İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AKTÜERYA MATEMATİĞİ VE BİREYSEL EMEKLİLİK MODELLERİ

M. Dilek AKÇAY

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mehmet H. ORYAN

Haziran - 2002

İSTANBUL

Prof. Dr. M. H. Oryan

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma 21/06/2002 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı ....Yüksek Lisans programında Doktora / Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

İMZA
Prof . Dr . Mehmet H. Orhan
Danışman

İMZA
Prof . Dr . N. Ergun

İMZA
Prof . Dr . Erhan Güzel

İMZA
Prof . Dr . A. Bener

İMZA
Doç .Dr. Müfit Giresunlu

Önsöz

Her bir kişi gelecek hakkında planlar yapar ve bir takım beklentilere sahiptir. Fakat bu planların her zaman gerçekleşmesi mümkün değildir. Bu nedenle sigortalar, insanların çeşitli beklentilerinin gerçekleşmesini engelleyen tesadüfi olayların kayıplarını azaltmak için oluşturulmuş sistemlerdir. Bugün ekonomi dünyasında riskin bulunduğu her yerde sigortanın girdiği görülmektedir.

Bu tez çalışması, Aktüerya Matematiğinin ve bunun Bireysel Emeklilik Modellerine uygulanmasının incelendiği bir derleme niteliğindedir. Bu konularla ilgili teorik yapı matematiksel olarak ele alınıp temel kavram ve özellikler detaylı bir şekilde örnekleriyle incelenmiştir.

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarıyla ve katkılarıyla beni her zaman destekleyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Mehmet H. ORYAN 'a teşekkür ederim.

M. Dilek AKÇAY

İçindekiler

Başlıca Simgeler Listesi

$u\,(w)$	:	Servet fayda fonksiyonu
$M_X(t)$	:	Moment oluşturma fonksiyonu
X	:	Ölüm yaşını gösteren tesadüfi değişken
$f_X(x)$	:	X tesadüfi değişkeninin olasılık (veya olasılık yoğunluk) fonksiyonu
$F_X(x)$	:	X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu
$\Pr(X=x)$	:	X tesadüfi değişkenin x değerini alması olasılığı
(x)	:	x yaşındaki canlı
$[x]$	:	x seçilme yaşı
$s(x)$	:	Yaşam fonksiyonu
T	:	(x) in gelecek hayat süresini gösteren tesadüfi değişken
K	:	(x) in ölene kadar geçireceği tam yılların sayısı
${}_tp_x$	:	x yaşındaki bir canlının $x+t$ yılında yaşama olasılığı
${}_tq_x$	:	x yaşındaki bir canlının t yıl içinde ölmesi olasılığı
${}_{t\mid u}q_x$	:	x yaşındaki bir canlının $x+t$ ile $x+t+u$ arasında ölme olasılığı
μ_x	:	Ölümün etkisi
l_x	:	l_0 yeni doğan canlı grubundan x yaşında canlı olanların beklenen sayısı
${}_td_x$	:	x ile $x+t$ yılları arasında ölenlerin beklenen sayısı
d_x	:	Serviste x yaşında olup $x+1$ yaşına kadar ölen aktif üye sayısı
s_x	:	x yaşındaki bir üyenin maaş büyüklüğü
w_x	:	Serviste x yaşında olanlardan $x+1$ yaşına kadar ayrılan aktif üye sayısı
i_x	:	Serviste x yaşında olup $x+1$ yaşına kadar maluliyetten ayrılan aktif üye sayısı
r_x	:	Serviste x yaşında olanlardan emeklilik yaşına gelip emekli olan aktif üye sayısı
z_t	:	Şimdiki değer fonksiyonu
b_t	:	Tazminat fonksiyonu
v_t	:	İskonto fonksiyonu
δ	:	Faiz etkisi
i	:	Yıllık faiz oranı
$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	n yıl süreli (x) in ölüm anında bir birim ödemeli sigortanın net tek primi
$\bar{A}_x$	:	(x) in ölüm anında bir birim ödemeli sigortanın net tek primi
$A_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}$	:	n yıllık vade sonunda ödenen sigortanın net tek primi
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigortanın net tek primi
${}_{m\mid}\bar{A}_x$	:	m yıl ertelenmiş ölüm anında bir birim ödemeli sigortanın net tek primi

$(I\bar{A})_x$	:	Değişken tazminatlı ölüm anında ödemeli hayat sigortasının net tek primi
$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli yıllık artan ölüm anında ödemeli sigorta için net tek prim
$(\bar{I}\bar{A})_x$	:	*t* anındaki ölüm halinde *t* ödemesi yapan sigortanın net tek primi
$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli yıllık azalan ölüm anında ödemeli sigortanın net tek primi
$A^1_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli ölüm yılının sonunda 1 birim ödemeli sigortanın net tek primi
A_x	:	Ölüm yılının sonunda bir birim ödemeli sigortanın net tek primi
$A^{(m)}_x$	:	Yılda *m* kez ödemeli sigortanın net tek primi
$A_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıllık ölüm halinde ve vade sonunda 1 birim ölüm yılı sonunda ödemeli sigorta için net tek prim
$(IA)_x$	:	Yıllık bir şekilde artan ölüm yılı sonunda ödemeli sigortanın net tek primi
$(DA)^1_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli yıllık azalan ölüm yılı sonu ödemeli sigorta için net tek prim
$(IA)^1_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli yıllık artan ölüm yılı sonu ödemeli sigorta için net tek prim
$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	:	Her yıl bir oranında ödenebilen rantların şimdiki değer tesadüfi değişkeni
$\bar{a}_x$	:	Sürekli tam hayat rantı için aktüeryal şimdiki değer
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli hayat rantı için aktüeryal şimdiki değer
$_{n\mid}\bar{a}_x$	:	*n* yıl ertelenmiş hayat rantı için aktüeryal şimdiki değer
$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}\rceil}}$	:	*n* yıl garantili hayat rantı için aktüeryal şimdiki değer
$\bar{s}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	Sürekli 1 birim ödemeli rantların *n* yıl sonundaki aktüeryal toplam değeri
$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$	:	Her yılın başında 1 birim ödemeli rantın şimdiki değer tesadüfi değişkeni
$\ddot{a}_x$	:	Devre başı ödemeli rantların aktüeryal şimdiki değeri
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıl süreli devre başı ödemeli rantların aktüeryal şimdiki değeri
$_{n\mid}\ddot{a}_x$	:	*n* yıl ertelenmiş devre başı ödemeli rantların aktüeryal şimdiki değeri
$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}\rceil}}$	:	*n* yıl garantili devre başı ödemeli rantların aktüeryal şimdiki değeri
$\ddot{a}^{(m)}_x$	:	Yılda *m* kez devre başı ödemeli rantların aktüeryal şimdiki değeri
$\ddot{s}_{x:\overline{n}\rceil}$	:	Devre başında bir birim ödemeli rantın *n* yıl sonundaki aktüeryal toplam Değeri
$a_{\overline{K}\rceil}$	:	Devre sonu ödemeli rant için şimdiki değer tesadüfi değişkeni
a_x	:	Devre sonu ödemeli rant için aktüeryal şimdiki değer
$a_{x:\overline{n}\rceil}$	:	*n* yıllık devre sonu ödemeli rant için aktüeryal şimdiki değer
L	:	*P* primi için poliçenin finansal kaybının şimdiki değer tesadüfi değişkeni
$\bar{P}$	:	Sürekli bir şekilde ödenen prim miktarı
P	:	Yıllık bir şekilde ödenen prim miktarı
$P^{(m)}$	:	Yılda *m* kez ödemeli prim miktarı
$_tL$	:	Gelecekteki finansal kaybın *t* yıl sonraki şimdiki değer tesadüfi değişkeni
$_t\bar{V}$	:	*t* zamanındaki sürekli rezerv
$_kV$	:	*k* zamanındaki kesikli rezerv

Şekil Listesi

Tablo Listesi

Özet

Aktüerya Matematiği ve Bireysel Emeklilik Modelleri

Aktüerya Matematiği Olasılık ve İstatistiği, Risk Teorisini ve Fayda Teorisini kendi bünyesinde birleştirerek sigorta sistemlerinin matematiksel yapısını inceleyen bir bilim dalıdır. Bu nedenle finans ve ekonomi dünyasında önemli bir yer tutmaktadır. Tezimizde aktüerya matematiğinin temel kavram ve özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Sigortada Fayda Teorisi, Bireysel Risk Modelleri , Canlılık fonksiyonları, Hayat Tabloları, Hayat Sigortası ve Rantları, Primler ve Rezervler tezimizde ele alınan başlıca konulardır. Ayrıca ülkemizde yeni uygulanmaya başlanan bireysel emeklilik planlarına yardımcı olması için aktüerya matematiğinin bireysel emeklilikle ilgili uygulamaları Çoklu Azalma (Dekrament)Teorisi kullanılarak tezimizde ele alınmıştır. Bu uygulamalara ait çeşitli örnekler tezimizde yer almıştır.

Summary

Actuarial Mathematics and Individual Retirement Models

Actuarial Mathematics is a science which studies the mathematical structure of Insurance Systems using Probability and Statistics, Risk Theory and Utility Theory. Because of this it has an important place in finance and economics. In this thesis the main concepts and properties of actuarial mathematics are studied in detail. Utility in Insurance, Individual Risk Models, Survival Functions, Life Tables, Life Insurance , Life Annuities, Premiums and Reserves are the main topics in the thesis. Besides, the individual retirement plans are studied by using the multiple decrament theory and the examples are given for these plans in the thesis.

Giriş

Aktüerya matematiği sigorta sistemlerini matematiksel olarak inceleyen bir bilim dalıdır. Ülkemizde aktüerya matematiğine ait az sayıda yazılmış kitap vardır [1], [2]. Buna paralel olarak aktüerya matematiğinin ülkemizde sigorta sektöründeki kullanımı çok azdır. Bu nedenle, bu tezimizde, aktüerya matematiğinin temel kavram ve özelliklerini detaylı olarak incelemeye çalıştık. Ayrıca yeni uygulanmaya başlanan bireysel emeklilik planlarına ışık tutması için aktüerya matematiğinin bireysel emeklilikle ilgili uygulamalarını ekledik.

