T. C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAMİLTONİYEN KOZMOLOJİ'NİN TEMELLERİ WHEELER – DeWITT DENKLEMİ VE KUVANTUM KOZMOLOJİ'DEKİ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Metin TOPRAK

Fizik Anabilim Dalı
(Matematiksel Fizik Programı)

Danışman : Doç. Dr. Haşim MUTUŞ

EYLÜL — 1994

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunu veren ve çalışmalarım süresince sürekli destekleyen tez danışman hocam Sayın Doç.Dr.Haşim Mutuş'a içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca çalışmam süresince her konuda desteklerini gördüğüm, Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine ve çalışma arkadaşlarıma, bilgisayar ve yazıcılarını kullanmama izin veren Astronomi Bölümü Başkanı Prof.Dr.Salih Karaali'ye ve de bizlere sağlamış olduğu huzurlu bir çalışma ortamından dolayı Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı ve aynı zamanda da Fizik Bölümü Başkanı Prof.Dr.Şehsuvar Zebitay'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZ

HAMİLTONİYEN KOZMOLOJİ'NİN TEMELLERİ, WHEELER-DeWITT DENKLEMİ ve KUVANTUM KOZMOLOJİ'DEKİ UYGULAMALARI

Kuvantum Kozmolojinin motivasyonları, Klasik Rölativist Kozmolojinin bazı problemlerinin kısa bir özeti ile ortaya konuldu. İki güçlü kuvantizasyon yöntemi olan ADM ne Yol İntegrali formalizmleri özetlendi ve Wheeler-DeWitt denklemi çıkartıldı. Kozmolojiye uygulamaları tasvir edildi ve tartışıldı.

ABSTRACT

FUNDAMENTALS of HAMILTONIAN COSMOLOGY, WHEELER-DeWITT EQUATION and THEIR APPLICATIONS in QUANTUM COSMOLOGY

Motivations for Quantum Cosmology are outlined with a brief review of some problems of the Classical Relativistic Cosmology. Two powerfull methods of quantisation, the ADM and Path Integral formalisms are summarized and the Wheeler-DeWitt equation is derived. Their applications to cosmology are described and discussed.

I. GİRİŞ

1.1 Kuvantum Kozmoloji

Kuvantum Kozmoloji fiziğin son 20-25 yıl içinde hızla gelişen çok ilgi çekici yeni bir alanını oluşturmaktadır. Kuvantum Kozmolojiden, günümüzde şu pek çok ilgi alanı anlaşılmaktadır: eğri uzay zamanda kuvantum alan teorisi, kuvvetli gravitasyon alanlarında parçacık yaratılması, Kaluza-Klein teorileri, süpergravite teorileri, süpersicim teorileri, Evrenin kuvantumsal olarak yaratılması, başlangıç şartları, Evrenin dalga fonksiyonu, buharlaşıp yok olmuş primordiyal karaçukurlar... Genel olarak söylemek gerekirse, Kuvantum Kozmoloji, kuvantum mekaniksel görüşlerin kozmoloji alanında yer alması demektir. Aslında, ilk bakışta, Kuvantum Kozmoloji şeklinde bir adlandırma çok şaşırtıcı, hatta bilmece gibi gelebilir. Zira, bilindiği gibi Kuvantum Teorisi mikroskopik sistemleri ilgilendirmekte, buna karşılık kozmoloji ise Evrenin büyük ölçekteki yapısını konu almaktadır. Şimdi, acaba nasıl oluyor da bu iki uç konu tutarlı ve anlamlı bir şekilde bağdaşabilmektedirler ? Bu iki farklı disiplinin buluşma noktasına en iyi örneği tekillik (singülarite) denilen kavram oluşturmaktadır. Bilindiği üzere Einstein'ın Genel Rölativite Teorisi (GRT) ile tasvir edilen klasik gravitasyon, başlangıcında Büyük Patlama olan kozmolojiler öngörmektedir. Öte yandan, Büyük Birleştirme Teorileri de bizi Evrenin 10^{-36}s gibi ilk anlarına gitmeye sevk etmektedir. Şimdi, eğer Evrenin fiziksel sürecini geriye doğru izlersek, ilk anlara kadar çok iyi bir geçerlilik gösteren klasik gravitasyonun, t=0 anına "çok" yaklaşıldığında artık geçerlilik alanı dışına çıktığını görmekte ve $t \sim 10^{-43}$s (Planck zamanı) anlarında kuvantumsal düşüncelerin devreye girmesi gerekliliği kaçınılmaz olmaktadır. Mesela salınımlı evren modelleri göz önüne alındığında, maksimum genişlemeyi takip eden büzülme sürecinin Evrenin "yarıçapı" sıfır olduktan sonra tekrar genişlemesinde kuvantumsal düşünce olan bir tünelleme olayı söz konusu mudur? Acaba Büyuk Patlama olarak da adlandırılan tekilliklerin klasik olarak öngörümü kuvantumsal düşüncelerle tutarlı mıdır? Evrenin kararlı halleri bulunmakta mıdır?

Meseleye biraz daha yakından bakalım. Fizikte, biri gravitasyon etkileşmesi, diğer üçü de kuvvetli etkileşme, zayıf etkileşme ve elektromagnetik etkileşme olmak üzere dört temel etkileşmenin var olduğu bilinmektedir. Bunlardan kuvvetli ve zayıf etkileşmeler kısa menzilli, yani 10^{-12}cm mertebesindeki uzaklıkların altındaki atomaltı uzaklıklarda etkin olup incelenmeleri de doğal olarak Kuvantum Mekaniği aracılığıyla olmaktadır. Elektromagnetik etkileşme ise uzun menzilli olup etkisini makroskopik düzeyde de hissettirmektedir. Bununla beraber, Elektromagnetik Teorinin klasik düzeydeki başarıları, teorinin gücünün tamamını idrak etmeye yeterli olamamış, atomsal düzeydeki bazı olayların Elektromagnetik Teori diliyle tam olarak anlaşılabilmesi için Kuvantum Elektrodinamiğine ihtiyaç duyulmuştur. Mesela, Hidrojen atomu göz önüne alındığında Klasik Maxwell-Lorentz Elektrodinamiği, proton etrafında dolanan elektronun, yörüngesinde kalamayıp sonunda gözlenene aykırı olarak proton üzerine düşeceğini söylemektedir. Buna karşılık H-atomunun Kuvantum Teorisi bu problemi oldukça tatminkar bir şekilde çözmektedir. Buna göre elektron sürekli değişen bir yörünge üzerinde değil de kararlı yörüngeler üzerinde bulunabilmekte ve uyartılma halinde de düşük enerjili bir yörüngeye kendilindiğinden geçiş yapabilmektedir. Kuvantum Teorisi bize en düşük enerjili yörüngenin sonlu büyüklükte ($r \sim \frac{\hbar}{m_e e^2} \sim 10^{-8}$cm) olduğunu söylemektedir. Kuvantum Elektrodinamiğine dayalı daha ince hesaplar ise bizi, laboratuvarda deneysel olarak gözlenmiş Lamb kayması gibi çok daha küçük ölçekteki etkilerden haberdar etmektedir.

Acaba gravitasyon için durum nedir? Gravitasyon da elektromagnetik etkileşme gibi uzun menzilli bir etkileşmedir. Acaba elektromagnetizma gibi kuvantalaştırılabilir mi ? Eğer kuvantize edilebilirse kuvantum gravitasyondan ne gibi yeni etkiler öngörülebilir ve bu etkiler laboratuvar deneyleriyle ölçülebilir mi? Bu sorulardan birincisini atlayıp, dikkatimizi diğerleri üzerine çevirelim. Gravitasyonun da Kuvantum Mekaniği çerçevesi içinde tartışılması gereken durumlar arz edeceğine ilk dikkati çeken Dirac (1935) [1] olmuştur. Dirac'ın yapmış olduğu basit muhakemeyi burada tekrarlamak iyi olacaktır. Bir fiziksel etkileşmeyi tasvir eden bir S klasik aksiyonu gözönüne alındığında etkileşmenin klasik davranışının $\delta S=0$ stasyoner aksiyon ilkesi aracılığıyla verildiği bilinmektedir. Dirac, böyle bir teori için, eğer aksiyon miktarı, göz önüne alınan bir V uzay-zaman bölgesinde $\hbar$ Planck sabiti mertebesinde ya da ondan küçük kaldığı takdirde, yani $S \lesssim \hbar$ olduğunda, kuvantumsal mülahazaların önem kazanacağına işaret etmektedir. Nitekim GRT'nin

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int_V R\sqrt{-g}\, d^4x$$

Einstein-Hilbert aksiyonu, yarıçapı L ve ortalama yoğunluğu ρ olan bir küresel bölgede kabaca değerlendirilmek istenirse; L/c zaman aralığı olarak ve R nin de Einstein denklemlerinden ρ cinsinden kestirilmiş değeri alınırsa

$$S \sim \frac{c^4}{16\pi G} \cdot \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 \cdot \frac{4\pi}{3} L^3 \cdot \frac{L}{c} = \frac{2\pi}{3} \rho L^4 c$$

bulunur. Öte yandan, kuvvetli gravitasyon alanı hali için karaçukur limitine gidilirse (Schwarzchild yarıçapı)

$$L \gtrsim \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{4\pi}{3} L^3 \rho$$

ya da

$$\rho L^2 \lesssim \frac{3c^2}{8\pi G}$$

bulunur. Bu değer aksiyona taşınırsa, $S < \hbar$ kuvantum şartından,

$$L_P \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \approx 10^{-33} \mathrm{cm} \text{ (Planck uzunluğu)}$$

olmak üzere

$$L \sim 2\left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \sim 2L_P$$

olur ki, bu sonuç $S \lesssim \hbar$ kuvantum şartının lineer boyutlar için bir üst limit oluşturduğunu göstermektedir. L_P nin son derece küçük olması gravitasyonun kuvantum etkilerinin mikroskopik düzeyde önemli olmadığını telkin etmektedir. Bu da kuvantum gravitasyonun, kuvantum elektrodinamiğinin aksine niçin hiç bir laboratuvar deneyinde kendini ıshar etmediğini açıklamaktadır. Gerçekten de bugün hiç bir gravitasyonel olay yoktur ki $\hbar=0$ alındığında geçerliliğini yitirmiş olsun. Oysa elektrodinamikte $\hbar=0$ olsaydı ne spektroskopiden, ne Compton olayından, ne fotoelektrikten... bahsetmek mümkün olurdu!.

O halde niçin ispatlanabilir etkileri olmayan bir konuyla ilgilenilmektedir? Kuvantum Gravitasyonuna ilgi duyulması başlıca şu iki nedene dayandırılabilir: birincisi estetik gerekçedir, yani, nasıl ki bütün etkileşmeleri birleştirmek için, insan yapısı hızlandırıcıların sağlayacağı enerjilerin çok çok ötesinde enerjilerde test edilmesi mümkün olan Büyük Birleştirme Teorisine varma arzusunda esas olarak bir estetik motivasyon vardır, Kuvantum Gravitasyona yaklaşımdaki motivasyonda da, gravitasyonun bir de kuvantum versiyonunu yaparak tamamlayıcılık (mükemmellik) duygusunu yerine getirmek yatmaktadır. İkincisi ise yüksek enerji astrofiziğinin ve kozmolojinin, tekillik, gravitasyonel çökme... gibi, ancak gravitasyonun kuvantum teorisini gerekli kılabilecek bazı olaylar arz etmekte olduğudur.

Şimdi, yukarıda "niçin" e cevap verdikten sonraki soru olan "nasıl" a gelelim. Bu çok daha zor bir soru olarak karşımıza çıkmaktadır. Günümüze değin kuvantum gravitasyona pek çok farklı yaklaşım ileri sürülmüş olmakla beraber, hiçbiri henüz tatminkar bir düzeyde değildir (Bkz.[2,3]).

Bu yaklaşımlar içinde tarihsel bakımdan en eskisi GRT'nin kanonik kuvantizasyon ya da Hamiltoniyen formülasyonudur (tarihsel gelişimin bir özeti için bkz.[4]). Gravitasyonu kuvantalaştırmak amacıyla Hamiltoniyen yöntemlerin GRT'ye uygulanması ilk defa Rosenfeld (1930) tarafından ele alınmıştır. Rosenfeld GRT'nin lineerleştirilmiş olan denklemleri için bir kuvantum mekaniksel Hamiltoniyen inşa etmiş olmakla birlikte, genel hal, yani, lineer olmayan alan denklemleri için herhangi bir kanonik formülasyon girişiminde bulunmamıştır. Böyle bir yaklaşıma ise ilk defa Bergmann ve diğ. (1949) girişmiş olup bunu daha sonra Dirac'ın ve, Pirani ve Schild'in 1950-1960 yılları arasındaki, GRT'nin de özel olarak içinde yer aldığı, lineer olmayan alan teorileri için bir Hamiltoniyen formülasyon geliştirme çabaları izlemiştir. 1950 lerin sonu ile 60 ların hemen başında ise Arnowitt, Deser ve Misner bir dizi çalışma sonucunda, büyük ölçüde önceki çalışmalara dayanan fakat onlardan biraz farklı bir biçimde, GRT'nin bir Hamiltoniyen Teorisini teklif etmişlerdir [5]. Gravitasyonun muhtemel bir kuvantizasyonuna önayak olabilecek bu formalizm (kısaca **ADM Formalizmi** olarak anılmaktadır) müelliflerce noktasal parçacıklara ilişkin pek çok probleme klasik olarak çözüm aramakta kullanılmış olmakla birlikte formalizmin geçerliliğinin ve gücünün sınama alanı olarak kozmolojinin kullanılması düşünülmemiştir. Kozmolojinin Hamiltoniyen formülasyonu için iyi bir sınama alanı oluşturabileceğine ilk işaret eden DeWitt (1967) olmuştur [4]. DeWitt, Hamiltoniyen formülasyonunu kapalı Friedmann modellerine uygulayarak, bu model evrenin bir kuvantize versiyonunu yapmayı başarmıştır. Yine bu tarihlerde, kuvantizasyonun kozmolojik modellerde uygulanmasına götüren bir başka gelişme de Misner (1968-1969) tarafından gerçekleştirilmiştir [6,7,8]. Misner, $G_{\mu\nu}$ Einstein tansörünün G_{oo} bileşeninin diğer Einstein denklemleri için bir Lagranjiyen olarak kullanılabileceğini görüp,bu Lagranjiyenden hareketle de sistemin toplam enerjisine karşılık düşebilecek bir büyüklük inşa etmeyi başarmıştır. Bunun bir Hamiltoniyen ile formal benzerliği Misner'i, ADM formalizminin kozmolojik modellere uyarlanabileceği düşüncesine sevk etmiştir. Bu yaklaşıma, yani, kozmolojik modellerin, GRT'nin alan denklemlerinin Hamilton denklemleri formuna indirgenmiş hareket denklemleri aracılığıyla incelenmesine *Hamiltoniyen Kozmoloji* denilmektedir [9].

GRT'nin kanonik kuvantizasyonu programında ADM formalizmi , Hamiltoniyen ile bağ şartlarının ele alınma konusunda kendine özgü bir yaklaşımı yansıtmaktadır. İleride görüleceği gibi ADM formalizminin özünü oluşturan özellik, önce bağ şartlarını çözmek ve sonra da bu çözümleri aksiyona taşıyarak koordinat şartları vaz edip aksiyonu kanonik hale getirmektir. Bu formalizmin alternatifini ise DeWitt [4] ve Wheeler'in [10] öncülük ettiği yöntem oluşturmaktadır. Buna göre önce koordinat şartları vaz edilmekte, bağlar ise ilk aşamada hiç göz önüne alınmamaktadır. Elde edilen yapıya standart kuvantizasyon kuralları uygulandığında ise sonuçta dalga fonksiyonları, operatörler ve özellikle de bir "Schrödinger denklemi" elde edilmektedir. Wheeler-DeWitt denklemi olarak anılan bu denklem ve buna ilişkin yapılar gravitasyonun bir kuvantumsal tasvirini yansıtmakta, "kabul edilebilir" bir dalga fonksiyonu gravitasyon alanının bir kuvantum hali olarak yorumlanabilmektedir.

