$$\sum_{i=0}^{h}\binom{n-1-i}{r-1} = \binom{n}{r} - \binom{n-1-h}{r}$$

yukarıdaki ifade,

$$f(x+1,y) = \frac{y-(x+1)(\beta-1)}{y+x+1}\binom{y+x+1}{x+1} \quad \text{şeklinde olur.}$$

Buda (2.10.3.13)'deki var sayıma benzerdir. Bu nedenle, x in tüm toplama değerleri için (2.10.3.13) sağlanır.

Şimdi (2.10.3.13)'den f(x-1,ßx-x) değerini (2.3.10.6)'da hesaplayalım. Oyunu kazanmak için olasılıklar,

$$f(x)=Prob[X=x]= \frac{1}{\beta x-1}\binom{\beta x-1}{x} \theta^{x-1}(1-\theta)^{\beta x-x} \qquad x=1,2,3,...$$

ile hesaplanır. Buda Geeta dağılımının (2.10.1)'deki o.f'dur.

ÖRNEK 3.10.2.1 Geeta dağılımının kab modelini bir uygulama üzerinde gösterelim.

Oyunun kuralları:

1) $\beta \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı seç.

2-a) A kabından tek tek top çek, çekilen topun rengine bak ve topu tekrar A kabına koy. Çekilen topla aynı renk topu B kabına koy.

2-b) B kabındaki beyaz topların sayısı > (β-1) B kabındaki siyah topların sayısı ise, top çekme işlemine devam et.

2-c) Bir oyuncunun (x-1) siyah topla oyunu kazanabilmesi için toplam, $x-1+(\beta-1)x=\beta x-1$ top çekmelidir.

3) B kabındaki siyah topların sayısı= x-1 ve B kabındaki beyaz topların sayısı= $\beta x-x$ olduğunda oyuncu oyunu kazanır.

x=1 olduğunda, β-1 beyaz, 0 siyah top için.
x=2 olduğunda, 2β-2 beyaz, 1 siyah top için.
x=3 olduğunda, 3β-3 beyaz, 2 siyah top için.
x=4 olduğunda, 4β-4 beyaz, 3 siyah top için.
x=5 olduğunda, 5β-5 beyaz, 4 siyah top için.

.
.
.

β=2 alalım, seçelim

x=1 olduğunda, 1 beyaz, 0 siyah top için.
x=2 olduğunda, 2 beyaz, 1 siyah top için.
x=3 olduğunda, 3 beyaz, 2 siyah top için.
x=4 olduğunda, 4 beyaz, 3 siyah top için.
x=5 olduğunda, 5 beyaz, 4 siyah top için.

.
.
.

β=3 alalım, seçelim

x=1 olduğunda, 2 beyaz, 0 siyah top için.
x=2 olduğunda, 4 beyaz, 1 siyah top için.
x=3 olduğunda, 6 beyaz, 2 siyah top için.

x=4 olduğunda, 8 beyaz, 3 siyah top için.

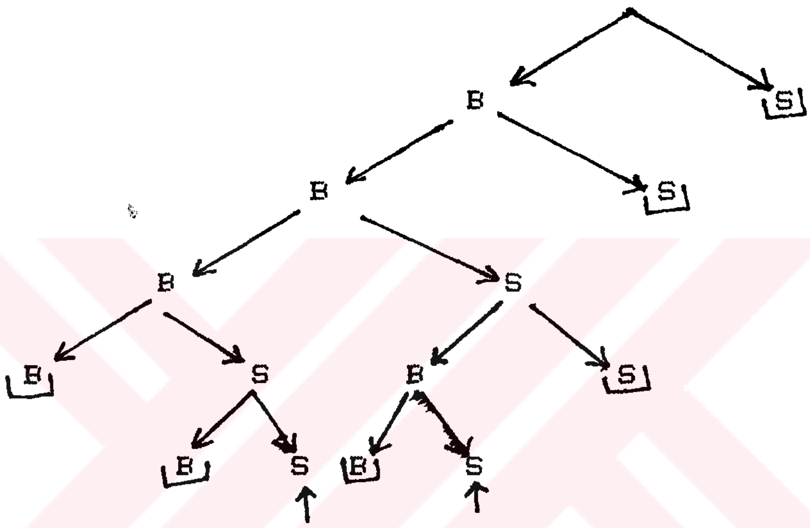
x=5 olduğunda, 10 beyaz, 4 siyah top için.

.

.

.

özel olarak, ß=2 alındığında, x=3 olsun. O halde oyuncu 3 beyaz, 2 siyah top için toplam 5 çekim yapacaktır.



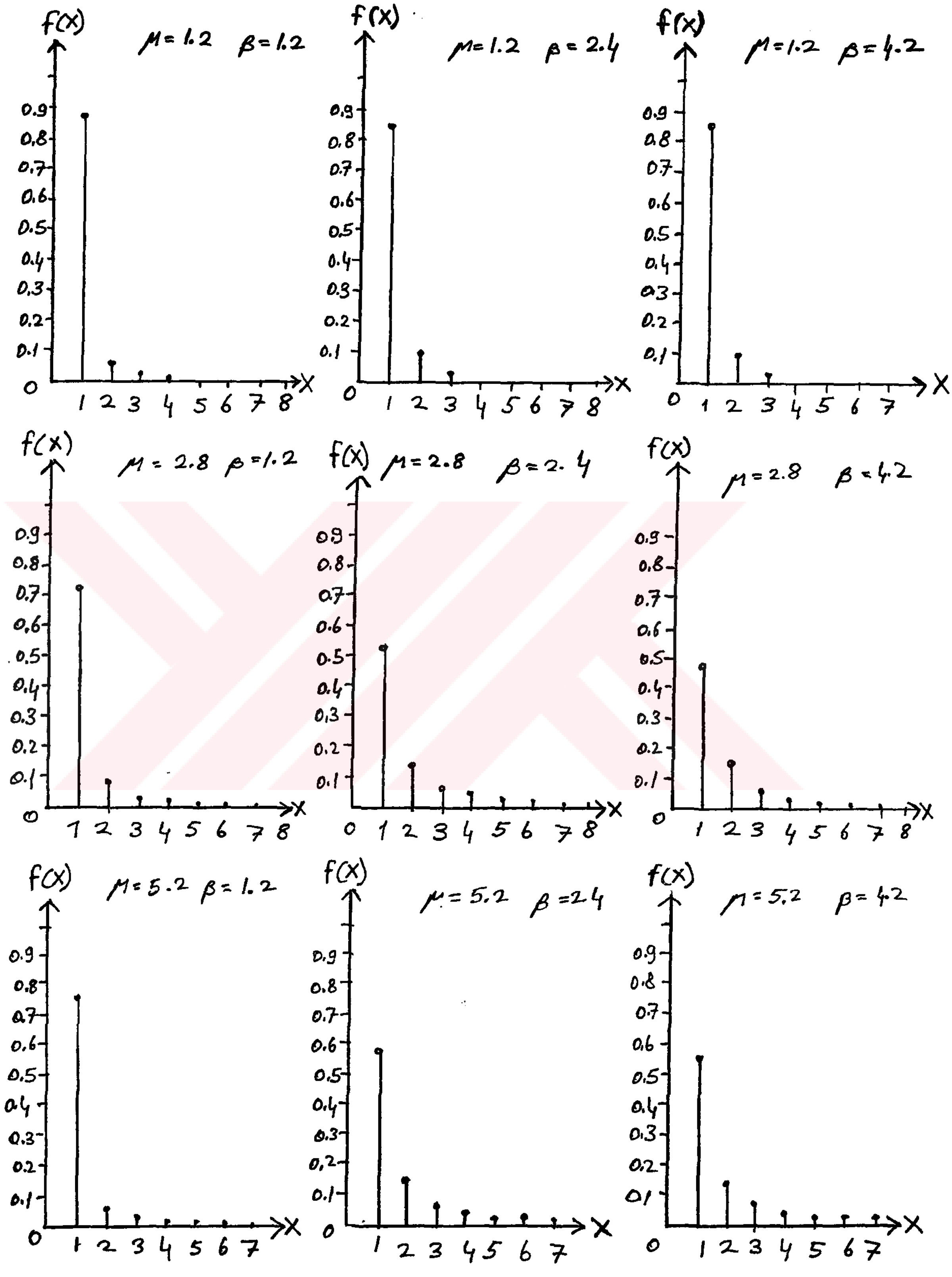
Şekil 11. ß=2 ve x=3 alındığında oyuncunun 3 beyaz ve 2 siyah top için toplam 5 çekimdeki kazanma dizileri.

Bu şekilde oyuncunun oyunu kazanabilmesi için toplam 2 dizi vardır. Bunlar (−1) beyaz, (+1) siyah topu göstermek üzere,

1) (−1)(−1)(−1)(+1)(+1)

2) (−1)(−1)(+1)(−1)(+1)

dizileridir.



Şekil 12. Geeta Dağılımının μ ve β parametrelerinin değişik değerlerine göre o.f'nun grafikleri.

3.BÖLÜM

SÜREKLİ TİP DAĞILIM MODELLERİ

Bu bölümde, sürekli tipteki dağılımları inceleyeceğiz.

3.1 Normal Dağılım

TANIM 3.1.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad (3.1.1)$$

$$-\infty < x < \infty \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \sigma > 0$$

ise x r.d'ne μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahiptir denir.

Normal dağılımı, $N(x:\mu,\sigma)$ veya $N_x(\mu,\sigma)$ ve ilgili değişkeni, $N:\mu,\sigma$ ile göstereceğiz. Burada μ ve σ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir. Normal dağılımın şekil parametresi yoktur. Tüm Normal dağılımlar aynı şekle sahip ve simetriktir.

(3.1.1)'de özel olarak $\mu=0$ ve $\sigma=1$ alınırsa, Standart Normal dağılım elde edilir.

TANIM 3.1.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (3.1.2)$$

ise x r.d'ne Standart Normal dağılıma sahiptir denir.

TEOREM 3.1.1 Normal dağılımın d.f,

$$F(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}du \qquad (3.1.3)$$

dur.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}du$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.2</u> Normal dağılımın m.ç.f,

$$M(t;\mu,\sigma)=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \tag{3.1.4}$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\mu,\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tx)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}dx \quad \text{dir.}$$

Bazı düzenlemelerden sonra,

$$M(t:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\exp\left\{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{[(x-\mu)-\sigma^2 t]^2}{2\sigma^2}\right\}dx \tag{3.1.4.a}$$

elde edilir.

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{[(x-\mu)-\sigma^2 t]^2}{2\sigma^2}\right\}dx \quad \text{olsun.}$$

$$a>0 \text{ ise, } I=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-(ax^2+bx+c)\}dx=\sqrt{(\pi/a)}\exp\left\{\frac{b^2-4ac}{4a}\right\} \tag{3.1.4.b}$$

dir. (Spiegel 1975, s:343)

(3.1.4.b)'den, $I_1=\sqrt{(2\pi)}\,\sigma$ elde edilir. Bu sonuç, (3.1.4.a)'da yerine koyulduğunda,

$$M(t;\mu,\sigma)=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Normal dağılıma sahip ise,

$$E(x)=\mu \qquad -\infty<\mu<\infty \tag{3.1.5}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}|_{t=0}=M'(t)|_{t=0}$ dır.

$$M'(t)=\exp\{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\}(\mu+\sigma^2 t)$$

dir. O halde,

$E(x)=\mu$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Normal dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=\sigma^2 \qquad \sigma > 0 \qquad (3.1.6)$$

dır.

İSPAT: (1.5.5.a)'dan $Var(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu'_1)^2 f(x)dx$ dir.

$$Var(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-2\mu'1\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx-\mu'^2_1$$

$$=E(x^2)-\{E(x)\}^2 \qquad (3.1.6.a)$$

dır. (1.5.1.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}|_{t=0}=M''(t)|_{t=0}$ dır.

$$M''(t)=\exp\{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\}[(\mu+\sigma^2 t)^2+\sigma^2]$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\mu^2+\sigma^2 \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \sigma > 0 \qquad (3.1.6.b)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.1.6.b) ve (3.1.5) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\sigma^2$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Normal dağılıma sahip ise,

$$SS(x)=\sigma \qquad \sigma > 0 \tag{3.1.7}$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.1.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sigma$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Normal dağılıma sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 0 \tag{3.1.8}$$

dır.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu_3=E[(x-\mu'_1)^3]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu'_1)^3 f(x)dx$ dir.

$$\mu_3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3 f(x)dx-3\mu'_1\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx+3\mu'^2_1\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx-\mu'^3_1$$

$$=E(x^3)-3E(x)E(x^2)+2\{E(x)\}^3 \tag{3.1.8.a}$$

dır. (1.5.1.b)'den, $\mu'_3=E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'''(t)\big|_{t=0}$ dır.

$$M'''(t)=\exp\{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\}[(\mu+\sigma^2 t)^3+3(\mu+\sigma^2 t)\sigma^2]$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\mu^3+3\mu\sigma^2 \qquad -\infty < \mu < \infty \quad \sigma > 0 \tag{3.1.8.b}$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.1.8.b), (3.1.6.b) ve (3.1.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=0$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Normal dağılıma sahip ise, α_4 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_4 = 3 \tag{3.1.9}$$

tür.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu_4 = E[(x-\mu'_1)^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu'_1)^4 f(x)dx$ dir.

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx - 4\mu'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx + 6\mu'^2_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 4\mu'^3_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx + \mu'^4_1$$

$$= E(x^4) - 4E(x)E(x^3) + 6\{E(x)\}^2 E(x^2) - 3\{E(x)\}^4 \tag{3.1.9.a}$$

dır. (1.5.1.b)'den, $\mu'_4 = E(x^4) = \frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\big|_{t=0} = M^{(iv)}(t)\big|_{t=0}$ dır.

$$M^{(iv)}(t) = \exp\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\}[(\mu+\sigma^2 t)\{(\mu+\sigma^2 t)^3 + 3(\mu+\sigma^2 t)\sigma^2\} + \{3(\mu+\sigma^2 t)^2\sigma^2 + 3\sigma^4\}]$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 \qquad -\infty < \mu < \infty \quad \sigma > 0 \tag{3.1.9.b}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.1.9.b), (3.1.8.b), (3.1.6.b) ve (3.1.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4 = 3\sigma^4$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4 = 3$

bulunur.

<u>TEOREM 3.1.8</u> Normal dağılımın modu ,

$$x = \mu \qquad -\infty < \mu < \infty \tag{3.1.10}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.1.1)'deki o.y.f'nün, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\mu$ bulunur. $x=\mu$ değeri için (3.1.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Normal dağılımın modu,

$x=\mu$

bulunur.

TEOREM 3.1.9 Normal dağılımın medyanı,

$$x=\mu \qquad -\infty < \mu < \infty \tag{3.1.11}$$

dır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{u-\mu}{\sigma})^2\}du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, $y=(u-\mu)/\sigma$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\{-\frac{1}{2}y^2\}dy=\frac{1}{2} \iff \frac{x-\mu}{\sigma}=0$$

dır. Buradan,

$x=\mu$

bulunur.

TEOREM 3.1.10 Normal dağılımın karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\mu,\sigma)=\exp(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}) \tag{3.1.12}$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.1.4)'de, t yerine it alındığında,

$$\Phi(t;\mu,\sigma)=\exp(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2})$$

bulunur.

TEOREM 3.1.11 Normal dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\mu,\sigma)=i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \tag{3.1.13}$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.1.12)'nin logaritması alındığında,

$$K(t;\mu,\sigma)=i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

bulunur.

3.1.1 Normal Dağılımın Uygulama Alanları

Normal dağılım tüm dağılımlar içerisinde, en yaygın olarak kullanılan bir dağılımdır. 1900 yıllarında, istatistiksel testlerin gelişmesiyle birlikte, matematiksel istatistiğin en önemli sonuçlarından biri olan merkezi limit teoreminin oluşturulması, Normal dağılımın önemini arttırmıştır.

Merkezi limit teoremi, herhangi bir dağılımdan alınmış n bağımsız gözlemin ortalamasının dağılımı, hatta sonlu ortalamalara ve varyanslara sahip n değişik dağılımın ortalamasının dağılımı, örneklemdeki gözlemlerin sayısı n büyüdüğünde, yani n sonsuza giderken, bir Normal dağılıma yakınsar fikridir.

Merkezi limit teoremi, her nekadar büyük hacimli örneklemler için geçerliysede, örneklem tek elemanlı olmadığı, örneklemin bir gurubunun varyansı, örneklemin diğer guruplarının varyansından çok daha büyük olmadığı ve örneklemin eleman dağılımları bir Normal dağılımdan fazla sapmadığı sürece, örneklem ortalaması bir Normal dağılıma yakınsar.

Merkezi limit teoremi, tesadüfi Normal değişkenler üretmek için bir teknik olarak kullanılır.

Merkezi limit teoreminin kullanılmasıyla ilgili olarak çok istasyonlu bir sistemde, deneme ve bakım faaliyetlerini kontrol etmek için gerekli toplam zaman örneğini inceleyebiliriz. (Hahn 1967, s:226)

<u>ÖRNEK 3.1.1.1</u> Çok istasyonlu bir sistemde, deneme ve bakım faaliyetleri çerçevesinde sistemi kontrol etmek için gerekli toplam zaman dağılımını ele alacağız. Bu sistemde, 6 istasyon vardır. Herbir istasyonda deneme ve bakım faaliyetlerinde harcanan zaman için dağılımlar, tablo 1. deki

gibi verilsin. Burada zaman saat cinsindendir.

1-inci istasyon, $f_1(x_1)=\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\exp\{-\dfrac{1}{2}(x_1-10)^2\}$, $N(x_1:10,1)$

2-inci istasyon, $f_2(x_2)=\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sqrt{2}}\exp\{-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x_2-20}{\sqrt{2}})^2\}$, $N(x_2:20,\sqrt{2})$

3-üncü istasyon, $f_3(x_3)=\dfrac{6^9}{\Gamma(9)}x_3^8\exp\{-6x_3\}$, $Gtp(x_3:9,6)$

4-üncü istasyon, $f_4(x_4)=\dfrac{1}{\Gamma(10)}x_4^9\exp\{-x_4\}$, $Gtp(x_4:10,1)$

5-inci istasyon, $f_5(x_5)=5\exp\{-5x_5\}$, $Etp(x_5:5)$

6-ıncı istasyon, $f_6(x_6)=\dfrac{1}{2^5\Gamma(5)}x_6^4\exp\{-\dfrac{x_6}{2}\}$, $CHS(x_6:10)$

Tablo 1. Herbir istasyonda deneme ve bakım faaliyetlerinde harcanan zaman için dağılımlar ve parametre değerleri.

Herbir istasyonda deneme ve bakım zamanı için model olarak Normal, Gamma, üstel ve Kikare dagılımları kullanılmıştır. Her bir durumda parametre değerleri verilmiştir.

Biz bu problemde, toplam harcanan zaman $T=\sum_{i=1}^{6} x_i$ 'nin dağılımı ile ilgileneceğiz.

$$E(T) = E(\sum_{i=1}^{6} x_i)=E(x_1)+E(x_2)+E(x_3)+E(x_4)+E(x_5)+E(x_6)$$

$$=10+10+1.5+10+0.2+10$$

$$=51.7$$

$$Var(T) = Var(\sum_{i=1}^{6} x_i) = E(x_1)+E(x_2)+E(x_3)+E(x_4)+E(x_5)+E(x_6)$$

$$= Var(x_1)+Var(x_2)+Var(x_3)+Var(x_4)+Var(x_5)+Var(x_6)$$

$$=1+2+0.25+10+0.04+20$$

$$=33.29$$

Merkezi limit teoremine göre, yukarıdaki 6 istasyonlu sistemin deneme ve bakımı için harcanan toplam T zamanının dağılımına, $\mu=51,7$ ve $\sigma=5.8$ parametreli bir Normal dağılımla yaklaşılabilir.

Bir rastgele dağişken, bağımsız "küçük" nedenlerin yada hataların büyük bir sayısının toplam etkisini gösterdiğinde, merkezi limit teoremi, o değişkenin dağılımının normal olduğunu belirtir. Buna ek olarak, Normal dağılımla gösterilen deneysel veriler birçok fiziksel değişkenler için iyi bir gösterim oluşturur. Bu verilere örnek olarak yaşayan organizmalar üzerine ölçümler, bir gaz içerisindeki moleküllerin hızları, zeka testi sonuçları, bir bölgedeki ortalama sıcaklık ve rastgele elektriksel sesler verilebilir. (Hahn ve Shapiro 1967, s:73)

Alet yada ölçüm hataları doğru değere yakın veya bir ortalama etrafında normal olarak dağıtılmıştır. Normal dağılım matematiksel olarak kolay hesaplanabilir birçok problem için kolaylıklara sahip bir dağılımdır. Bu nedenle istatistiksel sonuç çıkarma tekniklerinin birçoğu, örneğin "varyans analizi" olarak bilinen metod, bir normal dağılımdan alınan veriler varsayımıyla elde edilir.

Normal dağılım ününden ve muhtemelen isminden dolayı, bazen aksi ispatlanmadıkça; bir normal değişken normal olarak dağıtılmıştır. Bu nedenle açık olarak bilinmelidir ki, birçok rastgele değişken, birçok küçük nedenlerin, sebeblerin, hataların toplamı olarak alınmaz.

Normal dağılmış bir değişkenin tanım aralığı, eksi sonsuz ($-\infty$), artı sonsuz ($+\infty$) aralığıdır. Bununla birlikte, çoğu fiziksel değişkenler alt veya üst sınıra, bazen ikisine birden sahip olabilir. örneğin bir yetişkinin boy uzunluğu. Bu gibi koşullar değişkenleri göstermek için bir normal dağılımı kullanmayı imkansız hale getirir. Aynı zamanda, bazı fiziksel sınır koşullarına dayandırılmış değerler için değişkenler vardır. örneğin bir üretim yada imalat işleminde, üretim yüzdesi veya zamanı, bu işin yapıldığı sistemin başarısızlığıyla sınırlandırıldığı durumunda olduğu gibi.

Bu durumlarda, normal dağılım veya diğer simetrik gösterimler yetersizdir.

Bazı uygulamalarda, kesilmiş normal dağılım kullanılır. (Johnson ve Kotz 1970 , s:81) Yani bir Normal dağılımın bir yada her iki ucunun kesilmiş hali kullanılır. Kesilmiş Normal dağılım, Normal dağılımın bir yada her iki ucuna sınırlama getirilerek elde edilir. Böyle bir model örneğin, tüm elemanları belirtilmiş bir alt, üst veya her iki sınır arasında olan bir normal işlemden örnekleme uygulanabilir.

TANIM 3.1.1.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x-\delta}{\sigma})^2\}\left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma}\int_A^B \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{t-\delta}{\sigma})^2\}dt\right]^{-1} \quad (3.1.1.1.a)$$

veya,

$$f(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\,z(\frac{x-\delta}{\sigma})\left[\Phi(\frac{B-\delta}{\sigma})-\Phi(\frac{A-\delta}{\sigma})\right]^{-1} \quad A\leq x\leq B \quad (3.1.1.1.b)$$

ise x r.d'ne iki taraftan kesilmiş normal dağılım denir.

Burada A'ya alt kesim, B'ye ise üst kesim denir. Ayrıca,

$\Phi(\frac{A-\delta}{\sigma})$'ya alt kesim derecesi,

$1-\Phi(\frac{B-\delta}{\sigma})$'ya ise üst kesim derecesi denir. Burada,

$$z(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^{2}\right) \qquad (3.1.1.2)$$

ve

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{1}{2}x^{2}\right)dx \qquad (3.1.1.3)$$

dir.

Eğer A alt kesim noktası yerine, $-\infty$ veya B üst kesim noktası yerine $+\infty$ alınırsa, sırasıyla alttan veya üstten kesilmiş dağılım elde edilir.

İki taraftan kesilmiş veya tek taraftan kesilmiş normal olasılık fonksiyonları, kesim derecelerine göre sınıflandırılır. özel olarak (3.1.1.1)' de $A=\delta$ ve $B=+\infty$ alınırsa, Yarı Normal dağılım elde edilir.

TEOREM 3.1.1.1 İki taraftan kesilmiş normal dağılımına sahip, sürekli tipteki bir x r.d'nin beklenen değeri,

$$E(x)=\delta+\frac{z\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)-z\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)}\sigma \qquad (3.1.1.4)$$

dir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:81)

TEOREM 3.1.2.2 İki taraftan kesilmiş normal dağılımına sahip, sürekli tipteki bir x r.d'nin varyansı,

$$Var(x)=\left[1+\frac{\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)z\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)-\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)z\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)}-\left\{\frac{z\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)-z\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{A-\delta}{\sigma}\right)}\right\}^{2}\right]\sigma^{2} \qquad (3.1.1.5)$$

dir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:83)

Burada eğer $A-\delta=-(B-\delta)=-\tau$ alınırsa,

$E(x)=\delta$

$$Var(x)=[1-\frac{2\tau z(\tau)}{2\Phi(\tau)-1}]\sigma^2 \qquad (3.1.1.6)$$

bulunur.

Son olarak, bazı rastgele değişkenler için normal dağılımın merkezde uygun yaklaşım s ağladığına, fakat dağılımın bir veya her iki ucunda da yetersiz olduğuna dikkat edilmelidir.

Doğru olmayan varsayımın normalliğinin hataları, bu varsayımın kullanımına bağlıdır. Bu varsayımdan haraketle elde edilen birçok istatistiksel metodlar, varsayımdan kabul edilen sapmaların altında gecerlidir. Yani buna "güçlü" (robust) denir. Varyans analizi, normallikten sapmalar altında "güçlü" bir metod örneğidir. Diğer bir durum da, normallik varsayımı yanlış kullanıldığında, örneğin üretilen elemanların oranının, bazı var olan değerlere göre karşılaştırıldığı problemlerde olduğu gibi ciddi hatalar oluşturabilir.

3.1.2 Normal Dağılımın Parametre Tahminleri

Normal dağılımın, μ ve σ parametrelerinin maksimum likelihood metodunu kullanarak tahmin edicilerini hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

x_i, $i=1,2,3,\ldots,n$ 'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\mu,\sigma)=(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2\}$$

$L(\mu,\sigma)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\mu,\sigma)$ alalım.

$$L(\mu,\sigma)=(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2\} \qquad (3.1.2.1)$$

olur. (3.1.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\mu,\sigma)\}=n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\right)-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \qquad (3.1.2.2)$$

dir.

(3.1.2.2) 'nin μ ve σ göre türevlerini alıp, ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde, μ ve σ'nın tahminleri sırasıyla,

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{ve} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

bulunur.

Bular aynı zamanda (1.6.2) ve (1.6.5)'deki $m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$ olan sırasıyla örneklem ortalaması ve varyansıdır. Her ikiside μ ve σ için birer yansız tahmin edicidir.

3.1.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:103-107)'de verilen bağıntılar.

TANIM 3.1.3.1 x, sürekli tipte f(x) o.y.f sahip r.d; A tek boyutlu ve f(x)>0 olduğu uzay olsun. y=u(x), A uzayından B uzayına bire-bir bir dönüşüm olsun. Yani y=u(x) dönüşümünün tersi x=w(y) dönüşümü bulunsun ve $\frac{dx}{dy}=w'(y)$ sürekli ve herbir y∈B için tanımlı olsun. Bu durumda, y=u(x) r.d'nin o.y.f,

$$g(y)=\begin{cases} f(w(y))\,|w'(y)| & , \ y\in B \\ 0 & , \ y\in B \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

1) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, $k=\frac{1}{2}$ parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

Tanım 3.1.3.1 uygulanarak yukarıdaki sonuç görülebilir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\mu+\sigma X$, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahiptir.

3) $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ birbirinden bağımsız ve herbiri $\mu=0$ ve $i=1,2,3,\ldots n$ olmak üzere sırasıyla σ_i^2 parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma_i^2}$, $v=n$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip ise, $Y=\log X$, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahiptir.

5) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri $\mu=0$ ve σ^2 parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=\sqrt{(X_1^2+X_2^2)}$, σ parametreli Rayleigh dağılımına sahiptir.

6) Standart Normal dağılım, μ ve σ parametreli Normal dağılımın $\mu=0$ ve $\sigma=1$ özel halidir.

7) X_1,X_2,X_3 ve X_4 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri $\mu=0$ Standart Normal dağılıma sahip ise, $y=X_1X_4-X_2X_3$, $\alpha=0$ ve $\beta=2$ parametreli Laplace dağılımına sahiptir.

8) X_1 Standart Normal dağılıma, X_2, v parametreli Kikare dağılımına sahip, birbirlerinden bağımsız r.d'ler ise,

$$Y=\frac{X_1}{\sqrt{\left(\frac{X_2}{v}\right)}}$$

, v parametreli T-dağılımına sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=(X-\mu)/\sigma$, Standart Normal dağılıma sahiptir.

10) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\exp(\mu+\sigma X)$, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahiptir.

11) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip ise, $Y=(1/\sigma)(\log X-\mu)$, Standart Normal dağılıma sahiptir.

12) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\exp(\mu+\sigma X)$, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahiptir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip ise, $Y=(1/\sigma)(\log X-\mu)$, Standart Normal dağılıma sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=(1/2)X^2$, $k=1/2$ parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

15) $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ birbirinden bağımsız ve herbiri Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, $v=n$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

16) X1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=X_1/X_2$ Standart Cauchy dağılımına sahiptir. Bu aynı zamanda, $v=1$ para metreli T-dağılımıdır.

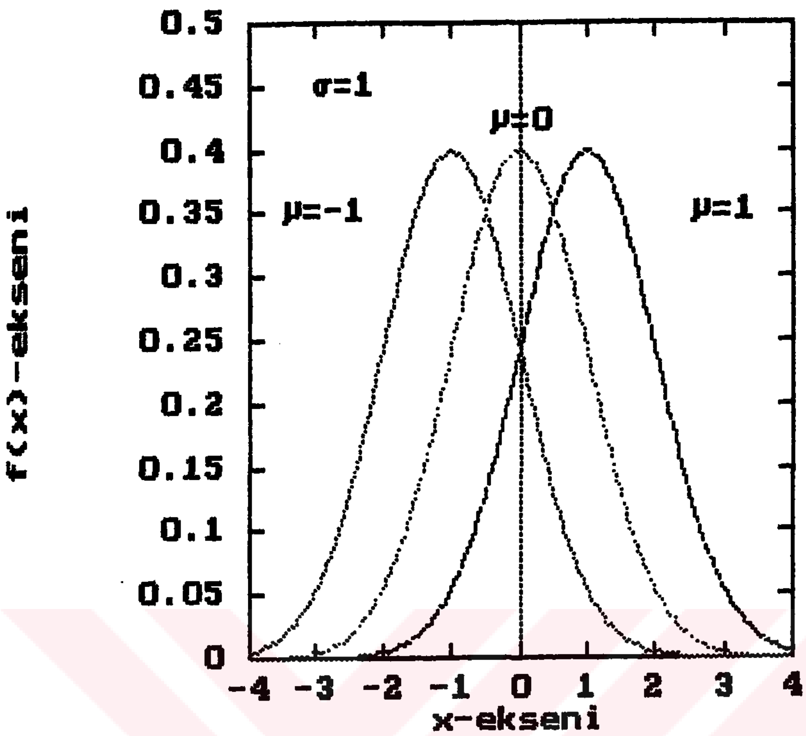
17) $k \to \infty$, k parametreli Standartlaştırılmış Gamma dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

18) $v \to \infty$, Standartlaştırılmış Kikare dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

19) $v \to \infty$, v parametreli T-dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

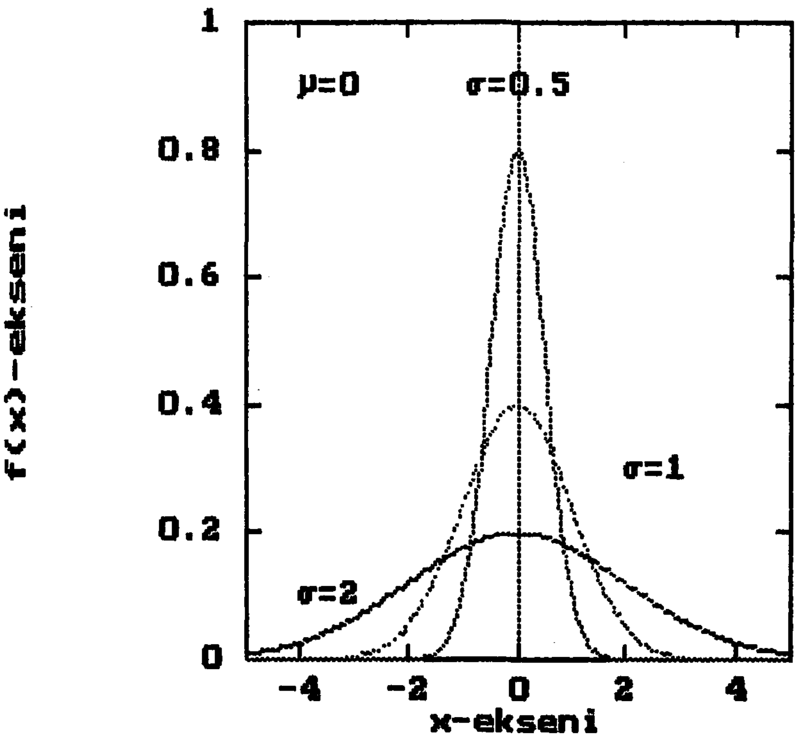
20) $p \to \infty$, $q \to \infty$ ve p/q=sabit olduğunda, p ve q parametreli Standart Beta dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

21) $\sigma \to 0$, Standartlaştırılmış μ ve σ parametreli LogNormal dağılım, Standart Normal dağılıma yakınsar.



Şekil 13. Normal Dağılımın $\sigma=1$ ve $\mu=-1$ $\mu=0$ $\mu=1$ parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 14. Normal Dağılımın $\mu=0$ ve $\sigma=0.5$ $\sigma=1$ $\sigma=2$ parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.2 Lognormal Dağılım

TANIM 3.2.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma x}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x-\mu}{\sigma})^2\} \qquad (3.2.1)$$

$$x > 0 \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \sigma > 0$$

ise x r.d'ne μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahiptir denir.

(3.2.1)'deki o.y.f'na, Y=lnX dönüşümü uyguladığında, (3.1.1)'deki o.y.f elde edilir.

LogNormal dağılımı, LON$(x;\mu,\sigma)$ veya LON$_x(\mu,\sigma)$ ve ilgili değişkeni, LON$;\mu,\sigma$ ile göstereceğiz. Burada μ ve σ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve şekil parametreleridir.

TEOREM 3.2.1 LogNormal dağılımın d.f,

$$F(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma}\int_0^x \frac{1}{u}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln u-\mu}{\sigma})^2\}du \qquad (3.2.2)$$

dur.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma}\int_0^x \frac{1}{u}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln u-\mu}{\sigma})^2\}du$$

bulunur.

TEOREM 3.2.2 LogNormal dağılımın, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\exp(\mu r+\frac{\sigma^2 r^2}{2}) \qquad (3.2.3)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_0^{+\infty} x^{(r-1)}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln x-\mu}{\sigma})^2\}dx \qquad (3.2.3.a)$$

dir.

(3.2.3.a)'da, önce y=lnx, daha sonra $u=(y-\mu)/\sigma$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplanda, sadeleştirmelerden sonra,

$$\mu'_r=\exp(\mu r+\frac{1}{2}\sigma^2 r^2)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(u-\sigma r)^2\}du \qquad (3.2.3.b)$$

elde edilir.

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}(u-\sigma r)^2\}du$$ olsun.

(3.1.4.b) eşitliğini kullanarak, $I_1=\sqrt{(2\pi)}$ elde edilir. Bu sonuç, (3.2.3.b)'de yerine koyulduğunda,

$$\mu'_r=\exp(\mu r+\frac{\sigma^2 r^2}{2})$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.2.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, LogNormal dağılıma sahip ise,

$$E(x)=\exp(\mu+\frac{\sigma^2}{2}) \qquad (3.2.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dır. (3.2.3)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\exp(\mu+\frac{\sigma^2}{2})$$

elde edilir. O halde,

$$E(x)=\exp(\mu+\frac{\sigma^2}{2})$$

bulunur.

TEOREM 3.2.4 Sürekli tipteki bir x r.d, LogNormal dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp\sigma^2-1) \qquad \sigma > 0 \qquad (3.2.5)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.2.3)'de $r=2$ için,

$\mu'_2=\exp(2\mu+2\sigma^2)$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\exp(2\mu+2\sigma^2) \qquad (3.2.5.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.2.5.a) ve (3.2.4) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp\sigma^2-1)$

bulunur.

TEOREM 3.2.5 Sürekli tipteki bir x r.d, LogNormal dağılıma sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp\sigma^2-1)} \qquad (3.2.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.2.5) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{\exp(2\mu+\sigma^2)(\exp\sigma^2-1)}$

bulunur.

TEOREM 3.2.6 Sürekli tipteki bir x r.d, LogNormal dağılıma sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=(\exp\sigma^2+2)\sqrt{(\exp\sigma^2-1)} \qquad (3.2.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.2.3)'de $r=3$ için,

$\mu'_3=\exp(3\mu+(9/2)\sigma^2)$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\exp(3\mu+(9/2)\sigma^2) \qquad (3.2.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.2.7.a), (3.2.5.a) ve (3.2.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=\exp\{3\mu+(3/2)\sigma^2\}(\exp(3\sigma^2)-3\exp\sigma^2+2)$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=(\exp\sigma^2+2)\sqrt{(\exp\sigma^2-1)}$

bulunur.

TEOREM 3.2.7 Sürekli tipteki bir x r.d, LogNormal dağılıma sahip ise, α_4 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_4=\exp(4\sigma^2)+2\exp(3\sigma^2)+3\exp(2\sigma^2)-3 \qquad (3.2.8)$$

tür.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.2.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\exp(4\mu + 8\sigma^2)$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\exp(4\mu + 8\sigma^2) \qquad (3.2.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.2.8.a), (3.2.7.a), (3.2.5.a) ve (3.2.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\exp(4\mu+2\sigma^2)[\exp(6\sigma^2)-4\exp(3\sigma^2)+6\exp\sigma^2-3]$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\exp(4\sigma^2)+2\exp(3\sigma^2)+3\exp(2\sigma^2)-3$$

bulunur.

TEOREM 3.2.8 LogNormal dağılımın modu ,

$$x=\exp(\mu-\sigma^2) \qquad (3.2.9)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.2.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\exp(\mu-\sigma^2)$ bulunur. $x=\exp(\mu-\sigma^2)$ değeri için (3.2.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, LogNormal dağılımın modu,

$$x=\exp(\mu-\sigma^2)$$

bulunur.

TEOREM 3.2.9 LogNormal dağılımın medyanı,

$$x=\exp\mu \qquad (3.1.10)$$

dır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\sigma u}\exp\{-\frac{1}{2}(\frac{\ln u-\mu}{\sigma})^2\}du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, önce $y=\ln u$, daha sonra, $s=(y-\mu)/\sigma$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$\int_{-\infty}^{(\ln x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)du = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x-\mu}{\mu} = 0 \text{ dır.}$$

Buradan,

$x=\exp\mu$

bulunur.

3.2.1 Lognormal Dağılımın Uygulama Alanları

LogNormal Dağılım, çok küçük hataların yada sapmaların çarpımıyla ortaya çıkan işlemler için bir model olarak elde edilebilir. Çok genel koşullar altında, n bağımsız pozitif değişkenin çarpımlarının dağılımı, bir LogNormal dağılıma yakınsadığı, merkezi limit teoreminin kullanılmasıyla gösterilebilir.

LogNormal dağılımın uygulama alanları ve teoresi, (Aitchison ve Brown, 1957)'de detaylı olarak incelenebilir.

LogNormal dağılımın ekonomiden biyolojiye, değişik uygulama alanları vardır. Gözlenen değerin, bir önceki değerlere göre rastgele oranı olduğu durumlardaki işlemler için kullanılır. örnek olarak kişilerin gelirlerinin dağılımı, veraset ve banka hesap işlerinde ve bir organizmanın yaşadığı ortamda maruz kaldığı birçok küçük tesire karşı, bu tesirlerin hacmiyle orantılı olduğu durumlarda, hacminin bir anlık büyümesinin yada hacminin dağılımı verilebilir. LoğNormal dağılım aynı zamanda, bir maddenin kırılma işleminde elde edilen parçacıkların hacimlerinin dağılımını göstermek için kullanılabilir. (Epstein, 1947)

LogNormal dağılımın uyğulandığı diğer alanlar:

1) Jeolojideki uyğulamaları: LoğNormal dağılımın jeoloji alanında uygulamalarını (Ahrens ,1954-57), (Chayes, 1954), (Miller ve Goldberg, 1955) ve (Prohorov, 1963) yapmıştır. (Thébault, 1961) ayrıca örnekler vermiştir.

2) Kalite kontrol uyğulamaları: LoğNormal dağılımın kalite kontrol alanındaki uygulamalarını (Ferrell, 1958), (Morrison, 1958) ve (Rohn, 1959) çalışmışlardır.

3.2.2 Lognormal Dağılımın Parametre Tahminleri

LogNormal dağılımın, μ ve σ parametrelerinin maksimum likelihood metodunu kullanarak tahmin edicilerini hesaplayalım. Bu hesaplamalar, Normal dağılımda olduğu gibi yapılır.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

x_i, $i=1,2,3,\ldots,n$ 'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\mu,\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma x_i}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

$L(\mu,\sigma)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\mu,\sigma)$ alalım.

$$L(\mu,\sigma)=\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,\sigma x_i}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad (3.2.2.1)$$

olur. (3.2.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\mu,\sigma)\}=n\ln\left\{\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}\,x_i}\right\}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \qquad (3.2.2.2)$$

dir.

(3.2.2.2)'nin μ ve σ göre türevlerini alıp ayrı ayrı sıfıra eşitlendiğinde, μ ve σ'nın tahminleri sırasıyla,

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \qquad \text{ve} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i)^2-\left\{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right\}^2$$

bulunur.

3.1.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:100)'de verilen bağıntılar.

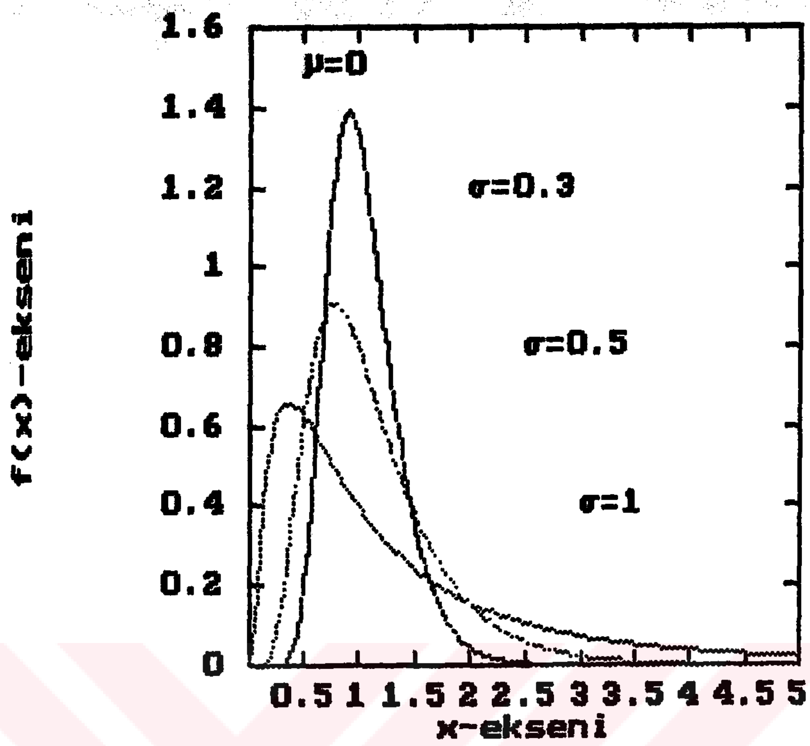
1) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip ise, Y=logX , μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahiptir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip ise, Y=expX, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahiptir.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahip ise, $Y=(\log X-\mu)/\sigma$, Standart Normal dağılıma sahiptir.

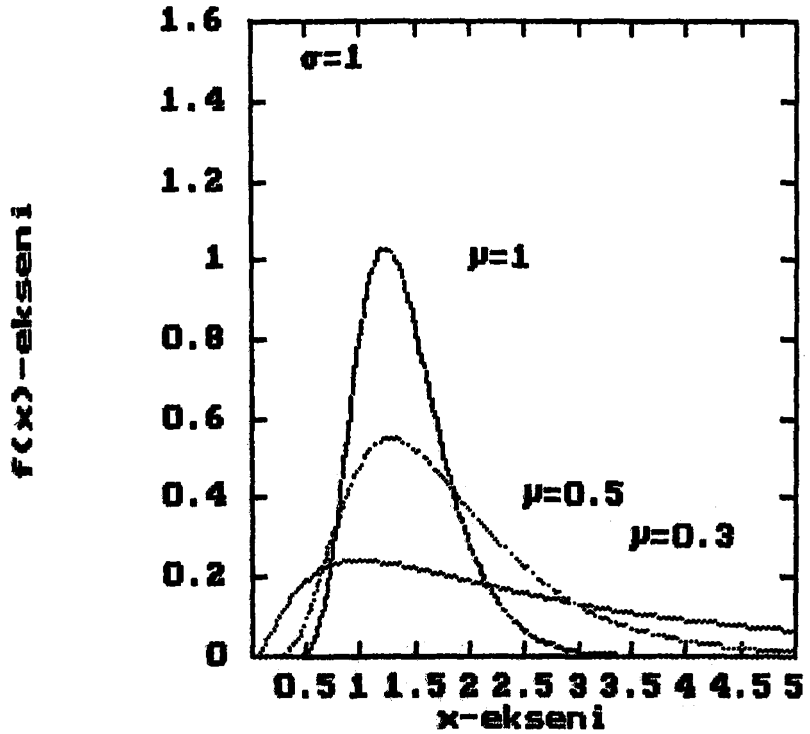
4) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\exp(\mu+\sigma X)$, μ ve σ parametreli LogNormal dağılıma sahiptir.

5) $\sigma \rightarrow 0$, Standartlaştırılmış μ ve σ parametreli LogNormal dağılım, Standart Normal dağılıma yakınsar.



Şekil 15. Lognormal Dağılımın μ=0 ve σ=0.3 σ=0.5 σ=1 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 16. Lognormal Dağılımın σ=1 ve μ=0.3 μ=0.5 μ=1 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.3 Standart Ters (Invers) Gauss Dağılımı

TANIM 3.3.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\mu,\Omega)=\sqrt{\left(\frac{\Omega}{2\pi x^{3}}\right)}\exp\left\{-\frac{\Omega}{2x}\left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^{2}\right\} \qquad (3.3.1)$$

$x > 0 \qquad \mu > 0 \qquad \Omega > 0$

ise x r.d'ne, μ ve Ω parametreli Standart İnvers Gauss dağılımına sahiptir denir.

Standart İnvers Gauss dağılımını, $SIG(x;\mu,\Omega)$ veya $SIG_x(\mu,\Omega)$ ve ilgili değişkeni, $SIG:\mu,\Omega$ ile göstereceğiz. Burada μ ve Ω parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

$\mu=1$ olduğunda, Wald dağılımının standart şekline indirgenir.

TANIM 3.3.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\sigma)=\sqrt{\left(\frac{\Omega}{2\pi x^{3}}\right)}\exp\left\{-\frac{\Omega}{2x}(x-1)^{2}\right\} \qquad (3.3.2)$$

$x > 0 \qquad \Omega > 0$

ise x r.d'ne, Ω parametreli Wald dağılımına sahiptir denir.

TEOREM 3.3.1 Standart İnvers Gauss dağılımının m.ç.f,

$$M(t;\mu,\Omega)=\exp\{(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^{2}/\Omega)t)}]\} \qquad (3.3.3)$$

dir. (Patil, Bosweel, Ratnaparkhi, Rao, 1984 s:76)

TEOREM 3.3.2 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_{r}=\mu^{r}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(r-1+i)!}{i!(r-1-i)!}\left(\frac{\mu}{2\Omega}\right)^{i} \qquad (3.3.4)$$

dir. (Patil, Bosweel, Ratnaparkhi, Rao, 1984 s:76)

TEOREM 3.3.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\mu \qquad \mu > 0 \qquad (3.3.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dır.

$M'(t)=\exp\{(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)t)}]\}[\mu/(\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)t)})]$

dir. O halde,

$E(x)=\mu$

bulunur.

TEOREM 3.3.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\mu^3/\Omega \qquad \mu>0 \qquad \Omega>0 \qquad (3.3.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M''(t)\Big|_{t=0}$ dır.

$$M''(t)=\exp\{(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)t)}]\}\left\{\frac{(\mu^3/\Omega)/[\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)t)}]+\mu^2}{1-(2\mu^2/\Omega)t}\right\}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=(\mu^3+\Omega\mu^2)/\Omega \qquad (3.3.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.3.6.a) ve (3.3.5) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\mu^3/\Omega \qquad \mu>0 \qquad \Omega>0$

bulunur.

TEOREM 3.3.5 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\mu\sqrt{(\mu/\Omega)} \qquad \mu>0 \qquad \Omega>0 \qquad (3.3.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.3.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\mu\sqrt{(\mu/\Omega)} \qquad \mu>0 \qquad \Omega>0$

bulunur.

TEOREM 3.3.6 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=3\sqrt{(\mu/\Omega)} \qquad (3.3.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.3.4)'de r=3 için,

$\mu'_3=[3\mu^5+3\Omega\mu^4+\Omega^2\mu^3]/\Omega^2$

dir. O halde,

$$E(x^3)=[3\mu^5+3\Omega\mu^4+\Omega^2\mu^3]/\Omega^2 \qquad (3.3.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.3.8.a), (3.3.6.a) ve (3.3.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=3\mu^5/\Omega^2$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3= 3\sqrt{(\mu/\Omega)}$

bulunur.

<u>TEOREM 3.3.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=3+15(\mu/\Omega) \qquad (3.3.9)$$

tür.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.3.4)'de r=4 için,

$\mu'_4=\mu^4+6(\mu^5/\Omega)+15(\mu^6/\Omega^2)+15(\mu^7/\Omega^3)$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\mu^4+6(\mu^5/\Omega)+15(\mu^6/\Omega^2)+15(\mu^7/\Omega^3) \qquad (3.3.9.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.3.9.a), (3.3.8.a), (3.3.6.a) ve (3.3.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=[3\mu^6\Omega+15\mu^7]/\Omega^3$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=3+15(\mu/\Omega) \qquad \mu > 0 \qquad \Omega > 0$

bulunur.