Bölüm 1 de sigortacılık ile ekonomi, fayda teorisi açısından incelenmiştir. Bu bölümde sigortacılıkta kullanılan fayda fonksiyonları ele alınmaktadır. Optimal sigorta ile ilgili Teorem 1.1 ispat edilmektedir. Bu teorem ilk defa Arrow [3] tarafından 1963 de sağlık sigortası için ispat edilmiştir. Fayda teorisi geniş olarak De Groot [4], [5], Friedman ve Savage [6] tarafından incelenmiştir. Fayda teorisinin temel eşitliği olan 1.2.1 eşitliği de ilk defa Pratt [7] tarafından incelenmiştir.

Bölüm 2 de kısa süreli bireysel risk modelleri incelenmektedir. Bu bölümdeki temel bilgiler olasılık ve istatistik kitaplarında bulunabilir. Bu bölümde kullanılan (2.1.1) ve (2.1.2) formüllerinin ispatları [8] da mevcuttur.

Bölüm 3 de canlılık dağılımı ve hayat tabloları ele alınmaktadır. Bu bölümde kullandığımız kavram ve gösterişler Bowers [9] ve Neill [10] kitaplarında mevcuttur. Hayat tabloları aktüeryal bilimin köşe taşlarıdır. Bu bölümde seçme, nihai ve toplam tablolar incelenmiştir. Hayat tabloları ayrıca bioistatistikte de kullanılmaktadır (Chiang [11]).

Bölüm 4 ve Bölüm 5 de sırasıyla hayat sigortası ve hayat rantı modelleri ele alınmıştır. Bu bölümlerde yalnız yaşam süresi tesadüfi değişken olarak alınmıştır. Bu yaklaşıma bireysel risk teorisi adı verilmektedir. Paranın değeri tesadüfi olarak alınmamıştır. Bununla beraber paranın değerinin de tesadüfi değişken olarak alındığı modeller son yıllarda ilgi bulmuştur (Bowers [9], Bölüm 21).

Bölüm 6 da primler anlatılmaktadır. Bu bölümdeki primlere belirsizlik ekonomisi literatüründe aktüeryal prim adı verilir ve aktüeryal denklik prensiplerine göre hesaplanmaktadır.

Bölüm 7 de rezervler denklik prensibi kullanılarak hesaplanmaktadır. Sürekli ve kesikli rezervler ayrı ayrı ele alınmaktadır.

Bölüm 8, 9, ve 10 da bireysel emeklilik planlarında uygulan aktüeryal yöntemler ele alınmaktadır. Bölüm 8 de çoklu azalma teorisinin bireysel emeklilik planlarına uygulanması anlatılmaktadır. Bölüm 9 da belirlenmiş maaş esaslı emeklilik programlarının Bölüm 10 da ise belirlenmiş katkı esaslı emeklilik programlarının aktüeryal değerlendirilmesi anlatılmaktadır. Bu bölümün hazırlanmasında [9] ve [10] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Bölüm 1

Fayda Teorisi

1.1 Fayda Teorisinin Temel Özellikleri

İnsanlar, eğer verdikleri kararların sonuçlarını daha önceden kesin olarak bilebilirlerse, hayatları onlar için daha basit, fakat daha az ilginç olur. İnsanlar, kararlarını genellikle ortaya çıkabilecek sonuçlarına göre verirler, fakat hiçbir zaman sonuçların ne olacağı kesin olarak belli değildir.

Belirsiz durumlarda karar verme probleminin bir çözümü, tesadüfi sonuçlu bir ekonomik olayın sonucu olarak onun beklenen değerinin alınmasıdır. Bu beklenen değer prensibi ile mümkün olan bütün sonuçların dağılımı tek bir sayı ile, yani tesadüfi sonucun beklenen değeri ile yer değiştirilmiş olunur. Bu prensibe göre, bir karar verici için, bir sigorta olayında X tesadüfi zararın gerçekleşebileceğini kabul etmesi ile mümkün olan bir kaybı karşılamak için $E[X]$ miktarını ödemek arasında bir fark yoktur. Sigortacılıkta, para ödeme ile ilgili tesadüfi durumların beklenen değerine durumun aktüeryal değeri denir.

Bazı karar vericiler tarafından beklenen değer prensibi kabul edilmez. Onlara göre, onların servet seviyesi ve olayların dağılımının görünüşü kararlarına etki etmektedir.

Aşağıda karar verici için beklenen değer prensibinin yetersiz kaldığı bir kaza sigortası örneği ile açıklanmaktadır. Bir kazanın olma olasılığının 0.01 ve olmama olasılığının 0.99 olduğu kabul edilsin. Bir kazadan ortaya çıkan kayıp miktarına göre 3 hal söz konusu olsun:

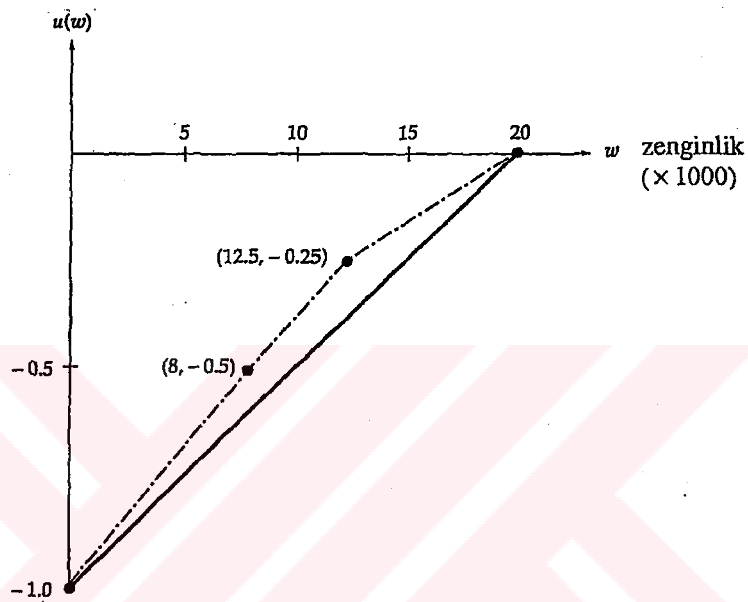
Durum	Mümkün kayıplar	Beklenen kayıplar
1	0-1	0.01
2	0-1000	10
3	0-1000000	10000

1 birimlik kayıp karar verici için az ilginç olabilir, bu nedenle beklenen değerden daha fazla ödeyip de sigorta sahibi olmak istemeyebilir. Bununla beraber 1000000 luk kayıp oldukça felaket bir şeydir. Dolayısıyla karar verici 10000 birimlik beklenen değerden daha fazla ödeyerek sigorta sahibi olmak ister. Dolayısıyla bu örnekte karar verici için beklenen değerin önemi yoktur.

Karar vericinin beklenen değerden daha fazla ödemek istemesinin bir nedenini açıklama, aşağıdaki gibi yapılabilir. Önce karar vericinin w değerindeki bir servete vereceği değer $u(w)$ ile gösterilsin. $u(w)$ ye fayda fonksiyonu denir. Karar vericinin 20000 değerinde bir serveti olsun. Bir lineer transformasyon

$$u^*(w) = au(w) + b \quad , \quad a > 0$$

ile elde edilen $u^*(w)$ fonksiyonu $u(w)$ ya denktir. a ve b öyle belirlenecek ki 0 noktası ile bireyin fayda fonksiyonun bir başka noktası verilsin. $u(0) = -1$ ve $u(20000) = 0$ olsun. Fayda fonksiyonunun tespiti Şekil 1.1.1 de gösterilmektedir.



Fayda fonksiyonunun tespiti
Şekil 1.1.1

Şimdi karar vericiye şu soru sorulsun: 0.5 olasılıklı 20000 lik bir kayıpla karşılaştığını ve geçerli servet seviyesini muhafaza etmesinin 0.5 olasılıkla mümkün olduğu kabul edilsin. Bu taktirde, bu tesadüfi kayba karşılık komple bir sigorta için ödemek isteyebileceği maksimum G miktarı nedir? Bu soru şöyle formüle edilebilir: Hangi G değeri için

$$\begin{aligned} u(20000 - G) &= 0.5\,u(20000) + 0.5\,u(0) \\ &= (0.5)(0) + (0.5)(-1) = -0.5? \end{aligned}$$

Karar verici G öderse, serveti 20000-G kalacaktır. Yukarıdaki ifadede "=" işareti şunu ifade etmektedir: Karar verici için G yi ödemekle, sağ taraftaki servetin beklenen faydasını kabul etmesi farksızdır. Karar vericinin cevabının G=12000 olduğu farz edilsin. Bu taktirde

$$u(20000 - 12000) = u(8000) = -0.5$$

dir. Bu sonuç Şekil 1.1.1 de gösterilmiştir. $(0 \le w \le 20000)$ olmak üzere $[w, u(w)]$ noktalarını kullanarak karar vericinin servet fonksiyonundan yararlanmasına tatmin edici bir yaklaşım elde edilebilir. $(0 \le w_1 < w_2 < 20000)$ olmak üzere w_1 ve w_2 servet seviyeleri herhangi bir şekilde belirlenmiş olsun. Karar vericiye şu soru sorularak ilave nokta belirlenebilir: Eğer yapacağınız sigortanın sizi w_2 zenginlik seviyesinde bırakma olasılığı p veya w_1 seviyesine indirgemesi olasılığı 1-p ise bu sigorta durumuna karşı hangi maksimum sigorta bedelini ödemek isterdiniz? Karar vericinin bir G değerini

$$u(\mathrm{w}_2 - G) = (1-p)\,u(w_1) + p\,u(w_2)$$

olacak şekilde belirlemesi istensin. $w_2 - G = w_3$ bulunur ve $[w_3, (1-p)u(w_1) + pu(w_2)]$ noktası belirlenir. Bunun yardımıyla (12500, -0.25) noktası bulunur. Bu türlü önceliklerin istenmesi karar vericinin fayda fonksiyonu üzerinde bir takım noktaların elde edilmesine yol açar. Bu noktalardan geçen bir düzleme (smoothing) fonksiyonu yardımıyla bir yarar fonksiyonu belirlenmiş olur.