Kuvantum Gravitasyona pek çok yaklaşımın ileri sürüldüğü yukarıda ifade edilmişti. Bunlardan biri de son senelerde pek rağbet görmekte olan **Yol İntegrali Formalizmidir** [11]. Kanonik kuvantizasyon yöntemlerine nazaran birtakım üstünlükleri olan bu formalizmde Evrenin (kapalı) kuvantum hali Wheeler-DeWitt denklemini sağlayan bir dalga fonksiyonuyla temsil edilmektedir. "Evrenin dalga foksiyonu" olarak adlandırılan Wheeler-DeWitt denkleminin bu çözümünden beklenen Klasik Rölativist Kozmolojinin cevaplayamadığı bir takım soruları çözüme kavuşturabilmesidir.

Şimdi, biz bu çalışmamızda, önce aşağıda Klasik Rölativist Kozmolojinin temellerini özetleyip çözümleyemediği birtakım sorunlarının bir dökümünü yapmak istiyoruz. 2.Bölümde ADM ve yol integrali formalizmlerini tanıtıp Wheeler-DeWitt denkleminin yol integrali formalizminden nasıl inşa edilebileceğini göstereceğiz. 3.Bölümde ise bu formalizmlerin kozmolojiye uygulamalarından örnekler vererek bu konuda yapılan çalışmaları aktarmayı amaçlamaktayız.

1.2 Klasik Rölativist Kozmoloji

1.2.1 FRW Modelleri

Rölativist Kozmoloji, Evrenin ayrıntıları ihmal edilmek üzere, bütününün yaklaşık metrik yapısını konu almakta olup formülasyonu 1916-1917 yıllarındaki Eistein'ın GRT'ne dayanmaktadır. 1917'de ilk kozmolojik modeller olarak teklif edilen Einstein ve de Sitter evren modellerinden sonra Friedmann 1922'de Einstein denklemlerinin evrimleşen genel evren çözümlerini inşa etmeyi başarmıştır. Daha sonra ise 1932-1934'de Robertson ve Walker, Friedmann modellerinin maksimum simetriyi haiz modeller olduklarını ispat etmişlerdir. Buna göre; (i) evrenin görünümünün her noktada aynı olması (**uzaysal birbiçimlik** (homojenlik)) ve (ii) bir noktada tüm uzaysal doğrultuların eşdeğer olması (**eşyönsellik** (izotroplok)) varsayımları altında uzay-zamanın metriği (r,θ,ϕ) eşhareketli küresel kutupsal koordinatlarda, t kozmik zaman olmak üzere

$$ds^2 = -c^2dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \qquad (1.2.1)$$

ile tasvir edilmektedir. R(t) ye evrenin ölçek çarpanı veya "yarıçap" denilmektedir. k'ya eğrilik parametresi denilmekte olup, uzaysal yüzeylerin (t=sabit) eğriliğini tasvir etmekte ve k=+1, 0, ve -1 değerlerini almaktadır. Bu değerlere göre de evrene sırasıyla kapalı, düz ve açık denilmektedir.

(1.2.1) metriğine Friedmann-Robertson-Walker (FRW) metriği denilmekte olup burada belirlenmesi gereken yegane büyüklük (k parametresi seçildiğinde) R(t) dir. Bunun için ilk önce evrendeki madde-enerji dağılımını tasvir edecek bir $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum tansörü seçmek gerekmektedir. Evrendeki madde-enerji içeriğinin, mükemmel akışkan denilen

$$T_{\mu\nu}=(\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \qquad (1.2.2)$$

ile tasvirinin çok iyi bir ilk yaklaşıklık oluşturduğu görülmüştür. Burada, p basıncı, ρ madde-enerji yoğunluğunu ve U_μ de akış eğrilerinin 4-lü hız vektörünü $(U_\mu U^\mu = -1)$ göstermektedir. Bu takdirde Einstein denklemlerinden

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k^2}{R^2} = 8\pi\rho \qquad (1.2.3)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi p \qquad (1.2.4)$$

denklemleri elde edilir (burada, nokta ile zamana göre türev gösterilmektedir. Kozmolojik sabit $\Lambda=0$ ve $G=c=1$ alınmıştır). Öte yandan $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ korunum kanunundan da bir üçüncü denklem olarak

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + p\frac{dR^3}{dt} = 0 \qquad (1.2.5)$$

bulunabilirse de bu (1.2.3) ve (1.2.4) den bağımsız değildir.

$p=p(\rho)$ şeklinde bir hal denklemi verildiği takdirde (1.2.5) in integrasyonu, (1.2.3) ya da (1.2.4) de kullanıldığında uygun başlangıç şartlarının da yardımıyla $R(t)$ nin kozmik zamana bağlılığı belirlenmiş olur. Kozmolojide sıkça kullanılan hal denklemi $p = \frac{1}{3}\rho$ ile $p = 0$ olmaktadır. Birincisi, evrenin başlangıç anlarında termal dengede bulunan bir radyasyon ile dolu olması halini, ikincisi ise galaksilerin etkileşimsiz olarak serbestçe hareket edebildiği evreyi (Toz Bulutu) tasvir etmektedir. Doğal olarak, güdülen amaç doğrultusunda muhtelif hal denklemleri seçmek de olanaksız değildir.

(1.2.3) ve (1.2.4) denklemlerine Friedmann Denklemleri denilmekte olup bunlar ve metrik ile ilişkili tanımlanabilecek hacim, parlaklık uzaklığı, kızılakayma, evrenin yaşı... gibi kozmolojik büyüklükler Standart Kozmolojinin teorik tabanını oluştururlar.

Standart Kozmoloji, Evrenin büyük ölçekteki yapısına ilişkin gözlemsel verilerin incelenmesi ve açıklanmasında oldukça başarılı bir çerçeve oluşturagelmektedir. Mamafih bu, bir FRW modelinin Evrenin anlaşılması yolunda eksiksiz ve nihai bir cevabı gösterdiği anlamına gelmez. Zira Einstein Teorisi Evren için tek bir öngörüde bulunmamaktadır; denklemleri, simetriler, madde-enerji içeriği, "sonsuz"da sınır şartları ve diğer global şartlar ile tamamlamak gerekmektedir.

Öte yandan, Standart Rölativist Kozmoloji gerek teorik tabanda, gerekse de gözlemsel veriler bakımından tekillik, uzay-zamanın düzlüğü, ufuklar, galaksi oluşumu, baryon simetrisizliği, evrenin eşyönselliği, evrenin tekilliği gibi açıklanamayan ya da anlaşılması zor olan bir takım problemler arz eder durumdadır. Bu durum kozmolojistleri ve astrofizikçileri, ya FRW modellerini Kozmik Sicim Teorisi, Enflasyon Teorisi... gibi teorilerde kullanmaya ya da FRW modellerinin dayanağı olan birbiçimlik ve eşyönsellik varsayımlarını terk ederek daha genel, yani birbiçim ve eşyönsel olmayan evren modelleri kullanmak yoluna sevk etmiştir. Bu tutum Kuvantum Kozmolojinin de motivasyonlarından birini oluşturmaktadır.

Şimdi, bu alternatif kozmolojilere değinmeden önce, Standart Kozmolojonin cevapsız bıraktığı problemlerden birkaçına değinmek yerinde olacaktır. (Derli toplu eksiksiz bir tartışma için kay.[12,13] e bakılabilir.

a) Tekillik (Singülarite) Problemi:

Tekillik, GRT'nin en ilginç ve belki de en zor, temel problemlerinden birini oluşturmaktadır [14]. GRT'de tekilliğin tanımı hakkında herkesçe kabul görmüş kesin bir tanım bulunmamakla birlikte, bu terimin, sezgisel bir tasavvurla, "sonsuz olan bir büyüklük" durumunu gösterdiği şeklinde algılandığı söylenebilir. Elektrodinamik ve hidrodinamik gibi klasik alan teorilerinde çok iyi anlaşılmış olan sonsuzluklardan esinlenerek GRT'de tekilliğin tanımlanmasında şöyle bir güçlükle karşılaşılmaktadır; yukarıda sözü edilen alan teorilerinde, alan büyüklüklerinin izafe edildiği bir arkaplan metriği (Minkowski Metriği) bulunmaktadır. Oysa GRT'deki fon metrik, zaten tekillikleri tasvir edilmek istenen alanın ta kendisidir. Kozmolojide ise tekillikten anlaşılan genellikle şu olmaktadır: (1.2.3) ile (1.2.4) ün birleştirilmesinden

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \qquad (1.2.6)$$

bulunur ve buradan da, gerçekçi bir akışkanın çok büyük negatif basınçlara maruz kalamayacağı düşünülürse, $p > -\frac{1}{3}\rho$ alarak,

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{-1} \right] = 1 + \frac{R^2}{6\dot{R}^2}(\rho + 3p) > 0$$

elde edilir. Eşitsizlik $\dot{R}/R$ nin sonlu bir t_* zamanında sonsuz olacağını söylemektedir. Dolayısıyla bu t_* da R=0 olmak zorundadır. Ya da (1.2.6) dan, R nin dönüm noktasında $\ddot{R}$ nın pozitif olamayacağı görülürse buradan şimdiki halinde genişler görünmekte olan evrenin geçmişte bir t_* anında R=0 değerini almış olması sonucu çıkar. Bu t_* değeri ise, bu zamanda $t_*=0$ olacak şekilde seçilebilir.

Başlangıç anında R=0 olan modellere Büyük Patlamalı evren modelleri adı verilmektedir. Bu modellerde R=0 hali sonsuz büyük bir madde-enerji yoğunluğuna tekabül etmektedir. Bunu göstermek üzere, $c_s = (dp/d\rho)^{1/2}$ ses hızının c ışık hızından (c=1) küçük olması gerektiği düşünülürse $p \leq \rho$ şartı yazılabilir. Şimdi eğer p üzerine $-\frac{1}{3}\rho<p<\rho$ olarak getirilen kısıtlamalar (1.2.5) de kullanılırsa $R^{-2}<\rho<R^{-6}$ bulunur ki bu $R \longrightarrow 0$ için $\rho \longrightarrow \infty$ olacağını söylemektedir. ρ nun sonsuz olması tekilliğin nedeninin elverişsiz bir koordinat seçiminden

kaynaklanmadığını göstermektedir. Fiziksel olarak ölçülebilir bir büyüklük olan ρ, her gözlemci için geçmişinde sonlu bir zamanda sonsuz olmaktadır. Dolayısıyla bütün FRW modelleri $(\Lambda=0)$ $t=t_*=0$ da iflas etmekte ve $t<t_*$ için evrenin halini öngörmek mümkün olamamaktadır.

1950 lerde, bu R=0 ile gösterilen uzay-zamanın tekilliğine FRW modelde varsayılmış olan yüksek dereceden simetrinin bir sonucu olarak bakılmış ve dönen bir evrenin tekillik arz etmeyeceği yolunda bir kanı belirmiştir. Ancak, bu olanak Penrose, Hawking ve Geroch'un genel tekillik teoremleriyle tamamen bertaraf edilmiştir [15]. Adı geçen bu müellifler, enerji-momentum tansörü ile topoloji bir takım uygun şartları sağladığında, rölativist kozmolojide uzay-zaman tekilliğinin kaçınılmaz olduğunu göstermişlerdir.

b) Parçacık Ufku ve Evrenin Geniş Ölçekteki Birbiçimliliği ve Eşyönselliği Problemi:

Bir t kozmik zamanda r=0 da bulunan bir gözlemci ancak $r \leq r(t)$ küresi içinde sinyal alabileceğinden $r=r(t)$ de, d_H parçacık ufku

$$d_H = \int_0^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^{t} \frac{du}{R(u)} < \infty$$

olur, yani, sağdaki integral Standart Büyük Patlamalı modeller için yakınsak çıkar. Dolayısıyla $t \longrightarrow 0$ için $\lim_{t\to 0} r(t) = 0$ olur.

Bu geometrik özellik, galaksiler, radyokaynaklar, quasarlar, Hubble genişlemesi, X-ışınları fonu ve özellikle fosil kozmik mikrodalga ışınımının günümüzde çok yüksek bir yüzde ile gözlenmekte olan eşyönselliğini anlaşılmaz kılmaktadır. Zira parçacık ufkundan büyük uzaklıklarla ayrılmış olan bölgeler nasıl oluyor da biribirlerini etkilemiş ve aynı evrimi geçirmiş olmaktadırlar? Benzer şekilde, evrenin başlangıç anlarında var olması hiç de olanak dışı olmayan birbiçimsizlikleri ve eşyönselsizlikleri (kaotik başlangıç şartları) ne tür bir mekanizma dağıtmakta ve asimtotik olarak (büyük t için) Evrenin günümüzde gözlenen görünümünü birbiçim ve eşyönsel kılmaktadır?

c) **Evrenin Düz Olması Problemi:**

Bu problem, kabaca, basitlik olmak üzere $k=0$ alarak şu şekilde takdim edilebilir. Sıfır indisi ile şimdiki $t=t_o$ değerler gösterilmek üzere $H(t)=\dot{R}(t)/R(t)$ ve $H_o=H(t_o)$ yaz edilsin. Öte yandan $\rho_c = 3H^2/8\pi$ ile bir kritik yoğunluk tanımlansın ve ρ da evrenin göstersin. Bu iki yoğunluğun oranı $\Omega=\rho/\rho_c$ şeklinde düzlük parametresi denilen bir Ω parametresiyle gösterilmektedir. $\Omega>1$, $\Omega<1$, $\Omega=0$ değerleri evrenin sırasıyla kapalı, açık ve düz olduğu anlamına gelmektedir. Tanımlardan dolayı

$$\Omega-1 = \frac{\dot{R}_o^2}{\dot{R}^2}(\Omega_o - 1)$$

yazılabilir. Gözlemler Ω nın şimdiki değerinin $0,1<\Omega_o<2$ olduğunu telkin etmektedir. Başka bir deyişle günümüzde evrenimizin "düzlük" den (eğer varsa) sapmasının miktarı oldukça hassas görünmektedir. Şimdi, basit bir hesapla şu gösterilebilir ki Evrenin $t_p \sim 10^{-43}$s Planck zamanında

$$|\Omega-1| = \left|\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right| \lesssim 10^{-59}$$

dır. Bu, evrenin başlangıç yoğunluğu, eğer, Planck zamanında ρ_c den mesela $10^{-55}\rho_c$ kadar büyük olmuş olsaydı evrenin kapalı olacağı ve dolayısıyla çok çok önceleri çökmüş olacağı anlamına gelmektedir.

Tersine, eğer ρ, ρ_c den $10^{-55}\rho_c$ kadar küçük olmuş olsaydı, bu takdirde evrenimizdeki enerji yoğunluğu sıfır sayılacak kadar çok düşük olur ve yaşam olmazdı. Enerji yoğunluğu ρ nun, evrenin başlangıç anlarındaki kritik yoğunluğuna 10^{-59} gibi hayret verici bir duyarlılıkla bağlı olması düzlük problemi olarak anılmaktadır [13].

1.2.2 Eşyönsel Olmayan Uzayca-Birbiçim Metrikler

İleride, ADM formalizminin yalnızca **Bianchi-tipi Kozmolojiler** denilen eşyönsel olmayan uzayca-birbiçim bir sınıf kozmolojilere uygulamalarından bahsedilecektir. Bu tip metriklerin ya da genel olarak, uzay-zamanca eşyönsel ve de birbiçim olmayan metriklerin inşası oldukça kapsamlı bir uğraş olup matematiksel temellerini Diferansiyel Geometri (Riemansal) ile Grup Teorisi (sürekli dönüşüm grupları) oluşturmaktadır. Bu çalışmada söz konusu kozmolojik düşünceler zincirini ve de kullanılan kavramların tasvirini sistematik ve ayrıntılı bir biçimde sunmak konunun uzunluğu ve de giriftliğinden ötürü mümkün görünmemektedir. Bunun yerine Bianchi-N tipi (N=I,...,IX) denildiğinde hangi matematiksel bağıntıların kastedildiğini belirtmek üzere bir cetvel verilecektir. Konunun ayrıntılı açıklaması için kay.[16,17,18] e bakılabilir.