<u>TEOREM 3.3.8</u> Standart İnvers Gauss dağılımının modu,

$$x=\mu\left[\sqrt{\left(\frac{9\mu^2}{4\Omega^2}+1\right)}-\frac{3\mu}{2\Omega}\right] \qquad (3.3.10)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.3.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x_{1,2}=\dfrac{-3\mu^2\pm\mu\sqrt{(9\mu^2+4\Omega^2)}}{2\Omega}$ bulunur.

Bu değerlerden (3.3.1)'deki o.y.f'nu maksimum yapan değer,

$x=\mu\left[\sqrt{\left(\frac{9\mu^2}{4\Omega^2}+1\right)}-\frac{3\mu}{2\Omega}\right]$ dir. O halde, Standart İnvers Gauss dağılımının modu,

$$x=\mu[\sqrt{(\frac{9\mu^2}{4\Omega^2}+1)}-\frac{3\mu}{2\Omega}]$$

bulunur.

TEOREM 3.3.9 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\mu,\Omega)=\exp\{(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)it)}]\} \qquad (3.3.11)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.3.3)'de t yerine it alındığında,

$$\Phi(t;\mu,\Omega)=\exp\{(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)it)}]\}$$

bulunur.

TEOREM 3.3.10 Standart İnvers Gauss dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t;\mu,\Omega)=(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)it)}] \qquad (3.3.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)' daki eşitliği kullanarak, (3.3.11)'in logaritması alındığında,

$$K(t;\mu,\Omega)=(\Omega/\mu)[1-\sqrt{(1-(2\mu^2/\Omega)it)}]$$

bulunur.

3.3.1 Standart İnvers Gauss Dağılımının Uygulama Alanları

Düzgün bir hızla, bir doğru üzerinde, düzgün Brownian hareketi yapan bir cismi ele alalım. Bu cisim, d mesafesini katedecektir. Bu cismin d mesafesini katetmesi için gerekli zaman x olmak üzere,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\beta x^3)}}\, d\, \exp\{-\frac{(d-vx)^2}{2\beta x}\} \quad x>0 \qquad (3.3.1.1)$$

olasılık fonksiyonuna sahiptir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:137)

Burada, β:Difizyon sabiti, d: katedilen mesafe ve v:cismin hızıdır.

Eğer x zamanı sabit alınırsa, cismin d mesafesini katetmesinin o.y.f,

$$f(d)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\beta x)}}\exp\{-\frac{(d-vx)^2}{2\beta x}\} \qquad x > 0 \qquad (3.3.1.2)$$

olup, Normal dağılıma sahiptir.

(3.3.1.1)'de, $v=\Omega/\mu$ ve $\beta=d^2/\Omega$ alınırsa,

$$f(x;\mu,\Omega)=\sqrt{(\frac{\Omega}{2\pi x^3})}\exp\{-\frac{\Omega}{2x}(\frac{x-\mu}{\mu})^2\}$$

$$x > 0 \qquad \mu > 0 \qquad \Omega > 0$$

elde edilir. Buda, (3.3.1)'deki o.y.f'dur. Bu uygulama, (Wasan, 1968) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, (Tweedie, 1947) bir elektrik alanı altındaki, bir "colloidal suspension" ' da parçacıkların hareketlerini çalışmada uygulamıştır.

Standart İnvers Gauss dağılımının, uyumun iyiliği problemine uygulaması da vardır. (Tweedie, 1957)

3.3.2 Standart İnvers Gauss Dağılımının Parametre Tahminleri

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri μ ve Ω_i $i=1,2,\ldots,n$ parametreli Standart İnvers Gauss dağılımına sahip rastgele bir örneklem olsun.

Burada bilinmeyen parametreler μ ve Ω_i $i=1,2,\ldots,n$ lerdir. $\Omega_i=w_i\Omega_o$ olsun. Ω_o bilinmeyen fakat w_i' ler bilinen pozitif değerlerdir. μ ve Ω_o' nın maksimum likelihood tahminleri,

$$\hat{\mu}=\bar{x}=(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i)/(\sum_{i=1}^{n} w_i)$$

ve

$$1/(\hat{\Omega}_o)=(1/n)\sum_{i=1}^{n} w_i[(1/x_i)-\{1/(1/x)\}]$$

dir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:143)

Eğer $w_i=1$ $i=1,2,\ldots,n$ ise,

$$\hat{\mu}=\bar{x}=(\sum^{n} x_i)/n$$

ve

$$1/(\hat{\Omega}_o) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [(1/x_i) - \{1/(1/\bar{x})\}]$$

bulunur.

$1/\Omega_o$'nun yansız tahmin edicisi,

$$1/(\hat{\Omega}_o) = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^{n} w_i [(1/x_i) - \{1/(1/\bar{x})\}]$$

dir. $1/\Omega_o$'nun diğer bir yansız tahmini olarak,

$$1/(\hat{\Omega}_o) = S^2/(\bar{x}^3)$$

alınabilir. Burada S^2, (1.6.5)'deki gibidir.

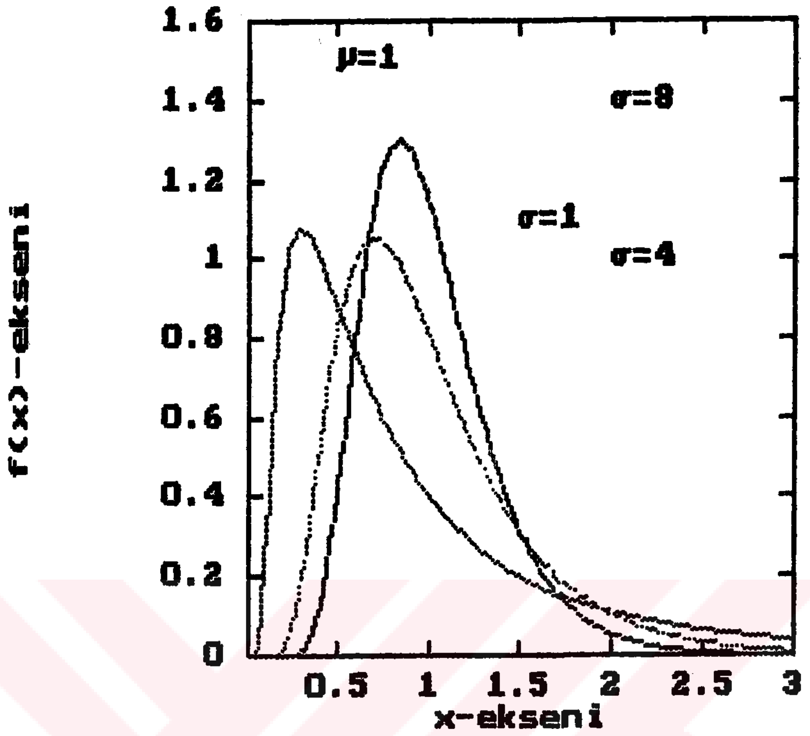
3.3.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:76-77)'de verilen bağıntılar.

1) Ω parametreli Standart Wald dağılımı, μ ve Ω parametreli Standart İnvers Gauss dağılımının $\mu=1$ özel halidir.

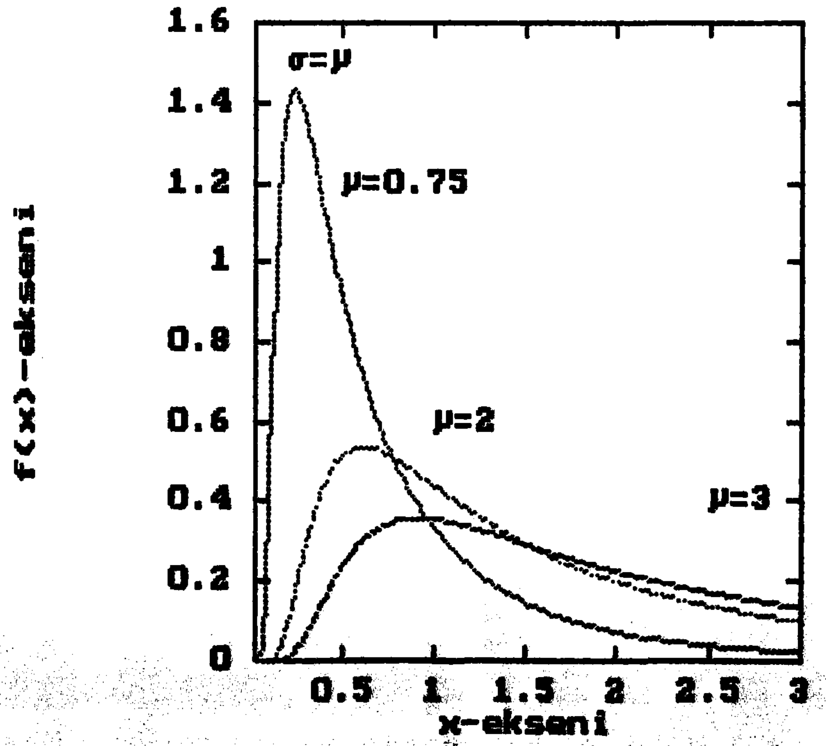
2) $\Omega \to \infty$, Standartlaştırılmış μ ve σ parametreli Standart İnvers Gauss dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve Ω parametreli Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, $Y=[\Omega(X-\mu)^2]/\mu^2 X$, $v=1$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.



Şekil 17. Standart İnvers Gauss Dağılımının μ=1 ve σ=1 σ=4 σ=8 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 18. Standart İnvers Gauss Dağılımının σ=μ ve μ=0.75 μ=2 μ=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.4 Cauchy Dağılımı

TANIM 3.4.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\pi}\,\frac{1}{1+(x-\mu)^2/\sigma^2} \qquad (3.4.1)$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad -\infty < \mu < +\infty \qquad \sigma > 0$$

ise x r.d'ne μ ve σ parametreli Cauchy dağılımına sahiptir denir.

Cauchy dağılımını, $C(x;\mu,\sigma)$ veya $C_x(\mu,\sigma)$ ve ilgili değişkeni, $C;\mu,\sigma$ ile göstereceğiz. Burada μ ve σ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

Cauchy dağılımı $x=\mu$'ye göre simetriktir.

(3.4.1)'de $\mu=0$ ve $\sigma=1$ için, Cauchy dağılımının Standart şekli elde edilir.

TANIM 3.4.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (3.4.2)$$

ise x r.d'ne Standart Cauchy dağılımına sahiptir denir.

TEOREM 3.4.1 Cauchy dağılımının d.f,

$$F(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (3.4.3)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\sigma}\,\frac{1}{1+(u-\mu)^2/\sigma^2}\,du \qquad (3.4.3.a)$$

dur.

(3.4.3.a)'da, $y=(u-\mu)/\sigma$ değişken değiştirme yapılıp, integral hesaplandığında,

$$F(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

bulunur.

Cauchy dağılımının momentleri mevcut değildir.

TEOREM 3.4.2 Cauchy dağılımının modu,

$$x=\mu \qquad -\infty < \mu < +\infty \tag{3.4.4}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.4.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\mu$ bulunur. $x=\mu$ değeri için, (3.4.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Cauchy dağılımının modu,

$$x=\mu$$

bulunur.

TEOREM 3.4.3 Cauchy dağılımının medyanı,

$$x=\mu \tag{3.4.5}$$

noktasındadır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1+(u-\mu)^2/\sigma^2}\, du = \frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, $y=(u-\mu)/\sigma$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$$x=\mu$$

bulunur.

TEOREM 3.4.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Cauchy dağılımına sahip ise, karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t:\mu,\sigma)=\exp\{i\mu t-\sigma|t|\} \tag{3.4.6}$$

dır. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:29)

TEOREM 3.4.5 Sürekli tipteki bir x r.d, Cauchy dağılımına sahip ise, kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\mu,\sigma)= i\mu t-\sigma|t| \tag{3.4.7}$$

dir.

İSPAT: (1.7.9) 'daki eşitliği kullanarak, (3.4.6)'nın logaritmasını alındığında,

$$K(t:\mu,\sigma)= i\mu t-\sigma|t|$$

bulunur.

3.4.1 Cauchy Dağılımının Uygulama Alanları

α parçacıklarının tüm yönlerde rastgele yayıldığı bir radyoaktif kaynağı ele alalım. Bu parçacıklar, kaynaktan σ dik uzaklıkta bulunan bir, iki boyutlu ekrana çarpsın. (μ_1,μ_2) radyoaktif kaynaktan, ekrana çizilen dikmenin tabanının koordinatları olsun. (X_1,X_2) parçacığın ekrana çarptığı noktanın koordinatları ise: X_1, μ_1 ve σ parametreli Cauchy dağılımına sahiptir. Benzer şekilde: X_2, μ_2 ve σ parametreli Cauchy dağılımına sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:29)

3.4.2 Cauchy Dağılımının Parametre Tahminleri

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri μ ve Ω_i i=1,2,...,n parametreli Cauchy dağılımına sahip rastgele bir örneklem olsun.

$$\text{Prob}[x \leq x_p]=p \qquad (3.4.2.1)$$

olsun.

örneklemden uygun bir tahmin edici, r-inci sıra istatistiği x'_r olsun. Burada r=(n+1)p dir. Biz bu tahmin ediciyi, $\hat{x}_p$ ile gösterelim. x_p'nin değerleri, μ ve σ parametrelerine bağlıdır.

p_1 ve p_2, 0 ile 1 arasında farklı $(p_1=p_2)$ iki sayı ise,

$$\hat{x}_{pj}=x_{pj} \qquad j=1,2$$

dir. Buradan,

$$\hat{\sigma}=\frac{(\hat{x}_{p1}-\hat{x}_{p2})}{(\cot\pi p_2-\cot\pi p_1)}$$

ve

$$\hat{\mu}=\frac{(\hat{x}p_1\cot\pi p_2-\hat{x}p_2\cot\pi p_1)}{(\cot\pi p_2-\cot\pi p_1)}$$

bulunur.

Burada, $\tan[\pi(p-\frac{1}{2})]=-\cot\pi p$ dir.

$p_1=p > \frac{1}{2} > 1-p = p_2$ simetrik durumunda,

$\hat{\sigma}=(1/2)(\hat{x}_p-\hat{x}_{1-p})\tan[\pi(1-p)]$

ve

$\hat{\mu}=(1/2)(\hat{x}_p+\hat{x}_{1-p})$

bulunur. (Johnson ve Kotz, 1970 s:158)

3.4.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:29-31)'de verilen bağıntılar.

1) Standart Cauchy dağılımı, α ve β parametreli Cauchy dağılımının $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, Standart Cauchy dağılımına sahiptir.

3) $X_1,X_2,...,X_n$ birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri α ve β parametreli Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=\bar{X}$, α ve β parametreli Cauchy dağılımına sahiptir.

4) Standart Cauchy dağılımı, v parametreli T-dağılımının, v=1 özel halidir.

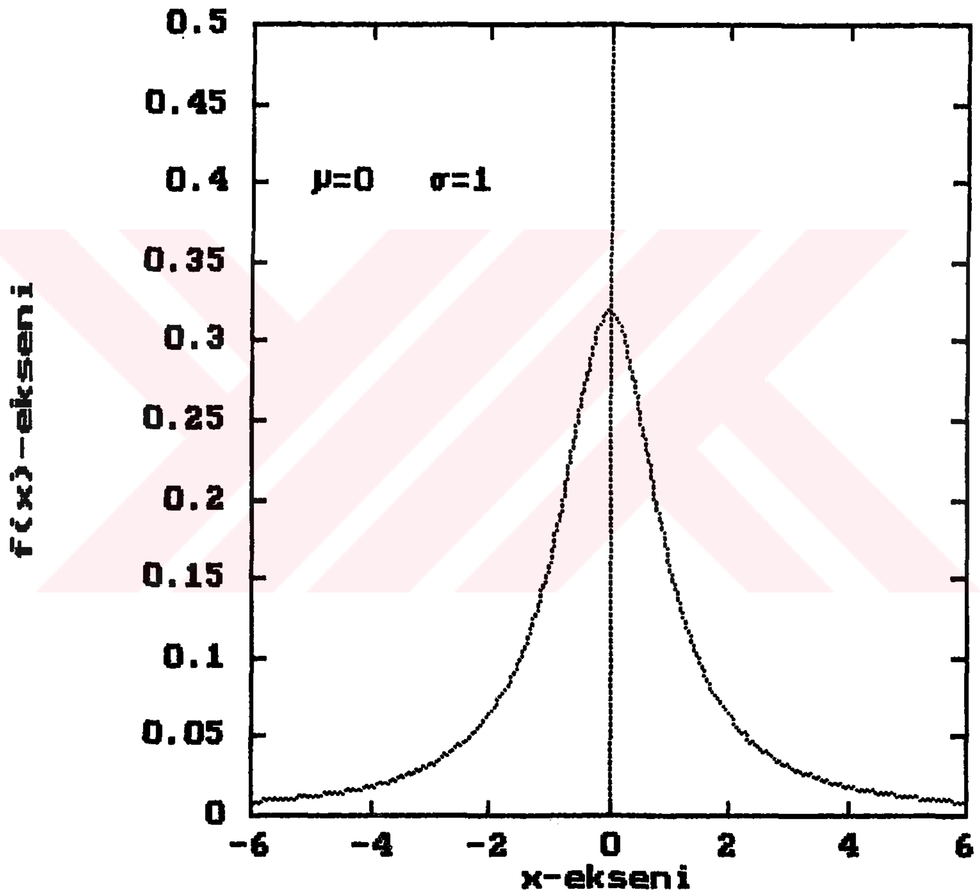
5) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, de Standart Cauchy dağılımına sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=\tan^{-1}X$, $\alpha=-(\pi/2)$ ve $\beta=+(\pi/2)$ parametreli dörtgensel dağılıma sahiptir.

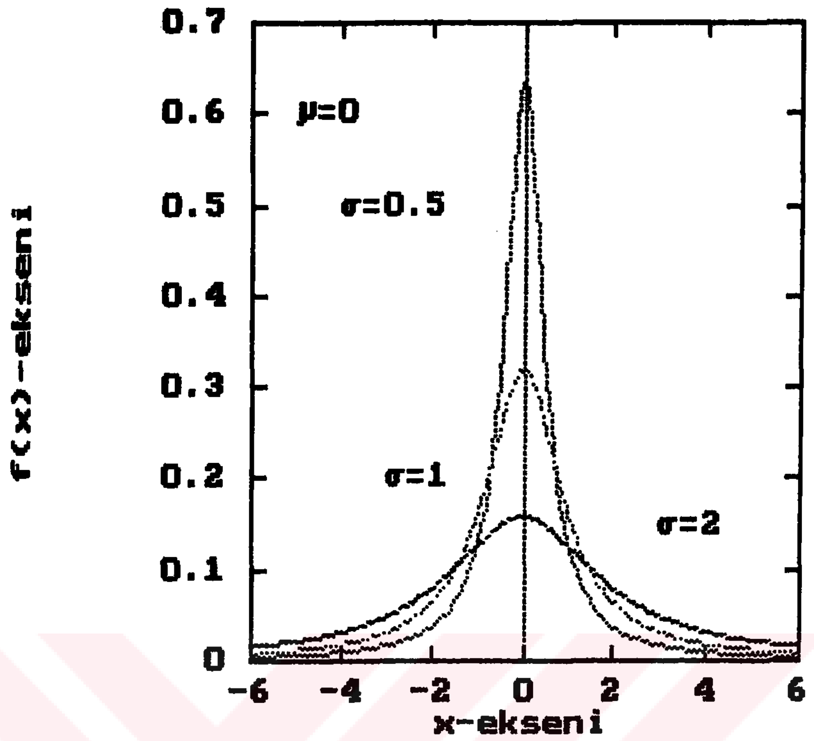
7) Sürekli tipteki bir X r.d, $\alpha=-(\pi/2)$ ve $\beta=+(\pi/2)$ parametreli dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\tan X$, Standart Cauchy dağılımına sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=X^2$, v1=v2=1 parametreli F-dağılımı na sahiptir.

9) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Normal dağılıma sahip iseler, $Y=X_1/X_2$, Standart Cauchy dağılımına sahiptir.

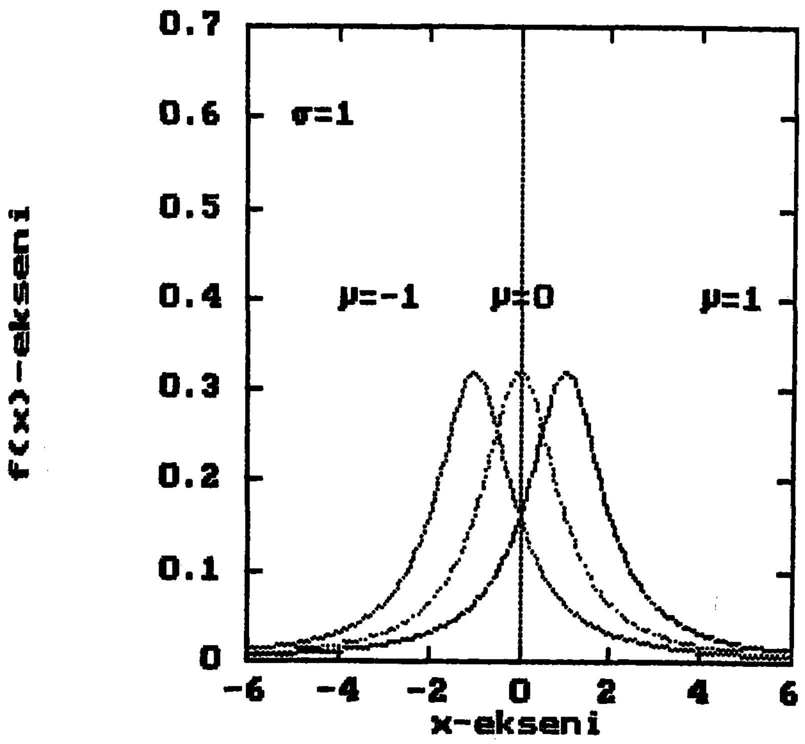


Şekil 19. Standart Cauchy Dağılımının o.y.f'nun grafiği.



Şekil 20. Cauchy Dağılımının $\mu=0$ ve $\sigma=0.5$ $\sigma=1$ $\sigma=2$ parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 21. Cauchy Dağılımının $\sigma=1$ ve $\mu=-1$ $\mu=0$ $\mu=1$ parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.5 Gamma Dağılımı

TANIM 3.5.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\alpha,\beta,k)=\frac{(x-\alpha)^{k-1}}{\beta^k\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad (3.5.1)$$

$$x > \alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad k > 0$$

ise x r.d'ne α, β ve k parametreli Gamma dağılıma sahiptir denir.

Ayrıca α, β ve k parametreli Gamma dağılımına üç parametreli Gamma dağılımı da denir.

Üç parametreli Gamma dağılımını, Gthp$(x;\alpha,\beta,k)$ veya Gthp$_x(\alpha,\beta,k)$ ve ilgili değişkeni, Gthp:α,β,k ile göstereceğiz. Burada α, β ve k parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

(3.5.1)'de, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ alınırsa, Gamma dağılımının Standart şekli elde edilir.

TANIM 3.5.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;k)=\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp(-x) \qquad 0 < x < \infty \qquad k > 0 \qquad (3.5.2)$$

ise x r.d'ne Standart Gamma dağılıma sahiptir denir.

Standart Gamma dağılımında:

1) k=1 ise, Standart üstel dağılımdır.

2) k pozitif tamsayı ise, Erlang Dağılımıdır.

TEOREM 3.5.1 Üç parametreli Gamma d.f,

$$F(x;\alpha,\beta,k)= 1 - \frac{1}{\Gamma(k)}\Gamma\left(k;\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad (3.5.3)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\alpha,\beta,k)=\int_0^x \frac{(u-\alpha)^{k-1}}{\beta^k\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{(u-\alpha)^{k-1}}{\beta^{k}\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du-\int_{x}^{\infty}\frac{(u-\alpha)^{k-1}}{\beta^{k}\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du$$

$$=1-\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x}^{\infty}\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^{k-1}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\beta}\,du \qquad (3.5.3.a)$$

dur.

(3.5.3.a)'da, $y=(u-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x;\alpha,\beta,k)=1-\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{(x-\alpha)/\beta}^{+\infty}y^{k-1}\exp(-y)\,dy$$ dir. O halde,

$$F(x;\alpha,\beta,k)=1-\frac{1}{\Gamma(k)}\Gamma\left(k;\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.5.2</u> üç parametreli Gamma dağılımının m.ç.f,

$$M(t;\alpha,\beta,k)=\exp(\alpha t)\frac{1}{(1-\beta t)^{k}} \qquad t<1/\beta \qquad (3.5.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t;\alpha,\beta,k)=\exp(\alpha t)\int_{0}^{+\infty}\frac{(x-\alpha)^{k-1}}{\beta^{k}\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)(1-\beta t)}{\beta}\right)dx \qquad (3.5.4.a)$$

dir.

(3.5.4.a)'da, önce $y=x-\alpha$, sonra $z=(1-\beta t)y/\beta$ ve daha sonra, $s=z+(\alpha/\beta)(1-\beta t)$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında, sadeleştirmelerden sonra,

$$M(t;\alpha,\beta,k)=\exp(\alpha t)\frac{1}{(1-\beta t)^{k}}$$

bulunur.

TEOREM 3.5.3 Sürekli tipteki bir x r.d, üç parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha+\beta k \tag{3.5.5}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den, $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dır.

$$M'(t)=\frac{\exp(\alpha t)[\alpha(1-\beta t)+\beta k]}{(1-\beta t)^{k+1}}$$

dir. O halde,

$$E(x)=\alpha+\beta k$$

bulunur.

TEOREM 3.5.4 Sürekli tipteki bir x r.d, üç parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2 k \tag{3.5.6}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den, $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M''(t)\big|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=\frac{\exp(\alpha t)[\alpha(1-\beta t)+\beta k]\{\alpha(1-\beta t)+\beta(k+1)\}-\alpha\beta\exp(\alpha t)(1-\beta t)\}}{(1-\beta t)^{k+2}}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\alpha^2+2\alpha\beta k+\beta^2k^2+\beta^2 k \tag{3.5.6.a}$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.5.6.a) ve (3.5.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\beta^2 k$$

bulunur.

TEOREM 3.5.5 Sürekli tipteki bir x r.d, üç parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\beta\sqrt{k} \tag{3.5.7}$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.5.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\beta\sqrt{k}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.5.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, üç parametreli Gamma dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 2/\sqrt{k} \tag{3.5.8}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M'''(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M'''(t)=\frac{\exp(\alpha t)}{(1-\beta t)^{k+3}}([\alpha(1-\beta t)+\beta k]^2\{\alpha(1-\beta t)+\beta(k+2)\}$$
$$+(1-\beta t)\{\alpha\beta^2 k-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta k]\}+\beta^3 k(k+2))$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\alpha^3+3\alpha^2\beta k+3\alpha\beta^2k^2+\beta^3k^3+3\alpha\beta^2k+3\beta^3k^2+2\beta^3k \tag{3.5.8.a}$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.5.8.a), (3.5.6.a) ve (3.5.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=2\beta^3k \tag{3.5.8.b}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=2/\sqrt{k}$

bulunur.

<u>TEOREM 3.5.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, üç parametreli Gamma dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3+(6/k) \tag{3.5.9}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^4)=\frac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M^{(iv)}(t)=\frac{\exp(\alpha t)\{\alpha(1-\beta t)+\beta(k+3)\}}{(1-\beta t)^{k+4}}([\alpha(1-\beta t)+\beta k]^2\{\alpha(1-\beta t)+\beta(k+2)\}$$
$$+(1-\beta t)\{\alpha\beta^2k-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta k]\}+\beta^3k(k+2))$$
$$+\frac{\exp(\alpha t)}{(1-\beta t)^{k+3}}(2[\alpha(1-\beta t)+\beta k](-\alpha\beta)\{\alpha(1-\beta t)+\beta(k+2)\}$$
$$-\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta k]^2-\beta\{\alpha\beta^2k-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta k]\}+2\alpha^2\beta^2(1-\beta t)])$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\alpha^4+4\alpha^3\beta k+6\alpha^2\beta^2k^2+6\alpha^2\beta^2k+4\alpha\beta^3k^3+12\alpha\beta^3k^2+8\alpha\beta^3k+\beta^4k^4$$
$$+6\beta^4k^3+11\beta^4k^2+6\beta^4k \qquad (3.5.9.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.5.9.a), (3.5.8.a), (2.5.6.a) ve (3.5.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=3\beta^4k^2+6\beta^4k$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=3+(6/k)$

bulunur.

TEOREM 3.5.8 üç parametreli Gamma dağılımının modu ,

$$x=\beta(k-1)+\alpha \qquad k\geq 1 \qquad (3.5.10)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.5.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha$ ve $x=\beta(k-1)+\alpha$ bulunur. $x=\beta(k-1)+\alpha$ değeri için (3.5.1) 'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, üç parametreli Gamma dağılımının modu,

$x=\beta(k-1)+\alpha$

bulunur.

TEOREM 3.5.9 üç parametreli Gamma dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\alpha,\beta,k)=\frac{\exp(\alpha it)}{(1-\beta it)^k} \qquad (3.5.11)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.5.4)'de, t yerine it alındığında,

$$\Phi(t;\alpha,\beta,k)=\frac{\exp(\alpha it)}{(1-\beta it)^k}$$

bulunur.

TEOREM 3.5.10 üç parametreli Gamma dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t;\alpha,\beta,k)=\alpha it-k\log(1-\beta it) \qquad (3.5.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.5.11)'in logaritması alındığında,

$K(t:\alpha,\beta,k)=\alpha it-k\log(1-\beta it)$

bulunur.

(3.5.1)'deki o.y.f'nunda $\alpha=0$ alalım.

<u>TANIM 3.5.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\beta,k)=\frac{x^{k-1}}{\beta^k\Gamma(k)}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \qquad (3.5.13)$$

$$x > 0 \qquad \beta > 0 \qquad k > 0$$

ise x r.d'ne β ve k parametreli Gamma dağılıma sahiptir denir.

Ayrıca β ve k parametreli Gamma dağılımına İki parametreli Gamma dağılımı da denir.

İki parametreli Gamma dağılımını, $Gtp(x:\beta,k)$ veya $Gtp_x(\alpha,\beta,k)$ ve ilgili değişkeni, $Gtp:\beta,k$ ile göstereceğiz. Burada β ve k parametreleri, sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

İki parametreli Gamma dağılımında:

1) $k\leq 1$ için dağılım, ters J şekillidir.

2) $k>1$ için dağılımın, tek bir tepesi vardır.

İki parametreli Gamma dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, üç parametreli Gamma dağılımında olduğu gibi yapılır.

<u>TEOREM 3.5.11</u> İki parametreli Gamma dağılımının d.f,

$$F(x:\beta,k)= 1 - \frac{1}{\Gamma(k)}\Gamma\left(k;\frac{x}{\beta}\right) \qquad (3.5.14)$$

dir.

<u>TEOREM 3.5.12</u> İki parametreli Gamma dağılımının m.ç.f,

$$M(t;\beta,k)= \frac{1}{(1-\beta t)^k} \qquad t<1/\beta \qquad (3.5.15)$$

dir.

<u>TEOREM 3.5.13</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\beta^r \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(k)} \tag{3.5.16}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_0^{+\infty} \frac{x^{r+k-1}}{\beta^k\Gamma(k)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)dx \tag{3.5.16.a}$$

dir.

(3.5.16.a)'da, y=x/ß değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{r+k-1}}{\beta^k\Gamma(k)} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)dx = \frac{\beta^r}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} y^{r+k-1}\exp(-y)\,dy$$

dir. O halde,

$$\mu'_r=\beta^r \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(k)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.5.14</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\beta k \tag{3.5.17}$$

dir.

<u>TEOREM 3.5.15</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2 k \tag{3.5.18}$$

dır.

<u>TEOREM 3.5.16</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\beta\sqrt{k} \tag{3.5.19}$$

dir.

<u>TEOREM 3.5.17</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 2/\sqrt{k} \qquad (3.5.20)$$

dır.

<u>TEOREM 3.5.18</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Gamma dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3+6/k \qquad (3.5.21)$$

dır.

<u>TEOREM 3.5.19</u> İki parametreli Gamma dağılımının modu ,

$$x=\beta(k-1) \qquad k\geq 1 \qquad (3.5.22)$$

noktasındadır.

<u>TEOREM 3.5.20</u> İki parametreli Gamma dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\beta,k) = \frac{1}{(1-\beta it)^k} \qquad (3.5.23)$$

dir.

<u>TEOREM 3.5.21</u> İki parametreli Gamma dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\beta,k) = -k\log(1-\beta it) \qquad (3.5.24)$$

dir.

Tekrar (3.5.2)' deki Gamma dağılımının Standart şeklini ele alalım.

<u>TEOREM 3.5.22</u> Standart Gamma dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(x:k) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x u^{k-1}\exp(-u)\,du \qquad (3.5.25)$$

dur.

(3.5.25) 'deki fonksiyona, incomplete Gamma fonksiyon oranı denir.

$$\Gamma(k) = \int_0^x u^{k-1}\exp(-u)\,du \qquad (3.5.25.a)$$

(3.5.25.a) ' daki fonksiyona ise incomplete Gamma fonksiyonu denir. Bu fonksiyon x ve k 'ya bağlıdır. (Pearson, 1922) bir tablo oluşturmak için x yerine $m=x/\sqrt{k}$'yı kullanmayı daha elverişli bulmuştur ve incomplete Gamma fonksiyonunu,

$$I(m,k-1)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{m\sqrt{k}} u^{k-1}\exp(-u)du \qquad (3.5.25.b)$$

olarak tanımlamıştır.

3.5.1 Gamma Dağılımının Uygulama Alanları

Ω parametreli Poisson işlemine göre, $(0,\infty)$ aralığında olan olayların bir serisini ele alalım. k-ıncı olayın olması için x bekleme zamanı, $\beta=1/\Omega$ ve k gibi iki parametreli Gamma dağılımına sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:64)

Gamma dağılımı, $\Omega=1/\beta$ gibi sabit bir oranda olan k bağımsız olayın olması için gerekli toplam zaman x için uygun bir modeldir. örneğin, k hacimlik bir mal siparişini ele alalım. Bu sipariş, partiler halinde istenmiş olsun. Her bir parti, haftada Ω gibi sabit bir oranda ve diğer partilerden bağımsız olarak gerçekleşsin. Partiler arasındaki azalma zamanı Gamma değişkenidir.

Benzer şekilde bir sistemi ele alalım. Bu sistem, k alt hata olduğunda başarısız olsun. Her bir hata, Ω gibi sabit bir oranda ve diğer hatalardan bağımsız olsun. Sistemin zamana karşı dayanması Gamma dağılımına sahiptir.

Gamma dağılımının bir uygulama alanına ve incomplete Gamma fonksiyonunun kullanımına örnek olarak aşağıdaki örneği verebiliriz. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:85)

<u>ÖRNEK 3.5.1.1</u> Bir feribot, kıyıdaki bir terminalden diğer bir kıyıdaki terminale otomobil taşımaktadır. Feribot terminalde 9 otomobil olduğunda, bu otomobilleri karşı kıyıdaki terminale taşımak için bulunduğu terminalden haraket etmektedir. Verilen bir zaman aralığında, terminale ortalama

olarak saatta 6 otomobilin, birbirinden bağımsız olarak geldiği gözlenmiştir. Buna göre,

a) Ardışık yolculuklar arasındaki zamanın 1 saatten daha az olması olasılığını,

b) Ayrılmalar arasındaki t zamanının yüzde 1 olasılıkla geçmesini hesaplayalım.

Feribotun kıyıdaki terminallerden ayrılmaları arasındaki zaman bir Gamma değişkenidir. Bu örnekte k=9 ve $\Omega=1/\beta=6$ dır. Problemin ilk kısmının çözümü için, iki parametreli Gamma dağılımının dağılım fonksiyonunu kullanacağız. (3.5.14)'deki dağılım fonksiyonunu, Ω cinsinden ifade edersek, d.f

$$F(x:\Omega,k)= 1 - \frac{\Omega^{k}}{\Gamma(k)} \int_{0}^{x} u^{k-1}\exp(-\Omega u)du \qquad (3.5.1.1)$$

olur.

$m=\Omega x/\sqrt{k}$ 'dır. Yani F(1;6,9)'u hesaplamamız gerekir. $m=\Omega x/\sqrt{k}$ => m=2.0 bulunur. (3.5.25.b)'de I(2.0,8)=0.153 dir. O halde ardışık ayrılmalar arasındaki zamanın 1 saatten daha az olması olasılığı, 0.153'tür.

Problemin ikinci kısmının çözümü için, yüzde doksan dokuzunu belirlememiz gerekir. Yani F(x:6,9)=0.99 eşitliğini sağlayan x değerini hesaplamamız gerekir. (3.5.1.1)'de değerleri yerine koyalım. özel olarak I(m,8)=0.99 alalım. Bu m=5.8 iken doğrudur. O halde, $m=\Omega x/\sqrt{k}$ => 6x/3=5.8 => x=2.90 saat bulunur. Yani ayrılmaların zamanı arasındaki gecikmelerin yüzde bir olasılıkla geçmesi durumunda gecikme 2.9 saattır.

3.5.2 Gamma Dağılımının Parametre Tahminleri

önce üç parametreli Gamma dağılımının α, β ve k parametrelerinin tahminlerini, momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri α, β ve k gibi üç parametreli Gamma dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

Üç parametreli Gamma dağılımın ortalaması, varyansı ve ortalama etrafındaki 3-üncü mementi sırasıyla (3.5.5), (3.5.6) ve (3.5.8.b)'deki gibidir. Bunları sırasıyla, (1.6.2), (1.6.3) ve (1.6.4)'deki örneklemin merkezi, ikinci ve üçüncü momentleri olan m_1, m_2 ve m_3'e eşitlediğimizde,

$$\hat{\alpha} = m_1 - \frac{2m_2^2}{m_3}$$

$$\hat{\beta} = \frac{m_3}{2m_2}$$

$$\hat{k} = \frac{4m_2^3}{m_3^2}$$

bulunur.

Şimdi de, iki parametreli Gamma dağılımının β ve k parametrelerinin tahminlerini, momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri β ve k gibi iki parametreli Gamma dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

İki parametreli Gamma dağılımın ortalaması ve varyansı sırasıyla (3.5.17) ve (3.5.18)'deki gibidir. Bunları sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.3)'deki örneklem ortalaması ve varyansı olan $m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$'ye eşitlediğimizde,

$$\hat{\beta} = \frac{S^2}{\bar{x}}$$

$$\hat{k} = \frac{\bar{x}^2}{S^2}$$

bulunur.

Parametre tahminiyle ilgili aşağıdaki örneği inceleyelim. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:88)

<u>ÖRNEK 3.5.2.1</u> Bir malın siparişi ile partiler halinde elde edilmesi arasındaki geçen zamanın Gamma dağılımına sahip olduğunu yada iki parametreli bir Gamma modele uyduğunu

yukarıda belirtmiştik. 20 rastgele sipariş ve siparişlerin elde edilmesi için geçen zaman, tablo 2.' de verilmiştir. Bu bilgilerden β ve k parametrelerinin tahminlerini hesaplayalım.

Sipariş numarası	Gün cinsinden geçen zaman
1	10
2	10
3	6
4	11
5	8
6	7
7	11
8	12
9	12
10	6
11	10
12	6
13	13
14	8
15	12
16	7
17	6
18	16
19	9
20	5

Tablo 2. Sipariş ve gün cinsinden geçen zaman.

Verilerden $n=20$

$\sum_{i=1}^{20} x_i=185$ ve $\sum_{i=1}^{20} x_i^2=1875$ dir.

$\bar{x}=9.25$ ve $S^2=8.6142$ elde edilir. O halde,

$\hat{\beta}= 0.9313$

$\hat{k}= 9.9327$

bulunur.

3.5.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:63-69)'da verilen bağıntılar.

1) Sürekli tipteki bir X r.d α, β ve k gibi üç parametreli Gamma dağılıma sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, k parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

2) $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız ve herbiri Ω ve p parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$, $\alpha=n\log\Omega$,$\beta=1/p$ ve k=n gibi üç parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

3) k parametreli Standart Gamma dağılımı, β ve k parametreli Gamma dağılımının, $\beta=1$ özel halidir.

4) Standart üstel dağılım, β ve k gibi iki parametreli Gamma dağılımının, $\beta=1$ ve k=1 özel halidir.

5) β parametreli üstel dağılım, β ve k gibi iki parametreli Gamma dağılımının k=1 özel halidir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k gibi iki parametreli Gamma dağılımına sahip ise, $Y=X/\beta$, k parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Standart Gamma dağılımına sahip ise, $Y=\beta X$, β ve k gibi iki parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

8) $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız ve herbiri Standart dörtgensel dağılımına sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} [-\beta\log(X_i)]$, β ve k=n gibi iki parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

9) X_i i=1,2,3,...,k birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{k} X_i$, k parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

10) Standart üstel dağılım, k parametreli Standart Gamma dağılımının k=1 özel halidir.

11) k parametreli Erlang dağılımı, k parametreli Standart Gamma dağılımının, k'nın pozitif tamsayı durumundaki özel halidir.

12) k parametreli Standart Gamma dağılımı, α, β ve k gibi üç parametreli Gamma dağılımının $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

13) $k \rightarrow \infty$, k parametreli Standartlaştırılmış Gamma dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=(1/2)X^2$, $k=1/2$ parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

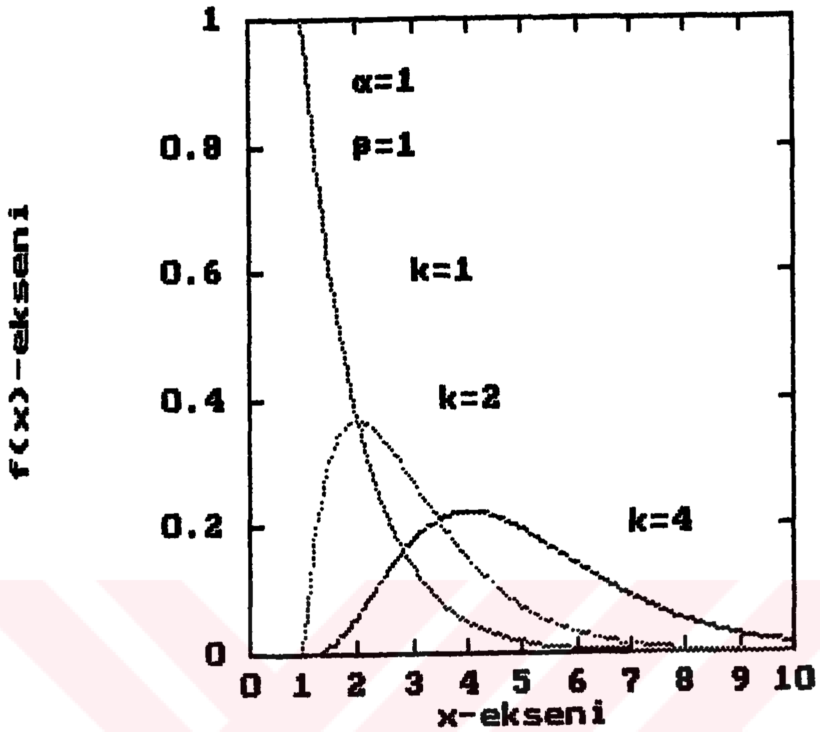
15) Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Standart Gamma dağılımına sahip ise $Y=\alpha+\beta X$, α, β ve k gibi üç parametreli Gamma dağılıma sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=X/2$, $k=v/2$ parametreli Standart Gamma dağılıma sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=-\log X$, k=1 parametreli Standart Gamma dağılıma sahiptir.

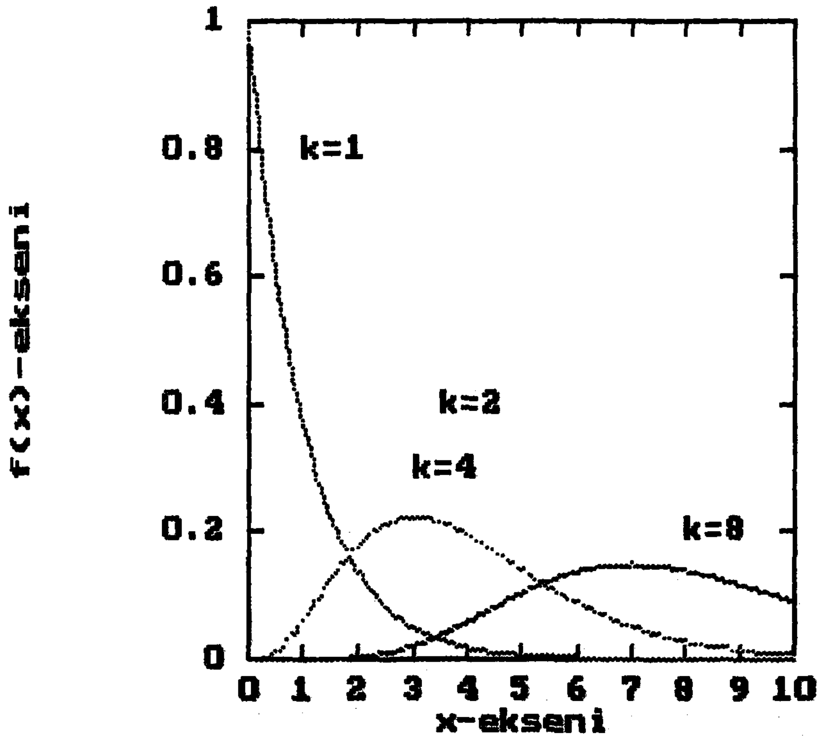
18) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri sırasıyla k_1 ve k_2 parametreli Standart Gamma dağılımına sahip iseler, $Y=X_1/(X_1+X_2)$, k_1 ve k_2 parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=(1/2)[(X-\mu)/\sigma]^2$, $k=1/2$ parametreli Standart Gamma dağılıma sahiptir.



Şekil 22. Üç parametreli Gamma Dağılımının α=1 β=1 ve k=1 k=2 k=4 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 23. Standart Gamma Dağılımının k=1 k=2 k=4 k=8 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.6 Kikare Dağılımı

İstatistik teorisinde, Standart Gamma dağılımının başlıca önemi, eğer $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_v$ 'ler birim normal değişkenler ise, $\sum_{i=1}^{v} U_i^2$'nin dağılımı, (3.5.1)'deki o.y.f'nunda $\alpha=0$, $\beta=2$ ve $k=(1/2)v$ özel hali olmasıdır. Gamma dağılımının bu özel haline, v serbestlik dereceli Kikare dağılımı denir.

$(1/2)\sum_{i=1}^{v} U_i^2$ 'ler, $k=(1/2)v$ olan bir Standart Gamma dağılımıdır. (Johnson ve Kotz, 1970 s:167)

$$f(x:v)=\frac{x^{\frac{1}{2}v-1}}{2^{\frac{1}{2}v}\Gamma(\frac{1}{2}v)}\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \qquad x>0 \qquad (3.6.1)$$

Burada v, pozitif bir tamsayı olmalıdır.

(3.6.1) 'deki o.y.f 'nuna, v pozitif bir tamsayı olmak üzere, v serberstlik dereceli Kikare dağılımı denir.

<u>TANIM 3.6.1</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:v)=\frac{x^{\frac{1}{2}v-1}}{2^{\frac{1}{2}v}\Gamma(\frac{1}{2}v)}\exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \qquad (3.6.2)$$

$x>0$ v pozitif bir tamsayı

ise x r.d'ne, v serbestlik dereceli yada v parametreli Kikare dağılıma sahiptir denir.

v parametreli Kikare dağılımını, CHS(x:v) veya $CHS_x(v)$ ve ilgili değişkeni, CHS:v ile göstereceğiz. Burada v parametresi, dağılımın şekil parametresidir.

<u>TEOREM 3.6.1</u> v parametreli yada v serbestlik dereceli Kikare dağılımının d.f, yaklaşık olarak:

1) $U=\dfrac{x-E(x)}{\sqrt{Var(x)}}$ Standart birim değişken olmak üzere x r.d, v serbestlik dereceli Kikare dağılımına sahip ise,

$$\lim_{v \to \infty} \text{Prob}\left[\frac{x-v}{\sqrt{(2v)}} \leq u \right] = \Phi(u) \qquad (3.6.3)$$

dir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:40)

Burada $\Phi(u)$ (3.1.1.3)'deki gibidir.

Sonuç olarak, $v \to \infty$, Standartlaştırılmış Kikare dağılımı, bir Standart Normal dağılıma yakınsar.

Kikare dağılımının d.f'na en basit yaklaşım,

$$F(x)=\text{Prob}[X \leq x]=\Phi\left(\frac{x-v}{\sqrt{(2v)}}\right) \qquad (3.6.4)$$

dir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:176)

v çok büyük olmadığında, bu iyi bir yaklaşım değildir. d.f'na daha iyi yaklaşımlar, Kikarenin değişik fonksiyonlarının asimtotik normalitesinden faydalınarak elde edilir. Bunların içerisinde en iyi olanları ,

2) Fisher'in yaklaşımı: (Fisher, 1922)

$$F(x)=\text{Prob}[X \leq x]=\Phi(\sqrt{(2x)} - \sqrt{(2v-1)}) \qquad (3.6.5)$$

Burada $\Phi(u)$, (3.1.1.3)'deki gibidir.

ve

3) Wilson-Hilferty'nin yaklaşımı: (Wilson ve Hilferty, 1931)

$$F(x)=\text{Prob}[X \leq x]=\Phi\left(\left\{\left(\frac{x}{v}\right)^{(1/3)} - 1 + \frac{2}{9v}\right\}\sqrt{(9v/2)}\right) \qquad (3.6.6)$$

dır.

