

66275

T. C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MİNİ KARADELİKLERİN OLUŞUMUNA
İLİŞKİN BİR MODEL**

DOKTORA TEZİ

Göksel Daylan ESMER

Fizik Anabilim Dalı
(Matematiksel Fizik Programı)

Danışman : Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY

OCAK — 1997

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Karadelik Fiziği ile ilgili ayrıntılı ve pedagojik bilgiler verildikten sonra mini karadeliklerin oluşumu ele alınmıştır.

Çalışmalarım sırasında bana verdiği, bu sayfada yazılan teşekkürle sınırlanamayacak kadar büyük olan desteğinden, çalışma disiplininden dolayı danışman hocam sayın Prof. Dr. Şehsuvar Zebitay'a teşekkür ederim.

Uygun bir çalışma ortamı sağlayan İ.Ü. Fen Fakültesi Dekanı sayın Prof. Dr. Çetin Bolcal'a, Fizik Bölümü Başkanı sayın Prof. Dr. Taner Bulat'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında kendimi sıcak ve huzurlu bir aile ortamında hissettiğim, Matematiksel Fizik Anabilimdalındaki hocalarıma ve arkadaşlarıma; tezimi bilgisayarla yazdığım sırada sık sık başlarını ağrıttığım Astronomi Bölümünden arkadaşlarım Tuncay Özışık Tansel Ak ve Hasan Esenoğlu'na, kuzenim Levent Yağcı'ya ve her an desteklerini hissettiğim yakın arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim

Tez çalışmalarım sırasında benden desteğini esirgemeyen eşim Kadir Esmer'e; günlük yaşamdaki yükümü hafifleterek bana her konuda olduğu gibi, çalışmalarım sırasında da yardımcı olan anneme ve tüm aileme; tatlı gülüşü ve aydınlık yüzüyle bana tüm stres ve yorgunluklarımı unutturan biricik oğlum GÖKTUĞ'a da binlerce teşekkür ederim.

Bu tez çalışması İ.Ü. Rektörlüğü Araştırma Fonunca desteklenmiştir.

(Proje No : T - 2246 / 260696)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZ	III
ABSTRACT	IV
I. GİRİŞ	1
II. GRAVİTASYON KÖKENLİ ÇÖKME VE KARADELİKLER	6
(II.1) Kruskal-Szekeres Koordinatları ve Küresel Simetrik Karadelik (Schwarzschild Karadeligi).....	11
(II.2) Dönen Karadelik (Kerr Karadeligi).....	30
(II.3) Penrose Süreci ve Kerr Karadeliginin Alanında Hareket Problemi.....	38
(II.4) Gravitasyon Kökenli Çökme ve Karadeliklerin Oluşumu.....	57
(II.5) Mini Karadelikler.....	70
(II.6) Mini Karadeliklerin Oluşumuna İlişkin Bir Model, Çarpışma Modeli.....	82
Çarpışma Modeli.....	84
III. BULGULAR	117
IV. TARTIŞMA VE SONUÇ	122
V. ÖZET VE SUMMARY	131
VI. KAYNAKLAR	134
VII. EKLER	139
EK-1 TekYönlü ZarYüzeyi.....	140
EK-2 Boyer-Lindquist Koordinatlarında $g^{\mu\nu}$ Matrisi.....	144
EK-3 Killing Vektörleri.....	146
VIII. ÖZGEÇMİŞ	151

Öz

Bu tezde mini karadeliklerin oluşumunu tasvir eden, Hawking'in modelinden farklı, yeni bir model önerilmektedir. Başlangıçta evreni oluşturan akışkanın kümeciklere ayrılmış olduğu ve bu kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında kazandıkları ses ötesi hızlarla çarpıştıkları temel varsayımına dayanan bu model aracılığıyla, 10^{-43} sn – 10^{-8} sn arasındaki, evrenin başlangıç çağı boyunca 36 farklı jenerasyona ait mini karadeliklerin kütlelerinin 10^{-5} gr. – 10^{30} gr. arasında değişmekte olduğu hesaplanmıştır.



ABSTRACT

In this thesis, a new model which is different from Hawking's model, is suggested in order to describes the formation of the mini (primordial) black holes. Our model is supported by the fundamental hypothesis that the fluid which fills the universe at the beginning just after the big-bang was separated in to mini clusters and these clusters collided with one another under their gravitational attractions with ultrasonic velocities. It has calculated that, there will be 36 different generations of mini black holes during the whole time of the beginning era between 10^{-43} sec – 10^{-8} sec, and their masses will change in the interval of 10^{-5} gr. – 10^{30} gr.

I. GİRİŞ

Kökenleri farklı da olsa bütün karadeliklerin, gerek bir yıldızın evriminin son evresine karşıdüşenlerin gerekse mini karadeliklerin, oluşumu aslında bir gravitasyonel çökme olayı olup evrimleri ve çevrelerinde gelişen fiziksel olaylar bakımından farklılık göstermezler. Bunlar yalnızca oluşumlarına ilişkin başlangıç koşulları bakımından birbirlerinden ayrılırlar. Karadeliğe evrimleşen gravitasyon kökenli bir çökmeye yol açan başlangıç koşulları ne olursa olsun karadelik genel özellikleri bakımından farklılık göstermemekle birlikte, boyutlarının çok küçük olması yüzünden mini karadelikler için, büyüme (accretion), buharlaşma (evaporation) gibi olaylar çok farklı sonuçlara yol açabilmektedir. Bu yüzden, tezimiz mini karadeliklerle ilgili olmakla birlikte, önce gravitasyon kökenli bir çökme olayı olarak karadelikler genel özellikleri ile ele alınacaktır.

II. Bölümde önce karadelik fiziğinin bu günkü durumu ve temel problemler özetlendikten sonra Schwarzschild çözümü diye bilinen ve Einstein denklemlerinin, küresel simetrik bir cismin gravitasyon alanını belirleyen çözümü aracılığıyla, termonükleer evriminin sonunda bir karadeliğe evrimleşen, küresel simetrik bir alana sahip cismin özellikleri incelenmektedir. Schwarzschild koordinatlarında, $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ yarıçapı için ortaya çıkan singularitenin bir koordinat dönüşümüyle kaldırılabilir bir singularite olduğu ve $r = r_s$ yüzeyinin aslında, M kütleli küresel simetrik bir cisim için hem sonsuz kırmızıya kayma yüzeyini hem de karadelik ufku oluşturduğu, Kruskal - Szekerez koordinatları aracılığıyla gösterildikten sonra §(II.2) de bu kez Einstein denklemlerinin, Kerr çözümü diye

bilinen ve spine sahip bir cismin gravitasyon alanını belirleyen, aksenal simetrik çözümleri göz önüne alınarak, karadeliğe evrimleşmesi hâlinde bu cismin özellikleri incelenmektedir. Bu bölümde incelenmektedir. Bu bölümde önce "Tek yönlü zar yüzeyi" kavramı tanıtılmakta ve bu şekilde dönen karadelik ufkunu oluşturan tek yönlü zar yüzeyinin, Schwarzschild karadeliğinden farklı olarak, iki farklı yüzey aracılığıyla temsil edilmekte olduğu gösterilmektedir. Bu iki yüzey arasındaki "dinamik kuşak (ergosfer)" diye adlandırılan bölgenin yataklık ettiği, klâsik analogu olmayan, ilgi çekici olayların incelendiği §(II.3) de, önce alanın Killing vektörleri aracılığıyla Penrose süreci ele alınmaktadır. Bu süreçte karadeliğin dışından dinamik kuşağa giren bir taneciğin bu bölgede, herhangi bir biçimde iki taneciğe ayrışmasından sonra bileşenlerden birinin bölgeyi, giren taneciğe oranla, daha büyük bir enerjiyle terk etmekte olduğu, bu arada negatif enerjili olabilen bileşenin yutulmasıyla karadeliğin enerji kaybedeceği gösterilmektedir. Karadeliklere ilişkin en temel problemlerden biri de, bir karadeliğin alanındaki hareket problemidir. Bu bölümde, Kerr karadeliğinin alanında bulunan bir test taneciğinin hareket denklemleri, Hamilton - Jacobi yöntemiyle belirlendikten sonra önemli bazı hâller, bu hâllere karşıdüşen efektif potansiyeller yardımıyla irdelenmekte ve hareketin genel özellikleri belirlenmektedir. Bu arada bağlı yörüngeler için, Schwarzschild ve Reisner - Nordstrom hâlinde test taneciğinin hareketinin bir düzlem hareket olmasına karşılık, Kerr alanında yörünge düzleminin iki uç hâl arasında salınım yapmakta olduğunu ifade eden ve "Wilkins Olayı" diye bilinen, bir olayın ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

§(II.4) de, oldukça karmaşık bir problem olan gravitasyon kökenli çökme olayı, konunun temel özelliklerini görebilmek üzere, basıncı ihmal edilen küresel simetriye sahip bir

toz bulutu için, Genel Rölative Teorisi çerçevesi içinde incelenmektedir. Bunun için önce eşhareketli koordinatlarda iç çözümü temsil eden metrik, alan denklemlerinden hareketle belirlendikten sonra, akışkan kürenin durağan hâlden başlayarak, sonsuz özenerji yoğunluğuna sahip olduğu bir hâle kadar çökmesinin, eşhareketli koordinatlarda sonlu bir zaman alacağı gösterilmektedir. Daha sonra iç ve dış çözümlerin çökme sırasında sürekli olarak birbirine uyması gerektiği gözönünde bulundurularak her iki çözüm de Schwarzschild koordinatlarında yazılıp karşılaştırılarak iç çözüme son şekli verilmektedir. Bu metrik aracılığıyla, Schwarzschild yarıçapına kadar büzülmenin, bir dış gözlemci için sonsuz zaman alacağı ve akışkan kürenin, yarıçapının sıfır olduğu hâle kadar büzülmesinin ise asla gözlenemeyeceği gösterilmektedir.

Kütlesi $3,2 M_{\odot}$ den büyük olan bir yıldızın termonükleer evriminin sonuna karşışdüşen karadeliklerden ayrı olarak, farklı bir süreç sonunda oluşan ve mini karadelikler ya da primordial karadelikler diye adlandırılan karadelikler §(II.5) de ele alınmıştır. Bu bölümde, varlıkları ilk kez Zel'dovich ve Novikov tarafından öngörülen ve Kaotik Kozmolojinin varsayımları ile tasvir olunan evrenin başlangıcındaki koşullara bağılı olarak oluşabilecekleri Hawking tarafından gösterilmiş bulunan mini karadeliklerin, oluşumlarına yol açan koşullar ve genel özellikleri ele alınmaktadır. Planck uzunluğundan daha küçük yarıçaplı bir bölgenin içindeki olayların tek başına Genel Gravitasyon Teorisi (GRT) aracılığıyla tasvir edilemeyeceği dolayısıyla bunun aynı zamanda GRT nin geçerlilik sınırını oluşturduğu irdelemesine paralel olarak, mini karadeliklerin kütlelerine bir alt sınır getirilmekte ve farklı bir yaklaşımla bu husus doğrulanmaktadır. Gerçekten de çöken cismin Schwarzschild yarıçapının kendisini oluşturan taneciklerin Compton dalgaboyundan daha

büyük olması zorunluluğunun da yine aynı alt sınırı verdiği gösterilerek mini karadeliklerin kütlelerinin 10^{-5} gr. dan daha büyük olması gerektiği ortaya konulmuştur. Gene bu bölümde kütlesi sabit olan bir karadeliğin ufuk yüzeyinin alanının değişmezliğine ilişkin Hawking'in Alan teoremi takdim edildikten sonra, Kuantum Alanlar Teorisi (KAT) çerçevesi içinde, dönen bir karadeliğin çok kuvvetli gravitasyon alanında, spontane bir biçimde tanecik, karşıttanecik çiftlerinin oluştuğu ve bu çiftlerin de §(II.3) de ayrıntılarıyla ele alınmış olan, Penrose sürecine uygun olarak karadeliğin sürekli olarak enerji kaybetmesine yol açtıkları irdelenmektedir. Dönen bir karadeliğin spininin azalmasına ve sonunda Schwarzschild karadeliğine evrimleşmesine yol açan bu tanecik emisyonunun, kütlesi 10^{16} gr. dan daha büyük olan karadelikler için önemsenmeyecek kadar küçük olduğu anlaşılmaktadır. Öte yandan Schwarzschild karadeliğine evrimleşmiş olsa bile, karadeliğin kütlelerinin azalmasına ve giderek sıcaklığının artmasına yol açan bir başka tanecik emisyonunun varlığı yine KAT çerçevesi içinde gösterilmiş bulunmaktadır. §(II.5) in sonunda ısıl emisyon diye adlandırılan bu tanecik emisyonuyla, Alan Teoremine uygun olarak gitgide artan bir hızla küçülen mini karadeliğin evriminin bir patlamayla son bulacağı anlaşılmaktadır.

Tezin özgün kısmını oluşturan §(II.6) da mini karadeliklerin, Kaotik Kozmolojinin temel varsayımları çerçevesinde çok büyük yoğunluk flüktuasyonlarının evrimine bağlı olarak oluştukları varsayımına dayanan Hawking'in önerdiği model yerine farklı bir model önerilmektedir. Mini karadeliklerin oluşumunu tasvir etmeye yönelik bu yeni model, galaksi oluşumuna ilişkin Birikim Modelinden (Mc Crea - Zebitay Modeli) esinlenerek, büyük patlamanın hemen ardından evreni oluşturan akışkanın kümeciklere ayrılmış olduğu ve bu kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında sesötesi hızlarla çarpıştıkları temel

varsayımına dayanmaktadır. Çarpışmadan sonra ortaya çıkan arakesitteki yığılma bölgesinde mini karadeliklere evrimleşen yoğunlaşmaların, oluşumlarına ilişkin koşulların sağlanabileceği gösterilmektedir. Bu bölümde önce evrenin, mini karadeliklerin oluşumuna yataklık eden evresi ve bu evrede evreni oluşturan akışkanın yapısı irdelendikten sonra modelimizi şekillendiren temel varsayımlar sıralanmaktadır. Gerek varsayımları gerekse sonuçları bakımından modelimiz Birikim Modelinden önemli ölçüde ayrılmış bulunan bir modeldir. Modelde önemli bir yer tutan, evrenin göz önüne alınan evresindeki, ses hızı belirlendikten sonra birbirlerinin gravitasyon alanında kazandıkları hızlarla kafa-kafaya çarpışan kümeciklerin sesötesi olması istenen çarpışma hızlarının ses hızından çok büyük olmasının da mümkün olamayacağı, olsa olsa bu hızın ses hızı mertebesinde olması gerektiği gösterilmektedir. Daha sonra, kümeciklerin çarpışmalarının bir mini karadeliğe evrimleşen yoğunlaşma ile sonuçlanabilmesi için, çarpışma hızlarının zaten zorunlu olarak ses hızı mertebesinde olması gerektiği anlaşılmaktadır. Tezde yalnızca kafa-kafaya çarpışan özdeş küresel kümecikler hâli ele alınmış olup bu hâlde çarpışmanın daima bir mini karadeliğin oluşumu ile sonuçlanacağı gösterilmektedir. Bu şekildeki her oluşum sürecini, tezde ileri sürülen nedenlerden ötürü, yeni bir dağılma ve kümeciklere ayrılma süreci izlemekte ve bu şekilde giderek kütleleri büyüyen mini karadelikler oluşabilmektedir. Tezde evrenin mini karadeliklerin oluştuğu önerilen çağında bu yolla kaç kuşak mini karadeliğe oluşacağı ve bu karadeliklerin kütlelerinin nasıl bir değişim göstereceği de hesaplanmaktadır. Bu paragrafın sonunuda modele ilişkin bir örnek verilerek, bu hâle ilişkin sayısal değerler hesaplanmıştır.

Tezin özgün kısmını oluşturan §(II.6) da elde edilen sonuçların gözden geçirildiği bulgular başlığını taşıyan III. Bölümün ardından IV. Bölümde sonuçlar tartışılmakta ve tezin bir özeleştirisi yapılmaktadır.

II. GRAVİTASYON KÖKENLİ ÇÖKME VE KARADELİKLER

Kütlesi yeterince büyük ($3M_{\odot}$ dolayında) bir yıldızın termonükleer evriminin, *Schwarzschild yarıçapı* (ya da *gravitasyon yarıçapı*) diye bilinen $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ den daha küçük bir yarıçap içine büzülmesiyle başlayan ve sürekli bir büzülmeyle devam eden son evresi, *karadeliği* (*karaçukuru*) oluşturur. Esas olarak karadelik, uzay-zamanda ışığın bile kendisinden kaçamayacağı kadar güçlü gravitasyon alanına sahip bir bölge olarak tanımlanır. Gerçekten de gravitasyon yarıçapına karşılık gelen kaçış hızının ışık hızına eşit olacağı ve bir fiziksel informasyonun taşınma hızı için ışık hızının limit hız olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, ne bir informasyon sinyalinin ne de bir taneciğin karadeliğin dışına kaçamayacağı anlaşılır. Sistemin toplam enerjisiyle orantılı bir kütlenin varlığından kaynaklanan ve gravitasyon etkileşmesinin sonucu olan bu durum Einstein'ın Genel Gravitasyon Teorisi ile tutarlı ve geçerli bir biçimde tasvir edilebilmektedir. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta, sıfırdan farklı bir enerjiye sahip bütün öğelerin bu gravitasyon etkisine katılmakta olduğudur.

Einstein denklemlerinin, gravitasyon kökenli çökmeyi tasvir eden genel çözümlerinin bulunması, bu denklemlerin oldukça karmaşık nonlinear denklemler olması yüzünden, çok zor bir problem olup bilgisayar kullanmak suretiyle, nümerik integrasyonla yaklaşık çözümler bulma gayretleri de henüz tatmin edici sonuçlar vermekten uzaktır. Bununla birlikte çökme süreci için olmasa bile, oluşumlarının hemen ardından stasyoner hâle gelebildikleri için

karadeliklerin gravitasyon alanı, çok az sayıda parametreye bağılı olarak, tek bir biçimde belirlenebilmektedir.

Karadeliklerin olağanüstü güçlü gravitasyon alanları, alan denklemlerinin bu gün bilinen, 1) M kütlesine bağılı tek parametrelili SCHWARZSCHILD, 2) M kütlesi ve Q yüküne bağılı iki parametrelili REISNER-NORDSTROM, 3) M kütlesi ve J açısal momentumuna bağılı iki parametrelili KERR, 4) M kütlesi, J açısal momentumu ve Q yüküne bağılı üç parametrelili KERR-NEWMANN çözümleri ile tasvir edilirler.

Karadelik (Black-hole) deyiimi ilk kez 1968 de Wheeler tarafından kullanılmış olmakla beraber, Newtonsal tanecik teorisi çerçevesi içinde, ışığın yeterince büyük kütleli bir cisimden kaçamayacağı, dolayısıyla bu tür nesnelerin mümkün olabileceği ilk kez 1795 de Laplace tarafından ortaya konmuştur.

Öte yandan bir karadeliğin nasıl oluşacağını ise, Oppenheimer ve Snyder, genel rölativite çerçevesi içinde, basıncı ihmal edilen, homogen akışkan bir kürenin kendi gravitasyon alanının etkisi altında çökmesinin, dışındaki evrenle bütün iletişiminin kesileceği bir evreyle son bulacağını belirlemek suretiyle, ilk kez 1939 da göstermişlerdir [Oppenheimer–Snyder (1939), Weinberg (1972)].

K. Schwarzschild tarafından 1916 da bulunan, Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin ilk çözümünü kullanarak, gravitasyon alanının uzay–zaman yapısının incelenmesine ilişkin Flam, Weyl, Edington, Rosen, ve diğerlerinin çalışmalarının [örneğin; Einstein–Rosen (1935)] ardından Synge, Finkelstein, Fronsdal, Kruskal, Szekeres ve Novikov gibilerinin çalışmalarıyla [örneğin; Finkelstein (1958), Fronsdal (1959), Kruskal (1960)], bu çözüm çerçevesi içinde, karadelik problemi bütünüyle çözülmüştür. Bu konu §(II.1) de ele

alınacaktır.

R.P.Kerr tarafından, spine sahip bir cismin gravitasyon alanını tasvir eden çözümün bulunmasından [Kerr (1963)] sonra, dönen bir karadeliğin gravitasyon alanını tasvire yönelik yoğun teorik çalışmaların yer aldığı yeni bir dönem başlamıştır. §(II.2) de özetleyeceğimiz bu dönemin sonuçlarına ait ayrıntılı ve geniş bilgi için [Misner, Thorne, Wheeler(1973), Hawking, Ellis (1973)] e bakılabilir.

Bir çift yıldız sistemi içinde ya da tek başına bulunan bir karadeliğin, üzerine madde yığılması ve yığılan bu maddenin sıkışıp ısınması sonucu, X-ışınları yayınlaması süreci altmışlı yıllarda teorik olarak etraflıca incelenmiş [Zel'dovich ve Novikov (1966), Hayakawa ve Matsuoka (1964)] ve 1971 de de ilk kez Uhuru uydusu ile X-ışını kaynağı çift yıldız sistemleri saptanmıştır. Bu olay karadeliklerin detekte edilmesi bakımından büyük önem taşıyan bir dönemin başlangıcı olmuştur.

Üzerine madde yığılması nedeniyle güçlü bir X-ışını kaynağı hâline gelen, çift yıldız sistemi içindeki, gravitasyonel çökmeye uğramış bir cismin varlığı ve astronomik özellikleri, bu cisim optik yolla gözlenmese de, görülebilir eşinin kapalı bir yörünge üzerindeki hareketinin incelenmesiyle, dolaylı olarak belirlenebilmektedir. Bir beyaz cüce ya da bir nötron yıldızı da olabileceğinden, optik yolla görülemeyen cismin bir karadelik olduğuna kütlelerini belirlemek suretiyle karar verilebilecektir. Genel rölativite teorisi çerçevesi içinde, bir nötron yıldızının kütlelerinin $3,2 M_{\odot}$ den daha büyük olamayacağı gösterilmiştir [Rhoades ve Ruffini (1974)]. Örneğin, Sygnus X-1 çift yıldız sistemi içindeki görünmeyen üyenin kütlelerinin $9M_{\odot}$ mertebesinde olduğu belirlenmiş olduğundan bunun bir karadelik olduğu kesindir. Bunun gibi LMC X-1, A0620-00, SS433 çift yıldız sistemleri de birer karadelik

içerdikleri kesinleşmiş sistemlere örnek oluştururlar [Sato ve Nakamura (1986)].

Karadelikler oluşumları açısından, 1- Bir yıldızın son evresini oluşturanlar, 2- Galaksilerin ya da küresel kümelerin çekirdeklerinde oluşanlar, 3- Evrenin büyük patlamayı izleyen en erken çağlarındaki çok büyük homogensizliğin bir sonucu olarak oluşanlar, olmak üzere, üç grupta ele alınırlar. Gerçekten de bu gün küresel kümeler ve galaksilerin çekirdeklerinde kütleleri $10^{10} M_{\odot}$ ne kadar değişen çok büyük kütleli karadeliklerin varlığına ilişkin ikinci sıradaki oluşumu destekleyen bazı gözlemler de [Giacconi ve Ruffini (1980)] bulunmaktadır.

Karadeliklerin gözlenmesiyle ilgili olarak önem kazanan bir problem de, stasyoner bir karadelinin gravitasyon alanında taneciklerin hareketi problemidir. İlgili Riemannsal uzaylarda jeodezik denklemlerinin integrasyonuna karşılık, bütünüyle matematiksel, bu problem genellikle çözülebilmektedir. Bu konuda elde edilmiş bulunan sonuçlar Chandrasekhar tarafından yayınlanan monografide [Chandrasekhar (1992)] sunulmakta olup §(II.3) de bu konu ana hatlarıyla ele alınacaktır.

Bir yıldızın çökmesi sonucu değil fakat, madde ve enerji yoğunluğunun olağanüstü yüksek düzeyde bulunduğu, evrenin büyük patlamayı izleyen en erken çağlarında, homogensizliğin yol açtığı, kütlesi güneşin kütlesinden çok küçük (örneğin, 10^{15} gr. lık bir kütleyle sahip olmakla birlikte gravitasyon yarıçapı 10^{-13} cm. dolayında, yâni protonun yarıçapı mertebesinde) karadeliklerin de (primordial black-hole ya da mini black-hole) oluşabileceği öngörülmüştür [Zel'dovich and Novikov (1967), Hawking (1971)]. Tezimizin esas konusunu oluşturan bu küçük kütleli karadelikler bundan böyle *mini karadelikler (MKD)* olarak anılacaklardır.

Öte yandan, yakın çevresinden tanecik yayınlanması ile karadeliğin dönme enerjisinin azalması sonucunu doğuran Penrose sürecine [Penrose (1969)] bağlı olarak Kerr karadeliği, Schwarzschild karadeliğine evrimleşmektedir. Ancak açısal momentum sıfıra indirgenmiş olsa bile, bu hâlin de kararlı bir hâl olmayacağı ve ısıl emisyonla karadelikten sürekli bir şekilde tanecik yayınlanmasının devam edeceği Hawking tarafından gösterilmiştir [Hawking (1975)]. Penrose sürecine ve Hawking emisyonuna bağlı olarak karadeliğin sürekli bir kütle-enerji kaybı olayına *karadeliğin buharlaşması* denilmektedir. Küçük kütleli karadeliklerin çok daha büyük bir hızla buharlaşmaları yüzünden 10^{15} gr. dan daha küçük MKD lerin evrenin yaşından daha kısa bir süre içinde yok oldukları gösterilir [Hawking (1975)]. Bir yıldızın çökmesiyle oluşan karadelikler için buharlaşma, bunların yarıömürlerinin, kütlelerinin büyüklüğüne bağlı olarak, çok çok büyük olması yüzünden, ilgi çekici değildir.

Isıl emisyonla buharlaşan karadeliklerin sıcaklıkları kütleleriyle ters orantılıdır. Dolayısıyla daha sıcak olan küçük kütleli karadelikler daha fazla tanecik yayınlayarak kütle ve enerji kaybederler. Bu şekilde kütlesi azalan karadelik giderek büyük sıcaklığa sahip olacağından daha büyük bir hızla küçülecek ve süreç aşırı derecede yüksek enerjiye sahip olan her türlü taneciğin ortaya çıktığı, mini karadeliğin varlığına son veren bir patlamayla son bulacaktır. Bu gün evrende oluşabilecek bu türlü çok yüksek enerjili taneciklerin (ve fotonların) kaynağı olan patlamalar, evrenin ilk evrelerinde oluşmuş olan MKD lerin varlığının kanıtlarını oluşturacağı için, büyük bir önem taşımakla birlikte henüz bu yönde hiç bir gözlem verisi elde edilebilmiş değildir.

(II.1) Kruskal-Szekeres Koordinatları ve Küresel Simetrik Karadelik (Schwarzschild Karadeligi)

Einstein'in gravitasyon alan denklemlerinin küresel simetrik, statik çözümü, Schwarzschild koordinatlarında, M ile gravitasyon alanını doğuran cismin kütlesi ve m ile de $m \equiv \frac{GM}{c^2}$ gösterilmek üzere

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{II.1.1})$$

dir [Örneğin bkz. Adler, Bazin, Schiffer (1975)]. Bu yay elemanı $r = 2m$ için bir singülârite içermektedir. Öte yandan aynı metriğin

$$r = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2$$

dönüşümüyle elde edilen

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2} (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2]$$

şeklindeki İzotropik Formu $\rho = \frac{m}{2}$ için, ayrıca $R = r - m$ olmak üzere

$$X_1 = R \sin\theta \cos\varphi, \quad X_2 = R \sin\theta \sin\varphi, \quad X_3 = R \cos\theta$$

dönüşümüyle elde edilen

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{m}{R}}{1 + \frac{m}{R}} \right) (dx^0)^2 - \left(1 + \frac{m}{R} \right)^2 (d\vec{X})^2 - \left(\frac{1 + \frac{m}{R}}{1 - \frac{m}{R}} \right) \frac{m^2}{R^4} (\vec{X} \cdot d\vec{X})^2$$

şeklindeki Harmonik formu da $R = m$ için bir singülârite içermektedir. (II.1.1) in tekil olduğu $r = 2m$ değerine *Schwarzschild yarıçapı* (ya da *gravitasyon yarıçapı*) denilmektedir. Burada hemen belirtmemiz gereken nokta normal bir yıldız için, yarıçapıyla kıyaslandığında bunun çok küçük olduğu ve yıldızın içinde yer aldığıdır. Schwarzschild çözümü de zaten gök cisminin içinde geçerli olmayıp dışındaki gravitasyon alanının uzay-zaman geometrisini tasvir eder.

Görüldüğü gibi $r = 2m$ için (II.1.1) de, g_{11} sonsuz olurken g_{00} da sıfır olmaktadır.

Bu ise, $x_{(k)}^\mu$ noktasındaki ışık kaynağının frekansı ν_0 ve $x_{(a)}^\mu$ noktasında algılanan ışığın

frekansı da ν_a ile gösterilmek üzere

$$\frac{\nu_a}{\nu_0} = \left[\frac{g_{00}(x_{(k)}^\mu)}{g_{00}(x_{(a)}^\mu)} \right]^{1/2} = \left[\frac{1 - \frac{2m}{r_k}}{1 - \frac{2m}{r_a}} \right]^{1/2} < 1$$

olduğundan [Adler, Bazin, Schiffer (1975)] $r = 2m$ deki küresel yüzeyin bir sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olacağını gösterir.

Öte yandan (II.1.1) den görüleceği üzere, $r < 2m$ olduğunda g_{00} ve g_{11} metrik bileşenleri işaret değiştirmekte $g_{00} < 0$, $g_{11} > 0$ olmaktadır. Bu husus bizi $r < 2m$ için r ve t nin fiziksel anlamlarını yeniden düşünmeye sevk eder. Gerçekten de t eksenini boyunca bir evrim yolu (r, θ, ϕ ; sabit) için $ds^2 < 0$ (uzay cinsinden) ve r -ekseni boyunca bir evrim yolu için $ds^2 > 0$ (zaman cinsinden) olmaktadır. Bu yüzden $r < 2m$ için r yi zaman t yi de radyal koordinat olarak yorumlamak uygun görünmektedir. Ayrıca bir taneciğin hareketi söz konusu olduğunda, taneciğin evrim yolu boyunca $ds^2 > 0$ olmak zorunda olduğundan gravitasyon yarıçapı içinde kütleli bir test taneciğinin r nin sâbit bir değerine karşılık gelen bir hâlde bulunması mümkün değildir.

Bütün bu özellikler $r = 2m$ nin sıradışı bir yarıçap olduğunun göstergeleridir. Yukarıda vermiş olduğumuz gibi, her ne kadar, gerek izotropik koordinatlarda gerekse harmonik koordinatlarda metriğin içerdiği singülâritenin kaldırılamamış olması, uzay-zaman geometrisinin koordinat sistemlerinden bağımsız, özde $r = 2m$ için singüler olduğu anlamına gelmez. Nitekim $R^\mu{}_\mu$ skaler eğriliği, $R_{\lambda\mu\nu\sigma}R^{\lambda\mu\nu\sigma}$, metriğinin determinantı, ayrıca $R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma}$ eğrilik tansörü ve görel Newtonsal kuvvetlere karşı düşen $R^i{}_{0j0}$ büyüklükleri $r = 2m$ için sonludurlar. Örneğin $R^\mu{}_\mu$ skaler invariantı böyle bir singülâriteyi haiz olsaydı bu bütün koordinat sistemlerinde geçerli olurdu. Bütün bu hususlar, singülâritenin uzay-zaman geometrisini tasvir etmek üzere kullandığımız koordinatlardan kaynaklanan sâni bir singülârite olabileceğini kuvvetle telkin etmektedirler. Gerçekten de Kruskal koordinatlarında [Kruskal(1960)] bu singülâritenin kaldırılabilceğini göstereceğiz.

Şimdi bir test taneciğinin, $r = 2m$ yi de içeren bir dış Schwarzschild alanındaki serbest düşmesini (radyal hareketini göz önüne almak suretiyle) Schwarzschild

singülâritesinin özelliklerini, önce Schwarzschild koordinatları daha sonra da Kruskal koordinatları yardımıyla irdelemek istiyoruz. r ve t koordinatları $2m < r < \infty$ ve $-\infty < t < \infty$ için Schwarzschild geometrisini çok iyi tasvir etme imkanı sağlamakla birlikte, uygun seçilmiş bir başka koordinat takımıyla bu geometri, $r = 2m$ küresi ve bunun içindeki bölge de dahil olmak üzere, bütünüyle tasvir edilebilecektir.

Bir test taneciğinin Schwarzschild geometrisindeki, içeri doğru radyal hareketini göz önüne alalım. Schwarzschild alanında, r ve t için yazılan Euler-Lagrange hareket denklemleri radyal hareket için düzenlenerek

$$\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad \dot{r}^2 = \frac{2m}{r} \quad (\text{II.1.2})$$

şeklinde yazılırlar. Radyal hareket, önce test taneciğinin $\tau = \frac{s}{c}$ öz zamanının fonksiyonu olarak daha sonra da t koordinat zamanının fonksiyonu olarak incelenip sonuçlar karşılaştırılabilir.