GRT'nin alan denklemleri biribirlerine kuple lineer olmayan kısmi türevli girift bir denklem sistemi olduğundan çözümleri son derece güçtür. Kozmolojide bu denklemler çözüm üzerine birtakım simetriler getirilerek basitleştirilmektedirler (FRW modelleri buna bir örnektir). Ancak, bir simetrik (mesela birbiçim) modelin görünüşte simetrik olmasından (özel bir koordinat seçiminin yol açabileceği bir simetriklik) kaçınmak için koordinat seçiminden bağımsız olan vektör alanları (diferansiyel operatörler) ile diferansiyel formlar kavramlarına başvurmak gerekmektedir. Bunların bilindiğini kabul etmekteyiz.

Bir uzay-zamanın uzayca-birbiçim olması demek, bu uzay-zamanın uzay cinsinden hiperyüzeylere transitif olarak etkiyen bir G_r izometriler (ya da hareket) grubunu haiz olması demektir. r=3 haline karşılık düşen uzayca-birbiçim kozmolojiler ilk defa Bianchi (1897) tarafından numaralandığından Bianchi-N tipi ya da Tip-N olarak adlandırılırlar.

Bu tip metrikleri yazmanın bir yolu, ω^i ler 3 adet zamana bağlı olmayan 1-form olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t)\omega^i\omega^j \qquad (1.2.7)$$

şeklindedir. Burada ω^i ler $d\omega^j = \frac{1}{2}C^i_{jk}\ \omega^j\wedge\omega^k$ bağıntısını sağlamaktadırlar. C^i_{jk} sabit katsayıları ise 3-boyutlu Lie Cebrinin yapı sabitleridir. Bunların aldığı değerlere göre Bianchi-N tipi modellerin sınıflandırılması Tablo I.1 de gösterildiği gibidir [17].

k eğrilik parametresinin aldığı k=0, k=-1, k=+1 için FRW modelleri, $g_{ij}=R^2(t)\delta_{ij}$ alınmak kaydıyla sırasıyla Tip I, Tip V ve Tip IX modellerine karşılık düşmektedir.

Tablo I.1

Tip I	: $C^i_{jk}=0$	$\omega^1 = dx^1$ $\omega^2 = dx^2$ $\omega^3 = dx^3$	$d\omega^1=0$ $d\omega^2=0$ $d\omega^3=0$
Tip II	: $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$ diğer $C^i_{jk} = 0$	$\omega^1 = dx^2 - x^1 dx^3$ $\omega^2 = dx^3$ $\omega^3 = dx^1$	$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$ $d\omega^2=0$ $d\omega^3=0$
Tip III	: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ diğer $C^i_{jk} = 0$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2$ $\omega^2 = dx^3$ $\omega^3 = dx^1$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^2$ $d\omega^2=0$ $d\omega^3=0$
Tip IV	: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$ $C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$ diğer $C^i_{jk} = 0$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2 - x^1 e^{-x^1} dx^3$ $\omega^2 = dx^3$ $\omega^3 = dx^1$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3$ $d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^3$ $d\omega^3=0$
Tip V	: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ $C^2_{23} = -C^2_{32} = 1$ diğer $C^i_{jk} = 0$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2$ $\omega^2 = e^{-x^1} dx^3$ $\omega^3 = dx^1$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$ $d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega^3$ $d\omega^3=0$
Tip VI	: $C^1_{13} = -C^1_{31} = 1$ $C^2_{23} = -C^2_{32} = h$ $(h \neq 0, 1)$ diğer $C^i_{jk} = 0$	$\omega^1 = e^{-x^1} dx^2$ $\omega^2 = e^{-hx^1} dx^3$ $\omega^3 = dx^1$	$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^3$ $d\omega^2 = h\omega^2 \wedge \omega^3$ $d\omega^3=0$

Tablo I.1 (devam)

Tip VII :

$C^2_{13} = -C^2_{31} = 1 \qquad \omega^1 = (C-kD)dx^2 - Ddx^3 \qquad d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3$

$C^1_{23} = -C^1_{32} = -1 \qquad \omega^2 = Ddx^2 + (C+kD)dx^3 \qquad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 + h\omega^2 \wedge \omega^3$

$C^2_{23} = -C^2_{32} = h \qquad \omega^3 = dx^1 \qquad d\omega^3 = 0$

$(h^2 < 4)$ diğer $C^i_{jk} = 0$

Burada: $A = e^{kx^1}\cos ax^1$; $B = \frac{1}{a}e^{kx^1}\sin ax^1$

$C = e^{-kx^1}\cos ax^1$; $D = -\frac{1}{a}e^{-kx^1}\sin ax^1$

ve $k = \frac{h}{2}$ ve $a = (1-k^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(4-h^2)^{1/2}$

Tip VIII :

$C^1_{23} = -C^1_{32} = -1 \qquad d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3$

$C^2_{31} = -C^2_{13} = 1 \qquad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$

$C^3_{12} = -C^3_{21} = 1 \qquad d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2$

$\omega^1 = dx^1 + [1 + (x^1)^2]dx^2 + [x^1 - x^2 - (x^1)^2 x^2]dx^3$

$\omega^2 = 2x^1 dx^2 + (1 - 2x^1 x^2)dx^3$

$\omega^3 = dx^1 + [-1 + (x^1)^2]dx^2 + [x^1 + x^3 - (x^1)^2 x^2]dx^3$

Tip IX :

$C^1_{23} = -C^1_{32} = 1 \qquad \omega^1 = -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2 \qquad d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3$

$C^2_{31} = -C^2_{13} = 1 \qquad \omega^2 = \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2 \qquad d\omega^2 = \omega^3 \wedge \omega^1$

$C^3_{12} = -C^3_{21} = 1 \qquad \omega^3 = \cos x^1 dx^2 + dx^3 \qquad d\omega^3 = \omega^3 \wedge \omega^2$

diğer $C^i_{jk} = 0$

II. MATERYAL VE METOD

2.1 GRT'nin Kanonik Formülasyonu: ADM Formalizmi

2.1.1 ADM Formalizmine Motivasyon Oluşturan Klasik Parçacık Dinamiğine İlişkin Bazı Temel Özellikler

M sonlu sayısında serbestlik derecesini haiz bir parçacık sisteminin aksiyonu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int \Big(\sum_{i=1}^{M} p_i \dot{q}_i - H(p,q) \Big) dt \qquad (2.1.1)$$

olup, buradan p_i ve q_i kanonik değişkenlerinin ayrı ayrı (bağımsız) varyasyonlarından

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (2.1.2)$$

kanonik Hamilton Denklemlerinin elde edildiği bilinmektedir. (2.1.1) aksiyonu ile ifade edilen sistemin hereketi tek bir t bağımsız değişkeni (koordinatı) cinsinden tasvir edilmektedir. Şimdi eğer t ye, keyfi bir τ parametresinin fonksiyonu olan q_{M+1} nci koordinat gözüyle bakılırsa, yani, $t \equiv q_{M+1} = f(\tau)$ alınırsa, aksiyon

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{M} (\dot{p}_i \frac{dq_i}{d\tau} (\frac{df}{d\tau})^{-1} - H(p,q)) \frac{df}{d\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\sum_{i=1}^{M} p_i \frac{dq_i}{d\tau} - H \frac{df}{d\tau}) d\tau$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{i=1}^{M} p_i \frac{dq_i}{d\tau} + p_{M+1} \frac{dq_{M+1}}{d\tau} - (p_{M+1} \frac{dq_{M+1}}{d\tau} + H(p,q) \frac{df}{d\tau}) \right\} d\tau$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{i=1}^{M+1} p_i q_i' - (p_{M+1} + H(p,q) \frac{df}{d\tau}) \right\} \qquad (2.1.3)$$

yazılabilir ki bu,

$$p_{M+1} + H(p,q) = 0 \qquad (2.1.4)$$

şeklinde bir bağ şartının vaz edilmesiyle de

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\sum_{i=1}^{M+1} p_i q_i') d\tau \qquad (2.1.5)$$

şekline indirgenir (üssü işareti τ ya göre türevi göstermektedir).

Aslında bu bağ şartını, Lagrange çarpanı ithal etmek suretiyle aksiyona katmak mümkündür. Buna göre, çözüm olarak

$$p_{M+1} = - H \qquad (2.1.6)$$

veren herhangi bir

$$C(p_{M+1}, p_i, q_i) = 0 \qquad (2.1.7)$$

fonksiyonu göz önüne alıp ve $N(\tau)$ da bir Lagrange çarpanı olmak üzere aksiyon

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{M+1} p_i q_i' - NC \right) d\tau \qquad (2.1.8)$$

şeklinde yazılabilir. N'nin varyasyonunun (2.1.7) bağ şartını vereceği aşikardır.

(2.1.8) şekline getirilen aksiyonun $\tau=\tau(\bar{\tau})$ şeklindeki keyfi bir koordinat dönüşümü altında kovaryant (invaryant) kaldığı kolaylıkla görülür. Gerçekten de, $d\tau=\frac{d\tau}{d\bar{\tau}}d\bar{\tau}$ dönüşümü kullanılarak

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{M+1} p_i \frac{dq_i}{d\tau} - N(\tau)C \right) d\tau$$

$$= \int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} \left(\sum_{i=1}^{M+1} p_i \frac{dq_i}{d\bar{\tau}} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} - N(\tau)C \right) \frac{d\tau}{d\bar{\tau}} \, d\bar{\tau}$$

$$= \int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} \left(\sum_{i=1}^{M+1} p_i \frac{dq_i}{d\bar{\tau}} - N(\bar{\tau})C \right) d\bar{\tau}$$

$$= \int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_2} \left(\sum_{i=1}^{M+1} p_i \frac{dq_i}{d\bar{\tau}} - \bar{N}C \right) d\bar{\tau} = \bar{S}$$

olduğu tespit edilir. Bu özellikten dolayı, (2.1.8) aksiyonunun parametrize edilmiş formda (parametre invaryant) olduğu söylenir. Ancak (2.1.8) in bu kovaryant halini sağlamak için, (yani parametrize formda yazılmasını sağlamak için) ödenen bedel yalnızca ek bir (M+1) nci serbestlik derecesi ithal etmek değil, fakat aynı zamanda ve daha da önemlisi, kanonik formun artık kaybedilmiş olmasıdır. Zira, eğer (2.1.8) deki NC teriminin bir Hamiltoniyen gibi yer aldığı düşünülürse (H'≡NC), N Lagrange çarpanının bu terimde bulunup da pq' terimlerinde gözükmemesi aksiyonun kanonik olma özelliğini kaybettirmektedir. Öte yandan, bir başka çarpıcı sonuç da bu H' "Hamiltoniyeninin" bağ şartından dolayı sıfır olmasıdır.

Birazdan GRT'nin Lagranjiyeninin (2.1.8) formunda yazılabileceği görülecektir. Başka bir deyişle bu, GRT'nin zaten parametrize halde olduğu anlamına gelmektedir. O halde şimdi mesele (2.1.8) şeklindeki aksiyonların (2.1.1) şeklindeki kanonik forma nasıl indirgeneceğidir. Bunun için izlenebilecek yol, esas olarak (2.1.8) e vardıran yolu tersine çevirmektir. Şöyle ki eğer (2.1.7) bağ şartının $p_{M+1}=-H$ çözümü (2.1.8) aksiyonuna yerleştirilirse

$$S = \int \Big(\sum_{i=1}^{M+1} p_i q_i' - NC \Big) d\tau$$

$$= \int \Big(\sum_{i=1}^{M} p_i q_i' + p_{M+1} q_{M+1}' - \cancelto{0}{NC} \Big) d\tau$$

$$= \int \Big(\sum_{i=1}^{M} p_i q_i' - H q_{M+1}' \Big) d\tau \qquad (2.1.9)$$

ve buradan da

$$= \int \Big(\sum_{i=1}^{M} p_i dq_i - H dq_{M+1} \Big)$$

$$= \int \Big(\sum_{i=1}^{M} p_i \frac{dq_i}{dq_{M+1}} - H \Big) dq_{M+1} \qquad (2.1.10)$$

olur ki bu, $q_{M+1} \longrightarrow t$ notasyon değişikliğiyle (2.1.1) den başka bir şey değildir. Bu işlem sonucunda (2.1.10) da keyfi τ parametresine her türlü bir bağlılığın ortadan kalktığına dikkati çekmek yerinde olacaktır. (2.1.10) ile (2.1.1) in karşılaştırılmasından q_{M+1} değişkeninin şeklen t zaman koordinatının yerini aldığı görülmektedir. Ancak, anlam bakımından (2.1.10) ile (2.1.1) arasında çok önemli bir fark bulunmamaktadır. Şöyle ki, eğer (2.1.8) den q_{M+1} için yazılabilecek

$$\frac{\partial q_{M+1}}{\partial \tau} \equiv q'_{M+1} = \frac{\partial (NC)}{\partial p_{M+1}} = N \frac{\partial C}{\partial p_{M+1}}$$

hareket denklemi göz önüne alınır ve öte yandan da $N(\tau)$ fonksiyonunu belirleyecek herhangi bir dinamik denklemin varlığının söz konusu olmamasından ötürü $N(\tau)$ nun tamamen keyfi bir fonksiyon olduğu düşünülürse, bu taktirde q_{M+1} in tamamen keyfi kaldığı anlaşılır. O halde $q_{M+1}(\tau)$ yu istenilen bir fonksiyon olarak seçmek ve bu fonksiyonu da yeni bağımsız bir değişken (parametre) olarak kullanmak serbestliği bulunmaktadır. Bu taktirde de

$$q_i = q_i(q_{M+1}) \ , \ p_i = p_i(q_{M+1}) \qquad i=1,\ldots,N$$

olur ve şimdi (2.1.10) aksiyonu ve dolayısıyla da p_i ile q_i arasındaki bağıntılar ile q_{M+1}, τ dan bağımsız olurlar. Aşikar olarak bunlar, τ nun artık yok edilmiş olması dolayısıyla $\bar{\tau}=\bar{\tau}(\tau)$ genel koordinat dönüşümü altında invaryant kalırlar.

O halde, q_{M+1} in bağımsız değişken olarak seçimi aşikar bir τ-invaryant formülasyona yol açmakta ve dinamiğin intrensek (kendi özüyle) bir biçimde belirlenmesini sağlamaktadır. Bu durum ise, daha önce $q_1, q_2, \ldots, q_{M+1}$ in keyfi bir τ değişkeni cinsinden ifade edilmekte olmasının tam bir karşıtını oluşturmaktadır. Bu beriki halde τ nun sisteme yabancı bir büyüklük olmasına karşılık q_{M+1} değişkeni bizatihi sistem içinde tanımlanan bir büyüklük özelliğine sahip bulunmaktadır. Bu bakımdan q_{M+1} e bir intrensek koordinat rolü oynadığı gözüyle bakmak yerinde olacaktır.

q_{M+1} ile τ arasındaki bağıntının keyfi olması nedeniyle bunu pekala peşinen belirleme serbestliğinin bulunduğu yukarıda ifade edilmişti. Bu ise bir koordinat şartı vaz etmek anlamına gelmektedir. O halde, eğer özel olarak bu şart $q_{M+1} \equiv \tau$ şeklinde seçilirse, -ki bu şart aynı zamanda $N(\tau)$ yu da belirler-, bu taktirde bu işlem (2.1.9) aksiyonunu (2.1.10) na indirgemenin bir başka yolunu oluşturur ($q_{M+1} \longrightarrow \tau$ notasyon değişikliğiyle). Ve işte ancak bu işlem sonucundadır ki sıfırdan farklı bir Hamiltoniyen elde etmek mümkün olabilir.