Bu üç yaklaşımı birbirleriyle karşılaştıracak olursak, (3.6.6)'daki yaklaşım, (2.6.5)'deki yaklaşımdan daha iyi bir yaklaşımdır. Bununla birlikte, (3.6.5) ve (3.6.6)'daki yaklaşımların her ikiside, (3.6.4)'deki yaklaşımdan daha iyidir.

v parametreli Kikare dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Gamma dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.6.2 v parametreli Kikare dağılımının m.ç.f,

$$M(t;v)=\frac{1}{(1-2t)^{½v}} \qquad t<½ \tag{3.6.7}$$

dir.

TEOREM 3.6.3 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=2^r\frac{\Gamma(r+½v)}{\Gamma(½v)} \tag{3.6.8}$$

dir.

TEOREM 3.6.4 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise,

$$E(x)=v \tag{3.6.9}$$

dir.

TEOREM 3.6.5 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=2v \tag{3.6.10}$$

dır.

TEOREM 3.6.6 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{(2v)} \tag{3.6.11}$$

dir.

TEOREM 3.6.7 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= 2\sqrt{(2/v)} \tag{3.6.12}$$

dır.

TEOREM 3.6.8 Sürekli tipteki bir x r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 3+(12/v) \tag{3.6.13}$$

dır.

TEOREM 3.6.9 v parametreli Kikare dağılımının modu ,

$$x=\begin{cases} v\leq 2 \text{ ise}, & 0 \\ v>2 \text{ ise}, & v-2 \end{cases} \tag{3.6.14}$$

noktasındadır.

<u>TEOREM 3.6.10</u> v parametreli Kikare dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;v)=\frac{1}{(1-2it)^{\frac{1}{2}v}} \qquad (3.6.15)$$

dir.

<u>TEOREM 3.6.11</u> v parametreli Kikare dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:v)=-\frac{v}{2}\log(1-2it) \qquad (3.6.16)$$

dir.

3.6.1 Kikare Dağılımının Uygulama Alanları

Kikare dağılımının uygulamaları genellikle; standartlaştırılmış bir Normal dağılımdan alınmış v rastgele gözlemin değerlerinin karelerinin toplamı, v serbestlik dereceli Kikare dağılımına sahiptir, gerçeğinden hareketle yapılan uygulamalardan oluşur.

3.6.2 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:34-37)'de verilen bağıntılar.

1) Sürekli tipteki bir X r.d, v parametreli Kikare dağılıma sahip ise, Y=X/2, k=v/2 parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

2) $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ birbirinden bağımsız ve herbiri Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, v=n parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

3) v=2 parametreli Kikare dağılımı, β parametreli Üstel dağılımın β=2 özel halidir.

4) X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F-dağılımına sahip ise, $v_2 \to \infty$, $Y=v_1X$'in dağılımı, v_1 parametreli Kikare dağılımına yakınsar.

5) $v \to \infty$ Standartlaştırılmış Kikare dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=X/2$, $k=v/2$ parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, $v=2$ parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=X/2$, Standart üstel dağılıma sahiptir.

8) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri sırasıyla, v_1 ve v_2 parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=(X_1/v_1)/(X_2/v_2)$, v_1 ve v_2 parametreli F-dağılımına sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, $v=2$ parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X/2)$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

10) $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri sırasıyla, $\mu=0$ ve σ_i^2 $i=1,2,3,\ldots,n$ parametreli Normal dağılıma sahip ise, $Y=\sum_{i=1}^{n} (X_i^2/\sigma_i^2)$, $v=n$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

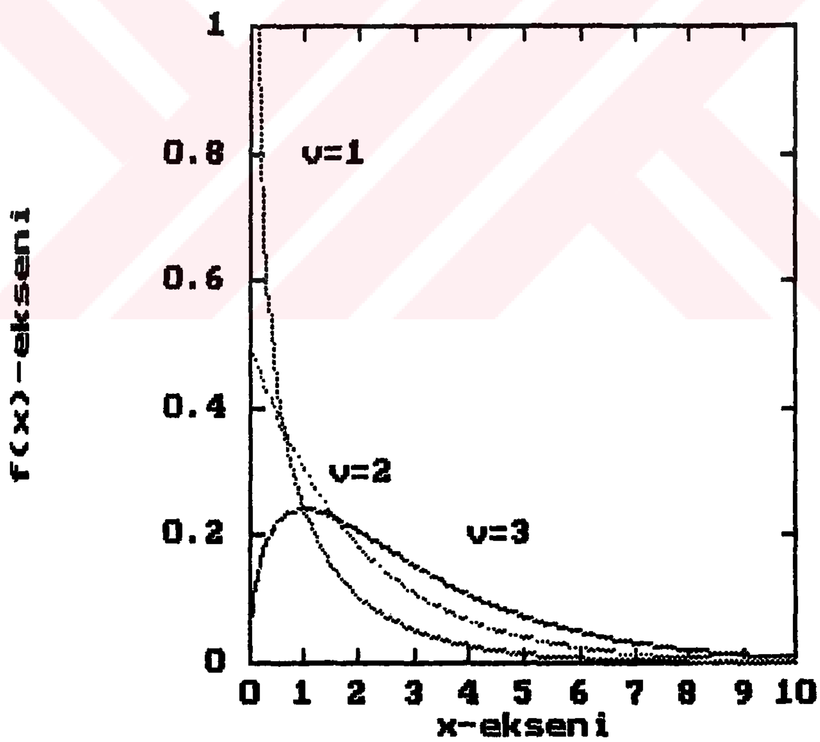
11) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, $Y=-2\log(X)$, $v=2$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

12) Sürekli tipteki bir X r.d, μ ve σ parametreli Standart İnvers Gauss dağılımına sahip ise, $Y=[\sigma(X-\mu)^2]/(\mu^2 X)$, $v=1$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

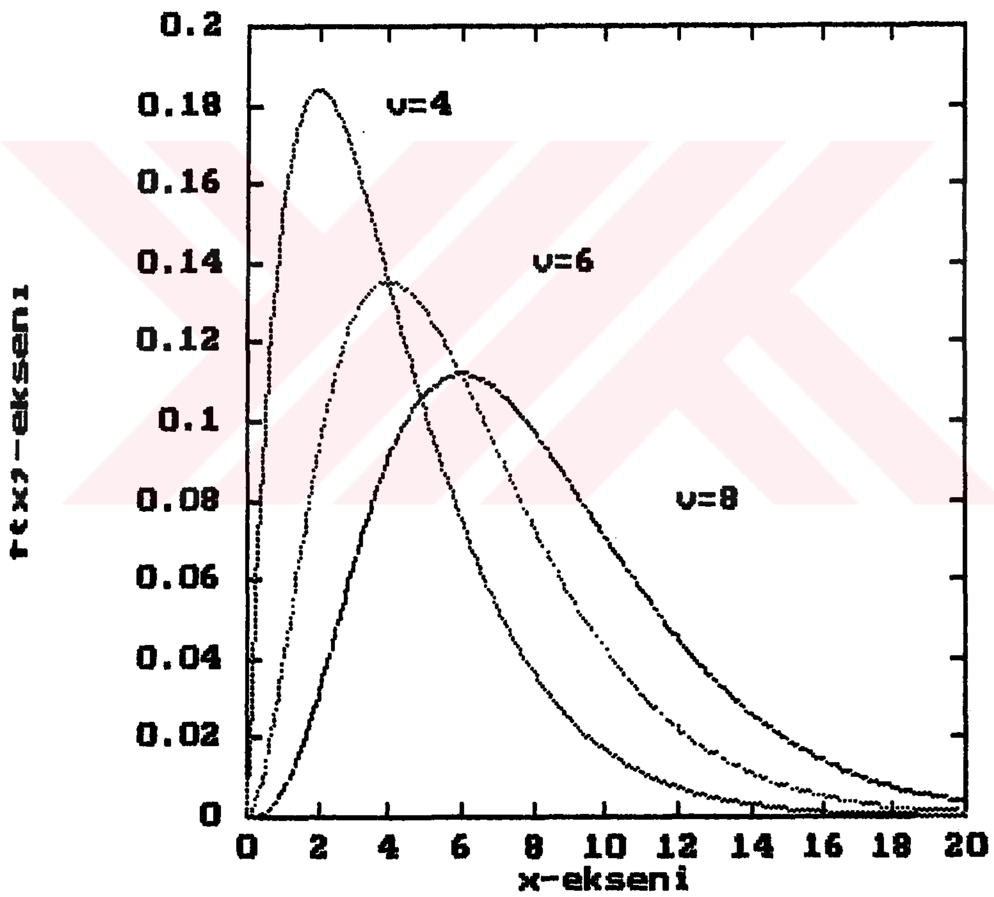
13) Sürekli tipteki bir X_1 r.d, Standart Normal dağılıma ve X_2 r.d, v parametreli Kikare dağılımına sahip ve X_1 ile X_2 birbirinden bağımsız iseler, $Y=X_1/\sqrt{(X_2/v)}$, v parametreli T-dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri v parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=[\sqrt{v}(X_2-X_1)]/2\sqrt{(X_1X_2)}$, v parametreli T-dağılımına sahiptir.

15) Sürekli tipteki X_1 ve X_2 r.d'leri birbirinden bağımsız ve herbiri sırasıyla $v_1=1$ ve $v_2=2$ parametreli Kikare dağılımına sahip ise, $Y=X_1X_2$, $\tau=1/2$ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.



Şekil 24. Kikare Dağılımının v=1 v=2 v=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



Şekil 25. Kikare Dağılımının v=4 v=6 v=8 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

3.7 Erlang Dağılımı

TANIM 3.7.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:k)=\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp(-x) \qquad (3.7.1)$$

$x > 0$ k pozitif tamsayı

ise x r.d'ne k parametreli Erlang dağılımına sahiptir denir.

Erlang dağılımı, Standart Gamma dağılımının k'nın pozitif tamsayı olma durumundaki özel halidir.

k parametreli Erlang dağılımını, ER(x:k) veya $ER_x(k)$ ve ilgili değişkeni, ER:k ile göstereceğiz. Burada k parametresi, dağılımın şekil parametresidir.

Erlang dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Gamma dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.7.1 k parametreli Erlang dağılımının d.f,

$$F(x:k)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x u^{k-1}\exp(-u)du \qquad (3.7.2)$$

dur.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:k)=\int_0^x \frac{u^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp(-u)du=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x u^{k-1}\exp(-u)du$$

bulunur.

TEOREM 3.7.2 k parametreli Erlang dağılımının m.ç.f,

$$M(t:k)=\frac{1}{(1-t)^k} \qquad (3.7.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:k)=\int_0^{+\infty}\exp(tx)\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp(-x)dx \quad \text{dir.}$$

Bazı düzenlemelerden sonra,

$$M(t:k)=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)}\exp\{-x(1-t)\}dx \qquad (3.7.3.a)$$

elde edilir.

(3.7.3.a)'da, $y=x(1-t)$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$M(t:k)=\frac{1}{\Gamma(k)(1-t)^{k}}\int_{0}^{+\infty}y^{k-1}\exp(-y)dy \text{ dir.}$$

$$\int_{0}^{+\infty}y^{k-1}\exp(-y)dy=\Gamma(k) \text{ dır. O halde,}$$

$$M(t:k)=\frac{1}{(1-t)^{k}}$$

bulunur.

TEOREM 3.7.3 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_{r}=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(k)} \qquad (3.7.4)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'r=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{r+k-1}}{\Gamma(k)}\exp(-x)dx=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{0}^{+\infty}x^{r+k-1}\exp(-x)dx$$

$$\int_{0}^{+\infty}x^{r+k-1}\exp(-x)dx=\Gamma(r+k) \text{ dır. O halde,}$$

$$\mu'_r = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(k)}$$

bulunur.

TEOREM 3.7.4 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise,

$$E(x)=k \qquad (3.7.5)$$

dir.

TEOREM 3.7.5 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=k \qquad (3.7.6)$$

dır.

TEOREM 3.7.6 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{k} \qquad (3.7.7)$$

dir.

TEOREM 3.7.7 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= 2/\sqrt{k} \qquad (3.7.8)$$

dır.

TEOREM 3.7.8 Sürekli tipteki bir x r.d, k parametreli Erlang dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 3+(6/k) \qquad (3.7.9)$$

dır.

TEOREM 3.7.9 k parametreli Erlang dağılımının modu ,

$$x=k-1 \qquad k\geq 1 \qquad (3.7.10)$$

noktasındadır.

TEOREM 3.7.10 k parametreli Erlang dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t:k)= \frac{1}{(1-it)^k} \qquad (3.7.11)$$

dir.

<u>TEOREM 3.7.11</u> k parametreli Erlang dağılımın kümülant fonksiyonu,

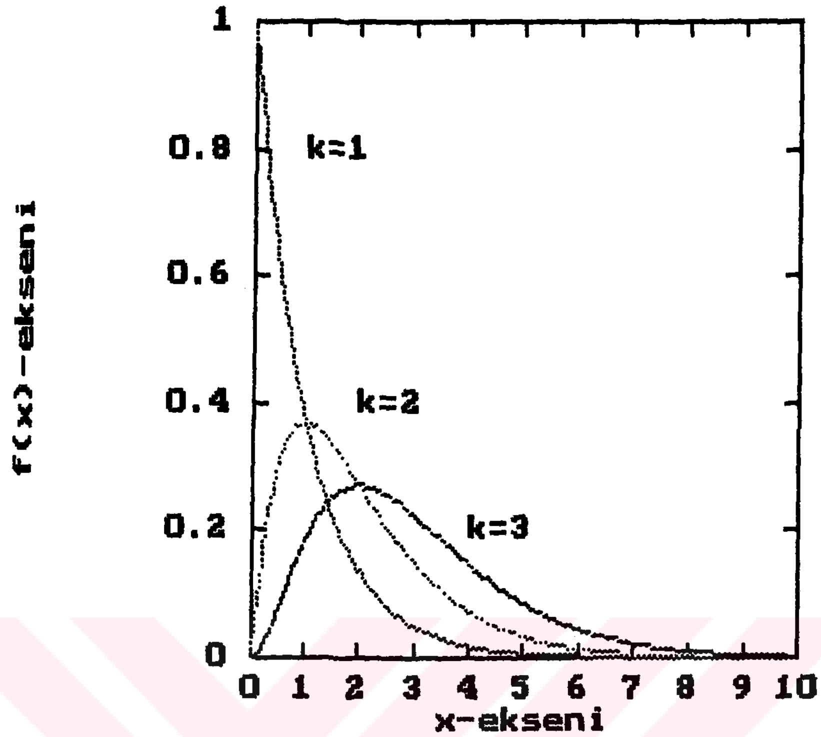
$$K(t:k)=-k\log(1-it) \qquad (3.7.12)$$

dir.

3.7.1 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

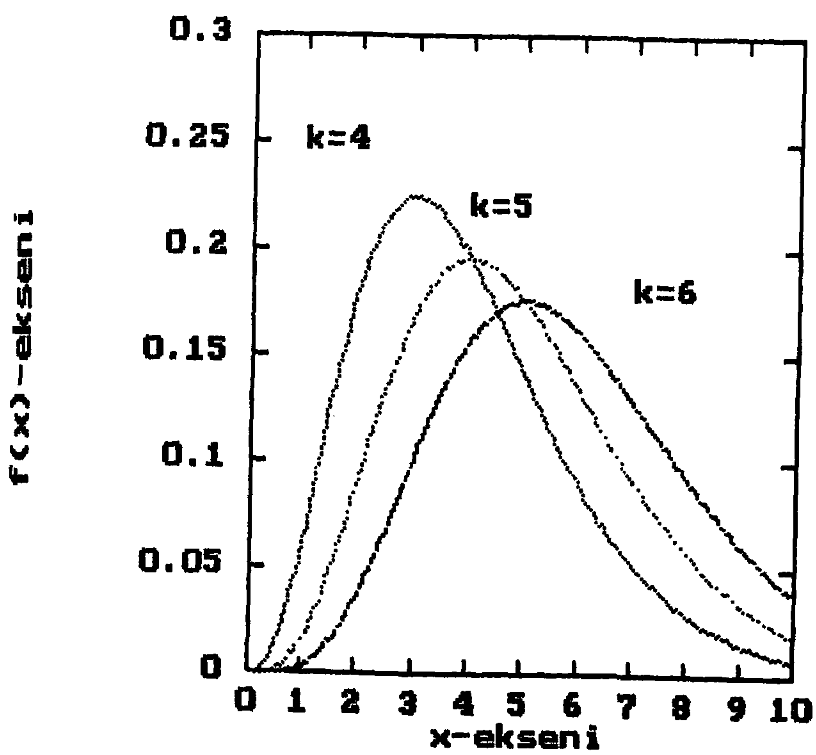
(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:75)'de verilen bağıntılar.

1) k parametreli Erlang dağılımı, k parametreli Standart Gamma dağılımının, k 'nın pozitif tamsayı olduğu durumundaki özel halidir.



Şekil 26. Erlang Dağılımının k=1 k=2 k=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 27. Erlang Dağılımının k=4 k=5 k=6 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.8 Üstel Dağılım

TANIM 3.8.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad (3.8.1)$$

$$x > \alpha > 0 \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne α, β parametreli üstel dağılıma sahiptir denir.

İki parametreli üstel dağılımı, $Etp(x:\alpha,\beta)$ veya $Etp_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, $Etp:\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Burada α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

İki parametreli üstel dağılıma Negatif üstel dağılım da denir.

(3.8.1)'de, $\alpha=0$ alınırsa, Bir parametreli üstel dağılım elde edilir.

(3.8.1)'de, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ alınırsa, Standart üstel, aynı zamanda Standartlaştırılış üstel dağılım elde edilir.

TEOREM 3.8.1 İki parametreli üstel dağılımın d.f,

$$F(x:\alpha,\beta)= 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \qquad (3.8.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta)= \int_0^x \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du \qquad (3.8.2.a)$$

dur.

(3.8.2.a)'da, $y=(u-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

bulunur.

TEOREM 3.8.2 İki parametreli üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M(t;\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)/(1-\beta t) \qquad \beta>0 \qquad (3.8.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t;\alpha,\beta) = \exp(\alpha/\beta) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp\left\{- x\left(\frac{1-\beta t}{\beta}\right)\right\}dx \qquad (3.8.3.a)$$

dir.

(3.8.3.a)'da, $y=x[(1-\beta t)/\beta]$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında, sadeleştirmelerden sonra,

$$M(t;\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)/(1-\beta t)$$

bulunur.

TEOREM 3.8.3 Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli üstel dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha+\beta \qquad (3.8.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x)=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M'(t)\big|_{t=0}$ dır.

$$M'(t)=\frac{\exp(\alpha t)[\alpha(1-\beta t)+\beta]}{(1-\beta t)^2}$$

dir. O halde,

$$E(x)=\alpha+\beta$$

bulunur.

TEOREM 3.8.4 Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli üstel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2 \qquad (3.8.5)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^2)=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}|_{t=0}=M''(t)|_{t=0}$ dir.

$$M''(t)=\frac{[\alpha(1-\beta t)+\beta]\exp(\alpha t)\{\alpha(1-\beta t)+2\beta\}-\alpha\beta\exp(\alpha t)(1-\beta t)}{(1-\beta t)^3}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2 \qquad (3.8.5.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.8.5.a) ve (3.8.4) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\beta^2$

bulunur.

<u>TEOREM 3.8.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Üstel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\beta \qquad (3.8.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.8.5) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\beta$

bulunur.

<u>TEOREM 3.8.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Üstel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= 2 \qquad (3.8.7)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^3)=\frac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}|_{t=0}=M'''(t)|_{t=0}$ dir.

$$M'''(t)=\frac{\exp(\alpha t)}{(1-\beta t)^4}\{[\alpha(1-\beta t)+3\beta][\alpha^2(1-\beta t)^2+2\alpha\beta(1-\beta t)+2\beta^2]$$
$$-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta](1-\beta t)\}$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+6\beta^3 \qquad (3.8.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.8.7.a), (3.8.5.a) ve (3.8.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=2\beta^3$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=2$

bulunur.

TEOREM 3.8.7 Sürekli tipteki bir x r.d, iki parametreli üstel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 9 \tag{3.8.8}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^4)=\dfrac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\Big|_{t=0}$ dir.

$$M^{(iv)}(t)=\frac{\exp(\alpha t)\{\alpha(1-\beta t)+4\beta\}}{(1-\beta t)^5}\{[\alpha(1-\beta t)+3\beta][\alpha^2(1-\beta t)^2+2\alpha\beta(1-\beta t)+2\beta^2]-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta](1-\beta t)\}$$

$$+\frac{\exp(\alpha t)}{(1-\beta t)^4}\{-\alpha\beta[\alpha^2(1-\beta t)^2+2\alpha\beta(1-\beta t)+2\beta]-2\alpha\beta[\alpha(1-\beta t)+\beta][\alpha(1-\beta t)+3\beta t]+4\alpha^2\beta^2(1-\beta t)-2\alpha\beta^2\}$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\alpha^4+4\alpha^3\beta+12\alpha^2\beta^2+24\alpha\beta^3+24\beta^4 \tag{3.8.8.a}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.8.8.a), (3.8.7.a), (2.8.5.a) ve (3.8.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=9\beta^4$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4= 9$

bulunur.

TEOREM 3.8.8 İki parametreli üstel dağılımının modu,

$$x=\alpha \tag{3.8.9}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.8.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, herhangi bir x çözümü bulunamaz. Uç noktalara bakıldığında, x=α değeri için (3.8.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, iki parametreli üstel dağılımın modu,

$x=\alpha$

bulunur.

<u>TEOREM 3.8.9</u> İki parametreli üstel dağılımın medyanı,

$$\beta\log 2+\alpha \qquad (3.8.10)$$

dır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, $y=(u-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$1-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)=\frac{1}{2}$$

dir. Buradan,

$$x=\beta\log 2+\alpha$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.8.10</u> İki parametreli üstel dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\xi(t;\alpha,\beta)=\frac{\exp(\alpha it)}{(1-\beta it)} \qquad (3.8.11)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.8.3)'de, t yerine it alındığında,

$$\xi(t;\alpha,\beta)=\frac{\exp(\alpha it)}{(1-\beta it)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.8.11</u> İki parametreli üstel dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\alpha,\beta)=\alpha it-k\log(1-\beta it) \qquad (3.8.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.8.12)'nin logaritması alındığında,

$$K(t:\alpha,\beta)=\alpha it-k\log(1-\beta it)$$

bulunur.

(3.8.1)'deki o.y.f'nunda $\alpha=0$ alalım.

TANIM 3.8.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\beta)=\frac{1}{\beta}\exp(-\frac{x}{\beta}) \qquad (3.8.13)$$

$$x > 0 \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne β parametreli üstel dağılıma sahiptir denir.

Ayrıca β parametreli üstel dağılıma Bir parametreli üstel dağılımı da denir.

Bir parametreli üstel dağılımı, $Eop(x;\beta)$ veya $Eop_x(\beta)$ ve ilgili değişkeni, $Eop;\beta$ ile göstereceğiz. Burada β parametresi, dağılımın yayılım parametresidir.

Bir parametreli üstel dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, İki parametreli üstel dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.8.12 Bir parametreli üstel dağılımın d.f,

$$F(x;\beta)= 1 - \exp(\frac{x}{\beta}) \qquad (3.8.14)$$

dir.

TEOREM 3.8.13 Bir parametreli üstel dağılımın m.ç.f, çıkaran fonksiyonu,

$$M(t;\beta)= \frac{1}{(1-\beta t)} \qquad t<1/\beta \qquad (3.8.15)$$

dir.

TEOREM 3.8.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Bir parametreli üstel dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\beta \qquad (3.8.16)$$

dir.

TEOREM 3.8.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Bir parametreli üstel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2 \qquad (3.8.17)$$

dir.

TEOREM 3.8.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Bir parametreli üstel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\beta \qquad (3.8.18)$$

dır.

TEOREM 3.8.17 Sürekli tipteki bir x r.d, Bir parametreli üstel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 2 \qquad (3.8.19)$$

dır.

TEOREM 3.8.18 Sürekli tipteki bir x r.d, Bir parametreli üstel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 9 \qquad (3.8.20)$$

dır.

TEOREM 3.8.19 Bir parametreli üstel dağılımın modu ,

$$x=0 \qquad (3.8.21)$$

noktasındadır.

TEOREM 3.8.20 Bir parametreli üstel dağılımın medyanı,

$$\beta \log 2 \qquad (3.8.22)$$

dir.

TEOREM 3.8.21 Bir parametreli üstel dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\beta) = \frac{1}{(1-\beta i t)} \qquad (3.8.23)$$

dir.

TEOREM 3.8.22 Bir parametreli üstel dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\beta) = -\log(1-\beta i t) \qquad (3.8.24)$$

dir.

TANIM 3.8.3 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x)=\exp(-x) \qquad x > 0 \qquad (3.8.25)$$

ise x r.d'ne Standart üstel dağılıma sahiptir denir.

Standart üstel dağılımı, SE ile göstereceğiz.

Standart üstel dağılım için hesaplamalar ve ispatlar, İki parametreli üstel dağılımda olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.8.23 Standart üstel dağılımın d.f,

$$F(x) = 1 - \exp(-x) \qquad x > 0 \qquad (3.8.26)$$

dir.

<u>TEOREM 3.8.24</u> Standart Üstel dağılımın m.ç.f, fonksiyonu,

$$M(t;\beta)= \frac{1}{1-t} \qquad t < 1 \qquad (3.8.27)$$

dir.

<u>TEOREM 3.8.25</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise,

$$E(x)=1 \qquad (3.8.28)$$

dir.

<u>TEOREM 3.8.26</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=1 \qquad (3.8.29)$$

dir.

<u>TEOREM 3.8.27</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=1 \qquad (3.8.30)$$

dır.

<u>TEOREM 3.8.28</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= 2 \qquad (3.8.31)$$

dır.

<u>TEOREM 3.8.29</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 9 \qquad (3.8.32)$$

dır.

<u>TEOREM 3.8.30</u> Standart Üstel dağılımın modu ,

$$x=0 \qquad (3.8.33)$$

noktasındadır.

<u>TEOREM 3.8.31</u> Standart Üstel dağılımın medyanı,

$$\beta \log 2 \qquad (3.8.34)$$

dir.

TEOREM 3.8.32 Standart üstel dağılımın karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t)=\frac{1}{1-it} \qquad (3.8.35)$$

dir.

TEOREM 3.8.33 Standart üstel dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t)=-\log(1-it) \qquad (3.8.36)$$

dir.

3.8.1 Üstel Dağılımın Uygulama Alanları

Üstel dağılımın en yaygın uygulamaları, yaşam-testi (life-testing) alanındadır.

Bir nesnenin gelecekteki yaşam zamanı, dayanma süresi o anki yaşına bakılmaksızın aynı dağılıma sahip ise, bu nesnenin x yaşam zamanı, Bir parametreli üstel dağılıma sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:45)

Bir X r.d'nin hazard oranı yada hazard fonksiyonu h(x), $\Omega=1/\beta$ gibi sabit ise, bu X r.d'ne β parametreli üstel dağılıma sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:45)

Etkilere maruz kalan bir aracı düşünelim. Her etkiyi Ω parametreli bir Poisson işlemi (Çınlar, 1975 s:71-105) takip ediyorsa, X etkilerin ardışık oluşumları arasındaki zaman aralığı olmak üzere, $\beta=1/\Omega$ parametreli üstel dağılıma sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:45)

(1.7.2)'deki tanımı tekrar bu anlamda verecek olursak,

TANIM 3.8.1.1 x Sürekli tipte bir r.d, f(x) ve F(x) sırasıyla x r.d'nin o.y.f ve d.f olmak üzere, belirtilmiş bir zaman aralığı esnasındaki başarısızlığın olasılığını veren,

$$h(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)} \qquad x > 0 \qquad (3.8.1.1)$$

fonksiyonuna, hazard oranı yada hazard fonksiyonu denir. Zamana karşı dayanma modeli olarak üstel dağılımı inceleyelim. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:105-106)

Bir parametreli üstel dağılımın o.y.f (3.8.14)'deki gibi olmak üzere , zamana karşı dayanma (time-to-failure) dağılımı olarak yaygın bir şekilde kullanılır. Genelde zaman için t r.d kullanıldığından, (3.8.14)'deki o.y.f'nu,

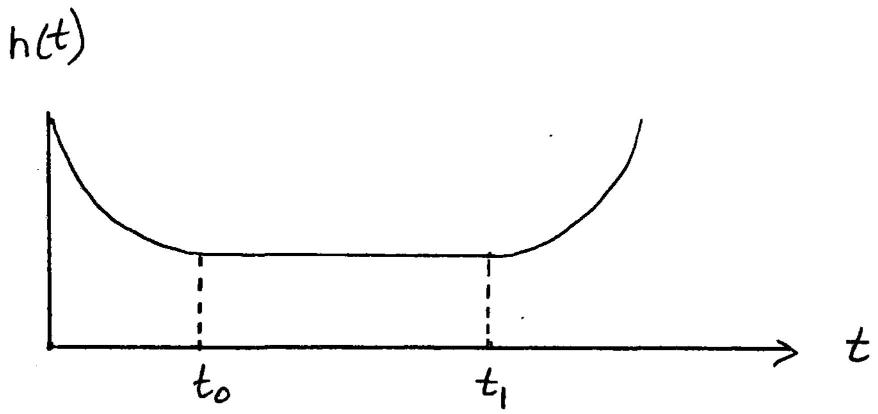
$$f(t;\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{t}{\beta}\right) \quad t>0 \quad \beta>0 \quad (3.8.1.2)$$

şeklinde yazalım.

Üstel dağılmış bir değişken için hazard fonksiyonu, (3.8.1.1)'den $h(t)=1/(\beta=\Omega)$ olmak üzere sabittir. Bunun anlamı, belirtilmiş bir zaman aralığı esnasındaki başarısızlık olasılığı sabit, sadece zaman aralığının uzunluğuna bağlıdır. Burada Ω parametresine, başarısızlık oranı (failure rate) denir.

Bir birim yada ünite için zamana karşı dayanma, üstel dağıtılmıştır. Burada birim yada ünite bağımsız ve sabit bir oranda olan bir olayın gerçekleşmesiyle bozulur. örneğin bir bütünün parçalara ayrılıp kırılması gibi. Fakat birimin yada ünitenin bir bölümü için zamana karşı dayanma dağılımı, o birimin yada ünitenin tüm yaşamı, dayanma süresi ile karşılaştırıldığında üstel değildir.

örneğin hazard fonksiyonu şekil 28.'de gösterilen bir motor bir sisteme monte edilsin, yerleştirilsin.



Şekil 28. Bir motorun hazard fonksiyonu.

Bu montaj yada yerleştirme, sistemde t_o zamanına kadar düzgün çalışan motor yandığında yada çalışamaz duruma geldiğinde gerçekleşir. Sisteme monte edelen bu motor, (t_1-t_o) zamanına kadar düzgün çalıştıktan sonra yanmış olsun ve aynı tip yeni motor sisteme tekrar monte edilsin. Bu işleme sonsuza kadar devam edilebilir. Sistemde kullanılan motorlar, için zamana karşı dayanma üstel dağıtılmıştır.

Fakat motorun toplam yaşam süresinin dağılımı üstel değildir. üstel dağılım karmaşık sistemler için zamana karşı dayanma modeli olarak , o sistemin bölümlerinin dayanma süreleri dağılımından çok daha uygundur. Bu (Drenick, 1960)'da gösterilmiştir.

üstel dağılımın güvenirlik, kalite kontrol alanında uygulamaları da vardır. örneğin elektron tüplerine, resistörlere, kapasitörlere uygulamaları, bu uygulamalar (Davis, 1952)'de detaylı olarak incelenebilir.

üstel dağılımın, Gamma dağılımının özel bir hali olduğunu daha önce belirtmiştik. Eğer olaylar birbirinden bağımsız ve sabit bir oranda gerçekleşiyorsa, üstel dağılım bir tek sonuç için uygun bir modeldir. Diğer bir ifadeyle, üstel dağılım, sabit bir oranda gerçekleşen bağımsız olayların oluşumları arasındaki zamanın dağılımıdır.

<u>ÖRNEK 3.8.1.1</u> Parçacıklar yada atomlar bir sayaca ortalama bir oranda, saniyede 2 tane, ulaşıyorsa bir atomun bir önceki atomla bir saniye için de ulaşma olasılığı (3.8.15)'den $\Omega=1/\beta=2$ alarak, $F(1)=0.865$ dir.

üstel dağılım, bir sistemdeki bir birimin yada ünitenin başarısızlık oranı sabit olduğunda, zamana karşı dayanma modeli olarak sık sık uygulanır .

3.8.2 Üstel Dağılımın Parametre Tahminleri

önce iki parametreli üstel dağılımın α ve β parametrelerinin tahmin edicilerini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri α ve β gibi iki parametreli üstel dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right\}$$

$L(\alpha,\beta)=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;\alpha,\beta)$ olsun. O halde,

$$L(\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\alpha}{\beta}\right\} \qquad (3.8.2.1)$$

dir. (3.8.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\alpha,\beta)\}=\ln\left\{\frac{1}{\beta^n}\right\}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta}+\frac{n\alpha}{\beta} \qquad (3.8.2.2)$$

dir. (3.8.2.2)'nin sırasıyla α ve β göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$\hat{\alpha}=\min\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$

ve

$$\hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)$$

bulunur.

Bir parametreli üstel dağılımın β parametresinin tahmini aynı metodla, iki parametreli üstel dağılımda olduğu gibi,

$$\hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)=\overline{x}$$

bulunur.

Bu β için bir yansız tahmin edicidir.

3.8.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:44-51)'de verilen bağıntılar.

1) β parametreli üstel dağılım, α ve β parametreli üstel dağılımın $\alpha=0$ özel halidir.

2) Standart üstel dağılım, α ve β parametreli üstel dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

3) $v=2$ parametreli Kikare dağılımı, α ve β parametreli üstel dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=2$ özel halidir.

4) α ve β parametreli üstel dağılım, α, β ve k gibi üç parametreli Gamma dağılımının $k=1$ özel halidir.

5) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β gibi iki parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=X-\alpha$, β parametreli üstel dağılımına sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=X+\alpha$, α ve β gibi iki parametreli üstel dağılımına sahiptir.

7) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri sırasıyla, α_1, β ve α_2, β parametreli üstel dağılıma sahip iseler, $Y=(X_1-X_2)$, $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ ve β parametreli Laplace dağılımına sahiptir.

8) β parametreli üstel dağılım, α, β ve k parametreli Gamma dağılımının, $\alpha=0$ ve $k=1$ özel halidir.

9) β parametreli üstel dağılım, β ve k parametreli Gamma dağılımının, $k=1$ özel halidir.

10) β parametreli üstel dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımının, $\alpha=0$ ve $\tau=1$ özel halidir.

11) β parametreli üstel dağılım, β ve τ parametreli Weibull dağılımının, $\tau=1$ özel halidir.

12) Standart üstel dağılım, β parametreli üstel dağılımın $\beta=1$ özel halidir.

13) $v=2$ parametreli Kikare dağılımı, β parametreli üstel dağılımın, $\beta=2$ özel halidir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\exp\{-(X/\beta)\}$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X)$, $p=1/\beta$ parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\beta\exp(X)$, β ve $k=1/\Omega$ parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=-\log(X)$, $\alpha=-\log\Omega$ ve $\beta=1$ parametreli Birinci tip Uç deger dağılımına sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\alpha+\beta(X/\Omega)^{1/\tau}$, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\beta(X/\Omega)^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

20) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri β parametreli üstel dağılıma sahip iseler, $Y=X_1-X_2$, $\alpha=0$ ve β parametreli Laplace dağılımına sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, $Y=-\beta\log X$, β parametreli üstel dağılıma sahiptir.

22) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=-\log X$ $\beta=1/p$ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

23) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\log(\beta X)$ $\beta=1/k$ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\Omega[(X-\alpha)/\beta]^{\tau}$, Ω parametreli üstel dağılıma sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\Omega(X/\beta)^{\tau}$, Ω parametreli üstel dağılıma sahiptir.

26) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri β parametreli üstel dağılıma sahip iseler, $Y=X_1/(X_1+X_2)$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

27) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli üstel dağılıma sahip ise, $Y=X-\alpha$, β parametreli üstel dağılıma sahiptir.

28) Standart üstel dağılım, β ve k parametreli Gamma dağılımının $\beta=1$ ve k=1 özel halidir.

29) Standart Üstel dağılım, k parametreli Standart Gamma dağılımının k=1 özel halidir.

30) Standart Üstel dağılım, α, β ve k parametreli Gamma dağılımının $\alpha=0$, $\beta=1$ ve k=1 özel halidir.

31) Standart Üstel dağılım, Ω parametreli Standart Weibull dağılımının $\Omega=1$ özel halidir.

32) Standart Üstel dağılım, β ve τ parametreli Weibull dağılımının $\beta=1$ ve $\tau=1$ özel halidir.

33) Standart Üstel dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımının $\alpha=0$, $\beta=1$ ve $\tau=1$ özel halidir.

34) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=(\alpha+\beta X^{1/\tau})$, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

35) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=\beta X^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

36) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=-\log(X)$ Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir.

37) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X)$ Standart Üstel dağılıma sahiptir.

38) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Üstel dağılıma sahip iseler, $Y=-\log(X_1/X_2)$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

39) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=-\log\{\exp(-X)/[1-\exp(-X)]\}$ Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

40) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağğılıma sahip ise, $Y=-\log\{\exp(-X)/[1+\exp(-X)]\}$ Standart Üstel dağılıma sahiptir.

41) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=\beta(1-\exp(-X))^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılıma sahiptir.

42) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılıma sahip ise, $Y=-\log\{1-(\beta/X)^{k}\}$ Standart Üstel dağılıma sahiptir.

43) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-X/p)$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

44) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=-p\log(X)$ Standart üstel dağılıma sahiptir.

45) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=X^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

46) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=X^{\tau}$ Standart üstel dağılıma sahiptir.

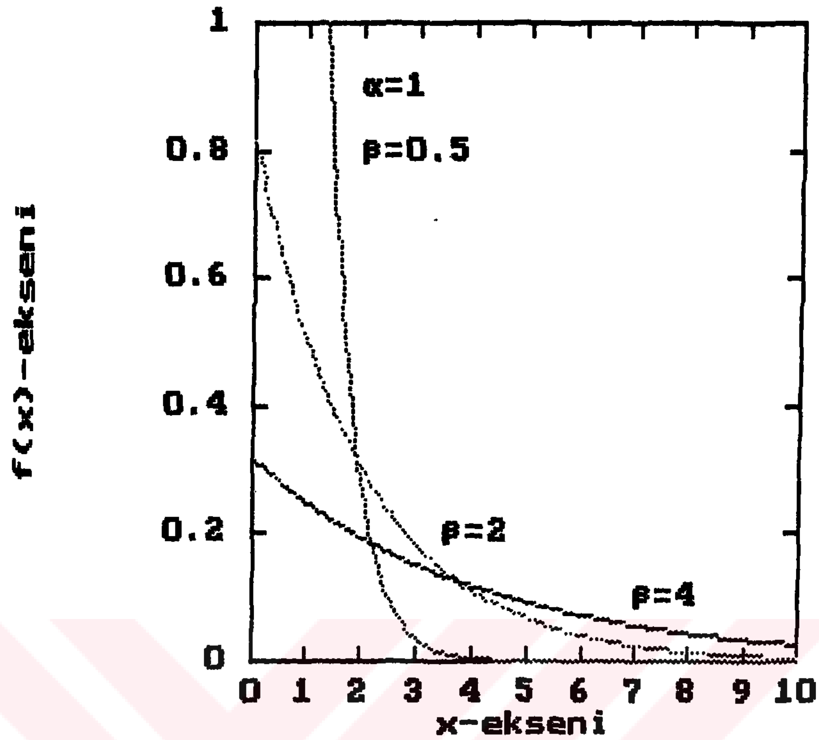
47) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart üstel dağılıma sahip iseler, $Y=X_1-X_2$, Standart Laplace dağılımına sahiptir.

48) Sürekli tipteki bir X r.d, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=[(X-\alpha)/\beta]^{\tau}$ Standart üstel dağılıma sahiptir.

49) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-X)$ Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

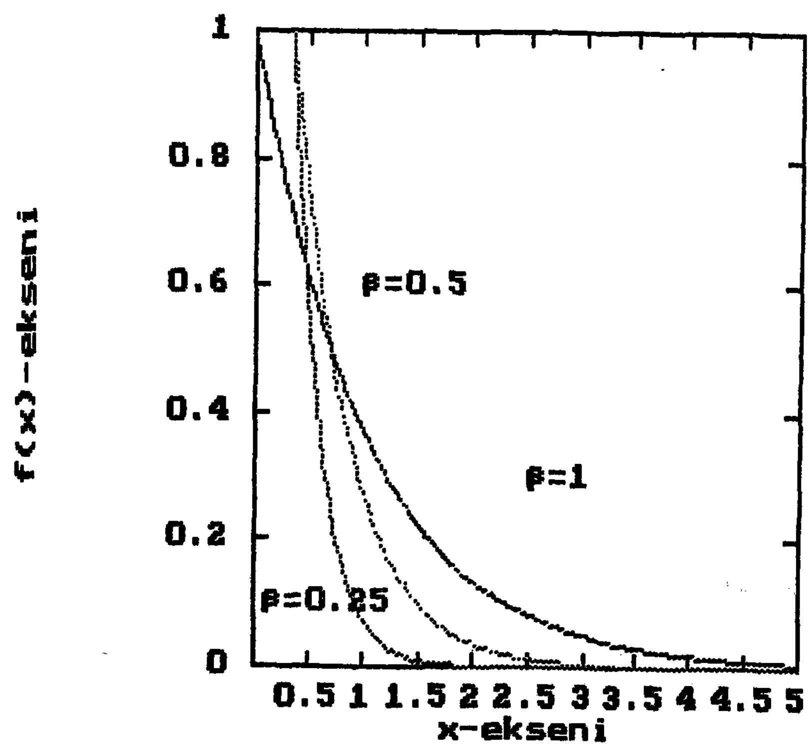
50) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[\exp(X)-1]^{1/k}$, α ve k parametreli Log-lojistik dağılıma sahiptir.

51) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve k parametreli Log-lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\log\{\exp(\alpha k)X^{k}+1\}$, Standart üstel dağılıma sahiptir.



Şekil 29. İki parametreli Üstel Dağılımın α=1 ve β=0.5 β=2 β=4 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 30. Bir parametreli Üstel Dağılımın β=0.25 β=0.5 β=1 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.9 Pareto Dağılımı

TANIM 3.9.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\beta,k)=\frac{k\beta^{k}}{x^{k+1}} \qquad x > \beta > 0 \qquad k > 0 \qquad (3.9.1)$$

ise x r.d'ne β ve k parametreli Pareto dağılıma sahiptir denir.

İki parametreli Pareto dağılımı, $PII(x:\beta,k)$ veya $PII_x(\beta,k)$ ve ilgili değişkeni, $P:\beta,k$ ile göstereceğiz. Burada β ve k parametreleri, sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

İki parametreli Pareto dağılımına, Birinci Tip Pareto dağılımı da denir.

TEOREM 3.9.1 Birinci Tip Pareto dağılımının d.f,

$$F(x:\beta,k)= 1 - \exp(-\frac{\beta}{x})^{k} \qquad (3.9.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\beta,k)=\int_{\beta}^{x}\frac{k\beta^{k}}{u^{k+1}}\,du=k\beta^{k}\int_{\beta}^{x}u^{-k-1}du$$ dur. Buradan,

$$F(x:\beta,k)=1 - \exp(-\frac{\beta}{x})^{k}$$

bulunur.

TEOREM 3.9.2 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_{r}=\frac{k\beta^{r}}{k-r} \qquad k > r \qquad (3.9.3)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_{\beta}^{+\infty} x^r \frac{k\beta^k}{x^{k+1}}dx= k\beta^k \int_{\beta}^{+\infty} x^{r-k-1}dx$$ dir. Buradan,

$$\mu'_r=\frac{k\beta^r}{k-r} \qquad k > r$$

bulunur.

TEOREM 3.9.3 Birinci Tip Pareto dağılımının m.ç.f,

$$M(t;\beta,k)= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k\beta^r}{k-r} \frac{t^r}{r!} \qquad k > r \tag{3.9.4}$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.b)'den,

$M(t)=1 +\mu'_1 t+\mu'_2 t^2/2!+...+\mu'_r t^r/r!+...$ $k>r$ dir.

(3.9.3)'ü kullanarak,

$$M(t)=1+\frac{k\beta}{k-1}+\frac{k\beta^2}{k-2}\frac{t^2}{2!}+...+\frac{k\beta^r}{k-r}\frac{t^r}{r!}+... \qquad k>r$$

$$M(t;\beta,k)= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k\beta^r}{k-r} \frac{t^r}{r!} \qquad k > r$$

bulunur.

TEOREM 3.9.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci tip Pareto dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{k\beta}{k-1} \qquad k>1 \tag{3.9.5}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.9.3)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\frac{k\beta}{k-1} \qquad k > 1$$

dir. O halde,

$$E(x)=\frac{k\beta}{k-1} \quad k>1$$

bulunur.

TEOREM 3.9.5 Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Pareto dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{k\beta^2}{(k-1)^2(k-2)} \qquad k>2 \qquad (3.9.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.9.3)'de r=2 için,

$$\mu'_2=\frac{k\beta^2}{k-2} \qquad k>2$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{k\beta^2}{k-2} \quad k>2 \qquad (3.9.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.9.6.a) ve (3.9.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{k\beta^2}{(k-1)^2(k-2)} \qquad k>2$$

bulunur.

TEOREM 3.9.6 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Pareto dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{\beta}{(k-1)}\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}\right)} \qquad k>2 \qquad (3.9.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.9.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{\beta}{(k-1)}\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}\right)} \qquad k>2$$

bulunur.

TEOREM 3.9.7 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=2\frac{k+1}{k-3}\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)} \qquad k>3 \tag{3.9.8}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^3)=\mu'_3$ tür. (3.9.3)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{k\beta^3}{k-3} \qquad k>3$$

tür. O halde,

$$E(x^3)=\frac{k\beta^3}{k-3} \qquad k>3 \tag{3.9.8.a}$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.9.8.a), (3.9.6.a) ve (3.9.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\frac{2k\beta^3(k+1)}{(k-1)^3(k-2)(k-3)}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=2\frac{k+1}{k-3}\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)} \qquad k>3$$

bulunur.

TEOREM 3.9.8 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 9 +\frac{48k^2-108k-12}{k^3-7k^2+12k} \tag{3.9.9}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.9.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\frac{k\beta^4}{k-4} \qquad k > 4$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\frac{k\beta^4}{k-4} \qquad k>4 \tag{3.9.9.a}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.9.9.a), (3.9.8.a), (2.9.6.a) ve (3.9.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\frac{3k\beta^4(3k^2+k+2)}{(k-1)^4(k-2)(k-3)(k-4)} \qquad k>4$$

elde edilir. (1.5.8)'deki Eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=9+\frac{48k^2-108k-12}{k^3-7k^2+12k}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.9</u> Birinci Tip Pareto dağılımının modu ,

$$x=\beta \tag{3.9.10}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.9.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, herhangi bir x çözümü bulunamaz. Uç noktalara bakıldığında, $x=\beta$ değeri için, (3.9.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Birinci Tip Pareto dağılımının modu,

$x=\beta$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.10</u> Birinci Tip Pareto dağılımın medyanı,

$$\beta 2^{1/k} \tag{3.9.11}$$

dır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{\beta}^{x}\frac{k\beta^k}{u^{k+1}}\,du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral, hesaplandığında,

$$1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^k=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$x=\beta 2^{1/k}$

bulunur.

TEOREM 3.9.11 Birinci Tip Pareto dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t:\beta,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k\beta^r}{k-r}\,\frac{(it)^r}{r!}\qquad k>r \tag{3.9.12}$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak (3.9.4)'de, t yerine it alındığında,

$$\Phi(t:\beta,k)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k\beta^r}{k-r}\,\frac{(it)^r}{r!}\qquad k>r$$

bulunur.

TEOREM 3.9.12 Birinci Tip Pareto dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\beta,k)=\sum_{r=0}^{\infty}[\log k+r\log(it\beta)-\log(k-r)+\log(r!)] \tag{3.9.13}$$

$k>r \qquad k>0$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.9.12)'nin logaritması alındığında,

$$K(t:\beta,k)=\sum_{r=0}^{\infty}[\log k+r\log(it\beta)-\log(k-r)+\log(r!)]\qquad k>r\qquad k>0$$

bulunur.

TANIM 3.9.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\beta,k)=\frac{k\beta^k}{(\beta x+1)^{k+1}}\qquad x>0\qquad \beta>0\qquad k>0 \tag{3.9.14}$$

ise x r.d'ne β ve k parametreli Lomax dağılıma sahiptir denir.

İki parametreli Lomax dağılımını, $LM(x:\beta,k)$ veya $LM_x(\beta,k)$ ve ilgili değişkeni, $LM:\beta,k$ ile göstereceğiz. Burada β ve k parametreleri, sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

İki parametreli Lomax dağılımına, İkinci Tip Pareto dağılımı da denir.

TEOREM 3.9.13 İkinci Tip Pareto dağılımının d.f,

$$F(x;\beta,k)=1-\frac{1}{(\beta x+1)^{k}} \qquad x>0 \tag{3.9.15}$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\beta,k)=\int_{0}^{x}\frac{\beta^{k}}{(\beta u+1)^{k+1}}\,du \tag{3.9.15.a}$$

dur.

(3.9.15.a)'da, y=βu+1 değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x;\beta,k)=1-\frac{1}{(\beta x+1)^{k}}$$

bulunur.

TEOREM 3.9.14 Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafindaki r-inci momenti,

$$\mu'_{r}=\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(k-r)}{\beta^{r}\Gamma(k)} \qquad k>r \tag{3.9.16}$$

dır. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1994, s:117)

TEOREM 3.9.15 Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{1}{\beta(k-1)} \qquad k>1 \tag{3.9.17}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.9.16)'da r=1 için,

$$\mu'_1=\frac{1}{\beta(k-1)} \qquad k>1$$

dir. O halde,

$$E(x)=\frac{1}{\beta(k-1)} \qquad k>1$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.16</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{k}{\beta^2(k-1)^2(k-2)} \qquad k>2 \qquad (3.9.18)$$

dir.