Şimdi, (II.1.2) den r yi s nin fonksiyonu olarak alırsak

$$\frac{2}{3\sqrt{2m}} (r^{3/2} - r_0^{3/2}) = s_0 - s \quad (s = s_0 \text{ için } r = r_0) \quad (\text{II.1.3})$$

bulunur. Burada ilginç olan, (II.1.3) ün klâsik sonucun analogu olmasıdır. Görüldüğü gibi Schwarzschild yarıçapında bir singülârite söz konusu değildir ve tanecik $r = 0$ a kadar sürekli olarak düşebilir.

t koordinat zamanı cinsinden hareketi tasvir etmek için (II.1.2) den

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = -c \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad \left(\dot{r} \equiv \frac{dr}{ds}, \dot{t} \equiv \frac{dt}{ds} \right)$$

çekilerek integre edilecek olursa, $t = t_0$ için $r = r_0$ olmak üzere

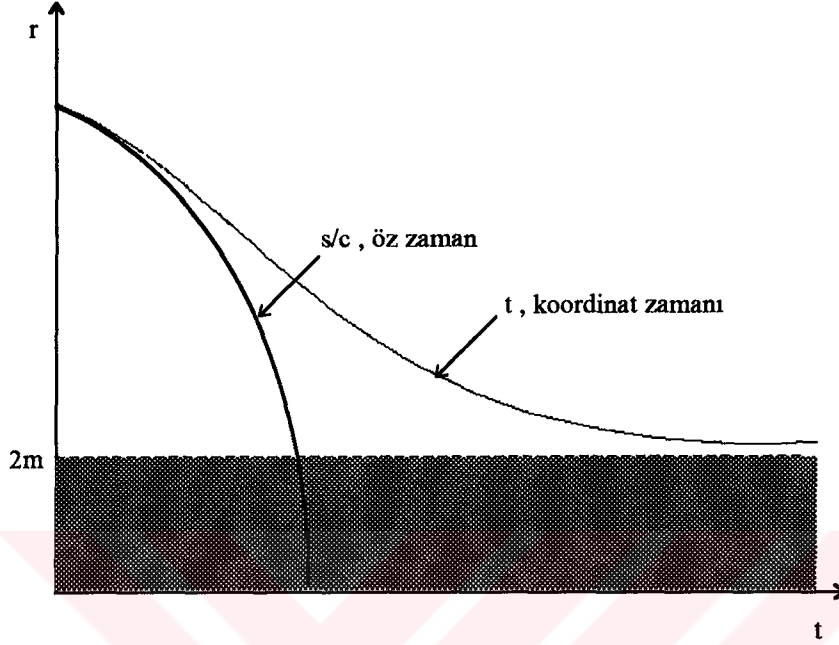
$$c(t_0 - t) = \frac{2}{3\sqrt{2m}} \left(r^{3/2} - r_0^{3/2} + 6m\sqrt{r} - 6m\sqrt{r_0} \right) - 2m \log \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{2m})(\sqrt{r_0} - \sqrt{2m})}{(\sqrt{r_0} + \sqrt{2m})(\sqrt{r} - \sqrt{2m})} \quad (\text{II.1.4})$$

bulunur. (II.1.3) ve (II.1.4) sonuçları, $r \gg 2m$ ve dolayısıyla $r_0 \gg 2m$ için yaklaşık olarak aynıdırlar. Fakat, r nin $2m$ ye çok yakın değerleri için (II.1.4) den asimtotik olarak

$$r - 2m = 8me^{-\frac{c}{2m}(t-t_0)}$$

olması gerektiği, dolayısıyla zaman koordinatı olarak t seçildiğinde test taneciğinin $r=2m$ ye yaklaşabileceği ancak bu sınırı geçemeyeceği görülür. r_0 başlangıç noktası $2m$ nin bir kaç katı alınmak suretiyle çizilen (II.1.3) ve (II.1.4), Şekil (II.1.1) de niteliksel olarak gösterilmiştir.

Buraya kadar sunduğumuz bilgilerden, Schwarzschild geometrisinin r ve t cinsinden tasvirinin sınırlı olduğu görülmektedir. Öz-zamanı kullandığımızda, $t = \infty$ a kadar olan olayları inceleyebilmemize rağmen, gök cisminden çok uzakta sükûnette bulunan bir gözlemcinin ölçtüğü zamanı temsil eden t nin önemi inkâr edilemez. Ancak bu durumda da $r = 2m$ den sonraki düşüşün fiziksel anlamı çelişkili bir hâl almaktadır. Şimdi tamamen



Şekil II.1.1 *Schwarzschild geometrisinde bir test taneciğinin , koordinat zamanı ve öz zaman cinsinden, orjine yönelik radyal hareketi*

matematik olarak, bu düşme olayının nasıl geliştiğini ortaya koymak ve Schwarzschild geometrisini uygun bir şekilde bütünüyle tasvir etmek üzere Kruskal koordinatlarını ele alacağız. Schwarzschild koordinatlarında ışığın radyal doğrultudaki evrim yolu için

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

olduğundan, radyal hızı

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2$$

olur. Buradan radyal koordinat hızının $r = 2m$ için sıfır olacağı görülmektedir. Bu ise, kuşkusuz Schwarzschild koordinatlarının istenmeyen bir özelliğini yansıtmaktadır. Bu durumu bertaraf etmek üzere r ve t koordinatlarından, boyutsuz u ve v koordinatlarına öyle bir dönüşüm bulalım ki bu yeni koordinatlarda ds^2 yay elemanı, f^2 ile Schwarzschild geometrisi içinde hiç bir yerde sıfır olmayan bir fonksiyon gösterilerek

$$ds^2 = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{II.1.5})$$

şeklinde olsun. Bu kez ışığın radyal hızı u , v cinsinden her yerde

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1$$

olur. Bu şekilde u , v koordinatlarında ışığın radyal doğrultuda yayılmasına ilişkin doğal bir sınır bulunmayacaktır.

Şimdi (II.1.5) den hareketle r , t koordinatlarından u , v koordinatlarına dönüşümü verecek diferansiyel denklemleri ve sıfırdan farklı $f(u, v)$ yi belirleyeceğiz. Metrik tansör için temel dönüşüm bağıntısının

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\mu\nu}$$

olduğu ve (II.1.1) ile (II.1.5) göz önünde bulundurularak

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 \right]$$

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \right]$$

$$g_{01} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial r}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Ancak bu denklemlerden u ve v nin işaretlerinin belirlenemeyeceğini belirtelim. Şimdi basitliği sağlamak üzere ξ ile yeni bir radyal koordinatı ve bir $F(\xi)$ fonksiyonunu

$$\xi = r + 2m \log \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (\text{II.1.7})$$

$$F(\xi) = \frac{1 - \frac{2m}{r}}{f^2(r)} \quad (\text{II.1.8})$$

şeklinde tanımlayacağız. (II.1.8) de yalnızca r ye bağlı bir $f(r)$ fonksiyonunun göz önüne alınmış olması, işin en can alıcı noktasını oluşturur. Gerçekten de (II.1.5) şeklindeki bir metriğe götüren sonsuz sayıda dönüşüm bulunmasına karşılık yalnızca bu varsayım bizi Kruskal koordinatlarına götürmekte ve $r = 2m$ deki singülârite giderilebilmektedir. (II.1.6) bağıntıları (II.1.7) ve (II.1.8) yardımıyla yeniden düzenlenecek olursa

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0}\right)^2 = F(\xi) \quad (\text{II.1.9})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = -F(\xi) \quad (\text{II.1.10})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial x^0} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{II.1.11})$$

olur. (II.1.9) ile (II.1.10) toplandıktan sonra elde edilen ifade ile (II.1.11) i bir kez toplar, bir kez de çıkarırsak

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \quad (\text{II.1.12})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \quad (\text{II.1.13})$$

denklemleri elde edilir. (II.1.12) de (+), (II.1.13) te (-) işaretini seçerek (her ikisinin işareti aynı seçilecek olursa dönüşümün Jacobien'i sıfır olmaktadır.)

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} + \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0} + \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} - \frac{\partial v}{\partial \xi} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x^0} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial x^0}$$

ve buradan da

$$\frac{\partial v}{\partial x^0} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x^0} \quad (\text{II.1.14})$$

bulunur. Buradan gerek u gerekse v nin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^{0^2}} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\text{II.1.15})$$

şeklinde dalga denklemini sağlamakta olduğu anlaşılır. (II.1.12) ve (II.1.13) de $J \neq 0$ olacak şekilde, işaretler şimdikininki tersi seçilecek olursa gene aynı (II.1.15) denklemleri elde edilirler.

Bilindiği gibi dalga denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} v &= h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0) \\ u &= \bar{h}(\xi + x^0) + \bar{g}(\xi - x^0) \end{aligned} \quad (\text{II.1.16})$$

şeklinde dir. (II.1.14) den $h(\xi + x^0) = \bar{h}(\xi + x^0)$ ve $g(\xi - x^0) = -\bar{g}(\xi - x^0)$ olacağından (II.1.16) ifadeleri yalnızca iki keyfi fonksiyona bağlı olarak,

$$\begin{aligned} v &= h(\xi + x^0) + g(\xi - x^0) \\ u &= h(\xi + x^0) - g(\xi - x^0) \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

olur. Bunlar (II.1.9) – (II.1.11) denklemlerinde yerlerine konacak olursa, (II.1.11) eşitliği otomatik olarak sağlanırken, (II.1.9) ve (II.1.10) dan birbirine eşdeğer aynı

$$-4h'(\xi + x^0)g'(\xi - x^0) = F(\xi) \quad (\text{II.1.18})$$

bağıntısı elde edilir. Bu denklem h , g ve F fonksiyonlarını belirleyebilmek bakımından önemli bir denklemdir.

Belirlemeye çalıştığımız dönüşümümüzde şu ana kadar r nin değişim aralığıyla ilgili olarak bir sınırlama yapmadık. Şimdi r nin $2m$ den büyük mü yoksa küçük mü olduğu konusunu belirterek, sınırda sürekli olacak şekilde farklı iki bölge için, farklı dönüşümler elde edeceğiz.

i) Önce $r \geq 2m$ olduğunu varsayalım: (II.1.8) den bu hâlde $F(\xi)$ nin pozitif olduğu görülmektedir. (II.1.8) denklemini çözmek için, bunu ξ ye ve x^0 a göre türetirsek, basit bir düzenlemeden sonra

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} + \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)}$$

$$0 = \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} - \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = 2 \frac{h''(\xi + x^0)}{h'(\xi + x^0)} \quad \left(= 2 \frac{g''(\xi - x^0)}{g'(\xi - x^0)} \right)$$

buradan da

$$[\log F(\xi)]' = 2 [\log h'(\xi + x^0)] \quad (\text{II.1.19})$$

olur. Bu denklemde bağımsız iki değişkenimiz ξ ve $\xi + x^0 \equiv y$ dir ve görüldüğü gibi bu denklemin her iki yanı bağımsız değişkenlerden yalnızca birinin fonksiyonudur. Bu ise (II.1.19) un her iki yanının aynı bir β sâbitine eşit olduğu anlamına gelir. Böylece

$$[\log h'(y)]' = \beta \quad \rightarrow \quad h'(y) = A_1 e^{\beta y} \quad \rightarrow \quad h(y) = \frac{A_1}{\beta} e^{\beta y} + B_1$$

$$[\log g'(y)]' = \beta \quad \rightarrow \quad g'(y) = A_2 e^{\beta y} \quad \rightarrow \quad g(y) = \frac{A_2}{\beta} e^{\beta y} + B_2$$

$$[\log F(\xi)]' = 2\beta \quad \rightarrow \quad F(\xi) = A_3 e^{2\beta \xi}$$

bulunur. Uygun olduğu için, $B_1 = B_2 = 0$, ayrıca (II.1.18) yardımıyla görüldüğü üzere, $F > 0$ olabilmesi için h ve g nin zıt işaretli olması gerektiğini de gözönünde bulundurarak $\frac{A_1}{\beta} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{A_2}{\beta} = -\frac{1}{2}$ seçilecek olursa, gene (II.1.18) den $A_3 = \beta^2$ olması gerektiği görülür. Buna göre

$$h(y) = \frac{1}{2} e^{\beta y} \quad , \quad g(y) = -\frac{1}{2} e^{\beta y} \quad , \quad F(\xi) = \beta^2 e^{2\beta\xi} \quad (\text{II.1.20})$$

olur. Böylece (II.1.7), (II.1.8), (II.1.17) ve (II.1.20) yardımıyla

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\beta} e^{\beta r} \text{ch}\beta x^0 \\ v &= \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{2m\beta} e^{\beta r} \text{sh}\beta x^0 \\ f^2 &= \frac{2m}{\beta^2 r} \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1-4m\beta} e^{-2\beta r} \end{aligned} \quad (\text{II.1.21})$$

elde edilir. Şimdi β keyfi sâbitinin değerini belirlemek istiyoruz. f^2 nin $r = 2m$ için sıfır ya da singüler olmaması koşulu göz önünde bulundurulacak olursa (II.1.21) eşitliklerinin sonuncusundan,

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1-4m\beta} = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - 4m\beta = 0$$

dolayısıyla $\beta = \frac{1}{4m}$ olması gerektiği görülür. Buna göre boyutsuz u , v koordinatları

$$u = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch} \frac{x^0}{4m}$$

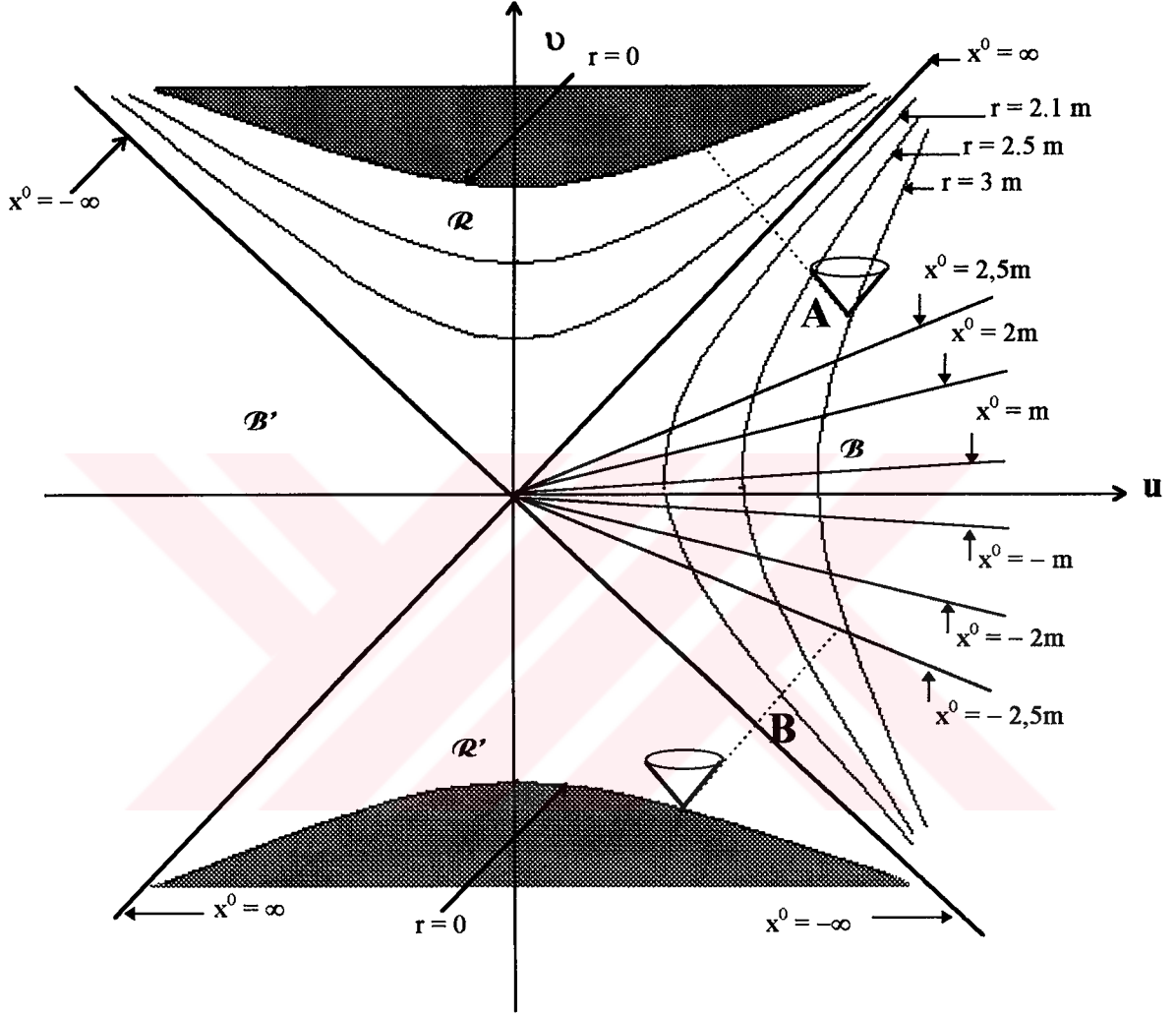
$$v = \sqrt{\frac{r}{2m} - 1} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh} \frac{x^0}{4m} \quad (r \geq 2m \text{ için}) \quad (\text{II.1.22})$$

$$f^2 = \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}}$$

şeklinde elde edilmiş olur. u , v düzleminin $r \geq 2m$ için (II.1.22) ile tanımlanan bölgesi, Şekil (II.1.2) de \mathcal{B} ile gösterdiğimiz $u \geq |v|$ bölgesidir. İlgili çekici bazı durumları irdeleyelim: r, t düzlemindeki $r = 2m$ doğrusu u, v düzleminde sonlu herhangi bir x^0 için $u = v = 0$ noktasına karşılık düşerken herhangi bir $r > 2m$ için $x^0 \rightarrow \infty$; $u = v$ ve $x^0 \rightarrow -\infty$ $u = -v$ doğrularına karşılık düşerler. Öte yandan \mathcal{B} deki diğer noktalar için durumu görebilmek üzere (II.1.22) den

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{\frac{r}{2m}}, \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tgh} \frac{x^0}{4m} \quad (\text{II.1.23})$$

şeklindeki ters dönüşümü çekelim. Buradan, $x^0 = \text{sâbit}$ doğruları ile $r = \text{sâbit}$ eğrilerinin sırasıyla bir ışınlar ve hiperboller şebekesi oluşturduğu görülmektedir (bkz. Şekil II.1.2). $r, 2m$ ye yaklaşırken, hiperboller $u = |v|$ doğrularına yaklaşırlar. Ancak tam $r = 2m$ için hiperbol $u = v = 0$ noktasına olur. (II.1.20) de h nin işaretini keyfî olarak pozitif seçmiştik ve bunun sonucu olarak g negatif olmalıydı. Eğer h için birinci kez yaptığımız seçimin tersini göz önüne alacak olursak g de işaret değiştirecek ve



Şekil II.1.2 Kruskal Koordinatlarında Schwarzschild geometrisi.

\mathcal{B} ve \mathcal{B}' bölgeleri $r > 2m$, \mathcal{R} ve \mathcal{R}' bölgeleri $r < 2m$ ye karşılıkta ve bir ışık ışınının radyal doğrultuda, içeri ve dışarı yöndeki yayılımı sırasıyla A ve B doğrularıyla gösterilmiş bulunmaktadır.

böylece (II.1.22) şeklindeki dönüşümlerimizde u ve v nin her ikisi de işaret değiştireceklerdir. Bu hâlde $-u$, $-v$ yi u , v ile değiştirmek suretiyle (u, v) düzleminde birbirini örtmeyen \mathcal{B} ve \mathcal{B}' bölgelerinin her ikisinin de gravitasyon yarıçapının dışını temsil edecekleri anlaşılır.

ii) $r < 2m$ için daha önce yaptığımız hesabı gözden geçirecek olursak, bu hâlde (II.1.8) den, F nin negatif olacağı dolayısıyla g ve h eksponansiyel fonksiyonlarının aynı işaretli olması gerektiği kolayca görülür. Önce g ve h nin her ikisinin de pozitif olduğu hâli göz önüne alalım. Bu hâlde daha önce izlediğimiz yoldan gravitasyon yarıçapı içinde, dönüşümümüzün,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{sh} \frac{x^0}{4m} \\ v &= \sqrt{1 - \frac{r}{2m}} e^{\frac{r}{4m}} \operatorname{ch} \frac{x^0}{4m} \\ f^2 &= \frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{4m}} \end{aligned} \quad (\text{II.1.24})$$

şeklinde olacağı kolayca görülür. (II.1.2) ve (II.1.24) dönüşümleriyle tanımlanan u , v koordinatlarına "Kruskal-Szekeres koordinatları" denilmektedir. (II.1.24) dönüşümü r , t düzlemindeki $r < 2m$ bölgesini, şekilde \mathcal{R} ile gösterilen $v > |u|$ bölgesine bağlar. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta (II.1.22) ve (II.1.24) dönüşümlerinin u , v düzleminde, $x^0 = \infty$ doğrusu üzerinde birbirine gitmekte olduğu hususudur ($x^0 = -\infty$ için de uygun bir işaret değişimi ile aynı durum görülecektir). Bu yüzden (II.1.22) ve (II.1.24) dönüşümleri

birbirleriyle tutarlıdırlar. Öte yandan (II.1.24) dönüşümünün tersi de

$$v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{r}{2m}\right) e^{\frac{r}{2m}} \quad (II.1.25)$$

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tgh} \frac{x^0}{4m}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde \mathcal{R} bölgesinde, x^0 ve r nin sâbit değerlerine karşılık, bir diğer ışınlar ve hiperboller ailesi elde edilir. (II.1.23) ve (II.1.25) tamamen birbirinin aynı olduğundan, $u = v$ sınırına her iki yandan yaklaşırken \mathcal{B} ve \mathcal{R} bölgelerinde elde edilen sonuçlar birbirleriyle tutarlı olacaklardır. r, t düzlemindeki $r = 0$ orijini, u, v düzleminde,

$$v^2 - u^2 = 1 \quad (r = 0 \text{ için})$$

hiperbolü ile temsil edilmektedir. Daha önce \mathcal{B}' bölgesi için tartışmış olduğumuz gibi \mathcal{R}' bölgesindeki (u, v) noktaları da \mathcal{B} deki noktalara karşılık düşürülebilir. Bu şekilde, birbirini örtmeyen \mathcal{R}' ve \mathcal{R} bölgeleri eşdeğer olarak r, t düzlemindeki $r < 2m$ bölgesini temsil ederler.

Kruskal koordinatlarında yazılmış, f^2 nin (II.1.22) ile verilen ifâdesine bağlı, (II.1.5) yay elemanı, Einstein denklemlerinin hiç bir yerde singüler olmayan bir çözümdür. Yalnızca $r = 0$ a karşılık düşen $v^2 - u^2 = 1$ hiperbolü boyunca Riemann tansörü bir singülârite içerir. Ayrıca, ilk isteğimize uygun olarak, Özel rölativitede olduğu gibi, ışık daima $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1$ doğruları boyunca yayılmaktadır. Bu yüzden u global radyal koordinat

ve v de global zaman koordinatını temsil eder. Bununla beraber Schwarzschild koordinatları gibi asimtotik uzaklıklarda küresel koordinatlara karşılıkmedikleri açıktır. Ayrıca (II.1.23) ve (II.1.25) aracılığıyla r nin, u ve v nin implisit fonksiyonu olarak tek bir biçimde tanımlanması istenir. Bunun mümkün olabilmesi, (II.1.25) in ilk eşitliğinde sağ yanın, r nin monoton bir fonksiyonu olmasına bağlıdır. Gerçekten de sağ yanın türevi

$$-\frac{r}{(2m)^2} e^{\frac{r}{2m}}$$

şeklinde olduğundan, sağ yanı oluşturan fonksiyon, $r > 0$ için monoton bir fonksiyondur. Bu durum yalnızca $r = 0$ için bozular. Bu yüzden Kruskal diyagramında $r = 0$ a karşılık gelen $v^2 - u^2 = 1$ hiperbolü kabul edilebilir bölgenin dışında bırakılmış bulunmaktadır.

Schwarzschild metriği her ne kadar \mathcal{B} , \mathcal{B}' ve \mathcal{R}' , \mathcal{R} bölgelerinde Einstein alan denklemlerinin tekil olmayan bir çözümü ise de $r = 2m$ de bir singülârite içermektedir. Oysa aynı bölgede, Einstein denklemlerinin gene tekil olmayan bir çözümü olan, Kruskal metriği $r = 2m$ de de bir tekillik içermemektedir.

Şimdi bir ışık ışınının, daha önce Schwarzschild koordinatlarında incelediğimiz, radyal doğrultuda içeriye, gravitasyon yarıçapına doğru yayılmasını, Kruskal koordinatları yardımıyla inceleyelim.

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{du}{dv}\right) = \pm 1 \quad \rightarrow \quad v = \mp u + C_{1,2}$$

olduğundan böyle bir ışın Şekil (II.1.2) deki A doğrusu ile temsil edilecektir. Kuşkusuz A doğrusu, -1 eğimine sahip doğru ailesinin üyelerinden yalnızca biridir. r , t cinsinden

bakıldığında, sonlu bir x^0 ve sonlu bir $r > 2m$ noktasından başlayarak $x^0 \rightarrow \infty$ için $r = 2m$ ye yaklaşan ışık ışınının bu sınırı aşıp Schwarzschild küresinin içine girmesi $x^0 = \infty$ için bile olsa mümkün olmaktadır. Bunu izleyen evrede r yörünge boyunca azalmaya devam ederken, artması gereken x^0 da azalır. x^0 ın Schwarzschild küresi içinde zaman koordinatını temsil etme açısından uygun olmadığı, bu şekilde bir kez daha görülmektedir. Kruskal koordinatları açısından gerek $r \geq 2m$ gerekse $r < 2m$ için bu türlü bir problem yoktur. A doğrusu boyunca $r = 0$ a doğru yayılan ışık ışını için radyal koordinata karşılık gelen u sürekli olarak azalırken, zaman koordinatına karşılık gelen v sürekli olarak artmaktadır. Schwarzschild küresinin içinden dışarı doğru yayılan bir ışık ışını için de Kruskal Koordinatları yayılmayı tutarlı bir biçimde tasvir etmektedirler. Örneğin, $r = 0$ dan, Schwarzschild küresinin dışına doğru yayılan B ışını göz önüne alalım. Bu ışın için r artarken, artması gerektiği hâlde x^0 azalır ve $x^0 = -\infty$ doğrusunu katederek dışarı çıkar. Schwarzschild küresinin dışındaki yayılma ise kuşkusuz r, t koordinatları bakımından tutarlıdır.

Yukarıdaki irdemeyle; aslında gelen ışığın Schwarzschild küresi tarafından bütünüyle yutulmakta olduğu görülmektedir. Ancak küreden çıkan ışığın, $x^0 = -\infty$ dan bu yana (yâni zamanın başlangıcından da önce) yayılıyor olması, böyle bir ışığın gözlenebilirliğini kuşkulu kılmaktadır. Bu hâliyle $r = 2m$ yüzeyinin, üzerine düşen bütün ışığı soğuran, hiç ışık yayınlamayan bir karadeliğin özelliklerine sahip olduğu anlaşılmaktadır. Işık için gördüğümüz bu durum maddesel tanecikler için de geçerlidir. Gerçekten, ışık konisinin içinde hareket eden maddesel tanecikler için yalnızca yörünge

eğimi farklı olup, bu kez $\left(\frac{du}{dv}\right) > 1$ bağıntısıyla belirlenecektir.

Bir sonraki paragrafta $r = m$ küresel yüzeyinin gerçekten de gerek maddesel tanecikler gerekse fotonlar için bir *tek yönlü zar yüzeyi* oluşturduğunu, farklı bir yaklaşımla gösterip özelliklerini inceleyeceğiz.



(II.2) Döner Karadelik (Kerr Karadeligi)

Kerr çözümü diye bilinen, Einstein denklemlerinin aksenel simetrik, stasyoner çözümü [Kerr (1963)], M gök cisminin kütlesi ve J de açisal momentumunun büyüklüğü olmak üzere, m ve cismin birim kütlesi başına açisal momentumun bir ölçüsü olan a ile

$$m \equiv \frac{GM}{c^2} \quad , \quad a \equiv -\frac{J}{Mc}$$

gösterilmek üzere, Boyer-Lindquist koordinatlarında [Boyer , Lindquist (1967)],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) c^2 dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - 2mr} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2mra^2 \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\varphi^2 + 2 \frac{2mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} c dt d\varphi \quad (\text{II.2.1})$$

şeklindedir.

Öncelikle, Kerr geometrisinde sükûnette bulunan bir kaynağın yayınladığı ışığın kırmızıya kaymasını ele alalım. §(II.1) de belirtmiş olduğumuz gibi x_k^μ noktasında sükûnetteki bir kaynağın ν_0 frekansıyla yayınladığı ışık x_k^μ noktasında

$$\nu = \nu_0 \left[\frac{g_{00}(x_k^\mu)}{g_{00}(x^\mu)} \right]^{1/2}$$

frekansı ile algılanmaktaydı. Açıkça görüldüğü gibi $g_{00}(x_k^\mu) = 0$ bağıntısını sağlayan

noktalardan yayınlanan ışık, bu hâlde $v=0$ (dolayısıyla $\lambda = \frac{c}{v} \rightarrow \infty$) olacağından, kırmızıya kayma gösterecek ve Kerr geometrisi içinde hangi noktada algılanırsa algılsın, ışık kaynağı görülmeyecektir. (II.1.1) de (II.2.1) metriklerinde g_{00} birbirinden $\frac{a}{r}$ nin ikinci mertebeden kuvvetleri kadar farklı olduğundan r nin büyük değerleri için Kerr ve Schwarzschild alanlarında kırmızıya kayma miktarlarının yaklaşık olarak aynı olacağını belirtelim. (II.2.1) de g_{00} büyüklüğünü sıfıra eşitlemek suretiyle, üzerinde sükûnette bulunan noktalardan yayınlanan ışığın sonsuz kırmızıya kayma gösterdiği noktaların geometrik yerini belirleyebiliriz. ρ nun reel olmasını sağlamak için $|a| < m$ olmak üzere

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) = 0$$

$$r = m \mp (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (\text{II.2.2})$$

bağıntısıyla tanımlanan iki yüzey elde edilir. Spinin sıfır olması hâlinde $r = 2m$ küresel yüzeyine ve $r = 0$ a indirgenmekte olan (II.2.2) yüzeylerinden, fiziksel bakımdan önemli olanı artı işaretlisidir. Bu yüzeyin, kutuplarında $m + (m^2 - a^2)^{1/2}$ ve ekvatorunda $2m$ yarıçapını haiz olduğu görülmektedir. Eksi işaretli yüzey ise, açıkça görüldüğü gibi, bütünüyle artı işaretli

$$r_{\infty} \equiv m + (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (\text{II.2.3})$$

yüzeyinin içinde kalmaktadır. r_{∞} gravitasyon yarıçapı mertebesinde olduğundan, (II.2.3) ile

tanımlanan *dış sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi* de Schwarzschild yüzeyi gibi, normal bir yıldız için, dış çözümün zaten geçerli olmadığı, yıldızın iyice iç kısmında kalır. Ancak gravitasyonel çökmeye uğramış aşırı yoğun bazı gök cisimleri (karadelikler) için bu yüzey gök cisminin dışında bulunabilecektir.

§(II.1) de ele aldığımız Schwarzschild yüzeyi, (i) üzerinde sükûnette bulunan kaynaklar için bir sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olmak ve (ii) fiziksel nesnelere için (maddesel tanecikler, fotonlar) tek yönlü zar yüzeyi olmak gibi iki temel role sahiptir. Oysa şimdi göstereceğimiz gibi Kerr alanında bu iki rol farklı iki yüzeye aittir.

Gerçekten de, Schwarzschild geometrisinde $r = \text{sâbit}$ küresel yüzeyi, normalini

$$n_{\alpha} = (0, 1, 0, 0) \quad \rightarrow \quad n^{\alpha}n_{\alpha} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

ile verildiğinden r nin $2m$ ye doğru azalan değerleri için sırasıyla, uzay cinsinden, ışık cinsinden ($r = 2m$ için) ve daha sonra da zaman cinsinden bir yüzeye dönüşür. Işık cinsinden bir yüzeyin ise, bir tek yönlü zar yüzeyi oluşturduğu [bkz.Ek-1] göz önünde bulundurulacak olursa sonlu bir uzay bölgesini sınırlayan $r = 2m$ yüzeyinin sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi olmanın yanısıra aynı zamanda, tek yönlü zar yüzeyi rolünü de üstleneceği anlaşılmaktadır.