O halde bütün bu yukarıda söylenenlerden şu sonuç çıkmaktadır: bir parametre-invaryant aksiyonu kanonik forma indirgemenin yolu:

1) bağ denklemlerinin çözümünü aksiyona taşımak

2) koordinat şartları vaz etmek (ki bu intrensek koordinatlar ithal etmek anlamına gelmektedir).

Yukarıda, tek parçacık hali için geliştirilen formalizm alan teorisi diline de kolaylıkla aktarılabilir [5].

2.1.2 GRT'nin Birinci Mertebeden (Palatini Formundaki) Aksiyonu:

GRT'nin aksiyonu

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int \mathscr{L}_E d^4x = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g} \quad g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}d^4x \qquad (G=c=1) \qquad (2.1.11)$$

olup, buradan $g_{\mu\nu}$ nün varyasyonu aracılığıyla Lagrange hareket denklemleri olarak

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \qquad (2.1.12)$$

Einstein alan denklemleri elde edilmektedir. Bu denklemler 2.

mertebeden kısmi türevli, lineer olmayan denklemlerdir. Şimdi, amaç, bu denklemleri kanonik formda, yani (2.1.2) şeklinde yazmaktır. Başka bir deyişle, Lagranjiyeni o türlü ifade etmek gerekmektedir ki, hareket denklemleri kanonik dönüşlerin şu iki özelliğini göstersinler:

1) 1. mertebeden denklem olsunlar

2) zaman türevlerine göre açıkça çözülmüş olsunlar.

Birinci özellik, birinci mertebeden türevlere göre lineer bir Lagranjiyen kullanmak suretiyle sağlanmış olacaktır. Böyle bir Lagranjiyen $R_{\mu\nu}$ Ricci Tansörünün

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{2.1.13}$$

ifadesindeki $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ Christoffel Sembollerini değişken olarak almak ve

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)\ d^4x \tag{2.1.14}$$

şeklinde yazılabilecek aksiyonda $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ları bağımsız büyüklükler olarak düşünmek suretiyle oluşturulabilir. (2.1.14) deki Lagranjiyene Palatini Lagranjiyeni denilmektedir. (2.2.14) deki $R_{\mu\nu}$ ler, metriği değil de yalnızca Γ ları içerdiğinden, yalnızca $g^{\mu\nu}$ ye göre varyasyon alarak doğrudan doğruya Einstein alan denklemleri elde edilebilir:

$$0 = \delta S_E = \int \delta(\sqrt{-g}\ \ g^{\mu\nu})\ R_{\mu\nu}(\Gamma)\ d^4x$$

$$= \int \left\{ \delta(\sqrt{-g}\ )g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\ \ \delta g^{\mu\nu} \right\} R_{\mu\nu}(\Gamma)\ d^4x$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{2}\ \frac{-\delta g}{\sqrt{-g}}\ g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\ \ \delta g^{\mu\nu} \right\} R_{\mu\nu}(\Gamma)\ d^4x$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{2}\frac{g g^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}}\,\delta g_{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\;\;\delta g^{\mu\nu} \right\} R_{\mu\nu}(\Gamma)\; d^4x$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\; g_{\alpha\beta}\;\delta g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\;\;\delta g^{\mu\nu} \right\} R_{\mu\nu}(\Gamma)\; d^4x$$

$$= \int \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\; g_{\alpha\beta}\;\delta g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\;\; R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right\} d^4x$$

$$= \int \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$\rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$$

Ancak, bu denklemler teorinin içeriğini henüz yansıtmamaktadırlar. Bunun için, birbirinden bağımsız olarak alınmış $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ lar ile $g_{\mu\nu}$ lerin birbirlerine bağlanması gerekmektedir. Bunu da $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ lara göre varyasyon alarak bir alan denklemi şeklinde

$$\nabla_{\alpha}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) \equiv \partial_{\alpha}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}g^{\mu\beta}\,\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha} + \sqrt{-g}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = 0$$

olarak tesis etmek mümkündür. Bu bağıntıdan da $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$lar çözülürse Christoffel Sembollerinin bilinen

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\mu\beta} + \partial_{\mu}g_{\gamma\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})$$

bağıntısı tesis edilmiş olur.

2.1.3 Gravitasyon Alanın 3+1 Boyutsal Ayrışımı:

Kanonik form, içinde uzay koordinatlarına göre türevler bulunmayan fakat yalnızca birinci mertebeden zaman türevli denklemler gerektirmektedir. Bu bakımdan bir dinamik sistemin Hamiltoniyen formülasyonunda zaman koordinatı ayrıcalıklı bir rol oynamaktadır. Uzay-zamanda evrimleşen bir alanı Hamiltoniyen dil ile tasvir etmek için, uzay-zamanı uzaysal hiperyüzeylere dilimlemek ve bu hiperyüzeyleri zamanda ileri ya da geri götürerek alanın kanonik koordinatlarıyla momentumlarının nasıl değiştiklerini gözlemek gerekmektedir. Uzay-zamanın tamamını germek için, ise uzay-zamanı dilimlere ayıran tek parametreli bir hiperyüzey ailesi tanımlamak düşünülebilir. Uzay-zaman koordinatlarının keyfi alınabileceği özelliği ışığında, bu parametre t zaman koordinatı olarak seçilebilir ve dolayısıyla da her bir dilim t=sabit yüzeyi alarak tanımlanabilir. Şimdi soru, gravitasyon alanının kanonik koordinatlarıyla momentumlarının neler olduğudur?

Bu amaçla ADM, önce, ${}^4g_{\mu\nu}$ uzay-zaman metriğini

$$({}^4g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -N^2+ g^{ij}N_iN_j & N_j \\ N_i & g_{ij} \end{bmatrix}$$

$$N \equiv (-{}^4g^{00})^{-1/2} \quad , \quad N_i \equiv {}^4g_{0i} \tag{2.1.15}$$

şeması uyarınca t=sabit hiperyüzeyleri üzerinde tanımlı g_{ij} uzaysal metrik tansörüne, N süre fonksiyonuna ve N_i kayma fonksiyonuna ayrıştırmaktadır [5]. Burada latin indisleri 1,2,3 ; yunan indisleri ise 0,1,2,3 değerlerini almaktadır. Sol üst köşedeki "4" indisi, 4-boyutlu bir büyüklüğe, "3" indisi ise 3-boyutlu bir büyüklüğe işaret etmektedir. 3-boyutlubüyüklükler bazen sol üstte "a" indisi kullanılmadan gösterilecektir. g^{ij}, $g_{ik}g^{kj}=\delta^j_i$ bağıntısı uyarınca g_{ij} uzaysal matrisinin ters matrisi olup latin indislerinin indirilip kaldırılması bunlarla olacaktır. Buna göre $N^i=g^{ij}N_j$ olup, (2.1.15) den, kolaylıkla

$$({}^4g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} -N^{-2} & N^{-2}N^j \\ N^{-2}N^i & g^{ij}-N^iN^j \end{bmatrix} \tag{2.1.16}$$

yazılabilir. Diğer bir yararlı bağıntı da

$$\sqrt{-{}^4g} = N\sqrt{{}^ag} \tag{2.1.17}$$

dir.

Öte yandan Riemansal Geometride, hiperyüzeylerle dilimlenmiş bir uzay-zamanda, dilimlerin kendilerini kuşatan 4-geometriye göre eğriliklerinin bir ölçüsü olarak K_{ij} ile gösterilen ve 3-geometrinin eksterensek eğriliği denilen bir geometrik büyüklük tanımlanmaktadır. Bunun, N süre ve N_i kayma fonksiyonları cinsinden ifadesi ise

$$K_{ij} = (2N)^{-1}\left[N_{i/k} + N_{k/i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} \right] \tag{2.1.18}$$

olup, burada dikey çizgi ${}^ag_{ij}$ uzaysal metriğine göre kovaryant türevi göstermektedir.

Ayrıca ekstrensek eğrilik ile ilgili

$$K \equiv K^k_k = {}^ag_{ij}K_{ij} \qquad \text{ve} \qquad K^{ij} = {}^ag^{ik}\,{}^ag^{jl}K_{kl} \tag{2.1.19}$$

büyüklükleri de tanımlanabilir.

${}^4g_{\mu\nu}$ metriğinin 3+1 ayrışımı ve ekstrensek eğrilik hakkında geniş açıklamalar için [19] a bakılabilir.

Şimdi, bu temel büyüklükler cinsinden (2.1.14) deki Einstein Hilbert-Palatini aksiyonundaki $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ve $g_{\mu\nu}$ büyüklükleri tekrar parametrize edilirse

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-{}^4g}\,{}^4g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}d^4x$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int\Big\{N\sqrt{{}^3g}\,(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R)$$

$$-2(\sqrt{{}^3g}\;K)_{/t} + 2(\sqrt{{}^3g}\;KN^i - \sqrt{{}^3g}\;{}^3g^{ij}\partial_j N)_{/j}\Big\}d^4x$$

bulunur. Aksiyondaki son iki terimin toplam türev (diverjans terimi) olması dolayısıyla dinamiğe bir katkıda bulunmayacağı göz önüne alınırsa, aksiyon bunlarsız

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int N\sqrt{{}^3g}\,(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R)d^4x \qquad (2.1.20)$$

şeklinde sadeleşir. Aksiyonun bu şekli aşikar olarak 3-boyutlu genel koordinat dönüşümleri altında invaryanttır. Aksiyonun bu Lagranjiyen formundan Hamiltoniyen formda yazılmasına geçmek için g_{ij} metriğine eşlenik momentum ithal etmek gerekmektedir. O halde

$$\Pi^{ij} = \frac{\delta S_E}{\delta g_{ij/t}} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{g}\,(K^{ij} - Kg^{ij}) \qquad (2.1.21)$$

ile tanımlanan Π^{ij} eşlenik momentumu aracılığıyla, ve bunun izini de $\Pi \equiv \Pi^i_i = -\sqrt{{}^3g}\;K^i_i$ alarak aksiyon, faz uzayında

$$C^0 \equiv ({}^3g)^{-1/2}(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \tfrac{1}{2}\Pi^2) - g^{1/2}\;{}^3R \qquad (2.1.22)$$

$$C^i \equiv -2\Pi^{ij}{}_{/j} \qquad (2.1.23)$$

tanımları altında

$$S_E = \int (\Pi^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - NC^0 - N_i C^i) d^4x \qquad (2.1.24)$$

şekline dönüştürülmüş olur. Buradan, Π^{ij} , N ve N^i ye göre varyasyon alarak Einstein Denklemlerinin eşdeğeri olan

$$\partial_t g_{ij} = 2Ng^{-1/2}(\Pi_{ij} - \tfrac{1}{2}g_{ij}\Pi) + N_{i/j} + N_{j/i} \qquad (2.1.25)$$

$$\partial_t \Pi^{ij} = -N\sqrt{g}\,({}^3R^{ij} - \tfrac{1}{2}g^{ij}\,{}^3R) + \tfrac{1}{2}Ng^{-1/2}g^{ij}(\Pi^{mn}\Pi_{mn} - \tfrac{1}{2}\Pi^2)$$

$$-2Ng^{-1/2}(\Pi^{im}\Pi_m^{\ j} - \tfrac{1}{2}\Pi\Pi^{ij}) + \sqrt{g}\,(N^{/ij} - g^{ij}N^{/m}{}_{/m})$$

$$+ (\Pi^{ij}N^m)_{/m} - N^i_{\ /m}\Pi^{mj} - N^j_{\ /m}\Pi^{mi} \qquad (2.1.26)$$

$$C^0(g_{ij}\ ,\ \Pi^{ij}) = 0 \qquad \text{ve} \qquad C^i(g_{ij}\ ,\ \Pi^{ij}) = 0 \qquad (2.1.27)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler, bir başlangıç anında g_{ij} , Π^{ij} , N ve N_i değerleri verildiğinde, g_{ij} , Π^{ij} nin zamana göre evrimini belirler. N ve N_i nin bir belirlenmesi söz konusu değildir, zira bunlar yalnızca koordinatların sürekliliğini ifade etmekte, intrensek geometriye yani alanın fizikselliğine bir etkileri bulunmamaktadır. Uzay-zamanın intrensek yani koordinatlardan bağımsız geometrisi yalnız ve yalnız g_{ij} ve Π^{ij} lerle, bunların başlangıç değerleri verildiği takdirde, belirlenmiş olur. Bu bakımdan g_{ij} ve Π^{ij} ler ilk-değer problemi için tam bir Cauchy verisi kümesi oluştururlar. Ancak, g_{ij} ve Π^{ij} lerin ilk-değer seçimleri, (2.1.27) den dolayı kısıtlanmış durumdadır. Nitekim bu 12 adet g_{ij} ve Π^{ij} değişkeni birbirlerinden bağımsız olmayıp (2.1.27) deki 4 bağ denklemiyle birbirlerine bağlıdırlar.

Şimdi, buraya kadar söylenenler, aşağı yukarı, ADM den önceki çalışmalarla bir parelellik halindedir. ADM formalizminin özünü oluşturan özelliği ise (2.1.24) deki aksiyonun kanonik forma getirilmesindeki yöntem oluşturmaktadır. Bu iş [5] de ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Ancak, biz buna hiç girmeyip, sadece söz konusu prosedürün ana hatlarını söylemekle yetineceğiz. Buna göre, bu iş iki aşamada gerçekleştirilmektedir. İlkin, C^0 ve $C^i=0$ bağ şartlarından oniki adet g_{ij} ve Π^{ij} den dördünü çözüp, bunları (2.1.24) deki aksiyona taşımak gerekmektedir. İkinci olarak ise dört koordinat şartı seçerek, (2.1.24) deki Lagranjiyenden artık sekize indirgenmiş g_{ij} ve Π^{ij} leri dörde düşürerek sonuçta iki g_{ij} ile bunların eşleniği olan iki Π^{ij} elde etmek gerekmektedir. Ancak bu iki seçim, yani, bağ şartlarından hangi değişkenlerin elenmesi ve hangi uygun koordinat şartlarının seçilmesi öyle ustaca yapılmalıdır ki sonuçta aksiyon kanonik forma gatirilmiş olsun. 3.Bölümde ADM formalizminin kozmolojiye uygulanmasında bu iş somut olarak görülecektir.

2.2 Yol İntegrali Formalizmi

2.2.1 Yol İntegrali Formalizminin Klasik Motivasyonu:

Klasik Mekanikte basit bir problem olan, tek boyutta serbestçe hareket eden bir parçacık hali göz önüne alındığında hareketi tasvir eden aksiyon $S=-\int \frac{1}{2}m\dot{x}^2dt$ olup, $\delta S=0$ ilkesinden $m\ddot{x}=0$ hareket denkleminin elde edildiği bilinmektedir. Eğer parçcaık $P_1(x_1,t_1)$ den $P_2(x_2,t_2)$ ye gitmiş ise, parçacığın hareketi $t_1\leq t\leq t_2$ için

$$\bar{x}(t) = x_1+\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}(t-t_1)$$

yol denklemiyle tek türlü belirlenmiş olur. Buna "klasik yol" denilsin ve uzay-zaman diyagramında $\bar{\Gamma}$ ile gösterilsin. P_1 den P_2 ye, Γ ile gösterilebilecek pek çok yol olup bunlar

$x(t_1)=x_1$ ve $x(t_2)=x_2$ olmak üzere genel olarak $x(t)$ ile gösterilebilir. Bu takdirde bu Γ lar boyunca değerlendirilecek aksiyon $x(t)$ nin bir fonksiyoneli olur ve $S(\Gamma)$ ile gösterilecek bu fonksiyonel için de

$$\bar{S}=S(\bar{\Gamma}) = -\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}$$

bulunur.