İSPAT:(1.5.1.b)'den $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.9.16)'da r=2 için,

$$\mu'_2=\frac{2}{\beta^2(k-2)(k-1)} \qquad k>2$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{2}{\beta^2(k-2)(k-1)} \qquad k>2 \qquad (3.9.18.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.9.18.a) ve (3.9.17) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{k}{\beta^2(k-1)^2(k-2)} \qquad k>2$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.17</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{1}{\beta(k-1)}\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}\right)} \qquad k>2 \qquad (3.9.19)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.9.18) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{1}{\beta(k-1)}\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}\right)} \qquad k>2$$

bulunur.

TEOREM 3.9.18 Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=2\frac{k+1}{k-3}\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)} \qquad k>3 \qquad (3.9.20)$$

dir.

İSPAT:(1.5.1.b)'den $E(x^3)=\mu'_3$ tür. (3.9.16)'da r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{6}{\beta^3(k-1)(k-2)(k-3)} \qquad k>3$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\frac{6}{\beta^3(k-1)(k-2)(k-3)} \qquad (3.9.20.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.9.20.a), (3.9.18.a) ve (3.9.17) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\frac{2k(k+1)}{\beta^3(k-1)^3(k-2)(k-3)}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitliği kullanarak,

$$\alpha_3=2\frac{k+1}{k-3}\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)} \qquad k>3$$

bulunur.

TEOREM 3.9.19 Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Pareto dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=3+6\frac{(k-1)^2(k-2)+k(5k-11)}{k(k-3)(k-4)} \qquad k>4 \qquad (3.9.21)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.b)'den $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.9.16)'da r=4 için,

$$\mu'_4=\frac{24}{\beta^4(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)} \qquad k>4$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\frac{24}{\beta^4(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)} \qquad (3.9.21.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.9.21.a), (3.9.20.a), (3.9.18.a) ve (3.9.17) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\frac{3k(3k^2+k+2)}{\beta^4(k-1)^4(k-2)(k-3)(k-4)} \qquad k>4$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=3+6\frac{(k-1)^2(k-2)+k(5k-11)}{k(k-3)(k-4)} \qquad k>4$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.20</u> İkinci Tip Pareto dağılımının modu ,

$$x=0 \qquad (3.9.22)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.9.2)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, herhangi bir x çözümü bulunamaz. Uç noktalara bakıldığında, x=0 değeri için (3.9.2)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, İkinci Tip Pareto dağılımının modu,

$x=0$

bulunur.

<u>TEOREM 3.9.21</u> İkinci Tip Pareto dağılımın medyanı,

$$(2^{1/k}-1)/\beta \qquad (3.9.23)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_0^x \frac{\beta^k}{(\beta u+1)^{k+1}}du = \frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki

integralde, $y=\beta u+1$ değişken değiştirme yapılarak integral hesaplandığında,

$1 - 1/[(\beta x+1)^k]=1/2$ dir. Buradan,

$x=(2^{1/k}-1)/\beta$

bulunur.

<u>TANIM 3.9.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta,k)=\frac{\alpha^k[\beta(x+\alpha)+k]}{(x+\alpha)^{k+1}}\exp(-\beta x) \qquad (3.9.24)$$

$x > 0 \qquad \alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad k > 0$

ise x r.d'ne α, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir denir.

Üç parametreli Pareto dağılımını, $PIII(x:\alpha,\beta,k)$ veya $PIII_x(\alpha,\beta,k)$ ve ilgili değişkeni, $PIII:\alpha,\beta,k$ ile göstereceğiz. Burada α, β ve k parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

Üç parametreli Pareto dağılımına, Üçüncü Tip Pareto dağılımı da denir.

<u>TEOREM 3.9.22</u> Üçüncü Tip Pareto dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta,k)= 1 - \frac{\alpha^k\exp(-\beta x)}{(x+\alpha)^k} \qquad x > 0 \qquad (3.9.25)$$

dir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1994, s:118)

<u>TANIM 3.9.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:k)=\frac{k}{x^{k+1}} \qquad x > 1 \qquad k > 0 \qquad (3.9.26)$$

ise x r.d'ne k parametreli Standart Pareto dağılıma sahiptir denir.

Standart Pareto dağılımını, $SP(x:k)$ veya $SP_x(k)$ ve ilgili değişkeni, $SP:k$ ile göstereceğiz. Burada k parametresi dağılımın şekil parametresidir.

Standart Pareto dağılımı, Birinci Tip Pareto dağılımının $\beta=1$ özel halidir.

Standart Pareto dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Birinci Tip Pareto dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.9.23 Standart Pareto dağılımının d.f,

$$F(x;k)=1-\frac{1}{x^{k}} \qquad x>1 \quad k>0 \qquad (3.9.27)$$

dir.

TEOREM 3.9.24 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_{r}=\frac{k}{k-r} \qquad k>r \qquad (3.9.28)$$

dir.

TEOREM 3.9.25 Standart Pareto dağılımının m.ç.f,

$$M(t;k)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{k}{k-r}\frac{t^{r}}{r!} \qquad k>r \qquad (3.9.29)$$

dir.

TEOREM 3.9.26 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{k}{k-1} \qquad k>1 \qquad (3.9.30)$$

dir.

TEOREM 3.9.27 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{k}{(k-1)^{2}(k-2)} \qquad k>2 \qquad (3.9.31)$$

dir.

TEOREM 3.9.28 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{1}{(k-1)}\sqrt{\left(\frac{k}{k-2}\right)} \qquad k>2 \qquad (3.9.32)$$

dir.

TEOREM 3.9.29 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=2\frac{k+1}{k-3}\sqrt{\left(\frac{k-2}{k}\right)} \qquad k>3 \tag{3.9.33}$$

dir.

TEOREM 3.9.30 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Pareto dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 3 + 6\frac{(k-1)^2(k-2)+k(5k-11)}{k(k-3)(k-4)} \qquad k>4 \tag{3.9.34}$$

dir.

TEOREM 3.9.31 Standart Pareto dağılımının modu ,

$$x=1 \tag{3.9.35}$$

noktasındadır.

TEOREM 3.9.32 Standart Pareto dağılımın medyanı,

$$2^{1/k} \tag{3.9.36}$$

dır.

TEOREM 3.9.33 Standart Pareto dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;k)= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k}{k-r}\,\frac{(it)^r}{r!} \qquad k > r \tag{3.9.37}$$

dir.

TEOREM 3.9.34 Standart Pareto dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t;k)= \sum_{r=0}^{\infty} [\log k+r\log(it)-\log(k-r)+\log(r!)] \tag{3.9.38}$$

$k > r \qquad k > 0$

dir.

3.9.1 Pareto Dağılımının Uygulama Alanları

X(t), t zamanındaki kişi başına düşen gelir olsun.

1) Kitle sayısının sabit (Kitlede doğum olayları olmasın) olduğunu,

2) En az kişi başına düşen gelirin X_0 olduğunu,

3) Gelirin artma oranı r.d, Y={dlog(X(t)}, tüm geçmiş artma oranlarından bağımsız olduğunu,

4) Y r.d, X(t)=u verildiğinde, $\mu>0$ olmak üzere, $-\mu$ ve σ^2 parametreli Normal dağılıma sahip olduğunu kabul edelim.

X(t)'nin limit dağılımı, $\beta=X_0$ ve $k=2\mu/\sigma^2$ parametreli Pareto dağılımına sahiptir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1994, s:110-111)

Pareto dağılımı, 1848-1923 yılları arasında yaşamış olan İtalya doğumlu bir İsviçreli ekonomi profesörü Vilfredo Pareto tarafından formülleştirilmiştir. (Pareto,1897) Buna göre bir kitlenin gelir dağılımı,

$$N=Ax^{-a} \qquad (3.9.1.1)$$

ile ifade edilir. Burada N, geliri x'ten büyük yada eşit olan kişilerin sayısı; A ve a 'da parametrelerdir. a parametresine, Pareto sabiti denir. Aynı zamanda, a parametresi, dağılımın şekil parametresidir. Pareto toplumdaki sosyal , politik koşullar ve vergilendirme nasıl olursa olsun, bu kuralın evrenselliğine inandı.

Son 50 yıl içerisinde birçok ünlü ekonomist, bu kuralı çürütmeye çalıştılar. (Pigou, 1932)

Birçok sosyo-ekonomik ve diğer doğal olarak meydana gelen olgular kesin istatistiksel dağılımlara göre dağılmışlardır. örneğin, şehir kitle hacminin dağılımı, doğal kaynakların oluşumları, firmaların büyüklüğü, kişilerin gelirleri gibi. Birçok dağılımlar; bu karmaşık verileri açıklamak için geliştirildi. (Johnson ve Kotz, 1970 s:242)

Pareto dağılımı, gelir dağılımlarının gösterimi yada daha iyi temsili için düzenlenmiştir. Bu düzenlemelerden en iyi bilinen gelir dağılımı, Campernowne dağılımıdır. (Champernowne, 1952)

3.9.2 Pareto Dağılımının Parametre Tahminleri

Birinci Tip Pareto dağılımın β ve k parametrelerinin tahmin edicilerini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri β ve k parametreli Birinci Tip Pareto dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n : \beta, k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k\beta^k}{x_i^{k+1}}$$

$L(\beta, k) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n : \beta, k)$ olsun. O halde,

$$L(\beta, k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{k\beta^k}{x_i^{k+1}} \qquad (3.9.2.1)$$

dir. (3.9.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\beta, k)\} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{k\beta^k}{x_i^{k+1}}\right) \qquad (3.9.2.2)$$

dir. (3.9.2.2)'de, sırasıyla β ve k göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\hat{\beta} = \min\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

ve

$$\hat{k} = n / \{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i/\beta)\}$$

bulunur.

3.9.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1994, s:110-118)' de verilen bağıntılar.

1) k parametreli Standart Pareto dağılımı, β ve k parametreli Pareto dağılımın k=1 özel halidir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\log(X/\beta)$, 1/k üstel dağılıma sahiptir.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω Üstel dağılıma sahip ise, $Y=\beta\exp(X)$, β ve $k=1/\Omega$ parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, $\beta=1/\Omega$ ve k parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

5) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω ve k parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, $\beta=1/\Omega$ ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

6) $X_1,X_2,X_3,\ldots,X_n$ birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Ω ve k parametreli Pareto dağılımına sahip iseler,

$Y=\sum_{i=1}^{n} \log(X_i/k)$, $\beta=1/\Omega$ ve n parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω ve k parametreli Lomax dağılımına sahip ise, $Y=\beta(\Omega X+1)$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=1-(\beta/X)^k$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\beta(1-X)^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

10) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-(\beta/X)^k]^{1/k}$, β ve p=k parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

11) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-(X/\beta)^p]^{-1/p}$, β ve k=p parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

12) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\{-\log[1-(X/\beta)^k]\}^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-\exp(-X^\tau)]^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=-\log[1-(\beta/X)^{k}]$, Standart Üstel dağılıma sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-\exp(-X)]^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=-\log[1-(X/\beta)^{k}-1]$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta[1+\exp(-X)]^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[(X/\beta)^{k}-1]^{1/\beta}$. α ve β parametreli Log-lojistik dağılıma sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta[1+\exp(\alpha\beta)X^{\beta}]^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=-\log\{-\log[1-(X/\beta)^{k}]\}$, Standart Birinci Tip Uç değer dağılımına sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Birinci Tip Uç değer dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-\exp(-\exp(-X))]^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

22) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)\{[1-(\beta/X)^{k}]^{-1}-1\}^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-lojistik dağılıma sahiptir.

23) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve Ω parametreli Log-lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta[1+\exp(-\alpha\Omega)/X^{\Omega}]^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

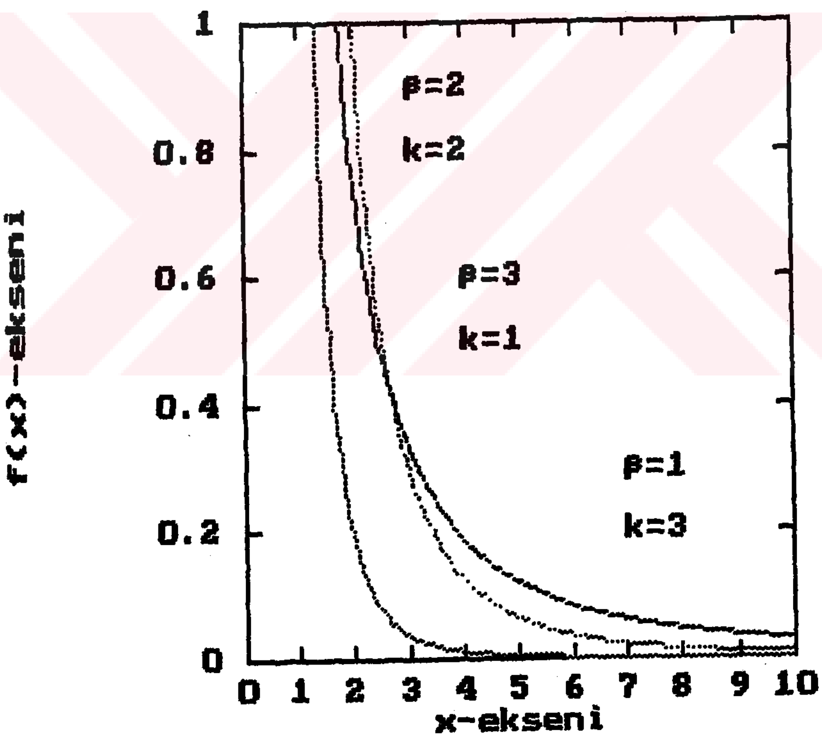
24) Sürekli tipteki bir X r.d, k parametreli Standart Pareto dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, p=k parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, k=p parametreli Standart Pareto dağılımına sahiptir.

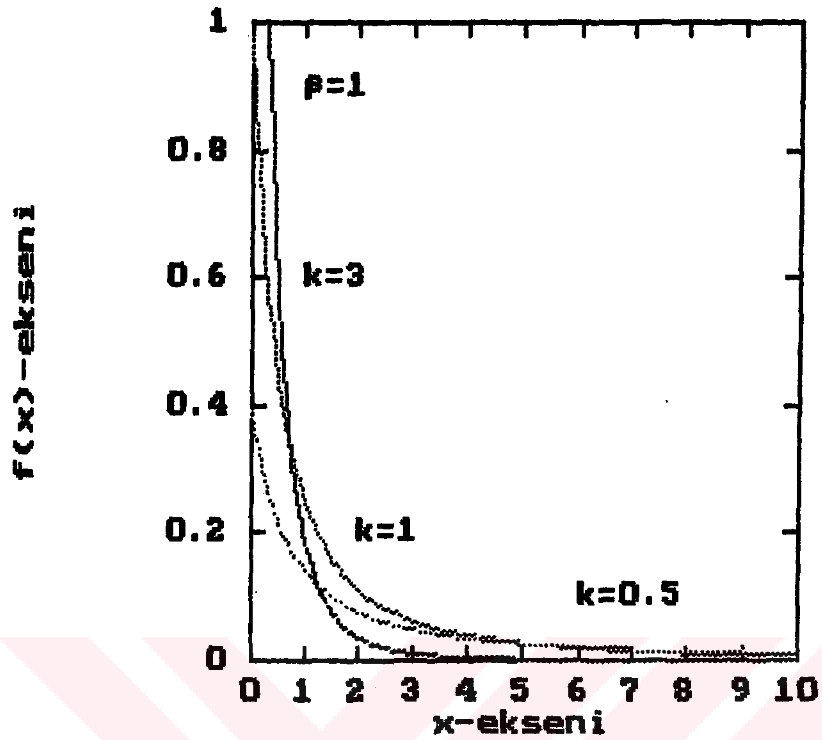
26) Sürekli tipteki bir X r.d, ß parametreli Üstel dağılıma sahip ise, Y=exp(X), k=1/ß parametreli Standart Pareto dağılımına sahiptir.

27) ß -> 0 , k -> ∞ ve ßk=1 durumunda, ß ve k parametreli Lomax dağılımı, Standart Üstel dağılıma yakınsar.

28) Sürekli tipteki bir X r.d, ß ve k parametreli Lomax dağılımına sahip ise, Y=ßX+1, k parametreli Standart Pareto dağılımına sahiptir.

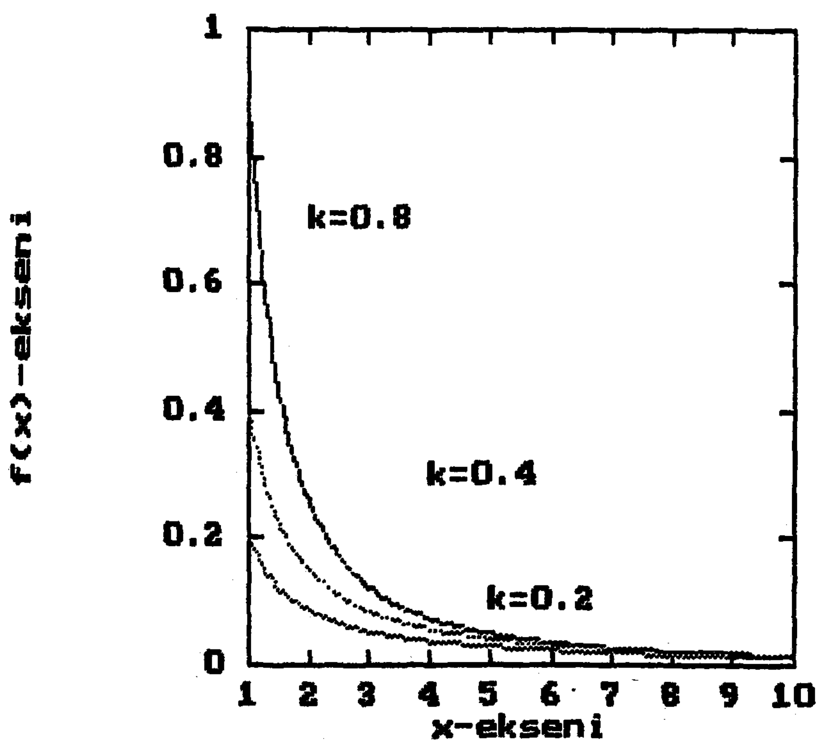


Şekil 31. Birinci Tip Pareto Dağılımının ß=2 k=2, ß=3 k=1, ß=1 k=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



Şekil 32. İkinci Tip Pareto Dağılımının β=1 ve k=0.5 k=1, k=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 33. Üçüncü Tip Pareto Dağılımının k=0.2, k=0.4 ve k=0.8 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.10 Weibull Dağılımı

<u>TANIM 3.10.1</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta,\tau)=\frac{\tau(x-\alpha)^{\tau-1}}{\beta^{\tau}}\exp\{-(\frac{x-\tau}{\beta})^{\tau}\} \qquad (3.10.1)$$

$x > \alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad \tau > 0$

ise x r.d'ne α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir.

Üç parametreli Weibull dağılımını, $Wthp(x:\alpha,\beta,\tau)$ veya $Wthp_x(\alpha,\beta,\tau)$ ve ilgili değişkeni, $Wthp:\alpha,\beta,\tau$ ile göstereceğiz. Burada α, β ve τ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

Üç parametreli Weibull dağılımında:

1) $\alpha=0$ alınırsa, İki parametreli Weibull dağılımı elde edilir.

2) $\alpha=0$ ve $\beta=1$ alınırsa, Standart aynı zamanda Standartlaştırılmış Weibull dağılımı elde edilir.

<u>TEOREM 3.10.1</u> Üç Parametreli Weibull dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)= 1 - \exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{\tau}\} \qquad x>\tau \qquad (3.10.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\int_{\alpha}^{x}\frac{\tau}{\beta}(\frac{u-\alpha}{\beta})^{\tau-1}\exp\{-(\frac{u-\alpha}{\beta})^{\tau}\}du \qquad (3.10.2.a)$$

(3.10.2.a)'da, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)= 1 - \exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{\tau}\}$$

bulunur.

<u>TANIM 3.10.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\beta,\tau)=\frac{\tau x^{\tau-1}}{\beta^{\tau}}\exp\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\} \qquad (3.10.3)$$

$x > 0 \quad \beta > 0 \quad \tau > 0$

ise x r.d'ne β ve τ gibi iki parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir.

İki parametreli Weibull dağılımını, $Wtp(x;\beta,\tau)$ veya $Wtp_x(\beta,\tau)$ ve ilgili değişkeni, $Wtp;\beta,\tau$ ile göstereceğiz. Burada β ve τ parametreleri, sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

<u>TEOREM 3.10.2</u> İki Parametreli Weibull dağılımının d.f,

$$F(x;\beta,\tau)= 1 - \exp\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\} \qquad x>0 \qquad (3.10.4)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\beta,\tau)=\int_0^x \frac{\tau}{\beta}\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\{-\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\tau}\}du \qquad (3.10.4.a)$$

dur.

(3.10.4.a)'da, önce $y=u/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x;\beta,\tau)= 1 - \exp\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, iki parametreli Weibull dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\beta^r\,\Gamma\left(\frac{r+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_0^{+\infty} x^r \frac{\tau}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\right\}dx \qquad (3.10.5.a)$$

dir.

(3.10.5.a)'da, önce $y=x/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$\mu'_r=\beta^r\,\Gamma\left(\frac{r+\tau}{\tau}\right)$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, iki parametreli Weibull dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\beta\,\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.10.5)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\beta\,\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)$$

dir. O halde,

$$E(x)=\beta\,\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, iki parametreli Weibull dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)-\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\right\} \qquad (3.10.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.10.5)'de r=2 için,

$$\mu'_2=\beta^2\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\beta^2\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.10.7.a) ve (3.10.6) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)= \beta^2\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Weibull dağılımına sahip ise,

$$SS(x)= \beta\sqrt{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}} \qquad (3.10.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.10.7) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)= \beta\sqrt{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Weibull dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right) -3\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+2\Gamma^3\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}^{3/2}} \qquad (3.10.9)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ tür. (3.10.5) de r=3 için,

$$\mu'_3=\beta^3\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right)$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\beta^3\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.9.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.10.9.a), (3.10.6.a) ve (3.10.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\beta^3\{\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right) -3\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+2\Gamma^3\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right) -3\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+2\Gamma^3\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}^{3/2}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.8</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İki parametreli Weibull dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right)-4\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+6\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}^2} \qquad (3.10.10)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.10.5)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\beta^4\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right)$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\beta^4\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.10.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.10.10.a), (3.10.8.a), (2.10.6.a) ve (3.10.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\beta^4\{\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right)-4\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+6\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right)-4\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+6\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)-\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\}^2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.9</u> İki paremetreli Weibull dağılımının modu ,

$$x=\beta[(\tau-1)/\tau]^{1/\tau} \qquad (3.10.11)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.10.2)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\beta[(\tau-1)/\tau]^{1/\tau}$ elde edilir. $x=\beta[(\tau-1)/\tau]^{1/\tau}$ değeri için (3.10.2)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, İki parametreli Weibull dağılımının modu,

$$x=\beta[(\tau-1)/\tau]^{1/\tau}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.10.10</u> İki parametreli Weibull dağılımın medyanı,

$$\beta(\ln 2)^{1/\tau} \qquad (3.10.12)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_0^x \frac{\tau}{\beta}\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\left\{-\left(\frac{u}{\beta}\right)^{\tau}\right\}du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde önce $y=u/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\tau}\right\}=\frac{1}{2}$$

dir. Buradan,

$$x=\beta(\ln 2)^{1/\tau}$$

bulunur.

<u>TANIM 3.10.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\tau)=\tau x^{\tau-1}\exp(-x^{\tau}) \qquad (3.10.3)$$

$x > 0 \qquad \tau > 0$

ise x r.d'ne τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir denir.

Standart Weibull dağılımını, $SW(x:\tau)$ veya $SW_x(\tau)$ ve ilgili değişkeni, $SW:\tau$ ile göstereceğiz. Burada τ parametresi, dağılımın şekil parametresidir.

Standart Weibull dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, İki parametreli Weibull dağılımında olduğu gibi yapılır.

<u>TEOREM 3.10.11</u> Standart Weibull dağılımının d.f,

$$F(x:\tau)= 1-\exp(-x^{\tau}) \qquad x>0 \qquad (3.10.14)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.12</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\Gamma\left(\frac{r+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.15)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.13</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.16)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.14</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right) \qquad (3.10.17)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.15</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)} \qquad (3.10.18)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.16</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right) -3\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+2\Gamma^3\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\right\}^{3/2}} \qquad (3.10.19)$$

dir.

<u>TEOREM 3.10.17</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Weibull dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma\left(\frac{4+\tau}{\tau}\right)-4\Gamma\left(\frac{3+\tau}{\tau}\right)\Gamma\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)+6\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right)\Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)-3\Gamma^4\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{2+\tau}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1+\tau}{\tau}\right)\right\}^{2}} \qquad (3.10.20)$$

dır.

TEOREM 3.10.18 Standart Weibull dağılımının modu ,

$$x=\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^{1/\tau} \tag{3.10.21}$$

noktasındadır.

TEOREM 3.10.19 Standart Weibull dağılımın medyanı,

$$(\ln 2)^{1/\tau} \tag{3.10.22}$$

dir.

3.10.1 Weibull Dağılımının Uygulama Alanları

Sürekli tipteki bir X r.d'nin hazard oranı yada hazard fonksiyonu $h(x)=\dfrac{\tau(X-\alpha)^{\tau-1}}{\beta^{\tau}}$ ise, X r.d 'ne üç parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:132)

Aynı şekilde, Sürekli tipteki bir X r.d'nin hazard oranı yada hazard fonksiyonu $h(x)=\dfrac{\tau x^{\tau-1}}{\beta^{\tau}}$ ise, X r.d 'ne İki parametreli Weibull dağılımına sahiptir denir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:130)

Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=X^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir denir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:127)

Birçok durumlarda üstel dağılım, hazard oranının yada hazard fonksiyonun sabit olması nedeniyle zamana karşı dayanma modeli olarak yetersiz kalabilir. Bu nedenle, zamana göre değişen başarısızlık olasılıkları durumları için, daha genel bir modele gereksinim vardır.

Weibull dağılımı da hazard oranından yada hazard fonksiyonundan ortaya çıkar. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:108)

(3.10.3)'deki İki parametreli Weibull dağılımının o.y.f'nu t cinsinden ifade edelim. Burada t zamanı göstermektedir.

$$f(t;\beta,\tau)=\frac{\tau t^{\tau-1}}{\beta^{\tau}}\exp\{-(\frac{t}{\beta})^{\tau}\} \quad t>0 \quad \beta>0 \quad \tau>0 \quad (3.10.1.1)$$

(3.10.1.1) 'deki iki parametreli Weibull dağılımının hazard oranı yada hazard fonksiyonu,

$$h(t)=\frac{\tau}{\beta}(\frac{t}{\beta})^{\tau-1} \quad (3.10.2)$$

dir.

(3.10.1.1) 'deki o.y.f 'nunda, β ve τ parametreleri sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

1) $\tau>1$ olduğunda, Weibull dağılımının o.y.f'nun bir tek tepesi vardır. Hazard fonksiyonu zamana göre artandır.

2) $\tau<1$ olduğunda, Weibull dağılımının o.y.f ters J şekillidir. Hazard fonksiyonu zamana göre azalandır.

3) $\tau=1$ olduğunda, hazard fonksiyonu sabittir. Weibull dağılımı, üstel dağılıma denktir.

Weibull dağılımı karışık yapıdaki verilere, zamana karşı dayanma modeli olarak önerilir. Elektron tüpleri ve elektrik düzenleyicileri için zamana karşı dayanma modelleri örneğinde olduğu gibi.

İş alanında Weibull dağılımı, yıllara göre başarısızlık modeli olarak uygulanır. Uygulamalar; (Weibull, 1951), (Lieblein ve Zelen, 1956), (Kao , 1960), (Perry, 1962) ve (Procassini ve Romano, 1962) tarafından yapılmıştır.

<u>ÖRNEK 3.10.1.1</u> özel bir tip elektron tübü için zamana karşı dayanma modeli, $\beta=8$ ve $\tau=2$ parametreli Weibull dağılımıdır. Burada test zamanı yıl cinsindendir. İlk iki yıl esnasındaki başarısızlığın olasılığını hesaplayalım.

Bu olasılığın hesabı için (3.10.4) 'deki d.f 'nu kullanacağız. O halde,

$$Prob[t\leq 2]=F(2;8,2)=1-\exp\{-(2/8)^{2}\}=0.06$$

bulunur. (Hahn ve Kotz, 1967 s:110)

3.10.2 Weibull Dağılımının Parametre Tahminleri

İki parametreli Weibull dağılımının β ve k parametrelerinin tahmin edicilerini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım. Ayrıca üç parametreli Weibull dağılımının α parametresinin tahmini için koşulu verelim.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri β ve τ gibi iki parametreli Weibull dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;\beta,\tau)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau}\right\}$$

$L(\beta,\tau)=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n;\beta,k)$ olsun. O halde,

$$L(\beta,\tau)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau}\right\} \qquad (3.10.2.1)$$

dir. (3.10.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\beta,k)\}=\sum_{i=1}^{n}\ln\left[\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau-1}\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\tau} \qquad (3.10.2.2)$$

dir.

(3.10.2.2)'de sırasıyla, β ve τ göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\hat{\beta}=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\tau}}\right]^{1/\hat{\tau}} \qquad (3.10.2.3)$$

ve

$$\hat{\tau}=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\tau}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\tau}}\right)^{-1}-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]^{-1} \qquad (3.10.2.4)$$

bulunur.

Aynı zamanda $\alpha\neq 0$ olduğu durumda, yani üç parametreli Weibull dağılımı, α 'nın tahmin edicisini bulmak için (3.10.2.3) ve (3.10.2.4) denklemleriyle birlikte,

$$(\hat{\tau}-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\alpha})^{-1} = \hat{\tau}\,\hat{\beta}^{-\hat{\tau}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\alpha})^{\hat{\tau}-1} \qquad (3.10.2.5)$$

eşitliği gözönüne alınır.

(3.10.2.3) ve (3.10.2.4) denklemlerinde x_i yerine $x_i-\hat{\alpha}$ alalım. $\hat{\alpha}$, (3.10.2.3), (3.10.2.4) ve (3.10.2.5) eşitliklerini sağlar. Dolayısıyla, $\hat{\alpha}$ ' nın değeri $\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$'den daha büyüktür. Diğer durumda ise $\hat{\alpha}$'nın değeri, $\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$ 'e eşit alınarak (3.10.2.3) ve (3.10.2.4) denklemleri $\hat{\beta}$ ve $\hat{\tau}$ için çözülür. Tabii bu çözüm yapılırken, x_i yerine $x_i-\min\{x_1,x_2,...,x_n\}$ alınır. (Johnson ve Kotz, 1970 s:256)

3.10.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:127-133)'de verilen bağıntılar.

1) Standart üstel dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$, $\beta=\tau=1$ özel halidir.

2) β parametreli üstel dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$, $\tau=1$ özel halidir.

3) τ parametreli Standart Weibull dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$, $\beta=1$ özel halidir.

4) β ve τ parametreli Weibull dağılımı, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$ özel halidir.

5) Sürekli tipteki bir X r.d, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=[(X-\alpha)/\beta]^{\tau}$, Standart üstel dağılıma sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\alpha+\beta X^{1/\tau}$, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=(X-\alpha)^{\tau}$, β parametreli üstel dağılıma sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\alpha+\beta X^{1/\tau}$, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

9) Standart üstel dağılım, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\beta=1$ ve $\tau=1$ özel halidir.

10) β parametreli üstel dağılım, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\tau=1$ özel halidir.

11) τ parametreli Standart Weibull dağılım, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\beta=1$ özel halidir.

12) β ve τ parametreli Weibull dağılım, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$ özel halidir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=(X/\beta)^{\tau}$, Standart üstel dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\beta X^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\beta[(X-\alpha)/\Omega]^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, Ω parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=\beta(X/\Omega)^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=-\tau\log(X/\beta)$, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahip ise, $Y=\beta\exp(-X/\tau)$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=X/\beta$, τ parametreli Standart Weibull dağılıma sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\beta X$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

21) Standart üstel dağılım, τ parametreli Standart Weibull dağılımın $\tau=1$ özel halidir.

22) τ parametreli Standart Weibull dağılımı, α, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

23) τ parametreli Standart Weibull dağılımı, β ve τ parametreli Weibull dağılımın $\beta=1$ özel halidir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X^{\tau})$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=(-\log X)^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

26) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=X^{\tau}$, Standart Üstel dağılıma sahiptir.

27) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise, $Y=X^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

28) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=-\tau\log X$, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahiptir.

29) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X/\tau)$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

30) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\beta X$, β ve τ parametreli Weibull dağılıma sahiptir.

31) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=X/\beta$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

32) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-\exp(-X^{\tau})]^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

33) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=[-\log\{1-(\beta/X)^{k}\}]^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

34) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=[\exp(-X^{\tau})]^{1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

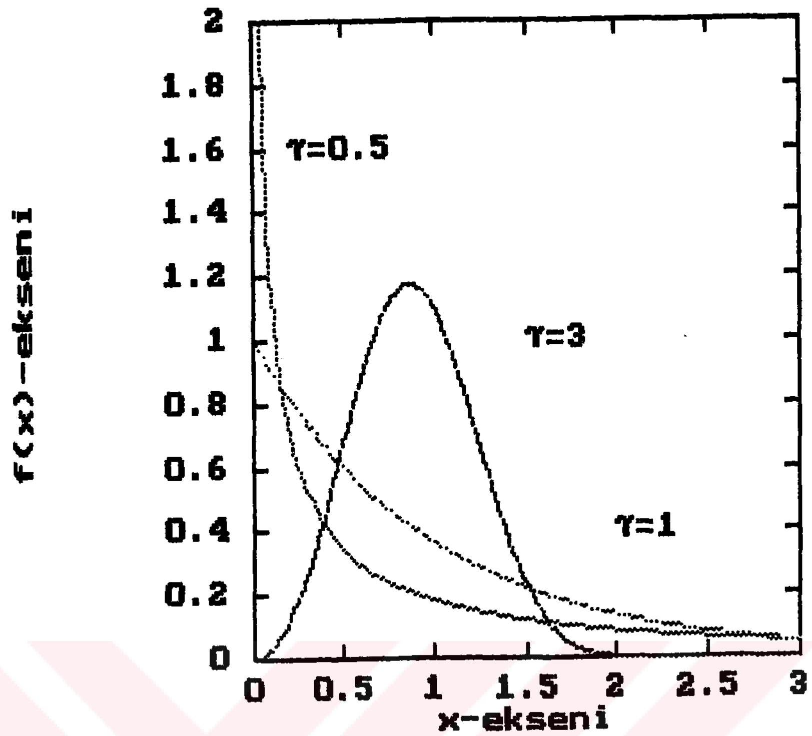
35) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=-\log\{\exp(-X^{\tau})/[1-\exp(-X^{\tau})]\}$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

36) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[-\log\{\exp(-X)/[1-\exp(-X)]\}]^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

37) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=(-\log X^{p})^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

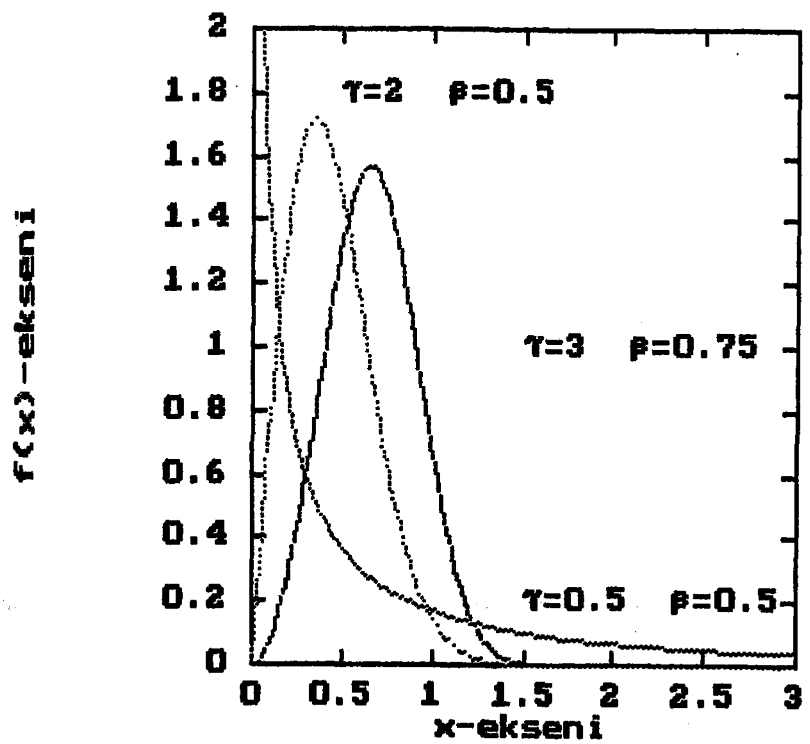
38) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[\exp(X^{\tau})-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

39) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[\log\{\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1\}]^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.



Şekil 34. Standart Weibull Dağılımının γ=0.5 γ=1 γ=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 35. İki Parametreli Weibull Dağılımının γ=2 β=0.5 γ=3 β=0.75 ve γ=0.5 β=0.5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.11 Uç Değer (Extreme Value) Dağılımı

Genel olarak, Uç Değer dağılımları üç aile olarak incelenir.

TANIM 3.11.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\{-\frac{x-\alpha}{\beta}-\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\} \qquad (3.11.1)$$

$$-\infty < X < +\infty \qquad \alpha > 0 \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne α ve β parametreli, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir denir.

Birinci Tip Uç Değer dağılımını, $EVI(x:\alpha,\beta)$ veya $EVI_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, $EVI:\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Burada α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

Birinci Tip Uç Değer dağılımına, Log-Weibull dağılımı da denir

TEOREM 3.11.1 Birinci Tip Uç Değer dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta)=\exp\{-\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\} \qquad (3.11.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\beta}\exp\{-\frac{u-\alpha}{\beta}-\exp(-\frac{u-\alpha}{\beta})\}du \qquad (3.11.2.a)$$

dur.

(3.11.2.a)'da, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=\exp(-y)$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta)=\exp\{-\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\}$$

bulunur.

TEOREM 3.11.2 Birinci Tip Uç Değer dağılımının m.ç.f,

$$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)\Gamma(1-\beta t) \qquad t<1/\beta \qquad (3.11.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tx)\frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right\}dx \qquad (3.11.3.a)$$

dir.

(3.11.3.a)'da, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=\exp(-y)$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)\Gamma(1-\beta t)$

bulunur.

TANIM 3.11.2

$$\emptyset(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\{\log(\Gamma(\alpha))\}=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \qquad (3.11.4)$$

fonksiyonuna, α parametreli DiGamma fonksiyonu denir.

$$\emptyset(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\{\log(\Gamma(\alpha))\}=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\emptyset'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\{\emptyset(\alpha)\}=\frac{d^2}{d\alpha^2}\{\log(\Gamma(\alpha))\}$$

.

.

.

$$\emptyset^{(n)}(\alpha)=\frac{d^n}{d\alpha^n}\{\emptyset(\alpha)\}=\frac{d^{n+1}}{d\alpha^{n+1}}\{\log(\Gamma(\alpha))\}$$

dir.

özel olarak $\alpha=1$ için;

$$\emptyset(1)=\Gamma'(1) \qquad (3.11.4.a)$$

$$\emptyset'(1)=\Gamma''(1)-\Gamma'^2(1) \qquad (3.11.4.b)$$

$$\emptyset''(1)=\Gamma'''(1)-3\Gamma''(1)\Gamma'(1)+2\Gamma'^3(1) \qquad (3.11.4.c)$$

$$\emptyset'''(1)=\Gamma^{(iv)}(1)-4\Gamma'''(1)\Gamma'(1)+12\Gamma''(1)\Gamma'^2(1)-3\Gamma''^2(1)-6\Gamma'^4(1) \qquad (3.11.4.d)$$

dir.

Ayrıca,

$Ø(\alpha+1)=Ø(\alpha)+1/\alpha \quad => \quad Ø(\alpha)=Ø(\alpha+1)-1/\alpha$ (3.11.4.e)

$Ø(1)=-\tau=-0.577216$ (3.11.4.f)

(3.11.4.f)'deki τ, Euler sabitidir.

$Ø(\alpha)=\log(\alpha-1/2) \qquad \alpha > 1$ (3.11.4.g)

dir. Burada,

$Ø'(\alpha)=1/(\alpha-1/2)$ (3.11.4.h)

$Ø''(\alpha)=-1/(\alpha-1/2)^2$ (3.11.4.i)

$Ø'''(\alpha)=1/(\alpha-1/2)^3$ (3.11.4.j)

elde edilir.

TEOREM 3.11.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$E(x)=\alpha + 0.577216\beta$ (3.11.5)

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan, $E(x)=\mu'_1$ dır.

(1.5.1.b)'den, $\mu'_1=\frac{d}{dt}\{M(t)\}\Big|_{t=0}=M'(t)\Big|_{t=0}$ dır.

$M'(t)=\alpha\exp(\alpha t)\Gamma(1-\beta t)-\beta\exp(\alpha t)\Gamma'(1-\beta t)$

dir. O halde,

$\mu'_1=\alpha\Gamma(1)-\beta\Gamma'(1)$

dir. Burada,

$E(x)=\alpha-\beta\Gamma'(1)$ (3.11.5.a)

elde edilir.

Şimdi $\Gamma'(1)$'in değerini hesap edelim. (3.11.4.a)'dan,

$\Gamma'(1)=Ø(1)$ (3.11.5.b)

dir.

(3.11.5.b)'de, (3.11.4.f) yerine koyulduğunda,

$\Gamma'(1)=-0.577216$ (3.11.5.c)

elde edilir.

(3.11.5.a)'da, (3.11.5.c) yerine koyulduğunda,

$E(x)=\alpha + 0.577216\beta$

bulunur.

TEOREM 3.11.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$\mathrm{Var}(x)=1.66667\beta^2$ (3.11.6)

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan, $E(x^2)=\mu'_2$ dır.

(1.5.1.b)'den, $\mu'_2=\frac{d^2}{dt^2}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M''(t)\big|_{t=0}$ dır.

$M''(t)=\exp(\alpha t)\{\alpha^2\Gamma(1-\beta t)-2\alpha\beta\Gamma'(1-\beta t)+\beta^2\Gamma''(1-\beta t)$

dir. O halde,

$\mu'_2=\alpha^2\Gamma(1)-2\alpha\beta\Gamma'(1)+\beta^2\Gamma''(1)$

dir. Buradan,

$$E(x^2)=\alpha^2\Gamma(1)-2\alpha\beta\Gamma'(1)+\beta^2\Gamma''(1) \qquad (3.11.6.a)$$

elde edilir.

Şimdi $\Gamma''(1)$'in değerini hesap edelim. (3.11.4.b)'den,

$$\Gamma''(1)=\emptyset'(1)+\Gamma'^2(1) \qquad (3.11.6.b)$$

(3.13.5.b)

dir.

Önce $\emptyset'(1)$'in değerini bulalım. (3.11.4.e)'den,

$\emptyset(\alpha)=\emptyset(\alpha+1)-(1/\alpha)$

dir. O halde,

$$\emptyset'(\alpha)=\emptyset'(\alpha+1)+(1/\alpha^2) \qquad (3.11.6.c)$$

dir.

(3.11.6.c)'de $\alpha=1$ için,

$$\emptyset'(1)=\emptyset'(2)+1 \qquad (3.11.6.d)$$

dir.

(3.11.4.h)'de $\alpha=2$ için,

$$\emptyset'(2)=0.66667 \qquad (3.11.6.e)$$

elde edilir.

(3.11.6.d)'de, (3.11.6.e) yerine koyulduğunda,

$$\emptyset'(1)=1.66667 \qquad (3.11.6.f)$$

elde edilir.

(3.11.6.b)'deki,

$$\Gamma''(1)=1.9998483 \qquad (3.11.6.g)$$

(3.13.5.b)

dir. O halde,

$$E(x^2)=\alpha^2+1.154432\alpha\beta+1.9998483\beta^2 \qquad (3.11.6.h)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.11.6.h) ve (3.11.5) yerine koyulduğunda,

$\mathrm{Var}(x)=1.66667\beta^2$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=1.28254983\beta \quad (3.11.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.11.6) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=1.28254983\beta$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Birici Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=1.143548511 \quad (3.11.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan, $E(x^3)=\mu'_3$ dır.

(1.5.1.b)'den $\mu'_3=\dfrac{d^3}{dt^3}\{M(t)\}\Big|_{t=o}=M'''(t)\Big|_{t=o}$ dır.

$$M'''(t)=\exp(\alpha t)\{\alpha^3\Gamma(1-\beta t)-3\alpha^2\beta\Gamma'(1-\beta t)$$
$$+3\alpha\beta^2\Gamma''(1-\beta t)-\beta^3\Gamma'''(1-\beta t)\}$$

dir. O halde,

$\mu'_3=\alpha^3\Gamma(1)-3\alpha^2\beta\Gamma'(1)+3\alpha\beta^2\Gamma''(1)-\beta^3\Gamma'''(1)$

dir. Buradan,

$$E(x^3)=\alpha^3-3\alpha^2\beta\Gamma'(1)+3\alpha\beta^2\Gamma''(1)-\beta^3\Gamma'''(1) \quad (3.11.8.a)$$

elde edilir.

Şimdi $\Gamma'''(1)$'in değerini hesap edelim. (3.11.4.c)'den,

$$\Gamma'''(1)=\emptyset''(1)+3\Gamma''(1)\Gamma'(1)-2\Gamma'^3(1) \quad (3.11.8.b)$$

(3.13.5.b)

dir.

önce $\emptyset''(1)$'in değerini bulalım. (3.11.4.e)'den,

$\emptyset(\alpha)=\emptyset(\alpha+1)-(1/\alpha)$

dir. O halde,

$$\emptyset''(\alpha)=\emptyset''(\alpha+1)-(2/\alpha^3) \quad (3.11.8.c)$$

dir.

(3.11.8.c)'de $\alpha=1$ için,

$$\emptyset''(1)=\emptyset''(2)-2 \quad (3.11.8.d)$$

dir.

(3.11.4.i)'de $\alpha=2$ için,

$$\emptyset''(2)=-0.44444 \quad (3.11.8.e)$$

elde edilir.

(3.11.8.d)'de, (3.11.8.e) yerine koyulduğunda,

$\emptyset''(1)=-2.44444$ (3.11.8.f)

elde edilir.

(3.11.8.b)'deki,

$\Gamma'''(1)=-5.52283642$ (3.11.8.g)

(3.13.5.b)

dir. O halde,

$E(x^3)=\alpha^3+1.731648\alpha^2\beta+5.9995449\alpha\beta^2+5.52283642\beta^3$ (3.11.8.h)

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.11.8.h), (3.11.6.h) ve (3.11.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=2.444434803\beta^3$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=1.143548511$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$\alpha_4=5.266657556$ (3.11.9)

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan, $E(x^4)=\mu'_4$ dır.

(1.5.1.b)'den $\mu'_4=\dfrac{d^4}{dt^4}\{M(t)\}\big|_{t=0}=M^{(iv)}(t)\big|_{t=0}$ dır.

$M^{(iv)}(t)=\exp(\alpha t)\{\alpha^4\Gamma(1-\beta t)-4\alpha^3\beta\Gamma'(1-\beta t)$
$+6\alpha^2\beta^2\Gamma''(1-\beta t)-4\alpha\beta^3\Gamma'''(1-\beta t)+\beta^4\Gamma^{(iv)}(1-\beta t)\}$

dir. O halde,

$\mu'_4=\alpha^4\Gamma(1)-4\alpha^3\beta\Gamma'(1)+6\alpha^2\beta^2\Gamma''(1)-4\alpha\beta^3\Gamma'''(1)+\beta^4\Gamma^{(iv)}(1)$

dir. Buradan,

$E(x^4)=\alpha^4-4\alpha^3\beta\Gamma'(1)+6\alpha^2\beta^2\Gamma''(1)-4\alpha\beta^3\Gamma'''(1)+\beta^4\Gamma^{(iv)}(1)$ (3.11.9.a)

elde edilir.

Şimdi $\Gamma^{(iv)}(1)$'in değerini hesap edelim. (3.11.4.d)'den,

$\Gamma^{(iv)}(1)=\emptyset'''(1)+4\Gamma'''(1)\Gamma'(1)-12\Gamma''(1)\Gamma'^2(1)+3\Gamma''^2(1)$
$+6\Gamma'^4(1)$ (3.11.9.b)

dir.

Önce $\emptyset'''(1)$'in değerini bulalım. (3.11.4.e)'den,

$\emptyset(\alpha)=\emptyset(\alpha+1)-(1/\alpha)$

dir. O halde,

$$\emptyset'''(\alpha)=\emptyset'''(\alpha+1)+(6/\alpha^4) \qquad (3.11.9.c)$$

dir.

(3.11.9.c)'de $\alpha=1$ için,

$$\emptyset'''(1)=\emptyset'''(2)+6 \qquad (3.11.9.d)$$

dir.

(3.11.4.j)'de $\alpha=2$ için,

$$\emptyset'''(2)=0.29629629 \qquad (3.11.9.e)$$

elde edilir.

(3.11.9.d)'de, (3.11.9.e) yerine koyulduğunda,

$$\emptyset'''(1)=6.29629629 \qquad (3.11.9.f)$$

elde edilir.

(3.11.9.b)'deki,

$$\Gamma^{(iv)}(1)=23.71632793 \qquad (3.11.9.g)$$

(3.13.5.b)

dir. O halde,

$$E(x^4)=\alpha^4+2.308864\alpha^3\beta+11.9990898\alpha^2\beta^2+22.09134568\alpha\beta^3$$
$$+23.71632793\beta^4 \qquad (3.11.9.h)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.11.9.h), (3.11.8.h), (3.11.6.h) ve (3.11.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=14.62966284\beta^4$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=5.266657556$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.8</u> Birinci Tip Uç Değer dağılımının modu,

$$x=\alpha \qquad (3.11.10)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.11.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha$ elde edilir. $x=\alpha$ değeri için (3.11.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Birinci Tip Uç Değer dağılımının modu,

$x=\alpha$

bulunur.

TEOREM 3.11.9 Birinci Tip Uç Değer dağılımın medyanı,

$$\alpha-\beta\ln(\ln 2) \qquad (3.11.11)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)' deki eşitlik kullanılarak,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\beta}\exp\{-\frac{u-\alpha}{\beta}-\exp(-\frac{u-\alpha}{\beta})\}du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=\exp(-y)$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$\exp\{-\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})\}=\frac{1}{2}$$

dir. Buradan,

$$x=\alpha-\beta\ln(\ln 2)$$

bulunur.