Şimdi Kerr geometrisi için ışık cinsinden hiperyüzeyleri belirlemek istiyoruz. Bunun için öyle bir ışık cinsinden yüzey arayacağız ki, Kerr geometrisi gibi hem zamandan bağımsız olsun, hem de aksel simetrik bir yüzey olsun. Böyle bir yüzey kuşkusuz

$$u(r, \theta) = \text{sâbit}$$

şeklinde olacağından normalini de,

$$n_{\alpha} = u_{,\alpha} = \left(0, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, 0 \right)$$

olur. Metriğin kontravaryant bileşenleri [bkz.Ek-2] göz önünde bulundurularak, $\rho^2 \equiv (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$ olmak üzere, n^{α} ,

$$n^{\alpha} = g^{\alpha\beta} n_{\beta} = \left(0, -\frac{r^2 + a^2 - 2mr}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial r}, -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}, 0 \right)$$

şeklinde bulunur. Işık cinsinden bir yüzey elde edebilmek üzere n_{α} nın normu sıfıra eşitlenecek olursa

$$(r^2 + a^2 - 2mr) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 = 0$$

şeklinde bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözülebilmektedir. Gerçekten de

$$u(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

konarak

$$-(r^2 + a^2 - 2mr) \frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 = \frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{d\Theta}{d\theta} \right)^2$$

olur. Bu ifadenin her iki yanının aynı bir pozitif sâbite eşit olması gerektiği açıktır. Bu sâbiti λ ile ve C ile de bir başka integrasyon sâbiti gösterilerek

$$\Theta = C \exp \sqrt{\lambda} \theta$$

bulunur. Ancak, periyodik olmadığı için bu çözüm kabul edilebilir bir çözüm olmayıp, $\lambda = 0$ olmadıkça reel bir yüzeye karşılıkmaz. $\lambda = 0$ hâlinde ise Θ bir sâbit olacağından çözüm θ ya bağlı olmayacaktır.

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 (r^2 + a^2 - 2mr) = 0$$

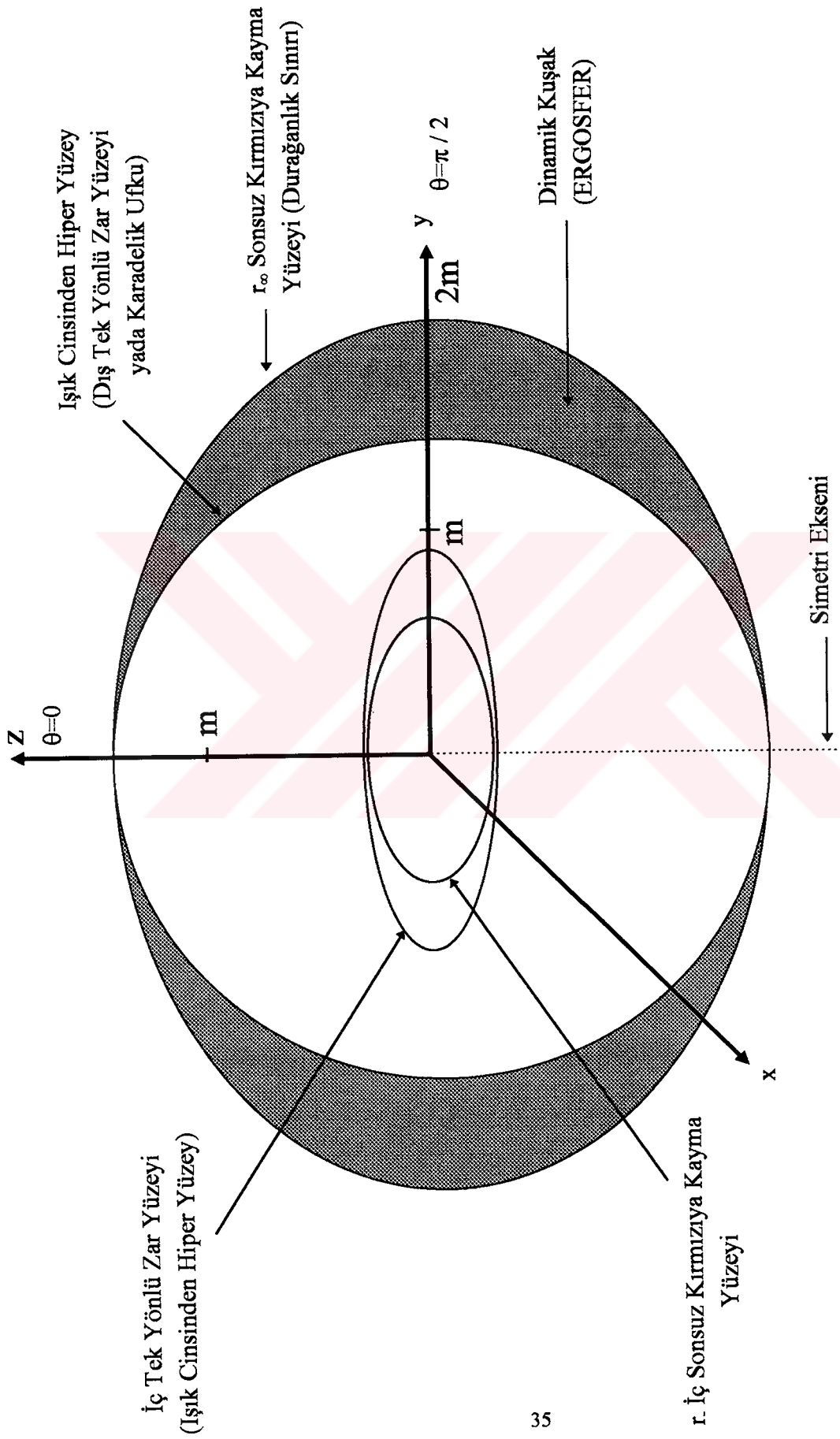
olur. $\frac{dR}{dr} = 0$ çözümü bir yana bırakılacak olursa, buradan

$$r_{\mp} = m \mp (m^2 - a^2)^{1/2} \quad (|a| < m) \quad (\text{II.2.4})$$

şeklinde iki çözüm elde edilir. Yalnızca $|a| < m$ için tanımlı bu iki küresel yüzey, görüldüğü gibi, $a \rightarrow 0$ limitinde $r = 2m$ Schwarzschild yüzeyine ya da $r = 0$ a indirgenmektedir. $r_+ = m + (m^2 - a^2)^{1/2}$ dış tek yönlü zar yüzeyi, Kerr alanında içine girebilen nesnelere geri dönemediği bir bölgeyi sınırlamakta olduğundan karadelik ufku oluşturur. Gerek, *iç tek yönlü zar yüzeyi* gerekse, *iç sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi* Şekil (II.2.1) de görüldüğü gibi bütünüyle karadelik ufku içinde kaldığından fiziksel bakımdan bir önem taşımazlar.

Öte yandan, (II.2.3) dış sonsuz kırmızıya kayma yüzeyinin her iki yönde de bir engel oluşturmadığı, dolayısıyla bir tek yönlü zar yüzeyi olmadığı kolaylıkla görülebilir. Gerçekten de bu yüzey, normal ve normalinin normu

$$n_{\alpha} = u_{,\alpha} = \left(0, 1, -\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{(m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}, 0 \right)$$



Şekil II.2.1 Kerr metriği için farklı yüzeylerle temsil edilen, sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi (durağanlık sınırı) ile karadelik ufku. Bu iki yüzey arasında kalan ergosfer olarak gösterilmiştir.

$$n^{\alpha}n_{\alpha} = -\frac{1}{\rho^2} \left[r^2 + a^2 - 2mr + \frac{a^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right] < 0$$

olduğundan uzay cinsinden yüzey olup, ufuk yüzeyi ile çakıştığı $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ noktaları dışında bir tek yönlü zar yüzeyi değildir.

Şimdi gravitasyonel çökmeyle yüzeyi sonsuz kırmızıya kayma yüzeyine yaklaşan bir yıldız göz önüne alalım. Eğer yıldız, dışındaki alanın Schwarzschild alanıyla belirlendiği bir yıldız ise yüzeyindeki bir atom sükûnette bulunacak yâni $r = \text{sâbit}$, $\theta = \text{sâbit}$, $\varphi = \text{sâbit}$ olan bir evrim yoluna sahip olacaktır. Yıldızın yüzeyi $r = r_{\infty}$ yüzeyine eriştiğinde de, bu yüzeyde sükûnette bulunacak atomların yayınladığı ışık sonsuz kırmızıya kayma göstereceğinden yıldız artık görünmeyecektir. Dönen bir yıldız için durum bundan farklıdır. Bu hâlde yıldızın yüzeyinde bulunan atomlar için φ sâbit olmayacağından, koordinat sistemine göre sükûnette olmayacaklardır. Bu yüzden Kerr alanını doğuran yıldızın yüzeyi, $r = r_{\infty}$ yüzeyine eriştiğinde üzerindeki atomlar $r = r_{\infty}$ yüzeyine göre sükûnette olmayacaklarından yayınlayacakları ışık sonsuz kırmızıya kayma gösteremeyecektir. Daha önce belirtmiş olduğumuz gibi Kerr alanında $r = r_{\infty}$ yüzeyi üzerinde sükûnette bulunan bir atomun yayınlayacağı ışık sonsuz kırmızıya kayma gösterir. Hem bu yüzden hem de bu yüzeyin bir tek yönlü zar yüzeyi olmaması yüzünden, $r = r_{\infty}$ yüzeyine erişen bir yıldızın, Schwarzschild alanında olduğu gibi, bir karadelik olacağı söylenemez. Buna karşılık $r = r_{+}$ tek yönlü zar yüzeyi için durum farklıdır. Bu yüzeyde bulunan bir kaynağın, hareketi ne olursa olsun, yayınlayacağı ışık bu yüzeyin dışına kaçamayacaktır. Bu yüzden, dönen bir yıldız ancak $r = r_{+}$ yarıçapına büzülmesi hâlinde bir karadelik olur.

$r = r_*$ yüzeyi ile $r = r_+$ yüzeyleri arasındaki bölgeye *dinamik kuşak* ya da *ergosfer* denilmektedir. Çok önemli olaylara yataklık eden bu bölgenin genel özelliklerine bir sonraki paragrafta değineceğiz. Burada belirtilmesi gereken nokta, gerek sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi üzerinde gerekse dinamik kuşak içinde bir maddesel taneciğin asla sükûnette olamayacağıdır. Bilindiği gibi bir maddesel taneciğin evrim yolu için daima $ds^2 > 0$ dır. Öte yandan g_{00} in, $r = r_*$ yüzeyinin, dışında pozitif, üzerinde sıfır ve içinde negatif olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, dinamik kuşak içinde ds^2 nin pozitif olmasının, maddesel taneciğin asla $r = \text{sâbit}$, $\theta = \text{sâbit}$, $\varphi = \text{sâbit}$ hâlinde bulunmamasına bağlı olduğu anlaşılır. Ayrıca, sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi üzerinde de taneciğin sükûnette bulunması mümkün olamazdı çünkü $dr = d\theta = d\varphi = 0$ olduğu bu hâlde, $r = r_*$ yüzeyi üzerinde bir de $g_{00} = 0$ olduğundan bu tanecik için $ds^2 = 0$ olacak, yâni sükûnette olan taneciğin ışık hızıyla hareket etmekte olduğu gibi kabul edilemez bir sonuç ortaya çıkacaktı. Bu bakımdan sonsuz kırmızıya kayma yüzeyine *statiklik sınırı* da denilmektedir.

Kerr karadeliğinin alanında, özellikle dinamik kuşak içinde, bir test taneciğinin hareketinin özelliklerini, alanın Killing vektörleri yardımıyla bir sonraki paragrafta inceleyeceğiz ve klâsik benzeri olmayan çok ilgi çekici bazı sonuçların varlığını göstereceğiz.

(II.3) Penrose Süreci ve Kerr Karadeliğinin Alanında Hareket Problemi

Bilindiği gibi $\vec{\xi}$ Killing vektör alanı ile tasvir edilen simetriye sahip bir geometride; *"herhangi bir geodezik boyunca göz önüne alınan hareket, jeodeziğin teğeti ile Killing vektörünün skaler çarpımını sâbit bırakır."* biçiminde ifade edilen bir teorem geçerlidir. Yâni, \vec{p} ile, daima yörüngenin teğeti doğrultusunda bulunan, dörtlü momentum vektörü gösterilmek üzere

$$\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$$

ifâdesi bir *"hareket sâbiti"* tanımlamaktadır [bkz. Ek-3]. Buna göre, $\frac{\partial}{\partial t}$ ile $r = \text{sâbit}$, $\theta = \text{sâbit}$, $\varphi = \text{sâbit}$ ve $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ile de $t = \text{sâbit}$, $r = \text{sâbit}$, $\theta = \text{sâbit}$ koordinat eğrilerinin teğet vektörlerini göstererek, eksenel simetrik stasyoner metriğin

$$\vec{\xi}_{(t)} \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\xi}_{(\varphi)} \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{II.3.1})$$

şeklindeki Killing vektörleri [bkz. Ek-3] aracılığıyla (*)

$$p_0 = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = E \quad (\text{II.3.2})$$

$$p_\varphi = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(\varphi)} = -L_z \quad (\text{II.3.3})$$

(*) Not: Bu paragrafta, ışık hızı ve gravitasyon sâbiti sırasıyla $c=1$ ve $G=1$ alınacaktır.

olacağı, yâni aksenel simetrik stasyoner alandaki bir hareketin hareket sâbitlerinin, taneciğin enerjisi ile açısal momentumunun karadeliğin dönme ekseni doğrultusundaki bileşeni olduğu görülür.

Şimdi dönen karadeliğin alanında μ kütleli bir test taneciğinin hareketini göz önüne alalım. Bu alanda önceden verilmiş herhangi bir noktadan geçen yörüngeler için taneciğin E enerjisinin her değeri alamayacağı ve E üzerinde bazı sınırların bulunacağı gösterilebilir. Bunun için verilen noktada yerel bir dik koordinat sistemi seçelim. Bu sistemde dörtlü hız vektörü, \vec{v} ile uzay kısmı gösterilerek, $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere

$$\vec{u} = (\gamma, \gamma\vec{v})$$

ve $\vec{\xi}_{(t)}$ ile, $\vec{\xi}_{(t)}$ Killing vektörünün uzay kısmı gösterilerek

$$\vec{\xi}_{(t)} = (\xi^0, \vec{\xi})$$

olacağından, (II.3.2) de göz önünde bulundurularak

$$E = \vec{p} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = \gamma\mu(\xi^0 - \vec{v} \cdot \vec{\xi}) \quad (\text{II.3.4})$$

yazılabilir. Yerel olarak Öklitsel, 3-boyutlu uzaydaki skaler çarpıma karşılık gelen

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = |\vec{v}| |\vec{\xi}| \cos\alpha$$

nin ekstremumları

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = \pm v \xi \quad (\text{II.3.5})$$

dir. Öte yandan (II.2.1) den görüleceği üzere, $\vec{\xi}_{(t)}$ nin normunun karesi, $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ olmak üzere

$$\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) \quad (\text{II.3.6})$$

şeklinde olduğundan $r > r_*$ için $g_{00} > 0$ ve $r < r_*$ için de $g_{00} < 0$ dir. Bu da $\vec{\xi}_{(t)}$ nin ergosfer içinde daima uzay cinsinden, statiklik sınırının dışında ise daima zaman cinsinden olacağı anlamına gelir. Bu durumda iki temel hâl göz önüne alınabilir.

i) $\vec{\xi}_{(t)}$ uzay cinsinden ise: $\xi^0 < \xi_{\underline{}}$ olduğu bu hâlde $\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} < 0$ olacağından göz önüne alınan nokta ergosfer içinde bulunacaktır. (II.3.4) den görülebileceği gibi

$$E_{\text{ext}} = \gamma \mu (\xi^0 \pm v \xi_{\underline{}})$$

olduğundan, bu noktadan geçen yörüngelere sahip taneciğin enerjisi için

$$-\infty < E < \infty$$

değerleri mümkün olabilecektir. Yâni taneciğin enerjisi her türlü değeri alabilecek bu arada negatif de olabilecektir. Sonsuz limitler, $v \rightarrow 1$ dolayısıyla $\gamma \rightarrow \infty$ değerlerine karşılıklı olarak birlikte, bir maddesel tanecik için daima $v < 1$, dolayısıyla momentum dörtlü vektörünün daima zaman cinsinden olacağına dikkat edilmelidir.

ii) $\vec{\xi}_{(t)}$ zaman cinsinden ise : $\xi^0 > \xi_{\underline{}}$ olduğu bu hâlde $\vec{\xi}_{(t)} \cdot \vec{\xi}_{(t)} = g_{00} > 0$ olacağından göz önüne alınan nokta ergosferin dışında bulunacaktır. Bu hâlde (II.3.4) ifâdesinin sağ yanı daima pozitif olacağından E de daima pozitiftir. (II.3.5) ifâdesi örneğin,

pozitif işaretle göz önüne alınır ve (II.3.4) de yerine konursa (eksi işaretinin seçilmesi de aynı sonuca götürmektedir),

$$E_{\text{ext}} = \gamma\mu(\xi^0 \pm v\underline{\xi}) = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}(\xi^0 - v\underline{\xi})$$

olur. Bu ifade kareye kaldırılarak düzenlenecek olursa

$$\left(\underline{\xi}^2 + \frac{E^2}{\mu^2}\right)v^2 - 2\xi^0 \underline{\xi} v + \left((\xi^0)^2 - \frac{E^2}{\mu^2}\right) = 0$$

şeklinde v ye göre ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı sıfıra eşitlenerek v nin ekstremumlarına karşılık gelen değerler

$$\frac{E^2}{\mu^2} \left(\frac{E^2}{\mu^2} + \underline{\xi}^2 - \xi^{0^2} \right) = 0$$

ifadesi yardımıyla belirlenirler. $E = 0$ anlamsız hâli bir yana bırakılacak olursa $\frac{E}{\mu}$ nün alt sınırının,

$$\frac{E^2}{\mu^2} = (\xi^0)^2 - \underline{\xi}^2 = \bar{\xi}_{(t)} \cdot \bar{\xi}_{(t)}$$

ile, yâni o noktadaki Killing vektörünün normunun karesi ile belirleneceği anlaşılır. Böylece

$\frac{E}{\mu}$ nün, yalnızca pozitif değerler aldığı bu hâlde

$$\left(\bar{\xi}_{(t)} \cdot \bar{\xi}_{(t)}\right)^{1/2} \leq \frac{E}{\mu} < \infty$$

aralığında değişeceği görülmüş olur.

Öte yandan bilindiği gibi Kerr metriği, v , ψ , λ_1 ve λ_2 , r ve θ ya bağlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$ds^2 = e^{2v} dt^2 - e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 - e^{2\lambda_1} dr^2 - e^{2\lambda_2} d\theta^2$$

şeklinde yazılabilmektedir [Lightman, Press, Price, Teukolsky (1975)]. Buradan, metriğin $g^{\mu\nu}$ kontravaryant bileşenlerinin de

$$g^{00} = e^{-2v}, \quad g^{0\phi} = \omega e^{-2v}, \quad g^{\phi\phi} = -[e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2v}], \quad g^{rr} = -e^{-2\lambda_1}, \quad g^{\theta\theta} = -e^{-2\lambda_2}$$

olduğu görülür. μ Sükûnet kütlesine sahip bir tanecik için,

$$\mu^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = p^\nu p_\nu = g^{\lambda\nu} p_\lambda p_\nu$$

$$= e^{-2v} p_0^2 + 2\omega e^{-2v} p_0 p_\phi - e^{-2\lambda_1} p_r^2 - e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 - [e^{-2\psi} - \omega^2 e^{-2v}] p_\phi^2$$

ifadesi, $p_0 = E$ olduğu da göz önünde bulundurularak düzenlenecek olursa

$$E^2 + (2\omega p_\phi)E - [(e^{2v-2\psi} - \omega^2) p_\phi^2 + e^{2v}(e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2)] = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$E = -\omega p_\phi \pm \left[e^{2\nu-2\psi} p_\phi^2 + e^{2\nu} (e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2) \right]^{1/2}$$

dir. Sonsuzda sükûnetteki $(p_r = p_\theta = p_\phi = 0)$ bir tanecik için $E \rightarrow +\mu$ olmasını sağladığından, yalnızca + işaretli terimi içeren kök kabul edilebilir çözümü temsil etmektedir. Buna göre, E nin negatif olduğu hâller için, $p_\phi (= L_z)$ nin pozitif olması ve aynı zamanda

$$\left[e^{2\nu-2\psi} p_\phi^2 + e^{2\nu} (e^{-2\lambda_1} p_r^2 + e^{-2\lambda_2} p_\theta^2 + \mu^2) \right]^{1/2} < \omega p_\phi \quad (\text{II.3.7})$$

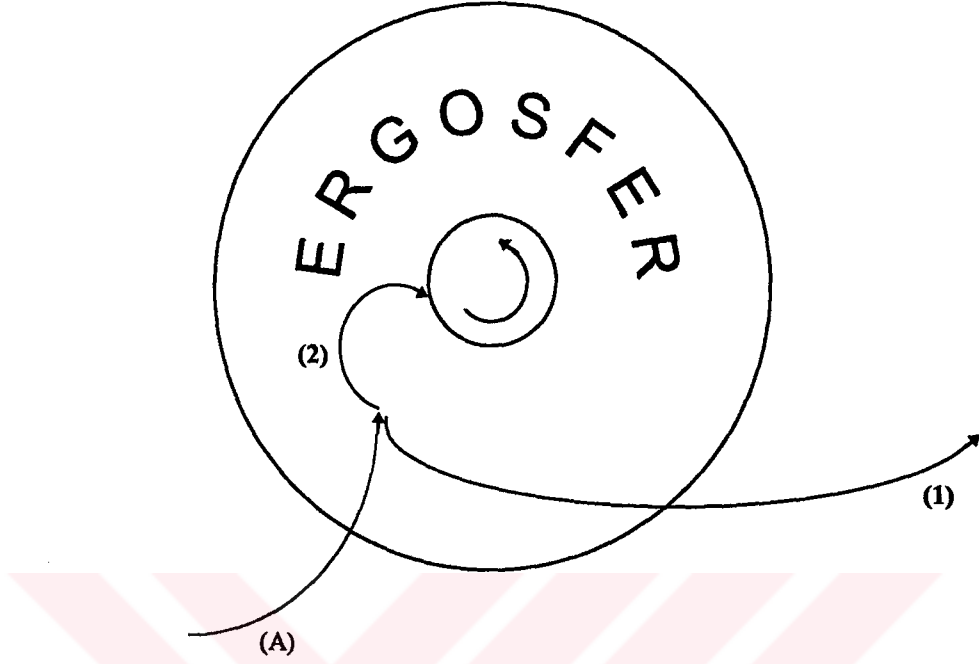
koşulunun sağlanması gerekir. Buradan, Kerr alanında E nin ancak ergosfer içinde negatif olabileceği bir kez daha görülebilir. Gerçekten de, örneğin $(p_r = p_\theta = 0)$ olacak şekilde bir hareket yapan, oldukça rölativist bir tanecik $(\mu \rightarrow 0)$ için (II.3.7) den

$$e^{2\nu-2\psi} < \omega^2$$

$$e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi} = g_{00} < 0$$

olacağı yâni, (II.3.6) dalaıısıyla, ergosfer içinde E nin negatif olacağı anlaşılır.

Şimdi Şekil II.3.1 deki gibi, sonsuzdan gelip ergosfere giren bir A taneciği, herhangi bir biçimde iki taneciğe ayrılmış olsun. Ergosferde $\bar{\xi}_{(t)}$ killing vektörünün uzay cinsinden olması, §(II.2) de farklı bir irdelemeyle göstermiş olduğumuz gibi, bu bölgede sükûnet hâlinin mümkün olamayacağını gösterir. Gerçekten de dört boyutlu uzay - zamanda teğeti $\bar{\xi}_{(t)}$ ile belirlenen, uzay cinsinden bir yörüngeyi izlemesi mümkün olmadığından (1) ve (2)



Şekil II.3.1 Dönen bir karadeliğten Penrose sürecine bağlı enerji sağımının şematik olarak gösterimi.

tanecikleri ya karadeliğe ya da ergosferin dışına doğru, hareket etmek zorundadırlar. Bozunmadan önce ve sonrası için, dörtlü momentum korunumu

$$\bar{p}^{(A)} = \bar{p}^{(1)} + \bar{p}^{(2)}$$

dir. Bu ifâdenin her iki yanının $\bar{\xi}_{(t)} = \frac{\partial}{\partial t}$ Killing vektörü ile skaler çarpımı

$$E^{(A)} = E^{(1)} + E^{(2)} \quad (\text{II.3.8})$$

şeklindeki enerji korunumunu verir. Buradan karadeliğe aktarılan enerji ise

$$\Delta W = E^{(A)} - E^{(1)} = E^{(2)} = \vec{p}^{(2)} \cdot \vec{\xi}_{(t)}$$

olur. Böylece, bozunma ergosfer dışında ise, her iki taneciğin de p_ϕ leri negatif dolayısıyla enerjileri pozitif olacağından karadeliğin enerji kazanacağı, bozunma ergosfer içinde ise, bu hâlde bozunmadan sonra oluşan (2) taneciğinin enerjisi negatif olabileceğinden karadeliğin enerji kaybedeceği anlaşılmış olur. Bu son hâlde, (II.3.8) dolayısıyla, $E^{(1)} > E^{(A)}$ olduğundan (1) taneciği, giren taneciğe göre daha büyük bir enerjiyle ergosferi terketmektedir. Bu şekilde yörüngeleri ergosfere uzanan tanecikler yardımıyla bir Kerr karadeliğinden enerji sağlanabileceği ve böyle bir sürecin sonunda karadeliğin, açısal momentumu sıfıra indirgenmiş bir Schwarzschild karadeliğine evrimleşeceği anlaşılır [Penrose (1969)].

Şimdi dönen bir karadeliğin alanında bulunan bir test taneciğinin hareket denklemlerini ve hareketinin özelliklerini incelemek istiyoruz.

λ parametresi, τ öz-zamanı cinsinden $\tau \equiv \mu\lambda$ şeklinde tanımlanan bir parametre olmak üzere μ kütleli bir test taneciğinin momentum dörtlü vektörü

$$p^\alpha = \mu u^\alpha = \mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

dır. Süper-Hamilton fonksiyonunu

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \tag{II.3.9}$$

şeklinde tanımlayıp

$$S = \int (p_\alpha dx^\alpha - \mathcal{H} d\lambda)$$

aksiyonu yardımıyla ve $\delta S = 0$ aksiyon ilkesinden hareketle taneciğin

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

şeklindeki hareket denklemlerinin elde edilebileceği ise kolayca gösterilebilir [Misner, Thorne, Wheeler (1973)]. Taneciğin hareketini Hamilton-Jacobi formalizmi [Goldstein (1980)] ile incelerken, (II.3.9) u göz önünde bulundurup hareket denklemlerinin çözümlerini elde edeceğiz [Carter(1968)].

Kerr alanının, eksenel simetrik ve stasyoner bir alan olması, bu alanda hareket eden bir tanecik için $p_0 = E$ ve $p_\phi = -L_z$ büyüklüklerinin birer hareket sâbiti olmalarını sağlamakta idi. Bunların yanısıra momentum dördü vektörünün normu da

$$|\vec{p}|^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \mu^2$$

olduğundan korunmaktadır. Şimdi, $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$ olmak üzere

$$\mathcal{H} \left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \right) = - \frac{\partial S}{\partial \lambda} \quad (\text{II.3.10})$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denklemi (II.3.9) göz önünde bulundurularak düzenlenecek olursa

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{II.3.10})$$

denklemini elde edilir. Öte yandan Boyer-Lindquist koordinatlarında, (II.2.1) ile verdiğimiz Kerr metriğinin, $G = 1$ ve $c = 1$ alınan sistemde $m = M$ olduğuna da dikkat ederek

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr$$

olmak üzere

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

şeklinde yazılabilen ifâdesini [d'Inverno (1992)] göz önüne alalım. Buna göre metrik tansörün, Ek-2 de verilen, $g^{\alpha\beta}$ kontravaryant bileşenleri (II.3.10) a taşınacak olursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} = & -\frac{1}{2\Delta\rho^2} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right]^2 + \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{\partial S}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 \\ & + \frac{\Delta}{2\rho} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (II.3.11)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemi değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözmek üzere

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (II.3.12)$$

alalım.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} \mu^2$$

olduğundan

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = -\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\mu^2$$

den

$$\bar{S}(\lambda) = -\frac{1}{2}\mu^2\lambda \quad (\text{II.3.13})$$

olması gerektiği görülür. Öte yandan $p_0 = E$ ve $p_\varphi = -L_z$ şeklindeki hareket sâbitleri yardımıyla da

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = E \quad \rightarrow \quad S_0(t) = E t \quad (\text{II.3.14})$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = -L_z \quad \rightarrow \quad S_3(\varphi) = -L_z\varphi \quad (\text{II.3.15})$$

olacağından (II.3.13) - (II.3.15), (II.3.12) de yerine konarak S aksiyonu

$$S = -\frac{1}{2}\mu^2\lambda + Et - L_z\varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (\text{II.3.16})$$

olur. Bu son ifâdeyi (II.3.11) denkleminde taşıyıp

$$-\mu\rho^2 = -\frac{1}{\Delta} \left[E(r^2 + a^2) - aL_z \right]^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} \left[L_z - aE\sin^2\theta \right]^2 + \Delta \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

şeklinde yazılabilen denklemi ayrıştıracak olursak

$$P \equiv E(r^2 + a^2) - aL_z \quad (\text{II.3.17})$$

olmak üzere, K ile ayrışım sâbiti gösterilerek

$$\begin{aligned}
& -\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} - L_z^2 - a^2 E^2 + 2aEL_z - \Delta \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \\
& = \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] + \left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K
\end{aligned} \tag{II.3.18}$$

yazılır. Böylece

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K - \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \equiv \Theta \tag{II.3.19}$$

$$\Delta^2 \left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 = P^2 - \Delta \left[\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + K \right] \equiv R \tag{II.3.20}$$

den

$$S_2 = \int \sqrt{\Theta} d\theta \quad , \quad S_1 = \int \Delta^{-1} \sqrt{R} dr$$

bulunurlar. S_1 ve S_2 (II.3.16) da yerine konacak olursa S aksiyonu

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \phi + \int \Delta^{-1} \sqrt{R} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta$$

olur. α_i sâbitlerini

$$\alpha_1 \equiv \mu^2 \quad , \quad \alpha_2 \equiv E \quad , \quad \alpha_3 \equiv L_z \quad , \quad \alpha_4 \equiv K + (L_z - aE)^2$$

şeklinde alıp, $\frac{\partial S}{\partial \alpha_4}$, $\frac{\partial S}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial S}{\partial E}$, $\frac{\partial S}{\partial L_z}$ ifâdelerini sıfıra eşitlemek suretiyle, test

taneciğinin yörüngesini tasvir eden, sırasıyla

$$\int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}$$

$$\lambda = \int \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}}$$

$$t = \int \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta \sqrt{R}} dr + \int \frac{-a(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sqrt{\Theta}} d\theta \quad (\text{II.3.21})$$

$$\varphi = \int \frac{aP}{\Delta \sqrt{R}} dr + \int \frac{-(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}} d\theta$$

denklemleri elde edilir. Şimdi yukarıdaki denklemler yardımıyla kolayca düzenleyeceğimiz, hareket denklemlerinin,

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

(II.3.22)

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \left(aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{a}{\Delta} P$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} P$$

şeklindeki ilk integrallerini, çeşitli başlangıç koşulları altında incelemek suretiyle, Kerr alanındaki test taneciğin hareketinin özelliklerini belirlemek istiyoruz. Bunun için önce,

özellikle bir karadeliğin alanında önem kazanan, iki hâl için çözümün mümkün olduğunu gösterip özelliklerini irdedeceğiz.

i) Karadeliğin ekseninden Geçen Çember Yörünge :

Bu hâlde (II.3.22) nin yalnızca ilk iki denklemini göz önünde bulunduracağız. Böyle bir yörünge için, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ de, yâni karadeliğin ekseninde $\frac{d\theta}{d\lambda}$ nın reel olabilmesi için, Θ nın bu eksen üzerinde pozitif olması gerekir. Ayrıca bu hâlde $L_z = 0$ olacağı da göz önünde bulundurularak (II.3.19) dan K hareket sâbitinin

$$K > a^2 (\mu^2 - E^2)$$

olması gerektiği görülür. Buna göre

$$T \equiv K - a^2 (\mu^2 - E^2) > 0$$

olmak üzere (II.3.17) ve (II.3.20) yardımıyla (II.3.22) nin ilk denklemi

$$\rho^4 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = R = E^2 (r^2 + a^2)^2 - \Delta [\mu^2 (r^2 + a^2) + T] \quad (\text{II.3.23})$$

olur. Buna göre, V_r efektif potansiyeli, $\frac{dr}{d\lambda} = 0$ olduğu dönüm noktasında $E^2 - V_r^2 = 0$ bağıntısıyla tanımlanmakta olduğundan [Golstein (1980), Misner, Thorne, Wheeler (1973), Adler, Bazin, Schiffer (1975)] (II.3.23) sıfıra eşitlenmek suretiyle E çekilip V_r efektif potansiyeli

$$E^2 = \frac{\Delta [\mu^2 (r^2 + a^2) + T]}{(r^2 + a^2)} \equiv V_r^2$$

şeklinde elde edilir. Dairesel yörüngeler için $\frac{dV_r}{dr} = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak, buradan T pozitif sâbiti

$$T = \frac{\mu^2(r-m)(r^2+a^2)^2}{2r\Delta - (r-m)(r^2+a^2)}$$

şeklinde çekilir de yerine konacak olursa, μ sükûnet kütleli test taneciğinin söz konusu yörüngedeki enerjisi,

$$E^2 = \frac{\mu^2 r \Delta^2}{(r^2+a^2)(r^3-3mr^2+a^2r+a^2m)} \quad (\text{II.3.24})$$

şeklinde elde edilir. Çok büyük r değerleri için bu ifâdenin

$$E \cong \left(\mu - \frac{m}{2r} + \dots \right)$$

şeklindeki, dairesel yörüngeler için Newtonsal bağ enerjisini vermekte olduğu görülmektedir.