Yukarıdaki kavramlar ile Kuvantum Mekaniğinin anlayışı arasında bir köprü kurmayı ilk başaran Feynman (1948) olmuştur. Feynman kuralı: P_1 den P_2 ye olan Γ yoluna bir $\mathfrak{P}(\Gamma)$ genlik olasılığı bağlamak ve bütün Γ yolları üzerinden $\mathfrak{P}(\Gamma)$ ların toplamı şeklinde bir $K(P_2,P_1)$ propagatörü tanımlamaktadır:

$$\mathfrak{P}(\Gamma) = \exp\{\frac{i}{\hbar}S(\Gamma)\} \tag{2.2.1}$$

$$K[P_2,P_1] \equiv \langle x_2,t_2|x_1,t_1\rangle = \sum_{\Gamma} \mathfrak{P}(\Gamma) \tag{2.2.2}$$

Yollar üzerinden toplam, pratikte, bütün yollar kontinyumu üzerinden bir integraldir. Bu integral, özel olarak serbest parçacık hali için hesaplanırsa

$$t_2>t_1 \text{ için } K[x_2,t_2\ ;\ x_1,t_1] = \left[\frac{im}{2\hbar(t_2-t_1)\pi}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{im(x_2-x_1)^2}{2\hbar(t_2-t_1)}\right\}$$

bulunur.

Propagatör (ya da iki nokta fonksiyonu) parçacığın P_1 de olduğu verildiğinde, P_2 de olmasının olasılık genliğini verir. Kuvantum Mekaniksel bakımdan söylemek gerekirse, P_1 den P_2 ye giden tek bir yol artık söz konusu değildir. Bütün Γ yolları, farklı yollar boyunca genlik olasılıklarının girişiminin toplam etkisini tasvir eden propagatöre katkıda bulunurlar. Parçacığın P_1 den P_2 ye giderken tam olarak hangi yolu izlediğinin söylenememesi Kuvantum Mekaniksel çerçevede bir belirlilik olmadığının bir ifadesidir. Kuvantum Belirsizlik İlkesi parçacığın P_1 de mi olduğunu ya da P_2 de mi olacağının bile kesin olarak söylenemeyeceğini bildirmektedir. Bütün söylenebilecek, parçacığın t_1 de (x_1, x_1+dx_1) aralığında bir $\Psi(x_1,t_1)$ olasılık genliğini haiz olduğu ve t_2 de (x_2, x_2+dx_2) aralığında bir $\Psi(x_2,t_2)$ olasılık genliğini haiz olacağıdır. Ψ fonksiyonlarına dalga fonksiyonları denir ve K propagatörüne A bir normalizasyon katsayısı olmak üzere

$$\Psi(x_2,t_2) = A\int K[x_2,t_2 \; ; \; x_1,t_1]\,\Psi(x_1,t_1)dx_1 \qquad (2.2.3)$$

şeklinde bağlıdırlar.

Şimdi $\hbar \longrightarrow 0$ ile gösterilen klasik limit göz önüne alınırsa bu limitte (2.2.1) deki üstel ifade $|\Phi|=1$ birim çember üzerinde öyle hızlı değişimler gösterir ki birkaç yol dışında bütün yolların katkıları biribirlerini yok ederler. Bu istisna yollar $\delta S=0$ olan $\bar{\Gamma}$ klasik yolun civarında olanlardır; zira, aksiyonun stasyonerliğinden dolayı $\bar{\Gamma}$ civarındaki yollar aynı üstel değerlerle katkıda bulunurlar ve bu katkılar eklenerek

$$K \longrightarrow \bar{K} \sim \exp\{\frac{i}{\hbar}S(\bar{\Gamma})\}$$

verir.

Kuvantum Dinamiğinde hesap yapmanın bir diğer yolunu da bilindiği üzere

$$i\frac{\partial\Psi}{dt} = H\Psi$$

Schrödinger denklemi oluşturur. Bu denklem (2.2.3) deki yol integralinden de sınırlara göre varyasyon alarak elde edilebilir.

Parçacık hali için yukarıda söylenenler kolaylıkla kuvantum alan diline aktarılabilir [11].

2.2.2 Kuvantum Gravitasyonda Yol İntegrali

Daha önce bahsedildiği gibi, GRT'nin alan denklemlerini bir Einstein - Hilbert aksiyonundan $g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ varyasyonuyla ifade etmek mümkündür. Gravitasyon ile etkileşen madde alanlarını tasvir eden aksiyonun jenerik ifadesi bir gravitasyon terimi, bir yüzey terimi ve bir madde teriminin toplamından ibarettir [11]:

$$S=S_E+S_M=\frac{1}{16\pi}\int_M d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda)+\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M} d^3x\sqrt{-h}\,K+\int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{Madde}$$

Bu ifadede $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ Ricci Skaleri, K ise 4-boyutlu integrasyon bölgesinin 3-boyutlu sınırının ekstrensek eğriliği ve h da sınır üzerindeki 3-boyutlu metriğin determinantıdır ($h_{ij}\equiv{}^{3}g_{ij}$ ve $h\equiv g$ notasyon değişikliğiyle). Genelliği sağlamak için aksiyona Λ Kozmolojik Sabiti de dahil edilmiştir.

Eğer yüzey terimi gözönüne alınmaz ise gravitasyonel alan denklemleri metrik ve normal türevlerin sınırda sabit tutulduğu varyasyonlara göre aksiyonu ekstremum kılarak bulunabilir. Yüzey terimi muhafaza edilmek istenirse alan denklemleri sınırda yalnızca metriği sabit tutarak bir varyasyon ilkesinden elde edilebilir [20].

Alan denklemlerinin klasik çözümü $\bar{g}_{\mu\nu}$ ile gösterilsin. Acaba yol integrali kavramı GRT çerçevesi içine nasıl sokulabilir? Yolun biribirlerine bağladığı varsayılan "noktalar" nelerdir?

Söz konusu noktalar bir soyut "süper uzayda" 3-geometrilerdir. Bu kavramı anlayabilmek için, uzay-zamanın Σ_1 ve Σ_2 gibi iki uzay-cinsinden hiperyüzey arasında sandviç olmuş bir V hacmi göz önüne alınsın. Eğer Σ_1 ile Σ_2 arasında uzay cinsinden keyfi bir Σ hiperyüzeyi göz önüne alınırsa bunun üzerindeki geometri ^3G seklinde gösterilebilecek bir 3-uzayın geometrisidir. Daha açık söylemek gerekirse geometriyi tasvir edebilmek için Σ üzerinde herhangi bir noktada intrensek ve ekstrensek eğriliklerin bilinmesine gerek vardır. Şimdi, Σ_1 üzerinde $^3G_1$ ve Σ_2 üzerinde de $^3G_2$ geometrileri verildiğinde, Einstein denklemleri, Σ_1 den Σ_2 ye, ara Σ yüzeyleri boyunca 3-geometriler dizesini belirlemiş olur. Kuvantizasyon, verilmiş bir Σ_1 deki $^3G_1$ den başlayıp verilmiş bir Σ_2 deki ^3G de son bulan ve klasik olanın dışındaki Σ dizeleri tasavvur etmeye dayanır. Her dize bir Γ "yolu" olarak düşünülebilir. Feynman kuralı bu takdirde, Σ_1 deki $^3G_1$ geometrisinden başlayıp da Σ_2 deki $^3G_2$ geometrisine varış olasılığının genliğini tasvir eden propagatör ile, ve bütün uzay-zaman geometrileri üzerinden toplam ile

$$K[\,^3G_2,\Sigma_2\;;\;^3G_1,\Sigma_1] = \sum_{\Gamma}\exp[\tfrac{i}{\hbar}S_E(\Gamma)] \qquad (2.2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Yukarıdaki düşünceleri dinamik değişkenler diliyle açıkça ifade etmek yerinde olacaktır. Uzay cinsinden hiperyüzeyler üzerinde tanımlı metriği $^3g_{ij}$ yerine şimdi h_{ij} ile göstererek ve propagatör için de braket notasyonu kullanarak (2.2.5)

$$\langle h''_{ij}|h'_{ij}\rangle = \int \delta g\ \exp(\tfrac{i}{\hbar}S_E[g]) \qquad (2.2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada h'_{ij} başlangıç uzay cinsinden hiperyüzeyi üzerinde, h''_{ij} de varış hiperyüzeyi üzerindeki metrikleri göstermektedir. İntegrasyon ise iki hiperyüzeyi kavuşturan bütün uzay-zamanlar üzerindendir. Ancak bu aşamada şu çok ciddi bir problem ortaya çıkmaktadır. O da, uzay cinsinden hiperyüzeyin, uzay-zamanda yerini belirleyecek çok iyi tanımlanmış bir intrensek ölçü bulunmamasıdır. Bu eksiklik, h_{ij} 3-metriğini bir etiket olarak kullanmak ile giderilmeye çalışılmaktadır. Bu seçimin ışığında Kuvantum dinamiğini yansıtacak olan dalga fonksiyonu h_{ij} lerin bir fonksiyoneli olur ve

$$\Psi[h_{ij}] = A\int \delta g(x) \exp(\frac{i}{\hbar}S_E[g]) \qquad (2.2.6)$$

şeklinde ifade olunur.

Yukarıdaki düşünceler gravitasyon alanına ek olarak başka alanlar da söz konusu olduğu hallere kolaylıkla genelleştirilebilir. Mesela, basit olması bakımından madde, serbestlik derecesi tek bir ϕ skaler alani ile gösterilirse (2.2.6) ve (2.2.7) bağıntıları, S toplam aksiyon olmak üzere

$$\langle h''_{ij},\phi''|h'_{ij},\phi'\rangle = \int \delta g \delta\phi \exp[\frac{i}{\hbar}S(g,\phi)] \qquad (2.2.7)$$

$$\Psi[h_{ij},\phi] = A\int \delta g(x) \delta\phi \exp(\frac{i}{\hbar}S[g,\phi]) \qquad (2.2.8)$$

şeklinde genelleştirilebilir.

2.2.3 Wheeler-DeWitt Denklemi

Şimdi acaba Ψ dalga fonksiyonelinin üzerine ne gibi kısıtlamalar getirilebilir? Başka bir deyişle Ψ nin sağladığı bir denklem bulunabilir mi?

Aşağıda, (2.2.9) dan hareketle gerçekten de böyle bir denklemin bulunabileceği gösterilecektir [11].

Klasik GRT'nin

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int d^4x(-g)^{-1/2}(^3R-2\Lambda)$$

aksiyonunu, metriğin

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i)dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j$$

standart 3+1 ayrışımı altında

$$S_E = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\, h^{1/2} N (K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R(h) - 2\Lambda) \qquad (2.2.9)$$

şeklinde ifade etmek mümkündür. S_M madde aksiyonu da benzer bir hesapla N, N_i, h_{ij} ve madde alanının fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

Şimdi, klasik olarak

$$H \equiv \frac{\delta S}{\delta N} = 0$$

alan denklemi GRT için bir Hamilton bağı olup, ifadesi

$$H = h^{1/2}(K^2 - K_{ij}K^{ij} + {}^3R - 2\Lambda - 16\pi T_{nn}) = 0 \qquad (2.2.10)$$

dır. Burada T_{nn}, madde alanının enerji-momentum tansörünün yüzeye dik doğrultudaki izdüşümüdür.

Öte yandan, K_{ij} ekstrensek eğriliği (2.1.18) de yazıldığı gibi

$$K_{ij} = (2N)^{-1}(N_{i/j} + N_{j/k} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t})$$

idi ve bu ifade h_{ij}nin zamana göre yalnızca birinci mertebeden türevini içerdiğinden, (2.2.10) daki Lagranjiyenden, h_{ij} ye eşlenik olarak tanımlanacak

$$\Pi_{ij} \equiv \frac{\delta S_E}{\delta h_{ij,t}} = -\frac{1}{16\pi}h^{1/2}(K_{ij} - h_{ij}K)$$

momentumları bulunabilir.

(2.2.11) deki Hamilton bağı, bu momentumlar kullanılacak olursa

$$H = h^{-1/2}(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2) - h^{1/2}R + 16\pi T^{nn}$$

ya da

$$G_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl})$$

olmak üzere

$$H(\equiv C^0) = G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - h^{1/2}\ {}^3R + 16\pi h^{1/2}T^{nn} \qquad (2.2.11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Diğer bir bağ denklemi de (2.1.23) deki

$$H^i(\equiv C^i) = -2\Pi^{ij}{}_{/j} + 16\pi h^{1/2}T^{in} = 0 \qquad (2.2.12)$$

dır. Bu ifadelerdeki T^{nn} ve T^{in} ler sırasıyla, madde alanının alan değişkenleri ve eşlenik momentumları cinsinden ifade edilmiş enerji ve momentum yoğunluklarıdır.

$\frac{\delta S}{\delta N}$ nin kuvantum teorisinde

$$\langle h_{ij},\phi|\frac{\delta S}{\delta N}|\Psi\rangle \equiv \int\delta g\delta\phi(\frac{\delta S}{\delta N})\exp\{\frac{i}{\hbar}S[g,\phi]\}$$

operatör özdeşliğini sağladığı bilinmektedir.

Ψ dalga fonksiyonunu tanımlayan (2.2.9) fonksiyonel integrali N üzerinden bir integral içermektedir. N yi yüzey üzerinde değiştirmek Ψ yi zamanda ileri ya da geri götürmektir. Dalga fonksiyonunun zamana bağlı olmaması

$$0 = \int\delta g\delta\phi(\frac{\delta S}{\delta N})\exp\{\frac{i}{\hbar}S[g,\phi]\}$$

sonucuna yol açar (bkz.[11]).

Şimdi, H=0 ve H^i=0 klasik hareket denklemlerine karşılık düşen operatör özdeşliklerinin, kanonik momentumlar yerine alan değişkenlerinin fonksiyonel türevlerini yerleştirmek suretiyle elde edildikleri bilinmektedir. O halde, ϕ alanının eşlenik momentumu Π_ϕ ile gösterilmek üzere

$$\Pi^{ij} = -i\frac{\delta}{\delta h_{ij}} \quad , \quad \Pi_\phi = -i\frac{\delta}{\delta \phi}$$

operatör bağıntıları aracılığıyla (2.2.12)

$$H\,(\Pi_{ij}, h_{ij}, \Pi_\phi, \phi)\Psi = 0 \qquad (2.2.13)$$

operatör özdeşliğine dönüşür. Bu noktada, $\frac{\delta S}{\delta N}=0$ gibi bir klasik denklemi operatör özdeşliğine dönüştürürken ortaya daima bir çarpan sıralaması problemi çıktığına işaret işaret etmek iyi olacaktır. Mamafih uygun bir seçimle, bu konu gözardı edilebilir. Böyle bir uygun seçim sonuçta (2.2.12) bağına karşılık düşen operatör denklemi olarak açıkça

$$\left\{ -G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}} + h^{1/2}\left[-{}^3R(h) + 2\Lambda + 16\pi T_{nn}\left(-i\frac{\delta}{\delta\phi}\, , \,\phi\right)\right]\right\}$$

$$\times\ \Psi[h_{ij}, \phi] = 0 \qquad (2.2.14)$$

denklemini vermektedir [11].

Kozmoloji için en önemli dinamik bilgiyi içermekte olan bu denkleme Wheeler-DeWitt Denklemi [4 ve 10] denir ve düz uzay-zamandaki kuvantum teorilerinin Klein-Gordon ya da Schrödinger denklemlerinin oynadığı role benzer rol oynar.