Bu şekilde karar vericinin servet fayda fonksiyonu belirlendikten sonra, bu fonksiyon iki tesadüfi ekonomik durumu karşılaştırmak için kullanılır. İki ekonomik durum X ve Y tesadüfi değişkenleri ile gösterilsin. Bir karar verme kuralı aranıyor, öyle ki bu kural, daha önceki tercihlere uygun olarak hazırlanan servet fayda fonksiyonu ile tutarlı olsun. Böylece karar verici w servetine sahip ise, X ve Y yi şu şekilde karşılaştırılsın: $E[u(w+X)] > E[u(w+Y)]$ ise karar verici X i seçsin. Eğer $E[u(w+X)] = E[u(w+Y)]$ ise karar verici X ve Y arasında kayıtsız kalsın. Bu model daha geniş bir görüş ile ele alınırsa, karar vericinin servetine etki eden X ve Y olayları için, bunların dağılımı hakkında $E[u(X)] > E[u(Y)]$ biliniyorsa X i tercih etsin. Eğer, $E[u(X)] = E[u(Y)]$ ise kayıtsız kalsın. Bu model w=0 için yukarıdaki ile aynıdır.

Fayda ile ilgili aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

1) Fayda teorisi ortaya çıkan sonuçların olasılık dağılımlarına bağlıdır, tercihlerin uygun olması varsayımı üzerine kurulmuştur.

2) Fayda fonksiyonu gerçekte, tek türlü belirlenmek zorunda değildir. Örneğin eğer $u^*(w)=a\ u(w) + b$, $a>0$ ise $E[u(X)] > E[u(Y)]$ ifadesi $E[u^*(X)] > E[u^*(Y)]$ ifadesini gerektirir. Yani fayda fonksiyonu bir artan lineer transformasyon ise tercihler korunmaktadır.

3) $u(w) = a\,w + b$, $a>0$ olsun. Eğer, $E[X] = \mu_X$ ve $E[Y] = \mu_Y$ ise $E[u(X)] = a\mu_X + b > E[u(Y)] = a\mu_Y + b$ ifadesi $\mu_X > \mu_Y$ ye denktir. Yani, artan lineer fayda fonksiyonları için , sonuçların dağılımına göre tercih yapmak yerine , karşılaştırılan dağılımların beklenen değerlerine bakarak tercih yapılabilir.

1.2 Sigorta ve Fayda

Bir karar verici için , gelecek zaman içinde servetinin zarara uğrayacağının mümkün olduğu kabul edilsin. Kaybın miktarı X ile gösterilsin. X bir tesadüfi değişken olup, değeri 0 olabilir. X in dağılımının bilindiği kabul edilsin. Eğer zarara uğrama özelliği aynı koşullar altında bir çok kereler gözlenebiliyorsa $E[X]$, gelecek periyottaki kaybın beklenen değeri, uzun süreli bir ortalama kayıp olarak yorumlanabilir. Aşikar ki böyle bir deneme süreci bir bireysel karar verici tarafından yaşanamaz.

Bir sigorta organizasyonu (sigortacı) malın zarara uğramasının finansal sonuçlarının indirgenmesine yardımcı olmak için kurulmuş olsun. Sigortacı, mülk sahibinin malının zarar görmesi halinde, finansal kayba eşit veya daha az bir ödemeyi temin eden poliçeyi satışa sunsun. Kayba karşı yapılacak olası ödemeye hasar talebi (claim) ödemesi denir. Poliçedeki teminata karşılık , mülkün sahibi (sigortalı) bir prim öder. Primin miktarı, her iki tarafın kabul ettiği bir ekonomik karar prensibine göre tespit edilir. Mülk sahibinin sigorta için ödemek isteyebileceği maksimum prim miktarından daha az olan bir primi gerektiren bir poliçe yapılması halinde, her iki taraf içinde karşılıklı avantajları içeren bir fırsat ortaya çıkar.

Bir bireysel sigorta poliçesi için ortaya çıkabilecek finansal sonuçların sınırları arasında, sigortacının fayda fonksiyonuna bir doğru ile yaklaşılabilir. Sigortacı tam sigorta teminatı için temel fiyatını beklenen kayıp $E[X]=\mu$ olarak koyabilir. Bu durumda μ ye 1-periyotluk sigorta poliçesi için pür veya net prim denir. Masrafları, vergileri, v.s. karşılamak için sigorta sistemi net prime bir miktar yükleme yaparak asıl prime karar verir. Örneğin yüklenmiş prim, H ile gösterilsin. $H=(1+a)\,\mu+c \quad ,a>0, c>0$ olarak yazılabilir. Burada $a\mu$ diğer masrafları gösterir ki bu μ ile değişmektedir. c sabit terimi ise μ ile beraber değişmeyen masrafları göstermektedir. Daha sonra sigortacı tarafından prim hesaplanmasında kullanılan diğer ekonomik prensipler gösterilecek.

Şimdi mülk sahibinin mülkünün zarara uğramasına karşı karar verme problemine fayda teorisi uygulansın. Mülk sahibinin servet fayda fonksiyonu $u(w)$ olup w, servetin parasal birimlerle ölçülmesidir. Mülkün uğrayacağı kayıpların tesadüfi değişkeninin dağılımının bilindiği kabul edilsin. Mülk sahibi tesadüfi finansal kaybı ödemeyi kabul eden sigortacıya G miktarını ödemekle ve riski kendisinin ödemesine aynı gözle baksın. Bu durum şöyle ifade edilebilir [7] :

$$u(w-G)=E[u(w-X)] \qquad (1.2.1)$$

Eşitliğin sol tarafı sigortayı satın alması hali, diğer tarafı ise sigortayı satın almaması halidir. Mülk sahibinin artan bir lineer fayda fonksiyonu olsun, yani $u(w)= b\ w+d$ (b>0) olsun. Mülk sahibi beklenen değer prensibini kabul edecektir. Bu durumda eğer,

$$u(w-G)=b(w-G)+d \ \geq E[u(w-X)]=E[b(w-X)+d] \ \Leftrightarrow$$
$$b(w-G)+d \geq b(w-\mu)+d \ \Rightarrow G \leq \mu$$

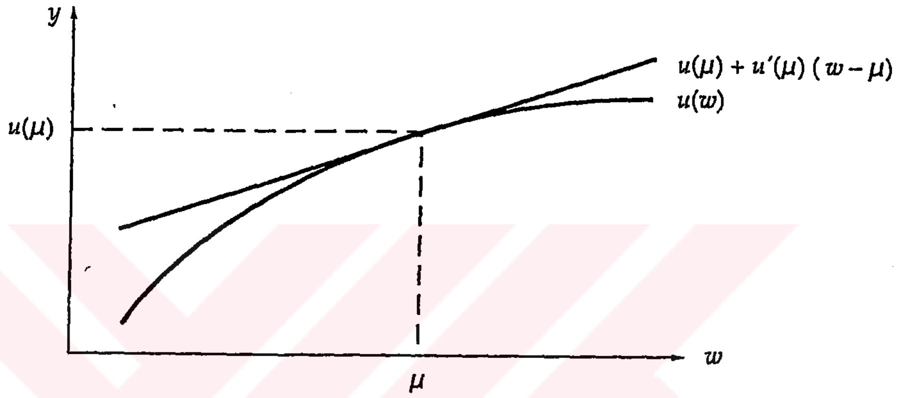
ise mülk sahibi ya sigortayı tercih eder, veya sigortaya karşı kayıtsızdır. Böylece, sigorta sözleşmesinde karşılıklı avantaj fırsatı gözükmektedir.

Fayda fonksiyonu genellikle şu özellikleri gösterir: $u'(w)>0$ ve $u''(w)<0$. $u(w)$ fonksiyonunun artan olduğunu kabul etmek tabii olarak gelmektedir. İkinci eşitsizlik $u(w)$ nin kesin aşağıya doğru konkav bir fonksiyon olduğunu gösterir. Kesin aşağıya konkav fayda fonksiyonları sigortadaki karar vermelerde göz önüne alındığında, Jensen eşitsizliğinin biri kullanılır. Bu eşitsizlikler bir X tesadüfi değişkeni ve $u(w)$ fonksiyonu için

$$\text{Eğer } u''(w) < 0 \text{ ise } E[u(X)] \leq u(E[X]) \qquad (1.2.2)$$

$$\text{Eğer } u''(w) > 0 \text{ ise } E[u(X)] \geq u(E[X]) \qquad (1.2.3)$$

Jensen eşitsizliği, iki beklenen değerin var olmasının ister. Yukarıdaki eşitsizliğin 1.sinin ispatı aşağıda veriliyor.



$u''(w) < 0$ ve $u'(w) > 0$ için Jensen eşitsizliğinin ispatı
Şekil 1.2.1

Eğer $E[X] = \mu$ mevcutsa, $u(w)$ ya $(\mu, u(\mu))$ de teğet olan $y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu)$ teğeti düşünülsün. $u(w)$ nin kesin aşağı konkav oluşundan $u(w)$ eğrisi teğetin altında kalır, yani $\forall w$ için

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu) \qquad (1.2.4)$$

geçerlidir. w yerine X konulsun ve her iki tarafın beklenen değerini alınsın. $E[u(X)] \leq u(\mu)$ elde edilir. Bu basit eşitsizliğinin aktüeryal matematikte bir çok uygulaması vardır. Jensen eşitsizliği yukarıdaki karar verme problemine uygulansın. Karar vericinin tercihlerinin $u'(w) > 0$ ve $u''(w) < 0$ şeklinde olduğu kabul edilsin. Jensen eşitsizliğinden

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \leq u(w - \mu) \qquad (1.2.5)$$

elde edilir. $u'(w) > 0$ olduğundan $u(w)$ artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla buradan $w - G \leq w - \mu \iff G \geq \mu$ elde edilir. X sabit değilse $G > \mu$ dür. Ekonomik terimlerle, eğer $u'(w) > 0$ ve $u''(w) < 0$ ise, karar verici, sigorta için, beklenen kayıptan daha fazla bir değeri ödeyecektir. Eğer G, en az sigortacının koyduğu prime eşitse, sigorta poliçesinde her iki taraf için avantaj olma fırsatı vardır. Eğer $u(w)$ için, $u''(w) < 0$ ise karar verici için risk sevmeyen denir. Şimdi sigortacı için genel bir fayda fonksiyonu kullanılsın. $u_1(w)$ sigortacının zenginlik fayda fonksiyonu olsun ve w_1 de sigortacının geçerli zenginliğinin parasal karşılığı olsun. Bu taktirde X tesadüfi kaybını kabullenmesi için minimum kabul edilir prim H, sigortacının görüş açısından

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)] \tag{1.2.6}$$

eşitliğinden elde edilir. (1.2.6) nın sol tarafi sigortacının şimdiki durumuna ait faydayı, sağ tarafi ise H primini alıp, X kaybının ödenmesinin beklenen faydasını göstermektedir. Diğer bir deyimle, sigortacı, bugünkü durumu ile H primli X için sigortayı vermesi arasında kayıtsızdır. Sigortacının fayda fonksiyonu $u_1'(w) > 0$ ve $u_1''(w) < 0$ şartını sağlıyorsa, jensen eşitsizliğinin (1.2.6) ifadesine uygulanırsa

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)] \le u_1(w_1 + H - \mu)$$

elde edilir. Buradan benzer şekilde $H \ge \mu$ elde edilir. Eğer karar vericinin , (1.2.5) i çözmek için belirlediği G için $G \ge H \ge \mu$ ise sigorta poliçesinin kabul edilmesi mümkündür. Yani sözleşmede her iki tarafin da beklenen faydası azalmamıştır.