(II.3.24) ün payı pozitif olup, paydasının sıfır olması hâlinde (E nin sonsuz olmasıyla) bir çözümden söz edilemeyecektir. Buna göre

$$r^2 - 3mr^2 + a^2r + a^2m = 0$$

ile belirlenen

$$r = m \left[1 + \frac{2 \left(3 - \frac{a^2}{m^2} \right)^{1/2}}{3^{1/2}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \frac{3^{3/2} \left(1 - \frac{a^2}{m^2} \right)}{\left(3 - \frac{a^2}{m^2} \right)^{3/2}} \right) \right] \quad (\text{II.3.25})$$

minimum yarıçapı haiz yörüngeye kadar, karadeliğin ekseninden geçen dairesel yörüngeler mümkün olabilecektir. $E \rightarrow \infty$ olduğu bu yörüngeye $v \rightarrow 1$ durumuna karşılık (daha önce E nin $\pm \infty$ limitlerinin $v = 1$ için söz konusu olduğu tartışılmıştı) foton yörüngesi olduğunu belirtelim. Görüldüğü gibi yarıçapın alt sınırı

$$\begin{array}{ll} a = 0 & \text{için (Schwarzschild Hâli)} & r = 3m \\ a = m & \text{için (Uç Kerr Hâli)} & r = (1 + \sqrt{2})m \end{array}$$

değerlerine karşı düşmektedir.

ii) *Ekvator Düzlemindeki Çember Yörünge:*

Şimdi de kısaca bu hâlin özelliklerini [Novikov-Frolov (1989)] gözden geçirmek istiyoruz. $\theta = \frac{\pi}{2}$ düzlemindeki bu harekette $\Theta = 0$ ve (II.3.19) dolayısıyla $K = 0$ dır.

Buna göre (II.3.22) nin

$$r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 (r^3 + a^2 r + 2ma^2) - 4maL_z E - (r - m)L_z^2 - \mu^2 r \Delta \quad (\text{II.3.26})$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{(r - 2m)L_z + 2maE}{r\Delta} \quad (\text{II.3.27})$$

şeklinde düzenleyeceğimiz birincisi ve üçüncüsü hareketi tasvir etmek üzere yeterli olacaktır. İlk hâlde olduğu gibi (II.3.26) nın sağ yanı sıfıra eşitlenerek E çözülecek olursa V_r efektif potansiyeli belirlenir. V_r nin bu ifadesi, dairesel yörüngelerin, efektif potansiyelin ekstremlerine karşılık geldiği göz önünde bulundurularak, düzenlenmek suretiyle, birim kütleli ($\mu = 1$) bir test taneciğinin dairesel yörüngeleri için

$$E = \frac{r^2 - 2mr \pm a\sqrt{mr}}{r(r^2 - 3mr \mp 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (\text{II.3.28})$$

$$L_z = \pm \frac{\sqrt{mr}(r^2 \pm 2a\sqrt{mr} + a^2)}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (\text{II.3.29})$$

bulunur. L_z nin ifadesindeki (+) işareti, dairesel yörüngede bulunan bir taneciğin dönme yönünün karadeliğin dönme yönüyle aynı olduğu hâle, (-) işareti ise zıt yönlü dönmeye karşı düşmektedir. Karadeliğe en yakın dairesel yörünge, önceki hâle benzer şekilde, (II.3.28) de $E \rightarrow \infty$ olduğu hâle karşılık gelen foton yörüngesi olup, yarıçapının

$$r_{\pm} = 2m \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\pm \frac{a}{m} \right) \right] \right\} \quad (\text{II.3.30})$$

ile verileceği ve buradan da

$$\begin{array}{ll} a = 0 & \text{için (Schwarzschild Hâli)} & r = 3m \\ a = m & \text{için (Uç Kerr Hâli)} & r_{+} = 4m, r_{-} = m \end{array}$$

olacağı görülür. Öte yandan $E \rightarrow \mu$ olduğu hâle karşılık gelen kararsız dairesel yörüngenin yarıçapı (açık yörüngelere geçiş sınırı), $\mu = 1$ için çıkarılmış bulunan (II.3.21) de $E = 1$

koyarak

$$r_k = 2m \mp a + 2\sqrt{m(m \mp a)^{1/2}} \quad (\text{II.3.31})$$

şeklinde bulunur. Bu yarıçap değerleri (II.3.21) ile tasvir olunan yörüngelerden parabolik yörüngelerin periheline karşıdüşer. Ekvator düzleminde $V_\infty < c$ hızıyla gelen ve karadelige r_k dan daha fazla yaklaşan bir tanecik, kapalı yörüngelere girer, dolayısıyla karadelik tarafından yakalanmış olur.

İncelediğimiz iki özel hâlde göz önüne alınan düzlemlerle sınırlı olmayan genel hâlde bağlı yörüngeler ve bu yörüngelerin bütün özellikleri D.C. Wilkins tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir [Wilkins (1972)]. Bu genel hâlde θ nın değişimi yönündeki harekete ilişkin V_θ^2 efektif potansiyeli, V_r e benzer şekilde $\dot{\theta}$ yı, dolayısıyla Θ yı sıfır yapan E^2 değeri olarak tanımlanır. (II.3.22) nin ikinci denklemi ve (II.3.19) yardımıyla

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} = 0$$

ve

$$\Theta = K - \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - V_\theta^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{II.3.32})$$

dan V_θ^2 için

$$V_\theta^2 = \mu^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - \frac{K}{\cos^2 \theta} \right) \quad (\text{II.3.23})$$

bulunur. V_θ^2 nin bu ifâdesi yardımıyla düzenlenen Θ

$$\Theta = a^2 \cos^2 \theta (E^2 - V_\theta^2)$$

şeklinde yazılır. Buna göre

i) $K = 0$ ise ve hareket ekvator düzlemini kateden bir hareket ise, hareketin daima bu düzlemde kalacağı anlaşılır. Gerçekten de $K = 0$ olduğu bu hâlde $\theta = \frac{\pi}{2}$ dışında (II.3.32) sağlanmadığından, $\dot{\theta}$ nın sıfır olduğu, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye karşılık gelen bir tek dönüm noktası bulunmaktadır.

ii) $K > 0$ ise hareket, taneciğin açısal momentumu ve enerjisine bağlı olarak ekvator düzleminin dışında bir maksimum θ değeriyle sınırlanmaktadır. Newtonsal hâldeki gibi gerek Schwarzschild gerekse Reissner-Nordstrom hâlinde test taneciğinin hareketinin bir düzlem hareket olmasına karşılık Kerr (ve Kerr-Newman) hâlinde taneciğin yörüngesinin, (II.3.32) yi sağlayan θ_+ ve θ_- gibi iki dönüm noktası arasında, fazladan bir salınım yapacağı anlaşılır. Bu salınım hareketine *Wilkins Olayı* [Wilkins(1972), Johnston and Ruffini(1974)] denilmektedir.

Öte yandan $K > 0$ hâlinde hareketin, karadeliğin simetri eksenine ulaşması ise, ilk örnekte incelediğimiz gibi ancak $L_z = 0$ ve $K \geq a^2(\mu^2 - E^2)$ için gerçekleşebilecektir.

(II.4) Gravitasyon Kökenli Çökme ve Karadeliklerin Oluşumu

Termonükleer evriminin sonunda kütlesi $3,2 M_{\odot}$ den daha küçük olan bir yıldızın bir beyaz cüce veya bir nötron yıldızı olarak denge hâline erişeceğinden daha önce sözetmiştik. Chandrasekhar limiti ve Oppenheimer-Volkof limiti diye bilinen değerler de [örn. Weinberg (1972)] yıldızın, evriminin sonunda, sırasıyla bir beyaz cüce mi yoksa bir nötron yıldızı mı olacağını belirleyen, kütlesinin en büyük değerlerine karşılık düşmektedirler. Kütlesi bu sınırların üzerinde olan bir yıldız ise, termonükleer evrimini tamamladıktan sonra, öz gravitasyon alanının etkisi altında, sürekli bir biçimde çöker. Oldukça karmaşık bir problem olmasına karşın konunun temel özelliklerini görebilmek üzere problemi, basıncı ihmal edilebilen, küresel simetriye sahip, bir toz bulutu için ele alıp gravitasyon kökenli çökme problemini, Genel Rölativite Teorisi çerçevesi içinde incelemek istiyoruz. Toz tanecikleri yalnızca gravitasyon alanının etkisi altında bulduklarından "serbest düşme" hâlinindedirler. Bu yüzden, taneciklerin her biri, kendilerine bir eşhareketli koordinat sistemini bağlayabilmek yönünden eşdeğer nesnelere temsil ederler. Bilindiği gibi eşhareketli koordinatlarda, küresel simetrik metrik ($c=1$ alınarak),

$$ds^2 = dt^2 - \phi(r, t)dr^2 - \psi(r, t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{II.4.1})$$

dir. Buna göre metrik tansörün^(*)

(*) $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$ olarak gösterilmektedir.

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = -\phi \quad , \quad g_{22} = -\psi \quad , \quad g_{33} = -\psi \sin^2 \theta$$

$$g^{00} = 1 \quad , \quad g^{11} = -\frac{1}{\phi} \quad , \quad g^{22} = -\frac{1}{\psi} \quad , \quad g^{33} = -\frac{1}{\psi \sin^2 \theta}$$

şeklindeki sıfırdan farklı bileşenleri göz önünde bulundurularak, Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri, nokta ile t ye, üssü işareti ile de r ye göre türevleri göstererek, kolayca hesaplanırlar;

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\dot{\phi}}{2} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\dot{\psi}}{2} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \dot{\psi} \sin^2 \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\phi'}{2\phi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\psi'}{2\phi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} = -\frac{\psi' \sin^2 \theta}{2\phi}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\dot{\psi}}{2\psi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\psi'}{2\psi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \ 3 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\dot{\psi}}{2\psi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\psi'}{2\psi} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \ 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \ 2 \end{matrix} \right\} = \cot \theta$$

Buradan da

$$R_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \ \nu \end{matrix} \right\}_{,\mu} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\}_{,\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \ \mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \ \nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \ \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \ \nu \end{matrix} \right\}$$

Ricci tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$R_{00} = \frac{\ddot{\phi}}{2\phi} + \frac{\ddot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\phi}^2}{4\phi^2} - \frac{\dot{\psi}^2}{2\psi^2}$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\psi}'}{\psi} - \frac{\psi'\dot{\psi}}{2\psi^2} - \frac{\dot{\phi}\psi'}{2\phi\psi}$$

$$R_{11} = \frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{2\psi^2} - \frac{\phi'\psi'}{2\phi\psi} - \frac{\ddot{\phi}}{2} + \frac{\dot{\phi}^2}{4\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}}{2\psi} \quad (\text{II.4.2})$$

$$R_{22} = -1 + \frac{\psi''}{2\phi} - \frac{\phi'\psi'}{4\phi^2} - \frac{\ddot{\psi}}{2} - \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}}{4\phi}$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

olarak bulunur. Şimdi $\rho(r,t)$ ile öz enerji yoğunluğu gösterilmek üzere, basıncı ihmal edilen bir gazın enerji momentum tensörünün

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

şeklindeki ifâdesini göz önüne alalım. u^μ dördümlü hız vektörünün eşhareketli koordinat sistemindeki bileşenleri,

$$u^0 = 1 \quad , \quad u^1 = u^2 = u^3 = 0 \quad (\text{II.4.3})$$

olacağından

$$\left(T^\mu_i \right)_{;\mu} = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ \mu = 0,1,2,3 \end{array}$$

şeklindeki momentum korunumu denklemini doğal olarak sağlar. Enerji korunumu denklemini ise,

$$0 = (T_0^\mu)_{;\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\dot{\phi}}{2\phi} + \frac{\dot{\psi}}{\psi} \right)$$

ya da

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi \sqrt{\phi}) = 0 \quad (\text{II.4.4})$$

dur. Öte yandan, Einstein alan denklemleri, $S_{\mu\nu}$

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T = \rho \left(u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right)$$

olmak üzere

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} \quad (\text{II.4.5})$$

şeklinde dirler. (II.4.1) ve (II.4.3) yardımıyla $S_{\mu\nu}$ nün sıfırdan farklı bileşenlerinin, yalnızca

$$S_{00} = \frac{\rho}{2}, \quad S_{11} = \rho \frac{\phi}{2}, \quad S_{22} = \rho \frac{\psi}{2}, \quad S_{33} = S_{22} \sin^2 \theta \quad (\text{II.4.6})$$

ve özellikle $S_{01} = 0$ olduğu görülmektedir. (II.4.6) ve (II.4.2) büyüklükleri (II.4.5) de yerine konacak olursa dört alan denklemini,

$$\frac{\ddot{\phi}}{2\phi} + \frac{\ddot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\phi}^2}{4\phi^2} - \frac{\dot{\psi}^2}{2\psi^2} = -4\pi G \rho \quad (\text{II.4.7})$$

$$\frac{\dot{\psi}'}{\psi} - \frac{\psi' \dot{\psi}}{2\psi^2} - \frac{\dot{\phi} \psi'}{2\phi \psi} = 0 \quad (\text{II.4.8})$$

$$\frac{1}{\phi} \left[\frac{\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^2}{2\psi^2} - \frac{\phi'\psi'}{2\phi\psi} \right] - \frac{\ddot{\phi}}{2\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{4\phi^2} - \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}}{4\phi\psi} = -4\pi G\rho \quad (\text{II.4.9})$$

$$-\frac{1}{\psi} + \frac{1}{\phi} \left[\frac{\psi''}{2\psi} - \frac{\phi'\psi'}{4\phi\psi} \right] - \frac{\ddot{\psi}}{2\psi} - \frac{\dot{\phi}\dot{\psi}}{4\phi\psi} = -4\pi G\rho \quad (\text{II.4.10})$$

şeklinde bulunur. Şimdi modelimizi biraz daha basitleştirmek üzere ρ nun r ye bağlı olmadığını varsayıp alan denklemlerinin

$$\phi = R^2(t) f(r) \quad , \quad \psi = S^2(t) g(r)$$

şeklinde değişkenlere ayrılabilen bir çözümünü bulmak istiyoruz. Bu hâlde (II.4.8)

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R}$$

vereceğinden, R bir sâbit yaklaşıklıkıyla S ye eşit olur. $g(r)$ normalize edilerek

$$S(t) = R(t)$$

olması sağlanır. Öte yandan, r nin keyfi bir fonksiyonu olacak şekilde, radyal koordinat yeniden tanımlanabilir. Bu yeni koordinat, özellikle

$$\bar{r} = \sqrt{g(r)}$$

biçiminde seçilecek olursa,

$$ds^2 = dt^2 - \left(\phi(\bar{r}, t) \frac{4g}{g'^2} \right) d\bar{r}^2 - \psi(\bar{r}, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

ve

$$\phi(\bar{r}, t) \frac{4g}{g'^2} = R^2 \bar{f} \frac{4g}{g'^2} = R^2 f(\bar{r})$$

$$\psi(\bar{r}, t) = R^2 g(\bar{r}) = R^2 g(r) = \bar{r}^2 R^2$$

olacağından f ve g

$$\bar{f} = \frac{f g'^2}{4g}, \quad \bar{g} = \bar{r}^2$$

ile yer değiştirecektir. Bu son durumda da \bar{r} yerine r koyarak

$$\phi = R^2(t) f(r), \quad \psi = r^2 R^2(t) \quad (\text{II.4.11})$$

ve

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) f(r) dr^2 - R^2(t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

olur. (II.4.11) yardımıyla (II.4.9) ve (II.4.10) düzenlenecek olursa

$$\frac{f'(r)}{r f^2(r)} + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 = 4\pi G R^2(t) \rho(t) \quad (\text{II.4.12})$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f(r)} + \frac{f'(r)}{2r f^2(r)} + R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 = 4\pi G R^2(t) \rho(t) \quad (\text{II.4.13})$$

bulunur. Bu iki denklem

$$\frac{f'(r)}{r f^2(r)} = 4\pi G R^2(t) \rho(t) - R(t) \ddot{R}(t) - 2\dot{R}^2$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 f(r)} + \frac{f'(r)}{2r f^2(r)} = 4\pi G R^2(t) \rho(t) - R(t) \ddot{R}(t) - 2\dot{R}^2$$

şeklinde ayrıştırılırsa her ikisinin de sol yanlarının aynı bir sâbite eşit olması gerektiği görülür. Bu sâbiti $2k$ ile göstererek

$$\frac{f'(r)}{r f^2(r)} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r f^2(r)} + \frac{f'(r)}{2r f^2(r)} = 2k$$

eşitlikleri yazılır. Bu iki eşitliği sağlayan tek çözümün

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}$$

olduğu görülmektedir. Buna göre metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (\text{II.4.14})$$

şeklini alır.

Şimdi $\rho(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarını belirlemek istiyoruz. (II.4.11) büyüklükleri, (II.4.4) enerji korunumu denkleminde yerine konursa

$$\rho(t) R^3(t) = \text{sâbit} \quad (\text{II.4.15})$$

olduğu görülür. Öte yandan r radyal koordinatı

$$R(0) = 1 \quad (\text{II.4.16})$$

olacak şekilde normalize edilerek

$$\rho(t) = \rho(0) R^{-3}(t) \quad (\text{II.4.17})$$

bulunur. (II.4.12) ve (II.4.7) denklemleri (II.4.17) göz önünde bulundurularak düzenlenecek olursa, $R(t)$ fonksiyonunun sağladığı ikinci mertebeden,

$$2k + \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 = 4\pi G \rho(0) R^{-1}(t) \quad (\text{II.4.18})$$

$$-\dot{R}\ddot{R} = \frac{4\pi}{3} G \rho(0) R^{-1}(t) \quad (\text{II.4.19})$$

şeklinde âdi türevli iki diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemleri taraf tarafa toplayıp \ddot{R} yı elemek suretiyle

$$\dot{R}^2 = -k + \frac{8\pi G}{3} \rho(0) R^{-1}(t) \quad (\text{II.4.20})$$

(II.4.20)denklemi bulunur. $R(t)$ yi belirlemek bakımından, (II.4.20) denklemi (II.4.18) ve (II.4.19) denklemlerini tek başına temsil etmekte olduğundan yalnızca bu denklemle ilgileneceğiz. Bir yandan (II.4.16) koşulunu, bir yandan da, $t = 0$ anında akışkanın sükunette olduğunu varsayarak

$$\dot{R}(0) = 0 \quad (\text{II.4.21})$$

koşulunu göz önünde bulundurmak suretiyle, (II.4.20) denkleminde k sâbiti için,

koşulunu göz önünde bulundurmak suretiyle, (II.4.20) denkleminde k sabiti için,

$$k = \frac{8\pi G}{3} \rho(0) \quad (\text{II.4.22})$$

bulunur. Böylece (II.4.20)

$$\dot{R}^2(t) = k [R^{-1}(t) - 1] \quad (\text{II.4.24})$$

şekline girer. θ bir parametre olmak üzere $R = \cos^2 \theta / 2$ koyarak (II.4.24) denkleminin çözümünün,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k}} (\theta + \sin \theta)$$

$$R = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

şeklinde bir sikloidin parametrik denklemleri olacağı kolayca görülür. Bu çözümden görüldüğü gibi $\theta = 0$ için $t = 0$ ve $R(0) = 1$ olurken, $\theta = \pi$ için, yâni

$$t = T = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{8\pi G \rho(0)} \right)^{1/2} \quad (\text{II.4.25})$$

için de $R(T) = 0$ olmaktadır. (II.4.17), bu sonuçla birlikte değerlendirilecek olursa; başlangıç yoğunluğu $\rho(0)$ olan akışkan kürenin, sükûnet hâlinde başlayarak, sonsuz özenerji yoğunluğuna sâhip olduğu bir hâle kadar çökmesinin, eşhareketli koordinatlarda, sonlu bir zaman olacağı anlaşılır.

yayınlanan ışık, kürenin gravitasyon alanından etkilendiği için, dışarıdan gözleyen birine gecikerek ulaşacak ve gözlemci için yıldız birdenbire kaybolmayacaktır. Şimdi bu hususu aydınlatmak üzere, kürenin dışındaki alanın (II.1.1) ile verilmekte olduğunu hatırlatalım ve standart Schwarzschild koordinatlarını, eşhareketli koordinatlardan ayırdetmek üzere, \bar{r} , $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, \bar{t} ile gösterelim. Buna göre (II.1.1),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{II.4.26})$$

olur. Bu metrik (II.4.14) gibi eşhareketli koordinatlarda ifade edilmemiş olduğu için, kürenin yüzeyinde bu iki metriği karşılaştırmak üzere ya (II.4.14) metriğini standart koordinatlarda ya da dış çözümlü eşhareketli koordinatlarda yazmamız gerekir. Biz (II.4.14) metriğini standart koordinatlarda düzenleyeceğiz. (II.4.14) ile (II.4.26) karşılaştırılacak olursa standart uzay koordinatlarının

$$\bar{r} = r R(t) \quad , \quad \bar{\theta} = \theta \quad , \quad \bar{\varphi} = \varphi \quad (\text{II.4.27})$$

şeklinde seçilebileceği hemen görülür. (II.4.27) cinsinden yazılan (II.4.14), $d\bar{r} dt$ çapraz terimini içerecektir. \bar{t} standart zaman koordinatlarının, ds^2 nin $d\bar{r} d\bar{t}$ terimini içermeyeceği şekilde seçilmesi gerekir. a ile, eşhareketli koordinatlarda kürenin yarıçapına karşılık gelen bir sabit ve

$$S(r,t) = 1 - \left(\frac{1 - kr^2}{1 - ka^2} \right) (1 - R(t)) \quad (\text{II.4.28})$$

olmak üzere, integrasyon çarpanı tekniğiyle [Weinberg (1972)], \bar{t} nin

$$\bar{t} = \left(\frac{1 - ka^2}{k} \right)^{1/2} \int_{S(r,t)}^1 \int_{S(r,t)}^1 \frac{dR}{\left(1 - k \frac{a^2}{R} \right)} \left(\frac{R}{1 - R} \right)^{1/2} \quad (\text{II.4.29})$$

şeklinde seçilmesi gerektiği görülür. Buna göre B ve A ile

$$B = \frac{R}{S} \left(\frac{1 - kr^2}{1 - ka^2} \right)^{1/2} \frac{\left(1 - k \frac{a^2}{S} \right)^2}{\left(1 - k \frac{r^2}{R} \right)} \quad (\text{II.4.30})$$

$$A = \left(1 - k \frac{r^2}{R} \right)^{-1} \quad (\text{II.4.31})$$

gösterilerek (II.4.14) metriği standart koordinatlarda

$$ds^2 = B(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{t}^2 - A(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 - \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2 \quad (\text{II.4.32})$$

şeklini alır. Öte yandan, yıldızın yüzeyinde yâni $r = a$ için (eşareketli koordinat olduğu için, r nin sâbit olduğuna dikkat edilmelidir), (II.4.27)–(II.4.31) den

$$\bar{r} = \bar{a}(t) \equiv a R(t) \quad (\text{II.4.33})$$

$$\bar{t} = \left(\frac{1 - ka^2}{k} \right)^{1/2} \int_{R(t)}^1 \frac{dR}{\left(1 - k \frac{a^2}{R} \right)} \left(\frac{R}{1 - R} \right)^{1/2} \quad (\text{II.4.34})$$

$$B(\bar{r}, \bar{t}) = \left(1 - k \frac{a^2}{R} \right) \quad , \quad A(\bar{r}, \bar{t}) = \left(1 - k \frac{a^2}{R} \right)^{-1} \quad (\text{II.4.35})$$

olacağı görülmektedir. Bu hâlde (II.4.26) ile (II.4.32) karşılaştırılacak olursa, iç ve dış çözümlerin

$$k = \frac{2m}{a^3} = \frac{2GM}{a^3} \quad (\text{II.4.36})$$

olursa, $\bar{r} = aR(t)$ yüzeyinde, sürekli bir biçimde birbirine uyacağı anlaşılır. Bu sonuç (II.4.22) ile birlikte değerlendirilecek olursa, olması gerektiği gibi,

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho(0)$$

bulunur.

Şimdi, çökmekte olan kürenin yüzeyinden yayınlanan ışığın davranışını incelemek üzere \bar{t} anında, radyal doğrultuda, yüzeyden bir ışık yayındığını varsayalım. $ds = 0$ olduğu bu hâl için (II.4.26) dan

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = 1 - \frac{2GM}{\bar{r}}$$

olacağı görülmektedir. Buna göre \bar{t} anında yayınlanan ışığın uzak bir \bar{r}^* noktasında gözlemlendiği an,

$$\bar{t}^* = \bar{t} + \int_{aR(t)}^{\bar{r}^*} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \quad (\text{II.4.37})$$

olur. (II.4.34) ve (II.4.37) den açıkça görüldüğü gibi, kürenin yarıçapı Schwarzschild yarıçapına yaklaşırken yâni,

$$\bar{r} \rightarrow 2GM \quad \text{ve} \quad R(t) \rightarrow \frac{2GM}{a} = ka^2$$

olduğunda gerek \bar{t} gerekse \bar{t}^* sonsuza gitmektedir. Böylece akışkanın Schwarzschild yarıçapına kadar büzülmesinin bir dış gözlemci için sonsuz zaman alacağı ve $R = 0$ hâline büzülmesinin ise kesinlikle gözlenemeyeceği anlaşılmış olur.

(II.5) Mini Karadelikler

Önceki paragraflarda ayrıntılı olarak görmüş olduğumuz gibi bir karadelik, M kütleli bir cismin bu kütleye karşı düşen $r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$ Schwarzschild yarıçapından daha küçük boyutlar içine büzülmesiyle oluşmakta idi. Öte yandan bir cismin kendi gravitasyon alanının etkisi altında büzülebilmesinin yâni gravitasyon kuvvetinin basınç kuvvetlerine baskın olabilmesinin temel koşulu bilindiği gibi M kütlelerinin M_j Jeans kütlelerinden büyük olmasıdır (Ayrıntılı bilgi için bkz [Zebitay (1984)]). $M > M_j$ temel koşuluna bağlı olarak, daha büyük bir yoğunluğa sahip olması hâlinde daha küçük bir kütle, öz gravitasyon alanı altında büzülmekte, bu büzülmenin r_s den daha küçük değerlere devam etmesi hâlinde ise bir karadelik oluşmaktadır. Bu günkü evrende bir yıldızın bir karadeliğe evrimleşebilmesi için kütlelerinin $3,2 M_{\odot}$ den daha büyük olması gerektiğini daha önce belirtmiştik. Bununla birlikte yoğunluğun olağanüstü yüksek olduğu, genişlemekte olan evrenin başlangıcındaki koşullar çok küçük kütleli karadeliklerin oluşumuna olanak sağlamaktadırlar. *Primordial Karadelik* ya da *Mini Karadelik* denilen bu türlü nesnelere varlığı ilk kez Zel'dovich ve Novikov tarafından öngörülmüş [Zel'dovich-Novikov(1967)] ve bu türlü karadeliklerin, evrenin başlangıcındaki koşullara bağlı olarak oluşabileceği Hawking tarafından gösterilmiştir [Hawking (1971) ve (1974)].

Şimdi, Hawking'in öngördüğü biçimde, evrenin başlangıcında çok sayıda, çok küçük kütleli karadeliklerin oluşabileceğini ve bunların kütlelerinin alt sınırının ne olması

gerektiğini göstermek istiyoruz. Hawking'in bu düşüncesi Misner'in önerdiği Kaotik Kozmoloji'nin (Mixmaster modelinin) [Misner (1967) ve (1969)] varsayımlarına dayanmaktadır.

Standart Modele göre [Harrison (1973)] evrimleşen homojen ve izotrop bir evrenin başlangıcındaki küçük pertürbasyonların sıkışma modunun zamana bağlı değişimi [Weinberg (1972), Peebles (1980), Zebitay (1984)], mini karadeliklerin oluşumuna imkan vermeyecek kadar yavaştır. Kaotik kozmolojide [Misner-Thorne-Wheeler (1973)] evrenin başlangıcı için bu günkü izotropisi ve galaksilerin varlığı ile çelişmeyecek şekilde evrimleşen, çok büyük metrik flüktüasyonlarının bulunduğu varsayılmaktadır.

Şimdi, genişleyen evrenin başlangıcında, eşhareketli koordinatlarda bir V hacmi gözönüne alalım. ρ ile yoğunluğu göstermek üzere, bu hacmin gravitasyonel bağ enerjisi [Adler-Basin-Schiffer (1975)] $G\rho^2 V^{5/3}$ mertebesindedir. V yi dolduran maddenin genişleme kinetik enerjisi ise $\rho V^{5/3} \left(\frac{\dot{V}}{V}\right)^2$, ayrıca rölativistik basınçtan doğan potansiyel enerjisi de $\rho c^2 V$ mertebesinde olacaktır. Bu enerji

$$\frac{GM^2}{R} \sim G\rho^2 V^{5/2}$$

mertebesindeki gravitasyonel potansiyel enerjisi ile karşılaştırılacak olursa

$$V > \left(\frac{c^2}{G\rho}\right)^{3/2}$$

olması hâlinde ihmal edilebileceği görülür. Öte yandan, büyük başlangıç flüktüasyonlarının

varlığı, bu evrede, gravitasyon enerjisi genişleme kinetik enerjisini çok aşan, çok sayıda bu türlü hacmin bulunabileceğini göstermektedir. Kuşkusuz böyle bir bölge artık evrenin geri kalan kısmına uyup genişlemek yerine öz gravitasyon alanının etkisi altında çökecek, yoğunluğun zaten çok yüksek olduğu bu evrede başlamış bulunan bu çökme,gravitasyonu dengeleyecek hiç bir reaksiyon bulunmadığından bir karadeliğe evrimleşecektir. Bir yandan gravitasyon enerjisinin genişleme kinetik enerjisinden büyük olması, bir yandan da gravitasyonun basınç kuvvetlerine baskın olması çöken bölgenin M kütlesinin $\left(\frac{c^6}{G^3\rho}\right)^{1/2}$ mertebesinde bir değerden büyük olması yâni,

$$M > \left(\frac{c^6}{G^3\rho}\right)^{1/2} \equiv M_c \quad (\text{II.5.1})$$

bağıntısını sağlaması anlamına geleceği görülmektedir. III. Bölümde evrenin başlangıç evresi için Jeans kütlesinin (II.5.1) de görülen M_c ye indirgeneceğini göstereceğiz.

Gravitasyonel çökme olayı aslında, kuvantum olaylarının gözönüne alınmadığı klasik bir süreçtir. Öte yandan, yerel Lorentz sisteminde boyutları L olan bir bölge için metrik katsayıları üzerindeki kuvantum flüktüasyonları,

$$L_P \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ cm}$$

ile Planck uzunluğu gösterilmek üzere,

$$\Delta g \sim \frac{L_P}{L}$$

mertebesinde olup [Misner-Thorne-Wheeler (1973)] bu flüktüasyonlar Planck uzunluğu için $\Delta g \sim 1$ değerine erişirler. Bu bakımdan, Planck uzunluğundan daha küçük yarıçaplı bir bölgenin içi, tek başına Einstein'ın Genel Gravitasyon Teorisi aracılığıyla tasvir edilemez. Bu sınır, Genel Rölativite Teorisinin genel sınırını oluşturmaktadır. Henüz tatmin edici olmaktan uzak olmakla birlikte, bu bölge ancak Gravitasyonun Kuvantum Teorisi aracılığıyla tasvir edilebilecektir. Kuvantum olaylarıyla gravitasyon olayının birlikte değerlendirilmesini gerektiren etkilerin, Plank uzunluğundan daha büyük boyutlarda göz önüne alınmaması ve gravitasyonun yol açtığı olayların Genel Rölativite Teorisi çerçevesi içinde klasik metrik yardımıyla ele alınmasının uygun bir yaklaşıklık olduğu düşüncesi bu gün genel olarak kabul görmektedir. Planck uzunluğu kadar bir Schwarzschild yarıçapına karşılık gelen kütle ise, bu hâlde,

$$L_P \equiv \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} = \frac{2GM}{c^2} \equiv r_s$$

olacağından

$$M = \left(\frac{c\hbar}{4G} \right)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ gr.} \quad (\text{II.5.2})$$

mertebesinde bulunur. Bu değer mini karadeliklerin kütlelerinin alt sınırını oluşturmaktadır.