III. BULGULAR

3.1 ADM ve Yol İntegrali Formalizmlerinin Kuvantum Kozmolojiye Uygulamaları

3.1.1 Hamiltoniyen Kozmoloji

Misner $g_{ij}(t)$ metrik katsayısını

$$g_{ij}(t) = R^2(t)e^{2\beta(t)}_{ij} = R_o^2 e^{-2\Omega(t)} e^{2\beta(t)}_{ij} \tag{3.3.1}$$

şeklinde parametrize ederek metriği

$$ds^2 = -dt^2 + R_o^2 e^{-2\Omega} e^{2\beta}_{ij} \omega^i \omega^j \tag{3.3.2}$$

olarak yazmaktadır [8]. Burada $R(t)=R_o e^{-\Omega(t)}$ Evrenin ölçek çarpanını ya da "yarıçapı" nı, R_o bir sabit olup yarıçapın bugünkü t_o zamanındaki değerini ve Ω da t kozmik zamanın bir skaler fonksiyonu olup $\Omega(0)=\infty$, $\Omega(t_o)=1$ şartlarını sağlamaktadır. β, izi sıfır olan 3x3 simetrik matris olup, β_{ij} matris elemanları yalnızca t zamanının fonksiyonudurlar. Bu tanımdan $\det(e^{2\beta}_{ij})= e^{2Tr\beta_{ij}} =e^0=1$ ile β matrisinin en az iki, en çok da beş bağımsız elemanı olacağı anlaşılmaktadır. Eğer, $\beta_{ij}=0$ ise metrik birbiçim ve eşyönsel olan Robertson- Walker metriğine indirgenmektedir. Dolayısıyla β_{ij} ler eşyönselliğin bir ölçüsünü yansıtmaktadır. ω^i ler de I.Bölümde Bianchi tipi evren modelleri için ifadeleri açıkça verilmiş zamandan bağımsız, simetri grubu etkisi altında invaryant kalan üç adet taban 1-formlardır.

Bir kozmolojik modeli belirlemek demek $\beta_{ij}(t)$ ve $\Omega(t)$ bilinmeyen fonksiyonlarını Einstein denklemlerinden uygun ve tutarlı bir enerji-momentum tansörü de alarak çözmek demektir. Bu iş için Einstein denklemlerinin doğrudan doğruya kullanılması girift hesaplara yol açmaktadır. Buna karşılık ADM Formalizmi aracılığıyla kozmolojiye Hamiltoniyen yaklaşım, Einstein denklemlerini, Hamilton denklemleri olarak dönüştürmekte ve buradan da mümkünse analitik, olmaz ise de nümerik çözüm yapma olanağı bulunmaktadır. Bunun nasıl olacağını görmeden önce, ADM Formalizminin, uzay-zamanda madde-enerji olması halinde nasıl genelleştirilebileceğini ele alalım.

Einstein denklemlerinde $T_{\mu\nu}$ kaynak terimi olduğunda aksiyonu, $\mathscr{L}_M$,

$$\delta\int\mathscr{L}_M d^4x = -8\pi\int T_{\mu\nu}(^4g)^{-1/2}\delta g^{\mu\nu}d^4x$$

bağıntısını sağlayan skaler yoğunluk olmak üzere

$$S = (16\pi)^{-1}\int(\mathscr{L}_E+\mathscr{L}_M)d^4x$$

şeklinde geliştirmek gerekmektedir.

$\mathscr{L}_M$ madde-enerji Lagranjiyeninin ithalinin etkisi, (2.1.22) ve (2.1.23) deki $C^0=0$ ve $C^i=0$ bağ şartlarının

$$C^{0\prime} = C^0 + \mathscr{L}_M^0 \qquad (3.1.3)$$

$$C^{i\prime} = C^i + \mathscr{L}_M^i \qquad (3.1.4)$$

şeklinde değişmesine yol açmakta, buna karşılık bu bağ şartlarına tabi (2.1.24) deki

$$S = (16\pi)^{-1}\int\Pi^{ij}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\,d^4x \qquad (3.1.5)$$

ifadesinde herhangi bir değişiklik doğurmamaktadır.

Şimdi (3.1.2) metriği için, q_A ile jenerik olarak β matrisini tasvir eden parametreler gösterilmek üzere ve p_A lar da bunların kanonik eşleniği olan momentumlar olmak üzere (3.1.5) aksiyonunun

$$S = \int p_A dq_A - H(p_A, q_A)dt \tag{3.1.6}$$

şeklinde kanonik formda yazılabileceği gösterilecektir (A indisi 1,...,5). Bunun için, önce (3.1.5) deki integrantda g_{ij} lerin yalnızca t nin fonksiyonu ve Π^{ij} lerin de kanonik eşlenik olmaları dolayısıyla yalnızca t nin fonksiyonları olacakları düşünülürse bu takdirde integrasyon uzay ve zaman koordinatlarına göre ayrı ayrı gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla bir $(dt, \omega^1, \omega^2, \omega^3)$ ortonormal sistemde $d^3x = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ olduğundan uzay koordinatları üzerinden integrasyon alınırsa

$$\int d^3x = \text{sabit}$$

bulunur. Bu sabitin değeri Misner [8] Bianchi-IX tipi kapalı evren modeli için $(4\pi)^2$ bulmaktadır. Gerçekten de, Euler açıları $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$ sınırları arasında değiştikleri için

$$\int d^3x = \int \sin\theta d\theta d\phi d\psi = (4\pi)^2$$

bulunur.

Açık olan, mesela, Bianchi-I tipi model için bu sabitin değeri sonsuz olmakla birlikte gerek koordinatların tanım aralıklarına bir takım kısıtlamalar getirmekle, gerekse de C^i_{jk} ları tekrar ölçeklendirmekle sonlu bir değer bulunabilir. Her halükarda bütün Bianchi evren tipleri için bir normalizasyon katsayısi rolünü oynayan bu sabiti Misner'in yaptığı gibi

$(4\pi)^2$ almakta bir sakınca yoktur. Böyle yapılırsa (3.1.5)

$$S = \pi\int \Pi^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} d\Omega \tag{3.1.7}$$

şeklini alır. İntegrantta, (3.1.1) kullanılarak $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$ hesaplanırsa

$$\frac{1}{2}[e^{-\beta}d(e^{\beta}) + d(e^{\beta})e^{-\beta}] \equiv \acute{d}\beta \tag{3.1.8}$$

olmak üzere

$$S = 2\pi\int [-\Pi^k_k + (e^{\beta}\Pi^*_* e^{-\beta})_{ij} \frac{\acute{d}\beta_{ij}}{d\Omega}] d\Omega \tag{3.1.9}$$

ya da

$$S = 2\pi\int [(e^{\beta}\Pi^*_* e^{-\beta})_{ij}\acute{d}\beta_{ij} - \Pi^k_k d\Omega] \tag{3.1.10}$$

bulunur [9,22].

(3.1.10) nun (3.1.6) daki gibi yazılabilmesi

$$H \equiv (2\pi)\Pi^k_k \tag{3.1.11}$$

vaz edilmesini ve

$$(2\pi)(e^{\beta}\Pi^*_* e^{-\beta})_{ij}\acute{d}\beta_{ij} = p_{ij}\acute{d}\beta_{ij} = p^A d\beta_A \tag{3.1.12}$$

olacak şekilde bir p_{ij} matrisinin bulunmasını gerektirmektedir. Burada β_A lar ve β-matrisinin parametreleri ve p^A ar da bu p_{ij} matrisini parametrize eden kanonik momentumlardır.

Tabi bu iş için önce Π^k_k yı bağ şartlarından p_{ij} , β_{ij} ve Ω cinsinden çözmek gerekmektedir. Eğer C^0 bağ şartına dikkat edilirse bu denklemde Π^k_k dan maada yer alan yegane terimlerin $\Pi^{ij}\Pi_{ij}$, ${}^3R$ ve g olduğu görülür ve (3.1.2) metriğinde

$g = R_0^{\sigma} e^{-\sigma\Omega}$

olduğundan, $\Pi_k^k = \Pi_k^k(\Pi^{ij}, {}^3R)$ dır.

Ryan [9,22] (3.1.12) deki p_{ij} için yine $p^A d\beta_A$ toplamını veren fakat (3.1.12) dekinden biraz farklı olarak p_{ij} yi

$$p_{ij} = (2\pi)(e^{\beta}\Pi_*^* e^{-\beta})_{ij} - \frac{2\pi}{3}\delta_{ij}\Pi_\ell^\ell \tag{3.1.13}$$

şeklinde tanımlamaktadır. Buna göre

$$(4\pi^2)\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{4\pi^2}{3}(\Pi_\ell^\ell)^2 = p_{ij}p_{ij} \tag{3.1.14}$$

olur. Öte yandan t=sabit yüzeylerinin ${}^3R$ skaler eğriliği de birbiçimlikten dolayı yalnızca β_{ij} ve Ω nın bir cebirsel fonksiyonu olmak zorundadır. Dolayısıyla sonuçta, p^A lar β_A parametrelerine karşılık gelen eşlenik değişkenler olmak üzere, aksiyon

$$S = \int p^A d\beta_A - H(p_A, \beta_A, \Omega)d\Omega \tag{3.1.15}$$

şekline indirgenmiş olur.

Şimdi, geriye β_{ij} ve p_{ij} için uygun parametreleri seçmek kalmaktadır. Misner, ADM Formalizmini kozmolojiye uygularken nispeten basit hesaplara yol açması için β-matrisini köşegensel seçerek bu matrisi β_+ ve β_- gibi iki parametreyle

$$\beta \equiv \beta_d = \mathrm{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\,\beta_-\ , \beta_+ - \sqrt{3}\,\beta_-\ ,\ -2\beta_+) \tag{3.1.16}$$

şeklinde parametrize etmektedir [8]. Ryan [9,22] β nın parametrizasyonunu en geniş tutmak için, bir simetrik matrisi belirlemek için gerekli olan beş parametreden, β_+ ve β_- dışında kalan üç parametreyi ψ, θ ve ϕ dönme açıları olarak almaktadır.

Determinantı sıfırdan farklı keyfi bir reel matrisin, A^d, köşegensel bir matris ve R de bir dönme matrisi olmak üzere

$$A=R^{-1}A^{d}R$$

şeklinde yazılabileceğinden yola çıkan Ryan β-matrisini

$$\beta=R^{-1}\beta_{d}R$$

seçmektedir. Öte yandan R dönme matrisi ise

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, Euler matrislerinin

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\phi K_3} \qquad \text{ve} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = e^{\theta K_1}$$

yazılabileceği dikkate alınarak

$$R_{\phi\theta\psi} = e^{\psi K_3}e^{\theta K_1}e^{\phi K_3}$$

şeklinde parametrize edilmiş olur. Buradan da keyfi bir simetrik β-matrisi

$$\beta = e^{-\phi K_3}e^{-\theta K_1}e^{-\psi K_3}\,\beta_{d}\,e^{\phi K_3}e^{\theta K_1}e^{\psi K_3} \tag{3.1.17}$$

şeklinde parametrize edilmiş olur.

Şimdi eğer bu ifadeden, $d\beta_{ij}$ hesaplanırsa

$$d(e^{\beta}) = R^{-1}\left\{\frac{\partial e^{\beta d}}{\partial \beta_+} d\beta_+ + \frac{\partial e^{\beta d}}{\partial \beta_-} d\beta_- + [\, e^{\beta d}, K_1]\, d\phi \right\} R$$

$$- \left\{ e^{-\psi K_1} K_1 e^{-\theta K_2} e^{-\phi K_1} R + R^{-1} e^{\beta d} e^{\phi K_1} e^{\theta K_2} K_1 e^{\psi K_1} \right\} d\psi$$

$$- \left\{ e^{-\psi K_1} e^{-\theta K_2} K_2 e^{-\phi K_1} e^{\beta d} R + R^{-1} e^{\beta d} e^{\phi K_1} K_2 e^{\theta K_2} e^{\psi K_1} \right\} d\theta$$

ve

$$d(e^{\beta}) e^{-\beta} = R^{-1}\left\{\frac{\partial e^{\beta d}}{\partial \beta_+} e^{-\beta d} d\beta_+ + \frac{\partial e^{\beta d}}{\partial \beta_-} e^{-\beta d} d\beta_- + [\, e^{\beta d}, K_1]\, e^{-\beta d} d\phi \right.$$

$$+ e^{\beta d} e^{\phi K_1} e^{\theta K_2} K_1 e^{-\theta K_2} e^{-\phi K_1} e^{-\beta d} d\psi$$

$$\left. + e^{\beta d} e^{\phi K_1} K_2 e^{-\phi K_1} e^{-\beta d} d\theta \right\} R - K_1 d\psi - e^{-\psi K_1} K_2 e^{\psi K_1} d\theta$$

olduğuna dikkat ederek (3.1.8) den sonuçta

$$\acute{d}\beta = R^{-1}\{\alpha_1 d\beta_+ + \alpha_2 d\beta_- + \alpha_3 \omega^3 \mathrm{sh}(2\sqrt{3}\beta_-) - \alpha_4 \omega^1 \mathrm{sh}(3\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)$$
$$- \alpha_5 \omega^2 \mathrm{sh}(3\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)\} R \qquad (3.1.18)$$

bulunur. Burada $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 3x3 matrisler olup

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Bu α_k matrislerinin lineer bağımsız olduklarına dikkat edilirse, buradan izsiz simetrik 3x3 matrisleri için bir taban oluşturacakları anlaşılabilir. Eğer böyle iki matrisin iç çarpımı matris çarpımlarının izi olarak tanımlanırsa, buradan bunların bir ortonormal taban oluşturdukları görülür.

p ve $d\beta$ matrislerinin iç çarpımının

$$pd\beta = p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\phi d\phi + p_\psi d\psi + p_\theta d\theta$$

şeklinde olması istendiğinde (p_A lar, β_A lara karşılık düşen kanonik momentumları göstermektedir)

$$p_{ij} = R^{-1} p_k \alpha_k R$$

alınırsa, α_k ların ortogonallik şartından

$$6p_{ij} = R^{-1}\left\{\alpha_1 p_+ + \alpha_2 p_- - \alpha_3 \frac{3p_\phi}{sh(2\sqrt{3}\beta_-)} + \alpha_4 \frac{3(p_\psi \sin\phi - p_\phi \cos\theta \sin\phi + P_\theta \cos\phi \sin\theta)}{\sin\phi \sin\theta\, sh(3\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)} + \alpha_5 \frac{3(p_\theta \sin^2\phi \sin\theta - p_\psi \sin\phi\cos\phi + P_\phi \cos\phi \sin\phi \cos\theta)}{\sin\phi \sin\theta\, sh(3\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)}\right\}R \tag{3.1.19}$$

bulunur [9].

Şimdi, (p_{ij}) matrisi cinsinden (3.1.11) ile tanımlı Hamiltoniyen

$$H^2 \equiv (2\pi)^2 (\Pi^\ell_\ell)^2 = 6p_{ij}p_{ij} - 24\pi^2 g\, {}^3R \tag{3.1.20}$$

şeklinde ifade edilebilir. $p_{ij}p_{ij}$ çarpımı (3.1.19) dan $\beta_+, \beta_-, \theta, \phi, \psi$ ile bunların eşlenik momentumlarının fonksiyonu ve $g\,{}^3R$ de, bu değişkenler ile Ω nın fonksiyonu olduğundan, (3.1.15) deki aksiyon açıkça

$$S = \int [p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- + p_\phi d\phi + p_\psi d\psi + p_\theta d\theta$$

$$- H(\Omega, p_\mp, p_\phi, p_\theta, p_\psi, \beta_\mp, \phi, \theta, \psi) d\Omega$$

$$- N_i C^i(\Omega, p_\mp, p_\phi, p_\theta, p_\psi, \beta_\mp, \phi, \theta, \psi)] \qquad (3.1.21)$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Bu aşamada

$$C^i(\Omega, p_\mp, p_\phi, p_\theta, p_\psi, \beta_\mp, \phi, \theta, \psi) = 0 \qquad (3.1.22)$$

bağlarını çözüp değişkenlerin üçünü elemek gerekir. Ancak, pratikte, bunu yapmayıp, (3.1.21) aksiyonunu (3.1.22) deki bu üç bağa bağlı olarak bırakmak daha yararlı bulunmaktadır. Bu takdirde koordinat şartları seçmek gerekmektedir. Bunun için mümkün seçimler arasında [9] en basiti $N_i=0$ seçimidir. Ve sonucunda da

$$N = H^{-2} e^{-3\Omega} (12\pi R_0^3) \qquad (3.1.23)$$

olur. Bu ifadede, Hamiltoniyendeki bütün değişkenler Ω cinsinden ifade edilmelidir.

Evrende madde-enerji olması halinde yukarıdaki bağıntılar (3.1.13) ve (3.1.14) ü kullanarak kolayca genelleştirilebilir [9].