1.3 Fayda Fonksiyon Çeşitleri

Üstel Fayda Fonksiyonu

Bir üstel fayda fonksiyonu

$$u(w) = -e^{-\alpha w} \qquad (\alpha > 0)$$

formundadır ve şu özelliklere haizdir:

1) $u'(w) = \alpha\, e^{-\alpha w} > 0$
2) $u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0$
Dolayısıyla, $u(w)$ risk sevmeyen birey için fayda fonksiyonu olarak kullanılabilir.
3) $E[-e^{-\alpha X}] = -E[e^{-\alpha X}] = -M_X(-\alpha)$
Burada $M_X(t) = E[e^{tX}]$, X in moment oluşturma fonksiyonudur.
4) Sigorta primi karar vericinin servetine bağlı değildir. Bunu görmek için $u(w)$, (1.2.1) de yerine yazılırsa

$$-e^{-\alpha(w-G)} = E\left[-e^{-\alpha(w-X)}\right] \Leftrightarrow e^{\alpha G} = M_X(\alpha) \Leftrightarrow G = \frac{\log M_X(\alpha)}{\alpha}$$

$\Rightarrow G$, w ya bağlı değildir.

Sigortacı açısından kontrol etmek için üstel fayda fonksiyonunu (1.2.6) da yerine yazılırsa

$$-e^{-\alpha_1 w_1} = E\left[-e^{-\alpha_1(w_1+H-X)}\right]$$

$$-e^{-\alpha_1 w_1} = -e^{-\alpha_1 (w_1+H)} M_X(\alpha_1)$$
$$\Leftrightarrow H = \frac{\log M_X(\alpha_1)}{\alpha_1}$$

bulunur.

Kesirsel Üslü Fayda Fonksiyonu

Kesirsel üslü fayda fonksiyonu

$$u(w) = w^{\gamma} \quad , \ 0 < \gamma < 1 \ \ , w > 0$$

şeklindedir. Bu da riski sevmeyen bir karar vericiyi göstermektedir, çünkü $u'(w) = \gamma w^{\gamma-1} > 0$ ve $u''(w) = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} < 0$ dır.
Bu fonksiyonlar için primler karar vericinin servetinin durumuna bağlıdır.

İkinci Dereceden Fayda Fonksiyonu

İkinci dereceden fayda fonksiyonu

$$u(w) = w - \alpha w^2 \quad , w < (2\alpha)^{-1} \ , \ \ \alpha > 0$$

şeklinde tanımlanır. Bunu kabul eden karar vericinin risk sevmediği söylenebilir, çünkü $u''(w) = -2\alpha < 0$ dır.

Örnek 1.1: Bir gelecek periyotta bir mülkün zarara uğramama olasılığı 0.75 ve bir pozitif kaybın olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = 0.25(0.01e^{-0.01x})$, $x > 0$ olsun. Mülk sahibinin fayda fonksiyonu $u(w) = -e^{-0.005w}$ ile verilsin. Beklenen kaybı ve mal sahibinin tam sigorta için ödeyeceği maksimum sigorta primini hesaplayınız.

Çözüm: Beklenen kayıp

$$E[X] = 0.75(0) + 0.25\int_0^{\infty} x(0.01e^{-0.01x})dx = 0.25$$

Maksimum primi hesaplamak için (1.2.1) i kullanılsın.

$$u(w-G) = 0.75u(w) + \int_0^{\infty} u(w-x)f(x)dx$$
$$-e^{-0.005(w-G)} = -0.75e^{-0.005w} - 0.25\int_0^{\infty} e^{-0.005(w-x)}(0.01e^{-0.01x})dx$$
$$\Rightarrow e^{0.005G} = 0.75 + 0.25(2) = 1.25$$
$$\Rightarrow G = 200\log(1.25) = 44.63$$

Örnek 1.2 : Örnek 1.1 deki mülk sahibine zararın yarısını ödeyen bir sigorta teklif edilsin. Kısmi kaybın beklenen değeri $E\left[\frac{X}{2}\right] = 12.50$ dir. Mülk sahibinin ödeyeceği maksimum primi bulunuz.

Çözüm:

$$0.75u(w-G) + \int_0^\infty u(w-G-\frac{x}{2})f(x)dx$$
$$= 0.75u(w) + \int_0^\infty u(w-x)f(x)dx$$

Bu eşitliğin sol tarafı, kısmi sigorta teminatı için beklenen faydayı göstermektedir. Sağ tarafı ise olmaması halindeki beklenen faydayı göstermektedir. Üstel fayda fonksiyonu ve kayıpların olasılık yoğunluk fonksiyonu örnek 1.1 de verildiği gibi ise G=28.62 elde edilir. Yani mülk sahibi, beklenen kısmi kayıptan $G-\mu = 28.62-12.50 = 16.12$ kadar daha fazla ödemeyi kabul edecektir.

1.4 Optimal Sigorta

Bir karar vericinin servetinin miktarı w olsun ve gelecekte bir kayıp ile yüz yüze gelsin. Bu kayıp bir X tesadüfi değişkenidir. Karar verici, x kaybına karşılık $I(x)$ ödemesini yapacak bir sigorta sözleşmesi satın alabilir. Bütün uygun sigorta sözleşmeleri için $0 \le I(x) \le x$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca, $E[I(x)] = \beta$ olan, bütün uygun sigorta sözleşmelerinin aynı P fiyatına satıldığı kabul edilecek. Karar verici, olayların dağılımına göre yapacağı tercihlere uygun olan bir fayda fonksiyonunu $u(w)$ ile formüle etsin. Karar vericinin risk sevmediği, yani $u''(w) < 0$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca karar vericinin sigorta için P değerini ödemeyi kabul ettiği farzedilsin. Şimdi şu soru sorulsun: β beklenen hasar talepli ve P primli uygun sözleşmelerden hangisi karar vericinin beklenen faydasını maksimum yapar?

Uygun olan sigorta sözleşmelerin bir alt sınıfı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & ,x < d \\ x-d & ,x \ge d \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Bu sözleşmelerde hasar talebi ödemeleri, kaybın belirli bir değeri geçmesinden sonra başlamaktadır. d ye muaf tutulan (deductible) miktar denir. Bu türlü sözleşmelere kesintili sigorta (stop-loss) denir.

$f(x)$ ile X tesadüfi kayıpların olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $F(x)$ ile dağılım fonksiyonunu ve de β ile beklenen hasar talepleri gösterilsin.

$$\beta = \int_d^\infty (x-d)f(x)dx \tag{1.4.2A}$$

$$\beta = \int_d^{\infty} [1 - F(x)] dx \tag{1.4.2B}$$

dir. İkinci eşitlik birinciden kısmi integrasyon ile elde edilir. Bu bölümün temel bir sonucu bir teorem olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 1.1

Serveti w ve risk sevmeyen (yani $u(w)$ fayda fonksiyonu için $u''(w) < 0$ olan) bir karar verici, X tesadüfi kayıpla karşı karşıya olsun, sigortaya P miktarını ödemeyi kabul etsin. Sigorta pazarı, P ödemesine karşılık $0 \le I(x) \le x$ ve $E[I(x)] = \beta$ koşullarını gerçekleyen uygun sigorta sözleşmeleri teklif etsin. Bu taktirde karar vericinin beklenen faydası şu sigorta poliçesini satın alarak maksimize edilebilir:

$$I_{d^*}(x) = \begin{cases} 0 & , x < d^* \\ x - d^* & , x \ge d^* \end{cases}$$

burada d^* ,

$$\beta = \int_d^{\infty} (x - d) f(x) dx$$

eşitliğinin çözümüdür.

Bunun ispatı için önce aşağıdaki lemma ispatlansın:

Lemma: Eğer

$$\begin{aligned} &\forall w \in [a,b] \text{ için } , u''(w) < 0 \text{ ise,} \\ &w, z \in [a,b] \text{ için } \quad u(w) - u(z) \le (w - z)u'(z) \ . \end{aligned} \tag{1.A.1}$$

İspat: Şekil 1.2.1' e bakılsın. (z, $u(z)$) noktasında $u(w)$ ye teğet olan doğrunun denklemi $y - u(z) = u'(z)(w - z)$ dir. $y \ge u(w)$ olduğundan y, $u(w)$ fonksiyonu üzerindedir (z,($u(z)$) noktası hariç). Böylece $u(w) - u(z) \le u'(z)(w - z)$ elde edilir. Şekil 1.2 de $u'(w) > 0$ dır. Aynı sonuçlar $u'(w) < 0$ için de doğrudur.