TEOREM 3.11.10 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, karakteristik fonksiyonu,

$$\xi(t:\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\Gamma(1-i\beta t) \qquad (3.11.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.11.3)'de t yerine it alındığında,

$$\xi(t:\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\Gamma(1-i\beta t)$$

bulunur.

TEOREM 3.11.11 Birinci Tip Uç Değer dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\alpha,\beta)=i\alpha t+\log\{\Gamma(1-i\beta t)\} \qquad (3.11.13)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.11.12)'nin logaritması alındığında,

$$K(t:\alpha,\beta)=i\alpha t+\log\{\Gamma(1-i\beta t)\}$$

bulunur.

(3.11.1)'de, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ alınırsa, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımı elde edilir.

TANIM 3.11.3 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$f(x)=\exp\{-x-\exp(-x)\} \quad -\infty < x < +\infty$ (3.11.14)

ise x r.d'ne Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir denir.

Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımını, SEVI ile göstereceğiz.

Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Birinci Tip Uç Değer dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.11.12 Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımının d.f,

$F(x)=\exp\{-\exp(-x)\}$ (3.11.15)

dir.

TEOREM 3.11.13 Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımının m.ç.f,

$M(t)=\Gamma(1-t) \quad t<1$ (3.11.16)

dir.

TEOREM 3.11.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise,

$E(x)=0.577216$ (3.11.17)

dir.

TEOREM 3.11.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Standat Uç Değer dağılımına sahip ise,

$Var(x)=1.66667$ (3.11.18)

dir.

TEOREM 3.11.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise,

$SS(x)=1.28254983$ (3.11.19)

dir.

TEOREM 3.11.17 Sürekli tipteki bir x r.d, Birici Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$\alpha_3=1.143548511$ (3.11.20)

dir.

<u>TEOREM 3.11.18</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=5.266657556 \qquad (3.11.21)$$

dır.

<u>TEOREM 3.11.19</u> Birici Tip Standart Uç Değer dağılımının modu,

$$x=0 \qquad (3.11.22)$$

noktasındadır.

<u>TEOREM 3.11.20</u> Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımın medyanı,

$$-\ln(\ln 2) \qquad (3.11.23)$$

dir.

<u>TEOREM 3.11.21</u> Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t)=\Gamma(1-it) \qquad (3.11.24)$$

dir.

<u>TEOREM 3.11.22</u> Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t)=\log\{\Gamma(1-it)\} \qquad (3.11.25)$$

dir.

Şimdi İkinci Tip Uç Değer dağılımını inceleyelim.

<u>TANIM 3.11.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta,\tau)=\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{-\tau+1}\exp\left\{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{-\tau}\right\} \qquad (3.11.26)$$

$$x > \alpha \qquad \beta > 0 \qquad \tau > 0$$

ise x r.d'ne α , β ve τ parametreli, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir denir.

İkinci Tip Uç Değer dağılımını, $EVII(x:\alpha,\beta,\tau)$ veya $EVII_x(\alpha,\beta,\tau)$ ve ilgili değişkeni, $EVII:\alpha,\beta,\tau$ ile göstereceğiz. Burada α, β ve τ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

TEOREM 3.11.23 İkinci Tip Uç Değer dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{-\tau}\} \qquad (3.11.27)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\int_{\alpha}^{x} \frac{\tau}{\beta} (\frac{u-\alpha}{\beta})^{-\tau-1}\exp\{-(\frac{u-\alpha}{\beta})^{-\tau}\}du \qquad (3.11.27.a)$$

dur.

(3.11.27.a)'da, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=y^{-\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{-\tau}\}$$

bulunur.

TEOREM 3.11.24 İkinci Tip Uç Değer dağılımının α etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\beta^r\Gamma(1 - r/\tau) \qquad r<\tau \qquad (3.11.28)$$

dir.

İSPAT: (1.5.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_{\alpha}^{+\infty} (x-\alpha)^r \frac{\tau}{\beta} (\frac{x-\alpha}{\beta})^{-\tau-1}\exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{-\tau}\}dx \qquad (3.11.28.a)$$

dir.

(3.11.28.a)'da, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=y^{-\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$\mu'_r=\beta^r\Gamma(1 - r/\tau)$

bulunur.

TEOREM 3.11.25 Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha + \beta\Gamma(1-1/\tau) \qquad 1<\tau \qquad (3.11.29)$$

dir.

İSPAT:

$E(x)=\mu'_1+\alpha$ (3.11.29.a)

dır. (3.11.28) de r=1 için,

$\mu'_1=\beta\Gamma(1-1/\tau)$ (3.11.29.b)

elde edilir.

(3.11.29.a)'da, (3.11.29.b) yerine koyulduğunda,

$E(x)=\alpha + \beta\Gamma(1-1/\tau)$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.26</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$Var(x)=\beta^2\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}$ $2<\tau$ (3.11.30)

dir.

İSPAT:

$E(x^2)=\mu'_2+2\alpha E(x)-\alpha^2$ (3.11.30.a)

dir. (3.11.28)'de r=2 için,

$\mu'_2=\beta^2\Gamma(1-2/\tau)$ (3.11.30.b)

elde edilir.

(3.11.30.a)'da, (3.11.30.b) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$E(x^2)=\beta^2\Gamma(1-2/\tau)+2\alpha\beta\Gamma(1-1/\tau)+\alpha^2$ (3.11.30.c)

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.11.30.c) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\beta^2\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.27</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$SS(x)=\beta\sqrt{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}}$ $2<\tau$ (3.11.31)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.11.30) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\beta\sqrt{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}}$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.28</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma(1-3/\tau)-3\Gamma(1-2/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+2\Gamma^3(1-1/\tau)}{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}^{3/2}} \quad \tau>3 \qquad (3.11.32)$$

dir.

İSPAT:

$$E(x^3)=\mu'_3-3\alpha E(x^2)+3\alpha^2 E(x)-\alpha^3 \qquad (3.11.32.a)$$

dir. (3.11.28)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\beta^3\Gamma(1-3/\tau) \qquad (3.11.32.b)$$

elde edilir.

(3.11.32.a)'da, (3.11.32.b), (3.11.30.b) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$$E(x^3)=\beta^3\Gamma(1-3/\tau)+3\alpha\beta^2\Gamma(1-2/\tau)+3\alpha^2\beta\Gamma(1-1/\tau)+\alpha^3 \qquad (3.11.32.c)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.11.32.c), (3.11.30.c) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\beta^3\{\Gamma(1-3/\tau)-3\Gamma(1-2/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+2\Gamma^3(1-1/\tau)\}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma(1-3/\tau)-3\Gamma(1-2/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+2\Gamma^3(1-1/\tau)}{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}^{3/2}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.29</u> Sürekli tipteki bir x r.d, İkinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma(1-4/\tau)-4\Gamma(1-3/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+6\Gamma(1-2/\tau)\Gamma^2(1-1/\tau)-3\Gamma^4(1-1/\tau)}{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}^2}$$

$$\tau>4 \qquad (3.11.33)$$

dir.

İSPAT:

$$E(x^4)=\mu'_4+4\alpha E(x^3)-6\alpha^2 E(x^2)-4\alpha^3 E(x)+\alpha^4 \qquad (3.11.33.a)$$

dır. (3.11.28)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\beta^4\Gamma(1-4/\tau) \qquad (3.11.33.b)$$

elde edilir.

(3.11.33.a)'da, (3.11.33.b), (3.11.32.b), (3.11.30.b) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$$E(x^4)=\beta^4\Gamma(1-4/\tau)-4\alpha\beta^3\Gamma(1-3/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+6\alpha^2\beta^2\Gamma(1-2/\tau)\Gamma^2(1-1/\tau)$$
$$-4\alpha^3\beta\Gamma(1-1/\tau)\Gamma^3(1-1/\tau)+\alpha^4 \qquad (3.11.33.c)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.11.33.c), (3.11.32.c), (3.11.30.c) ve (3.11.29) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\beta^4\{\Gamma(1-4/\tau)-4\Gamma(1-3/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+6\Gamma(1-2/\tau)\Gamma^2(1-1/\tau)$$
$$-3\Gamma^4(1-1/\tau)$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma(1-4/\tau)-4\Gamma(1-3/\tau)\Gamma(1-1/\tau)+6\Gamma(1-2/\tau)\Gamma^2(1-1/\tau)-3\Gamma^4(1-1/\tau)}{\{\Gamma(1-2/\tau)-\Gamma^2(1-1/\tau)\}^2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.30</u> İkinci Tip Uç Değer dağılımının modu,

$$x=\alpha+\beta[\tau/(\tau+1)]^{1/\tau} \qquad (3.11.34)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.11.3)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha+\beta[\tau/(\tau+1)]^{1/\tau}$ elde edilir. $x=\alpha+\beta[\tau/(\tau+1)]^{1/\tau}$ değeri için (3.11.3)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, İkinci Tip Uç Değer dağılımının modu,

$$x=\alpha+\beta[\tau/(\tau+1)]^{1/\tau}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.31</u> İkinci Tip Uç Değer dağılımın medyanı,

$$\alpha+\beta\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^{1/\tau} \qquad (3.11.35)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{\alpha}^{x}\frac{\tau}{\beta}\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^{-\tau-1}\exp\left\{-\left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^{-\tau}\right\}du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=y^{-\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$\exp\{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^{-\tau}\}=\frac{1}{2} \text{ dir. Buradan,}$$

$$x=\alpha+\beta(\frac{1}{\ln 2})^{1/\tau}$$

bulunur.

Şimdi de üçüncü Tip Uç Değer dağılımını inceleyelim.

TANIM 3.11.5 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta,\tau)=\frac{\tau}{\beta}\ (\frac{\alpha-x}{\beta})^{\tau-1}\exp\{-(\frac{\alpha-x}{\beta})^{\tau}\} \qquad (3.11.36)$$

$\alpha > x \qquad \beta > 0 \qquad \tau > 0$

ise x r.d'ne α , β ve τ parametreli üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahiptir denir.

Üçüncü Tip Uç Değer dağılımını, EVIII$(x:\alpha,\beta,\tau)$ veya EVIII$_x(\alpha,\beta,\tau)$ ve ilgili değişkeni, EVIII$:\alpha,\beta,\tau$ ile göstereceğiz. Burada α, β ve τ parametreleri, sırasıyla dağılımın konum, yayılım ve şekil parametreleridir.

TEOREM 3.11.32 Üçüncü Tip Uç Değer dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\exp\{-(\frac{\alpha-x}{\beta})^{\tau}\} \qquad \alpha>x \qquad (3.11.37)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta)=\int_{\alpha}^{x}\frac{\tau}{\beta}\ (\frac{u-\alpha}{\beta})^{\tau-1}\exp\{-\ (\frac{u-\alpha}{\beta})^{\tau}\}du \qquad (3.11.37.a)$$

dur.

(3.11.37.a)'da, önce $y=(\alpha-u)/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandağında,

$$F(x:\alpha,\beta,\tau)=\exp\{-(\frac{\alpha-x}{\beta})^{\tau}\}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.33</u> üçüncü Tip Uç Değer dağılımının α etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\beta^r\Gamma(1 + r/\tau) \qquad r>-\tau \qquad (3.11.38)$$

dir.

İSPAT: (1.5.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_{\alpha}^{+\infty} (x-\alpha)^r \frac{\tau}{\beta} \left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\{-\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)^{\tau}\}dx \qquad (3.11.38.a)$$

dır.

(3.11.38.a)'da, önce $y=(\alpha-x)/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$\mu'_r=\beta^r\Gamma(1 + r/\tau)$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.34</u> Sürekli tipteki bir x r.d, üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha + \beta\Gamma(1+1/\tau) \qquad 1>-\tau \qquad (3.11.39)$$

dir.

İSPAT:

$$E(x)=\mu'_1+\alpha \qquad (3.11.39.a)$$

dır. (3.11.38)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\beta\Gamma(1+1/\tau) \qquad (3.11.39.b)$$

elde edilir.

(3.11.39.a)'da, (3.11.39.b) yerine koyulduğunda,

$E(x)=\alpha + \beta\Gamma(1+1/\tau)$

bulunur.

<u>TEOREM 3.11.35</u> Sürekli tipteki bir x r.d, üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\beta^2\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\} \qquad 2>-\tau \qquad (3.11.40)$$

dir.

İSPAT:

$$E(x^2)=\mu'_2+2\alpha E(x)-\alpha^2 \qquad (3.11.40.a)$$

dir. (3.11.38)'de r=2 için,

$$\mu'_2=\beta^2\Gamma(1+2/\tau) \qquad (3.11.40.b)$$

elde edilir.

(3.11.40.a)'da, (3.11.40.b) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$E(x^2)=\beta^2\Gamma(1+2/\tau)+2\alpha\beta\Gamma(1+1/\tau)+\alpha^2$ (3.11.40.c)

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.11.40.c) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\beta^2\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}$

bulunur.

TEOREM 3.11.36 Sürekli tipteki bir x r.d, üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahip ise,

$SS(x)=\beta\sqrt{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}}$ $2>-\tau$ (3.11.41)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.11.40) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\beta\sqrt{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}}$

bulunur.

TEOREM 3.11.37 Sürekli tipteki bir x r.d, üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma(1+3/\tau)-3\Gamma(1+2/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+2\Gamma^3(1+1/\tau)}{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}^{3/2}} \quad 3>-\tau \quad (3.11.42)$$

dir.

İSPAT:

$E(x^3)=\mu'_3-3\alpha E(x^2)+3\alpha^2E(x)-\alpha^3$ (3.11.42.a)

dir. (3.11.38)'de r=3 için,

$\mu'_3=\beta^3\Gamma(1+3/\tau)$ (3.11.42.b)

elde edilir.

(3.11.42.a)'da, (3.11.42.b), (3.11.40.b) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$E(x^3)=\beta^3\Gamma(1+3/\tau)+3\alpha\beta^2\Gamma(1+2/\tau)+3\alpha^2\beta\Gamma(1+1/\tau)+\alpha^3$ (3.11.42.c)

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.11.42.c), (3.11.40.c) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=\beta^3\{\Gamma(1+3/\tau)-3\Gamma(1+2/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+2\Gamma^3(1+1/\tau)\}$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=\frac{\Gamma(1+3/\tau)-3\Gamma(1+2/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+2\Gamma^3(1+1/\tau)}{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}^{3/2}}$$

bulunur.

TEOREM 3.11.38 Sürekli tipteki bir x r.d, üçüncü Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma(1+4/\tau)-4\Gamma(1+3/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+6\Gamma(1+2/\tau)\Gamma^2(1+1/\tau)-3\Gamma^4(1+1/\tau)}{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}^2}$$

$$4>-\tau \qquad (3.11.43)$$

dir.

İSPAT:

$$E(x^4)=\mu'_4+4\alpha E(x^3)-6\alpha^2E(x^2)-4\alpha^3E(x)+\alpha^4 \qquad (3.11.43.a)$$

dır. (3.11.38)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\beta^4\Gamma(1+4/\tau) \qquad (3.11.43.b)$$

elde edilir.

(3.11.33.a)'da, (3.11.33.b), (3.11.32.b), (3.11.40.b) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$$E(x^4)=\beta^4\Gamma(1+4/\tau)+4\alpha\beta^3\Gamma(1+3/\tau)+6\alpha^2\beta^2\Gamma(1+2/\tau)$$
$$+4\alpha^3\beta\Gamma(1+1/\tau) \qquad (3.11.43.c)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.11.43.c), (3.11.42.c), (3.11.40.c) ve (3.11.39) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\beta^4\{\Gamma(1+4/\tau)-4\Gamma(1+3/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+6\Gamma(1+2/\tau)\Gamma^2(1+1/\tau)$$
$$-3\Gamma^4(1+1/\tau)\}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\frac{\Gamma(1+4/\tau)-4\Gamma(1+3/\tau)\Gamma(1+1/\tau)+6\Gamma(1+2/\tau)\Gamma^2(1+1/\tau)-3\Gamma^4(1+1/\tau)}{\{\Gamma(1+2/\tau)-\Gamma^2(1+1/\tau)\}^2}$$

bulunur.

TEOREM 3.11.39 Üçüncü Tip Uç Değer dağılımının modu,

$$x=\alpha-\beta[(1-\tau)/\tau]^{1/\tau} \qquad (3.11.44)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.11.4)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha-\beta[(1-\tau)/\tau]^{1/\tau}$ elde edilir. $x=\alpha-\beta[(1-\tau)/\tau]^{1/\tau}$ değeri için (3.11.4)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, üçüncü Tip Uç Değer dağılımının modu,

$$x=\alpha-\beta[(1-\tau)/\tau]^{1/\tau}$$

bulunur.

TEOREM 3.11.40 üçüncü Tip Uç Değer dağılımın medyanı,

$$\alpha-\beta(\ln 2)^{1/\tau} \qquad (3.11.45)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{\tau}{\beta}\left(\frac{\alpha-u}{\beta}\right)^{\tau-1}\exp\left\{-\left(\frac{\alpha-u}{\beta}\right)^{\tau}\right\}du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, önce $y=(\alpha-u)/\beta$, daha sonra $u=y^{\tau}$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$\exp\left\{-\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)^{\tau}\right\}=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$$x=\alpha-\beta(\ln 2)^{1/\tau}$$

bulunur.

3.11.1 Uç Değer Dağılımının Uygulama Alanları

Bir parçanın yada sistemin başarısızlığı genellikle, özel bir dağılımdan alınmış bir örneklemdeki en büyük değere yada en küçük değere benzer şekilde, uçsal olaylara bağlıdır. Örneğin, iki devreyi ele alalım. Bu devreler aynı üretimden rastgele seçilsin. Birinci devrede parçalar seri bağlansın. İlk parça başarısız olduğunda yada bozulduğunda, devre çalışmaz. İkinci devrede de parçalar parallel bağlansın. Bu durumda ise tüm parçalar başarısız olduğunda, bozulduğunda devre çalışmaz.

Sabit bir gerilim uygulanan dayanıklılık testide başarısızlık, verilen maddedeki tüm elemanların en dayanıksızının mukavemetine direk olarak bağlıdır.

Kapasitörlerin incelenmesi sonucu, bu maddelerin üzerine kusurların yada hataların rastğele dağılmış ve bozulma voltajının direk olarak en büyük kusurun yada hatanın hacmine bağlı olduğu bulunmuştur.

Bu durumlarda biz ilk başlangıç dağılımından alınmış örneklemdeki en küçük elemanın yada en en küçük değerin veya en büyük elemanın yada en büyük değerin dağılımıyla ilgileniriz. Genellikle bu ilk başlangıç dağılımı bilinmez ve direk olarak örneklendirilemez. Sabit bir gerilim uygulanan dayanıklılıkta ve bozulma voltajlarında olduğu gibi. Bu durumlarda sadece minimum veya maksimum değerler gözlenir. En küçük veya en büyük elemanın dağılımı, örneklem hacmine ve başlangıç dağılımının yapısına bağlıdır. Bununla birlikte, örneklem hacmi büyükse biz başlangıç dağılımıyla ilgili bazı sınırlandırılmış varsayımlara dayalı bazı genel asimtotik sonuçları kullanabiliriz.

1) Maksimum değerler için Birinci Tip Asimtotik dağılım.

2) Minimum değerler için Birinci Tip Asimtotik dağılım.

3) Minimum değerler için Üçüncü Tip Asimtotik dağılım.

Birinci Tip Asimtotik dağılıma, Uç Değer dağılımı denir. Minimum değerler için Üçüncü Tip Asimtotik dağılım, Weibull dağılımıdır. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:111)

Maksimum değerler için Uç Değer dağılımı, n elemanı paralel bağlı bir devre için zamana karşı dayanmayı göstermek için kullanılır. Burada n 'nin büyük bir sayı olduğu, parçaların başarısızlıkları aynı, üstel tip dağılımdan geldiği ve başarısızlıkların birbirinden bağımsız oldukları varsayılır. Uç Değer dağılımı, belirlenmiş bir ölçüm noktasından özel bir nehir için günlük su boşaltımının, yıllık maksimum dağılımını göstermek için başarılı şekilde kullanılmıştır. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:112)

Bu uygulama aşağıdakileri varsayar:

a. Günlük boşaltımların değerleri bir üstel tip dagılıma uyar.

b. Elemanların orijinal numarası 365 gün Asimtotik teorinin uygulanması için yeterlidir.

c. Günlük boşaltımlar bağımsızdırlar.

Maksimum değerler için Birinci Tip Asimtotik dağılımın yani Uç Değer dağılımının, kullanıldığı diğer olaylara örnekler olarak:

1) Bir uçağın maruz kaldığı yada kalabileceği rüzgarların esme hızları (Press, 1949)

2) Bakteriler için imha, bir neslin tükenmesi zamanları (Velz, 1947)

3) Korozyon çukurlarının derinliği (Aziz, 1955) ve (Eldredge, 1957)

4) Genel meteoroloji verilerine uygulamalar. (Jenkinson, 1955) ve (Thom, 1954)

verilebilir.

3.11.2 Uç Değer Dağılımının Parametre Tahminleri

Birinci Tip Uç Değer dağılımının α ve β parametrelerinin tahmin edicilerini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ herbiri α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ 'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,...,x_n;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^n}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\alpha}{\beta})\}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}\exp\{-(\frac{x_i-\alpha}{\beta})\}\}$$

$L(\alpha,\beta)=f(x_1,...,x_n;\alpha,\beta)$ olsun. O halde,

$$L(\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^n}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\alpha}{\beta})\}\exp\{-\sum_{i=1}^{n}\exp\{-(\frac{x_i-\alpha}{\beta})\}\} \qquad (3.11.2.1)$$

dir. (3.11.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\alpha,\beta)\}=-n\ln\beta-\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i-\alpha}{\beta})-[\sum_{i=1}^{n}\exp\{-(\frac{x_i-\alpha}{\beta})\}] \qquad (3.11.2.2)$$

dir.

(3.11.2.2)'de sırasıyla, α ve β göre türev alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\hat{\alpha}=-\hat{\beta}\ln\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(-\frac{x_i}{\hat{\beta}})\} \qquad (3.11.2.3)$$

ve

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\beta}}\right) \right] / \left[\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{x_i}{\hat{\beta}}\right) \right] \qquad (3.11.2.4)$$

bulunur.

3.11.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:54-57)'de verilen bağıntılar.

1) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp\{-(X-\alpha)\}$, β parametreli üstel dağılıma sahiptir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli üstel dağılıma sahip ise, $Y=\alpha-\log X$, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\alpha+\beta X$, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir.

5) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=X_1-X_2$, $\alpha=0$ ve β parametreli Lojistik dağılıma sahiptir.

6) Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımı, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımının $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp\{-\exp(-X)\}$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, $Y=-\log(-\log X)$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X)$, Standart Üstel dağılımına sahiptir.

10) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılımına sahip ise, $Y=-\log X$, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahiptir.

11) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\{\exp(-X)\}^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

12) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=-\tau\log X$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\{\beta\exp(-X)\}^{1/\tau}$, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve τ parametreli Weibull dağılımına sahip ise, $Y=-\tau\log(X/\beta)$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\alpha+\beta X$, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\beta\{1-\exp[-\exp(-X)]\}^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=-\log\{-\log[1-(\beta/X)^{k}]\}$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp\{-\exp(-X)/p\}$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=[-\log(-p\log X)]$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=-\log[\exp\{-\exp(-X)\}/[1-\exp\{-\exp(-X)\}]]$, Standart Lojistik dağılımına sahiptir.

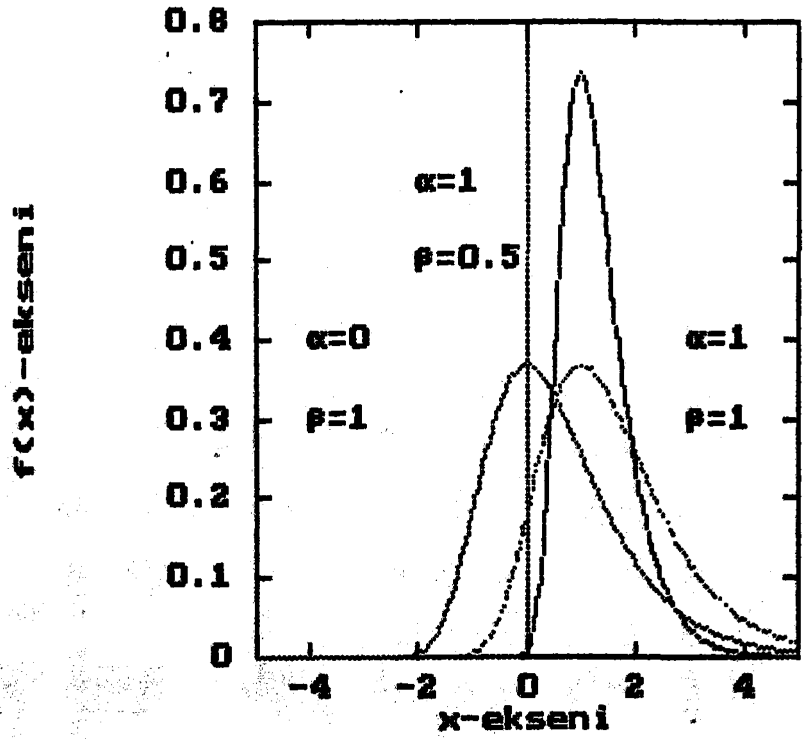
22) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise, $Y=-\log\{-\log[\exp(-X)/[1+\exp(-X)]]\}$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

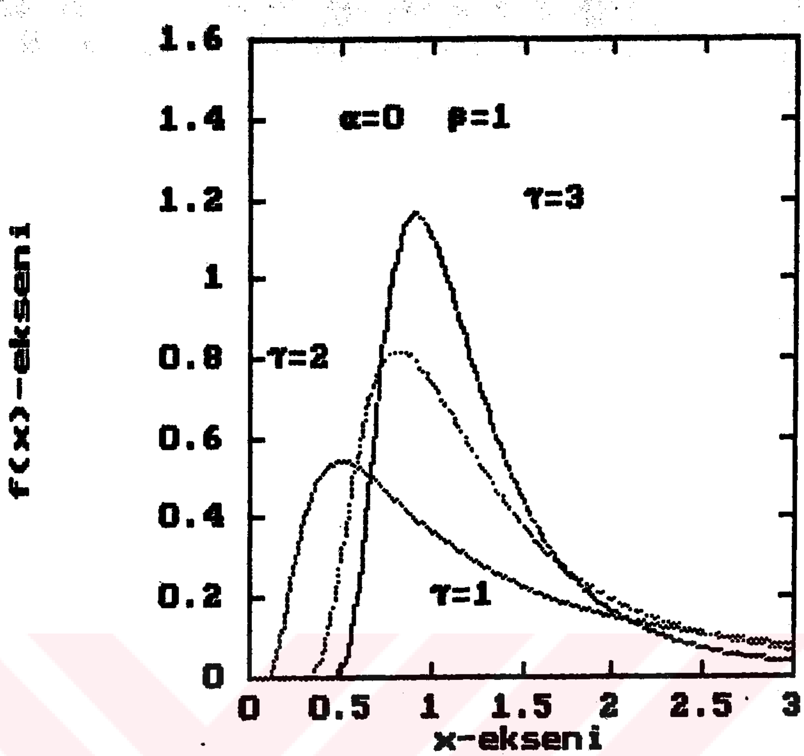
23) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d ler ve herbiri Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=X_1-X_2$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[\exp\{-\exp(-X)\}-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılımına sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılımına sahip ise, $Y=-\log\{\log[\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1]\}$ Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

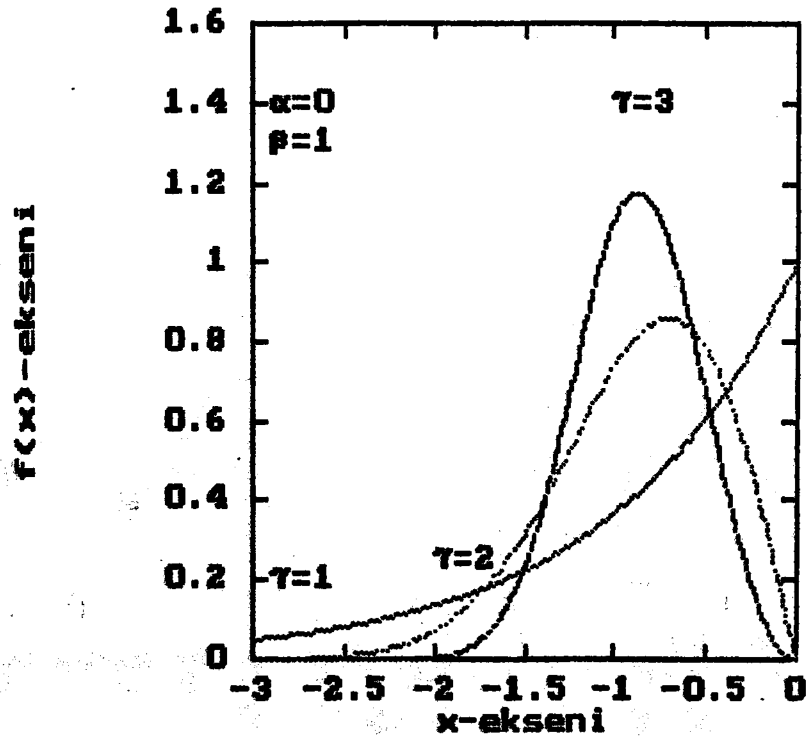
Şekil 36. Birinci Tip Uç Değer Dağılımının $\alpha=0$ $\beta=1$, $\alpha=1$ $\beta=0.5$ ve $\alpha=1$ $\beta=1$ parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.





Şekil 37. İkinci Tip Uç Değer Dağılımının α=0 β=1 ve τ=1 τ=2 τ=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 38. Üçüncü Tip Uç Değer Dağılımının α=0 β=1 ve τ=1 τ=2 τ=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.12 Lojistik Dağılım

Lojistik dağılımı; Lojistik dağılım, Standart Lojistik dağılım ve log-Lojistik dağılım olarak inceleyeceğiz.

TANIM 3.12.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\alpha,\beta)=(1/\beta)\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)/\left[1+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]^2 \qquad (3.12.1.a)$$

veya,

$$f(x;\alpha,\beta)=(1/4\beta)\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\alpha}{2\beta}\right) \qquad (3.12.1.b)$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad -\infty < \alpha < +\infty \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne α ve β parametreli Lojistik dağılımına sahiptir denir.

Lojistik dağılımı, $LG(x;\alpha,\beta)$ veya $LG_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, $LG;\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Burada α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

Lojistik dağılıma, Sekant Hiperbolik Kare (sech-square(d)) dağılımı da denir.

Biz hesaplamalarda, (3.12.1.a)'daki o.y.f'nu kullanacağız.

TEOREM 3.12.1 Lojistik dağılımının d.f,

$$F(x;\alpha,\beta)= 1/\left[1+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right] \qquad (3.12.2.a)$$

veya

$$F(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\left[1+\tanh\left(\frac{x-\alpha}{2\beta}\right)\right] \qquad (3.12.2.b)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{x}(1/\beta)\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)/\left[1+\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)\right]^2 du \qquad (3.12.2.c)$$

dur.

(3.12.2.c)'de, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=1+\exp(-y)$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta)=1/[1+\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})]$$

bulunur.

Eğer o.y.f olarak (3.12.1.b)'yi almış olsaydık, d.f olarak (3.12.2.b)'yi elde edecektik. (Johnson ve Kotz, 1970 s:1)

TEOREM 3.12.2 Lojistik dağılımın m.ç.f,

$$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)\Gamma(1-\beta t)\Gamma(1+\beta t) \qquad (3.12.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(tx)(1/\beta)\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})/[1+\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})]^2dx \qquad (3.12.3.a)$$

dir.

(3.12.3.a)'da, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=1/[1+\exp(-y)]$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)\Gamma(1-\beta t)\Gamma(1+\beta t)$$

bulunur.

NOT: Beta fonksiyonunun tanımından,

1) $$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du$$

2) $$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$$

dir.

TEOREM 3.12.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Lojistik dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha \qquad (3.12.4)$$

dır.

İSPAT: (1.3.1)'deki eşitliği kullanarak,

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\exp\{-(x-\alpha)/\beta\}}{\beta[1+\exp\{-(x-\alpha)/\beta\}]^2}dx \qquad (3.12.4.a)$$

dir.

(3.12.4.a)'da, $y=(x-\alpha)/\beta$ değişgen değiştirmeyi yapalım.

$$E(x)=\beta\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2}dy \qquad (3.12.4.b)$$

(3.12.4.b)'de, $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2}dy$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, önce $u=1/[1+\exp(-y)]$ değişken değiştirmeyi yapalım.

$$I_1=\int_0^1 \ln u du - \int_0^1 \ln(1-u)du = A - B \qquad (3.12.4.c)$$

dir.

(3.12.4.c)'de, $A=\int_0^1 \ln u du$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $u=\exp(t)$ değişken değiştirmeyi yapıp kısmi integrasyon metoduyla integral hesaplandığında, $A=-1$ elde edilir.

(3.12.4.c)'de, $B=\int_0^1 \ln(1-u)du$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $1-u=\exp(t)$ değişken değiştirmeyi yapıp kısmi integrasyon metoduyla integral hesaplandığında, $B=-1$ elde edilir. O halde, $I_1=0$ dır.

(3.12.4.b)'de, $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2}dy$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $u=1+\exp(-y)$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında, $I_2=1$ dir. O halde,

$E(x)=\alpha$

bulunur.

TEOREM 3.12.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Lojistik dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{\beta^2\pi^2}{3} \qquad (3.12.5)$$

tür.

İSPAT: (3.12.1.a)'daki o.y.f'na,

$$y=(x-\alpha)/\beta \qquad (3.12.5.a)$$

dönüşümü uygulandığında, y r.d'nin o.y.f,

$$g(y)=\frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2} \qquad -\infty < y < +\infty$$

elde edilir.

y r.d'nin dağılımı, y=0 etrafında simetriktir. r>0 olmak üzere,

$$E(|y|^r)= 2\int_0^{+\infty} y^r \frac{\exp(-y)}{[1+\exp(-y)]^2}dy$$

$$= 2\int_0^{+\infty} y^r \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} i\exp(-iy)dy$$

$$= 2\,\Gamma(r+1)\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} i\, i^{-r}$$

$$= 2\,\Gamma(r+1)[1-2^{-(r-1)}]z(r) \qquad r>1 \qquad (3.12.5.b)$$

dir.

$z(r)=\sum_{i=1}^{\infty} i^{-r}$, Riemann zeta fonksiyonudur.

$$z(x)=1+2^{-(x+1)}\ \frac{2x^2+8.4x+21.6}{(x-1)(x+7)} \qquad x>1 \qquad (3.12.5.c)$$

dir.

(3.12.5.c)'de özel olarak,

$$z(2)=\pi^2/6 \qquad (3.12.5.d)$$

$$z(4)=\pi^4/90 \qquad (3.12.5.e)$$

dır.

Eğer r tek bir sayı ise, $E(|y|^r)=0$ dır. (Johnson ve Kotz, 1970 s:4)

(3.12.5.a)'dan, $x=\beta y+\alpha$ dır. O halde,

$$E(x^2)=\beta^2E(y^2)+2\alpha\beta E(y)+\alpha^2 \qquad (3.12.5.f)$$

dir.

(3.12.5.b)'den r=2 için,

$$E(y^2)=\pi^2/3 \qquad (3.12.5.g)$$

tür.

(3.12.5.b)'den r=1 için,

$$E(y)=0 \qquad (3.12.5.h)$$

dır.

(3.12.5.f)'de, (3.12.5.g) ve (3.12.5.h) yerine koyulduğunda,

$$E(x^2)=\beta^2\pi^2/3+\alpha^2 \qquad (3.12.5.i)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.12.5.i) ve (3.12.4) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{\beta^2\pi^2}{3}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Lojistik dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\beta\pi/\sqrt{3} \qquad (3.12.6)$$

tür.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.12.5) yerine koyulduğunda,

$SS(x)= \beta\pi/\sqrt{3}$

bulunur.

TEOREM 3.12.6 Sürekli tipteki bir x r.d, Lojistik dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \quad (3.12.7)$$

dır.

İSPAT: (3.12.5.a)'dan, $x=\beta y+\alpha$ dır. O halde,

$$E(x^3)=\beta^3E(y^3)+3\alpha\beta^2E(y^2)+3\alpha^2\beta E(y)+\alpha^3 \quad (3.12.9.a)$$

dir.

(3.12.5.b)'den r=3 için,

$$E(y^3)=0 \quad (3.12.7.b)$$

dır.

(3.12.7.a)'da, (3.12.7.b), (3.12.5.g) ve (3.12.5.h) yerine koyulduğunda,

$$E(x^3)=\alpha\beta^2\pi^2+\alpha^3 \quad (3.12.7.c)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.12.7.c), (3.12.5.i) ve (3.12.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=0$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0$

bulunur.

TEOREM 3.12.7 Sürekli tipteki bir x r.d, Lojistik dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=4.2 \quad (3.12.8)$$

dir.

İSPAT: (3.12.5.a)'dan, $x=\beta y+\alpha$ dır. O halde,

$$E(x^4)=\beta^4E(y^4)+4\alpha\beta^3E(y^3)+6\alpha^2\beta^2E(y^2)+4\alpha^3\beta E(y)+\alpha^4 \quad (3.12.12.a)$$

dir.

(3.12.5.b)'den r=4 için,

$$E(y^4)=7\pi^2/15 \quad (3.12.8.b)$$

dir.

(3.12.5.a)'da, (3.12.8.b), (3.12.7.b), (3.12.5.g) ve (3.12.5.h) yerine koyulduğunda,

$$E(x^4)=(7\beta^4\pi^4+30\alpha^2\beta^2\pi^2+15\alpha^4)/15 \quad (3.12.8.c)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.12.8.c), (3.12.7.c), (3.12.5.i) ve (3.12.4) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=7\beta^4\pi^4/15$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=4.2$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.8</u> Lojistik dağılımının modu,

$$x=\alpha \tag{3.12.9}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.12.1.a)'daki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha$ elde edilir. $x=\alpha$ değeri için (3.12.1.a)'daki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Lojistik dağılımın modu,

$x=\alpha$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.9</u> Lojistik dağılımın medyanı,

$$\alpha \tag{3.12.10}$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$\int_{-\infty}^{x}(1/\beta)\exp(-\frac{u-\alpha}{\beta})/[1+\exp(-\frac{u-\alpha}{\beta})]^2du=\frac{1}{2}$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integralde, önce $y=(u-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=1+\exp(-y)$ değişken değiştirmeler yapılıp integral hesaplandığında,

$1/[1+\exp(-\frac{x-\alpha}{\beta})]=\frac{1}{2}$ dir. Buradan,

$x=\alpha$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.10</u> Lojistik dağılımın karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\Gamma(1-i\beta t)\Gamma(1+i\beta t) \tag{3.12.11}$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.12.3)'te, t yerine it alındığında,

$\phi(t:\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\Gamma(1-i\beta t)\Gamma(1+i\beta t)$

bulunur.

TEOREM 3.12.11 Lojistik dağılımın r-inci kümülant fonksiyonu,

$$K_r=\begin{cases} 2\beta\emptyset^{(r-1)}(1) & r>1 \text{ ve } r \text{ bir çift sayı ise,} \\ 0 & r \text{ bir tek sayı ise,} \end{cases} \quad (3.12.12)$$

dir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:3)

Burada,

$$\emptyset^{(r-1)}(1)=\frac{d^r}{da^r}\{\emptyset(a)\}\Big|_{a=1} \text{ ve } \emptyset(a)=\frac{d}{da}\{\log\Gamma(a)\}$$

dır.

Şimdi Standart Lojistik dağılımı inceleyelim.

TANIM 3.12.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x)=\exp(-x)/[1+\exp(-x)]^2 \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (3.12.13.a)$$

veya

$$f(x)=(1/4)\mathrm{sech}^2(x/2) \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (3.12.13.b)$$

ise x r.d'ne Standart Lojistik dağılımına sahiptir denir.

Standart Lojistik dağılımını, SLG ile göstereceğiz.

Standart Lojistik dağılım, Lojistik dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

Standart Lojistik dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Lojistik dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.12.12 Standart Lojistik dağılımının d.f,

$$F(x)=\frac{1}{1+\exp(-x)} \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (3.12.14.a)$$

veya

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[1+\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right] \qquad -\infty<x<+\infty \qquad (3.12.14.b)$$

dir.

TEOREM 3.12.13 Standart Lojistik dağılımın m.ç.f,

$$M(t)=\Gamma(1-t)\Gamma(1+t) \quad (3.12.15)$$

veya

$$M(t)=\pi t \operatorname{cosech} \pi t$$

dir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:3)

TEOREM 3.12.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise,

$$E(x)=0 \quad (3.12.16)$$

dır.

TEOREM 3.12.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\pi^2/3 \quad (3.12.17)$$

tür.

TEOREM 3.12.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\pi/\sqrt{3} \quad (3.12.18)$$

tür.

TEOREM 3.12.17 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \quad (3.12.19)$$

dır.

TEOREM 3.12.18 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Lojistik dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=4.2 \quad (3.12.20)$$

dir.

TEOREM 3.12.19 Standart Lojistik dağılımının modu ,

$$x=0 \quad (3.12.21)$$

noktasındadır.

TEOREM 3.12.20 Standart Lojistik dağılımın medyanı,

$$0 \quad (3.12.22)$$

dır.

Şimdi de Log-Lojistik dağılımı inceleyelim.

TANIM 3.12.3 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{\beta\exp(\alpha\beta)x^{\beta-1}}{[\exp(\alpha\beta)x^{\beta}+1]^2} \qquad (3.12.23)$$

$x > 0 \qquad -\infty < \alpha < +\infty \qquad \beta > 0$

ise x r.d'ne Log-Lojistik dağılıma sahiptir denir.

Log-Lojistik dağılımı, LOLG$(x:\alpha,\beta)$ veya LOLG$_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, LOLG$:\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Burada α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

TEOREM 3.12.21 Log-Lojistik dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha\beta)x^{-\beta}} \qquad (3.12.24)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta\exp(\alpha\beta)u^{\beta-1}}{[\exp(\alpha\beta)u^{\beta}+1]^2}du \qquad (3.12.24.a)$$

dur.

(3.12.24.a)'de, $y=1+\exp(\alpha\beta)u^{\beta}$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha\beta)x^{-\beta}}$$

bulunur.

TEOREM 3.12.22 Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\exp(-\alpha r)\Gamma(1-r/\beta)\Gamma(1+r/\beta) \qquad \beta>r \qquad (3.12.25)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_0^x x^r \frac{\beta\exp(\alpha\beta)x^{\beta-1}}{[\exp(\alpha\beta)x^{\beta}+1]^2}dx \qquad (3.12.25.a)$$

dır.

(3.12.25.a)'da, $y=1/[1+\exp(\alpha\beta)x^{\beta}]$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$\mu'_r=\exp(-\alpha r)\Gamma(1-r/\beta)\Gamma(1+r/\beta)$

bulunur.

TEOREM 3.12.23 Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılıma sahip ise,

$$E(x)=\exp(-\alpha)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta) \qquad \beta>1 \qquad (3.12.26)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.12.25)'de r=1 için,

$\mu'_1=\exp(-\alpha)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)$

elde edilir. O halde,

$E(x)=\exp(-\alpha)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)$

bulunur.

TEOREM 3.12.24 Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılıma sahip ise,

$$Var(x)=\exp(-2\alpha)\{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)\}$$

$$\beta>2 \qquad (3.12.27)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.12.25)'de r=2 için,

$\mu'_2=\exp(-2\alpha)\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\exp(-2\alpha)\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta) \qquad (3.12.27.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.12.27.a) ve (3.12.26) yerine koyulduğunda,

$Var(x)=\exp(-2\alpha)\{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)\}$

bulunur.

TEOREM 3.12.25 Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılıma sahip ise,

$$SS(x)=\exp(-\alpha)\sqrt{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)}$$

$\beta>2$ (3.12.28)

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.12.27) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\exp(-\alpha)\sqrt{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)}$$

bulunur.

TEOREM 3.12.26 Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılıma sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{1}{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)}\{\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)-3\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+2\Gamma^3(1-1/\beta)\Gamma^3(1+1/\beta)\}\quad \beta>3 \qquad (3.12.29)$$

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.12.25)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\exp(-3\alpha)\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\exp(-3\alpha)\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta) \qquad (3.12.29.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.12.29.a), (3.12.27.a) ve (3.12.26) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\exp(-3\alpha)\{\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)-3\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+2\Gamma^3(1-1/\beta)\Gamma^3(1+1/\beta)\}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=\frac{1}{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)}\{\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)-3\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+2\Gamma^3(1-1/\beta)\Gamma^3(1+1/\beta)\}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.27</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Log-Lojistik dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{1}{\{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)\}^2}\{\Gamma(1-4/\beta)\Gamma(1+4/\beta)-4\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+6\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)-3\Gamma^4(1-1/\beta)\Gamma^4(1+1/\beta)\} \qquad (3.12.30)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.12.25)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\exp(-4\alpha)\Gamma(1-4/\beta)\Gamma(1+4/\beta)$$

dir. O halde,

$$E(x^4)=\exp(-4\alpha)\Gamma(1-4/\beta)\Gamma(1+4/\beta) \qquad (3.12.30.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.12.30.a), (3.12.29.a), (3.12.27.a) ve (3.12.26) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\exp(-4\alpha)\{\Gamma(1-4/\beta)\Gamma(1+4/\beta)-4\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+6\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)-3\Gamma^4(1-1/\beta)\Gamma^4(1+1/\beta)\}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=\frac{1}{\{\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)\}^2}\{\Gamma(1-4/\beta)\Gamma(1+4/\beta)-4\Gamma(1-3/\beta)\Gamma(1+3/\beta)\Gamma(1-1/\beta)\Gamma(1+1/\beta)+6\Gamma(1-2/\beta)\Gamma(1+2/\beta)\Gamma^2(1-1/\beta)\Gamma^2(1+1/\beta)-3\Gamma^4(1-1/\beta)\Gamma^4(1+1/\beta)\}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.12.28</u> Log-Lojistik dağılımının modu,

$$x=\exp(-\alpha)[(\beta-1)/(\beta+1)]^{1/\beta} \qquad (3.12.31)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.12.23)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\exp(-\alpha)[(\beta-1)/(\beta+1)]^{1/\beta}$ elde edilir. $x=\exp(-\alpha)[(\beta-1)/(\beta+1)]^{1/\beta}$ değeri için (3.12.23)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Log-Lojistik dağılımın modu,

$$x=\exp(-\alpha)[(\beta-1)/(\beta+1)]^{1/\beta}$$

bulunur.

TEOREM 3.12.29 Log-Lojistik dağılımın medyanı,

$$\exp(-\alpha) \qquad (3.12.32)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_0^x \frac{\beta\exp(\alpha\beta)u^{\beta-1}}{[\exp(\alpha\beta)u^{\beta}+1]^2}du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki

dir.

integralde, $y=1+\exp(\alpha\beta)u^{\beta-1}$ değişken değiştirme değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$\frac{1}{1+\exp(-\alpha\beta)x^{-\beta}}=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$$x=\exp(-\alpha)$$

bulunur.

3.12.1 Lojistik Dağılımın Uygulama Alanları

Lojistik dağılım, Normal dağılım için bir vekil veya Normal dağılımın yerine geçebilecek bir dağılım olarak kullanılır.

Lojistik dağılım, Normal dağılımın doğruluk analizinde kullanılır. Kitle tolerans dağılımını göstermek için Normal dağılım yerine bir Lojistik dağılım kullanılırsa, doğruluk analizi yerine yanlışlığı hesaplanır. (Berkson, 1951)

Lojistik dağılım, büyümeyi tanımlamada kullanılır.

3.12.2 Lojistik Dağılımın Parametre Tahminleri

Lojistik dağılımın α ve β parametrelerinin tahmin edicilerini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri α ve β parametreli Lojistik dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\alpha,\beta)=\frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i-\alpha}{\beta}\right)}{\beta^n\prod_{i=1}^{n}[1+\exp(-(x_i-\alpha)/\beta)]^2}$$

$L(\alpha,\beta)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n;\alpha,\beta)$ olsun. O halde,

$$L(\alpha,\beta)=\frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i-\alpha}{\beta}\right)}{\beta^n\prod_{i=1}^{n}[1+\exp(-(x_i-\alpha)/\beta)]^2} \qquad (3.12.2.1)$$

dir. (3.12.2.1)'in logaritmasını alalım.

(3.12.2.1)'in logaritması alındıktan sonra sırasıyla, α ve β göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x} \qquad (3.12.2.2)$$

ve

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\alpha})}{n[1+2^n\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right)\right)+\exp\left(-2\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right)\right)]} \qquad (3.12.2.3)$$

bulunur.

Ayrıca, α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleri olduğundan,

$$\hat{\alpha}=\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

ve

$$\hat{\beta} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 \right\}}$$

alınabilir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:7)

3.12.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:85-91)'de verilen bağıntılar.

1) Standart Lojistik dağılım, α ve β parametreli Lojistik dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Lojistik dağılımına sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\alpha+\beta X$, α ve β parametreli Lojistik dağılımına sahiptir.

4) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri α ve β parametreli Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=X_1-X_2$, $\alpha=0$ ve β parametreli Lojistik dağılıma sahiptir.

5) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[1+\exp(-X)]^{-1}$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\log\{X/(1-X)\}$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\{-\log[\exp(-X)/[1+\exp(-X)]]\}^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılıma sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılıma sahip ise, $Y=-\log[\exp(-X^\tau)/\{1-\exp(-X^\tau)\}]$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=-\log[\exp(-X)(1+\exp(-X)]$, Standart üstel dağılımına sahiptir.

10) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=-\log[\exp(-X)/(1-\exp(-X)]$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

11) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=-\log\{-\log[\exp(-X)/(1+\exp(-X)]\}$, Standart Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahiptir.

12) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Birinci Tip Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=X_1-X_2$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

13) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=-\log(X_1/X_2)$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta X+\alpha$, α ve β parametreli Lojistik dağılıma sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=(X-\alpha)/\beta$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\exp(X/\beta-\alpha)$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta(\log X+\alpha)$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta(1+\exp(-X))^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=-\log[(X/\beta)^{k}-1]$, Standart Lojistik dağılımına sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahip ise, $Y=-\log[\exp(-\exp(-X))/\{1-\exp(\exp(-X))\}]$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=-X$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

22) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=(1+\exp(-X))^{-1/p}$, parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

23) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Kuvvet fonksiyon dağılıma sahip ise, $Y=-\log(X^{-p}-1)$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta(\log X+\alpha)$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\exp(X/\beta-\alpha)$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

26) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta[1+\exp(\alpha\beta)X^{\beta}]^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

27) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=[\exp(-\alpha\beta)(X/\beta)^{k}-1]1/\beta$, α ve β Log-Lojistik dağılımına sahiptir.

28) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\beta[(1+\exp(\alpha\beta)X^{\beta})/(\exp(\alpha\beta)X^{\beta})]^{1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

29) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[(X/\beta)^{k}-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılımına sahiptir.

30) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1]^{-1}$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

31) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)(1/X-1)^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

32) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1]^{-1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

33) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[X^{-p}-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

34) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=\log[\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1]$, Standart üstel dağılımına sahiptir.

35) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)(\exp X-1)^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

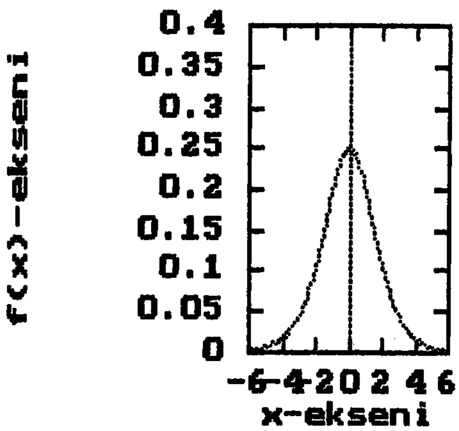
36) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=-\log[\log(\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1)]$, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahiptir.

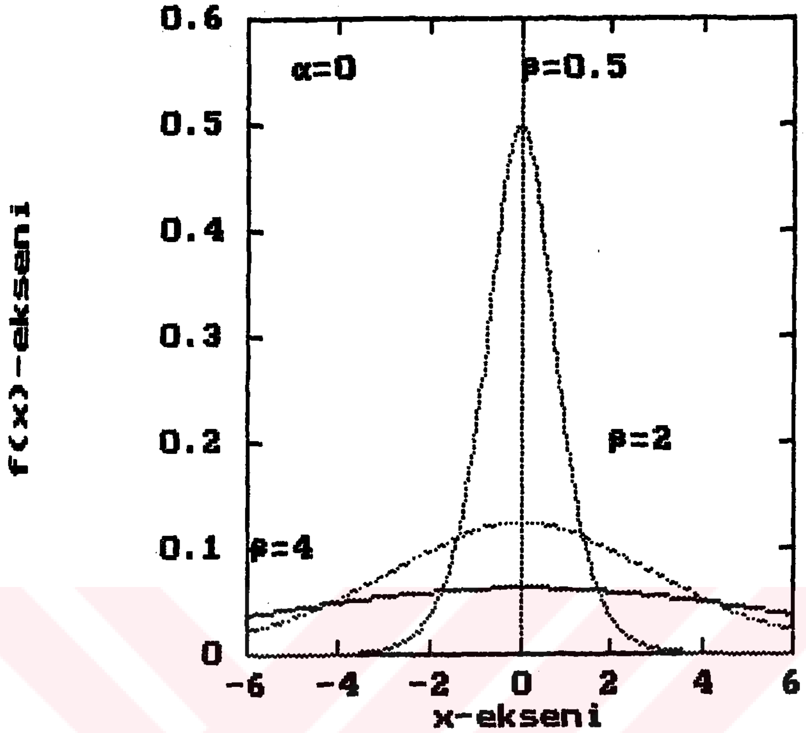
37) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X)[\exp(\exp(-X)-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

38) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[\log(\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1)]^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

39) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[\exp(X^{\tau})-1]^{1/\beta}$, α ve β parametreli Log-Lojistik dağılıma sahiptir.

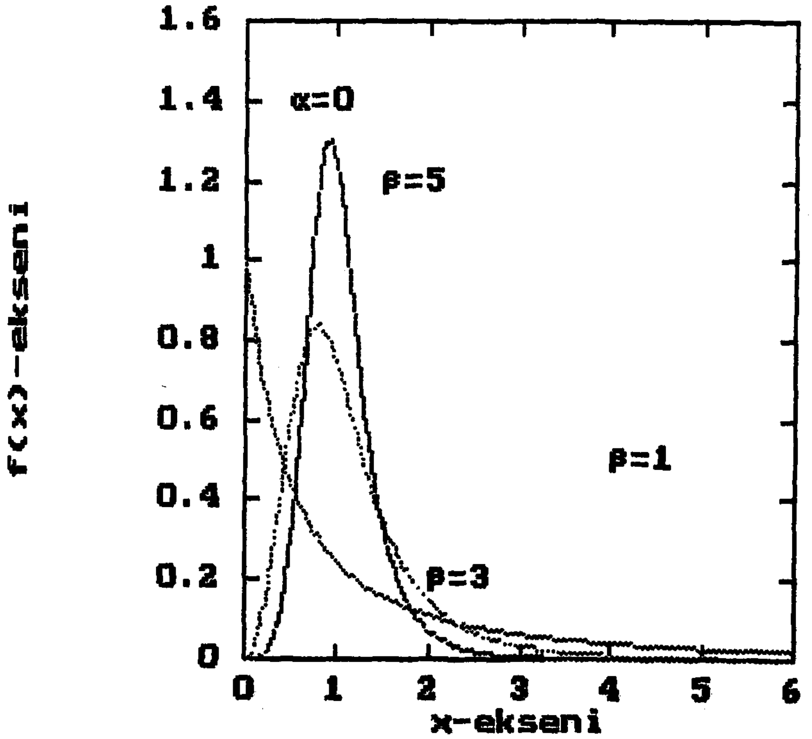
Şekil 39. Standart Lojistik Dağılımın o.y.f'nun grafiği.





Şekil 40. Lojistik Dağılımın α=0 ve β=0.5 β=2 β=4 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 41. Loglojistik Dağılımın α=0 ve β=1 β=3 β=5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.13 Laplace Dağılımı

TANIM 3.13.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right) \qquad (3.13.1)$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad -\infty < \alpha < +\infty \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne α ve β parametreli Laplace dağılımına sahiptir denir.

Laplace dağılımını, $L(x:\alpha,\beta)$ veya $L_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, $L:\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Burada α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

Laplace dağılımına, Laplace'nın Birinci kuralı, Çift Üstel, Poisson'un Birinci hata kuralı da denir

(3.13.1)'de, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ alındığında, Laplace dağılımının standart şekli elde edilir.

TANIM 3.13.2 Sürekli teki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x)=\frac{1}{2}\exp(-|x|) \qquad (3.13.2)$$

$$-\infty < x < +\infty \qquad -\infty < \alpha < +\infty \qquad \beta > 0$$

ise x r.d'ne Standart Laplace dağılımına sahiptir denir.

TEOREM 3.13.1 Laplace dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{\alpha-x}{\beta}\right) & x < \alpha\\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) & x \ge \alpha\end{cases} \qquad (3.13.3)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|u-\alpha|}{\beta}\right)du \qquad (3.13.3.a)$$

dur.

(3.13.3.a)'daki integrali, iki kısımda ele alacağız.

1- $u < \alpha$ olduğunda,

$$I_1=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du$$

olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $y=(u-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_1= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

elde edilir.

2- $u \geq \alpha$ olduğunda,

$$I_2=\frac{1}{2} + \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{u-\alpha}{\beta}\right)du$$

olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $y=(u-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_2= 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

elde edilir. O halde,

$$F(x:\alpha,\beta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} \exp\left(-\dfrac{\alpha-x}{\beta}\right) & x < \alpha \\ 1 - \dfrac{1}{2} \exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) & x \geq \alpha \end{cases}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.13.2</u> Laplace dağılımının m.ç.f,

$$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t) \frac{1}{1-\beta^2 t^2} \qquad |t| < 1/\beta \qquad (3.13.4)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\alpha,\beta)=\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}\exp(tx)\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx+\frac{1}{2\beta}\int_{\alpha}^{+\infty}\exp(tx)\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx \qquad (3.13.4.a)$$

dir.

$$I_1=\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{1}{2\beta}\exp(tx)\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx$$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=(\beta t+1)y$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_1=\frac{1}{2}\,\frac{\exp(\alpha t)}{\beta t+1} \qquad (3.13.4.b)$$

elde edilir.

$$I_2=\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{1}{2\beta}\exp(tx)\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx$$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=(1-\beta t)y$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_2=\frac{1}{2}\,\frac{\exp(\alpha t)}{1-\beta t} \qquad (3.13.4.c)$$

elde edilir.

(3.13.4.a)'da, (3.13.4.b) ve (3.13.4.c) yerine koyulduğunda,

$$M(t:\alpha,\beta)=\exp(\alpha t)\,\frac{1}{1-\beta^2t^2} \qquad |t|<1/\beta$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.13.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise, α etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\begin{cases} \beta^r r! & r \text{ çift ise,} \\ 0 & r \text{ tek ise,} \end{cases} \qquad (3.13.5)$$

dır.

İSPAT: (1.5.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}(x-\alpha)^r\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx+\frac{1}{2\beta}\int_{\alpha}^{+\infty}(x-\alpha)^r\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx \qquad (3.13.5.a)$$

dır.

$I_1=\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{1}{2\beta}(x-\alpha)^r\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, önce $y=(x-\alpha)/\beta$, daha sonra $u=-y$ değişken değiştirmeler yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_1=\frac{1}{2}\beta^r(-1)^r r! \qquad (3.13.5.b)$$

elde edilir.

$I_2=\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{1}{2\beta}(x-\alpha)^r\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)dx$ olsun. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde, $y=(x-\alpha)/\beta$ değişken değiştirme yapılıp, integral hesaplandığında,

$$I_2=\frac{1}{2}\beta^r r! \qquad (3.13.5.c)$$

elde edilir.

(3.13.5.a)'da, (3.13.5.b), (3.13.5.c) yerine koyulduğunda,

$$\mu'_r = \begin{cases} \beta^r r! & r \text{ çift ise,} \\ 0 & r \text{ tek ise,} \end{cases}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.13.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\alpha \qquad (3.13.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu'_1=E(x-\alpha)$ dır.

$$E(x)=\mu'_1+\alpha \qquad (3.13.6.a)$$

dır. (3.13.5)'de r=1 için,

$$\mu'_1=0 \qquad (3.13.6.b)$$

elde edilir.

(3.13.6.a)'da, (3.13.6.b) yerine koyulduğunda,

$$E(x)=\alpha$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.13.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=2\beta^2 \qquad (3.13.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu'_2=E[(x-\alpha)^2]$ dir.

$$E(x^2)=\mu'_2+2\alpha E(x)-\alpha^2 \qquad (3.13.7.a)$$

dır. (3.13.5)'de r=2 için,

$$\mu'_2=2\beta^2 \qquad (3.13.7.b)$$

elde edilir.

(3.13.7.a)'da, (3.13.7.b) ve (3.13.6) yerine koyulduğunda,

$$E(x^2)=2\beta^2+\alpha^2 \qquad (3.13.7.c)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.13.7.c) ve (3.13.6) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=2\beta^2$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.13.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{2}\beta \qquad (3.13.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.13.7) yerine koyulduğunda,

$SS(x)=\sqrt{2}\beta$

bulunur.

TEOREM 3.13.7 Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \qquad (3.13.9)$$

dır.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu'_3=E[(x-\alpha)^3]$ dir.

$$E(x^3)=\mu'_3+3\alpha E(x^2)-3\alpha^2E(x)+\alpha^3 \qquad (3.13.9.a)$$

dır. (3.13.5)'de r=3 için,

$$\mu'_3=0 \qquad (3.13.9.b)$$

elde edilir.

(3.13.9.a)'da, (3.13.9.b), (3.13.7.c) ve (3.13.6) yerine koyulduğunda,

$$E(x^3)=6\alpha\beta^2+\alpha^3 \qquad (3.13.9.c)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.13.9.c), (3.13.7.c) ve (3.13.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=0$

elde edilir. (1.7.5)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0$

bulunur.

TEOREM 3.13.8 Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=6 \qquad (3.13.10)$$

dır.

İSPAT: (1.5.3)'den $\mu'_4=E[(x-\alpha)^4]$ dir.

$$E(x^4)=\mu'_4+4\alpha E(x^3)-6\alpha^2E(x^2)+4\alpha^3E(x)+\alpha^4 \qquad (3.13.10.a)$$

dır. (3.13.5)'de r=4 için,

$$\mu'_4=0 \qquad (3.13.10.b)$$

elde edilir.

(3.13.9.a)'da, (3.13.9.b), (3.13.7.c) ve (3.13.6) yerine koyulduğunda,

$$E(x^4)=6\alpha\beta^2+\alpha^3 \qquad (3.13.10.c)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.13.10.c), (3.13.9.c) , (3.13.7.c) ve (3.13.6) yerine koyulduğunda,

$\mu_4=24\beta^4$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=6$

bulunur.

TEOREM 3.13.9 Laplace dağılımının modu,

$$x=\alpha \qquad (3.13.11)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.13.1)'deki o.y.f'nun,

1- $x < \alpha$ olduğunda x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha$ elde edilir.

2- $x \geq \alpha$ olduğunda x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\alpha$ elde edilir.

$x=\alpha$ değeri için (3.13.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Laplace dağılımının modu,

$x=\alpha$

bulunur.

TEOREM 3.13.10 Laplace dağılımın medyanı,

$$\alpha \qquad (3.13.12)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|u-\alpha|}{\beta}\right)du=\frac{1}{2}$$

dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral, $x < \alpha$ ve $x \geq \alpha$ olduğu durumlarda ayrı ayrı hesaplandığında, her iki durum içinde, (1.3.3)'deki eşitliği sağlayan değer olarak,

$x=\alpha$

bulunur.

TEOREM 3.13.11 Laplace dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t;\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\frac{1}{1+\beta^2t^2} \qquad |t| < 1/\beta \qquad (3.13.13)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.13.4)'de t yerine it alınırsa,

$$\xi(t;\alpha,\beta)=\exp(i\alpha t)\,\frac{1}{1+\beta^2 t^2} \qquad |t| < 1/\beta$$

bulunur.

TEOREM 3.13.12 Laplace dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t;\alpha,\beta)=i\alpha t-\log(1+\beta^2 t^2) \qquad (3.13.14)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.13.13)'ün logaritması alındığında,

$$K(t;\alpha,\beta)=i\alpha t-\log(1+\beta^2 t^2)$$

bulunur.

Şimdi (3.13.2)'deki Standart Laplace dağılımı ele alalım.

Standart Laplace dağılımını SL ile göstereceğiz.

Standart Laplace dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Laplace dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.13.13 Standart Laplace dağılımının d.f,

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\exp(-x) & x < 0 \\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}\exp(-x) & x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.13.15)$$

dir.

TEOREM 3.13.14 Standart Laplace dağılımının m.ç.f,

$$M(t)=\frac{1}{1-t^2} \qquad |t| < 1 \qquad (3.13.16)$$

dir.

TEOREM 3.13.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Laplace dağılımına sahip ise, α etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\begin{cases} r \text{ çift ise}, & r! \\ r \text{ tek ise}, & 0 \end{cases} \qquad (3.13.17)$$

dır.

TEOREM 3.13.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Laplace dağılımına sahip ise,

$$E(x)=0 \qquad (3.13.18)$$

dir.

TEOREM 3.13.17 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Laplace dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=2 \qquad (3.13.19)$$

dir.

TEOREM 3.13.18 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Laplace dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{2} \qquad (3.13.20)$$

dir.

TEOREM 3.13.19 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Laplace dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \qquad (3.13.21)$$

dır.

TEOREM 3.13.20 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Laplace dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=6 \qquad (3.13.22)$$

dır.

TEOREM 3.13.21 Standart Laplace dağılımının modu,

$$x=0 \qquad (3.13.23)$$

noktasındadır.

TEOREM 3.13.22 Standart Laplace dağılımın medyanı,

$$0 \qquad (3.13.24)$$

dir.

TEOREM 3.13.23 Standart Laplace dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad |t| < 1 \qquad (3.13.25)$$

dir.

TEOREM 3.13.24 Standart Laplace dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t) = -\log(1+t^2) \qquad (3.13.26)$$

dir.

3.13.1 Laplace Dağılımının Uygulama Alanları

Laplace dağılımı, 1774 yılında Laplace tarafından bulundu. Laplace, birbirinden bağımsız dağılmış rastgele değişkenlerin, tek sayıdaki gözlenen değerlerinin medyanına konum parametresini eşitleyerek dağılımın şekli için likelihood fonksiyonunu maksimize etti. Ayrıca Laplace, medyanı aritmetik ortalama ile değiştirerek likelihood fonksiyonunu maksimize eden değer olarak aldı ve buna karşılık gelen dağılımın Normal dağılım olduğunu buldu.

Normal dağılımla, Laplace dağılımı arasındaki farklardan bir tanesi, Laplace dağılımının keskin bir tepeye sahip olmasıdır.

3.13.2 Laplace Dağılımının Parametre Tahminleri

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri α ve β parametreli Laplace dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$'lerin o.o.y.f,

$$L(\alpha,\beta) = -n\ln(2\beta) - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \alpha| \qquad (3.13.2.1)$$

dir.

(3.13.2.1)'deki fonksiyona aynı zamanda likelihood fonksiyonu da denir.

Eğer n tek ise, $\hat{\alpha}$, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$'lerin tek olarak tanımlanan medyanına eşittir. Bu sonuç (Keynes, 1911)'de elde edilmiştir.

Eğer n çift ise, $\hat{\alpha}$, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ arasındaki değerlerden (1/2)n-inci ve (1/2)n+1-inci değerler arasındaki en büyük değerdir. Bu iki değerin aritmetik ortalaması, α'nın yansız bir tahmin edicisidir.

β'nın maksimum likelihood tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\hat{\alpha}|$$

dır. (Johnson ve Kotz, 1970 s:26)

3.13.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:80-81)'de verilen bağıntılar.

1) Standart Laplace dağılımı, α ve β parametreli Laplace dağılımının, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Laplace dağılımına sahip ise, $Y=|X-\alpha|$, β parametreli üstel dağılıma sahiptir.

3) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri β parametreli üstel dağılımına sahip ise, $Y=X_1-X_2$, $\alpha=0$ ve β parametreli Laplace dağılıma sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve β parametreli Laplace dağılımına sahip ise, $Y=|(X-\alpha)/\beta|$, Standart üstel dağılıma sahiptir.

5) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri $\alpha=0$ ve β parametreli Laplace dağılımına sahip ise, $Y=|X_1/X_2|$, $v_1=2$ ve $v_2=2$ parametreli F-dağılıma sahiptir.

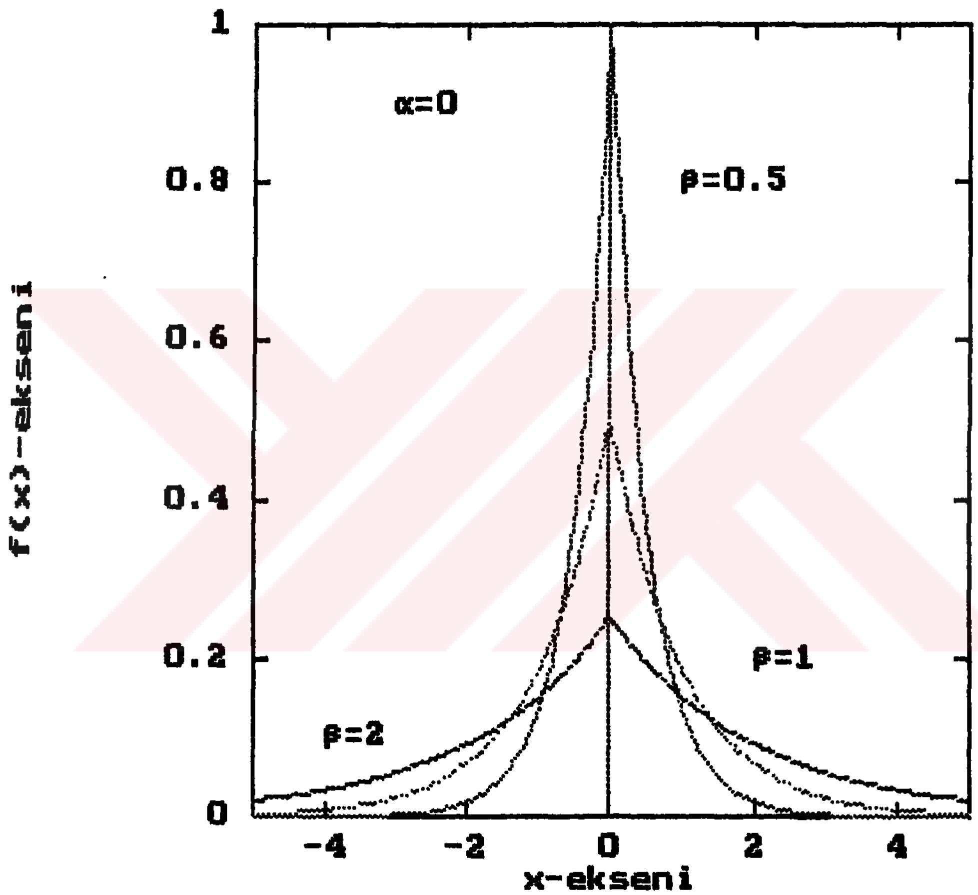
6) X_1,X_2,X_3 ve X_4 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri $\alpha=0$ Standart Normal dağılıma sahip ise, $Y=X_1X_4-X_2X_3$, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ parametreli Laplace dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Laplace dağılıma sahip ise, $Y=|X|$, Standart üstel dağılıma sahiptir.

8) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=X_1-X_2$, Standart Laplace dağılıma sahiptir.

9) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\log(X_1/X_2)$, Standart Laplace dağılıma sahiptir.

10) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=p\log(X_1/X_2)$, Standart Laplace dağılıma sahiptir.



Şekil 42. Laplace Dağılımının α=0 ve β=0.5 β=1 β=2 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

3.14 Beta Dağılımı

Beta dağılımını, Birinci Tip yada Dört parametreli Beta dağılımı, Standart Beta dağılımı olarak ele alacağız.

TANIM 3.14.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;a,b,p,q)=\frac{1}{B(p,q)}\,\frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} \qquad (3.14.1)$$

$a < x < b \quad p > 0 \quad q > 0$

ise x r.d'ne Birinci Tip Beta dağılıma sahiptir denir.

Dört parametreli Beta dağılımını, $B(x;a,b,p,q)$ veya $B_x(a,b,p,q)$ ve ilgili değişkeni, $B;a,b,p,q$ ile göstereceğiz. Burada a, b parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım, p ve q parametreleri dağılımın şekil parametreleridir.

(3.14.1)'de a=0 ve b=1 alınırsa, Standart Beta dağılımı elde edilir.

Biz Standart Beta dağılımının özelliklerini inceleyeceğiz.

(3.14.1)'deki o.y.f'na $y=(x-a)/(b-a)$ dönüşümü uygulandığında da Standart Beta dağılımı elde edilir.

TANIM 3.14.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;p,q)=\frac{1}{B(p,q)}\,x^{p-1}(1-x)^{q-1} \qquad (3.14.2)$$

$0 < x < 1 \quad p > 0 \quad q > 0$

ise x r.d'ne Standart Beta dağılıma sahiptir denir.

Standart Beta dağılımını, $SB(x;p,q)$ veya $SB_x(p,q)$ ve ilgili değişkeni, $SB;p,q$ ile gösterecegiz. Standart Beta dağılımının p ve q parametreleri dağılımın şekil parametreleridir.

TEOREM 3.14.1 Standart Beta dağılımının d.f,

$$F(x;p,q)=\int_0^x \frac{1}{B(p,q)}u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \qquad (3.14.3)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:p,q)=\int_0^x \frac{1}{B(p,q)} u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \qquad (3.14.3.a)$$

dur.

(3.14.3.a)'da,

$$I_x(p,q)=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \qquad (3.14.3.b)$$

veya

$$B_x(p,q)=\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \qquad (3.14.3.c)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona, tamamlanmamış (incomplete) Beta fonksiyonu denir.

Tamamlanmamış Beta fonksiyonu için tablolar oluşturulmuştur.

<u>TEOREM 3.14.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+r)\Gamma(p)} \qquad (3.14.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

dir.

$$\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{B(p+r,q)}{B(p,q)}=\frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+r)\Gamma(p)}$$ dir. O halde,

$$\mu'_r = \frac{\Gamma(p+r)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+r)\Gamma(p)}$$

bulunur.

TEOREM 3.14.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{p}{p+q} \tag{3.14.5}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.14.4)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\frac{p}{p+q}$$

dir. O halde,

$$E(x)=\frac{p}{p+q}$$

bulunur.

TEOREM 3.14.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \tag{3.14.6}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.14.4)'de r=2 için,

$$\mu'_2=\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q+1)} \tag{3.14.6.a}$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.14.6.a) ve (3.14.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

bulunur.

TEOREM 3.14.5 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(pq)}}{(p+q)\sqrt{(p+q+1)}} \qquad (3.14.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.14.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(pq)}}{(p+q)\sqrt{(p+q+1)}}$$

bulunur.

TEOREM 3.14.6 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{2(q-p)}{p+q+2}\sqrt{\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{pq}\right)} \qquad (3.14.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.14.4)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{p(p+1)(p+2)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)}$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\frac{p(p+1)(p+2)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)} \qquad (3.14.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.14.8.a), (3.14.6.a) ve (3.14.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3 = \frac{2pq(q-p)}{(p+q)^3(p+q+1)(p+q+2)}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3 = \frac{2(q-p)}{p+q+2} \sqrt{\left\{\frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{pq}\right\}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.14.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Beta dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = \frac{3(2p^2+p^2q-2pq+pq^2+2q^2)(p+q+1)}{(p+q+2)(p+q+3)pq} \quad (3.14.9)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.14.4)'de r=4 için,

$$\mu'_4 = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \frac{p(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+q)(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)} \quad (3.14.9.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.14.9.a), (3.14.8.a), (2.14.6.a) ve (3.14.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{3p(2p^2q+p^2q^2-2pq^2+pq^3+2q^3)}{(p+q)^4(p+q+1)(p+q+2)(p+q+3)}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4 = \frac{3(2p^2+p^2q-2pq+pq^2+2q^2)(p+q+1)}{(p+q+2)(p+q+3)pq}$$

bulunur.

TEOREM 3.14.8 Standart Beta dağılımının modu ,

$$x=\frac{p-1}{p+q-2} \tag{3.14.10}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.14.2)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\frac{p-1}{p+q-2}$ bulunur. $x=\frac{p-1}{p+q-2}$ değeri için (3.14.2)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Standart Beta dağılımının modu,

$$x=\frac{p-1}{p+q-2}$$

bulunur.

3.14.1 Beta Dağılımının Uygulama Alanları

(3.14.2)'deki Standart Beta dağılımının o.y.f ele alalım. p ve q parametreleri dağılımın şekil parametreleridir.

1) $p > 1$ ve $q > 1$ olduğunda, dağılımın $x=\frac{p-1}{p+q-2}$ noktasında tek bir tepesi vardır.

2) $p < 1$ ve $q < 1$ olduğunda, dağılım U şekillidir.

3) $p < 1$ ve $q \geq 1$ olduğunda, dağılım ters J şekillidir.

4) $p \geq 1$ ve $q < 1$ olduğunda, dağılım J şekillidir.

5) $p=q$ olduğunda, dağılım simetriktir.

Beta dağılımı çok şekilli olmasından dolayı, değerleri belirli bir aralıkta bulunan fiziksel değişkenlerin gösteriminde kullanılır. örneğin, bir üretim anındaki kusurlu birimlerin günlük oranı gibi. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:94)

Beta dağılımı sık sık tanımlanmış bir işi yapacak bir uzay aracının başarısının olasılığını tanımlamak için Bayes analizinde kullanılır.

(3.14.2)'deki Standart Beta dağılımının d.f'nu, τ ve $\emptyset$ parametreleri cinsinden ifade edelim.

$$F(x:\tau,\emptyset)=\begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{\Gamma(\tau,\emptyset)}{\Gamma(\tau)\Gamma(\emptyset)}\displaystyle\int_0^x u^{p-1}(1-u)^{q-1}du & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.14.1.1)$$

dir.

τ ve $\emptyset$ parametreli, (3.14.3.c)'deki tamamlanmamış Beta fonksiyonunun değerleri (Pearson, 1948)'de tablolaştırılmıştır. Bu tabloları kullanmak için:

1) $\tau \geq \emptyset$ olduğunda, $p=\tau$ ve $q=\emptyset$ alınır ve tablodan $B_x(p,q)=F(x:\tau,\emptyset)$ değerine bakılır.

2) $\tau < \emptyset$ olduğunda, $p=\emptyset$, $q=\tau$ ve $x'=1-x$ alınır. Sonra tablodan $B^{x'}(p,q)$ değeri bulunur. İstenen birikimli olasılık $F(x:\tau,\emptyset)=1-B^{x'}(p,q)$ dur.

Beta dağılımının bir uygulamasını ele alalım.

ÖRNEK 3.14.1.1 n bağımsız rastgele gözlemin, herhangi bir o.y.f'na sahip y olayından alındığını varsayalım. Sonuç değerleri büyüklüklerine göre sırayalım. y_r ve y_{n-s+1} sırasıyla r-inci en küçük ve s-inci en büyük gözlem olsun. y_r ve y_{n-s+1} arasındaki orjinal kitlenin x oranı, $\tau=n-r-s+1$ ve $\emptyset=r+s$ parametreli Beta dağılımına sahiptir. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:94)

o.y.f ise,

$$f(x:n-r-s+1,r+s)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r-s+1)\Gamma(r+s)}x^{n-r-s}(1-x)^{r+s+1} \quad (3.14.2.2)$$

$0 \leq x \leq 1$

dir.

Bir radyo alıcısı, değişik voltajdaki sinyalleri alması için düzenlenmiştir. 50 bağımsız sinyal, herbiri yeni bir kaynaktan olmak üzere rastgele alınmıştır, örnekleme yapılmıştır. Daha sonra alıcı, bu örneklemdeki en düşük ve en yüsek örneklem değerleri arasındaki sinyalleri alması için yeniden düzenlenmiştir, ayarlanmıştır. Buna göre, düzenlemeden sonra verilen bir kaynaktan sinyallerin büyük bir sayısının en az yüzde doksanbeşini alma olasılığını hesaplayalım.

Yukarıdaki açıklamaya göre, $\tau=50-1-1+1=49$ ve $\emptyset=1+1=2$ dir O halde, $Prob[X>0.95]=1-F(0.95{:}49,2)$ dir. $\tau=49>\emptyset=2$ olduğundan $B_{0.95}(49,2)=F(0.95{:}49,2)=0.279$ dur. Sonuç olarak, $Prob[X>0.95]=1-0.279=0.721$ bulunur.

3.14.2 Beta Dağılımının Parametre Tahminleri

(3.14.2)'deki Standart Beta dağılımının p ve q parametrelerinin tahmin edicilerini, momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ herbiri p ve q parametreli Standart Beta dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

Standart Beta dağılımın ortalaması ve varyansı sırasıyla (3.14.5), ve (3.14.6) gibidir. Bunları sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.3)'deki örneklem ortalaması ve varyansı olan, $m_1=\bar{x}$ ve $m_2=S^2$'ye eşitlediğimizde,

$$p=\frac{qm_1}{1-m_1}$$

$$q=\frac{(1-m_1)}{m_2}[m_1(1-m_1)-m_2]$$

dir. Buradan,

$$\hat{p}=\frac{q\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

$$\hat{q}=\frac{(1-\bar{x})}{S^2}[\bar{x}(1-\bar{x})-S^2]$$

bulunur.

3.14.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:12-15)'de verilen bağıntılar.

1) p ve q parametreli Standart Beta dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının a=0 ve b=1 özel halidir.

2) β ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının, a=0, b=β ve q=1 özel halidir.

3) p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının, a=0, b=1 ve q=1 özel halidir.

4) Arc-Sine dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının, a=0, b=1 ve p=q=1/2 özel halidir.

5) α ve β parametreli Dörtgensel dağılım, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının, a=α, b=β ve p=q=1 özel halidir.

6) Standart Dörtgensel dağılım, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının a=0, b=1 ve p=q=1 özel halidir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, a,b,p ve q parametreli Beta dağılıma sahip ise, Y=(X-a)/(b-a), p ve q parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.

8) p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımı, p ve q parametreli Standart Beta dağılımının q=1 özel halidir.

9) Standart Dörtgensel dağılım, p ve q parametreli Standart Beta dağılımının p=q=1 özel halidir.

10) Arc-Sine dağılımı, p ve q parametreli Standart Beta dağılımının, p=q=1/2 özel halidir.

11) $p \to \infty$, $q \to \infty$ ve p/q=sabit olduğunda, Standartlaştırılmış Beta dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar.

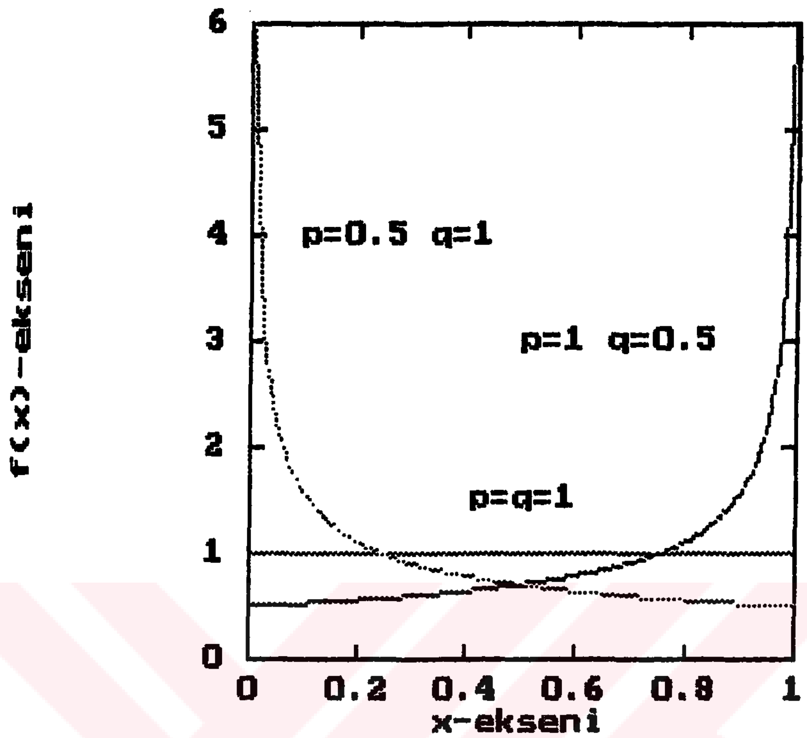
12) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri sırasıyla, k_1 ve k_2 parametreli Standart Gamma dağılımına sahip iseler, $Y=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$, k_1 ve k_2 parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F-dağılımına sahip ise,

$$Y=\frac{v_1X}{v_2+v_1X}, \quad p=v_1/2 \text{ ve } q=v_2/2$$

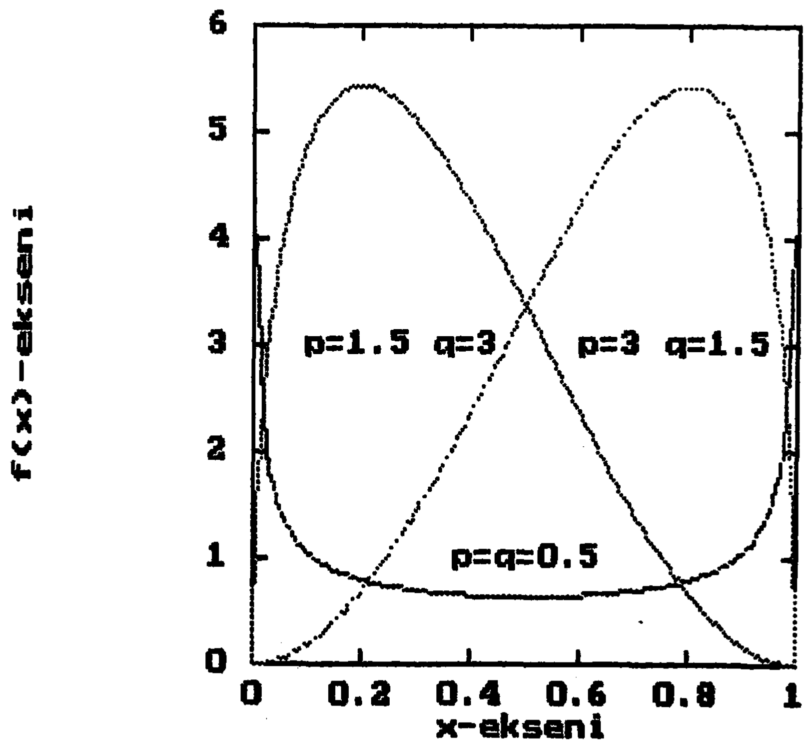
parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.

14) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri sırasıyla ayrı ayrı, p,q_1 ve $p+q_1,q_2$ parametreli Standart Beta dağılımına sahip iseler, $Y=X_1X_2$, p ve q_1+q_2 parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.



Şekil 43. Beta Dağılımının p=0.5 q=1, p=1 q=0.5, p=q=1 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 44. Beta Dağılımının p=1.5 q=3, p=3 q=1.5 ve p=q=0.5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.15 Kuvvet Fonksiyon Dağılımı

Kuvvet Fonksiyon dağılımını, Kuvvet fonksiyon dağılımı ve Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımı olarak ele alacağız.

TANIM 3.15.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\beta,p)= \frac{p}{\beta^{p}} x^{p-1} \tag{3.15.1}$$

$0 < x < \beta \quad \beta > 0 \quad p > 0$

ise x r.d'ne Kuvvet Fonksiyon dağılıma sahiptir denir.

Kuvvet Fonksiyon dağılımını, POF(x:ß,p) veya $POF_x(\beta,p)$ ve ilgili değişkeni, POF:ß,p ile göstereceğiz. Kuvvet Fonksiyon dağılımının ß ve p parametreleri, sırasıyla dağılımın yayılım ve şekil parametreleridir.

TEOREM 3.15.1 Kuvvet Fonksiyon dağılımının d.f,

$$F(x:\beta,p)= \left(\frac{x}{\beta}\right)^{p} \tag{3.15.2}$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:\beta,p)= \int_{0}^{x} \frac{p}{\beta^{p}} u^{p-1}du$$

$$F(x:\beta,p)= \left(\frac{x}{\beta}\right)^{p}$$

bulunur.

TEOREM 3.15.2 Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r= \frac{\beta^{r}p}{p+r} \tag{3.15.3}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r = \int_0^{\beta} x^r \frac{p}{\beta^p} x^{p-1}\, dx = \frac{p}{\beta^p} \int_0^{\beta} x^{p+r-1} dx$$

yukarıdaki integral hesaplandığında,

$$\mu'_r = \frac{\beta^r p}{p+r}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$E(x) = \frac{p\beta}{p+1} \tag{3.15.4}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.15.3)'de r=1 için,

$$\mu'_1 = \frac{p\beta}{p+1}$$

dir. O halde,

$$E(x) = \frac{p\beta}{p+1}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$Var(x) = \frac{p\beta^2}{(p+1)^2(p+2)} \tag{3.15.5}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.15.3)'de r=2 için,

$$\mu'_2 = \frac{p\beta^2}{p+2}$$

dir. O halde,

$$E(x^2) = \frac{p\beta^2}{p+2} \qquad (3.15.5.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.15.5.a) ve (3.15.4) yerine koyulduğunda,

$$Var(x) = \frac{p\beta^2}{(p+1)^2(p+2)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$SS(x) = \frac{\beta}{p+1}\sqrt{\left(\frac{p}{p+2}\right)} \qquad (3.15.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.15.5) yerine koyulduğunda,

$$SS(x) = \frac{\beta}{p+1}\sqrt{\left(\frac{p}{p+2}\right)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = \frac{2(1-p)}{p+3}\sqrt{\left(\frac{p+2}{p}\right)} \qquad (3.15.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.15.3)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{p\beta^3}{p+3}$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\frac{p\beta^3}{p+3} \qquad (3.15.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.15.7.a), (3.15.5.a) ve (3.15.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3=\frac{2(1-p)p\beta^3}{(p+1)^3(p+2)(p+3)}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3=\frac{2(1-p)}{p+3}\sqrt{\left(\frac{p+2}{p}\right)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4=\frac{3(p+2)(3p^2-p+2)}{p(p+3)(p+4)} \qquad (3.15.8)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.15.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4=\frac{p\beta^4}{p+4}$$ dir. O halde,

dir. O halde,

$$E(x^4)=\frac{p\beta^4}{p+4} \qquad (3.15.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.15.8.a), (3.15.7.a), (2.15.5.a) ve (3.15.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{3\beta^4 p(3p+p+2)}{(p+1)^4(p+2)(p+3)(p+4)}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4 = \frac{3(p+2)(3p^2-p+2)}{p(p+3)(p+4)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.8</u> Kuvvet Fonksiyon dağılımının modu ,

$$x=\begin{cases} \beta & p > 1 \\ 0 & p < 1 \end{cases} \qquad (3.15.9)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.15.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, kritik nokta yoktur. O halde uç değerlere bakalım.

eğer $p > 1$ ise, $x=\beta$

eğer $p < 1$ ise, $x=0$

için (3.15.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Kuvvet Fonksiyon dağılımının modu,

$$x=\begin{cases} \beta & p > 1 \\ 0 & p < 1 \end{cases}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.15.9</u> Kuvvet Fonksiyon dağılımının medyanı,

$$\beta/(2^{1/p}) \qquad (3.15.10)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$\int_0^x \frac{p}{\beta^p} u^{p-1}du = \frac{1}{2}$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral hesaplandığında,

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^p = \frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$x=\beta/(2^{1/p})$

bulunur.

Şimdi Kuvvet Fonksiyon dağılımının $\beta=1$ özel hali olan Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımını inceleyeceğiz.

TANIM 3.15.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f

$$f(x:p)=px^{p-1} \qquad 0 < x < 1 \qquad p > 0 \qquad (3.15.11)$$

ise x r.d'ne Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir denir.

Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımını, SPOF(x:p) veya $SPOF_x(p)$ ve ilgili değişkeni SPOF:p ile göstereceğiz. Standart Kuvvet Fonksiyonu dağılımının p parametresi, dağılımın şekil parametresidir.

Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımı için hesaplamalar ve ispatlar, Kuvvet Fonksiyon dağılımında olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.15.10 Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımının d.f,

$$F(x:p)= x^p \qquad (3.15.12)$$

dir.

TEOREM 3.15.11 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r = \frac{p}{p+r} \qquad (3.15.13)$$

dir.

TEOREM 3.15.12 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{p}{p+1} \qquad (3.15.14)$$

dir.

TEOREM 3.15.13 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= \frac{p}{(p+1)^2(p+2)} \tag{3.15.15}$$

dır.

TEOREM 3.15.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise,

$$SS(x)= \frac{1}{p+1} \sqrt{\left(\frac{p}{p+2}\right)} \tag{3.15.16}$$

dir.

TEOREM 3.15.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= \frac{2(1-p)}{p+3} \sqrt{\left(\frac{p+2}{p}\right)} \tag{3.15.17}$$

dir.

TEOREM 3.15.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= \frac{3(p+2)(3p^2-p+2)}{p(p+3)(p+4)} \tag{3.15.18}$$

dır.

TEOREM 3.15.17 Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımının modu ,

$$x=\begin{cases} 1 & p > 1 \\ 0 & p < 1 \end{cases} \tag{3.15.19}$$

noktasındadır.

TEOREM 3.15.18 Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımının medyanı,

$$2^{-1/p} \tag{3.15.20}$$

dir.

3.15.1 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:16-19)'da verilen bağıntılar.

1) p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımı, β ve p parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımının $\beta=1$ özel halidir.

2) Standart Dörtgensel dağılım, β ve k parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımının $\beta=k=1$ özel halidir.

3) β ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımı, a,b,p ve q parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımının, $a=0$, $b=\beta$ ve $q=1$ özel halidir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=(X/\beta)^p$, Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

5) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\beta X^{1/p}$, β ve p parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-(X/\beta)^p]^{-1/p}$, β ve k=p parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

7) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=\beta[1-(\beta/X)^k]^{1/k}$, β ve p=k parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, τ ve p parametreli Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, $\beta=1/\tau$ ve k=p parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, τ ve k parametreli parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, $\beta=1/\tau$ ve p=k parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

10) p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının a=0, b=1 ve q=1 özel halidir.

11) p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımı, p ve q parametreli Standart Beta dağılımının q=1 özel halidir.

12) Standart Dörtgensel dağılım, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımının p=1 özel halidir.

13) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, Y=1/X, k=p parametreli Standart Pareto dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, k parametreli Standart Pareto dağılımına sahip ise, Y=1/X, p=k parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=X^p$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, $Y=X^{1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=[-\log(X^p)]^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahiptir.

18) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Weibull dağılımına sahip ise, $Y=\exp\{-X^{\tau/p}\}$, p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=-\log(-p\log X)$, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç değer dağılımına sahip ise, $Y=[\exp\{-\exp(-X)\}]^{1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=-\log(X^{-p}-1)$, Standart Lojistik dağılımına sahiptir.

22) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[1+\exp(-X)]^{-1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

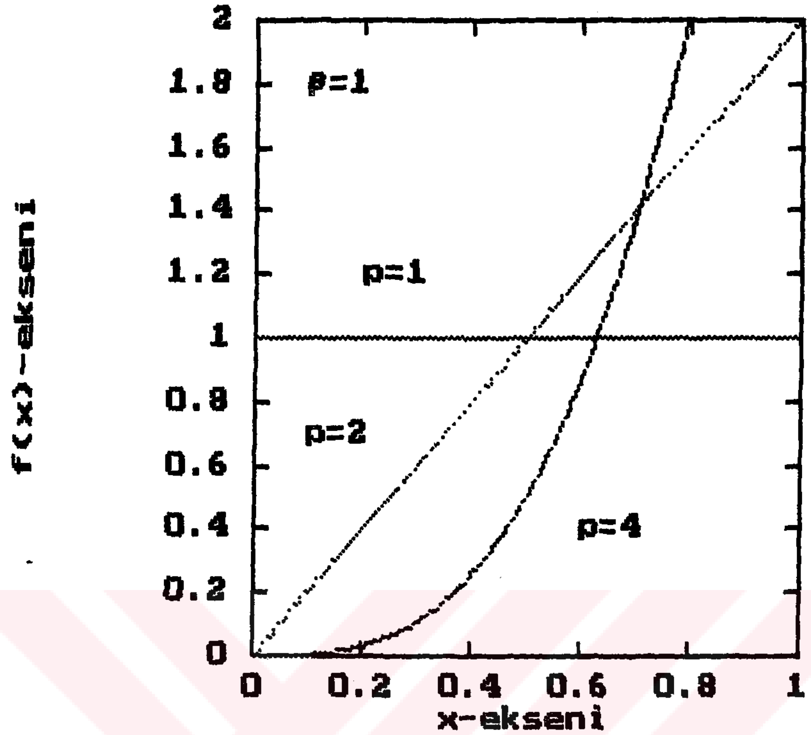
23) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=-\log X$, $\beta=1/p$ parametreli Üstel dağılıma sahiptir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli Üstel dağılımına sahip ise, $Y=-\exp(-X)$, Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahiptir.

25) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y= -p\log(X_1/X_2)$ Standart Laplace dağılımına sahiptir.

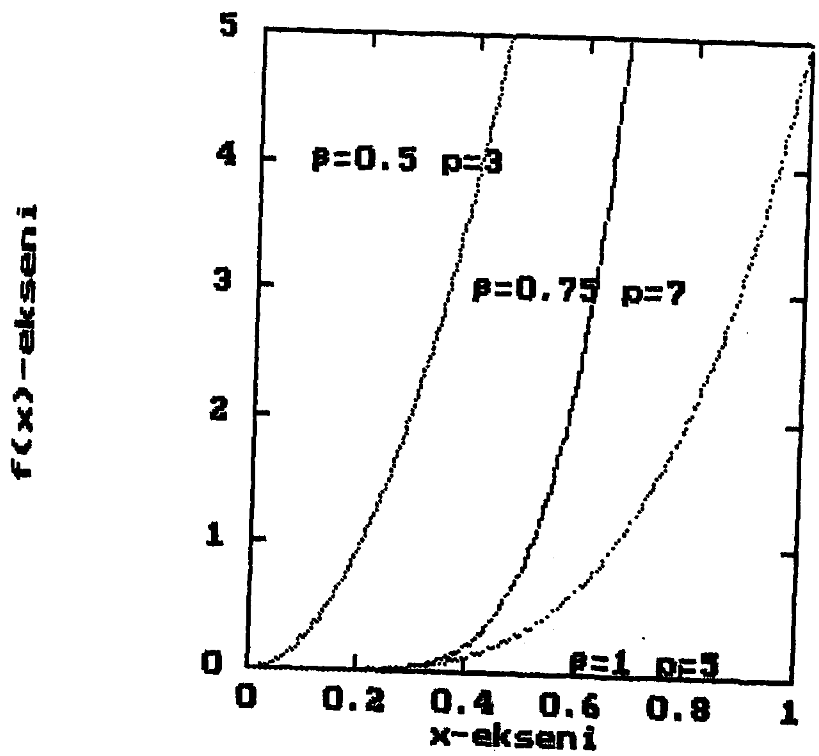
26) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[X^{-p}-1]^{1/k}$, α ve k parametreli log-Lojistik dağılıma sahiptir.

27) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve k parametreli Log-Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=[\exp(\alpha k)X^{k}+1]^{-1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.