Şimdi yukarıdaki bağıntıların Bianchi-tipi modellere uygulanmasını somut olarak ele alalım. Bu iş yalnızca Boş Bianchi-tipi modeller için, ve unu da β nın köşegensel olması hali için yapacağız. Bu takdirde $\theta=\psi=\phi=0=p_\theta=p_\psi=p_\phi$ olacağından (3.1.21) deki aksiyon ile (3.1.10) daki Hamiltoniyen

$$S = \int p_+ d\beta_+ + p_- d\beta_- - H d\Omega \qquad (3.1.24)$$

ve

$$H^2 = p_+^2 + p_-^2 - 24\pi^2 g^3R \qquad (3.1.25)$$

şekillerine indirgenirler, ki burada g^3R ; Ω, β_+ ve β_- nin fonksiyonudur.

Bu Hamiltoniyen 2-boyutlu $\beta_+\beta_-$-düzleminde bir potansiyel (zamana bağlı) gibi etkiyen g^3R teriminin etkisi altıda hareket eden bir parçacığın (noktasal evren) Hamiltoniyeniyle aynıdır. Eğer

$$g^3R \equiv -R_0^4 e^{-4\Omega}(V-1)$$

vaz edilirse ve g ile ^3R de köşegensel β matrisinin β_+ ve β_- parametreleri cinsinden ifade edilirse, buradan, bütün Bianchi-tip modeller için potansiyelin $V=V(\beta_+,\beta_-)$ ifadelerini bulmak mümkün olur [17].

Şimdi aşağıda biri en basit diğeri de en ilginç model olması dolayısıyla sırasıyla Tip-I ve Tip-IX modellerinin bazı özelliklerine işaret edeceğiz.

a) Tip-I Modelde Klasik Davranış:

Tip-I model tüm $C^k_{ij}=0$ ve $\omega^i \equiv dx^i$ olması dolayısıyla en basit modeli oluşturmaktadır. Boş ve köşegensel β için $V=0$ olup [17] (ya da doğrudan bir hesapla $\Pi^{ij}{}_{/j}=0$ ve $^3R=0$ oldukları gösterilebilir) Hamiltoniyen,

$$H^2 = P_+^2 + P_-^2 \qquad (3.1.26)$$

şekline indirgenir. Buradan da Hamilton hareket denklemleri olarak

$$\dot{P}_\mp = -\frac{\partial H}{\partial \beta_\mp} = 0 \ , \ \dot{\beta}_\mp \equiv \frac{\partial H}{\partial p_\mp} = \frac{p_\mp}{H} \ , \quad \frac{dH}{d\Omega} = \frac{\partial H}{\partial \Omega}$$

bulunur ki, bu, p_+, p_- ve H nın birer hareket sabiti olduklarını göstermektedir.

Öte yandan,

$$\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 = 1$$

denkleminin çözümü θ=sabit olmak üzere

$$\beta_+ = \Omega\cos\theta$$

$$\beta_- = \Omega\sin\theta$$

olup, bu, noktasal evrenin $\beta_+\beta_-$ düzleminde birim $\frac{d\beta}{d\Omega}$ hızıyla serbestçe bir doğru boyunca (özel olarak $\beta_+=\beta_-= 0$ alınabilir) hareket ettiği anlamına gelmektedir.

Bu modelde, başlangıç anındaki bir eşyönselsizliğin zamanla eşyönselliğe dönüşebileceği gösterilebilir. Bunun için Misner [17] eşyönselsizliğin bir ölçüsü olarak

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{2}[e^{-\beta}_{ki} \frac{d}{dt}e^{\beta}_{kj} + e^{-\beta}_{kj} \frac{d}{dt}e^{\beta}_{ki}]$$

olmak üzere bir $Tr(\sigma^2)\equiv\sigma_{ij}\sigma_{ij}$ büyüklüğü tanımlamakta ve $Tr(\sigma^2)\sim e^{6\Omega}$ bulmaktadır. Buna göre, Ω sonsuzdan (başlangıç anı) azalmaya başladığında $Tr(\sigma^2)$ nin de azalacağı, yani eşyönselsizliğin dağılacağı anlaşılmaktadır.

Öte yandan, bu modelde, madde de olsa, gerçek bir tekilliğin var olduğu gösterilebilir [17].

b) Tip-IX Modelde Klasik Davranış:

Bu modelde potansiyelin ifadesi [17]

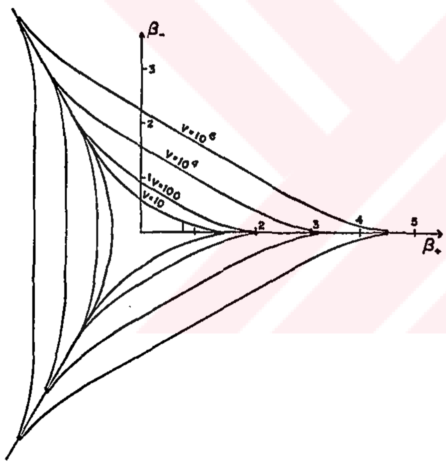
$$V(\beta_+,\beta_-) = 1 + \frac{2}{3}e^{4\beta_+}[\,ch(4\sqrt{3}\beta_-) - 1\,]$$
$$+ \frac{1}{3}e^{-8\beta_+} - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+} + ch(2\sqrt{3}\beta_-)$$

olmak üzere, Hamiltoniyen

$$H^2 = P_+^2 + P_-^2 + e^{-4\Omega}[\,V(\beta_+,\beta_-) - 1\,]$$

dir.

Potansiyelin karmaşık şekli $\beta_+ = \beta_+(\Omega)$ ve $\beta_- = \beta_-(\Omega)$ için bir analitik çözüm bulmayı önlemektedir. Buna rağmen $V(\beta_+,\beta_-)$ potansiyelinin diyagramatik şeklinden (Şekil-III.1) hareketle, hareketi nitel olrak tartışmak mümkündür.



Şekil-III.1

Potansiyel teriminin açıkça zamana bağlı olması tartışmayı klasik mekanikteki benzer durumdan biraz daha karmaşık kılmakla birlikte yapılamaz değildir. Ancak, biz bu çalışmada bu tartışmayı aktarmaya girişmeyeceğiz. Gerek bu modelin gerekse de diğer N-tipi modellerin çok daha genel bir şekilde (köşegensel olmayan β matrisi, çeşitli-madde enerji şemaları...) tartışmaları [9,17,21,22,23,24 ve kaynaklarında] ayrıntılı bir şekilde yer almaktadır. Yalnızca sonuç olarak şuna işaret edeceğiz ki, bu modellerde, işin içine giren sayısız parametreye bağlı olarak tekillik, ufuk, eşyönselsizliğin dağıtılması gibi konularda çeşitli sonuç ve yorumlara varılabilmektedir.

Bu konuyu kapamadan önce, son olarak kuvantizasyon meselesine değinelim.

(3.1.21) deki aksiyon bir parçacık aksiyonu formunda olup değişkenlere $H \longrightarrow -i\partial/\partial\Omega$, $p_{\mp} \longrightarrow -i\partial/\partial\beta_{\mp}$, $p_{\phi} \longrightarrow -i\partial/\partial\phi$, $p_{\psi} \longrightarrow -i\partial/\partial\psi$, $p_{\theta} \longrightarrow -i\partial/\partial\theta$ operatörleri karşılık düşürerek kuvantizasyona gidilebilir ve bunun sonucunda da kısmi türevli bir diferansiyel denklemin çözümü olan bir Ψ dalga fonksiyonu elde edilir. Ancak, böyle bir program şu üç güçlüğü barındırmaktadır:

1) Hamiltoniyenin açıkça zamana bağlı olması,

2) H nın bir kare-kök Hamiltoniyen olması,

2) $C^{\mu}=0$ bağ şartlarının kullanımı

Birinci güçlük daha ziyade bir hesap meselesidir. İkincisinin üstesinden gelmek ise hiç de zor değildir; zira Kuvantum Mekaniğinde bu iş için pek çok yöntem bulunmaktadır (Dirac yaklaşımı,Schrödinger-Klein-Gordon (SKG) yaklaşımı...). Üçüncü güçlük ise daha temel mahiyettedir. Şöyle ki ADM yönteminde kuvantizasyondan önce bağları çözüp aksiyona taşımak gerekmektedir. Buna karşılık Dirac yönteminde önce, bağlar bir operatör denklemi olarak yazılmaktadır. Her iki yaklaşım birbirine denk olmayıp kuvantum modeller için farklı denklemlere yol açmaktadırlar.

Şimdi kuvantizasyona bir örnek olmak üzere Tip-I modelinin (3.1.26) daki

$$H^2= p_+^2+p_-^2$$

Hamiltoniyenini göz önüne alalım. $p_{\mp} \longrightarrow -i\partial/\partial\beta_{\mp}$, $H \longrightarrow -i\partial/\partial\Omega$ yerleştirmeleri yapılırsa (SKG kuvantizasyonu), $\Psi(\Omega,\beta_{\mp})$ dalga fonksiyonu için

$$-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Omega^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta_+^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\beta_-^2}=0$$

denklemi bulunur. Bunun çok iyi bilinen çözümleri $E=\mp(p_+^2+p_-^2)^{1/2}$ ve E, $p_\mp$, A sabitler olmak üzere

$$\Psi=A\exp i[\,p_+\beta_+ + p_-\beta_- - E\Omega]$$

dır.

E>0 genişleyen, E<0 de büzülen bir evrene karşılık düşmektedir. Bu çözümünün şaşırtıcı yanı tekilliğe ($\Omega\longrightarrow\infty$ için) duyarsız kalıyor olmasıdır.

Diğer modeller için de çeşitli yöntemlerle kuvantizasyona gidip çeşitli sonuç ve yorumlara varmak mümkündür.

3.1.2 Wheeler-DeWitt Denkleminin Çözümleri

Gravitasyon alanının kuvantum dinamiğini veren Wheeler-DeWitt denkleminin mümkün dalga fonksiyonelleri çözümlerini bulmak Kuvantum Kozmolojinin esas uğraşısını oluşturmaktadır. Bu denklemin çözümleri yaygın bir kullanımla *Evrenin dalga fonksiyonu* olarak adlandırılmaktadır. Bu dalga fonksiyonunun bilinmesinden umulan: 1) Kuvantum gravitasyonel etkiler, evrenin, bir tekilliğe çökmeden geri sıçramasını sağlayabilir mi? 2) Evrenin, tekilliği bir tünelleme yoluyla geçmesi mümkün mü? 3) Eşyönselsizlik ve birbiçimsizlik hangi mekanizmayla dağıtılabilir? 4) Evrende parçacık yaratılması mümkün olabilir mi? 5) Bir şişmeli (enflasyonist) genişleme öngörülebilir mi?.. gibi sorularının tümüne birden cevap vermesidir.

Bu amaçla ortaya pek çok kuvantum kozmolojik model ileri sürülmüştür. Ancak, bunları, bu çalışmada sistematik bir şekilde incelemek hem görüşlerin çeşitliliği bakımından hem de teknik güçlükler bakımından mümkün görünmemektedir. Aşağıda yapacağımız, yalnızca bazı çözüm teknikleriyle yorumlarına değinmek ve referanslarına işaret etmek olacaktır.

Kuvantum Kozmolojik modellerin çoğu, madde ile uzay-zamanın sonsuz sayıdaki serbestlik derecelerinden ancak bir kaçının kuvantalaştırıldığı basit halleri içermektedir. Kapalı, birbiçim uzay-zamanlar için evrenin dalga fonksiyonunu tesis etmeye *mini-süperuzay yaklaşımı* denilmektedir [4,11,25,26,27,28,29]. Ve bu da tabii çok özel bir çözüm sınıfını oluşturmaktadır.

Bu birbiçim uzaylar için geometri daha önce de bahsedildiği gibi

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(e^{2\beta})_{ij}\omega^i\omega^j$$

olarak alınmaktadır. Mini-süperuzay yaklaşımında böyle kısıtlandırılmış geometri kullanımı yoluyla dalga fonksiyonellerinin metriğe bağlılığı yalnızca R ve β_{ij} parametreleri aracılığıyla olmakta ve Wheeler-DeWitt denklemi de bu parametreler cinsinden ikinci mertebeden kısmi türevli bir diferansiyel denkleme indirgenmektedir.

Buna bir örnek olmak üzere çok basit olması bakımından birbiçim ve eşyönsel FRW modelini göz önüne alalım. Metrik, $d\sigma_k^2$ $(k=-1,0,+1)$ uzaysal hiperyüzeyin metriği olmak üzere

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma_k^2$$

ya da, dt öz-zaman yerine $d\eta=dt/R(t)$ konform zamanı kullanarak

$$ds^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\sigma_k^2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Öte yandan, maddenin serbestlik derecelerinin seçimi için genel tutum, evrenin, klasik radyasyon ile kuvantize olmuş konform invaryant bir skaler alan içerdiğini varsaymak olmaktadır (Bu, model inşa etmede ortak bir seçim olup özel gerekçelere dayanmamaktadır). Konform skaler alan evrenin başlangıç anlarında, kuvantize maddenin serbestlik derecelerinin yaklaşık tasvirini oluşturmakta olup enerji-momentum tansörüne katkısı bilinen standart tekniklerle hesaplanabilir. Öte yandan klasik radyasyon da, gerçek radyasyonun ($t>10^{-34}$s için) basitleştirilmiş bir gösterimini oluşturmakta olup enerji momentum tansörüne katkısı, $\tilde{\rho}_r$=sabit olmak üzere

$$T^{rad}_{\alpha\beta} = \left[\frac{\tilde{\rho}_r}{R^4}\right] \mathrm{diag}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

şeklindedir

Bu varsayımlar altında Ψ dalga fonksiyonu yalnızca $R(t)$ ve ϕ nin, ya da eşdeğer olarak konform $R(\eta)$ ve $\tilde{\phi}=R\phi$ değerlerinin fonksiyonu olur: $\Psi=\Psi(R,\tilde{\phi})$. Bu takdirde de Wheeler-DeWitt denklemi

$$\left[R\frac{\partial}{\partial R}(R\frac{\partial}{\partial R}) - kR^4 + R^2\tilde{\rho}_r + R^2(-\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\phi}^2} + \tilde{\phi}^2)\right]\Psi = 0$$

şekline indirgenir

Bu denklemi, Ψ yi, $\tilde{\phi}$ ye ilişkin harmonik osilatör özfonksiyonları cinsinden

$$\Psi = \sum c_n(R)\psi_n(\tilde{\phi})$$

şeklinde bir seri aracılığıyla değişkenlere ayrışım yöntemini kullanarak çözmek mümkündür [29]. Çözüm, tekillik probleminin tartışılmasına olanak sağlamaktadır. Bilindiği gibi, tekilliğin olmaması demek, Ψ dalga fonksiyonunun $R=0$ da "düzenli" bir davranış göstermesi ya da en iyisi, sıfırlamasıdır. Hartle [29] bu basit modelde Ψ nin böyle bir davranış sergileyebileceğini, ancak, aksinin de olabileceğini, zira, elde edilen çözümlerin sıkı sıkıya çarpan sıralaması seçimine bağlı olduğunu göstermektedir. Tekillik konusunda, Kuvantum Kozmoloji çerçevesinde, tekillik barındırmayan ve hatta ufuk ve düzlük problemini de çözdüğünü ileri süren konformal flüktuasyonlara dayalı bir modelin de Narlıkar ve Padmanabhan [30,31,32] tarafından ileri sürüldüğüne işaret edelim.