Öte yandan, çöken cismin Schwarzschild yarıçapı, kendisini oluşturan taneciklerin

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_0 c} \text{ Compton dalga boyundan daha küçük, yâni}$$

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} < \frac{h}{m_0 c} \equiv \lambda_c \quad (\text{II.5.3})$$

ise, taneciklerin kimliklerini kaybedip dalga karakteri kazandıkları bu sınır aynı zamanda Genel Rölativite Teorisinin de sınırına karşı düştüğünden, karadelinin oluşamayacağını düşünmek akla yakın görünmektedir. Bu ise çöken cismin kütlesine farklı bir alt sınır getirir. Gerçekten de, eğer bütün taneciklerin, fotonlar, leptonlar, quarklar ve bunların karşıt taneciklerinden oluştuğu varsayılacak olursa, örneğin quarklar için (*) $\lambda_c \sim 3 \cdot 10^{-13}$ cm mertebesinde olduğundan çöken cismin minimum kütlesi için, (II.5.3) den, 10^{15} gr mertebesinde bir değer bulunur. Bu alt sınır, Compton dalgaboyu daha büyük değerlere sahip leptonlar için daha da büyüyecek, fotonlar ve sükûnet kütlesi sıfır olan diğer tanecikler için sonsuz olacaktır. Ancak yeterli bir elektromagnetik radyasyon yoğunluğunun da gravitasyonel çökmeye yol açabileceği göz önünde bulundurulacak olursa, bu değerlendirmenin doğru bir değerlendirme olmadığı açıktır. Aslında burada, Schwarzschild yarıçapı ile karşılaştırılacak olan Compton dalgaboyu, sükûnet hâline karşı düşen dalgaboyu olmayıp, E ile tipik bir tanecik enerjisi gösterilmek üzere, $\frac{hc}{E}$ dir ve E, ultra rölativistik tanecikler için $m_0 c^2$ sükûnet enerjisinden çok büyüktür. Şimdi, spin hâllerini ve karşıt taneciklerini ayrı ayrı saymak ve fermion enerjisinin de, bir taneciğinkinin 7/8'i olduğuna dikkat etmek suretiyle, yalnızca fotonlar, leptonlar, antileptonlar ile quarklar (1/2 spinli ve üç cins) ve antiquarkları göz önüne almak suretiyle, evrenin başlangıcında $N = 26$ farklı cins tanecik bulunduğu hesaplanır [Weinberg (1972)]. Buna göre, bu evrede kT en ağır

(*) Quarkların kütlesi; $m_u \sim m_d \sim 0,39$ Gev [Halzen - Martin (1984)]

temel taneciğin bile sükûnet enerjisinin çok üstünde olduğundan, evren, sanki $\frac{N}{2}$ farklı cins karacisim ışımasına sâhipmiş gibi davranacağından, yoğunluğu ve basıncı

$$3p \cong \rho c^2 \cong \frac{1}{2} NaT^4 \quad (\text{II.5.4})$$

ile verilecektir. Burada, k Boltzman sâbiti olmak üzere

$$a \cong \frac{\pi^2 k^4}{15c^3 \hbar^3}$$

sâbiti yerine konarak evrenin sıcaklığının

$$T \sim \left(\frac{\rho c^3 \hbar^3}{Nk^4} \right)^{1/4} \quad (\text{II.5.5})$$

mertebesinde olduğu görülür. Buna göre tipik bir dalgaboyu da

$$\lambda_c = \frac{hc}{kT} \sim \left(\frac{Nh}{\rho c} \right)^{1/4} \quad (\text{II.5.6})$$

dir. Schwarzschild yarıçapının bu değerden büyük olması koşulu, yâni

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} > \lambda_c \sim \left(\frac{Nh}{\rho c} \right)^{1/4} \quad (\text{II.5.7})$$

olması ise,

$$M > \frac{c^2}{2G} \left(\frac{Nh}{\rho c} \right)^{1/4} \quad (\text{II.5.8})$$

olmasını gerektirir. Oysa (II.5.1) dolayısıyla

$$M > \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.5.9})$$

olması gerektiğinden (II.5.8) ve (II.5.9) arasında ρ elenecek olursa M üzerindeki koşul

$$M > \frac{1}{4} \left(\frac{Nch}{G} \right)^{1/2} \sim \sqrt{N} \cdot 10^{-5} \text{gr.} \quad (\text{II.5.10})$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (II.5.2) ve (II.5.10) sonuçlarına yol açan farklı yaklaşımlara rağmen, mini karadeliklerin kütlelerinin 10^{-5} gr. dan daha büyük olması gerektiği görülmüş olmaktadır.

Kaotik Kozmolojinin, evrenin başlangıcı için çok büyük metrik flüktüasyonları öngördüğünden söz etmiştik. Bu konudaki çok önemli bir soru; mini karadeliklerin oluşabilmesi için, başlangıçta, homogen ve izotrop bir evren modelinin metriğinden ne büyüklükte bir sapma olması gerektiğidir. Nümerik olarak çözülmüş bulunan bu problemin sonuçlarına göre boyutsuz bir büyüklük olan $\delta g^{\mu\nu}$ metrik pertürbasyonlarının genliğinin, mini karadeliklerin oluşabilmesi için 0.75 - 0.9 dolayında olması gerektiği, $\delta g^{\mu\nu}$ nün 0.75 - 0.9 dan daha küçük olması hâlinde ise, ortaya çıkmış bulunan yoğunluk pertürbasyonlarının adi ses dalgalarına dönüşeceği gösterilmiş bulunmaktadır [Nadezhin, Novikov, Polnarev(1978); Novikov, Polnarev(1980)].

Şimdi mini karadeliklerle ilgili bugüne kadar elde edilmiş bazı temel sonuçları özetleyip, karadeliklerin buharlaşması olayından ve bunun sonuçlarından kısaca söz etmek istiyoruz. Bu konudaki en önemli hususlardan birisi Hawking'in gösterdiği "Alan Teoremi"dir. Bu teorem; bir karadeliğin olay ufku yüzeyinin (karadeliğin sınır yüzeyinin) alanının herhangi bir süreçte azalmayacağını ve daima başlangıçtaki alandan daha büyük ya da aynı kalacağını ifade eder [Hawking (1972)]. Gerçekten de bir Kerr karadeliği için ufuk alanı, doğrudan (II.2.1) metriğinden hareketle,

$$A = \frac{8\pi G^2 M^2}{c^4} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{cJ}{GM^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (\text{II.5.11})$$

olduğu hesaplanır. M nin sabit olması hâlinde, $a = m$ Uç Kerr karadeliği için, (bu hâlde §(II.2) den bildiğimiz gibi $J = \frac{GM^2}{c}$ olacağına dikkat ederek) gerçekten de, A yüzeyinin, minimum olacağı ve aşağıda söz edeceğimiz süreç sonunda, Schwarzschild karadeliğine evrimleşmesi hâlinde ise en büyük değerine sâhip olacağı görülmektedir.

Kuantum Alanlar Teorisi çerçevesi içinde, dönen bir karadeliğin çok kuvvetli gravitasyon alanında, spontane bir biçimde (kütleleri ne kadar büyükse sayıları o oranda az olan) tanecik-karşıttanecik çiftlerinin oluşacağı, Zel'dovich ve Starobinski tarafından gösterilmiştir. §(II.3) de ayrıntılarıyla verilmiş olan Penrose sürecine uygun olarak, tanecik-karşıttanecik çiftlerinden, enerji ve momentumu negatif olanları karadelik tarafından yutulurken, pozitif olanları karadeliğin alanından sonsuza uzaklaşacağı için, uzak gözlemci tarafından karadelikten gelen bir tanecik yayını gözlenecektir. Bu tanecik emisyonuna bağlı

olarak dönme enerjisi giderek azalan ve sonunda açısal momentumu sıfıra indirgenen Kerr karadeligi bir Schwarzschild karadeligine evrimleşmektedir. Bu, kuvantum mekaniksel tanecik oluşumu olayı bütün dönen karadeliklerin alanı için söz konusu olmakla birlikte, karadelik, Güneş kütesine oranla, çok küçük kütleli olmadıkça tanecik oluşumu ihmal edilecek mertebededir. Örneğin kütesi 10^{16} gr. dan daha büyük bir karadeligin spininde evrenin başlangıcından bu güne kadar olan sürede, bu nedenle ortaya çıkan azalmanın önemsenmeyecek kadar küçük olduğu hesaplanmaktadır.

Öte yandan bir karadeligi oluşturmak üzere çökmekte olan bir cismin (bu cisim bir spine sahip olmasa bile) çökme fazında yâni gravitasyon alanının zamana bağıli olarak değişmekte olduğu dinamik fazda, yakın çevresinde tanecik-karşıttanecik çiftlerinin oluşacağı daha da önemlisi bir Schwarzschild karadeligine çökme hâlinde bile bu tanecik oluşumunun kesilmeyeceği aksine süreklilik kazandığı bir hâle yaklaşacağı, yine Kuvantum Alanlar Teorisi yardımıyla gösterilmiş bulunmaktadır [Hawking (1975)]. Dolayısıyla, karadelik spontane emisyonla enerji kaybederek bir Schwarzschild karadeligine evrimleşmiş olsa bile M kütesi sabit kalmayacak ve sürekli bir tanecik emisyonuyla enerji (ve kütle) kaybetmeye devam edecektir. Bu yüzden (II.5.11) ile verilen ufuk yüzeyinin de, bu evreden sonra, artık sabit kalmayacağı ve alanının M^2 ile orantılı olarak azalacağı görülür.

Ayrıca, karadeligin ufuk yüzeyinin alanı ile S entropisi arasında

$$S = \frac{1}{4} \frac{kc^3}{Gh} A \quad (\text{II.5.12})$$

şeklinde bir ilişkinin [Bekenstein (1973) ve (1974)] varlığının bir sonucu olarak olay ufku

yüzeyindeki gravitasyon alanı ile karacismın sıcaklığı arasında bir ilişkinin bulunacağı ve tıpkı ışıma yapan T sıcaklığındaki bir karacisminkine benzer biçimde, tanecik yayınlıyarak kütlesi azalan bir Schwarzschild karadeliğinin sıcaklığının da

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 kGM} \quad (\text{II.5.13})$$

şeklinde değişeceği gösterilmiş bulunmaktadır [Bardeen-Carter-Hawking (1973)]. M gr. cinsinden ifade edilmek üzere (II.5.13)

$$T = 10^{26} M^{-1} \text{ } ^\circ\text{K} \quad (\text{II.5.14})$$

olur. Spontane emisyonun farklı, bu tanecik emisyonuna *ısı emisyonu* (ya da *Hawking emisyonu*) denilmektedir.

Kerr karadeliği ile sonuçlanan bir gravitasyonel çökme hâlinde ise, karadelik için, spinin küçülmesine yol açan, spontane tanecik yaratılması ile ısı emisyonu yaratılmasının ortak katkılarına ilişkin bir emisyon söz konusu olmaktadır.

(II.5.14) den görüldüğü gibi, T ısı emisyonu sıcaklığı M^{-1} ile orantılıdır. Öte yandan, A ile karadeliğin olay ufku alanı gösterilmek üzere, yayımlanan taneciklerin taşıdığı enerji, $T^4 A$, o da

$$T^4 A \sim M^{-4} T^2 \sim M^{-2}$$

mertebedindedir. Buna göre, yukarıda sözünü ettiğimiz tanecik emisyonuna bağlı olarak karadelik kütle kaybederken yayımlanan enerji, dolayısıyla kütle kaybı artar. Kütlesi azalan

karadeliğin sıcaklığı da (II.5.14) e uygun olarak giderek artmakta olduğu için karadelik kararsız bir hâldedir. Bu şekilde git gide sıcaklığı artan ve kütle kaybeden karadeliğin bütün kütlesi, sonlu bir süre içinde, ısıl tanecik emisyonuyla buharlaşmış olacaktır. M kütleli bir karadeliğin

$$\tau \sim 10^{-28} M^3 \text{ s.} \quad (\text{II.5.15})$$

mertebesinde bir süre içinde bütünüyle buharlaşacağı ve son 10^{-1} s içinde, büyük bir hızla yayınlanan tanecikler dolayısıyla salınan enerjinin 10^{30} erg mertebesinde olacağı hesaplanmaktadır [Hawking (1975)]. Bu ise mini karadeliklerin bir patlamayla son bulduklarının ifâdesidir. (II.5.15) yardımıyla, evrenin başlangıcında oluşmuş mini karadeliklerden, kütlelerinin mertebesi aşağı yukarı 10^{14} gr. a kadar olanlarının 10^{10} yıl ($\sim 10^{15}$ sn) mertebesindeki evrenin yaşı [Weinberg (1972)] kadar bir süre içinde yok olacakları hesaplanır. Buna karşılık, bundan daha büyük örneğin 10^{15} gr kütleli, dolayısıyla yarıçapı

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} \sim 10^{-13} \text{ cm.}$$

yâni bir protonun yarıçapı [Shâlit,Feshbach(1974)] mertebesinde bulunan bir mini karadeliğin bugün gözlenebileceği umudunu taşıdığımızı belirtelim.

Sonuç olarak, bir yıldızın çökmesiyle oluşan, dolayısıyla büyük kütleli bir karadelik, yayınlamakta olduğundan çok daha hızlı bir şekilde radyasyon (ve tanecik) soğurmakta olduğu için zamanla kütlesi artarken, evrenin başlangıcındaki yoğunluk flüktüasyonlarının oluşturduğu, güneş kütlesine oranla çok küçük kütleli, dolayısıyla çok yüksek sıcaklıktaki

mini karadelikler, soğurduklarından çok daha fazlasını yayınlayacağından kütleleri azalmaktadır.



(II.6) Mini Karadeliklerin Oluşumuna İlişkin Bir Model (Çarpışma Modeli)

Amaç

Bilindiği gibi bir cismin kendi gravitasyon alanının etkisi altında büzülebilmesi yâni gravitasyon kuvvetlerinin basınç kuvvetlerine baskın olabilmesi için, kütesinin Jeans kütesinden büyük olması gerekmektedir. Evrenin genişleme süreci içinde, radyasyon çağıının sonuna yâni madde ve radyasyon enerjilerinin birbirine eşit olduğu rökombinasyon anına kadar Jeans kütesi bir artma gösterir [Zebitay (1984)]. Bu evrede $\rho^{-1/2}$ ile değişen m_j Jeans kütesi, yoğunluğun olağanüstü yüksek değere sâhip olduğu, büyük patlamanın hemen sonrasında en küçük değerine sâhip olup, biraz ileride göstereceğimiz gibi, evrenin başlangıç evresi için $\left(\frac{c^6}{G^3\rho}\right)^{1/2}$ mertebesindedir. Bu evrede kütesi

$$m \gtrsim m_j \sim \left(\frac{c^6}{G^3\rho}\right)^{1/2} \quad (\text{II.6.1})$$

koşulunu sağlayan R yarıçaplı bir cisim kendi gravitasyon alanının etkisi altında çöker. (II.6.1) koşulunu sağlayan ve mini karadeliklere evrimleşen yoğunlaşma bölgeleri ise, § (II.5) de ele aldığımız gibi, Hawking'in önerdiği şekilde oluşabilmekteydi. Bu öneri, Kaotik Kozmolojinin; büyük patlamadan hemen sonra evrenin (daha sonra Friedmann Modelleriyle tasvir olunan homogen ve izotrop evrene evrimleşmekle birlikte) homogen ve izotrop

olmadığı ve başlangıçta çok büyük metrik flüktüasyonlarının bulunduğu varsayımına dayanmakta idi. Bu koşulların belirlediği çok büyük yoğunluk pertürbasyonlarının gerçekten de mini karadeliklere evrimleşebileceklerini görmüştük.

Bu tezde, mini karadeliklere evrimleşen ve (II.6.1) koşulunu sağlayan yoğunlaşma bölgelerinin, Kaotik kozmolojinin temel varsayımları çerçevesi içinde, çok büyük başlangıç pertürbasyonlarının evrimine bağlı olarak oluştuğu varsayımına dayanan, Hawking'in önerdiği model yerine farklı bir model önerilmektedir. Mini karadeliklerin oluşumunu tasvir etmek üzere önerilmekte olan bu yeni model, Galaksi oluşumuna ilişkin Birikim Modelinden (Mc Crea – Zebitay Modeli) [Zebitay (1984), (1988)] esinlenerek, büyük patlamanın hemen sonrasında evreni oluşturan akışkanın kümeciklere ayrılmış olduğu ve bu kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanının etkisi altında sesötesi hızlarla çarpıştıkları varsayımına dayanmaktadır. Çarpışma sonunda ortaya çıkan, yoğunluğun arttığı, arakesitteki ortak hacimde, (II.6.1) koşulunu sağlayan ve mini karadeliklere evrimleşen, yoğunlaşma bölgeleri oluşabilmektedir. Tezimizin amacı, temel varsayımlarını açıkça ortaya koymak suretiyle, Modelimizi şekillendirdikten sonra, bu model çerçevesi içinde mini karadeliklerin oluşumuna ilişkin koşulları belirleyip, sayısal değerlendirmeler yapmak ve problemi ayrıntılarıyla inceledikten sonra elde edilen sonuçları tartışmaktır.

Çarpışma Modeli

Büyük patlamadan sonra ilk 10^{-8} sn içinde yâni, sıcaklığın 10^{14} °K e düşünceye kadar olan evresinde aralarında kuvvetli bir etkileşme bulunan, ısıl denge hâlindeki fotonlar mezonlar, baryonlar ve karşıtbaryonlardan oluştuğu düşünülen evrende tanecikler arası ortalama uzaklık tipik bir Compton dalgaboyundan daha küçüktür. Bu bakımdan, sürekli olarak karşılıklı etkileşme hâlinde bulunan bu taneciklerin basit herhangi bir hâl denklemine uyduklarını düşünmek mümkün değildir. Bununla birlikte, bu evrede kuvvetli etkileşme hâlinde bulunan bu taneciklerin hâlini ana hatlarıyla tasvir etmek üzere ilgi gören, oldukça farklı iki model bulunmaktadır. Ancak bu modellerden hangisinin gerçeği yansıttığı konusunda, henüz yeterli bilgiye sâhip değiliz.

Bu şemalardan biri " *Temel Tanecik Modeli* " diye adlandırılmaktadır. Bu modelde, bütün taneciklerin çok az sayıdaki temel taneciklerden (fotonlarla, leptonlar, kuarklar ve bunların karşıttanecikleri) oluşmuş olduğu ve çok yüksek sıcaklıklarda bu temel tanecikleri birbirine bağlayan kuvvetlerin ihmâl edilebildiği varsayılmaktadır. Evrenin başlangıcında fotonlarla maddesel tanecikler ısıl denge hâlinde bulduklarından $h\nu = kT$ dir. Bu yüzden en ağır temel taneciğin *sükûnet* enerjisinin üzerindeki kT için, evren, § (II.5) de belirttiğimiz gibi, $\frac{N}{2}$ farklı türde karacisim ışımasına sâhipmiş gibi davranacağından, bu evrede evrenin basıncı, enerji yoğunluğu ve maddesel tanecikler başına foton entropisi, n_B ile baryon ve karşıtbaryonların sayısal yoğunluklarının farkı gösterilmek üzere

$$3p \cong \rho c^2 \cong \frac{1}{2} NaT^4 \quad (\text{II.6.2})$$

$$s = \frac{\rho c^2 + p}{n_B kT} = \frac{2 a T^3}{3 n_B k} N \quad (\text{II.6.3})$$

olur [Weinberg (1972)]. Eşisılı bir genişlemede entropi sabit olduğundan s nin yukarıdaki ifâdesi, n_{B0} ile baryonların bu günkü sayısal yoğunluğu gösterilmek üzere, s nin bu günkü değeri olan

$$s_0 = \frac{4 a T_{\gamma 0}^3}{3 n_{B0} k} \quad (\text{II.6.4})$$

ile karşılaştırılarak, başlangıç evresi için evrenin sıcaklığı bu günkü radyasyon sıcaklığı cinsinden

$$\frac{T}{T_{\gamma 0}} = \left(\frac{2 n_B}{N n_{B0}} \right)^{1/3} \quad (\text{II.6.5})$$

şeklinde bulunur.

Homogen ve izotrop olduğu varsayılan evrenin geometrik yapısını yansıtan Robertson – Walker metriği [Adler, Bazin, Schiffer (1975)] ve Einstein'ın gravitasyon alan denklemleri birlikte değerlendirilmek suretiyle, evrenin evrimini belirleyen Friedmann denklemlerinin [Weinberg (1972)] elde edilmekte olduğu bilinir. $R = R(t)$ ölçek çarpanının sağlamakta olduğu bu denklemlerin mümkün çözümleri ise farklı tip kozmolojileri belirlemekte olup bunlardan $R = R(t)$ nin sıfır olabildiği, yâni evrenin tekil bir noktadan başlayarak

genişlemekte olduğunu ifade eden modellere *Friedmann - Lemaitre* tipi evren modelleri denilmektedir.

Friedmann denklemlerinden, başlangıç evresi için, evrenin yaşı ile yoğunluğu arasında

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G \rho} \right)^{1/2} + \text{sabit} \quad (\text{II.6.6})$$

bağıntısı elde edilir [Özemer (1981)]. Burada önemle belirtilmesi gereken nokta, evrenin başlangıcında Friedmann modelinden çok büyük sapmalar olması hâlinde, Einstein alan denklemlerinin bu hâlde edilen kuvazi izotropik çözümlerinin de (II.6.6) ile gene aynı sonucu vermekte olduğudur [Nadezhin, Novikov, Polnarev (1977)].

n_B baryon yoğunluğunun R^{-3} ile değiştiği göz önünde bulundurulacak olursa, (II.6.5)

$$\frac{T}{T_{\gamma_0}} = \left(\frac{2}{N} \right)^{1/3} \left(\frac{R_0}{R} \right) \quad (\text{II.6.7})$$

şeklinde yazılır. (II.6.2), (II.6.6) ve (II.6.7) yardımıyla

$$t \cong \left(\frac{3}{32\pi G a T_{\gamma_0}^4} \right)^{1/2} \left(\frac{N}{2} \right)^{1/6} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \quad (\text{II.6.8})$$

olacağı yâni ölçek çarpanının bu evredeki zamana bağlı değişiminin

$$R(t) \sim t^{1/2} \quad (\text{II.6.9})$$

şeklinde olacağı görülür. Ayrıca (II.6.2) ve (II.6.6) yardımıyla bu evrede evrenin sıcaklığının zamana bağlı değişiminin de

$$T \cong \left(\frac{3 c^2}{32\pi G a} \right)^{1/4} \left(\frac{2}{N} \right)^{1/4} \frac{1}{t^{1/2}} \cong 1,5 \cdot 10^{10} \left(\frac{2}{N} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (\text{II.6.10})$$

şeklinde olacağı kolayca görülür.

Buna karşılık, hadronların ancak birbirlerinin bileşimi olan temel tanecikler olduğu görüşüne dayanan " *Bileşik Tanecik Modeli* " çerçevesi içinde başlangıçta evrenin leptonlar, baryonlar, bunların karşıtanecikleri ve fotonlardan oluştuğu varsayılmaktadır. Bu taneciklerden oluşan akışkana, ideal gaz yaklaşımı uygulanarak evrenin başlangıç evresinde (yani $t \rightarrow 0$ için) yoğunluğun ölçek çarpanına bağlı değişiminin

$$\rho \propto R^{-3} |\ln R| \quad (\text{II.6.11})$$

şeklinde olacağı gösterilir [Weinberg (1972)]. Bu ifade Friedmann denklemlerinde yerine konup, evrenin başlangıç evresi ($t \rightarrow 0$) için, bu denklemlerden $R(t)$ çözülecek olursa, Temel Tanecik Modeli çerçevesi içinde bulduğumuz (II.6.9) dan farklı olarak, ölçek çarpanının zamana bağlı değişiminin

$$R \propto t^{2/3} |\ln t|^{1/2} \quad (\text{II.6.12})$$

şeklinde olacağı görülür.

Başlarken de söylemiş olduğumuz gibi bu iki modelden birini seçmek bu gün için mümkün görünmemektedir.

Geliştirmek istediğimiz çarpışma modeli çerçevesi içinde evrenin, mini karadeliklere yataklık eden evresinin, sıcaklığın $T \cong 10^{14}$ °K e düştüğü âna kadar olan evresi olduğunu

varsayacağız. §(II.5) de açıkladığımız nedenlerden ötürü bu evre, büyük patlamadan sonra evrenin yaşının 10^{-43} sn olduğu, Planck zamanından başlamakta olup hadronların oluşumunun kesildiği 10^{-8} sn ye kadar devam etmektedir. Evrenin yaşının 10^{-8} sn olduğu bu anda sıcaklığın da eşik sıcaklık diye adlandırılan, aşağı yukarı $T \cong 10^{14}$ °K e düşmüş olacağı (II.6.10) aracılığıyla kolayca görülür.

Hawking'in mini karadeliklerin oluşumuna ilişkin modeli, Kaotik Kozmoloji'nin, evrenin başlangıcında büyük yoğunluk flüktüasyonları bulunduğu yâni Friedmann Kozmolojisinden büyük sapmaların bulunduğu varsayımına dayanmakta idi. Buna karşılık modelimiz, başlangıcından itibaren Friedmann Kozmolojisine uygun olarak genişlemekte olduğu ve evrenin kendisini oluşturan akışkanın, yukarıda sözünü ettiğimiz 10^{-43} sn $\leq t \leq 10^{-8}$ sn anları arasında, herhangi bir nedenle kümeciklere ayrıldığı temel varsayımına dayanmaktadır. Bu biçimde ortaya çıkan kümeciklerin sesötesi hızlarla çarpışmalarından sonra aralarında oluşan birikim bölgesindeki Jeans yoğunlaşmalarının mini karadeliklere evrimleşeceklerini göstermek istiyoruz.

Şimdi yukarıda özünü açıklamış bulunduğumuz "çarpışma yoluyla mini karadeliklerin oluşumu" modelimizi belirleyen temel varsayımlarımızı açıkça ortaya koymak istiyoruz:

- 1- Evren, Friedmann modeline dayanan standart kozmogonik modele göre evrimleşmektedir.
- 2- Başlangıçta evreni oluşturan akışkan " Temel Tanecik Modeli " ne uymaktadır.
- 3- Yaşının 10^{-43} sn olduğu andan 10^{-8} sn olduğu âna kadar olan çağda evreni oluşturan akışkan herhangi bir nedenle kümeciklere ayrılmaktadır.

4– Kümeciklere ayrılmadan önceki akışkan gibi, kümeciklerin herbiri, aralarında çok kuvvetli bir etkileşme bulunan, ısı denge hâlindeki maddesel tanecikler ve fotonlardan oluşmakta olup opak bir yapıya sâhiptir.

5– Kümecikler birbirlerinin gravitasyon alanında sesötesi hızlarla çarpışmaktadırlar.

6– Mini karadelikler, sesötesi hızlarla çarpışan kümeciklerin çarpışma sonrası yığıldıkları ortak hacimde *Jeans yoğunlaşması* sonucu oluşmaktadır.

Yukarıda varsayımlarını sıralamış bulunduğumuz modelin bir uygulaması olarak, özdeş, küresel iki kümeçiğin kafa-kafaya çarpışması hâlini göz önüne alacağız. Kümeciklerin 5. varsayım nedeniyle sesötesi hızlarla çarpışıyor olmalarının boyutları üzerine bir sınırlama getirmekte olduğu ve 3. varsayımla belirlenen çağda bu boyutların gerçekten de çok küçük olduğunu biraz ileride göstereceğiz. Büyük kütlelerine karşın boyutlarının çok küçük olması nedeniyle, klâsik teori çerçevesi içinde birbirlerinin gravitasyon alanındaki hızlarını hesaplarken, küresel kümeciklerin noktasal olduklarını varsayacağız.

Şimdi kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanındaki hareketlerini, kütle merkezine bağlı eşhareketli koordinat sisteminde incelemek istiyoruz. Bu sistemde kümeciklerin kütle merkezleri arasındaki uzaklığı ξ ile, herbirinin sistemin kütle merkezine uzaklığını da ξ_1 ve ξ_2 ile gösterelim. Özdeş küresel kümeciklerin herbirinin yarıçapı r ve kütlesi m olsun. Noktasal varsayılan kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında sâhip olduğu gravitasyon potansiyeli, klâsik gravitasyon teorisi çerçevesi içinde, $U = - \frac{Gm^2}{\xi}$ alınarak sistemin hareketi kolaylıkla belirlenir. Gerçekten de

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$$

ile sistemin indirgenmiş kütlesi ve p_ξ ile de kanonik momentumu gösterilerek bu hâlde

Hamilton fonksiyonu,

$$H = \frac{1}{2} \mu \dot{\xi}^2 - \frac{G m^2}{\xi} = \frac{p_\xi^2}{m} - \frac{G m^2}{\xi}$$

ve Hamilton denklemleri de

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi} = \frac{2 p_\xi}{m}, \quad \dot{p}_\xi = -\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\frac{G m^2}{\xi^2} \quad (\text{II.6.13})$$

dir. (II.6.13) denklemlerinin ilki zamana göre türetilir de elde edilen ifâdede ikincisi yerine konursa hareketi belirlemek üzere

$$\ddot{\xi} + \frac{2 G m}{\xi^2} = 0 \quad (\text{II.6.14})$$

şeklindeki ikinci mertebeden denklem elde edilir. (II.6.14) denkleminin ilk integrali, $\xi \rightarrow \infty$ için $\dot{\xi} \rightarrow 0$ koşulu çerçevesi içinde,

$$\dot{\xi}^2 = 4 \frac{G m}{\xi}$$

olur. Öte yandan simetriden dolayı $\xi_1 = \xi_2 = \frac{\xi}{2}$ olduğundan her bir kümeceğin, diğerinin gravitasyon alanındaki hızı,

$$v^2 = \dot{\xi}_1^2 = \dot{\xi}_2^2 = \frac{1}{4} \dot{\xi}^2 = \frac{G m}{\xi}$$

şeklinde bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, v nin, her iki kümeceğin, evrenin genişlemesine uygun olarak hareket etmekte olan kütle merkezine göre hızları olduğudur. İki kümeceğin çarpıştığı anda bu hız

$$v = \left(\frac{G m}{2 r} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.15})$$

olacağından her iki tanecik çarpışmadan sonra oluşan arakesit bölgesine bu hızla yığılacaklardır.

Şimdi eşsırlı bir süreçte ses hızının karesinin

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_Q$$

olduğunu [Whitham (1974)] göz önünde bulundurarak, 3. varsayımla sözü edilen çağda ses hızını hesaplamak istiyoruz. Bu çağda p ve ρ nun (II.6.2) ile verilen

$$\rho \cong \frac{N}{2} \frac{a T^4}{c^2} \quad , \quad p \cong \frac{N}{2} \frac{a T^4}{3}$$

ifâdelerinden

$$\delta \rho = \frac{N}{2} \frac{4 a T^3}{c^2} \delta T \quad , \quad \delta p = \frac{N}{2} \frac{4 a T^3}{3} \delta T$$

ve dolayısıyla

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_Q = \frac{c^2}{3} \quad (\text{II.6.16})$$

olduğu kolayca görülür.

Öte yandan zamana bağlı olarak büyüyen yoğunluk pertürbasyonlarının dalga boyu demek olan *Jeans dalgaboyunun*

$$\lambda_j = \left(\frac{\pi v_s^2}{G \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.17})$$

şeklinde olduğu [Zebitay (1984)] göz önünde bulundurulacak olursa *Jeans kütlesi* de

$$m_j = \frac{4}{3} \pi \rho \lambda_j^3 = \frac{4}{3} (\pi)^{5/2} \left(\frac{v_s^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.18})$$

olur. Göz önüne aldığımız çağda eşısıllı ses hızının karesinin (II.6.16) ile verilen ifadesi (II.6.18) de yerine konarak bu çağda Jeans kütlesi için

$$m_j = 4 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{5/2} \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.19})$$

ifadesi düzenlenir. Evrenin başlangıcındaki olağan üstü koşulların m_j nin ifadesindeki katsayıları etkileyebilecek muhtemel yansımaları konusunda çok açık bir bilgiye sâhip olmadığımızdan m_j nin yalnızca mertbesiyle ilgileneceğiz. Bilindiği gibi Jeans kütlesi

bir cismin kendi gravitasyon alanının etkisi altında kararlı olabildiği kütesinin, alt sınırına karşıdüşmekte olup kütesi m_j den daha büyük olan bir cisim öz gravitasyon alanı altında büzölmektedir. Öte yandan bir madde kümesinin gravitasyonel olarak bağı bir sistem oluşturması için, klâsik teori çerçevesi içinde, gravitasyonel potansiyel enerjisi ile pr^3 mertebesindeki iç enerjisi karşılaştırılarak,

$$\frac{G m^2}{r} > p r^3$$

için yâni, öz gravitasyon kuvvetinin basınç kuvvetlerine baskın olduğı hâlde cismin kütesinin, gerçekten de

$$m > \frac{p^{3/2}}{G^{3/2} \rho^2}$$

ya da bu hâlde $p = \frac{\rho c^2}{3}$ olduğuna dikkat ederek

$$m > \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \sim m_j$$

bağıntısını sağlayacağı görülür.

(II.6.15) ile verilen, kümeciklerin, çarpışmadan sonra oluşan arakesit bölgesine yığılma hızlarının ses hızından büyük olması, kümeciklerin çarpışmasıyla oluşan ses dalgasının kümeciklerin geriden gelen kısımlarını etkilemesini dolayısıyla yığılma olayının çok daha karmaşık bir hâlde gelmesini önlemek için gereklidir.