Teorem 1.1' in ispatı:

Yukarıdaki lemmadan,

$$\begin{aligned} &u(w - x + I(x) - P) - u(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\le [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \end{aligned} \tag{1.A.2}$$

elde edilir. Ayrıca ,

$$[I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \le [I(x) - I_{d^*}(x)]u'(w - d^* - P) \tag{1.A.3}$$

olduğu iddia ediliyor. Bunu göstermek için 3 durum incelensin:

1.Hal: $I_{d*}(x) = I(x)$

Bu durumda eşitsizliğin her iki tarafi 0 olduğu için iddia doğrudur.
2.Hal: $I_{d*}(x) > I(x)$
Bu durumda $I_{d*}(x) > 0$ olup (1.4.1) den $x - I_{d*}(x) = d*$ elde edilir. Bu durumda (1.A.3) ün her iki tarafi da $[I(x) - I_{d*}(x)]u'(w - d* - P)$ ye eşit olur.
3.Hal: $I_{d*}(x) < I(x)$
(1.4.1) den $I_{d*}(x) - x \geq -d*$ ve $I_{d*}(x) - x - P \geq -d* - P$ elde edilir. $u''(x) < 0$ olduğundan $u'(x)$ azalan bir fonksiyondur, dolayısıyla
$u'(w - x + I_{d*}(x) - P) \leq u'(w - d* - P)$ gerçekleşir. $I(x) - I_{d*}(x) > 0$ olup her iki tarafi bununla çarpılırsa (1.A.3) elde edilir.

Böylece her üç halde de (1.A.3)'ü elde edilmiş olur. (1.A.2) ve (1.A.3) eşitsizlikleri beraber kullanır ve beklenen değer alınırsa

$$E[u(w - X + I(X) - P] - E[u(w - X + I_{d*}(X) - P]$$
$$\leq E[I(X) - I_{d*}(X)]u'(w - d* - P) = (\beta - \beta)u'(w - d* - P) = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$E[u(w - X + I(X) - P] \leq E[u(w - X + I_{d*}(X) - P]$$

olur. Yani $I_{d*}(x)$ seçilmekle beklenen fayda maksimize edilmiş olur.

Bölüm 2

Kısa Süreli Bireysel Risk Modelleri

Bölüm 1 de karar vericinin tesadüfi olaylar sonucunda meydana gelebilecek parasal kayıpları azaltmak için sigortayı nasıl kullanabileceği açıklanmıştı. Bunun için bir olasılık modeli gerekir. İşte burada yaygın bir şekilde kullanılan iki modelden biri incelenecek. Sigortacı kuruluş için tesadüfi kayıplar S ile gösterilsin. Bu taktirde S tesadüfi değişkeni için bir olasılık dağılımı aranması gerekir. Tarihsel olarak S nin dağılımı için iki durum söz konusudur. Bunlardan bir tanesi olan bireysel risk modeli şu şekilde tanımlanır:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Buradaki X_i ler i.sigortalanmış birim içindeki kayıpları n de sigortalanmış risk birimleri sayısını gösterir. Genellikle X_i lerin bağımsız tesadüfi değişkenler olduğu kabul edilir. Çünkü bunun matematiği daha kolaydır ve bağımlılıkta olduğu gibi geçmişteki datalar bilinmek zorunda değildir. Diğer model ise kollektif risk modelidir. Bu bölümde bireysel risk modeli incelenirken paranın zaman içindeki değeri dikkate alınmayacaktır. Bu basitlik içindir ve kısa vadeli olmasının bir sonucudur. Yine bu bölümde sadece kapalı modeller incelenecek. Bundan ise şu anlaşılır: Sigortalanmış birimlerin sayısı (n) bilinmekte ve periyodun başında sabit tutulmaktadır. Eğer sigorta sistemine giriş ve çıkışlar dikkate alınırsa bu taktirde bir açık modelden bahsedilebilir.

2.1 Bireysel Hasar Talebi Tesadüfi Değişkenleri İçin Modeller

Önce hayat sigortası ürünü için bazı temel kavramlar gözden geçirilsin. 1 yıllık hayat sigortasından şu anlaşılır: Eğer sigortalanan kişi1 yıl içinde ölürse sigorta şirketi b miktar ödemeyi kabul etmekte aksi taktirde hiçbir şey ödememektedir. Bir yıl boyunca bir hasar talebinin gerçekleşme olasılığı q dur. X hasar talebi tesadüfi değişkenin dağılımı ya onun olasılık fonksiyonu p.f. ile ya da dağılım fonksiyonu d.f. ile ifade edilir. X in olasılık fonksiyonu:

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 1-q & , x = 0 \\ q & , x = b \\ 0 & , d.y. \end{cases}$$

buradan d.f. şu şekilde elde edilir:

$$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-q & 0 \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

momentin tanımı ve p.f.den

$$E[X] = bq$$
$$E[X^2] = b^2 q$$
$$Var(X) = b^2 q(1-q)$$

elde edilir. Ayrıca bu formüller aşağıdaki şekilde de elde edilebilir:

$$X = Ib$$

denilsin. Burada b ölüm halinde ödenecek sabit miktarı, I tesadüfi değişkeni ise ölüm olayının olması halinde 1, olmaması halinde 0 değerini alır. Bundan dolayı $\Pr(I=0)=1-q$ ve $\Pr(I=1)=q$ olur. I nın beklenen değeri ve varyansı sırasıyla q ve $q(1-q)$ dur. Dolayısıyla X in beklenen değeri (ortalaması) ve varyansı sırasıyla bq ve $b^2q(1-q)$ olarak bulunur.

Aktüeryal modellerde $\{0,1\}$ değerini alan I tesadüfi değişkeni çok yaygın bir şekilde kullanılır. Bu tesadüfi değişkenine gösterici (indicator) denilir. Çünkü verilen bir olay için $I=0$ olayın ortaya çıkmamasını , $I=1$ ise olayın ortaya çıkmasını gösterir.

Hasar talep miktarının bir tesadüfi değişken olduğu ve bir periyot içinde birkaç tane hasar talebinin meydana gelebileceği daha genel modeller ele alınsın. Yangın, kaza, dolu, hastalık bu çeşitten sigorta örnekleridir. $X=Ib$ genişletilerek

$$X = IB$$

yazılabilir. Burada X belirli bir periyot için hasar talebi tesadüfi değişkeni, B o periyot içinde maruz kalınabilen toplam talep miktarını, I ise en az bir hasar talebinin ortaya çıkışını gösteren gösterge olarak kullanılacak. $I=1$ periyot içinde en az bir olayın meydana gelişini $I=0$ ise hiçbir olayın meydana gelmemesini gösterir. Yani periyot içinde meydana gelen hasar sayısını kastetmez. Bu çok olaylı poliçede de $\Pr(I=1)=q$ olarak gösterilecek.

Bir model içinde I ve B nin dağılımlarını tespit etmek için birkaç duruma bakılsın. Önce şu örnek incelensin: Kaza ile ölümün olması halinde ekstra bir ödeme sağlayan bir yıllık bir hayat sigortası satın alınsın. Mesela kaza ile ölüm halinde faydalanma miktarı 50,000 diğer ölüm sebepleri halinde 25,000 olsun. Belirli bir yaş, sağlık ve meslek grubu için şu farz edilsin. Bir yıl içinde kaza ile ölme olasılığı 0.0005, diğer sebeplerden dolayı ölme olasılığı 0.0020 olsun. Kısaca;

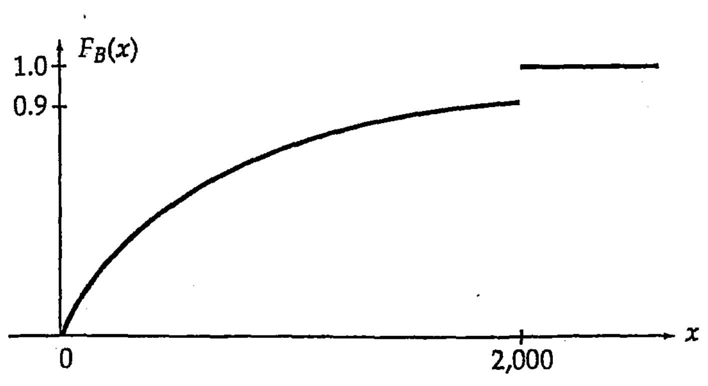
$$\Pr(I=1, B=50{,}000) = 0.0005$$
$$\Pr(I=1, B=25{,}000) = 0.0020$$

B nin mümkün değerleri üzerinden toplanırsa $\Pr(I=1)=0.0025$ elde edilir. Daha sonra $\Pr(I=0)=1-\Pr(I=1)=0.9975$ elde edilir. I=1 olması halinde B nin şartlı dağılımı

$$\Pr(B=25{,}000\,|\,I=1)=\frac{\Pr(B=25000, I=1)}{\Pr(I=1)}=\frac{0.0020}{0.0025}=0.8$$
$$\Pr(B=50{,}000\,|\,I=1)=\frac{\Pr(B=50000, I=1)}{\Pr(I=1)}=\frac{0.0005}{0.0025}=0.2$$

Bir kasko otomobil sigortası göz önüne alınsın. Yapılan poliçeye göre sigorta şirketi, her hasar başına müşterinin katılım payının 250 olduğu en fazla 2000 lik bir hasar talebini kabul etmektedir ve bir periyot içerisinde bir tane hasar talebi olması olasılığı 0.15, daha fazla sayıda hasar talebi olması olasılığı 0 kabul edilsin. Dolayısıyla hiç bir hasar talebinin olmaması olasılığı 0.85 olur. Bir periyot içinde birden fazla hasar talebinin olmaması gerçekçi bir kabul değildir. Bu kabulün seçimi B nin dağılımını basitleştirmek içindir. B arabadaki gerçek zarar miktarından ziyade sigortacının maruz kaldığı hasar talebi olduğundan I ve B nin iki karakteristik sonucuna varılabilir. İlk olarak; I=0 olayı 250 miktarlık veya daha az hasarın olması olayını kapsar. Diğeri ise B nin dağılımının 2000 maksimum hasar talebi büyüklüğünde bir olasılık kütlesine sahip olduğudur. Bu olasılık kütlesinin değeri 0.1 olsun. Ayrıca 0 ve 2000 arasındaki hasar taleplerinin bir sürekli dağılım ile modelleşebileceği kabul edilsin. Öyle ki bu yoğunluk fonksiyonu $0<x<2000$ için $1-x/2000$ ile orantılı olsun. (uygulamada seçilen sürekli eğri bir evvelki periyot içerisindeki hasar taleplerinin incelenmesiyle elde edilen dağılımdan seçilmelidir.) Bu kabuller toplanırsa I=1 olması halinde B , 0 dan 2000 e kadar pozitif yoğunluğu ve 2000 de bir kütleye sahip olan bir karma dağılıma sahiptir. Bu şartlı dağılımın d.f. si Şekil 2.1.1 de gösterilmektedir.