Wheeler-DeWitt denklemlerinin çözümlerini bulmak muhakkak ki Kuvantum Kozmolojinin yegane uğraşısını oluşturmamaktadır. Bunun yanısıra, madde alanı operatörlerin matris elemanlarını hesaplamaya olanak tanıyan pertürbasyona dayalı *yarıklasik yaklaşım* denilen teknik de, kuvantum modeli inşasında sıkça kullanılagelmektedir [29,33]. Bu çalışmada bütün teknikleri, yaklaşımları, çözümleri ve sorunları (özellikle sınır şartları [11,34], zaman sorunu [35,36], topoloji değişimi (solucan deliği çözümleri) [37], Λ Kozmolojik sabitinin gerekli olup olmadığı [38]) tartışmak ve Klasik Rölativist Kozmolojinin sorunlarına nasıl ve ne kadar çözüm getirdiğini aktarmak mümkün görünmemektedir. Ayrıntılı tasviri bırakıp da sonuçlar bakımından özetlemek gerekirse, elde eksiksiz, tatminkar bir Kuvantum Gravitasyon Teorisinin bulunmamasına rağmen, Kuvantum Kozmoloji, çok özel ve de kısıtlandırılmış birtakım varsayımlara dayandırılıyor olsa dahi, evrenin ilk anlarındaki dinamiğinden haber vermek ve günümüzde evrenin gözlenen görünümünü açıklayıcı birtakım senaryolar -spekülatif de olsa- öngörmek gibi verimli yönler sergilemektedir.

Eksikliklerle dolu olmalarına rağmen, Kuvantum Kozmolojik Modeller: tekillikten arındırılmış modeller, tekil olmakla birlikte ufuk içermeyen modeller, başlangıçtaki eşyönselsizlikten eşyönselliğe evrimleşen modeller [39], başlangıçda boş ama maddesini kendi kendine yaratan (tünelleme mekanizmasıyla "yoktan varolma" [38,40,41], parçacık (graviton) üretilmesi [42]) modeller... gibi geniş bir yelpaze oluşturmaktadırlar.

IV. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuvantum Kozmoloji henüz emekleme dönemini yaşamaktadır. Büyüyüp gelişmesi, Evren hakkında gözlemsel verilerin birikiminden ziyade, içinde vucut bulduğu gravitasyonun kuvantum teorisinin gelişimine bağlı görünmektedir. Oysa bunun, gravitasyonun özünde yatan eğri uzay-zaman yapısı özelliğinden ötürü zor bir iş olduğu ve beraberinde aşılmaz gibi gözüken pek çok sorun taşıdığı son kırk yıldan bu yana iyice idrak edilmeye başlanmıştır. Hal böyle iken, yani, elde sağlam ve tatminkar bir kuvantum gravitasyon teorisi yok iken, kozmolojide uygulamalara gitmenin ne gibi bir dayanağı olabilir? Varılan sonuç ve yorumlara ne ölçüde itibar edilebilir?

Kuvantum Kozmoloji anlamında şu kısa dönemde görülen başarılı sonuçlar, gravitasyonun kuvantum teorisiyle ilgilenilmesi konusunda karamsarlığa düşülmemesi gerektiğini telkin etmektedir. Gerçekten de Kuvantum Kozmoloji, Klasik Rölativist Kozmolojinin açıklamakta aciz kaldığı tekillik, ufuk, eşyönselsizliğin dağıtılması gibi konularda oldukça ilginç açıklama ve tasvirler sunagelmektedir. Bununla beraber, Kuvantum Kozmolojiye yöneltilebilecek çok temel bir eleştiri bulunmaktadır; o da, tasvir ve yorumların tekliğinin bulunmayışıdır. Yapılan varsayımlara bağlı olarak pek çok parametreyle iş görülüyor olması çözüm ve yorumların tek türlü olmasını önlemektedir. Varsayımlardaki bu keyfiliğin nedenini ise, gravitasyonun eğrisel uzay-zaman yapısından kaynaklanan, tanımlanmalarında güçlük çekilen zaman kavramı, başlangıç ve sınır şartları gibi yapısal belirsizliklerde aramak gerektir.

Şimdi, bütün bu eksikliklere rağmen, Kuvantum Kozmoloji, meselelere yaklaşımı bakımından oldukça geniş bir çerçeve sunmaktadır. En basitinden, mesela, tekillik problemi Klasik Rölativist Kozmolojide olduğu gibi katı (çözülemez ve önlenemez) bir şekilde karşımıza çıkmamaktadır. Yapılacak varsayımlara bağlı olarak, tekillik barındıran modeller elde edilebileceği gibi, barındırmayan modellerin varlığıda olanak dışı değildir. Bu konuda hemen şuna işaret edelim ki, mesela başlangıç şartları açısından, tekil bir model pekala tekil olmayan bir model kadar ilgi çekici olabilir.

Evrenin ilk anlarında kuvantum gravitasyonel etkiler kuşkusuz önemlidir. Ama asıl ilginç soru, bu etkilerin evrenin ilk anlarındaki yapısı ve evrimi için ne kadar kaydadeğer olup olmadığından ziyade evrenin bugünkü görünümü için ölçüde önemli olup olmadıklarıdır. Bu bakımdan bir kuvantum kozmolojik modelden asıl beklenen günümüzde gözlenebilir etkiler öngörebiliyor olmasıdır. Bu özelliğin birtakım spekülasyonları elemek için bir ölçüt oluşturacağı aşikardır. Ne yazık ki, bu konuda, şimdiye kadar ileri sürülen kuvantum kozmolojik modellerin henüz bu niteliği taşımadıklarını söylemek durumundayız. Şimdi, o halde, Kuvantuum Kozmoloji alanındaki çalışmaları bir zihin jimnastiği olarak mı değerlendirmek gerekir? Elimizde tatminkar bir kuvantum gravitasyon teorisi yokluğu nedeniyle nasıl davranmak gerekir? Buna bir cevap; kuvantum gravitasyon anlaşılana dek kozmolojiye uygulama çalışmalarını durdurmak şeklinde olabilir. İkinci bir cevap ise; hali hazırdaki fizik teorilerinin basit ekstrapolasyonlarından yola çıkarak, özelliklerine iyice hakim olabileceğimiz basit kuvantum kozmolojik modeller inşa etmeye devam etmek, karşılaşılacak teorik belirsizlikleri parametrize ederek bu parametreleri daha sonra gravitasyonun kuvantum teorisini geliştirme ve mükemmelleştirme hedefinde fenomenolojik olarak kullanmak olabilir. Bu anlamda Kuvantum Gravitasyon ile Kuvantum Kozmoloji birlikteliğine bir geri-beslemeli sistem gözüyle bakılabileceğini söylemek hiç de yanlış olmaz.

VI. ÖZET

HAMILTONİYEN KOZMOLOJİ'NİN TEMELLERİ, WHEELER-DeWITT DENKLEMİ ve KUVANTUM KOZMOLOJİ'DEKİ UYGULAMALARI

Gravitasyonun Kuvantum teorisinin Kozmolojiye uygulanması demek olan Kuvantum Kozmoloji, son yirmi yıldan beri gittikçe artan bir ilgi görmektedir. Henüz emekleme döneminde olmakla birlikte Klasik Rölativist Kozmolojinin bazı çözülememiş problemlerini açıklamaktaki başarıları çok dikkat çekicidir.

Bu tezde, kuvantizasyon yöntemi olarak herkesçe kullanılan ADM ve Yol İntegrali Formalizmlerinin tasviriyle ve de kozmolojiye uygulamalarıyla ilgilenmekteyiz.

1.Bölümde, Kuvantum Gravitasyon için, kısa bir tarihsel gelişimiyle birlikte, gerekliliğini ve motivasyonunu ortaya koymaktayız. Bu arada Klasik Rölativist Kozmolojinin başlıca bazı özellikleriyle problemlerini tasvir etmekteyiz.

2.Bölümde, ADM ve Yol İntegrali Formalizmleri sunulmakta ve bu sonuncudan Wheeler-DeWitt denklemi çıkarılmaktadır.

3.Bölüm, Hamiltoniyen Kozmolojiyi, yani, ADM Formalizminin Bianchi-tip evrenlere uygulanmasını konu almaktadır. Aynı zamanda Wheeler-DeWitt denkleminin çözümleriyle öngörülerini tartışmaktayız.

Son olarak 4.Bölüm Kuvantum Kozmolojinin halihazırdaki durumu hakkında bir tartışma içermektedir.

SUMMARY

FUNDAMENTALS of HAMILTONIAN COSMOLOGY
WHEELER-DeWITT EQUATION and
THEIR APPLICATIONS in QUANTUM COSMOLOGY

Quantum Cosmology, the application of the Quantum Theory of Gravitation to cosmology constitutes an area of increasingly interest since the past two decades. Although it is still in the period of infancy, its successes in explanining some of the unresolved problems of the Classical Relativistic Cosmology are very attractives.

In this Thesis, we deal with the description of the two commonly used methods of quantisation, the ADM and the Path Integral Formalism and their applications to cosmology.

In Chapter I, we outline the needs and motivations for quantum gravity with a brief historical developpement. We describe also some of the main features and problems of the Classical Relativistic Cosmology.

In Chapter II, ADM and Path Integral Formalisms are presented and the Wheeler-DeWitt equation is derived from the later.

Chapter III deals with the Hamiltonian cosmology, i.e., application of the ADM Formalism to Bianchi-type universes. We discusse also solutions of the Wheeler-DeWitt equation and their implications.

Finally, Chapter IV contains a discussion of the actual status of the Quantum Cosmology.

VI. KAYNAKLAR

[1] DIRAC, P.A.M. (1935): The Principles of Quantum Mechanics, Oxford Clarendou Press.

[2] ASHTEKAR, A., GEROCH,R. (1974): Quantum Theory of Gravitation. Rep. Prog. Phys., **37**, 1211-1256.

[3] ISHAM, C.J. (1980): Quantum Gravity - An Overview. Trieste preprint IC/79-80/36.

[4] DEWITT, B.S. (1967): Quantum Theory of Gravity.I The Canonical Theory. Phys. Rev., **160**, 5, 1113-1148.

[5] ARNOWITT, R., DESER, S., MISNER, C.W. (1962): The Dynamics of General Relativity, chapter 7, 227-265. **In** Gravitation: An Introduction to Current Researche, (L.Witten ed.), John Willey & Sons, Inc., New York.

[6] MISNER, C.W. (1968): The Isotropy of The Universe. Ap.J., **151**, 431-457.

[7] MISNER, C.W. (1969): Mixmaster Universe. Phys. Rev. Letters., 22,20, 1071-1074.

[8] MISNER, C.W. (1969): Quantum Cosmology I. Phys. Rev., **186**, 5, 1319-1327.

[9] RYAN, M.P. (1972): Hamiltonian Cosmology, Springer-Verleg, New York.

[10] WHEELER, J.A. (1968): Superspace and The Nature of Quantum Geometrodynamics, 242-307. **In** Battelles Rencontres, ed. C.DeWitt and J.A.Wheeler, New York, W.A.Benjamin.

[11] HARTLE, J.B., HAWKING, S.W. (1983): Wave Function of The Universe. Phys. Rev., D28,12, 2960-2975.

[12] TENREIORO, R.D., QUIRÓS,M. (1988): An Introduction to Cosmology and Particle Physics. World Scientific, Hong Kong .

[13] LINDE, A. (1990): Particle Physics and Inflationary Cosmology, Harwood Academic Publishers, New York.

[14] GEROCH,R. (1968): What is a Singularity in General Relativity. Ann. Phys., **48**, 526-540.

[15] HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.F. 1973): The Large Scale Structure of Spacetime, Cambridge Univ.Press,Cambridge.

[16] TAUB, A.H. (1950): Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions. Ann. Math., **53**, 3, 472-490.

[17] RYAN, M.P., SHEPLEY,L.C. (1975): Homogeneous Relativistic Cosmologies, Princton Univ.press, New Jersey.

[18] MacCALLUM, M. (1979): The Mathematics of Anisotropic Spatially-Homogeneous Cosmologies. In Physisc of The Expanding Universe, ed. by M.Demianski, Springer-Verlag, New York.

[19] MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A. (1973): Gravitation, chapter 21. W.H.Freeman and Company, San Francisco.

[20] GIBBONS, G.W., HAWKING, S.W (1977): Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity. Phys. Rev., D15, 10, 2752-2756.

[21] RYAN, M.P. (1971): Qualitative Cosmology: Diagrammatic Solutions for Bianchi Type IX Universes with Expansion, Rotation and Shear I. The Symmetric Case. Ann. Phys., 65,1,2, 506-537.

[22] RYAN, M.P. (1971): Qualitative Cosmology: Diagrammatic Solutions for Bianchi Type IX Universes with Expansion, Rotation and Shear II. The General Case. Ann. Phys., 68,2, 541-555.

[23] RYAN, M.P., (1972): The Oscillatory Regime Near the Singularity in Bianchi-Type IX Universes. Ann. Phys., 70,2, 301-322.

[24] MOSER, A.R.,MATZNER, R.A., RYAN, M.P. (1973): Numerical Solutions for Symmetric Bianchi Type IX Universes. Ann. Phys., 79, 2, 558-579.

[25] MISNER, C.W. (1979): Classical and Quantum Dynamics of a Closed Universe, 55-79. In Relativity, Plenum Press, New York.

[26] MISNER, C.W. (1972): Minisuperspace. In Magic without Magic, ed. by J.Klauder, San Fransisco, W.H.Freeman.

[27] MISNER, C.W. (1973): Phys. Rev., **D10**, 3271

[28] BLYTH, W.F., ISHAM, C. (1975): Quantization of a Friedmann Universe Filled with a Scallar Field. Phys. Rev., D11, 768-778.

[29] HARTLE, J.B. (1983): Quantum Cosmology and The Early Universe, 59-80. In The Very Early Universe, ed. by G.W.Gibbons and S.W.Hawking and S.T.C.Siklos, Cambridge University Press.

[30] NARLIKAR, J.V., PADMANABHAN, T. (1983): The Problems of Singularity, Particle Horizon and Flatness in Quantum Cosmology. Ann. Phys., **150**, 289-306.

[31] PADMANABHAN, T. (1983): Stationary States in Quantum Cosmolgy, 145-151. In Proceedings of The Workshop on Gravitation and Relativistic Astrophysics, ed. by A.R.Parasanna, J.V.Narlikar, C.V.Vishveshwara, World Scientific Publishing Co. Singapore.

[32] NARLIKAR, J.V. (1982): Quantum Fluctuations Near The Classical Space-Time Singularity, 135-143. In Proceedings of The Workshop on Gravitation and Relativistic Astrophysics, ed. by Scientific Publishing Co. Singapore.

[33] LOUKO, J. (1988): Semiclassical Path Measure and Factor

Ordering in uantum Cosmology. Ann. Phys., 181, 318-373.

[34] DUNCAN, M.J., JENSEN, L.G. (1989): Is The Universe Euclidean? CERN preprint, TH-5311.

[35] HAWKING, S.W. (1985): The Arrow of Time in Quantum Cosmology. DAMTP preprint.

[36] CHEW, G.F., STAPP, H.P. (1989): Pregeometrical Quantum Cosmological Evolution. Lawrence Berkeley Laboratory preprint, LBL-27096.

[37] HALLIWELL, J.J., LAFLAMME, R. (1989): Conformal Scaler Field Wormholes. Santa Barbara preprint, NSF-ITP-89-41.

[38] SATO, K., TERASAWA, N., YOKOYAMA, J. (1989): Varying Cosmological Constant and The Early Universe. Tokyo University preprint, UTAP-94/89.

[39] DUNCAN, M.J., JENSEN,L.G. (1988): The Quantum Cosmology of an Anisotropic Universe. CERN preprint, CERN-TH. 5135/88.

[40] BROUT, R., ENGLERT, F., GUNZIG, E. (1978): The Creation of The Universe as a Quantum Phenomenon. Ann. Phys., 115, 78-106.

[41] VILENKIN, A. (1988): Quantum Cosmology, 707-714. In The Early Universe: Reprints, ed. by E.W.Kolb and M.S.Turner, Addision-Wesley Publishing Company.

[42] BERGER, B.K. (1974): Quantum Graviton Creation in a Model Universe. Ann. Phys., 83, 458-490.

VII. ÖZGEÇMİŞ

Hatay'ın Hassa İlçesi'nde 1971 yılında doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Hatay'da tamamladıktan sonra İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümüne girdim ve 1991 yılında ikincilikle mezun oldum. Ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans'a başladım. Temmuz 1992'den itibaren İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.