Şekil 45. Kuvvet Fonksiyon Dağılımının ß=1 ve p=1 p=2 p=3 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 46. Kuvvet Fonksiyon Dağılımının ß=0.5 p=3, ß=0.75 p=7, ß=1 p=5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.16 Düzgün ya da Dörtgensel Dağılım

TANIM 3.16.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta-\alpha} \qquad (3.16.1)$$

$$\alpha < x < \beta \qquad -\infty < \alpha < \beta < +\infty$$

ise x r.d'ne Dörtgensel dağılıma sahiptir denir.

Dörtgensel dağılım, α, β, p ve q parametreli Beta dağılımının p=q=1 özel halidir.

Dörtgensel dağılımı, $U(x:\alpha,\beta)$ veya $U_x(\alpha,\beta)$ ve ilgili değişkeni, $U:\alpha,\beta$ ile göstereceğiz. Dörtgensel dağılımın, α ve β parametreleri, sırasıyla dağılımın konum ve yayılım parametreleridir.

TEOREM 3.16.1 Dörtgensel dağılımının d.f,

$$F(x:\alpha,\beta)=\frac{(x-\alpha)}{\beta-\alpha} \qquad (3.16.2)$$

$$\alpha < x < \beta \qquad -\infty < \alpha < \beta < +\infty$$

dir.

ISPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:p,q)=\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{\beta-\alpha}\,du$$

yukarıdaki integral hesaplandığında,

$$F(x:\alpha,\beta)=\frac{(x-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

bulunur.

TEOREM 3.16.2 Dörtgensel dağılımın m.ç.f,

$$M(t:\alpha,\beta)=\frac{\exp(\beta t)-\exp(\alpha t)}{(\beta-\alpha)t} \qquad (3.16.3)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\exp(tx)dx$$

yukarıdaki integral hesaplandığıda,

$$M(t:\alpha,\beta)=\frac{\exp(\beta t)-\exp(\alpha t)}{(\beta-\alpha)t}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.16.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\frac{\beta^{r+1}-\alpha^{r+1}}{(\beta-\alpha)(r+1)} \qquad (3.16.4)$$

dir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:120)

<u>TEOREM 3.16.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$E(x)=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (3.16.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.16.4)'de r=1 için,

$$\mu'_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

dir. O halde,

$$E(x)=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.16.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12} \qquad (3.16.6)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.16.4)'de r=2 için,

$$\mu'_2=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} \qquad (3.16.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.16.6.a) ve (3.16.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.16.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{(\beta-\alpha)}{2\sqrt{3}} \qquad (3.16.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.16.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{(\beta-\alpha)}{2\sqrt{3}}$$

bulunur.

TEOREM 3.16.7 Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 0 \tag{3.16.8}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.16.3)'de r=3 için,

$$\mu'_3 = \frac{\beta^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^3}{4}$$

dir. O halde,

$$E(x^3) = \frac{\beta^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^3}{4} \tag{3.16.8.a}$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.16.8.a), (3.16.6.a) ve (3.16.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3 = 0$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3 = 0$

bulunur.

TEOREM 3.16.8 Sürekli tipteki bir x r.d, Dörtgensel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 9/5 \tag{3.16.9}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.16.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4 = \frac{\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4}{5}$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \frac{\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4}{5} \tag{3.16.9.a}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.16.9.a), (3.16.8.a), (2.16.6.a) ve (3.16.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4=\frac{(\alpha-\beta)^4}{80}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4= 9/5$

bulunur.

TEOREM 3.16.9 Dörtgensel dağılımın medyanı,

$$(\alpha+\beta)/2 \qquad (3.16.10)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta-\alpha} du=\frac{1}{2}$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral hesaplandığında,

$\frac{(x-\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}$ dir. Buradan,

$x=(\alpha+\beta)/2$

bulunur.

TEOREM 3.16.10 Dörtgensel dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t:\alpha,\beta)= \frac{1}{(\alpha-\beta)t}[(\sin\alpha t-\sin\beta t)-i(\cos\alpha t-\cos\beta t)] \qquad (3.16.11)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.16.3)'de t yerine it alındığında,

$$\Phi(t:\alpha,\beta)= \frac{1}{(\alpha-\beta)t}[(\sin\alpha t-\sin\beta t)-i(\cos\alpha t-\cos\beta t)]$$

bulunur.

TEOREM 3.16.11 Dörtgensel dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\alpha,\beta)=-\log\{(\beta-\alpha)it\}+\log\{\exp(i\beta t)-\exp(i\alpha t)\} \qquad (3.16.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.16.11)'in logaritması alındığında,

$K(t:\alpha,\beta)=-\log\{(\beta-\alpha)it\}+\log\{\exp(i\beta t)-\exp(i\alpha t)\}$

bulunur.

TANIM 3.16.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f

$$f(x)=1 \qquad 0 < x < 1 \qquad (3.16.13)$$

ise x r.d'ne Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir denir.

Standart Dörtgensel dağılım, Dörtgensel dağılımın $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

Standart Dörgensel dağılımı, SU ile göstereceğiz.

Standart Dörgensel dağılım için hesaplamalar ve ispatlar, Dörtgensel dağılımda olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.16.12 Standart Dörtgensel dağılımının d.f,

$$F(x)= x \qquad 0 < x < 1 \qquad (3.16.14)$$

dir.

TEOREM 3.16.13 Standart Dörtgensel dağılımın m.ç.f,

$$M(t)= \frac{\exp(t)-1}{t} \qquad (3.16.15)$$

dir.

TEOREM 3.16.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r= \frac{1}{r+1} \qquad (3.16.16)$$

dir. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:121)

TEOREM 3.16.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$E(x)= 1/2 \qquad (3.16.17)$$

dir.

TEOREM 3.16.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= 1/12 \qquad (3.16.18)$$

dır.

TEOREM 3.16.17 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (3.16.19)$$

dir.

TEOREM 3.16.18 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 0 \quad (3.16.20)$$

dir.

TEOREM 3.16.19 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Dörtgensel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 9/5 \quad (3.16.21)$$

dır.

TEOREM 3.16.20 Standart Dörtgensel dağılımın medyanı,

$$1/2 \quad (3.16.22)$$

dir.

TEOREM 3.16.21 Standart Dörtgensel dağılımının karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t)=\frac{1}{t}[-\sin t+i\cos t] \quad (3.16.23)$$

dir.

TEOREM 3.16.22 Standart Dörtgensel dağılımının kümülant fonksiyonu,

$$K(t)=-\log(it)+\log\{\exp(it)-1\} \quad (3.16.24)$$

dir.

3.16.1 Dörtgensel Dağılımın Uygulama Alanları

Tekrar Dörtgensel dağılımın o.y.f'nu ele alalım.

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta-\alpha} \qquad \alpha < x < \beta \qquad -\infty < \alpha < \beta < +\infty$$

h>0 olmak üzere,

$$f(x:h)=1/2h \qquad \alpha-h \leq x \leq \alpha+h \quad (3.16.1.1)$$

dir.

(3.16.2.1)'de $\alpha=0$ ve $h=(1/2)10^{-k}$, $k\in Z^{+}$ alındığında, Dörtgensel dağılım k ondalık noktaya en yakın değerlerin tablolandırılmasındaki "yuvarlama", (round-off) hatalarının dağılımını göstermek için kullanılır.

Aynı teknik ikilik (Binary) düzende uygulanırsa, $\alpha=0$ ve $h=2^{-(k+1)}$ alınır. (Johnson ve Kotz, 1970 s:58)

Dörtgensel dağılım, herhangi bir zaman aralığı esnasında benzer şekilde oluşan olayların oluşumunun zamanı için uygun bir modeldir. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:98)

Dörtgensel dağılım, yaşam testi (Gupta ve Sobel, 1958) ve trafik akışı uygulamaları (Allan, 1966) için kullanılan bir dağılımdır.

3.16.2 Dörtgensel Dağılımın Parametre Tahminleri

(3.16.1)' deki Dörtgensel dağılımın α ve β parametrelerinin tahmin edicilerini, momentleri karşılaştırma metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1,x_2,x_3,...,x_n$ herbiri α ve β parametreli Dörtgensel dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

Dörtgensel dağılımın ortalaması ve varyansı sırasıyla (3.16.4) ve (3.16.5) gibidir. Bunları sırasıyla, (1.6.2) ve (1.6.3)'deki örneklem ortalaması ve varyansı olan $m_1=x$ ve $m_2=S^2$'ye eşitlediğimizde,

$\alpha= m_1-\sqrt{3m_2}$

$\beta= m_1+\sqrt{3m_2}$

dir. O halde,

$\hat{\alpha}= \bar{x}-\sqrt{3}S$

$\hat{\beta}= \bar{x}+\sqrt{3}S$

bulunur.

3.16.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:119-123)'de verilen bağıntılar.

1) Standart Dörtgensel dağılım, α ve β parametreli Dörgensel dağılımın, $\alpha=0$ ve $\beta=1$ özel halidir.

2) α ve β parametreli Dörtgensel dağılımı, a,b,p ve q parametreli Beta dağılımının $a=\alpha$, $b=\beta$ ve $p=q=1$ özel halidir.

3) Sürekli tipteki bir X r.d, $\alpha=-\pi/2$ ve $\beta=\pi/2$ parametreli Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\tan X$ Standart Cauchy dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=\tan^{-1}X$, $\alpha=-\pi/2$ ve $\beta=\pi/2$ parametreli Dörtgensel dağılıma sahiptir.

5) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri Standart Dörtgensel dağılıma sahip iseler, $Y=(X_1+X_2)/2$, Standart Simetrik üçgensel dağılıma sahiptir.

6) Standart Dörtgensel dağılım, p ve q parametreli Standart Beta dağılımının $p=q=1$ özel halidir.

7) Standart Dörtgensel dağılım, p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımının $p=1$ özel halidir.

8) Standart Dörtgensel dağılım, β ve p parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımının $\beta=p=1$ özel halidir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=-\beta\log X$, β parametreli Üstel dağılıma sahiptir.

10) Sürekli tipteki bir X r.d, β parametreli Üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-X/\beta)$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

11) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Üstel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-X)$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

12) Sürekli tipteki bir X r.d, $v=2$ parametreli Kikare dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-X/2)$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

13) X_i, $i=1,2,3,\ldots,n$ birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Dörtgensel dağılıma sahip iseler,

$Y=\sum_{i=1}^{n}(-\log X_i)$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılımına sahiptir.

14) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=-\log(-\log X)$, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılıma sahiptir.

15) Sürekli tipteki bir X r.d, Birinci Tip Standart Uç Değer dağılıma sahip ise, $Y=\exp\{-\exp(-X)\}$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

16) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Lojistik dağılıma sahip ise, $Y=1/[1+\exp(-X)]$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

17) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=-\log[X/(1-X)]$, Standart Lojistik dağılıma sahiptir.

18) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d ler ve herbiri Standart Dörtgensel dağılıma sahip iseler, $Y=-\log(X_1/X_2)$, Standart Laplace dağılımına sahiptir.

19) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=(-\log X)^{1/\tau}$, τ parametreli Standart Webull dağılımına sahiptir.

20) Sürekli tipteki bir X r.d, τ parametreli Standart Webull dağılımına sahip ise, $Y=\exp(-X^{\tau})$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

21) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=-\log X$, k=1 parametreli Standart Gamma dağılımına sahiptir.

22) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\beta(1-X)^{-1/k}$, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahiptir.

23) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve k parametreli Pareto dağılımına sahip ise, $Y=1-(\beta/X)^{k}$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

24) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\beta X^{1/p}$, β ve p parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

25) Sürekli tipteki bir X r.d, β ve p parametreli Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=(X/\beta)^{p}$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.

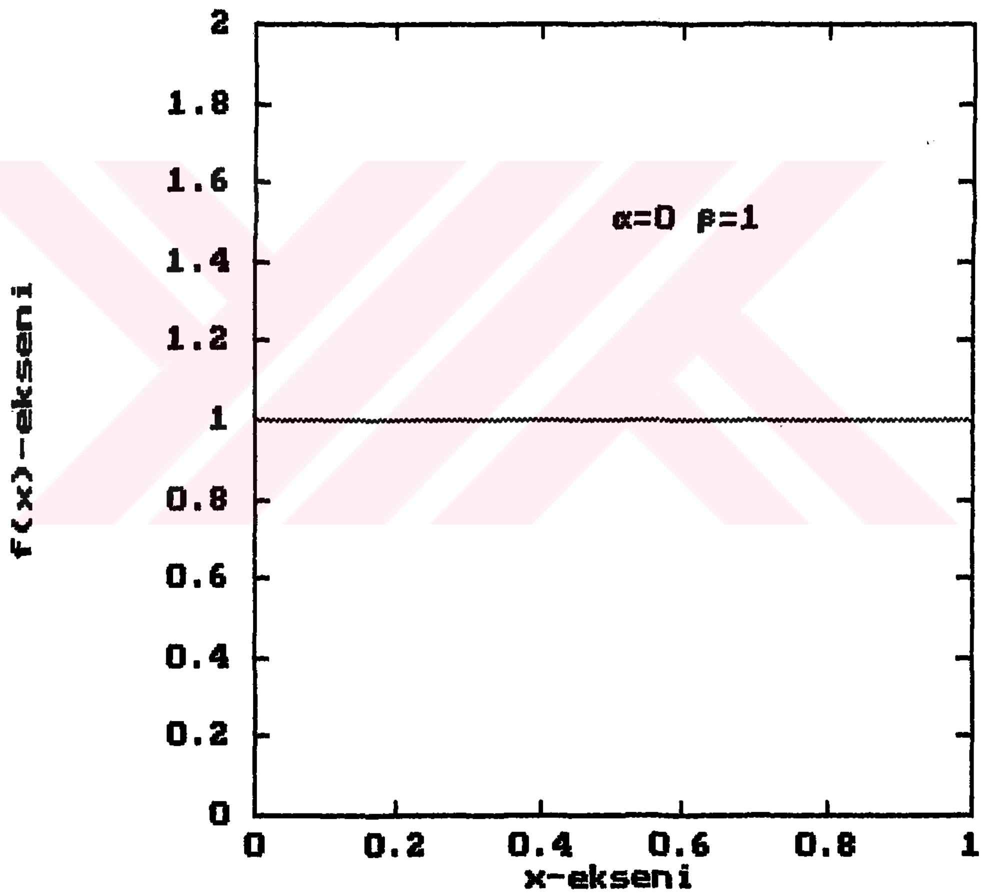
26) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=X^{1/p}$, p parametreli Standart Kuvvet Fonksiyon dağılımına sahiptir.

27) Sürekli tipteki bir X r.d, p parametreli Standart Kuvvet fonksiyon dağılımına sahip ise, $Y=X^{p}$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

28) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri ß parametreli üstel dağılıma sahip iseler, $Y=X_1/(X_1+X_2)$, Standart Dörtgensel dağılımına sahiptir.

29) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Dörtgensel dağılıma sahip ise, $Y=\exp(-\alpha)[(1/X)-1]^{1/\beta}$, α ve ß parametreli Log-Lojistik dağılımına sahiptir.

30) Sürekli tipteki bir X r.d, α ve ß parametreli Log-Lojistik dağılımına sahip ise, $Y=1/[\exp(\alpha\beta)X^{\beta}+1]$, Standart Dörtgensel dağılıma sahiptir.



Şekil 47. Standart Düzgün Dağılımın grafiği.

3.17 Standart Üçgensel Dağılım

TANIM 3.17.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:\beta)=\begin{cases} 2x/\beta & 0 < x < \beta \\ 2(1-x)/(1-\beta) & \beta < x < 1 \end{cases} \qquad (3.17.1)$$

ise x r.d'ne Standart üçgensel dağılıma sahiptir denir.

Standart üçgensel dağılımı, $ST(x:\beta)$ veya $ST_x(\beta)$ ve ilgili değişkeni, $ST:\beta$ ile göstereceğiz. Standart üçgensel dağılımın, β parametresi dağılımın yayılım parametresidir.

TEOREM 3.17.1 Standart üçgensel dağılımın m.ç.f,

$$M(t:\beta)=\frac{2[1-\beta+\beta\exp(t)-\exp(\beta t)]}{\beta(1-\beta)t^2} \qquad (3.17.2)$$

dir.

İSPAT: (1.7.7.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$M(t:\beta)=\frac{2}{\beta}\int_0^\beta x\exp(tx)dx+\frac{2}{1-\beta}\left[\int_\beta^1 \exp(tx)dx-\int_\beta^1 x\exp(tx)dx\right] \qquad (3.17.2.a)$$

dir.

$I_1=\frac{2}{\beta}\int_0^\beta x\exp(tx)dx$ olsun. Kısmi integrasyon metodunu kullanarak bu integral hesaplandığında,

$$I_1=\frac{\beta}{t}\exp(\beta t)-\frac{1}{t^2}\exp(\beta t)+\frac{1}{t^2} \qquad (3.17.2.b)$$

elde edilir.

$I_2=\int_\beta^1 \exp(tx)dx$ olsun. Direk integrasyon metodunu kullanarak bu integral hesaplandığında,

$$I_2=\frac{1}{t}\exp(t)-\frac{1}{t}\exp(\beta t) \qquad (3.17.2.c)$$

elde edilir.

$I_3=\int_{\beta}^{1} x\exp(tx)dx$ olsun. Kısmi integrasyon metodunu kullanarak bu integral hesaplandığında,

$$I_3=\frac{1}{t}\exp(t)-\frac{\beta}{t}\exp(\beta t)-\frac{1}{t^2}\exp(t)+\frac{1}{t^2}\exp(\beta t) \qquad (3.17.2.d)$$

elde edilir.

(3.17.2.a)'da, (3.17.2.b), (3.17.2.c) ve (3.17.2.d) yerine koyulduğunda, sadeleştirmelerden sonra,

$$M(t;\beta)=\frac{2[1-\beta+\beta\exp(t)-\exp(\beta t)]}{\beta(1-\beta)t^2},$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.17.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Üçgensel dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\frac{2(1-\beta^{r+1})}{(1-\beta)(r+1)(r+2)} \qquad (3.17.3)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\frac{2}{\beta}\int_0^{\beta}x^{r+1}dx+\frac{2}{1-\beta}\left[\int_{\beta}^{1}x^{r}dx-\int_{\beta}^{1}x^{r+1}dx\right] \qquad (3.17.3.a)$$

dir.

(3.17.3.a)'daki integraller, direk integrasyon metodunu kullanalanarak hesaplandığında sadeleştirmelerden sonra,

$$\mu'_r = \frac{2(1-\beta^{r+1})}{(1-\beta)(r+1)(r+2)}$$

bulunur.

TEOREM 3.17.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart üçgensel dağılımına sahip ise,

$$E(x) = \frac{\beta+1}{3} \qquad (3.17.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.17.4)'de r=1 için,

$$\mu'_1 = \frac{\beta+1}{3}$$

dir. O halde,

$$E(x) = \frac{\beta+1}{3}$$

bulunur.

TEOREM 3.17.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart üçgensel dağılımına sahip ise,

$$Var(x) = \frac{\beta^2-\beta+1}{18} \qquad (3.17.5)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.17.4)'de r=2 için,

$$\mu'_2 = \frac{\beta^2+\beta+1}{6}$$

dir. O halde,

$$E(x^2) = \frac{\beta^2+\beta+1}{6} \qquad (3.17.5.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.17.5.a) ve (3.17.4) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{\beta^2-\beta+1}{18}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.17.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart üçgensel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(\beta^2-\beta+1)}}{3\sqrt{2}} \qquad (3.17.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.17.5) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{\sqrt{(\beta^2-\beta+1)}}{3\sqrt{2}}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.17.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Standart üçgensel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{\sqrt{2}}{5}\;\frac{2\beta^3-3\beta^2-3\beta+2}{(\beta^2-\beta+1)^{3/2}} \qquad (3.17.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.17.3)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{\beta^3+\beta^2+\beta+1}{10}$$

dur. O halde,

$$E(x^3)=\frac{\beta^3+\beta^2+\beta+1}{10} \qquad (3.17.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.17.7.a), (3.17.5.a) ve (3.17.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3 = \frac{2\beta^3-3\beta^2-3\beta+2}{270}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{5}\ \frac{2\beta^3-3\beta^2-3\beta+2}{(\beta^2-\beta+1)^{3/2}}$$

bulunur.

TEOREM 3.17.7 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart üçgensel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 12/5 \tag{3.17.8}$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.17.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4 = \frac{\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1}{15}$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \frac{\beta^4+\beta^3+\beta^2+\beta+1}{15} \tag{3.17.8.a}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.17.8.a), (3.17.7.a), (2.17.5.a) ve (3.17.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{\beta^4-2\beta^3+3\beta^2-2\beta+1}{135}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4 = 12/5$

bulunur.

TEOREM 3.17.8 Standart üçgensel dağılımın modu,

$$x=\beta \tag{3.17.9}$$

noktasındadır.

İSPAT:

1- $0 < x < \beta$ olduğunda, (3.17.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp sıfıra eşitlediğimizde, herhangi bir kritik nokta yoktur. O halde uç noktaları kontrol edelim. $x=\beta$ bulunur. $x=\beta$ noktasında, (3.17.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır.

2- $\beta < x < 1$ olduğunda, (3.17.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp sıfıra eşitlediğimizde, herhangi bir kritik nokta yoktur. O halde uç noktaları kontrol edelim. $x=\beta$ bulunur. $x=\beta$ noktasında, (3.17.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır.

O halde sonuç olarak Standart üçgensel dağılımın modu,

$x=\beta$

bulunur.

TEOREM 3.17.9 Standart üçgensel dağılımın medyanı,

$$\begin{cases} \beta \leq 1/2 \text{ ise}, & \sqrt{(\beta/2)} \\ \beta \geq 1/2 \text{ ise}, & 1-\sqrt{\{(1-\beta)/2\}} \end{cases} \qquad (3.17.10)$$

dir.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

1- $\beta \leq 1/2$ olduğunda:

$$\int_0^x \frac{2u}{\beta}\,du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral hesaplandığında,

$$\frac{x^2}{\beta}=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan $x_{1,2}=\pm\sqrt{(\beta/2)}$ elde edilir.

$x=\sqrt{(\beta/2)}$ istenen değerdir.

2- $\beta \geq 1/2$ olduğunda:

$$\int_x^1 \frac{2(1-u)}{\beta}\,du=\frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral hesaplandığında,

$$\frac{1-2x+x^2}{1-\beta}=\frac{1}{2}$$ dir. Buradan $x_{1,2}=1\pm\sqrt{\{(1-\beta)/2\}}$ elde edilir.

$x=1-\sqrt{(\beta/2)}$ istenen değerdir.

Sonuç olarak Standart üçgensel dağılımın medyanı,

$$\begin{cases} \beta \leq 1/2 \text{ ise}, & \sqrt{(\beta/2)} \\ \beta \geq 1/2 \text{ ise}, & 1-\sqrt{\{(1-\beta)/2\}} \end{cases}$$

bulunur.

TANIM 3.17.2 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x)=\begin{cases} 4x & 0 < x < 1/2 \\ 4(1-x) & 1/2 < x < 1 \end{cases} \qquad (3.17.11)$$

ise x r.d'ne Standart Simetrik üçgensel dağılıma sahiptir denir.

Standart Simetrik üçgensel dağılım, Standart üçgensel dağılımın, $\beta=1/2$ özel halidir.

Standart Simetrik üçgensel dağılımı, SsyT göstereceğiz.

Standart Simetrik Üçgensel dağılım için hesaplamalar ve ispatlar, Standart üçgensel dağılımda olduğu gibi yapılır.

TEOREM 3.17.10 Standart Simetrik üçgensel dağılımın m.ç.f,

$$M(t)=\frac{4[1+\exp(t)-2\exp(\frac{1}{2}t)]}{t^2} \qquad (3.17.12)$$

dir.

TEOREM 3.17.11 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik üçgensel dağılıma sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\frac{4(2^{r+1}-1)}{2^{r+1}(r+1)(r+2)} \qquad (3.17.13)$$

dir.

TEOREM 3.17.12 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik Üçgensel dağılımına sahip ise,

$$E(x)=1/2 \qquad (3.17.14)$$

dir.

TEOREM 3.17.13 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik üçgensel dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= 1/24 \tag{3.17.15}$$

dır.

TEOREM 3.17.14 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik üçgensel dağılımına sahip ise,

$$SS(x)= 1/(2\sqrt{6}) \tag{3.17.16}$$

dir.

TEOREM 3.17.15 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik üçgensel dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3= 0 \tag{3.17.17}$$

dır.

TEOREM 3.17.16 Sürekli tipteki bir x r.d, Standart Simetrik üçgensel dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4= 12/5 \tag{3.17.18}$$

dir.

TEOREM 3.17.17 Standart Simetrik üçgensel dağılımın modu,

$$x= 1/2 \tag{3.17.19}$$

noktasındadır.

TEOREM 3.17.18 Standart Simetrik üçgensel dağılımın medyanı,

$$1/2 \tag{3.17.20}$$

dir.

3.17.1 Standart Üçgensel Dağılımın Uygulama Alanları

Bu tür dağılımlar, çok karmaşık, simetrik veya simetrik olmayan dağılımlara basit yaklaşımlarda bulunmak için kullanılır. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:97)

Örnek olarak, bu dağılım sınıfından ve Standart Beta dağılımının özel hali olan dağılımlardan Sağ Üçgensel dağılımı ve Parabolik dağılım verilebilir.

(3.14.2)'deki Standart Beta dağılımının, p=2 ve q=1 özel halini ele alalım.

<u>TANIM 3.17.1.1</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$f(x)=2x \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad (3.17.1.1)$

ise x r.d'ne Sağ Üçgensel dağılıma sahiptir denir.

Benzer şekilde, (3.14.2)'deki Standart Beta dağılımının, p=q=2 özel halini ele alalım.

<u>TANIM 3.17.1.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$f(x)=6x(1-x) \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad (3.17.1.2)$

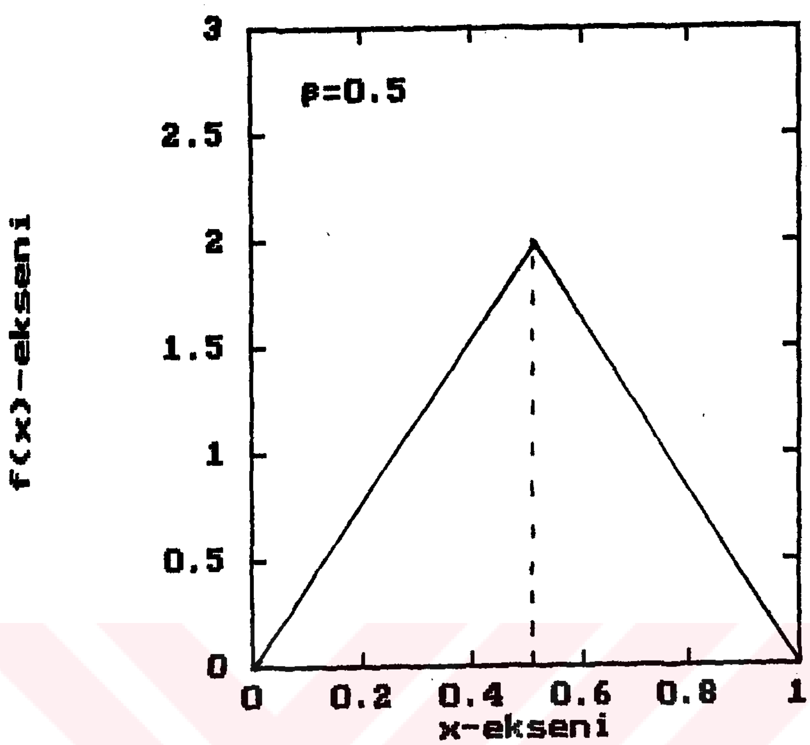
ise x r.d'ne Parabolik dağılıma sahiptir denir.

Burada Parabolik dağılım, Normal dağılıma çok basit bir yaklaşımda bulunmak için kullanılır. Sağ üçgensel dağılım ise, bazı Gamma değişkenlerinin yaklaşık gösterimleri için kullanılır.

3.17.2 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

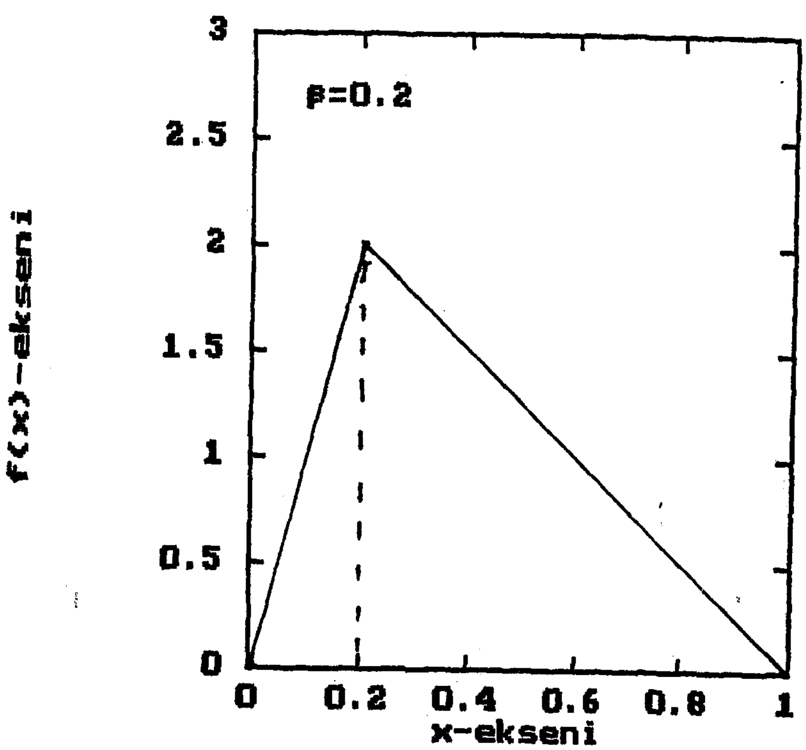
(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:124-125)'de verilen bağıntılar.

1) Standart Simetrik Üçgensel dağılım, ß parametreli Standart Üçgensel dağılımın, ß=1/2 özel halidir.



Şekil 48. Standart Üçgensel Dağılımın ß=0.5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 49. Standart Üçgensel Dağılımın ß=0.2 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.18 Rayleigh Dağılımı

Bu kesimde, fizikte ve mühendislikte önemli uygulamaları olan Rayleigh dağılımını ele alacağız.

TANIM 3.18.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\beta)=\frac{x}{\beta^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \qquad (3.18.1)$$

$x > 0 \quad \beta > 0$

ise x r.d'ne Rayleigh dağılıma sahiptir denir.

Rayleigh dağılımını, $R(x;\beta)$ veya $R_x(\beta)$ ve ilgili değişkeni, $R;\beta$ ile göstereceğiz. Rayleigh dağılımın β parametresi, dağılımın yayılım parametresidir.

TEOREM 3.18.1 Rayleigh dağılımının d.f,

$$F(x;\beta)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right) \qquad (3.18.2)$$

dir.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x;\beta)=\int_0^x \frac{u}{\beta^2}\exp\left(-\frac{u^2}{2\beta^2}\right)du \qquad (3.18.2.a)$$

dur.

(3.18.2.a)'daki integralde, $y=u^2/(2\beta^2)$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x;\beta)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)$$

bulunur.

TEOREM 3.18.2 Rayleigh dağılımının m.ç.f,

$$M(t;\beta)=\exp\left(\frac{\beta^2t^2}{2}\right)[1+\beta t\sqrt{(\pi/2)}] \qquad (3.18.3)$$

dir.

TEOREM 3.18.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r = (\sqrt{2}\,\beta)^r\,\Gamma(r/2+1) \qquad (3.18.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r+1}}{\beta^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\beta^2}\right)dx \qquad (3.18.4.a)$$

dir.

(3.18.4.a)'daki integralde, $y=x^2/(2\beta^2)$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$\mu'_r = (\sqrt{2}\,\beta)^r\,\Gamma(r/2+1)$

bulunur.

TEOREM 3.18.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise,

$$E(x) = \beta\sqrt{(\pi/2)} \qquad (3.18.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.18.4)'de r=1 için,

$\mu'_1 = \beta\sqrt{(\pi/2)}$

dir. O halde,

$E(x) = \beta\sqrt{(\pi/2)}$

bulunur.

TEOREM 3.18.5 Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise,

$$Var(x) = \frac{\beta^2(4-\pi)}{2} \qquad (3.18.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.18.4)'de r=2 için,

$\mu'_2 = 2\beta^2$

dir. O halde,

$$E(x^2) = 2\beta^2 \qquad (3.18.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.18.5.a) ve (3.18.4) yerine koyulduğunda,

$$Var(x) = \frac{\beta^2(4-\pi)}{2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise,

$$SS(x) = \beta\sqrt{\left(\frac{4-\pi}{2}\right)} \qquad (3.18.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.18.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x) = \beta\sqrt{\left(\frac{4-\pi}{2}\right)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = 0.631 \qquad (3.18.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.18.4)'de r=3 için,

$\mu'_3 = 3\beta^3\sqrt{(\pi/2)}$

dir. O halde,

$$E(x^3) = 3\beta^3\sqrt{(\pi/2)} \qquad (3.18.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.18.8.a), (3.18.6.a) ve (3.18.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3 = \beta^3\sqrt{(\pi/2)}(\pi-3)$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3 = 0.631162691$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.8</u> Sürekli tipteki bir x r.d, Rayleigh dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3.245 \qquad (3.18.9)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.18.4)'de r=4 için,

$\mu'_4= 8\beta^4$

dir. O halde,

$$E(x^4)= 8\beta^4 \qquad (3.18.9.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.18.9.a), (3.18.8.a), (2.18.6.a) ve (3.18.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4= \frac{\beta^4(32-3\pi^2)}{4}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4= 3.2451$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.9</u> Rayleigh dağılımının modu ,

$$x= \beta \qquad (3.18.10)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.18.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\pm\beta$ bulunur. $x=\beta$ değeri için (3.18.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Rayleigh dağılımının modu,

$x=\beta$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.10</u> Rayleigh dağılımının medyanı,

$$\beta\sqrt{(\ln 4)} \qquad (3.18.11)$$

dır.

İSPAT: (1.3.3)'deki eşitliği kullanarak,

$$\int_0^x \frac{u}{\beta^2} \exp(-\frac{u^2}{2\beta^2})du = \frac{1}{2}$$ dir. Eşitliğin sol tarafındaki integral hesaplandığında,

$$1- \exp(-\frac{x^2}{2\beta^2})= \frac{1}{2}$$ dir. Buradan,

$x=\beta\sqrt{(\ln 4)}$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.11</u> Rayleigh dağılımın karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi(t:\beta)=\exp\left(-\frac{\beta^2 t^2}{2}\right)[1+i\beta t\sqrt{(\pi/2)}] \qquad (3.18.12)$$

dir.

İSPAT: (1.7.8.a)'daki eşitliği kullanarak, (3.18.3)'de, t yerine it alındığında,

$$\Phi(t:\beta)=\exp\left(-\frac{\beta^2 t^2}{2}\right)[1+i\beta t\sqrt{(\pi/2)}]$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.18.12</u> Rayleigh dağılımın kümülant fonksiyonu,

$$K(t:\beta)= -\frac{\beta^2 t^2}{2}+\log\{1+i\beta t\sqrt{(\pi/2)}\} \qquad (3.18.13)$$

dir.

İSPAT: (1.7.9)'daki eşitliği kullanarak, (3.18.12)'nin logaritması alındığında,

$$K(t:\beta)= -\frac{\beta^2 t^2}{2}+\log\{1+i\beta t\sqrt{(\pi/2)}\}$$

bulunur.

3.18.1 Rayleigh Dağılımın Uygulama Alanları

Rayleigh dağılım, bir düzlemdeki yarıçapsal (radial) hatanın dağılımını göstermek için kullanılır. Bu düzlemde, eksenler biribirinden bağımsızdırlar ve eşit varyanslı, sıfır ortalamalı Normal dağılıma sahiptirler. Yani X_1 ve X_2 herbiri sıfır ortalamalı ve eşit varyanslı bir Normal dağılımdan alınmış bağımsız örneklemlerin değerleri iseler, $Y=\sqrt{(X_1^2+X_2^2)}$ r.d,

$$f(y:\beta)=\frac{y}{\beta^2}\exp\left(-\frac{y^2}{2\beta^2}\right) \qquad y \geq 0 \quad \beta > 0 \qquad (3.18.1.1)$$

o.y.f'lu Rayleigh dağılıma sahiptir. Burada ß parametresi, dağılımın yayılım parametresidir. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:100)

Rayleigh dağılımın uygulama alanlarını şöyle sıralayabiliriz.

1) Askeri alanda, bir düzlemde sıfır ortalama ve eşit varyanslı Normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız X ve Y yönlerinde bir yerden, hedeflenen yada nişan alınan bir noktaya atılan bombanın, hedeflenen yada nişan alınan nokta ile bombanın düştüğü yer arasındaki uzaklığın dağılımını göstermek için kullanılır. Burada, nişan alma hatalarının olduğu varsayılmaktadır. Bu Rayleigh dağılımının iki boyutta bir uygulamasıdır.

Rayleigh dağılımın üç boyutta da uygulamaları vardır. (Hahn ve Shapiro, 1967 s:188-190) örneğin bir denizaltı avcı gemisinin doğruluğunun hesap edilmesi isteniyor. Yani denizaltı avcı gemisinden, bir denizaltı gemisine atılan bombanın, denizaltıya isabet etmesi hesap edilecektir. Bombalama sistemi, ortalama patlama yada infilak hataları, derinlik, uzaklık ve genişlik olmak üzere üç boyutun herbirine göre olacak şekilde ayarlanmış ve sıfırdır. Bombalama sisteminin standart hatası yada standart sapması ise, ölçümün bir birimi kadardır. örnegin ölçüm deniz mili cinsinden ise standart hata yada standart sapma 1 mil olarak alınacaktır.

Burada amaç: Bu bombalama sisteminde, hedeflenen yada nişan alınan nokta ile bombanın patlama noktası arasındaki r yarıçapsal uzaklığın dağılımını bulmaktır. Yani

$$r=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)} \qquad (3.18.1.2)$$

nin dağılımını bulmaktır.

Burada X, Y ve Z sırasıyla hedeflen en yada nişan alınan noktadan derinlik, uzaklık ve genişlikteki hataları yada sapmaları göstermektedir.

Herbir eksen, sıfır ortalamalı ($\mu=0$) ve bir standart sapmalı ($\sigma=1$), birbirinden bağımsız Normal dağılıma sahiptir.

$f_1(x:\mu,\sigma)=[1/\sqrt{(2\pi)}]\exp\{-x^2/2\}$ $-\infty < x < +\infty$ (3.18.1.3.a)

$f_2(y:\mu,\sigma)=[1/\sqrt{(2\pi)}]\exp\{-y^2/2\}$ $-\infty < y < +\infty$ (3.18.1.3.b)

$f_3(z:\mu,\sigma)=[1/\sqrt{(2\pi)}]\exp\{-z^2/2\}$ $-\infty < z < +\infty$ (3.18.1.3.c)

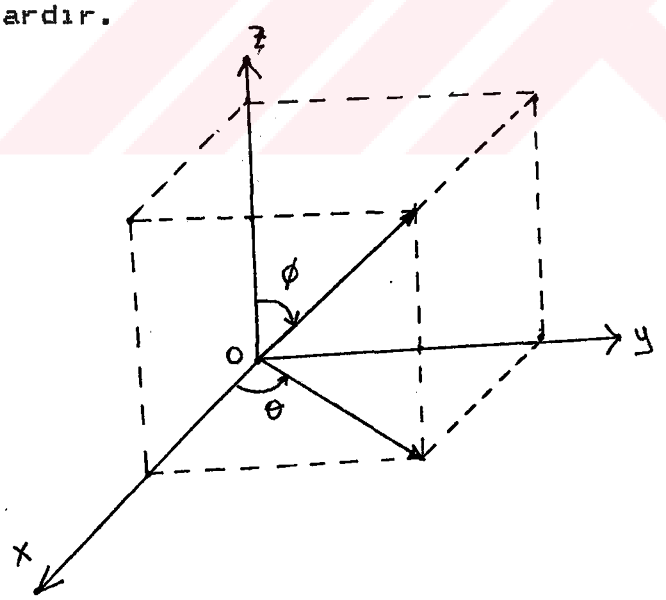
Eksenlerin bağımsızlığından dolayı, x,y ve z r.d'lerinin o.o.y.f,

$$m(x,y,z:\mu,\sigma)=f_1(x:\mu,\sigma)f_2(y:\mu,\sigma)f_3(z:\mu,\sigma)$$
$$=[1/(2\pi)^3]\exp\{-(1/2)[x^2+y^2+z^2]\} \quad (3.18.1.4)$$

dir.

Bu aynı zamanda, korelasyon katsayıları sıfır olan bir üç değişkenli Normal dağılımdır.

(3.18.1.2)'deki r'nin dağılımını bulmak için önce uygun iki yardımcı değişken bulmamız gerekir. Yarıçapsal uzaklıkla ilgilendiğimizden, kutupsal koordinatları seçmemiz uygun olacaktır. Bu nedenle yardımcı değişken olarak, θ ve Ø'yi kullanalım. Bunlar ilgili yarıçap vektörü ile ilgili açılardır.



θ ve Ø'yi iki değişken olarak kullanabiliriz. r, θ ve Ø'den bağımsız olduğunda, bu kullanım uygundur.

$x(r,\theta,\emptyset)=r\cos\theta$ (3.18.1.5.a)

$y(r,\theta,\emptyset)=r\sin\theta\cos\emptyset$ (3.18.1.5.b)

$z(r,\theta,\emptyset)=r\sin\theta\sin\emptyset$ (3.18.1.5.c)

$0 \le \theta \le \pi$ $0 \le r \le +\infty$ $0 \le \emptyset \le \pi$

Yukarıdaki sistemin Jacobianı,

$$|J|=r^2\sin\theta \qquad (3.18.1.6)$$

dır.

(3.18.2.2)'den $r^2=x^2+y^2+z^2$ dır. r,θ ve $\emptyset$'nin o.o.y.f

$$n(r,\theta,\emptyset)=m[x(r,\theta,\emptyset),y(r,\theta,\emptyset),z(r,\theta,\emptyset)]|J|$$

$$=(1/2\pi)^3\exp\{-r^2/2\}\, r^2\sin\theta \qquad (3.18.1.7)$$

$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq r \leq +\infty \qquad 0 \leq \emptyset \leq \pi$

elde edilir.

$$P(r)=\int_D n(r,\theta,\emptyset)\,d\theta d\emptyset \qquad (3.18.1.8)$$

sistem hatalarının yarıçapsal uzaklığı için o.y.f göstersin. Burada D problemin tanım kümesidir. O halde,

$$P(r)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}r^2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta d\emptyset \qquad (3.18.1.9)$$

r, θ ve $\emptyset$'den bağımsız olduğundan, (3.18.1.9)'daki P(r)'yi

$$P(r)=K\exp\{-r^2/2\}r^2 \qquad 0 \leq r \leq +\infty \qquad (3.18.1.10)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.1.4.b)'den dolayı,

$$K=\left[\int_0^{+\infty}\exp\{-r^2/2\}r^2dr\right]^{-1}=\sqrt{(2/\pi)} \qquad (3.18.2.11)$$

dir. Sonuç olarak,

$$P(r)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}r^2 \qquad (3.18.2.12)$$

bulunur.

2) İstatistiksel haberleşme teorisinde, rastgele seslerin bir lineer tarayıcı ile taranmasında, seslerin oluşumunun genişliğini göstermede kullanılır. (Middleton, 1960)

3.18.2 Rayleigh Dağılımın Parametre Tahminleri

Rayleigh dağılımın β parametresinin tahmin edicisini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri β parametreli Rayleigh dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\beta^2}\right)$$

$L(\beta) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; \beta)$ olsun. O halde,

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\beta} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\beta^2}\right) \qquad (3.18.2.1)$$

dir.

(3.18.2.1)'in logaritmasını alalım.

$$\ln\{L(\beta)\} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\beta^2} \qquad (3.18.2.2)$$

dir.

(3.18.2.2)'nin β göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

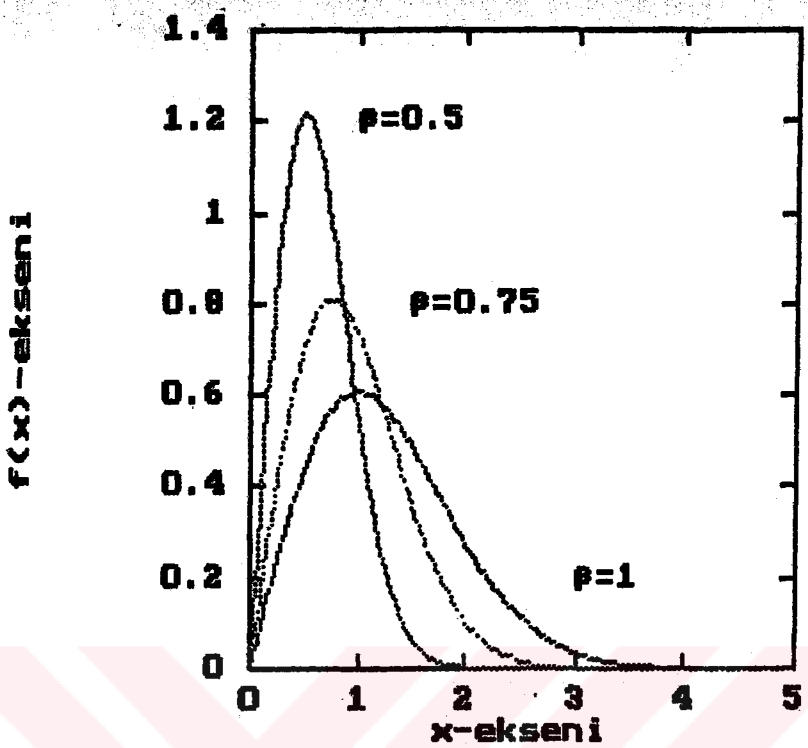
$$\hat{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$$

bulunur.

3.18.3 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

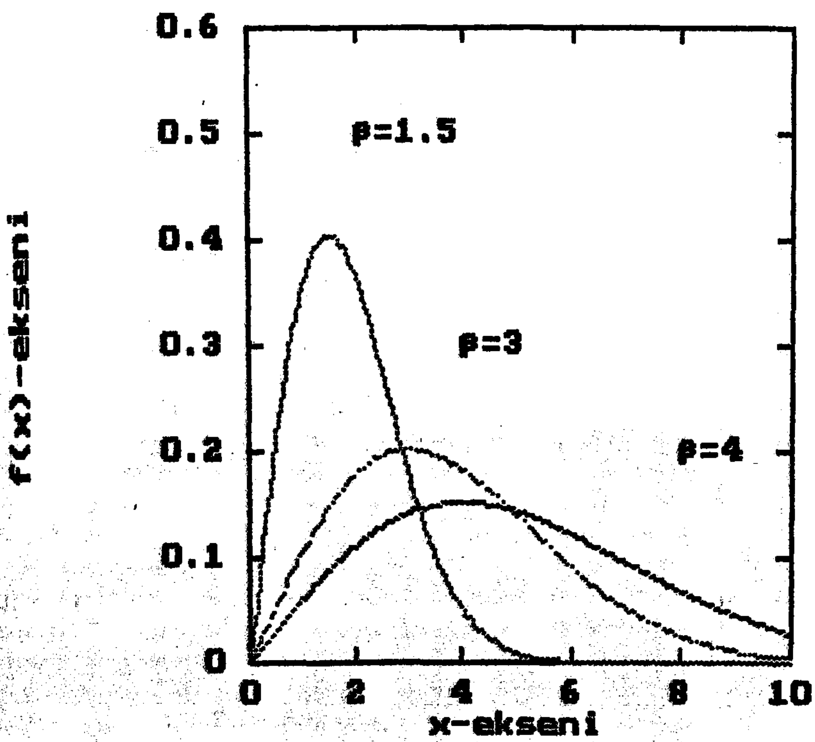
(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:40)'da verilen bağıntılar.

1) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri $\mu=0$ ve σ parametreli Normal dağılıma sahip iseler, $Y=\sqrt{(X_1^2+X_2^2)}$, $\beta=\sigma$ parametreli Rayleigh dağılımına sahiptir.



Şekil 50. Rayleigh Dağılımın β=0.5 β=0.75 β=1 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 51. Rayleigh Dağılımın β=1.5 β=3 β=4 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.19 Maxwell Dağılımı

TANIM 3.19.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x;\beta)=\sqrt{(2/\pi)}\ \frac{x^2}{\beta^3}\exp(-\frac{x^2}{2\beta^2}) \qquad (3.19.1)$$

$x > 0 \quad \beta > 0$

ise x r.d'ne Maxwell dağılıma sahiptir denir.

Maxwell dağılımını, $M(x;\beta)$ veya $M_x(\beta)$ ve ilgili değişkeni, $M;\beta$ ile göstereceğiz. Maxwell dağılımın β parametresi, dağılımın yayılım parametresidir.

TEOREM 3.19.1 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta^r\ 2^{r/2+1}\ \Gamma(\frac{r+3}{2}) \qquad (3.19.2)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\sqrt{(\frac{2}{\pi})}\int_0^{+\infty}\frac{x^{r+2}}{\beta^3}\exp(-\frac{x^2}{2\beta^2})dx \qquad (3.19.2.a)$$

dir.

(3.19.2.a)'daki integralde, $y=x/\beta$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında, bazı düzenlemelerden sonra,

$$\mu'_r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\beta^r\ 2^{r/2+1}\ \Gamma(\frac{r+3}{2})$$

bulunur.

TEOREM 3.19.2 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise,

$$E(x)=2\beta\sqrt{(\pi/2)} \qquad (3.19.3)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.19.2)'de r=1 için,

$\mu'_1=2\beta\sqrt{(\pi/2)}$

dir. O halde,

$E(x)= 2\beta\sqrt{(\pi/2)}$

bulunur.

TEOREM 3.19.3 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= \frac{\beta^2(3\pi-8)}{\pi} \qquad (3.19.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)' dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.19.2)'de r=2 için,

$\mu'_2= 3\beta^2$

dir. O halde,

$$E(x^2)= 3\beta^2 \qquad (3.19.4.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.19.4.a) ve (3.19.3) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)= \frac{\beta^2(3\pi-8)}{\pi}$$

bulunur.