$$\Pr(B\le x\,|\,I=1)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 0.9\left[1-\left(1-\dfrac{x}{2000}\right)^2\right] & 0<x<2000\\ 1 & x\ge 2000\end{cases}$$



I=1 verildiğinde B nin dağılım fonksiyonu
Şekil 2.1.1

Bu otomobil sigortası için beklenen değer ve varyans iki ayrı metotla hesaplansın. Önce X in dağılımı bulunsun ve o kullanılarak $E[X]$ ve $Var(X)$ hesaplansın. X in dağılım fonksiyonu olarak $F_X(x)$ gösterilirse

$$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \Pr(IB \le x) = \Pr(IB \le x, I = 0) + \Pr(IB \le x, I = 1)$$

$$= \Pr(IB \le x \mid I = 0)\Pr(I = 0) + \Pr(IB \le x \mid I = 1)\Pr(I = 1)$$

$x<0$ için

$$F_X(x) = 0(0.85) + 0(0.15) = 0$$

$0 \le x < 2000$ için

$$F_X(x) = 1(0.85) + 0.9\left[1 - \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^2\right](0.15)$$

$x \ge 2000$ için

$$F_X(x) = 1(0.85) + 1(0.15) = 1$$

Bu bir karma dağılımdır.

$X=IB$ nin dağılım fonksiyonu
Şekil 2.1.2

Bu dağılım fonksiyonundan

$$f_X(0) = \Pr(X = 0) = 0.85$$

$$f_X(2000) = \Pr(X = 2{,}000) = 0.015$$

ve

$$f_X(x) = \begin{cases} F_X'(x) = 0.000135\left(1 - \dfrac{x}{2000}\right) & 0 < x < 2000 \\ 0 & d.y. \end{cases}$$

elde edilir. X in momentleri

$$E[X^k] = 0 f_X(0) + (2000)^k f_X(2000) + \int_0^{2000} x^k f_X(x)\,dx$$

formülünden hesaplanırsa

$k=1$ için $\qquad E[X] = 120.$

k=2 için $$E[X^2] = 0 f_X(0) + (2000)^2 f_X(2000) + \int_0^{2000} x^2 (1 - \frac{x}{2000})(0.000135)dx$$
$$=150,000$$

buradan

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 135,600$$

elde edilir.

X tesadüfi değişkeninin beklenen değeri ve varyansı şu şekilde de bulunabilir. Tesadüfi değişkenlerinin şartlı momentleri ile ilgili genel formüller vardır. Beklenen değer ve varyans için bu formüller aşağıda verilmiştir [8], [12] .

$$E[W] = E[E[W \mid V]] \tag{2.1.1}$$

$$Var(W) = Var(E[W \mid V]) + E[Var(W \mid V)] \tag{2.1.2}$$

Bu formüller kullanılan modele uygulanırsa yani X=IB için W yerine X, V yerine I yazılırsa

$$E[X] = E[E[X \mid I]] \tag{2.1.3}$$

$$Var(X) = Var(E[X \mid I]) + E[Var(X \mid I)] \tag{2.1.4}$$

şimdi

$$\mu = E[B \mid I = 1] \tag{2.1.5}$$

$$\sigma^2 = Var[B \mid I = 1] \tag{2.1.6}$$

olsun. Şartlı ortalamalara bakıldığında

$$E[X \mid I = 0] = 0 \tag{2.1.7}$$

$$E[X \mid I = 1] = E[B \mid I = 1] = \mu \tag{2.1.8}$$

(2.1.7) ve (2.1.8) formülleri kullanılarak $E[X \mid I]$, I nın bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

$$E[X \mid I] = \mu I \tag{2.1.9}$$

bundan dolayı $$E[E[X \mid I]] = \mu \mathrm{E}[I] = \mu q \tag{2.1.10}$$

ve

$$Var(E[X \mid I]) = \mu^2 Var(I) = \mu^2 q(1-q) \tag{2.1.11}$$

I=0 için X=0 olduğundan

$$Var(X \mid I = 0) = 0 \tag{2.1.12}$$

I=1 için X=B olup

$$Var(X \mid I = 1) = Var(B \mid I = 1) = \sigma^2 \tag{2.1.13}$$

(2.1.12) ve (2.1.13) formüllerini birleştirilirse

$$Var(X \mid I) = \sigma^2 I \tag{2.1.14}$$

$$E[Var(X \mid I)] = \sigma^2 E[I] = \sigma^2 q \qquad (2.1.15)$$

elde edilir. (2.1.3) ve (2.1.4) içine (2.1.10), (2.1.11) ve (2.1.15) ü yerleştirilirse

$$E[X] = \mu q \qquad (2.1.16)$$

ve

$$Var(X) = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q \qquad (2.1.17)$$

bulunur. Şimdi bu formüller kullanılarak $E[X]$ ve $Var(X)$ bulunabilir.
I=1 verildiğinde B nin p.d.f si (olasılık yoğunluk fonksiyonu)

$$f_{B|I}(x \mid 1) = \begin{cases} 0.0009(1 - \dfrac{x}{2000}) & 0 < x < 2000 \\ 0 & d.y. \end{cases}$$

ve $\Pr(B = 2000 \mid I = 1) = 0.1$ olup

$$\mu = \int_0^{2000} 0.0009x(1 - \frac{x}{2000})dx + (0.1)(2000) = 800$$

$$E[B^2 \mid I = 1] = \int_0^{2000} 0.0009x^2(1 - \frac{x}{2000})dx + (0.1)(2000)^2 = 1{,}000{,}000$$

$$\sigma^2 = 1{,}000{,}000 - (800)^2 = 360{,}000$$

elde edilir. q=0.15 olduğu için (2.1.16) ve (2.1.17) den

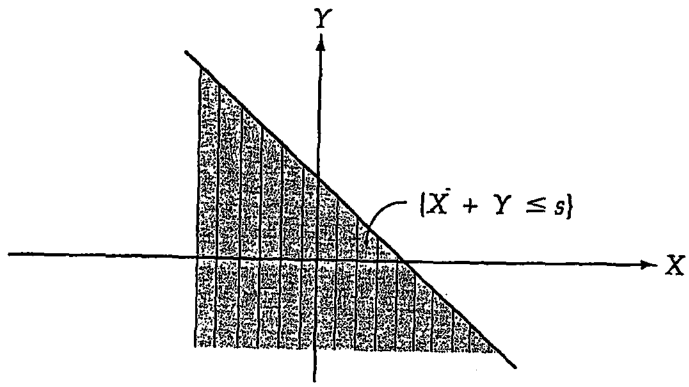
$$E[X] = 800(0.15) = 120$$

$$Var(X) = (800)^2(0.15)(0.85) + (360{,}000)(0.15) = 135{,}600$$

bulunur.

2.2 Bağımsız Tesadüfi Değişkenlerin Toplamı

Bireysel risk modelinde hasar talepleri bir çok bireysel sigortalanmış hasar taleplerinin toplamı olarak modelleşebilir. Bir çok uygulamada her bir hasar talebi bağımsız olarak kabul edilir. Bu bölümde bağımsız tesadüfi değişkelerinin toplamının dağılımının belirlenmesi Önce S=X+Y toplamı göz önüne alınsın. Burada X ve Y tesadüfi değişkenler olup örnek uzayları Şekil 2.2.1 de gösterilmektedir.



$\{X+Y \leq s\}$ olayı
Şekil 2.2.1

$X+Y=s$ doğrusu ve onun altındaki bölge $[S = X+Y \leq s]$ olayını gösterir. Bundan dolayı S nin d.f. si

$$F_S(s) = \Pr(S \leq s) = \Pr(X+Y \leq s) \tag{2.2.1}$$

iki kesikli negatif olmayan tesadüfi değişken için toplam olasılık kuralına göre

$$F_S(s) = \sum_{\forall y \leq s} \Pr(X+Y \leq s, Y=y)$$

$$F_S(s) = \sum_{\forall y \leq s} \Pr(X+Y \leq s \mid Y=y)\Pr(Y=y)$$

$$= \sum_{\forall y \leq s} \Pr(X \leq s-y \mid Y=y)\Pr(Y=y) \tag{2.2.2}$$

X ve Y bağımsız oldukları için en son toplam

$$F_S(s) = \sum_{\forall y \leq s} F_X(s-y) f_Y(y) \tag{2.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu d.f ye uygun olan p.d.f. ise

$$f_S(s) = \sum_{\forall y \leq s} f_X(s-y) f_Y(y) \tag{2.2.4}$$

şeklindedir.

Sürekli ve negatif olmayan tesadüfi değişkenler içinde formüller yukarıdakine benzerdir. Buna göre

$$F_S(s) = \int_0^s \Pr(X \leq s-y \mid Y=y) f_Y(y)dy \tag{2.2.5}$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)dy \tag{2.2.6}$$

$$f_S(s)=\int_0^s f_X(s-y)f_Y(y)dy \qquad (2.2.7)$$

X ve Y nin en az biri karma dağılım olduğunda formüller benzerdir fakat daha karışıktır. Tesadüfi değişkenler ayrıca negatif değerlerde alabilir. Bu taktirde yukarıdaki formüllerdeki integral ve toplamın sınırları için y, $-\infty$ ile ∞ arasında değişecektir. Matematik analizde (2.2.3) ve (2.2.6) işlemlerine $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ dağılım fonksiyonları çiftinin konvolüsyon'u denir ve $F_X * F_Y$ ile gösterilir. İkiden daha fazla tesadüfi değişkenin toplamının dağılımını bulmak için tekrarlı bir şekilde konvolüsyon yöntemi kullanılabilir. $S=X_1+X_2+\cdots+X_n$ olmak üzere X_i ler bağımsız tesadüfi değişkenler, F_i ler X_i lerin dağılım fonksiyonu ve $F^{(k)}$ lar ise $X_1+X_2+\cdots+X_k$ nın dağılım fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\
F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\
F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\
&\vdots \\
F_S = F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)}
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.1: X , (0,2) aralığında düzgün dağılıma , Y ise X ile bağımsız ve (0,3) aralığında düzgün dağılıma sahip olsun. Bu taktirde $S=X+Y$ nin d.f. sini tespit ediniz.