Sesötesilik koşulu (II.6.16) göz önünde bulundurulacak olursa

$$v > v_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

olmasını gerektirmektedir. Ancak $v < c = \sqrt{3} v_s$ olduğundan v nin v_s den çok büyük olması da mümkün değildir. Bu hâlde

$$c > v > \frac{c}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} v_s > v > v_s$$

olur. Buna göre sesötesilik koşulu, çarpışma hızlarının ses hızından çok az büyük olduğu yâni bu hızların ses hızı mertebesinde olduğu anlamına gelmektedir. Şimdi (II.6.15) ve (II.6.16) karşılaştırılacak olursa

$$v^2 \gtrsim v_s^2 \quad \rightarrow \quad \frac{G m}{2r} \gtrsim \frac{c^2}{3} \quad (\text{II.6.20})$$

ve $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ koyarak

$$r \gtrsim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.21})$$

olması gerekeceği görülür. Öte yandan (II.6.17) ifâdesi (II.6.16) yardımıyla düzenlenecek olursa

$$\lambda_j \equiv r_j = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.22})$$

bulunur. Gravitasyonel olarak kararlı bir cismin yarıçapının alt sınırını oluşturan (II.6.22) , (II.6.21) de yerine konarak r nin r_j den küçük olmakla birlikte hemen hemen aynı mertebede yâni

$$r \sim r_j \quad (\text{II.6.23})$$

olduğu görülür. Buna göre kümeciklerin, çarpışma hızlarının sesötesi olması (ses hızı mertebesinde olması) için yarıçaplarının alt sınırının (II.6.23) ü sağlaması gerektiği yâni evrenin, modelimizin 5. varsayımına uygun olarak kümeciklere ayrılmış olması hâlinde, bu kümeciklerin yarıçaplarının r_j den çok az da olsa küçük olması yüzünden, henüz öz gravitasyon alanları altında çökmeleri için gerekli koşulun sağlanmamasına karşın r , r_j mertebesinde olacaktır. Ayrıca, §(II.1) de göstermiş olduğumuz gravitasyon yarıçapı hatırlanarak, (II.6.20) koşulu farklı bir düzenlemeyle

$$r \sim \frac{3}{2} \frac{Gm}{c^2} \equiv r_s \quad (\text{II.6.24})$$

olması gerektiği sonucunu verir. (II.6.24) sonucu gerçekten de çok çarpıcı bir sonuç olup modelimizin 3. varsayımıyla tanımlanan çağda evrenin, birbirlerinin gravitasyon alanındaki çarpışma hızları sesötesilik limitinin üzerinde bulunan kümeciklere ayrılmış olması hâlinde, bunların yarıçaplarının bir karadeliğinkinin üst sınırı mertebesinde olacağını göstermektedir. Yarıçapı (II.6.24) ile belirlenen kümeğin kütlesinin alt sınırının da

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \gtrsim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.25})$$

aracılığıyla belirleneceği anlaşılır. Görüldüğü gibi modelimizin 5. varsayımı olan sesötesilik

varsayımı bir yandan, (II.6.23) ve (II.6.25) in sağlanmasını bir yandan da, (II.6.24) bağıntısı nedeniyle kümeciklerin yarıçaplarının bir karadeliğin yarıçapı mertebesinde olması sonucuna yol açmaktadır.

Şimdi de, sesötesi hızlarla kafa-kafaya çarpışan kümeciklerin arakesit bölgesinde (II.6.24) ü de sağlayan Jeans yoğunlaşmalarının mümkün olacağını göstereceğiz. Modelimizde sesötesi hızlarla çarpışacak şekilde kümelere ayrılmanın hemen ardından, yarıçapları, gravitasyon yarıçapı mertebesinde olmakla birlikte, henüz Jeans yarıçapından küçük olduğundan çökmeleri için gerekli koşulun sağlanmadığı, bu kümeciklerin bir karadeliğe evrimleşmeleri mümkün değildir. Eğer yarıçapları r_s mertebesinde bulunan bu kümecikler için çökme koşulları sağlanıyor olsa idi bu zaten anlamsız olurdu. Gerçekten de bu hâlde varsayımlarımız, zaten karadeliklere evrimleşen, kümeciklere ayrılmayı öngörmüş olacağından, evreni oluşturan akışkanın tamamının bu yolla karadeliklerde toplanmış olmasını gerektirirdi. Oysa böyle bir hâlin evrenin bu günkü durumuyla uyuşmadığı apaçıktır.

Burada önemle belirtilmesi gereken nokta göz önüne alınan çağda m kütleli bir cismin yarıçapının $r \sim r_s$ olmasının, (II.6.23) ve (II.6.24) de olduğu gibi, aynı zamanda $r \sim r_j$ olduğu anlamına gelmesidir. Gerçekten de

$$r \sim r_s \equiv \frac{2 G m}{c^2}$$

olması hâlinde, $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ koyarak buradan,

$$r \sim \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{c^2}{G\rho} \right)^{1/2} \sim r_j$$

olacağı görülür.

Şimdi, ilerde küresel hâle tekrar dönmek üzere, modelin verdiği bazı sonuçları daha sâde bir şekilde görebilmek ve hesapları basitleştirmek için şimdilik çarpışan kümeciklerin kenar uzunlukları ℓ olan, küp şeklinde olduklarını varsayalım. Şekil II.6.1 de kafa-kafaya çarpışan kübik kümeciklerin çarpışmadan sonra yığıldıkları, $2R$ genişliğindeki ara kesit bölgesi taralı kısımla gösterilmiştir. Buna göre çarpışmaya katılan taneciklerin her birinin ve yığılma bölgesinin yoğunlukları sırasıyla, $\rho = \frac{m}{\ell^3}$, $\rho^* = \frac{2m}{2R\ell^2}$ olduğundan, bunları oranlayarak yığılma bölgesinin yarı genişliği,

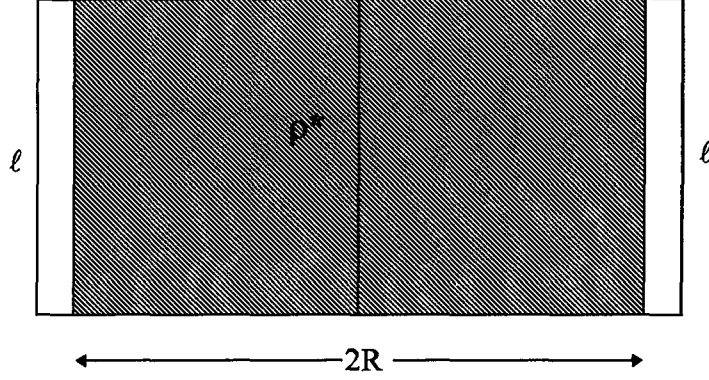
$$R = \frac{\rho}{\rho^*} \ell \quad (\text{II.6.26})$$

şeklinde bulunur.

Kuşkusuz arakesit bölgesinde yoğunlaşmaların mümkün olabilmesi için öncelikle bu bölgenin yarı genişliğinin bu bölgeye karşılıklı Jeans yarıçapından büyük, hiç değilse eşit olması gerekir. Yâni, yıldızlı büyüklüklerle, arakesit bölgesine ait büyüklükleri göstermek üzere,

$$R \geq r_j^* \sim \left(\frac{c^2}{G\rho^*} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.27})$$

olmalıdır. Bu ifade (II.6.26) ile birlikte değerlendirilecek olursa arakesit bölgesinin yoğunluğunun da,



Şekil II.6.1 *Kübik iki kümeceğin birbirlerinin gravitasyon alanında kafa-kafaya çarpışmaları. Çarpışmadan sonra arakesitte oluşan yığılma bölgesi gölgeli olarak gösterilmiştir.*

$$\rho^* \lesssim \frac{G\rho^2}{c^2} \ell^2 \quad (\text{II.6.28})$$

bağıntısını sağlayacağı anlaşılır. Ancak $R \geq r_j^*$ olmasına karşın arakesit bölgesinde oluşan yoğunlaşmaların n sayısı eğer $n < 1$ ise, bu gene de hiç bir yoğunlaşma olmayacağı anlamına gelir. Dolayısıyla (II.6.23) – (II.6.25) ve (II.6.27) koşullarının sağlanmasına karşın çarpışma sonunda yoğunlaşmalar olmayabilir. Çarpışmanın birden fazla, hiç değilse bir yoğunlaşma ile sonuçlanması için $n \geq 1$ olmalıdır.

Öte yandan, yığılma bölgesine, arakesit yüzeyinden $v \sim v_s$ ultrarölativistik hızıyla yığılan akışkanın bu yüzeyde oluşturduğu basınç ρv^2 mertebesinde olup bu basınç yığılma bölgesinin basıncı ile dengelenmektedir. Yani

$$\rho v^2 \cong \frac{\rho^* c^2}{3}$$

dür. Buradan, yığılma bölgesinin yoğunluğu ile çarpışma öncesi kümeciklerin yoğunluğu arasında,

$$\frac{\rho^*}{\rho} \cong 3 \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{II.6.29})$$

bağıntısı olduğu görülür. (II.6.15) ile verilen v hızı yerine konarak (II.6.29) dan

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{3 G m}{c^2 \ell} = \frac{3}{2} \frac{r_s}{\ell} \quad (\text{II.6.30})$$

bulunur. (II.6.24) göz önünde bulundurulacak olursa

$$\ell \sim 2r \sim \frac{3}{2} r_s$$

olacağına dikkat ederek (II.6.30) dan

$$\frac{\rho^*}{\rho} \sim 1$$

olması gerektiği görülür. Bu şekilde yığılma bölgesinin yoğunluğunun büyük bir değişme göstermeyeceği dolayısıyla bu bölgeye karşılık gelen r_j^* Jeans yarıçapının r_j mertebesinde olacağı anlaşılır. Kendisine karşılık gelen Jeans yarıçapı değişmediği hâlde boyutları,

kümeceklerin herbirine göre, büyümüş olan yığılma bölgesinde $R \geq r_j^*$ ve $n \geq 1$ koşullarının sağlanması mümkün olabilecektir. ρ^* in ρ ya göre büyük bir değişme göstermediği bu hâlde (II.6.27) koşulu (II.6.26) ile birlikte $\ell > r_j$ olmasını da gerektirmektedir. Gerçekten de (II.6.26) dan

$$R = \frac{\rho}{\rho^*} \ell \sim \ell \sim 2r \sim 2r_j \sim 2r_j^* \quad (\text{II.6.31})$$

olduğu görülür. Öte yandan Şekil II.6.2 göz önünde bulundurularak

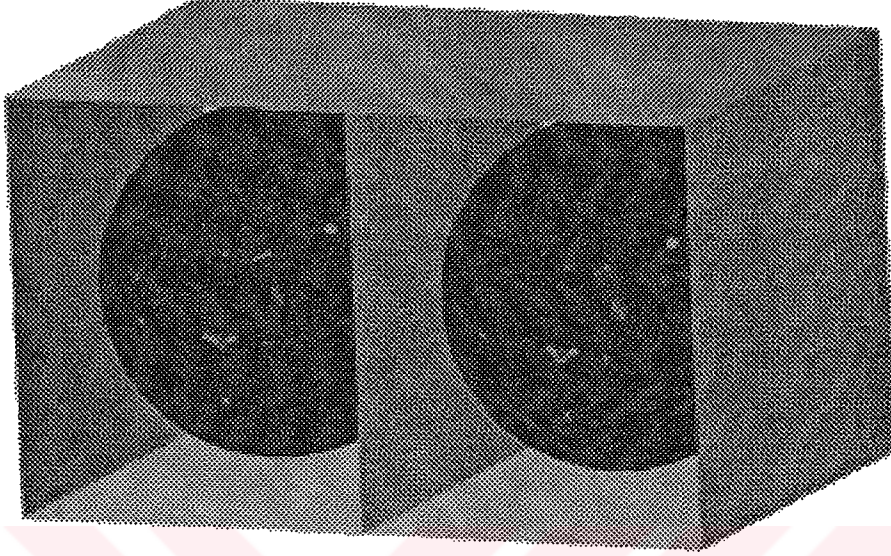
$$n = \left(\frac{R}{r_j^*} \right) \left(\frac{\ell}{2r_j^*} \right)^2 \quad (\text{II.6.32})$$

ile verilmesi gerektiği görülen yığılma bölgesindeki yoğunlaşmaların sayısı (II.6.31) yardımıyla

$$n \sim 2$$

olarak hesaplanır.

Burada sesötesilik koşuluyla ilgili bir noktayı önemle belirtmemiz gerekir. Yığılma bölgesinde yoğunlaşmaların mümkün olabilmesi için bir yandan $R \geq r_j^*$ bir yandan da $n \geq 1$ koşullarının aynı anda sağlanması gerekmektedir. Yani bu koşullar yığılma bölgesinde yoğunlaşmaların oluşabilmesi için gerek ve yeter koşulları oluşturmaktadırlar. Çarpışmanın hiç değilse bir karadeliğin oluşmasıyla sonuçlanabilmesi için bu koşullar



Şekil II.6.2 *Kübik kümeciklerin çarpışmalarından sonra mini karadeliğe evrimleşebilecek iki yoğunlaşma olmaktadır.*

$$R \sim r_j^* \sim \left(\frac{c^2}{G \rho^*} \right)^{1/2}$$

(II.6.33)

$$n = \left(\frac{R}{r_j^*} \right) \left(\frac{\ell}{2r_j^*} \right)^2 \sim 1$$

şeklinde olmalıdırlar. Oysa bu iki koşul birlikte değerlendirilerek

$$\ell \sim 2r \sim 2 r_j^*$$

olması gerektiği görülür ki bu sonuç (II.6.20) ile ifade ettiğimiz, $v \sim v_s$ olmalı şeklindeki sesötesilik koşulunun verdiği (II.6.23) sonucuyla aynıdır. Dolayısıyla kümeciklerin çarpışmalarının karadeliklerin oluşumuyla sonuçlanabilmesi için sesötesilik koşulu bir varsayımdan çok, zorunlu bir sonuç hâline gelmektedir. Yâni, çarpışmanın karadelik oluşumuyla sonuçlanabilmesi için kümeciklerin boyutlarının, zaten sesötesi hızlarla çarpışmalarını sağlayacak mertebede olması gerekmektedir.

Şimdi daha gerçekçi bir hâlde, çarpışmadan önce kümeciklerin r yarıçaplı küresel bir yapıya sâhip olduğu hâle dönüp bu hâlde ortaya çıkan durumu incelemek istiyoruz. r yarıçaplı özdeş küresel kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında kazandıkları hızlarla kafa-kafaya çarpışmaları hâlinde, çarpışma anındaki hızlarının (II.6.15) ile verileceğini görmüştük. Bu hızın sesötesilik limitinin üzerinde olması ise (II.6.23) – (II.6.25) sonuçlarına yol açmaktaydı. Ayrıca (II.6.24) bağıntısı da, r nin r_s den çok az farklı olduğu (dolayısıyla çarpışma hızlarının v_s den çok az büyük olduğu) yâni

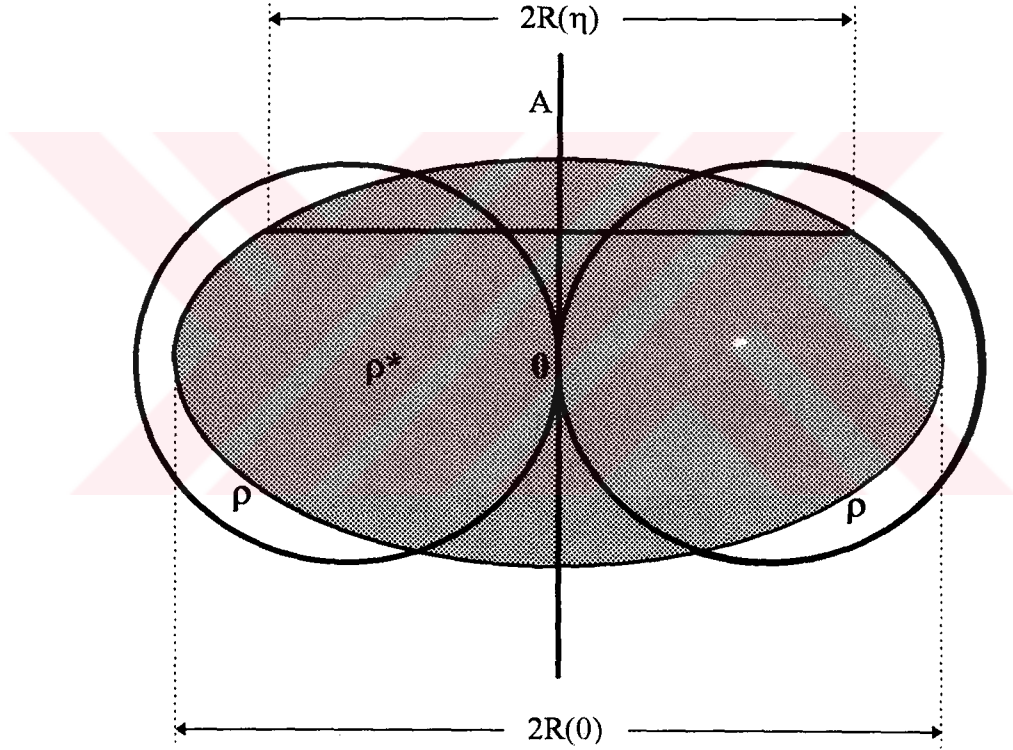
$$r \sim r_s \equiv \frac{2 G m}{c^2} \quad (\text{II.6.34})$$

varsayıldığı çarpışmaların göz önüne alınacağını göstermekte idi. Aksi hâlde çarpışma, sonucu zaten belli olan, iki karadeliğin çarpışmasına indirgenmekte ve evrenin bu günkü durumuyla uyuşmayan, anlamsız bir hâle yol açmaktaydı. Öte yandan bu halde (II.6.15) ve (II.6.24) göz önünde bulundurularak (II.6.29) dan

$$\frac{\rho^*}{\rho} \equiv 3 \frac{v^2}{c^2} = \frac{3 G m}{2c^2 r} = \frac{3}{4} \frac{r_s}{r} \sim 1 \quad (\text{II.6.35})$$

bulunur.

Özdeş iki küresel kümeceğin kafa - kafaya çarpışmasından sonra Şekil II.6.3 de görüldüğü gibi, \overline{OA} dan geçen, şekil düzlemine dik kesiti r yarıçaplı bir daire olan ve taralı kısımla gösterilen bir yığılma bölgesi oluşur. \overline{OA} dan geçen, şekil düzlemine dik düzlem içinde O dan η radyal uzaklığında bulunan bir noktada yığılma bölgesinin $R(\eta)$ yarıgenişliğinin



Şekil II.6.3 Küresel iki kümeceğin birbirlerinin gravitasyon alanında kafa-kafaya çarpışmaları. Çarpışmadan sonra arakesitte oluşan yığılma bölgesi gölgeli olarak gösterilmiştir.

$$R(\eta) = 2 \frac{\rho}{\rho^*} \sqrt{r^2 - \eta^2} \quad (\text{II.6.36})$$

olduğu gösterilir. [Zebitay (1984)]. Buradan, yığılma bölgesinin, $\eta = 0$ değerine karşılık, en geniş olduğu yerdeki

$$R(0) = 2 \frac{\rho}{\rho^*} r \sim 2r \quad (\text{II.6.37})$$

yarıgenişliği yardımıyla, $R(\eta)$

$$R(\eta) = R(0) \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}}$$

şeklinde düzenlenir. Yığılma bölgesinin

$$R(\eta) < r_j^* \sim \left(\frac{c^2}{G \rho^*} \right)^{1/2} \quad (\text{II.6.38})$$

olduğu η değerlerine karşılık, şekil düzlemindeki genişliği içinde herhangi bir yoğunlaşma olamaz. (II.6.36) ve (II.6.38) aracılığıyla

$$2 \frac{\rho}{\rho^*} r \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}} < \left(\frac{c^2}{G \rho^*} \right)^{1/2}$$

$$2 r \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}} \lesssim \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}} \approx \frac{1}{2}$$

$$\eta \approx \frac{\sqrt{3}}{2} r \equiv \bar{\eta} \quad (\text{II.6.39})$$

$$n = \int_0^{\bar{\eta}} \int_0^{2\pi} \frac{R(0)}{4 r_j^{*3}} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{r^2}} \eta \, d\eta \, d\theta \quad (\text{II.6.40})$$

olduğundan [Zebitay (1984)],

$$n = \frac{\pi R(0)}{2 r_j^{*3}} \left[- \frac{(r^2 - \eta^2)^{3/2}}{3r} \right]_0^{\bar{\eta}} \quad (\text{II.6.41})$$

şeklinde elde edilir. $r \sim r_j^*$ olduğunu ve (II.6.37) ile (II.6.39) u göz önünde bulundurarak bu son eşitlikten $n \approx 1$ olduğu görülür. Kuşkusuz (II.6.39) da $\bar{\eta} = r$ alınmış olsaydı da, mertebesiyle ilgilendiğimiz bu sonuç değişmeyecekti.

Buna göre, henüz gravitasyon yarıçapı içine büzülmemiş fakat yarıçapları gravitasyon yarıçapı mertebesindeki, özdeş küresel kümeciklerin kafa-kafaya çarpışmaları, yığılma bölgesinde bir tane karadelğin oluşumuyla son bulmaktadır. Kümelerin yarıçaplarının r_s den daha küçük olması evrenin zaten karadeliklere evrimleşen kümeciklere ayrılmış olmasını gerektirdiğinden tutarsızdır. Yarıçaplarının r_s den daha büyük olması hâlinde (yâni çarpışma hızlarının sesötesilik varsayımına uymaması hâlinde) kümeciklerin çarpışmaları

karadeliklerin oluşumuna yol açmamakta olup, yalnızca, henüz r_s içine büzülmemiş, yarıçapları r_s mertebesinde olanların çarpışmaları, bir tane karadeliğe evrimleşen, ancak bir tane yoğunlaşmayla sonuçlanmaktadır. Buna göre durumu,

- i) $r < r_s$: anlamsız ($v > v_s$)
- ii) $r > r_s$: yoğunlaşma yok ($v < v_s$)
- iii) $r \sim r_s$: tek bir yoğunlaşma var ($v \sim v_s$)

şeklinde özetleyebiliriz.

Şimdi (II.6.41) de $\bar{\eta} \cong r$ yaklaşıklığıyla

$$n \sim \frac{\pi R(0) r^2}{6 r_j^{*3}}$$

mertebesinde olacak olan, yoğunlaşmaların sayısının $n \cong 1$ olması hâlinin kümeciklerin yarıçaplarına getirdiği alt sınırı belirleyelim.

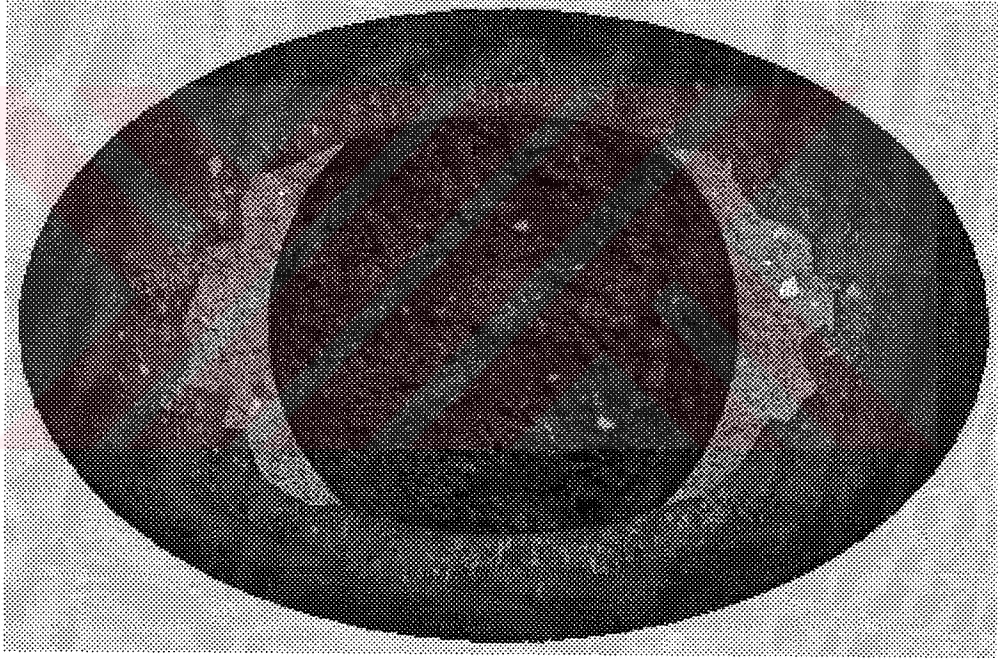
$$\frac{\pi R(0) r^2}{6 r_j^{*3}} \cong 1$$

ifâdesinde, çarpışma sonrasında yoğunlaşmaların mümkün olabilmesi için, $R(0) \sim r_j^*$ almak suretiyle

$$r \gtrsim \sqrt{\frac{6}{\pi}} r_j^*$$

bulunur ki bu değer sesötesilik koşulunun verildiği, (II.6.30) ile birlikte değerlendireceğimiz, (II.6.23) sonucuyla aynı mertebede hatta daha büyüktür. Buna göre, kümeciklerin kafa-

kafaya çarpışmalarının, karadeliğe evrimleşen, en az bir yoğunlaşma ile sonuçlanabilmesi için bunların çarpışma hızlarının zaten sesötesi olması gerektiği anlaşılmış olmaktadır. Ancak bu hızın ses hızından çok büyük olmasının da mümkün olamayacağını daha önce görmüştük. Dolayısıyla çarpışma hızları ancak ses hızı mertebesinde olacak olan kümeciklerin çarpışmaları da yalnızca bir tane yoğunlaşma ile son bulacaktır.



Şekil II.6.4 İki küresel kümeğin ses hızı metebesindeki hızlarla kafa-kafaya çarpışmasından sonra oluşan yığılma bölgesi. Yığılma bölgesinde yalnızca bir tane yoğunlaşma olmaktadır..

Öte yandan göz önüne aldığımız koşullarda özdeş iki kümeceğin kafa-kafaya çarpışmaları, karadeliğe evrimleşen yalnızca bir tane yoğunlaşma ile sonuçlandığından, çarpışmadan sonra akışkanın yoğunlaşmaya katılmayan ve geriye kalan kısmının kütlesi de,

$$\Delta m = 2m - n m_j^* = 2m_j - m_j^* \sim m_j^* \quad (\text{II.6.42})$$

olur. Bu ise çarpışma sonunda oluşan yoğunlaşmanın kütlesinin çarpışmaya giren kümeciklerden birinin kütlesi mertebesinde olduğunu göstermektedir. Yığılma bölgesindeki $r > r_j^*$ yarıçaplı yoğunlaşmaların zaten r_s mertebesindeki yarıçapı hızla r_s in altına büzüleceğinden bu andan itibaren evrimini artık bir karadelik olarak sürdürecektir. Akışkanın, bu karadeliğin yakın çevresindeki, yoğunlaşmaya katılmayan kısmının, evrenin genişlemesine karşın, karadeliğin alanından kurtulamayacağı ve bu karadeliğe katılacağı düşünülebilir. Böylece, çevresindeki yoğunlaşmaya katılmayan akışkanı da yutan karadeliğin kütlesi sonunda $2m$ mertebesine ulaşır. Kuşkusuz bu durum evreni oluşturan akışkanın tamamının karadeliklerde toplanacağı anlamına gelmez. Bir kere, kümeciklerin bütün çarpışmalarının kafa-kafaya ve ikili çarpışmalar olduğunu düşünmek mümkün değildir. Kümeciklerin kafa-kafaya olmayan çarpışmalarında, kafa-kafaya çarpışmadan, (yığılma bölgesinde yine de bir karadeliğin oluşması için gerekli koşulların sağlanabileceği kadar), küçük sapmalar hâlinde bu karadelik aynı zamanda bir açısal momentuma da sahip olabilecektir. Bu yönde çalışmanın derinleştirilmesi ve mini karadeliklerin açısal momentumlarının belirlenebilmesi konusunda [Zebitay, (1984)] ve [Rızaoğlu, (1988)] yol gösterici olabilir. Ancak, eğer kafa-kafaya olmayan çarpışma, yığılma bölgesinde

yoğunlaşma koşullarının sağlanmasına imkan vermeyecek kadar büyük bir sapmaya sahipse bu çarpışmaya giren akışkan evrenin genişlemesine uyup dağılacaktır.

Öte yandan ikiden daha fazla sayıda kümeceğin çarpışmasının da benzer biçimde sonuçlanacağını düşünmek akla yakın görünmektedir.

Şimdi, yine özdeş iki küresel kümeceğin kafa-kafaya çarpışmaları hâline dönelim ve çarpışmadan sonra akışkanın tamamının yığılma bölgesinde toplanması için geçen süreyi hesaplayalım. v hızıyla hareket eden akışkanın $2r$ yolunu katetmesi için geçen süre, (II.6.15) ve Şekil II.6.3 göz önünde bulundurularak

$$\Delta t = \frac{2r}{v} = \frac{2r}{\left(\frac{Gm}{2r}\right)^{1/2}} = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{G\rho}\right)^{1/2} \quad (\text{II.6.43})$$

bulunur. Modelimizin 3. varsayımla belirttiğimiz çağın başlangıcında bir kümeciklere ayrılma ve bunu izleyen ikili çarpışmalardan sonra ilk mini karadeliklerin oluşması için geçen süre, başlangıç ânı $t_0 = 10^{-43}$ sn olmak üzere (II.6.6) da göz önünde bulundurularak,

$$\Delta t_0 = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{G\rho_0}\right)^{1/2} \cong 8t_0 \quad (\text{II.6.44})$$

olur. Bu sürenin sonunda yâni birinci kuşak karadeliklerin oluşmasından sonra, modelimizde;
1- Yeterince yakın olmamaları nedeniyle, birbirlerinin alanında kazanacakları kinetik enerjileri, evrenin genişlemesinden doğan kinetik enerjilerinden küçük olan ve çarpışma öncesi henüz yarıçapları r_j nin altında olduğu için çökmeye başlamamış kümecikler,

2- Çarpışma hızları ses hızından küçük olan, dolayısıyla bu hâlde yarıçapları r_j den küçük olacağı için çökme şansları hiç olmayan, çarpışmaları da bir yoğunlaşmayla sonuçlanamayacak olan kümecikler,

3- Çarpışma sonrasında yoğunlaşma koşullarının sağlanamayacağı kadar, kafa-kafaya olmayacak şekilde çarpışan kümecikler, evrenin genişlemesine uyarak dağılacaklar ve bu dağılmayı yeni bir kümeciklere ayrılma ve çarpışma süreci izleyeceğinden, göz önüne aldığımız çağ boyunca birbirini izleyen çarpışma süreçlerinin her biri, Tablo II.6.1 den de görüleceği üzere, kütleleri giderek büyüyen, farklı jenerasyonlarda karadeliklerin oluşumlarıyla son bulacaktır.

Modelimizin, 3. varsayımıyla belirlenen, evrenin başlangıç çağı boyunca kaç farklı kuşak karadelik oluşacağı da hesaplanabilir. Gerçekten de ilk kuşak mini karadeliklerin oluşumunun tamamlandığı

$$t_1 = t_0 + \Delta t_0 \cong 9t_0$$

ânında yeni bir sürecin başladığını varsayarsak bu süreç de, (II.6.44) yardımıyla gördüğümüz gibi,

$$t_2 = t_1 + \Delta t_1 \cong 9t_1 = 9^2 t_0$$

ânında son bulur. Bu süreçler çağın sonuna kadar birbirini izleyecek ve çağın sonuna karşılıklı

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t_{n-1} = 9^n t_0 \quad (\text{II.6.45})$$

ânında son kuşak karadelikler oluşmuş olacaktırdır.

Genişleme süreci içinde evrenin yoğunluğu giderek azalmakta olduğundan, (II.6.43) den görüleceği üzere, farklı kuşak karadeliklerin giderek daha uzun bir zaman aralığı içinde oluşmakta olduklarına dikkat edilmelidir. (II.6.45) den, gözönüne alınan çağ boyunca,

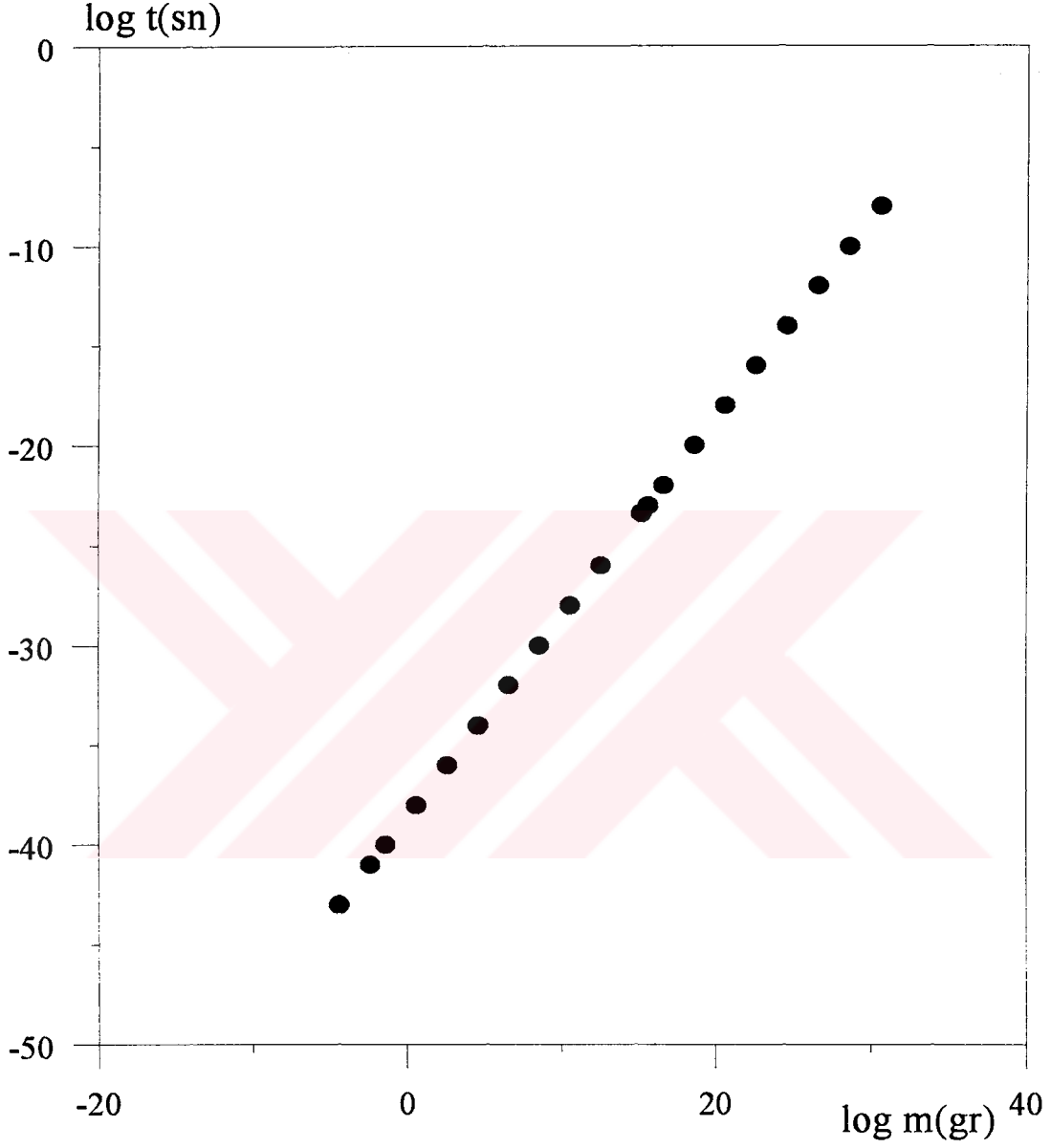
$$n = \frac{35}{\log 9} \cong 36 \quad (\text{II.6.46})$$

tane farklı kuşak karadeliğın oluşabileceği görülmektedir.