TEOREM 3.19.4 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise,

$$SS(x)= \beta\sqrt{\left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)} \qquad (3.19.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.19.4) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)= \beta\sqrt{\left(\frac{3\pi-8}{\pi}\right)}$$

bulunur.

TEOREM 3.19.5 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}(32-10\pi)}{(3\pi-8)^{3/2}} \qquad (3.19.6)$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.19.2)'de $r=3$ için,

$\mu'_3 = 8\beta^3\sqrt{(\pi/2)}$

dir. O halde,

$$E(x^3) = 8\beta^3\sqrt{(\pi/2)} \qquad (3.19.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.19.6.a), (3.19.4.a) ve (3.19.3) yerine koyulduğunda,

$\mu_3 = (\beta^3/\pi)\sqrt{(\pi/2)}(32-10\pi)$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0.48569284$

bulunur.

TEOREM 3.19.6 Sürekli tipteki bir x r.d, Maxwell dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3.1082 \qquad (3.19.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.19.2)'de $r=4$ için,

$\mu'_4 = 15\beta^4$

dir. O halde,

$$E(x^4) = 15\beta^4 \qquad (3.19.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.19.7.a), (3.19.6.a), (2.19.4.a) ve (3.19.3) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{\beta^4(15\pi^2+16\pi-192)}{\pi^2}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_4=3.108163835$

bulunur.

TEOREM 3.19.7 Maxwell dağılımının modu ,

$$x = \sqrt{2}\beta \qquad (3.19.8)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.19.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\pm\sqrt{2}\beta$ bulunur. $x=\sqrt{2}\beta$ değeri için (3.19.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, Maxwell dağılımının modu,

$$x = \sqrt{2}\beta$$

bulunur.

3.19.1 Maxwell Dağılımın Parametre Tahminleri

Maxwell dağılımın β parametresinin tahmin edicisini, maksimum likelihood metodunu kullanarak hesaplayalım.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ herbiri β parametreli Maxwell dağılıma sahip rastgele bir örneklem olsun.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$'lerin o.o.y.f,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n ; \beta) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \frac{x_i^2}{\beta^3} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\beta^2}\right)$$

$L(\beta) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n ; \beta)$ olsun. O halde,

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \frac{x_i^2}{\beta^3} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\beta^2}\right) \qquad (3.19.1.1)$$

dir.

(3.19.1.1)'in logaritmasını alalım.

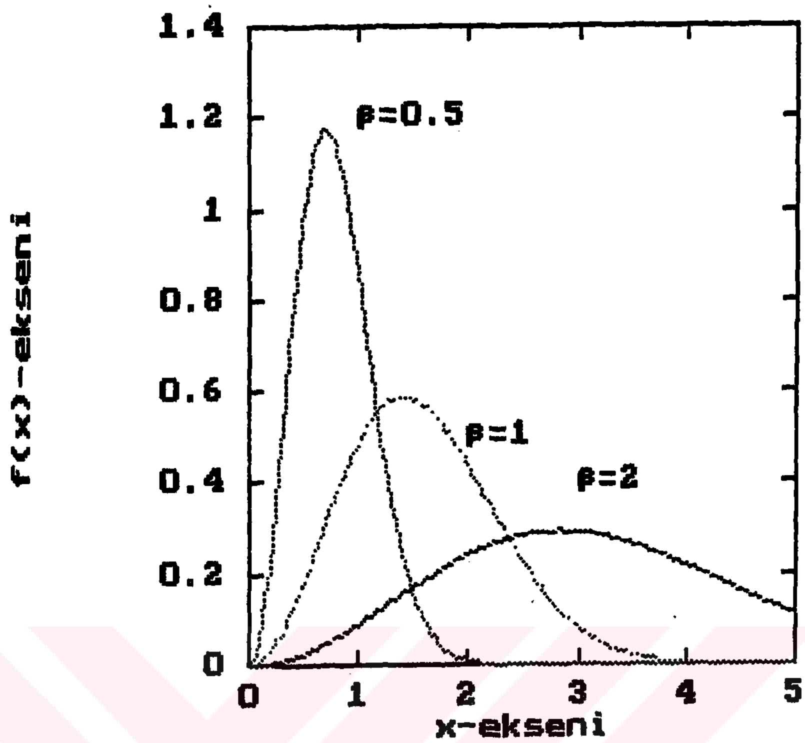
$$\ln\{L(\beta)\} = \sum_{i=1}^{n} \ln\left\{\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\left(\frac{x_i^2}{\beta^3}\right)\right\} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\beta^2} \qquad (3.19.1.2)$$

dir.

(3.19.1.2)'nin β göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

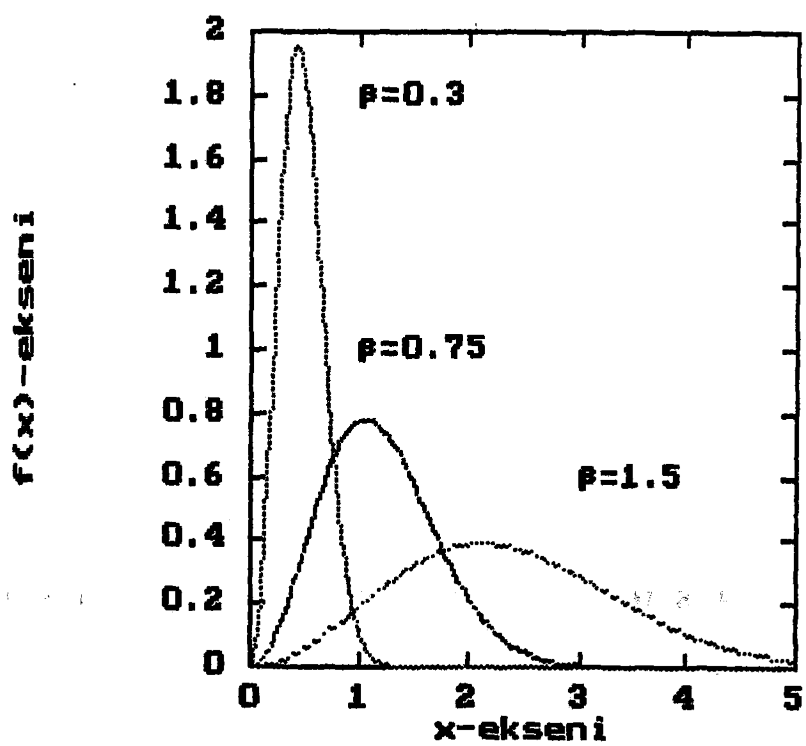
$$\hat{\beta} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}$$

bulunur.



Şekil 52. Maxwell Dağılımının β=0.5 β=1 β=2 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

Şekil 53. Maxwell Dağılımının β=0.3 β=0.75 β=1.5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.



3.20 F Dağılımı

X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri sırasıyla, v_1 ve v_2 serbestlik dereceli Kikare dağılımına sahip iseler,

$$Y = \frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} = \frac{v_2}{v_1}\,\frac{X_1}{X_2} \qquad (3.20.1)$$

v_1 ve v_2 serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. (Johnson ve Kotz, 1970 s:77)

TANIM 3.20.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:v_1,v_2) = \frac{v_1^{(\frac{1}{2}v_1)}\; v_2^{(\frac{1}{2}v_2)}\; x^{(\frac{1}{2}v_1-1)}}{B(\frac{1}{2}v_1,\frac{1}{2}v_2)\,(v_2+v_1x)^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}} \qquad (3.20.2)$$

$x > 0 \quad v_1, v_2 \in Z^+$

ise x r.d'ne F dağılıma sahiptir denir.

F dağılımını, $F(x:v_1,v_2)$ veya $F_x(v_1,v_2)$ ve ilgili değişkeni, $F:v_1,v_2$ ile göstereceğiz. F dağılımın v_1 ve v_2 parametreleri, dağılımın şekil parametreleridir. Bu parametrelere, serbestlik derecesi de denir.

TEOREM 3.20.1 Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r-inci momenti,

$$\mu'_r = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{1}{2}v_1+r)\,\Gamma(\frac{1}{2}v_2-r)}{\Gamma(\frac{1}{2}v_1)\,\Gamma(\frac{1}{2}v_2)} \qquad (3.20.3)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak, F dağılımının (3.20.1) deki şeklini alalım. O halde,

$$\mu'_r = E(y^r) = \int_0^{+\infty} y^r\, f(y)\,dy \text{ olur.}$$

$$\mu'_r = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\frac{v_2}{v_1}\,\frac{x_1}{x_2}\right)^r f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \qquad (3.20.3.a)$$

dir.

Burada $x_1 \sim CHS(x_1:v_1)$ ve $x_2 \sim CHS(x_2:v_2)$ dir. x_1 ve x_2'nin o.o.y.f,

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2^{(\frac{1}{2}v_1)}\Gamma(\frac{1}{2}v_1)}\, x_1^{(\frac{1}{2}v_1-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_1)\,\frac{1}{2^{(\frac{1}{2}v_2)}\Gamma(\frac{1}{2}v_2)}\, x_2^{(\frac{1}{2}v_2-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_2) \qquad (3.20.3.b)$$

dir. x_1 ve x_2 birbirlerinden bağımsız olduklarından,

$$\mu'_r=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \frac{1}{2^{(\frac{1}{2}v_1)}\Gamma(\frac{1}{2}v_1)}\,\frac{1}{2^{(\frac{1}{2}v_2)}\Gamma(\frac{1}{2}v_2)} \int_0^{+\infty} x_1^{(r+\frac{1}{2}v_1-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_1)\,dx_1 \int_0^{+\infty} x_2^{(\frac{1}{2}v_2-r-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_2)\,dx_2 \qquad (3.20.3.c)$$

şeklinde yazılabilir.

$$I_1=\int_0^{+\infty} x_1^{(r+\frac{1}{2}v_1-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_1)\,dx_1 \qquad (3.20.3.d)$$

olsun.

(3.20.3.d)'deki integralde, $z=x_1/2$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$I_1=2^{(\frac{1}{2}v_1+r)}\Gamma(\tfrac{1}{2}v_1+r) \qquad (3.20.3.e)$$

elde edilir.

$$I_2=\int_0^{+\infty} x_2^{(\frac{1}{2}v_2-r-1)}\exp(-\tfrac{1}{2}x_2)\,dx_2 \qquad (3.20.3.f)$$

olsun.

(3.20.3.f)'deki integralde, $z=x_2/2$ değişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$I_2=2^{(\frac{1}{2}v_2+r)}\Gamma(\tfrac{1}{2}v_2-r) \qquad (3.20.3.g)$$

elde edilir.

(3.20.3.c)'de, (3.20.3.e) ve (3.20.3.g) yerine koyulduğunda, sadeleştirmelerden sonra,

$$\mu'_r = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^r \frac{\Gamma(\frac{1}{2}v_1+r)\Gamma(\frac{1}{2}v_2-r)}{\Gamma(\frac{1}{2}v_1)\Gamma(\frac{1}{2}v_2)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.20.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise,

$$E(x) = \frac{v_2}{v_2-2} \qquad v_2 > 2 \qquad (3.20.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.20.3)'de r=1 için,

$$\mu'_1 = \frac{v_2}{v_2-2}$$

dir. O halde,

$$E(x) = \frac{v_2}{v_2-2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.20.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise,

$$Var(x) = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)} \qquad v_2>4 \qquad (3.20.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.20.3)'de r=2 için,

$$\mu'_2 = \frac{v_2^2(v_1+2)}{v_1(v_2-2)(v_2-4)}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{v_2^2(v_1+2)}{v_1(v_2-2)(v_2-4)} \qquad (3.20.5.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.20.5.a) ve (3.20.4) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$$

bulunur.

TEOREM 3.20.4 Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\frac{v_2}{(v_2-2)}\sqrt{\left\{\frac{2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)}\right\}} \qquad v_2>4 \qquad (3.20.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.20.5) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\frac{v_2}{(v_2-2)}\sqrt{\left\{\frac{2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)}\right\}}$$

bulunur.

TEOREM 3.20.5 Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=\frac{2(2v_1+v_2-2)}{(v_2-6)}\sqrt{\left\{\frac{2(v_2-4)}{v_1(v_1+v_2-2)}\right\}} \qquad v_2>6 \qquad (3.20.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.20.3)'de r=3 için,

$$\mu'_3=\frac{v_2^3(v_1+2)(v_1+4)}{v_1^2(v_2-2)(v_2-4)(v_2-6)}$$

dir. O halde,

$$E(x^3)=\frac{v_2^3(v_1+2)(v_1+4)}{v_1^2(v_2-2)(v_2-4)(v_2-6)} \qquad (3.20.7.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.20.7.a), (3.20.5.a) ve (3.20.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_3 = \frac{8v_2^3(v_1+v_2-2)(2v_1+v_2-2)}{v_1^2(v_2-2)^3(v_2-4)(v_2-6)}$$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_3 = \frac{2(v_1+v_2-2)}{(v_2-6)} \sqrt{\left\{\frac{2(v_2-4)}{v_1(v_1+v_2-2)}\right\}} \qquad v2 > 6$$

bulunur.

TEOREM 3.20.6 Sürekli tipteki bir x r.d, F dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3 + \frac{12[(v_2-2)^2(v_2-4)+v_1(v_1+v_2-2)(5v_2-22)]}{v_1(v_2-6)(v_2-8)(v_1+v_2-2)} \qquad v_2>8 \quad (3.20.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.20.3)'de r=4 için,

$$\mu'_4 = \frac{v_2^4(v_1+2)(v_1+4)(v_1+6)}{v_1^3(v_2-2)(v_2-4)(v_2-6)(v_2-8)}$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \frac{v_2^4(v_1+2)(v_1+4)(v_1+6)}{v_1^3(v_2-2)(v_2-4)(v_2-6)(v_2-8)} \qquad (3.20.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.20.8.a), (3.20.7.a), (2.20.5.a) ve (3.20.4) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{12v_2^4}{v_1^3(v_2-2)^4(v_2-4)(v_2-6)(v_2-8)}$$

$$\{v_1^3v_2+2v_1^2v_2^2+16v_1^2v_2+v_1v_2^3+10v_1v_2^2-52v_1v_2+10v_1^3$$
$$-40v_1^2+56v_1+4v_2^3-24v_2^2+48v_2-32\}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4=3+\frac{12[(v_2-2)^2(v_2-4)+v_1(v_1+v_2-2)(5v_2-22)]}{v_1(v_2-6)(v_2-8)(v_1+v_2-2)} \qquad v_2>8$$

bulunur.

TEOREM 3.20.7 F dağılımının modu ,

$$x=\frac{v_2(v_1-2)}{v_1(v_2+2)} \qquad v_1>2 \qquad (3.20.9)$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.20.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, $x=\frac{v_2(v_1-2)}{v_1(v_2+2)}$ bulunur. $x=\frac{v_2(v_1-2)}{v_1(v_2+2)}$ değeri için (3.20.1)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, F dağılımının modu,

$$x=\frac{v_2(v_1-2)}{v_1(v_2+2)} \qquad v_1>2$$

bulunur.

3.20.1 F Dağılımın Uygulama Alanları

İstatistiksel işlemlerde, F dağılımının en yaygın uygulaması, varyans analizi ile ilgili testlerdedir. Bu testlerin çoğu, Normal kalanlı (residu) bir genel lineer modelin parametreleri hakkında, bir genel H_0 hipotezin likelihood oranının, H_0 geçerli olduğu durumunda, F dağılımına sahip bir istatistik cinsinden ifade edilebilir. (Kolodziejczyk, 1935)

İki Normal kitlenin, varyansının eşitliğinin testi, F dağılımının bir uygulamasıdır.

F dağılımı, testlerin güç fonksiyonlarının hesaplanmasında ve normal kitlelerin varyanslarının oranları için güven limitlerinin hesaplanmasında kullanılır.

İki normal kitle alalım. Birinci kitle, $x_{11},x_{12},x_{13},...,x_{1n_1}$; μ_1 ortalamalı ve σ_1 standart sapmalı Normal dağılımdan alınmış n_1 hacimlik rastgele bir örneklem ve ikinci kitle, $x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n_2}$; μ_2 ortalamalı ve σ_2 standart sapmalı Normal dağılımdan alınmış n_2 hacimlik diğer bir rastgele örneklem olsun.

Bu iki normal kitleyi sırasıyla, $N_{1i}:\mu_1,\sigma_1$; $i=1,2,3,\ldots,n_1$ ve $N_{2j}:\mu_2,\sigma_2$; $j=1,2,3,\ldots,n_2$ ile gösterelim.

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{N_{1i}:\mu_1,\sigma_1}{n_1} \quad , \quad \bar{x}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{N_{2j}:\mu_2,\sigma_2}{n_2}$$

ve

$$S^2{}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{[N_{1i}:\mu_1,\sigma_1-\bar{x}_1]^2}{n_1} \quad , \quad S^2{}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{[N_{2j}:\mu_2,\sigma_2-\bar{x}_2]^2}{n_2}$$

ise,

$$F:n_1,n_2 = \left[\frac{n_1 S^2{}_1}{(n_1-1)\sigma^2{}_1} \Big/ \frac{n_2 S^2{}_2}{(n_2-1)\sigma^2{}_2} \right]$$

dir. (Hastings ve Peacock, 1975 s:67)

3.20.2 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:139-140)'da verilen bağıntılar.

1) Sürekli tipteki bir X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F dağılımına sahip ve $v_2 \to +\infty$ ise, $Y=v_1X$'in dağılımı $v=v_1$ parametreli Kikare dağılımına sahiptir.

2) Sürekli tipteki bir X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F dağılımına sahip ise, $Y=v_1X/(v_2+v_1X)$, $p=v_2/2$ ve $q=v_1/2$ parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.

3) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d 'ler ve herbiri sırasıyla, v_1 ve v_2 parametreli Kikare dağılıma sahip iseler, $Y=(X_1/v_1)/(X_2/v_2)$, v_1 ve v_2 parametreli F dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F dağılımına sahip ise, $Y=1/X$, v_2 ve v_1 parametreli F dağılımına sahiptir.

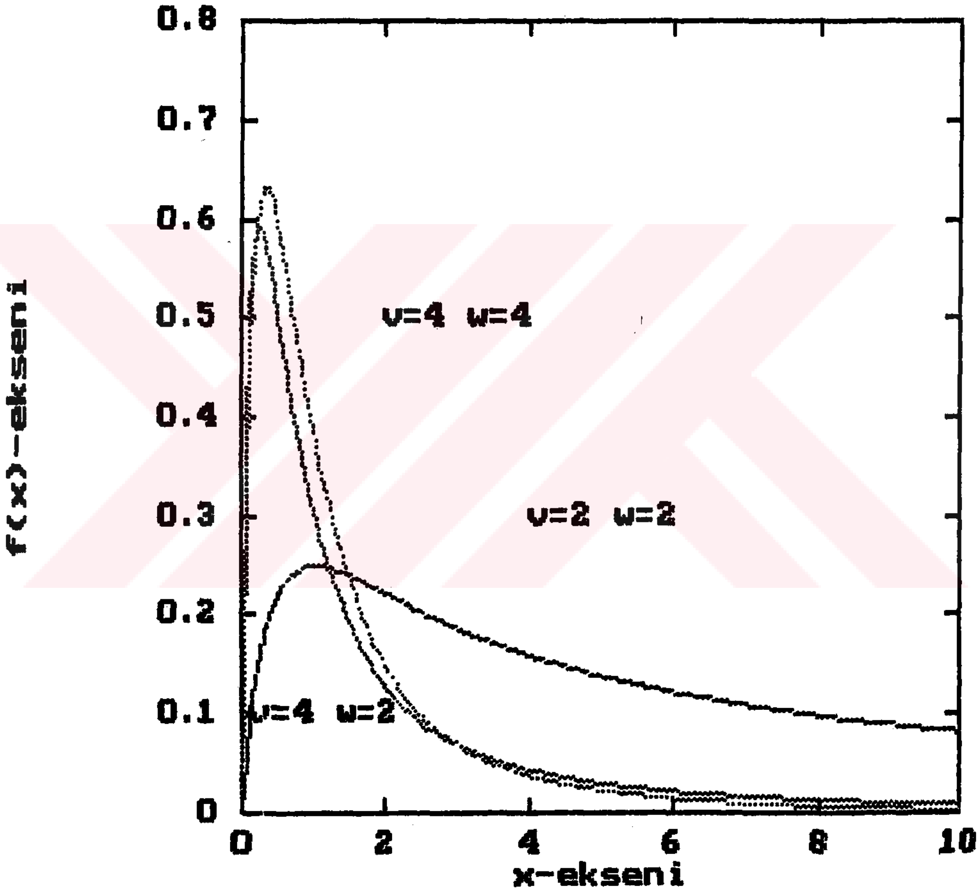
5) Sürekli tipteki bir X r.d, $v_1=v_2=v$ parametreli F dağılımına sahip ise, $Y=\sqrt{v}(\sqrt{X}-1/\sqrt{X})/2$, v parametreli T dağılımına sahiptir.

6) Sürekli tipteki bir X r.d, v parametreli T dağılımına sahip ise, $Y=X^2$, $v_1=1$ ve $v_2=v$ parametreli F dağılımına sahiptir.

7) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart, Normal dağılıma sahip iseler, $Y=X_1^2/X_2^2$, $v_1=1$ ve $v_2=1$ parametreli F dağılımına sahiptir.

8) Sürekli tipteki bir X r.d, Standart Cauchy dağılımına sahip ise, $Y=X^2$, $v_1=1$ ve $v_2=v$ parametreli F dağılımına sahiptir.

9) Sürekli tipteki bir X r.d, v_1 ve v_2 parametreli F dağılımına sahip ise, $Y=[1+(v_1/v_2)X]^{-1}$, $p=v_2/2$ ve $q=v_1/2$ parametreli Standart Beta dağılımına sahiptir.



Şekil 54. F Dağılımının v=4 w=4 v=2 w=2 v=4 w=2 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

3.21 T Dağılımı

X_1, Standart Normal dağılıma, X_2 v, parametreli Kikare dağılımına sahip ve, X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız iseler,

$$Y=\frac{X_1}{\sqrt{(X_2/v)}} \qquad (3.21.1)$$

v parametreli T dağılımına sahiptir.

TANIM 3.21.1 Sürekli tipteki bir x r.d'nin o.y.f,

$$f(x:v)=\frac{[(1+x^2/v)^{-\frac{1}{2}(v+1)}]}{\sqrt{v}B(1/2,v/2)} \qquad (3.21.2)$$

$-\infty < x < +\infty \quad v=1,2,3,...$

ise x r.d'ne T dağılıma sahiptir denir.

T dağılımını, T(x:v) veya $T_x(v)$ ve ilgili değişkeni, T:v ile göstereceğiz. T dağılımının v parametresi, dağılımın şekil parametresidir. Bu parametreye, serbestlik derecesi de denir.

T dağılımına bazen Student's t-dağılımı da denir.

TEOREM 3.21.1 T dağılımının d.f,

$$F(x:v)=1-I_{v/(v+x^2)}(v/2,1/2) \qquad (3.21.3)$$

dir.

özel olarak, (3.21.2)'de v=1 alınırsa,

$$F(x:v)=(1/2)+\tan^{-1}x \qquad (3.21.3.a)$$

dır.

İSPAT: (1.1.5)'deki eşitliği kullanarak,

$$F(x:v)=\frac{1}{\sqrt{v}B(1/2,v/2)}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{v}{v+u^2}\right)^{(v+1)/2}du \qquad (3.21.3.b)$$

dur.

$$F(x:v)=\frac{1}{2}+\frac{1}{vB(1/2,v/2)}\int_{0}^{x}\left(\frac{v}{v+u^2}\right)^{(v+1)/2}du \qquad (3.21.3.c)$$

olur.

(3.21.3.c)'deki integralde, $y=v/(v+u^2)$ degişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında,

$$F(x:v)=1-\frac{1}{B(v/2,1/2)}\int_0^{v/(v+x^2)} y^{(v/2)-1}(1-y)^{(1/2)-1}dy \qquad (3.21.3.d)$$

$$F(x:v)=1-I_{v/(v+x^2)}(v/2,1/2) \qquad (3.21.3.e)$$

bulunur.

(3.21.3.e)'deki $I_{v/(v+x^2)}(v/2,1/2)$'nin değeri, (3.14.3.b)'deki tamamlanmamış Beta fonksiyonunun değer tablosundan bulunabilir.

(3.21.3.a)'yı ispatlayalım. (3.21.2)'de özel olarak v=1 alınırsa,

$$F(x:v)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+u^2}du$$

dur. Yukarıdaki integral hesaplandığında,

$F(x:v)=(1/2)-\tan^{-1}x$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.2</u> Sürekli tipteki bir x r.d T dağılımına sahip ise, merkez yada sıfır etrafındaki r inci momenti,

$$\mu'_r=\begin{cases} 0 & r \text{ tek ve } v<r \text{ ise,} \\ v^{r/2}\dfrac{B((r+1)/2,(v-1)/2)}{B(1/2,v/2)} & r \text{ çift ve } v>r \text{ ise,} \end{cases} \qquad (3.21.4)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'daki eşitliği kullanarak,

$$\mu'_r=\frac{1}{\sqrt{v}B(1/2,v/2)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\left(\frac{v}{v+x^2}\right)^{(v+1)/2}dx \qquad (3.21.4.a)$$

dir.

(3.21.4.a)'daki integralde, $y=v/(v+x^2)$ degişken değiştirme yapılıp integral hesaplandığında, birtakım işlemlerden sonra,

$$\mu'_r = \begin{cases} 0, & r \text{ tek ve } v<r \text{ ise} \\ v^{r/2} \dfrac{B((r+1)/2,(v-1)/2)}{B(1/2,v/2)}, & r \text{ çift ve } v>r \text{ ise} \end{cases}$$

veya açık şekilde ifade edersek,

$$\mu'_r = \begin{cases} 0, & r \text{ tek ve } v<r \text{ ise} \\ v^{r/2} \dfrac{(r-1)(r-3)(r-5)(r-7)\ldots531}{(v-r)(v-r+2)(v-r+4)\ldots(v-2)}, & r \text{ çift ve } v>r \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

Burada dikkat edilecek husus, eğer r tek ise, $\mu'_r=0$ olduğudur.

<u>TEOREM 3.21.3</u> Sürekli tipteki bir x r.d, T dağılımına sahip ise,

$$E(x)= 0 \qquad (3.21.5)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x)=\mu'_1$ dir. (3.21.4)'de r=1 için,

$\mu'_1= 0$

dır. O halde,

$E(x)= 0$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.4</u> Sürekli tipteki bir x r.d, T dağılımına sahip ise,

$$Var(x)= \frac{v}{v-2} \qquad v > 2 \qquad (3.21.6)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^2)=\mu'_2$ dir. (3.21.4)'de r=2 için,

$$\mu'_2= \frac{v}{v-2}$$

dir. O halde,

$$E(x^2)=\frac{v}{v-2} \qquad (3.21.6.a)$$

elde edilir.

(3.1.6.a)'da, (3.21.6.a) ve (3.21.5) yerine koyulduğunda,

$$Var(x)=\frac{v}{v-2}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.5</u> Sürekli tipteki bir x r.d, T dağılımına sahip ise,

$$SS(x)=\sqrt{\left(\frac{v}{v-2}\right)} \qquad v>2 \qquad (3.21.7)$$

dir.

İSPAT: (1.5.6)'da, (3.21.6) yerine koyulduğunda,

$$SS(x)=\sqrt{\left(\frac{v}{v-2}\right)}$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.6</u> Sürekli tipteki bir x r.d, T dağılımına sahip ise, α_3 ile gösterilen çarpıklığı,

$$\alpha_3=0 \qquad (3.21.8)$$

dir.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^3)=\mu'_3$ dir. (3.21.4)'de r=3 için,

$\mu'_3=0$

dır. O halde,

$$E(x^3)=0 \qquad (3.21.8.a)$$

elde edilir.

(3.1.8.a)'da, (3.21.8.a), (3.21.6.a) ve (3.21.5) yerine koyulduğunda,

$\mu_3=0$

elde edilir. (1.5.7)'deki eşitlik kullanılarak,

$\alpha_3=0$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.7</u> Sürekli tipteki bir x r.d, T dağılımına sahip ise, α_4 ile gösterilen sivriliği,

$$\alpha_4 = 3 + \frac{6}{v-4} \qquad v > 4 \tag{3.21.9}$$

dır.

İSPAT: (1.5.1.a)'dan $E(x^4)=\mu'_4$ dir. (3.21.4)'de r=4 için,

$$\mu'_4 = \frac{3v^2}{(v-2)(v-4)}$$

dir. O halde,

$$E(x^4) = \frac{3v^2}{(v-2)(v-4)} \tag{3.21.9.a}$$

elde edilir.

(3.1.9.a)'da, (3.21.9.a), (3.21.8.a), (2.21.6.a) ve (3.21.5) yerine koyulduğunda,

$$\mu_4 = \frac{3v^2}{(v-2)(v-4)}$$

elde edilir. (1.5.8)'deki eşitlik kullanılarak,

$$\alpha_4 = 3 + \frac{6}{(v-4)} \qquad v > 4$$

bulunur.

<u>TEOREM 3.21.8</u> T dağılımının modu ,

$$x = 0 \tag{3.21.10}$$

noktasındadır.

İSPAT: (3.21.1)'deki o.y.f'nun, x'e göre türevini alıp, sıfıra eşitlendiğinde, x=0 bulunur. x=0 değeri için (3.21.2)'deki o.y.f maksimum değerini alır. O halde, T dağılımının modu,

x=0

bulunur.

3.21.1 T Dağılımın Uygulama Alanları

T dağılımının en çok uygulandığı alan, Normal dağılımların beklenen değerlerine bağlı olarak güven aralıklarının ve testlerinin oluşturulmasıdır.

Varyans analizi testlerinde, kareler toplamının biri, 1 serbestlik derecesine sahip olduğunda uygun H_0 hipotezinin dağılımı, 1 ve v serbestlik dereceli F dağılımıdır. Bu dağılım da, (3.21.1)'in dağılımıyla aynıdır. (Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:134)

μ ortalama ve σ standart sapmalı n normal değişkeni ele alalım. $N_i:\mu,\sigma$; $i=1,2,3,...,n$

$$\overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i:\mu_i,\sigma_i}{n}$$

ve

$$S^2{}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{[N_i:\mu_i,\sigma_i-\overline{x}_i]^2}{n}$$

ise,

$$T(n-1) = \frac{\overline{x}-\mu}{[\ S/\sqrt{(n-1)}\ ]}$$

dir. (Hasting ve Peacock, 1975 s:122-123)

İki normal kitle alalım. Birinci kitle, $x_{11},x_{12},x_{13},...,x_{1n1}$; μ_1 ortalamalı ve σ_1 standart sapmalı Normal dağılımdan alınmış n_1 hacimlik rastgele bir örneklem ve ikinci kitle, $x_{21},x_{22},x_{23},...,x_{2n2}$; μ_2 ortalamalı ve σ_2 standart sapmalı Normal dağılımdan alınmış n_2 hacimlik diğer bir rastgele örneklem olsun.

Bu iki normal kitleyi sırasıyla, $N_{1i}:\mu_1,\sigma_1$; $i=1,2,3,...,n_1$ ve $N_{2j}:\mu_2,\sigma_2$; $j=1,2,3,...,n_2$ ile gösterelim.

$$\overline{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{N_{1i}:\mu_1,\sigma_1}{n_1} , \quad \overline{x}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{N_{2j}:\mu_2,\sigma_2}{n_2}$$

ve

$$S^2_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{[N_{1i}:\mu_1,\sigma_1-\overline{X}_1]^2}{n_1}, \quad S^2_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{[N_{2j}:\mu_2,\sigma_2-\overline{X}_2]^2}{n_2}$$

ise,

$$T(n_1+n_2-2) = \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{n_1S^2_1+n_2S^2_2}{n_1+n_2-2}\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

dir. (Hastings ve Peacock, 1975 s:67)

3.21.2 Diğer Dağılımlarla İlişkileri

(Patil, Boswell, Ratnaparkhi, Rao 1984, s:134-135)'de verilen bağıntılar.

1) $v \to +\infty$, v parametreli T dağılımı, Standart Normal dağılıma yakınsar

2) Standart Cauchy dağılımı, v parametreli T dağılımının, $v=1$ özel halidir.

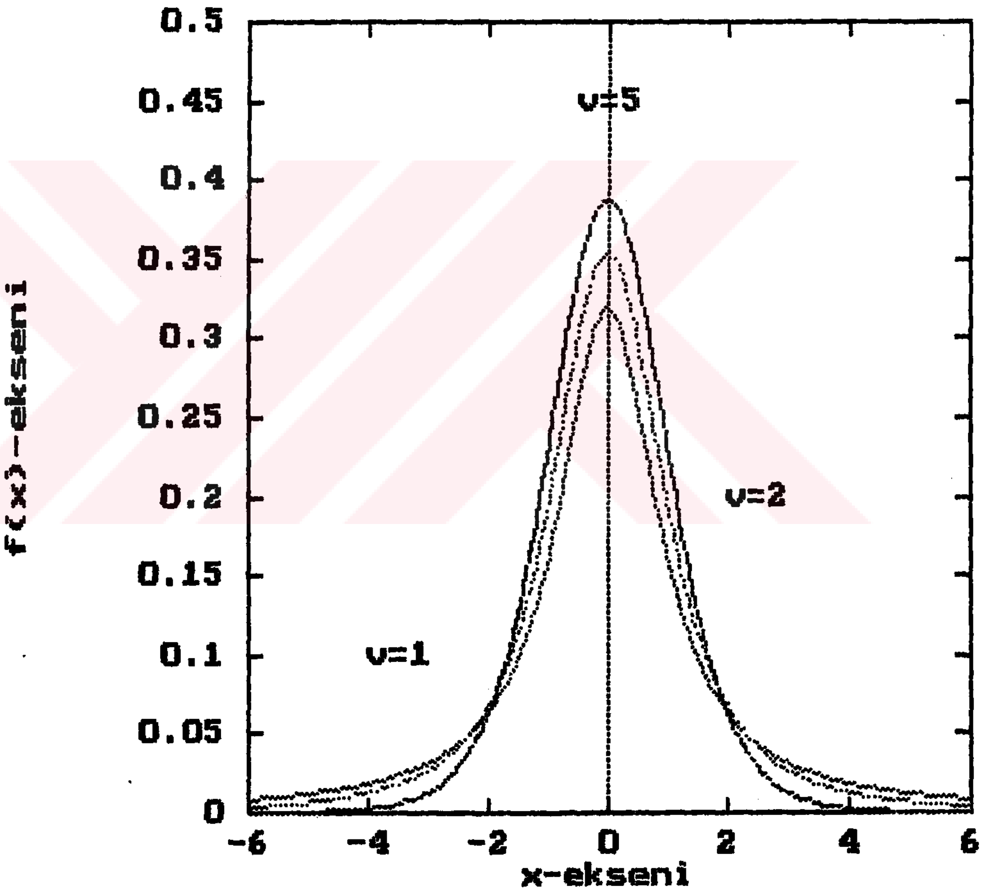
3) Sürekli tipteki bir X r.d, v parametreli T dağılımına sahip ise, $Y=X^2$, $v_1=1$ ve $v_2=v$ parametreli F dağılımına sahiptir.

4) Sürekli tipteki bir X r.d, $v_1=v_2=v$ parametreli F dağılımına sahip ise, $Y=\sqrt{v}(\sqrt{X}-1/\sqrt{X})/2$, v parametreli T dağılımına sahiptir.

5) X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız r.d'ler ve herbiri Standart Normal dağılıma sahip iseler, $Y=X_1/X_2$, $v=1$ parametreli T dağılımına sahiptir.

6) X_1 Standart Normal dağılıma, X_2 v parametreli Kikare dağılımına sahip ve, X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız iseler,

$$Y=\frac{X_1}{\sqrt{(X_2/v)}},$$ v parametreli T dağılımına sahiptir.



Şekil 55. T Dağılımının v=1 v=2 v=5 parametre değerleri için o.y.f'nun grafikleri.

ÖZET

Günümüze kadar insanoğlu değişik alanlarda, çeşitli tip problemlerle karşılaşmış, hala da karşılaşmaktadır. Karşılaşılan bu problemlere paralel olarak çözümler aranmış, yeni teknik ve metodlar geliştirilmiştir. İnsanoğlu sadece karşılaştıkları değil, karşılaşabilecekleri problemleri de önceden tahmin etme ve bu problemlerle karşılaşmadan önce gerekli planlama yoluna gitmiştir. Şu bir gerçektir ki, en iyi planlama istatistik kullanılarak yapılan planlamadır.

Her alanda, karşılaşılan yada karşılaşılabilecek problemleri en iyi şekilde karakterize edebilen modeller geliştirilmiş ve bu modellerin tüm özellikleri açıklanmaya çalışılmıştır. Bu anlamda dağılım modelleri, insan yaşamında çok önemli bir yere sahiptir. Günümüzde değişik alanlarda karşılaşılan yada karşılaşılabilinecek problemler için dağılım modelleri kullanılmaktadır. Bu alanlara örnek olarak, biyoloji ve tıp, mühendislik, genel teori, dilbilim, kalite kontrol, fiziksel bilimler, güvenirlik, sosyal bilimler, kazalar ve ölümler, askeri alanlar verilebilir.

Bu alanlarda bilinen tek değişkenli olarak, yaklaşık 300 değişik dağılım modeli vardır. Biz bu çalışmada, bu dağılım modellerinden çekirdek dağılımlar olarak nitelendirilebilecek 168 modelden 58 dağılım modelini ele aldık ve özelliklerini inceledik.

SUMMARY

Human beings faced and still facing different problems in many areas up today. Parallel to these problems, new technics and metods are developed for the solution of these problems. Human beings deal with not only the faced problems, but may face problems in the future. Humans want to predict the problems which they face in the future and they make some plans for that kinds of problems. The best way of making the best plan is to use statistics.

For the problems that faced or may face in the future in many areas, new models which characterizes problems well are developed and for these models all properties are studied. In this manner distribution models have an important place in human life. Today in different areas such as, biology and medicine, engineering, general theory, linguistcs, quality control, physical sciences, reliability, social sciences, accident, absenteeism, ballistics, floods, many distribution models are used.

There are approximately 300 different univariate distribution models. In this work we studied the properties of 58 distribution models out of a class of distribution models having 168 models.

KAYNAKLAR

[01] AHRENS, L.H.,(1954-7). The Lognormal distributin of the elements. Geochimica et Cosmochimica Acta, (1)5, S.49-73, (2)6, S.121-131, (3)11, S.205-212.

[02] AITCHISON, J. ve BROWN, J.A.C., (1957). The lognormal distribution. Cambridge University Press. Cambridge.

[03] AKDENİZ, F., (1984). Olasılık ve İstatistik, No:138, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, Ankara. (519)S.

[04] ALLAN, R.R, (1966). Extension of the Binomial model of traffic flow to the continuous case. Proceedings of the 3rd Conference of the Australian Road Research Board, 3, S.276-316.

[05] ARBOUS, A.G. ve KERRICH, J.E., (1951). Accident statistics and concept of accident proneness. Biometrics, 7, S.340-432.

[06] AZİZ, P.M., (1955). Application of the statistical theory of extreme values to the analysis of maxsimum pit depth data for aluminum. Corrusion, 12, S.495-506.

[07] BENNET, B.M. ve BIRCH, B., (1964). Sampling inspection tables for comparison of two groups using the Negatif Binomial model. Trabajos de Estadistica, 15, S.1-12.

[08] BERKSON, J., (1951). Why I prefer logits to profits. Biometrics, 7, S.327-339.

[09] CHAMPERNOWNE, D.G., (1952). The Graduation of income distributions. Econometrica, 20, S.591-615.

[10] CHATFIELD, C.E., A.S.C. ve GOODHARDT, G.J., (1966). Progress on a simplified model of stationary purchashing behaviour. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 129, S.317-360 (discussion 360-367).

[11] CHAPMAN, D.G., (1952). Invers, multiple and sequential sample censuses. Biometrics, 8, S.286-306.

[12] CHAYES, F., (1954). The LogNormal distributin of the elements: a discussion, Geochimica et Cosmochimica Acta, 6, S.119-120.

[13] CHEW, V., (1964). Application of the Negatif Binomial distribution with probability of misclassification. Virginia Journal of Science (New series), 15, S.34-40.

[14] CONSUL, P.C., (1990). On some properties and applications of quasi-binomial distribution. Communication in statistics. Theory and methods, 19(2), S.477-504.

[15] CONSUL, P.C., (1990). Geeta distribution and its properties. Comminication in statistics. Theory and methods, 19(8), S.3051-3068.

[16] CONSUL, P.C., (1990). Two stochastic models for the Geeta distribution. Communication in statistics. Theory and methods, 19(10), S.3699-3706.

[17] CONSUL, P.C., (1974). A simple urn model dependent upon predetermined strategy. Sankhya Series B, 36, S.391-399.

[18] CONSUL, P.C., ve MITTAL, S.P., (1975). A new urn model with predetermined strategy. Biometrical Journal, 17(2), S.67-75.

[19] CROW, E.L. ve BARDWELL, G.E., (1963). Estimation of the parameters of the Hyper-Poisson distributions. In classical and contagious distributions Ed. G.P. PATIL, P. PRESS. Oxford.

[20] ÇINLAR, E., (1975). Introduction to Stochastic Processes. Prentice-Hall Inc, USA. (402)S.

[21] DAVIS, D.J., (1952). An analysis of some failure data. J. Am. Statist. Assoc, 47, S.113.

[22] DRENICK, R.F., (1960). The failure law of complex equipment. J. Soc. Ind. Appl. Math, 8, S.680.

[23] ELDREDGE, G.G., (1957). Analysis of corrosion pitting by extreme value statistics and its application to oil well tubing caliper surveys. Corrosion, 13, S.51-76.

[24] EPSTEIN, B., (1947). The mathematical description of certain breakage mechanisms leading to the Logaritmic-Normal distribution. J. Franklin Inst, S.244,471.

[25] FREEMAN, H., (1963). Introduction to statistical inference. Addison-Wesley publishing Co., Reading. Massachusetts.

[26] FAMOYE, F. ve CONSUL, P.C., (1988). A stochastic urn model for the generalized Negatif Binomial distribution. Statistics, 20(4), S.607-613.

[27] FERRELL, E.B., (1958). Control charts for LogNormal universes. Industrial Quality Control, 15, No.2, S.4-6.

[28] FISHER, R.A., (1922). On the interpretation of Chi-square from contigency tables and calculation of probabilities. Journal of Royal Statistical Society, Series A, 85, S.87-94.

[29] FURRY, W.H., (1939). On the fluctuation phenomena in the passage of high energy electrons through lead. Physical Review, 52, S.569-581.

[30] GREENWOOD, M. ve YULE, G.U., (1920). An enquiry into the nature of frequency distributions of multiple happenings with particular reference to the occurence of multiple attacks of disease or repeated accidents. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 83, S.255-279.

[31] GUPTA, S.S. ve SOBEL, M., (1958). On the distribution of a statistic s based on ordered uniform chance variables. Annals of mathematical statistics, 29, S.274-281.

[32] HASTINGS, N.A.J. ve PEACOCK, J.B., (1975). Statistical distributions. Butterworths, London. (130)S.

[33] HAHN, G.J. ve SHAPIRO, S.S. (1967). Statistical models in engineering. Research and Development Center, General Electric Company. John Wiley and Sons Inc. New York, USA. (355)S.

[34] HALD, A. (1952). Statistical theory with engineering applications. John Wiley and Sons Inc. NewYork.

[35] JENKINSON, A.F., (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 81, S.158-171.

[36] JOHNSON, N.L. ve KOTZ, S., (1977). Urn models and their applications. John Wiley and Sons, Inc. New York.

[37] JOHNSON, N.L. ve LEONE, F.C., (1964). Statistics and experimental design in engineering and the physical science. Volume I. John Wiley and Sons, Inc. NewYork.

[38] JOHNSON, N.L. ve KOTZ, S., (1969). Discreate distributions. Houghton mifflin Company. Boston. (327)S.

[39] JOHNSON, N.L. ve KOTZ, S., (1970). Continuous Univariate distributions-1. John Wiley and Sons, Inc. New York, USA. (299)S.

[40] JOHNSON, N.L. ve KOTZ, S., (1970). Continuous Univariate distributions-2. John Wiley and Sons, Inc. New York, USA. (305)S.

[41] KAO, J.H.K., (1960). A summary of some new techniques on failure analysis. Proc. 6th Nat. Symp. Reliability and Quality Control in Electronics, S.190-201.

[42] KATTI, S.K. ve GURLAND, J., (1962). The Poisson Pascal distribution. Biometrics, 17, S.527-538.

[43] KENDAL, D.G., (1949). Stochastic processes and population growth. Journal of the Royal Statistical society, Series B, 11, S.230-264.

[44] KEYNES, J.M., (1911). The principle averages and the laws of error which lead to them. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 74, S.322-328.

[45] KOLODZIEJCZYK, S., (1935). On an important class of statistical hypo theses. Biometrika, 27, S.161-190.

[46] LEIBLEIN, J., ve ZELEN, M., (1956). Statistical investigation of the fatique life of Deep-Groove Ball Bearings. J. Res. Nat. Bur. st, 57, S.273.

[47] MIDDLETON, D., (1960). An introduction to statistical communication theory. McGraw-Hill Book Co. New York, USA.

[48] MILLER, R.L., ve GOLDBERG, E.D., (1955). The Normal distributin in geochemistry. Geochimica et Cosmochimica Acta, 8, S.53-62.

[49] MORRISON, J., (1958). The LogNormal distribution in quality control. Applied Statistics, 7, S.160-172.

[50] PARETO, V., (1897). Cours d' Economie Politique. Lausanne ana Paris: Rouge and Cie

[51] PATIL, G.P., BOSWELL, M.T, JOSHI, S.W., RATNAPARKHI, M.V., RAO, C.R., (1984). Dictionary of discreate distributions. International co-operative publishing house. Maryland. (183)S.

[52] PATIL, G.P., BOSWELL, M.T, JOSHI, S.W., RATNAPARKHI, M.V., RAO, C.R., (1984). Dictionary of Continuous Univariate models. International co-operative publishing house. Maryland. (241)S.

[53] PEARSON, K. (Ed.), (1922). Tables of the Incomplete Γ-function. H.M. Stationary Office, London. Cambridge University Press 1934.

[54] PEARSON, K., (1948). Tables of the Incomplete β-function, Biometrika Office, University Collage, London. Cambridge University Press 1934.

[55] PERRY, J.N., (1962). Semiconductors Burn-in and Weibull Statistics. Semiconductor Reliability. Engineering Publishers, Vol.2, S.80-90. Elizabeth, New Jersey, USA.

[56] PETERSEN, G.G.J., (1896). The yearly immigration of young plaice into the Linfjord from the german sea, etc. Report of the Danish Biological Station, 6, S.1-48.

[57] PIGOU, A.C., (1932). The economics of Welfare. The Mcmillan Conpany. London.

[58] PRESS, H., (1949). The application of the statistical theory of extreme value to gust-load problems. National Advisory Committee. Aeronautics. Technical note. No.1926.

[59] PROCASSINI, A., ve ROMANO, A., (1962). Weibull distribution function in Reliability analysis. Semiconductor Reliability. Engineering Publishers, Vol.2, S.29-34. Elizabeth, New Jersey, USA.

[60] PROHOROV, Y.V., (1963). On the LogNormal distribution in geo-chemistry. Teoriya Veroyatnostei i ee. Primeneniya, 10, S.184-187. (In Russian)

[61] ROHN, W.B., 1959. Reliability prediction for complex systems. Proceedings of the 5th National Symposium on Reliability and Quality Control in Electronics, S.381-388.

[62] ROSS, A.S.C., (1950). Philological probability problems. Journal of the Royal statistical society, Series B, 12, S.19-41.

[63] ROUSSAS, G.G., (1973) A first course in mathematical statistics. Addison-Wesley publishing company. Philippines. (505)S.

[64] SICHEL, H.S., (1951). The estimation of the parameters of a Negatif Binomial distribution with special reference to psychological data. Psychometrica, 16, S.107-127.

[65] SPIEGEL, M.R., (1975). Probability and statistics. McGraw-Hill Book Company, USA. (300)S.

[66] STAFF OF COMPUTATION LABORATORY, 1955. Tables of the cumulative Binomial probability distribution. Harvard University press. Cambridge, Massachusetts.

[67] THEBAULT, J.Y., (1961). Distribution LogNormale de certains caracter es de quelques phenomenes geologiques et ses applications. Revue de statistique pupliquee, 9, No.2, S.37-87.

[68] THOM, H.C.S., (1954). Frequency of maximum wind speeds. Proceedings of the American Society of Civil engineers. 80, S.104-114.

[69] TWEEDIE, M.C.K., (1947). Functions of a statistical variate with given means with special reference to Laplacian distribution. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 43, S.41-49.

[70] TWEEDIE, M.C.K., (1957). Statistical properties of Invers Gaussian distributions. I. Annals of Mathematical Statistics, 28, S.362-377.

[71] WASAN, M.T., (1968). First passage time distribution of Brownian motion. Monograph. Department of mathematics. Queen's University. Kingston, Ontario.

[72] WEIBULL, W., (1951). A statistical distribution function of wide applicability. J. Appl. Mech, 18, S.293.

[73] WILSON, E.B. ve HILFERTY, M.M, (1931). The distribution of Chi-square. Proceedings of the National Academy of Sciences, 17, S.684-688. Washington, USA.

[74] VELZ, C.J., (1947). Factors influencing self-purification and their relation to pollution abatement. Sewage works Journal, 19, S.629-644.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince beni yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen ve her türlü olanağı sağlayan sayın hocam ve Bölüm Başkanımız **Prof.Dr.Fikri AKDENİZ**'e teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

26 Haziran 1965 tarihinde, Adana ili Bahçe ilçesi Savranlı köyünde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi sırasıyla, Adana Ahmet Karabucak İlkokulu, Adana Atatürk Ortaokulu ve Adana Borsa Lisesi'nde tamamladım. 1983 yılında, Orta Doğu Teknik Üniversitesi'de yüksek öğrenimime başladım. İlk yıl hazırlık sınıfına devam ettim. Ocak 1989'da aynı üniversitenin, Fen-edebiyat Fakültesi Matematik bölümü Uygulamalı Matematik dalından mezun oldum. 26 Temmuz 1989'da, Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Bilgisayar Uzmanı olarak göreve başladım. Halen aynı görevi sürdürmekteyim.