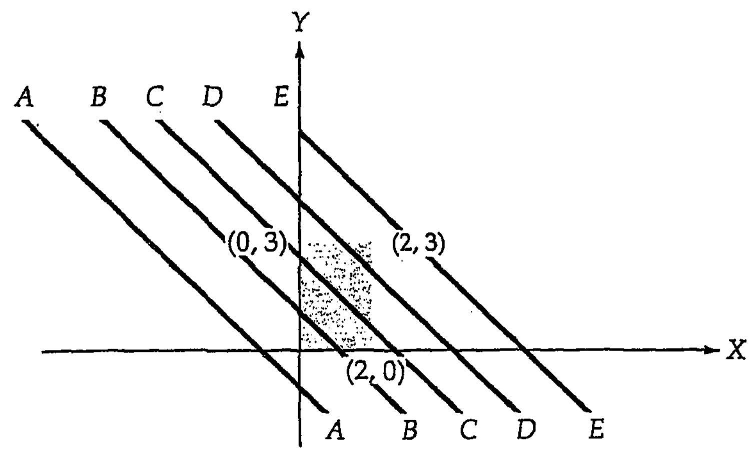
Çözüm: X ve Y sürekli tesadüfi değişkenler olduğu için (2.2.6) kullanılır. X ve Y nin p.d.f.si aşağıdaki şekildedir:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2 \\ 0 & d.y.\end{cases} \quad , \quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0<y<3 \\ 0 & d.y.\end{cases}$$

Buna göre X in d.f. si aşağıdaki şekildedir:

$$F_X(x)=\left\{\begin{matrix}0 & , x<0 \\ \dfrac{x}{2} & , 0\le x<2 \\ 1 & , x\ge 2\end{matrix}\right\}$$

$F_S(s)=\int_0^s F_X(s-y)f_Y(y)dy$ den yararlanarak S nin dağılım fonksiyonu bulunabilir. Şekil 2.2.2 de X ve Y nin örnek uzayları gösterilmektedir.



İki düzgün dağılımlı tesadüfi değişken için konvolüsyon
Şekil 2.2.2

Şekildeki dikdörtgen bölge X ve Y nin bütün olasılıklarını içermektedir. $X+Y \leq s$ olayı s nin 5 farklı durumu için incelenecek.

$$F_S(s)=\begin{cases} 0 & s<0 & \text{A çizgisi} \\ \int_0^s \frac{s-y}{2}\frac{1}{3}dy = \frac{s^2}{12} & 0 \leq s < 2 & \text{B çizgisi} \\ \int_0^{s-2} \frac{1}{3}dy + \int_{s-2}^{s} \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy = \frac{s-1}{3} & 2 \leq s < 3 & \text{C çizgisi} \\ \int_0^{s-2} \frac{1}{3}dy + \int_{s-2}^{3} \frac{1}{3}\frac{s-y}{2}dy = 1-\frac{(5-s)^2}{12} & 3 \leq s < 5 & \text{D çizgisi} \\ 1 & s \geq 5 & \text{E çizgisi} \end{cases}$$

elde edilir.

2.3 Toplam Dağılımları İçin Yaklaşımlar

Bağımsız tesadüfi değişkenlerin toplamlarının dağılımının nümerik değerlerini elde etmek için merkezi limit teoremi bir metot vermektedir. $X_1, X_2, \ldots$, bağımsız ve özdeş dağılımlı tesadüfi değişkenler dizisi için $E[X_i]=\mu$ ve $Var(X_i)=\sigma^2$ olsun. $\forall n$ için $\overline{X}_n=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$ olmak üzere $\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)/\sigma$, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan bir dağılıma sahiptir. n=1,2,... için dağılımların dizisinin standart normal dağılıma yaklaştığı bilinmektedir. Eğer n büyükse merkezi limit teoremi ile $\overline{X}_n$ nin dağılımına ortalaması μ varyansı σ^2/n olan bir normal yaklaşım ile yaklaşılabilir. Buna denk olarak n tesadüfi değişkeninin toplamının dağılımı da ortalaması $n\mu$ varyansı $n\sigma^2$ olan bir normal dağılıma yaklaşır. Bu yaklaşık hesapların geçerliliği yalnız değişkenlerin sayısına bağlı olmayıp her bir toplamaya giren terimin dağılımlarının normallikten sapmalarına da bağlıdır. Bir çok elamanter istatistik ders kitaplarında yaklaşımın anlamlı olabilmesi için n nin en az 30 olması gerektiği söylenir. Bireysel risk modelinin uygulamasını göstermek için bağımsız tesadüfi değişkenlerin toplamının dağılımına bir normal yaklaşım kullanılacak. Eğer

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad \text{ve} \quad E[S] = \sum_{k=1}^{n} E[X_k]$$

ise bağımsızlık kabulü altında

$$Var(S) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$$

olur. Bir uygulama için aşağıdakilere ihtiyaç vardır.

- Her bir bireysel zarar tesadüfi değişkeninin varyansı ve ortalama değeri hesaplanacak.
- Bütün olarak sigorta edilen zararın varyansını ve ortalamasını elde etmek için onlar toplanacak.
- En sonunda bir normal yaklaşım uygulanacak.

2.4 Sigortaya Uygulamalar

Bu bölümde bölüm 2.1 nin sonuçları ve normal yaklaşım incelenecektir.

Bir hayat sigorta şirketi bir yıl süreli hayat sözleşmelerinde 1 ve 2 birimli faydalanma miktarları vermektedir. Poliçeye hitap eden şahısların ölüm oranları 0.02 veya 0.10 dur. Aşağıda bu bilgiler toplu olarak verilmiştir.
q_k, hasar talep olasılıklarını ; b_k, faydanılan miktarı ve n_k, birey sayısını göstermektedir.

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

Firma 1800 kişilik bu topluluktan toplam hasar talep dağılımının % 95 ne eşit bir miktarını para olarak toplamak istemektedir. Ayrıca firma her bir müşteriden alacağı miktarın bireyin talep edeceği hasar miktarının beklenen değeri ile orantılı olmasını istemektedir. j. bireyinin payı $(1+\theta)E[X_j]$ olacaktır. S nin dağılımı normal olduğundan, en çok %95 olasılıkla hasar talebinin üst sınırı $E[S]$ den büyüktür. Dolayısıyla θ>0 olmalıdır. $\theta E[X_j]$ ekstra miktarına güvenlik yüklemesi denir. θ ya da izafi güvenlik katsayısı denir. θ yı aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

θ için $\Pr(S \leq (1+\theta)E[S]) = 0.95$ dir. Burada $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1800}$ dür.

$$\Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) = 0.95$$

bölüm 2.3 de bahsedilen merkezi limit teoreminden $(S-E[S])/\sqrt{Var(S)}$ nin dağılımına standart normal dağılım ile yaklaşılacak. Standart dağılım tablosundan yararlanarak lineer interpolasyon metodu ile

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}=1.645$$

elde edilir. θ yı hesaplamak için S nin ortalama değerini ve varyansını hesaplamak gerekir. Sigortalanmış bireylerin 4 sınıfı için

			Ortalama	Varyans	
k	q_k	b_k	$b_k\, q_k$	$b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k
1	0.02	1	0.02	0.0196	500
2	0.02	2	0.04	0.0784	500
3	0.10	1	0.10	0.0900	300
4	0.10	2	0.20	0.3600	500

$$E[S]=\sum_{j=1}^{1800}E[X_j]=\sum_{k=1}^{4}n_k\mu_k$$

$$=500(0.02)+500(0.04)+300(0.10)+500(0.20)=160$$

$$Var(S)=\sum_{j=1}^{1800}Var(X_j)=\sum_{k=1}^{4}n_k\sigma_k^2=256$$

buradan güvenlik yükleme katsayısı

$$\theta=1.645\frac{\sqrt{Var(S)}}{E[S]}=0.1645$$

olarak bulunur.

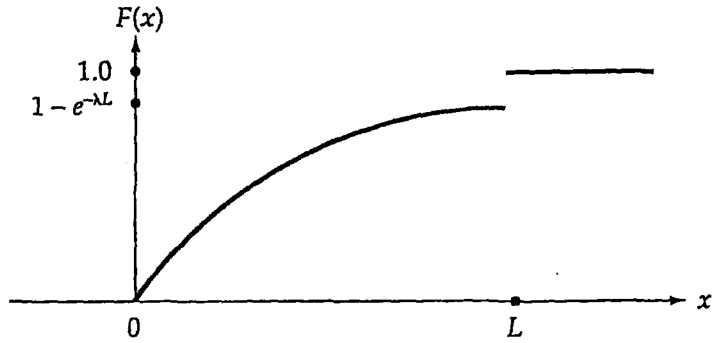
Bir otomobil sigorta şirketi poliçe sahiplerini iki sınıfa ayırsın:

Sınıf k	Sınıflardaki poliçe sayısı n_k	Hasar talep olasılıkları q_k	Hasar talep miktarlarının dağılımı için kesilmiş üstelin parametreleri λ	L
1	500	0.10	1	2.5
2	2000	0.05	2	5.0

Bir kesikli üstel dağılımı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \le x < L \\ 1 & x \ge L \end{cases}$$

bu p.d.f.si $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $0 < x < L$ ve L de $e^{-\lambda L}$ olasılık yığınına sahip olan bir karma dağılımdır. Şekil 2.4.1 de d.f. nin grafiği verilmektedir.



Kesilmiş üstel dağılımın grafiği
Şekil 2.4.1

Bir önceki uygulamada olduğu gibi toplam hasar talep miktarlarının poliçe sahiplerinden toplanan miktarı geçme olasılığı 0.05 olsun. Ayrıca her iki sınıf içinde relatif güvenlik katsayısı aynı kabul edilsin. Buna göre θ yı aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz.