Tablo II.6.1 de, genişleme genişleme süreci içindeki farklı anlarda ortaya çıkan kümeciklerin yarıçaplarının ve kütlelerinin çağın sonuna doğru giderek artmasına rağmen bunların çarpışma hızlarının sâbit kaldığı görülmektedir. Gerçekten de $m \sim m_j$ ve $r \sim r_j$, dolayısıyla $\frac{m}{r} \sim \frac{m_j}{r_j} = \frac{c^2}{G^2}$ olduğundan, yâni evrenin genişlemesine bağılı olarak m_j ve r_j değışmesine karşılık, $\frac{m_j}{r_j}$ oranı sâbit kaldığından (II.6.15) ile verilen çarpışma hızları da evrenin genişlemesine rağmen değışmeyecektir.

Tablo II.6.1 Evrenin 10^{-43} sn – 10^{-8} sn anları arasındaki başlangıç çağında oluşan mini karadeliklerin kütleleri 10^{-5} gr ile 10^{30} gr arasında değişmektedir. Son sütunda bu karadeliklerin buharlaşma sürelerinin değişimi görülmektedir.

t (sn)	T (°K)	ρ (gr/cm ³)	r (cm)	m (gr)	v (cm/sn)	τ (sn)
10^{-43}	$2,5 \cdot 10^{31}$	$1,5 \cdot 10^{93}$	$3 \cdot 10^{-33}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-42}$
10^{-41}	$2,5 \cdot 10^{30}$	$1,5 \cdot 10^{89}$	$3 \cdot 10^{-31}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-36}$
10^{-40}	$7,9 \cdot 10^{29}$	$1,5 \cdot 10^{87}$	$3 \cdot 10^{-30}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-33}$
10^{-38}	$7,9 \cdot 10^{28}$	$1,5 \cdot 10^{83}$	$3 \cdot 10^{-28}$	4	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-27}$
10^{-36}	$7,9 \cdot 10^{27}$	$1,5 \cdot 10^{79}$	$3 \cdot 10^{-26}$	$4 \cdot 10^2$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-21}$
10^{-34}	$7,9 \cdot 10^{26}$	$1,5 \cdot 10^{75}$	$3 \cdot 10^{-24}$	$4 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-15}$
10^{-32}	$7,9 \cdot 10^{25}$	$1,5 \cdot 10^{71}$	$3 \cdot 10^{-22}$	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-9}$
10^{-30}	$7,9 \cdot 10^{24}$	$1,5 \cdot 10^{67}$	$3 \cdot 10^{-20}$	$4 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$
10^{-28}	$7,9 \cdot 10^{23}$	$1,5 \cdot 10^{63}$	$3 \cdot 10^{-18}$	$4 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^3$
10^{-26}	$7,9 \cdot 10^{22}$	$1,5 \cdot 10^{59}$	$3 \cdot 10^{-16}$	$4 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^9$
$4 \cdot 10^{-24}$	$4 \cdot 10^{21}$	10^{54}	10^{-13}	$1,5 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{10}$	$3,4 \cdot 10^{17}$
10^{-23}	$2,5 \cdot 10^{21}$	$1,5 \cdot 10^{53}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$4 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{18}$
10^{-22}	$7,9 \cdot 10^{20}$	$1,5 \cdot 10^{51}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$4 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{21}$
10^{-20}	$7,9 \cdot 10^{19}$	$1,5 \cdot 10^{47}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{27}$
10^{-18}	$7,9 \cdot 10^{18}$	$1,5 \cdot 10^{43}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{33}$
10^{-16}	$7,9 \cdot 10^{17}$	$1,5 \cdot 10^{39}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{22}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{39}$
10^{-14}	$7,9 \cdot 10^{16}$	$1,5 \cdot 10^{35}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{24}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{45}$
10^{-12}	$7,9 \cdot 10^{15}$	$1,5 \cdot 10^{31}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{26}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{51}$
10^{-10}	$7,9 \cdot 10^{14}$	$1,5 \cdot 10^{27}$	3	$4 \cdot 10^{28}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{57}$
10^{-8}	$7,9 \cdot 10^{13}$	$1,5 \cdot 10^{23}$	$3 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^{30}$	$2 \cdot 10^{10}$	$6,4 \cdot 10^{63}$



Şekil II.6.5 10^{-43} sn - 10^{-8} sn anları arasında oluşan mini karadeliklerin kütlelerinin zamana bağlı değişimi.

SAYISAL BİR ÖRNEK

Şimdi modelimizin 3. varsayımıyla belirlenen çağda, örneğin $t = 10^{-24}$ s. anında, 5. varsayıma uygun bir şekilde, evrenin kümeciklere ayrılmış olduğunu varsayalım. Bu anda evrenin sıcaklığı (II.6.10) yardımıyla

$$T = 1,5 \cdot 10^{10} \left(\frac{2}{N} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}} \cong 10^{22} \text{ } ^\circ\text{K}$$

ve yoğunluğu da (II.6.6) dolayısıyla

$$\rho \sim \frac{3}{32\pi G t^2} \sim 0,5 \cdot 10^{54} \text{ gr / cm}^3$$

dür. Bu yoğunluğa karşılık gelen Jeans yarıçapı ve Jeans kütesinin de

$$r_j \sim \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2} \sim 10^{-13} \text{ cm}$$

$$m_j \sim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \sim 10^{15} \text{ gr}$$

olduğu görülmektedir. 5. varsayımın bir sonucu olarak, kümeciklerin gravitasyon yarıçapı ile aynı mertebede olduğunu gördüğümüz r yarıçapları

$$r \sim r_j \sim 10^{-13} \text{ cm}$$

ve kütleleri de

$$m \sim m_j \sim 10^{15} \text{ gr}$$

mertebesindedirler. Bu kümeciklerin çarpışma hızları ise (II.6.15) den

$$v = \left(\frac{G m}{2 r} \right)^{1/2} \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ cm / sn} = \frac{2}{3} c$$

bulunacağından gerçekten de v , v_s mertebesinde olmakla birlikte çok az da olsa v nin v_s den büyük, yâni,

$$c > v_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

olduğu görülür. Öte yandan, çarpışmadan sonra oluşan yığılma bölgesinin yoğunluğu (II.6.35) den

$$\rho^* = 3 \frac{v^2}{c^2} \rho = 1,3 \rho \sim \rho$$

dur. Buna göre r_j^* ve m_j^* in da

$$r_j^* \sim \left(\frac{c^2}{G \rho^*} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2} \cong r_j \sim 10^{-13} \text{ cm}$$

$$m_j^* \sim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho^*} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2} \cong m_j \sim 10^{15} \text{ gr}$$

olduğu görülür. Buna göre, evrenin yaşının $t = 10^{-24}$ sn. olduğu andaki, her ikili çarpışmaya karşılık gelen karadeliğin, 10^{15} gr. mertebesinde olan kütlelerine karşılık yarıçapının 10^{-13} cm mertebesinde olacağı anlaşılır. Büyük kütlelerine rağmen yarıçaplarının bir nükleonun yarıçapı mertebesinde olması bu karadeliklere niçin mini karadelik denilmekte olduğunu açıkça göstermektedir. Tablo II.6.1 de evrenin başlangıç çağı boyunca oluşan karadeliklerin kütlelerinin değişimi görülmektedir. Çağın sonunda kütleleri $m \sim 2 \cdot 10^{31}$ gr $= 10^{-2} M_{\odot}$ mertebesine, yarıçapları da $r \sim 10^3$ cm $= 10$ m mertebesine kadar büyüyen karadeliklerin bu hâlde bile, güneşin kütlelerinin % 1 mertebesindeki kütlelerine karşılık yarıçapları 10 m gibi, bir yıldızın son evresini oluşturan karadeliklere oranla, çok küçük bir değere sahip olduğu görülmektedir. Bilindiği gibi bir yıldızın son evresini oluşturan karadeliklerin en küçüklerinin, yani kütleleri $3,2 M_{\odot}$ mertebesinde olanlarının bile yarıçapları $r_s = \frac{2 G m}{c^2} \cong 10^4$ m mertebesindedir.

Göz önüne aldığımız örnek hâlde oluşan 10^{15} gr mertebesinde kütleyle sahip mini karadeliklerin kaçınıcı kuşak karadeliklere karşılığünü ise (II.6.45) aracılığıyla hesaplayabiliriz. Sayısal değerler yerlerine konarak

$$10^{-24} = 9^n 10^{-43}$$

den $n = \frac{19}{\log 9} \cong 20$ olacağı için örneğimizdeki mini karadeliklerin 20. kuşak

karadelikler içinde yer aldıkları görülür.

III. BULGULAR

1- Tezin özgün kısmını oluşturan (II.6) bölümünde mini karadeliklerin oluşumunu tasvir eden yeni bir model önerilmektedir. Kaotik Kozmolojinin temel varsayımları çerçevesi içinde, Hawking'in önerdiği modelden bütünüyle farklı bu modelle, aynı zamanda, evrenin yaşının 10^{-8} sn olduğu âna kadar olan başlangıç evresinin evrimi için, Kaotik Kozmolojinin öngördüğünden farklı bir senaryo ortaya konulmaktadır. Mixmaster Model diye bilinen, Misner'in önerdiği, evrenin başlangıç evresini tasvir eden modelde, başlangıçta, homojen ve izotrop bir evrenden çok büyük sapmaların olduğu varsayılmakta ancak bu evredeki koşullara bağlı olarak bu çok büyük homojensizlik hızla yerini Friedmann modelleriyle tasvir olunan homojen ve izotrop bir evrene bırakmakta ve evren bu andan itibaren Standart Modele göre evrimleşmektedir. Buna karşılık modelimizde, evrenin, başlangıcından itibaren homojen ve izotrop bir yapıya sâhip olduğu ve başlangıç çağında, modelimizin temel varsayımlarına uygun olarak kümeciklere ayrılmış olduğu öngörülmektedir. Tezde gerçekten de modelimizin varsayımlarına bağlı olarak mini karadeliklerin oluşabileceği gösterilmiş bulunmaktadır. Aynı zamanda bu model evrenin başlangıç evresinin Mixmaster modelden farklı bir biçimde tasvir edilebilmesine olanak sağlamaktadır. VI. Bölümde bu iki modeli epistemolojik açıdan değerlendireceğiz.

2- Modelimizin temel varsayımlarından 3. süne uygun olarak göz önüne alınmış bulunan, MKD lerin oluşumuna yataklık eden çağda evrenin, 5. varsayıma uygun olarak kümeciklere ayrılması hâlinde bu kümeciklerin yarıçaplarının, bir yandan bir karadeliğin yarıçapı

mertebesinde, bir yandan da kendi hâline karşı düşen jeans yarıçapı mertebesinde olacağı gösterilmiş bulunmaktadır. Bu sonuç gerçekten de çok çarpıcı bir sonuçtur. Ancak kümeciklere ayrılmanın hemen ardından bu kümeciklerin karadeliklere evrimleşmesi de mümkün değildir. Kümeciklerin kendi gravitasyon alanları altında çökebilmeleri koşuluna temel oluşturan Jeans yarıçapı ve Jeans kütlelerinin, göz önüne aldığımız çağ için, her ne kadar yalnızca mertebelerini biliyorsak da kümeciklerin yarıçaplarının Jeans yarıçapı mertebesindeki değerlerinin az da olsa Jeans yarıçapından küçük olması yüzünden kümecikler gerçekten de doğrudan doğruya karadeliklere evrimleşmezler. Ayrıca kümeciklerin doğrudan karadeliklere evrimleşmiş olmaları evrenin bu günkü durumuna, dolayısıyla gözleme de uygun olmadığından mümkün olamaz. Gerçekten de eğer mini karadelikler bu yolla oluşmuş olsalardı, yâni göz önüne aldığımız çağdaki herhangi bir anda varsayımlarımıza uygun olarak ortaya çıkan kümeciklerin her biri doğrudan karadeliklere evrimleşmiş olsalardı bu, evreni oluşturan akışkanın tümünün karadeliklerde toplanmış olmasını gerektirirdi. Bu karadeliklerin çarpışmaları ise, daha büyük kütleli yeni karadeliklerin ortaya çıkmasına yol açacağından evrenin karadeliklerde toplanmış olması durumu çarpışmalarla değişmeyecektir. Başlangıçta bütünüyle karadeliklerde toplanmış akışkanın bu günkü evrene evrimleşmesi ise kesinlikle mümkün değildir. Buna karşılık yarıçapları bir karadeliğin yarıçapı mertebesinde olmakla birlikte çökmeleri için gerekli koşulun sağlanmadığı yâni, yarıçapları Jeans yarıçapının altında bulunan kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında kazandıkları hızlarla çarpışmaları hâlinde ise yalnızca yoğunlaşma koşullarının sağlanmasını mümkün kılan çarpışmalardan sonra karadelikler oluşabilecekler, buna uymayan çarpışmaların ardından kümecikler yeniden dağılacaklardır. Bu nedenle mini karadeliklerin doğumuna

yataklık eden evresinin sonunda evren, standart modele göre evrimleşebileceği, mini karadelikleri de barındıran, homojen ve izotrop bir yapıya gene de sâhip olabilecektir. Genişlemekte olan evrenin sıcaklığı eşik sıcaklığına düştüğünde başlayan hadron çağından itibâren evren, standart modele göre, bu gün gözlediğimiz evrene evrimleşeceğinden modelimizde, mini karadeliklerin oluşumunun, evrenin yaşının 10^{-8} sn olduğu âna kadar olan evre ile sınırlı olmasının gözleme uygun olduğu görülmektedir.

3- Varsayımlarımızın 5. si kümeciklerin çarpışma hızlarının sesötesi olmasını öngörmektir. MKD lerin oluşabilmesi için, modelimizde, bu çarpışma hızlarının sesötesi değil fakat zorunlu olarak ses hızı mertebesinde olmaları gerektiği, yâni sesötesilik varsayımının, ses hızı mertebesinde olma "*sine qua non*" koşuluna karşıdüştüğü gösterilmiş bulunmaktadır.

4- Tezde iki küresel kümecığın ses hızı mertebesindeki hızlarla kafa-kafaya çarpışmalarının, mini karadeliğe evrimleşen daima bir ve yalnız bir tane yoğunlaşma ile son bulduğu gösterilmiştir. Gerçekten de

i) $n = 1$ şeklinde ifâde ettiğimiz, yığılma bölgesinde 1 tane yoğunlaşmanın olabilmesi için gerekli koşulun sağlanması hâlinde kümeciklerin çarpışma hızlarının zorunlu olarak ses hızı mertebesinde olacağı,

ii) $n > 1$ ile ifâde olunan, 1 den daha fazla sayıda yoğunlaşma olmasının mümkün olamayacağı aksi hâlde ses hızı mertebesinden daha büyük değerler alacak olan çarpışma hızlarının ışık hızını aşması gibi kabul edilemez bir sonucun ortaya çıkacağı,

iii) $n < 1$ hâlinde yâni hiç yoğunlaşma olmaması hâlinde ise çarpışma hızlarının zaten ses hızının altında olacağı

tezde gösterilmiş olduğundan sonuç olarak : kümeciklerin çarpışmalarıyla, karadeliğe

evrimleşen ancak 1 ve yalnız 1 tane yoğunlaşma oluşmakta ve bu hâlde kümeciklerin çarpışma hızları da zorunlu olarak ses hızı mertebesinde olmaktadır.

5- Mini karadeliklerin oluşumuna yol açabilen her sürecin sonunda evren yeniden kümeciklere ayrılmakta ve bu oluşum süreçleri, göz önüne alınan çağın sonuna kadar birbirini izlemektedir. Bu ise söz konusu çağda kütleleri giderek büyüyen farklı kuşak karadeliklerin oluşmuş olduğu anlamına gelir. Tezde, evrenin yaşının 10^{-8} sn olduğu âna kadar olan, başlangıç çağı boyunca, 36 farklı generasyona ait mini karadeliklerin oluşacağı gösterilmiş olup bu karadeliklerin açıkça hesaplayabildiğimiz kütlelerinin başlangıç çağı boyunca giderek büyüdüğü ve 10^{-5} gr ile 10^{30} gr mertebesindeki değerler arasında bir değişim gösterdiği saptanmıştır (son kuşak karadeliklerin güneşin kütlelerinin % 0,1 i mertebesindeki kütlelerine karşılık bunların yarıçaplarının ancak birkaç metre mertebesinde olacağına dikkat edilmelidir). Modelimizde 10^{16} gr dan daha büyük kütleli mini karadeliklerin oluşması mümkün olduğundan, Tablo II.6.1 den de görüleceği üzere, buharlaşma süreleri evrenin başlangıcından bu güne kadar geçen süreden daha uzun olan bu karadeliklerin gözlenebilmeleri mümkün olabilecektir. Bu ise modelimizin test edilebilir olduğu anlamına geldiğinden lehte kaydedilmesi gereken hususlardan birini oluşturur.

6- Öte yandan bilindiği gibi evrenin GRT çerçevesi içinde belirlenen yoğunluğunun $\rho \sim 10^{-29}$ gr / cm³ mertebesinde olmasına karşılık, gözlemlerle bulunan galaktik kütle yoğunluğu 10^{-31} gr / cm³ mertebesinde dir. Bu da gözlenen değer, GRT nin verdiği değer % 1 i mertebesinde olması demektir. Bu güne kadar yapılan çalışmalarla, gözlenen değer aşağı yukarı 100 katı mertebesindeki bu kayıp kütle varlığı açıklanamamıştır. Modelimizin doğal bir sonucu olarak ortaya çıkan, evrenin bugünkü yaşından daha uzun

ömürlü karadelikler bu kayıp kütleinin varlığına ışık tutmak yönünden büyük önem taşımaktadırlar. Tutarlı ve geçerli bir teori olan, GRT yi destekleyen bu sonucun da modelimizin lehine bir sonuç olduğunu belirtelim.

7- Göz önüne aldığımız çarpışmalar, kümeciklere ayrılma varsayımının bir sonucu olarak zaten özdeş olan fakat küresel kümeciklerin kafa-kafaya çarpışmalarıdır. Kafa-kafaya olmayan ancak gene de $n = 1$ koşulunun sağlanabildiği bir çarpışmadan doğan mini karadelik aynı zamanda bir de spine sâhip olurken, bu koşulun sağlanmasına imkân vermeyecek kadar, kafa-kafaya çarpışmadan sapma hâlinde hiç bir yoğunlaşma olmayacağı ve evrenin genişlemesine uyarak kümeciklerin dağılacağı tezde belirtilmiş bulunmaktadır. Ancak mini karadeliklerin spine sâhip olabilecekleri çarpışmalar ayrıca incelenmemiştir.

IV. TARTIŞMA VE SONUÇ

II. Bölümde §(II.1) – §(II.5) de, karadeliklerle ilgili, tezin konusuna temel oluşturan genel bilgiler sunulmuş bulunmaktadır. Karadelikleri bilinen bütün yönleriyle tanıtan bu bilgilerin pedagojik bir düzen içinde sunulmasına özen gösterilmiş ve konunun bütünlüğü açısından çok gerekli görülmeyen ayrıntılar referanslara bırakılmıştır.

Tezin özgün kısmını oluşturan §(II.6) da, MKD lerin oluşumunu, dolayısıyla bu oluşuma yataklık eden, evrenin büyük patlamadan sonraki ilk 10^{-8} sn içindeki başlangıç evresini tasvir eden bir model geliştirmiştik. Şimdi §(II.6) ve III. Bölümde ayrıntılarını vermiş olduğumuz modelimizi, gerek iç yapısı ve sonuçları, gerekse epistemolojik yönden tartışmak ve tezin bir özeleştirisini yapmak istiyoruz.

1– Bu çalışmada, mini karadeliklerin oluşumunun, önerdiğimiz Çarpışma Modeli ile tasvirinin mümkün olduğu gösterilebilmiş, ayrıca evrenin mini karadeliklerin oluşumuna yataklık eden evresinin evrimine ilişkin tutarlı bir senaryo ortaya konabilmiştir. Ayrıntılara girmeden önce özellikle bu hususun vurgulanması uygun olacaktır.

2– Tezde başlangıç evresinde evreni oluşturan akışkanın, birbirlerinin gravitasyon alanında sesötesi hızlarla çarpışacak şekilde kümeciklere ayrılmış olduğu varsayılmakla birlikte, ikili çarpışmaların bir MKD oluşumuyla sonuçlanabilmesinin, çarpışma hızlarının, ses hızı mertebesinde olma, sine qua non koşuluna bağlı olduğu gösterilmiş bulunmaktadır.

3– Her bir kümecigi oluşturan akışkanın özgravitasyon alanı altında küresel simetriye sâhip olması [Lyttleton (1953)] beklendiğinden tezde yalnızca küresel kümeciklerin çarpışmaları

ele alınmıştır. Evrenin genişlemesine uyarak birbirlerinden uzaklaşmayacak ve dağılmayacak kadar yakın oldukları için çarpışabilecek kümeciklerin, çarpışmalarına kadar geçen süre içinde küresel hâlden sapmalarının ihmâl edilebileceği akla yakın görünmektedir. Bu bakımdan örneğin elipsoid şeklindeki küresel kümeciklerin çarpışmaları hiç göz önüne alınmamıştır. Ayrıca boyutlarının çok küçük olduğu da göz önünde bulundurulacak olursa, küresel hâlden sapmaların göz önüne alınmamasıyla yapılan hataların ihmâl edilebilecek mertebede olduğu düşünülebilir.

4- Ş(II.6) da kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanındaki çarpışmalarını klâsik gravitasyon teorisi çerçevesi içinde ve kümeciklerin noktasal olduğu varsayımı altında ele alıp çarpışma hızlarını buna göre hesapladık. Tablo II.6.1 den görüleceği gibi kümeciklerin yarıçapları 10^{-33} cm mertebesindeki değerlerden başlayıp, başlangıç çağının sonunda ancak 10^2 cm mertebesindeki değerlere kadar değişmektedir. Yarıçapların bu en büyük değerleri için kümeciklerin noktasal varsayımları kaba bir yaklaşıklık olmakla birlikte bunların uzaysal yaygınlıklarını göz önüne almak suretiyle yapılacak daha kesin bir hesabın probleme çok önemli bir katkı sağlamayacağı düşünülmüştür. Öte yandan kümeciklerin ultra rölativistik hızlarının Genel Rölativite Teorisi çerçevesi içindeki hesabı kuşkusuz Newtonsal yaklaşıklıkla bulduğumuz değerlerden farklılık gösterecektir. Bununla birlikte, GRT çerçevesi içinde iki cisim probleminin henüz kesin çözümünün bulunmadığını belirtelim.

Karşılıklı etkileşme hâlinde bulunan bir yüklü tanecik sisteminin denge hâlini tasvir eden ve Einstein–Maxwell bileşik alan denklemlerinin statik çözümüne karşılık Papapetrou – Majumdar metriğinin, konumunu değiştirmeyen m_i kütleli, n tane tanecik için dördümlü potansiyel fonksiyonu

$$U = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{G m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

olmak üzere,

$$ds^2 = \frac{1}{U^2} dt^2 - U^2 d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

şeklinde olduğu bilinir [Majumdar (1947)]. Bu çözümün, birbirlerinin gravitasyon ve elektrostatik alanının etkisi altında bulunan bir yüklü karadelik sisteminin denge hâlini tasvir edecek şekilde genelleştirilebileceği gösterilmiştir [Hartle, Hawking (1987)]. Ardından gene Papapetrou – Majumdar metriği yardımıyla bir yüklü karadelik sistemi, küçük hızlar için de incelenmiş bulunmaktadır [Gibbons, Ruback (1986), Ferrel, Eardley (1987)]. Ancak bütün bu hâllerde sistemin ögeleri arasındaki gravitasyon kuvvetini perdeleyecek bir elektrostatik alan göz önüne alınmakta ve ancak küçük hızlar söz konusu edilmektedir. Bizim göz önüne aldığımız hâlde iki tanecikten oluşan sistem için hızların ses hızı mertebesinde olduğuna ve bu evrede ses hızının ışık hızı ile kıyaslanabilir mertebede olduğuna dikkat edilmelidir. Bu hâl için problem bu güne kadar çözülmemiş olup gerçekten de zor bir problemdir. Öte yandan etkileşmeleri, her ikili çarpışmaya katılan iki öğeden oluşmuş sistem üzerindeki diğer kümeciklerin etkisini görmezden gelerek ve Newton'sal yaklaşımla incelemiş bulunuyoruz. Dolayısıyla her ikili çarpışmanın, bu yaklaşıklıkla haklı kılacak kadar, diğer kümeciklerden uzak olması gerekir. Bilindiği gibi Newtonsal çerçeve içinde bile çok cisim problemi zaten kesin çözümü yapılabilmemiş bir problem değildir.

5– Kümeciklerin yalnızca kafa-kafaya olan çarpışmalarını inceledik. III. Bölümde de belirtmiş olduğumuz gibi çarpışma sonunda ortaya çıkan mini karadeliğin aynı zamanda bir

spine de sâhip olabileceği kafa-kafaya olmayan çarpışmaları hiç göz önüne almadık. Bu konu ayrı bir çalışmada ele alınabilir.

6- Tezde r_j Jeans yarıçapı ve m_j Jeans kütlesi için sırasıyla

$$r_j \sim \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/4}, \quad m_j \sim \left(\frac{c^6}{G^3 \rho} \right)^{1/2}$$

değerleri göz önüne alınmak suretiyle bu büyüklüklerin yalnızca mertebeleriyle ilgilenilmiştir. Bu değerler Klâsik Teori çerçevesi içinde bulunmuş olan Jeans yarıçapı ve Jeans kütlesinin ifâdelerinin, mini karadeliklerin oluşumuna yataklık eden evrede de geçerli oldukları varsayılmak suretiyle bulunan değerlerin mertebelerine karşıdüşmektedirler. Bu evredeki olağanüstü koşulların m_j ve r_j nin ifâdesindeki katsayılara muhtemel etkileri konusunda bir bilgimiz olmadığından bu büyüklüklerin yalnızca mertebeleriyle yetinmiş bulunuyoruz. Bu bakımdan tezde elde edilmiş sayısal değerler çok kesin değerler olmayıp mini karadeliklerin oluşum sürecinin niteliksel olarak anlaşılmasına hizmet etmektedirler.

Gravitasyon yarıçapına eşit olması hâlinde, kümeciklerin yarıçapları

$$r \cong r_s = \frac{2 G m}{c^2} \quad \rightarrow \quad r \cong \sqrt{\frac{3}{8 \pi}} \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2}$$

olup bu değer,

$$r \cong \left(\frac{c^2}{G \rho} \right)^{1/2}$$

olarak alınan r_j den daha küçüktür. Bu ise çökmenin henüz başlamamış olduğunu gösterir.

Dolayısıyla $r \cong r_s$ olduğunda çökmenin henüz başlamamış olması için r_j nin ifâdesinde yer alabilecek çarpanın $\sqrt{\frac{3}{8\pi}}$ den daha büyük olması gerekir. Örneğin r_j nin ifâdesinde ρ yu $\rho + \frac{p}{c^2}$ ile değiştirerek, söz konusu evrede,

$$r_j \cong \sqrt{\frac{3}{4}} \left(\frac{c^2}{G\rho} \right)^{1/2}$$

alınrsa bile yine de $r < r_j$ olabilmektedir. r_j nin çarpanı $\sqrt{\frac{3}{4}}$ e eşit ya da daha küçükse, $r \cong r_s$ olması hâlinde $r \geq r_j$ olacağından kümecikler (çarpışmalarından önce) doğrudan karadeliklere çökeceklerdir. Bu hâlin bu günkü gözlemlerle uyuşmayan anlamsız bir hâle karşılduştüğünü daha önce tartışmıştık.

7- Tezde, çarpışma yoluyla oluşan mini karadeliklerin kütleleri hesaplanabildiği gibi farklı anlarda oluşmalarının kütlelerinin başlangıç çağı boyunca değişimi de belirlenebilmiştir. Tablo II.6.1 de görüldüğü gibi, büyük patlamadan hemen sonra, evrenin yaşının 10^{-43} sn olduğu anda oluşan mini karadeliklerin kütleleri 10^{-5} gr mertebesinde iken, bu değer giderek büyümekte ve evrenin yaşının 10^{-8} sn olduğu, başlangıç çağının sonunda 10^{30} gr mertebesine erişmektedir. Son mini karadeliklerin kütleleri oldukça büyük olmakla birlikte, bir yıldızın evrimiyle oluşan ve kütleleri $3,2 M_{\odot}$ nin üstünde olan karadeliklere oranla, gene de çok küçük olduğuna dikkat edilmelidir.

8- Tezde çarpışma ile karadelik oluşumu için geçen sürenin mertebesi hesaplanabilmektedir. (II.6.4) eşitliği ile vermiş olduğumuz bu sürenin, evrenin yoğunluğundaki azalmaya bağlı

olarak, başlangıç çağının sonuna doğru giderek uzadığı görülmüştür. Ayrıca bu sonuçtan yararlanarak, başlangıç çağı boyunca karadeliklere ait 36 farklı jenerasyon bulunacağı hesaplanmış bulunmaktadır.

9- Model 10^{16} gr dan daha büyük kütleli karadeliklerin oluşabileceğini göstermektedir. Ömürleri evrenin başlangıç ânından bu güne kadar geçen süreden uzun olan bu karadeliklerin, hesaplanmış bulunduğumuz, ömürleri cetvelde gösterilmiş bulunmaktadır. Henüz buharlaşma ile yok olmamış, başlangıç çağından bu güne kalabilen bu karadelikleri gözlemek mümkündür. Kuşkusuz bu karadeliklerden kütleleri çok büyük (10^{30} gr mertebesinde) olanlarının madde yığılması ile büyüyecekleri düşünülse bile, bunların ömürleri başlangıçtan bu güne kadar geçen süreden çok çok büyük olduğundan, bunların yakın gelecekte gözlenmesi zaten söz konusu değildir. Bu gün buharlaşmalarının son evresinde, gözleyebilme ümidini taşıdığımız, kütleleri 10^{15} gramın hemen üstünde bulunan karadelikler için ise büyüme ihmal edilebilmektedir. Hawking'in öngördüğü MKD lerin hepsinin de bu güne kadar buharlaşmış olması bu modelin test edilebilme olanağını bütünüyle ortadan kaldırmaktadır. Test edilebilme şansına sâhip olması modelimizin lehine önemli bir husustur.

10- Bulgular bölümünde de belirtmiş olduğumuz gibi, Modelimizde ortaya çıkan evrenin bu günkü yaşından daha uzun ömürlü karadeliklerin varlığı *kayıp kütle* problemine ışık tutmak bakımından önemlidir. Evrenin, gözlenen madde yoğunluğunun 100 katı mertebesindeki, yoğunluğunu yalnızca yıldızlarası toz bulutlarına ve karadeliğe evrimleşmiş yıldızlara bağlamak mümkün değildir [Zebitay (1984)]. Modelimizde öngörülen ve bu güne kadar kalabilen karadelikler kayıp kütleyle karşıdüşebilirler. Hawking'in mini karadeliklere ilişkin

modelinde bunların kütlelerinin üst sınırı kesin olamamakla birlikte 10^{16} gr dan daha büyük kütleli mini karadeliklerin varlığı kuşkuludur. Kayıp kütle konusuna bir açıklama getiren uzun ömürlü MKD leri öngörmesi modelimizin üstünlüklerinden birini oluşturmaktadır.

GRT nin öngördüğü evrenin yoğunluğuna karşılık büyük kütle farkını, GRT den bağımsız bir biçimde niceliksel olarak açıklayabilmek için, modelimizde MKD lerde yoğunlaşmış toplam kütlelerin mertebesini hesaplamak gerekirdi. Oysa bu mümkün olamamıştır. Oldukça zor bir problem oluşturan bu konu ayrı bir çalışmada ele alınabilir.

11- Kaotik Kozmolojinin temel varsayımlarına uygun başlangıç pertürbasyonlarının evrimini belirleyen denklemler ve bunların kesin çözümleri bu güne kadar ortaya konabilmiş değildir. Daha önce belirtmiş olduğumuz bazı yönleriyle problem nümerik olarak çözülmüş bulunmaktadır [Nadezhin, Novikov, Polnarev (1978), Novikov, Polnarev (1980)]. Tezde önerdiğimiz Modelin kapsadığı olaylar henüz çok geniş bir biçimde ve kesin niceliksel sonuçlarıyla incelenmemiş olmakla birlikte, gerek çarpışma modeli, gerekse Hawking'in modeli MKD lerin oluşumunu daha çok niteliksel olarak tasvir etmektedirler.

12- Varsayımlarımızın 3. süne uygun olarak, başlangıç çağında ortaya çıkan kümecikler için Jeans koşulu sağlanmadığından bunların çarpışmalarından önce karadeliklere yoğunlaşmaları mümkün değildi. Evreni oluşturan akışkanın tamamının MKD lerde toplanmış olması hâlinde ise zaten evrenin bu günkü hâlini ve bu hâle evrimleşmesini açıklamak mümkün olamamakta idi. Ayrıca, (i) eğer varsa, çarpışma hızları ses hızından küçük olacak şekilde ortaya çıkan kümecikler ve (ii) ikili (ya da daha çok sayıda) çarpışmalarının sonunda yoğunlaşma koşulunun sağlanmadığı kümecikler, evrenin genişlemesine uyarak dağılmakta olduğundan evreni oluşturan akışkanın tamamının MKD lerde yoğunlaşmış olması söz

konusu değildi. Bu şekilde, büyük bir hızla genişlemekte olan evrende, birbirini izleyen oluşum süreçlerinin ardından, sıcaklığın 10^{14} °K mertebesindeki eşik sıcaklığa düştüğü, 10^{-8} sn anında evren MKD leri de barındıran homogen ve izotrop bir yapıya sâhip olabileceğinden bu andan itibâren Standart Kozmogonik modele uygun olarak bu günkü evrene evrimleşebilecekti. Gerek Mixmaster modelin gerekse Çarpışma modelinin varsayımlarının yol açtığı bu sonuç her iki modelin de tutarlılıklarının bir göstergesidir.

13– Modelimizin varsayımlarının ortaya çıkardığı, birbirini izleyen kümeciklere ayrılma ve çözülme süreçleri yüzünden bu olaylara yataklık eden çağın çok dinamik hatta kaotik bir çağ olduğu düşünülebilir. Ancak gene de, kendi içinde modelimizle tasvir edilen bir düzene sâhiptir. Bu durum Mixmaster model çerçevesi içinde, evrenin başlangıcı için önerilen, çok büyük yoğunluk pertürbasyonlarına bağlı kaotik durumdan bütünüyle farklıdır. Her ne kadar çok büyük flüktüasyonların yol açtığı bu kaotik durum da, hızla homogen ve izotrop bir evrene evrimleşmekte ise de, bu çağda evrenin evrimini tasvire yönelik senaryolar ortaya koyan her iki model, tamamen farklı varsayımlara dayanan modellerdir.

Sonuç olarak; varsayımlarıyla sonuçları uyumlu olan modelimiz epistemolojik açıdan *tutarlı* bir model olup,

- i) 9. sırada tartışmış olduğumuz gibi, bugüne kalan MKD lerin yok olurken gözlenebilmeleri mümkün olacağından, test edilebilme olanağının varlığı,
- ii) 10. sırada belirttiğimiz gibi, kayıp kütleyle açıklık getirmesi,
- iii) 12. sırada irdelemiş olduğumuz gibi, evrenin bu günkü durumuna evrimleşmesine olanak sağlayan bir model olması,

geçerliliğini sağlayacak temel hususları oluştururlar. Gerek Hawking'in Modeli gerekse

Çarpışma modeli tutarlı modeller olmakla birlikte her ikisinin de geçerliliklerini test edebilecek gözlem verilerinden yoksunuz. Bu modeller arasında seçim yapma olanağı sağlayacak gözlem verileri aynı zamanda evrenin ilk evrelerini tanıma olanağı sağlayacak ve evrenin evrimi hakkındaki bilgilerimize ışık tutacaktır.



V. ÖZET

Bu tezde, mini karadeliklerin oluşumunu tasvir eden yeni bir model önerilmektedir. Kaotik Kozmolojinin temel varsayımlarına dayanan Hawking'in modelinden bütünüyle farklı olan bu model, galaksi oluşumuna ilişkin Mc Crea – Zebitay modelinden esinlenerek geliştirilmiştir.

II. bölümde Karadelik Fiziğinin temel problemleri ve bugünkü durumu, pedagojik bir düzen içinde, § (II.1) – § (II.5) de sunulduktan sonra tezin özgün kısmı ve sonuçları § (II.6), III. ve IV. Bölümlerde verilmiş bulunmaktadır.

Modelimizde mini karadeliklerin oluşumuna yataklık eden 10^{-43} sn – 10^{-8} sn aralığı arasındaki başlangıç evresi için evreni oluşturan akışkanı tasvir etmek üzere *temel tanecik modeli* seçilmiştir. Mini karadeliklerin oluşumuna ilişkin modelimiz büyük patlamanın hemen ardından evreni oluşturan akışkanın kümeciklere ayrılmış olduğu ve bu kümeciklerin birbirlerinin gravitasyon alanında kazandıkları ses ötesi hızlarla çarpıştıkları temel varsayımına dayanmaktadır. Bu çarpışmaların daima bir mini karadeliğin oluşumuyla sonuçlanacağı tutarlı bir biçimde gösterildikten sonra başlangıç çağı boyunca 36 farklı jenerasyona ait mini karadeliklerin kütlelerinin bu çağ boyunca 10^{-5} gr ile 10^{30} gr arasında bir değişim göstereceği hesaplanmıştır. Teori 10^{16} gr dan daha büyük kütleli mini karadelikleri öngörmektedir. Bu mini karadeliklerin gözlenebilir olması tezinin test edilebilir olmasını da sağlamaktadır.

V. SUMMARY

In this thesis, a new model which describes the formation of the mini (primordial) black holes is suggested. This model is entirely different from Hawking's model which is based on the basic postulates of the Chaotic Cosmology proposed by Misner, but it has been inspired by Mc Crea – Zebitay model of the formation of galaxies.

In the § (II.1) – § (II.5) of the second chapter, the fundamental problems and the present day situation of the black hole physics has been presented in a pedagogical manner. The original part and the result of the thesis has been given in the § (II.6), third and fourth chapters.

In our model, *the elementary particle model* has been chosen in order describe the fluid formed the universe at the beginning between the instant between 10^{-43} sec – 10^{-8} sec. This model is supported by the fundamental hypothesis that the fluid which fills the universe the very early stage of the universe's evolution just after the big-bang was separated in to the mini clusters and these clusters collided with one another under their gravitational attractions with ultrasonic velocities. In this thesis, it is indicated in a consistent manner that the mini black holes always will form by the so – colled Jeans gravitational collapse, in the common accumulation region after the head-on collisions of these mini clusters. Moreover, it has calculated that there will be *36 different generations* of mini black holes until the time 10^{-8} sec, and their masses will change in the interval of 10^{-5} gr - 10^{30} gr. The theory imply the existence of mini black holes which their masses larger than 10^{16} gr. Because of these

massive mini black holes are observable today and the future it may be possible to test of the theory.



VI. KAYNAKLAR

- ADLER, R. , BASIN, M. , SCHIFFER, M. (1975) : Introduction to general theory of relativity, ISBN 0- 07 - 000423 - 4, Mac Graw Hill, New York
- BARDEEN, J.M., CARTER, B., HAWKING, S.W. (1973) : The Four Laws of Black Hole Mechanics, Commun. Math. Phys., 31, 161 - 170.
- BEKENSTEIN, J.D. (1973) : Black Holes and Entropy, Phys. Rev. D, 7, 2333 - 2346.
- BEKENSTEIN, J.D. (1974) : Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics , Phys. Rev. D, 9, 3292 - 3300.
- BOYER, R. H. and LINDQUIST, R. W. (1967) : Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric, J. Math. Phys., 8, 265 - 281
- CARTER, B. (1968) : Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields, Phys. Rev. 174, 1559 - 1571.
- CHANDRASEKHAR, S. (1992) : The mathematical theory of black holes , ISBN 0-19-851291-0, Oxford university press, New York, Oxford.
- D'INVERNO, R. (1992) : Introducing Einstein's relativity, ISBN 0- 19 - 859686, Clarendon Press, Oxford.
- EINSTEIN, A., ROSEN, N. (1935) : The Particle Problem in the General Theory of Relativity, Phys. Rev. 48, 73 - 77
- FERREL, R.C., EARDLEY, D.M. (1987) : Slow - Motion Scattering and Coalescence of Maximally Charged Black Holes, Phys. Rev. Letters, 59, 1617 - 1620.

- FINKELSTEIN, D. (1958) : Past - Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle, *Phys. Rev.* 110, 965 - 967
- FRONSDAL, C., (1959) : Completion and Embedding of the Schwarzschild Solution, *Phys. Rev.* 116, 778 - 781
- GIACCONI, R., RUFFINI, R. (eds). (1980) : Physics and Astrophysics of neutron stars and black holes, ISBN 0-444-85446-0, North-Holland, Italy.
- GIBBONS, G.W., RUBACK, P.J. (1986) : Motion of Extreme Reissner – Nordstrom Black Holes in the Low – Velocity Limit, *Phys. Rev. Letters*, 57, 1492 – 1495
- GOLSTEIN, H. (1980) : Classical mechanics, ISBN 0–201–02969–3, Addison – Wesley Publ. Comp., Amsterdam, London.
- HALZEN, F., MARTIN, A.D. (1984) : Quarks and Leptons; An Introductory Course in Modern Particle Physics, ISBN 0 – 471 – 88741 – 2, John Wiley, New York.
- HARRISON, E.R. (1973) : Standard Model of the Early Universe, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 204, 155 – 186.
- HARTLE, J.B., HAWKING, S.W. (1972) : Solutions of the Einstein – Maxwell Equations With Many Black Holes, *Commun. Math. Phys.* 26, 87 – 101.
- HAWKING, S.W. (1971) : Gravitationally Collapsed Object of Very Low Mass, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 152, 75–78
- HAWKING, S.W. (1972) : Black Holes in General Relativity, *Commun. Math. Phys.* 25, 152 – 166
- HAWKING, S.W. (1974) : Black Holes in the Early Universe, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 168, 399 – 415

- HAWKING, S.W. (1975) : Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* , 43, 199 – 220
- HAWKING, S.W., ELLIS, G.F. (1974) : The large - scale structure of space-time, ISBN 0-521- 20016-4, Cambridge Univ. Press.
- HAYAKAWA, S., MATSUOKA, M. (1964) : Origin of Cosmic X-Rays, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, 30, 204 - 228
- JOHNSTON, M., RUFFINI, R. (1974) : Generalized Wilkins Effect and Selected Orbits in a Kerr – Newman Geometry, *Phys. Rev. D*, 10, 2324 – 2329
- KERR, R.P. (1963) : Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, *Phys. Rev. Lett.* 11, 237 - 238
- KRUSKAL, M.D. (1960) : Maximal Extension of Schwarzschild Metric, *Phys. Rev.* 119, 1743 - 1745
- KRAMER, D., STEPHANI, H., Mac CALLUM, M., HERLT, E. (1980) : Exact solutions of Einstein's field equations, ISBN 0–521–23041–1 Cambridge Univ. Pres. Cambridge
- LIGHTMAN, A. P., PRESS, W. H., PRICE, R. H., TEUKOLSKY, S. A. (1975) : Problem Book In Relativity and Gravitation, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- LYTTLETON, R.A. (1953) : The Stability of rotating liquid masses, Cambridge University Press.
- MAJUMDAR, S.D. (1947) : A Class of Exact Solutions of Einstein's Field Equations, *Phys. Rev.*, 72, 390 – 398.
- MISNER, C.W. (1968) : The Isotropy of the Universe, *Astrophys. J.* 151, 431 – 457.
- MISNER, C.W. (1969) : Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett.* 22, 1071–1074.

- MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A. (1973) : Gravitation, ISBN 0-7167-0334-3, Freeman, San Francisco.
- NADEZHIN, D.K., NOVIKOV, I.D., POLNAREV, A.G. (1978) : The Hydrodynamics of Primordial Black Hole Formation, Sov. Astron. 22, 129 – 140.
- NOVIKOV, I.D., ZEL'DOVICH, Ya.B. (1966) : Physics of Relativistic Collapse, Suppl. Nuovo Cimento, 4, 810- 827
- NOVIKOV, I.D., POLNAREV, A.G. (1980) : The Hydrodynamics of Primordial Black Hole Formation, Dependence on the Equation of State, Sov. Astron. 24, 147–151
- NOVIKOV, I.D., FROLOV, V.P. (1989) : Physics of black holes, ISBN 90–2772685X, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- ÖZEMRE, A. Y. (1981) : Kozmolojiye giriş, İstanbul Üniv. Sayı: 2890, İ.Ü. Fen Fak. İstanbul
- OPPENHEIMER, J.R., SNYDER, H. (1939) : On Continued Gravitational Contraction, Phys. Rev. 56, 455 - 459
- PEEBLES, P.J.E. (1980) : The Large – Scale Structure of the Universe, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- PENROSE, R. (1969) : Gravitational Collapse, The Role of General Relativity, Riv. Nuovo Cimento, 1, 242
- RHOADES, C., RUFFINI, R. (1974) : Maximum Mass of a Neutron Star, Phys. Rev. 32, 324-327
- RIZAOĞLU, E. (1988) : Birikim Modeline Göre Galaksilerin Oluşumunda Basıncın Etkisi ve Açılma Momentum Problemi, İstanbul Üniv. sayı : 3500, İ.Ü. Fen. Fak. İstanbul.

- SATO, H., NAKAMURA, T. (eds) (1986) : Gravitational collapse and relativity, ISBN 9971-50-207-0, World Scientific, Singapore.
- SHALIT, A., FESHBACH, H. (1974) : Theoretical Nuclear Physics, Vol. I; Nuclear Structure, ISBN 0 – 471 – 20285 – 8, John Wiley, New York.
- WEINBERG, S., (1972) : Gravitation and cosmology : Principles and Applications general theory of relativity, ISBN 0-471-92567-5, Jhon Wiley, New York.
- WHITHAM, G.B. (1974) : Linear and Nonlinear Waves, ISBN 0 – 471 – 94090 – 9, John Wiley, New York.
- WILKINS, D.C. (1972) : Bound Geodesics in the Kerr Metric, Phys. Rev. D, 5, 814 – 822
- ZEBİTAY, Ş. (1984) : Galaksi Oluşumunda Birikim Modeli ve Verim Problemi, İstanbul Üniv. sayı : 3178, İ.Ü. Fen. Fak. İstanbul.
- ZEBİTAY, Ş. (1988) : On the Generalized Accumulation Model of Galaxy Formation, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri C, 53, 51 – 61.
- ZELDOVICH, Ya. B. NOVIKOV, I.D. (1967) : The Hypothesis of Cores Retarded During Expansion and the Hot Cosmological Model, Soviet Astronomy – A.J., 10, 602 – 603

VII. EKLER

EK-1 Tek Yönlü Zar Yüzeyi

EK-2 Boyer Lindquist Koordinatlarında $g^{\mu\nu}$ Matrisi

EK-3 Killing Vektörleri

EK – 1

Tek Yönlü Zar Yüzeyi

Normali ışık cinsinden olduğu için, ışık cinsinden hiperyüzey diye adlandırılan yüzeyi tanımlayıp, fiziksel nesnelere kendisini katedebilmeleri açısından, böyle bir yüzeyin daima bir *tek yönlü zar yüzeyini* temsil edeceğini göstermek istiyoruz.

Şimdi

$$u(x^\mu) = 0$$

denklemleriyle tanımlayacağımız düzgün bir S yüzeyini göz önüne alalım. S de sonsuz küçük yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri dx^α olmak üzere, S nin $n_\alpha = u_{,\alpha}$ normali ile dx^α nın iç çarpımı

$$n_\alpha dx^\alpha = u_{,\alpha} dx^\alpha = du = 0$$

dır. S üzerinde bir P noktası civarında yerel olarak metriği

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$$

şeklindeki Minkowski metriği olarak almak suretiyle yerel ışık konisini, yâni $ds^2 = 0$ yerel hiperyüzeyini kolayca tanımlayabiliriz. Ayrıca yerel koordinat sistemini, n^α nın uzay kısmı

x-ekseniyle çakışacak biçimde seçecek olursak,

$$n^\alpha = (n^0, n^1, 0, 0)$$

ve dolayısıyla

$$n^\alpha n_\alpha = (n^0)^2 - (n^1)^2$$

olur. Bu seçim, t^α ile göstereceğimiz, S nin herhangi bir P noktasındaki t^α teğetinin şeklini de sınırlayacaktır. Gerçekten de

$$n_\alpha t^\alpha = n^0 t^0 - n^1 t^1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{t^0}{n^1} = \frac{t^1}{n^0} \equiv \lambda$$

olduğundan, λ , a ve b keyfi büyüklükler olmak üzere t^α

$$t^\alpha = \lambda(n^1, n^0, a, b)$$

şeklinde olur. t^α nın bu şekli dolayısıyla normu da

$$t^\alpha t_\alpha = \lambda^2 \left[(n^1)^2 - (n^0)^2 - a^2 - b^2 \right] = -\lambda^2 \left[n^\alpha n_\alpha + (a^2 + b^2) \right] \quad (1)$$

dir. (1) in ışığı altında basit bir irdelemeyle, S yüzeyinin geometrik yapısına ilişkin ilgi çekici sonuçlar elde etmek mümkündür.

I. Hâl : $n^\alpha n_\alpha > 0$ yani n^α (ve S yüzeyi) zaman cinsinden olsun. Bu hâlde, (1) den görüleceği üzere, $t^\alpha t_\alpha < 0$, dolayısıyla t^α uzay cinsinden olacağından S nin P deki teğetleri o noktadaki yerel ışık konisinin dışında bulunacaklardır.

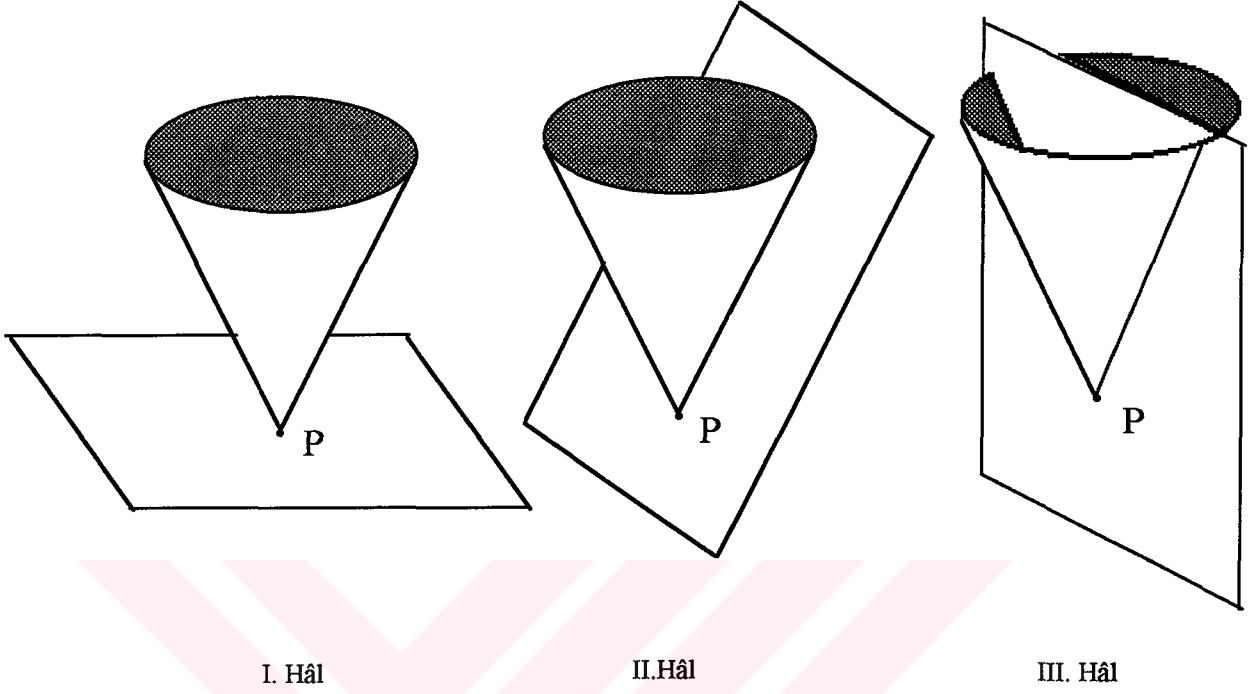
II. Hâl : $n^\alpha n_\alpha = 0$ yâni n^α (ve S yüzeyi) ışık cinsinden olsun. $a=b=0$ hâlinde $t^\alpha t_\alpha = 0$, dolayısıyla t^α ışık cinsinden (aksi taktirde , $t^\alpha t_\alpha < 0$ dolayısıyla t^α uzay cinsinden) olacağı için, S yüzeyinin P noktasındaki teğetlerinden bir tanesi yerel ışık konisi üzerinde bulunacak, yâni S yüzeyi bu teğeti boyunca ışık konisine teğet olacaktır.

III. Hâl : $n^\alpha n_\alpha < 0$ yâni n^α (ve S yüzeyi) uzay cinsinden olsun. Bu hâlde S yüzeyi, P noktasında, çeşitli oryantasyonlar için

$$\begin{aligned} t^\alpha t_\alpha > 0 & , & t^\alpha & \text{ zaman cinsinden } (a^2 + b^2 < | n^\alpha n_\alpha | \text{ için }) \\ t^\alpha t_\alpha = 0 & , & t^\alpha & \text{ ışık cinsinden } (a^2 + b^2 = | n^\alpha n_\alpha | \text{ için }) \\ t^\alpha t_\alpha < 0 & , & t^\alpha & \text{ uzay cinsinden } (a^2 + b^2 > | n^\alpha n_\alpha | \text{ için }) \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlayan, yerel ışık konisinin içinde, üzerinde ve dışında teğetlere sahip olacağından P deki ışık konisini kesen bir yüzey olacaktır. Uzay koordinatlarından birini görmezden gelerek, her üç hâlde elde etmiş olduğumuz geometrik sonuçlar şekilde görülmektedir

Işığın, ileri yönde ışık konisinin, üzerinde ve maddesel taneciklerin de içinde yörüngelere sâhip olacağı göz önünde bulundurulacak olursa, yukarıdaki irdelememizden fiziksel nesnelerin uzay cinsinden bir yüzeyi her iki yönde de katedebilmelerine karşılık, zaman cinsinden bir yüzeyi ancak tek bir yönde katedebilecekleri anlaşılmaktadır. Işık cinsinden (null) hiperyüzey ise tek yönlülük özelliğinin başladığı kritik bir hâli temsil ettiğinden, bu yüzeye *tek yönlü zar yüzeyi* diyeceğiz. Örneğin Özel Rölativite Teorisindeki $t = \text{sâbit}$ yüzeyi zaman cinsinden bir yüzey olup fiziksel nesnelere tarafından yalnızca bir yönde katedilebilir. $x = \text{sâbit}$ yüzeyi (ve normal) uzay cinsinden, yâni ışık konisini



Şekil VII.1.1 Yerel ışık konisine göre üç mümkün S hiperyüzeyi. Sırasıyla zaman cinsinden, ışık cinsinden, uzay cinsinden hiperyüzeyler, uzay koordinatlarından yalnızca ikisi göz önüne alınmak suretiyle çizilmiş bulunmaktadır.

kesen, bir yüzey olduğundan her iki yönde de katedilebilir. $ct - x = 0$ yüzeyi (ve normal) ise ışık cinsinden bir yüzey olduğundan tek yönlü zar yüzeyi rolü oynar.

EK – 2

Boyer - Lindquist Koordinatlarında $g^{\mu\nu}$ Matrisi

Boyer – Lindquist Koordinatlarında metrik tansörü temsil eden kovaryant $g_{\mu\nu}$ matrisi ($\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$) , ($\Delta \equiv r^2 + a^2 - 2mr$) olmak üzere,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{2mra \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & -\sin^2 \theta \left[(r^2 + a^2) + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \end{pmatrix}$$

dir. Buna göre $g^{\mu\nu}$ yü temsil eden matrisin bileşenlerinin,

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{kof } g_{\mu\nu}}{\det g_{\mu\nu}}$$

olduğu göz önünde bulundurularak uzunca hesaplardan sonra, $\det g_{\mu\nu} = -\rho^4 \sin^2 \theta$ olmak üzere,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \left[(r^2 + a^2) + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] & 0 & 0 & \frac{2mra}{\rho^2 \Delta} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{2mra}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür.

EK – 3

Killing Vektörleri

Metrikle donatılmış bir uzayın, bir noktası civarındaki geometrik yapıyı bir başka noktası civarındaki geometrik yapı ile karşılaştırmak üzere göz önüne alınan sürekli bir,

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \quad (1)$$

dönüşümünde, $g'_{\mu\nu}(x')$ dönüşmüş metriği x'^{μ} lerin ne türlü fonksiyonu ise, $g_{\mu\nu}(x)$ orjinal metriği de x^{μ} lerin aynı fonksiyonu olması yani fonksiyonel yapısının değişmemesi hâlinde $g_{\mu\nu}(x)$ lerin bu dönüşüme göre " *form invariant* " olduğu söylenir. Bu ise bütün y ler için

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad (2)$$

olacağı anlamına gelir. Bunun, bir skalerin $\phi'(x') = \phi(x)$ biçimindeki invariansından farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Bir $\{x'^{\mu}\}$ noktasındaki dönüşmüş metrik

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x)$$

ve ters dönüşümle

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g'_{\rho\sigma}(x') \quad (3)$$

dür. Eğer $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x')$ (3) de yerine konursa

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \quad (4)$$

olur. (1) dönüşümünün bu bağıntıyı sağlıyor olması yâni $g_{\mu\nu}(x)$ leri form invaryant bırakıyor olması hâlinde bu dönüşüme metriğin bir "izometri dönüşümü" denir.

Aslında (4) bağıntısı (1) dönüşümü üzerinde çok karmaşık bir sınırlandırma anlamına gelir. Durumu basitleştirmek üzere

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu} \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (5)$$

şeklinde bir sonsuz küçük izometri dönüşümü göz önüne alıp bunun özelliklerini araştıralım. Her sonlu dönüşüm, peşpeşe uygulanan sonsuz küçük dönüşümlerin bir bileşkesi olarak düşünülebileceğinden, bu şekilde sonsuz küçük dönüşüm göz önüne almak bir sınırlandırma oluşturmaz.

Şimdi (5) dönüşümü (4) e yerleştirilir ve ε a göre birinci mertebeden terimlerle yetinilecek olursa $\xi_{\mu} = g_{\mu\nu} \xi^{\nu}$ olmak üzere,

$$\frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \xi^{\lambda} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = 0 \quad (6)$$

bulunur.

$$[\mu\nu, \lambda] = \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$$

ve

$$\left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$$

olduğu ve $\xi^{\lambda} = g^{\lambda\tau} \xi_{\tau}$ alınabileceği göz önünde bulundurulacak olursa,

$$\frac{\partial \xi_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - 2\xi_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = 0$$

ya da

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad (7)$$

şekline gelir. Bu denkleme *Killing denklemi* ve bu denklemi sağlayan herhangi bir $\xi_{\mu}(x)$ dörtlü vektör alanına da, $g_{\mu\nu}(x)$ *metriğinin bir Killing vektörü* denir. Böylece $g_{\mu\nu}(x)$ lerin temsil ettiği bir uzayın bir izometri dönüşümünü belirlemek için bu uzayın, (7) denklemini sağlayan, Killing vektörlerini belirlemek yeterli olacaktır.

Öte yandan $g_{\mu\nu}(x)$ ler koordinatlardan birine bağlı değilse, bu koordinatın değişim yönündeki ötelenmesinin bir izometri dönüşümü olacağını görmek mümkündür. $g_{\mu\nu}$ ler bir koordinat bazına göre koordinatlardan herhangi birine, örneğin x^k koordinatına bağlı değilse

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \quad (\alpha = k \text{ için}) \quad (8)$$

dır. Şimdi bu bağıntının geometrik anlamını göstermek istiyoruz.

Herhangi bir $x^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda)$ eğrisinin, x^k koordinatının değişim yönünde $\Delta x^k = \varepsilon$ kadar ötelenmesiyle elde edilen kongruent (eşdeğer) eğriyi göz önüne alalım. Ötelenmiş eğri için,

$$x^{\alpha} = c^{\alpha}(\lambda) \quad (\alpha \neq k \text{ için})$$

ve

$$x^k = c^k(\lambda) + \varepsilon$$

dir. Orijinal eğrinin $\lambda = \lambda_1$ ve $\lambda = \lambda_2$ arasındaki uzunluğu

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[g_{\mu\nu}(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda$$

olduğundan kongruent eğrinin uzunluğu da

$$L(\varepsilon) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \left[g_{\mu\nu}(x(\lambda)) + \Delta x^k \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^k} \right] \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right\}^{1/2} d\lambda$$

dur. Oysa bu son integralde $\Delta x^k = \varepsilon$ nun katsayısı sıfır olduğundan, yeni eğrinin boyu orijinal eğrinin boyuna eşittir. Yâni böyle bir ötelenme için daima $\frac{dL}{d\varepsilon} = 0$ olacaktır. Bir eğrinin uzunluğunu değiştirmeyen, metriğin bağlı olmadığı koordinatın değişim yönündeki bir ötelenme,

$$x^\alpha = \text{sabit} \quad \alpha=1,2,\dots \quad (\alpha \neq k)$$

koordinat eğrisinin teğeti, $\bar{\xi}_k$ ile gösterilerek

$$\bar{\xi}_{(x^k)} \equiv \bar{\xi}_{(k)} = \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (9)$$

vektörü aracılığıyla tasvir edilebilir. (8) in geçerli olduğu bir koordinat sisteminde, (9) a göre $\bar{\xi}$ nin bileşenleri

$$\xi^\mu = \delta_k^\mu \quad (10)$$

olduğundan bunun temsil ettiği dönüşüm de

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu$$

dolayısıyla

$$x'^{\mu} = x^{\mu} \quad \mu \neq k \text{ için}$$

$$x'^k = x^k + \varepsilon \xi^k = x^k + \varepsilon$$

şeklindedir. Şimdi göstereceğimiz gibi, $\varepsilon \vec{\xi}$ ötelenmesine karşılık gelen bu dönüşümün, uzunlukların korunmasına yol açan bir dönüşüm olmasının gerek ve yeter koşulu, $\vec{\xi}$ vektör alanının (7) Killing denklemini sağlamasıdır. Gerçekten de, (9) vektör alanının kovaryant türevinin bileşenleri

$$\begin{aligned} \xi_{\mu, \nu} &= g_{\mu\alpha} \xi_{,\nu}^{\alpha} = g_{\mu\alpha} \left(\xi_{,\nu}^{\alpha} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu \lambda \end{matrix} \right\} \xi^{\lambda} \right) = g_{\mu\alpha} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \nu k \end{matrix} \right\} \\ &= g_{\mu\alpha} g^{\alpha\lambda} [\nu k, \lambda] = \delta_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{2} \left(g_{\nu\lambda, k} + g_{k\lambda, \nu} - g_{\nu k, \lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{\mu k, \nu} - g_{\nu k, \mu} \right) \end{aligned}$$

dür. Görüldüğü gibi, $\xi_{\mu, \nu}$, μ ve ν indislerine göre antisimetrik olup

$$\xi_{\mu, \nu} + \xi_{\nu, \mu} \equiv \xi_{(\mu, \nu)} = 0$$

şeklindeki Killing denklemini sağlar. Buna göre $\vec{\xi} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}$ vektörünün metriğinin bir Killing vektörü olduğu anlaşılır.

VIII. ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	: Göksel Daylan Esmer
Doğum Yeri ve Tarihi	: Mardin, 01.01.1965
Medeni Hali	: Evli
Mesleği	: Araştırma Görevlisi
İş Yeri	: İ.Ü. Fen Fakültesi, Matematiksel Fizik Anabilim Dalı
Eğitimi	: Kızıltepe Mehmetcik ilkokulu, 1971 İstanbul Ataköy Lisesi, 1981 İ.Ü. Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Lisans), 1987 İ.Ü. Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Yükseklisans), 1990 İ.Ü. Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Doktora),1997
Araştırma Konuları	: Genel Rölativite Teorisi, Karadelik Fiziği
Bildiği Yabancı Diller	: İngilizce, Arapça