Önce kesikli üstelin dağılım için verilen parametreleri kullanarak moment fonksiyonu çıkarılsın.

$$\mu = E[B \mid I = 1] = \int_0^L x\lambda e^{-x\lambda} dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1 - e^{-\lambda L}}{\lambda}$$

$$E[B^2 \mid I = 1] = \int_0^L x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx + L^2 e^{-\lambda L} = \frac{2}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda} e^{-\lambda L}$$

$$\sigma^2 = E[B^2 \mid I = 1] - (E[B \mid I = 1])^2 = \frac{1 - 2\lambda L e^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}$$

(2.1.16) ve (2.1.17) de bulunan formüllere başvurularak ve verilen parametreler kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

				Ortalama	Varyans	
k	q_k	μ_k	σ_k^2	$q_k\mu_k$	$\mu_k^2 q_k(1-q_k)+\sigma_k^2 q_k$	n_k
1	0.10	0.9179	0.5828	0.09179	0.13411	500
2	0.05	0.5000	0.2498	0.02500	0.02436	2000

Hasar taleplerinin toplamı olan S için

$$E[S]=500(0.09179)+2000(0.02500)=95.89$$

$$Var(S)=500(0.13411)+2000(0.02436)=115.78$$

$$\Pr(S\le(1+\theta)E[S])=0.95$$

tekrar normal yaklaşım ile

$$\frac{\theta E[S]}{\sqrt{Var(S)}}=1.645 \;\Rightarrow \theta=\frac{1.645\sqrt{115.78}}{95.89}=0.1846$$

elde edilir.

Bölüm 3

Canlılık Dağılımı ve Hayat Tabloları

3.1 Yaşam Fonksiyonu

Yeni doğmuş bir çocuk düşünülsün. Bunun ölüm yaşını gösteren X, sürekli bir tesadüfi değişkendir. $F_X(x)$ ile X in dağılım fonksiyonu (d.f.) gösterilsin.

$$F_X(x) = \Pr(X \le x), \quad x \ge 0 \quad \text{ve} \quad s(x) = 1 - F_X(x) = \Pr(X > x)\ , \quad x \ge 0$$

olsun. Daima $F_X(0) = 0$ kabul edilecek, yani $s(0)=1$ dir. $s(x)$ e yaşam fonksiyonu denir. Her $x>0$ için $s(x)$, yeni doğan bir çocuğun x yaşına gelebilmesinin olasılığını gösterir. X in dağılımı $F_X(x)$ ve $s(x)$ tarafından tanımlanabilir. Yeni doğmuş bir çocuğun x ve z $(x<z)$ yaşları arasında ölme olasılığı

$$\begin{aligned} \Pr(x < X \le z) &= F_X(z) - F_X(x) \\ &= s(x) - s(z). \end{aligned}$$

***x* yaşındaki bir insanın ölene kadar geçen zamanı**

x yaşındaki bir insanın x ile z yaşları arasında ölmesinin olasılığı

$$\Pr(x < X \le z \mid X > x) = \frac{F_X(z) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}. \tag{3.1.1}$$

(x) sembolü x yaşındaki bir canlıyı göstermektedir. (x) in gelecekteki hayat süresi olan X-x , $T(x)$ ile gösterilecek.

$${}_tq_x = \Pr[T(x) \le t] \qquad t \ge 0$$

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = \Pr[T(x) > t] \qquad t \ge 0$$

${}_tq_x$ sembolü (x) in t yıl içinde ölmesinin olasılığını vermektedir. Yani ${}_tq_x$, $T(x)$ in dağılım fonksiyonudur. Diğer taraftan ${}_tp_x$, (x) in $x+t$ yaşına gelebilmesinin olasılığını göstermektedir, yani ${}_tp_x$, (x) in yaşama fonksiyonunu göstermektedir. Özel bir hal olarak $x=0$ için $T(0)=X$ ve ${}_xp_0 = s(x)$, $x \ge 0$. Eğer $t=1$ ise , t indeksinden vazgeçilebilir. Şöyle ki q_x, (x) canlısının 1 yıl içinde ölmesi olasılığını, p_x, (x) canlısının x+1 yaşına basması olasılığını gösterir.

Ayrıca (x) in $x+t$ ve $x+t+u$ yaşları arasında ölmesi olasılığı

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \Pr[t < T(x) \le t+u] \\
&= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x
\end{aligned}
$$

Eğer u=1 ise sadece ${}_{t|}q_x$ yazılır. Yukarıdaki ifadeler t=0 için x yaşındaki bir canlının x ile $x+u$ arasında ölmesinin olasılığını verir.

Teorem 3.1: Yukarıdaki tanımlar altında

1. ${}_tp_x = \dfrac{s(x+t)}{s(x)}$
2. ${}_tq_x = \dfrac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}$
3. ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \; {}_uq_{x+t}$

dır.

İspat:

$$
{}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{s(x+t)}{s(x)}
$$

$$
{}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}
$$

Bu yaklaşımlar altında

$$
{}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \, \frac{s(x+t)-s(x+t+u)}{s(x+t)} \\
&= {}_tp_x \; {}_uq_{x+t} \, .
\end{aligned}
$$

(x) için gelecekteki yaşam süresinin tam kısmı (curtate -future -lifetime)

(x) in ölene kadar geçireceği tam yılların sayısı bir tesadüfi değişken olarak düşünülebilir. Bu $K(x)$ ile gösterilsin. $K(x)$ in olasılık fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\Pr[K(x)=k] &= \Pr[k \le T(x) < k+1] \\
&= \Pr[k < T(x) \le k+1] \\
&= {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x \qquad (k = 0,1,2,3,\ldots)
\end{aligned}
$$

$T(x)$ sürekli bir tesadüfi değişken olduğu için

$$
\Pr[T(x)=k] = \Pr[T(x)=k+1] = 0.
$$

Buradan $K(x)$ in d.f. si şu merdiven fonksiyon olur:

$$\sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x = {}_{k+1}q_x \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Bazen $T(x)$ yerine T, $K(x)$ yerine K yazılabilir.

3.2 Ölümün Etkisi

(3.1.1) deki formül kullanılarak $z = x + \Delta x$ yazılırsa

$$\Pr(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x) = \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \cong \frac{f_X(x)\Delta x}{1 - F_X(x)}$$

olur. Buradaki $\dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$ fonksiyonu x canlılık yaşı için, X in şartlı p.d.f.sinin tam x yaşındaki değerini verir.

$$\mu_x = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} \qquad (3.2.1)$$

$$\Rightarrow \mu_x \geq 0$$

bulunur. μ_x'e ölümün etkisi (şiddeti) denir. Güvenilir olma teorisinde sistemlerin ve üretilen nesnelerin canlı olma olasılıkları incelendiğinde μ_x'e başarısızlık veya riziko oranı veya riziko oran fonksiyonu da denmektedir.

Teorem 3.2: Aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. ${}_n p_x = \exp(-\int_0^n \mu_{x+s} ds)$
2. ${}_x p_0 = \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$
3. $f_X(x) = {}_x p_0 \mu_x$.

İspat: (3.2.1) de x yerine y yazılırsa

$$-\mu_y dy = d \log \mathrm{s(y)}$$

elde edilir. Bu ifade x den $x+n$ e kadar integre edilirse

$$\Rightarrow -\int_x^{x+n} \mu_y dy = \log\left[\frac{s(x+n)}{s(x)}\right] = \log {}_n p_x$$

$$\Rightarrow {}_np_x = \exp(-\int_x^{x+n}\mu_y dy)\ ,\ s{=}y{-}x \text{ için } \quad {}_np_x = \exp(-\int_0^n \mu_{x+s} ds)$$

elde edilir. Özel olarak, bu gösteriliş x yaşı yerine 0 ve yaşanan sürede x olarak alınırsa

$$_xp_0 = s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$F_X(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \mu_s ds) \text{ ve } F_X'(x) = f_X(x) = \exp[-\int_0^x \mu_s ds]\,\mu_x$$

$$= {}_xp_0\mu_x .$$

(x) in gelecekteki yaşam süresini gösteren $T(x)$ in d.f. ve p.d.f si sırasıyla $G(t)$ ve $g(t)$ ile gösterilsin.

$$G(t) = {}_tq_x = \Pr(T(x) \le t) \Rightarrow g(t) = \frac{d}{dt}{}_tq_x = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}\right]$$

$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\left[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}\right]$$

$$= {}_tp_x\mu_{x+t}\ ,\quad t \ge 0 \tag{3.2.2}$$

Bundan dolayı ${}_tp_x\mu_{x+t}dt$, (x) canlısının t ve $t+dt$ arasında ölme olasılığıdır ve

$$\int_0^\infty {}_tp_x\mu_{x+t}dt = 1.$$

$$(3.2.2) \Rightarrow \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\mu_{x+t}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(-\log {}_np_x) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n}\mu_y dy = \infty.$$

3.3 Hayat Tabloları

Yaşam fonksiyonu ile hayat tablo fonksiyonları arasındaki bağlantı

Bir hayat tablosunda q_x, l_x, d_x gibi temel hayat fonksiyonları belirli yaşlar için gösterilirler. (x) in t yıl içinde ölmesinin olasılığı Teorem 3.1 de şöyle gösterilmişti:

$$_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Yeni doğanların l_0 gibi bir grubu düşünülsün. Örneğin l_0=100,000 olsun. Her yeni doğanın ölüm yaşının dağılımı $s(x)$ hayat fonksiyonu tarafından belirlenir. $\mathcal{L}(x)$, x yaşındaki canlıların sayısını göstersin. Bu hayatlar $j = 1,2,\ldots,l_0$ ile indekslensin.

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

burada I_j, eğer j.canlı x yaşında yaşarsa 1, aksi taktirde 0 değerini alsın. $E[I_j] = s(x)$ olduğundan $E[\mathcal{L}(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0 s(x)$ dir. E[$\mathcal{L}(x)$] sayısı l_x ile gösterilir. Yani l_x, l_0 yeni doğan canlı grubundan x yaşına kadar canlı kalanların beklenen sayısıdır.

$$\Rightarrow l_x = l_0 s(x) \tag{3.3.1}$$

Ayrıca I_j lerin birbirlerinden bağımsız oldukları kabul edilirse, $\mathcal{L}(x)$, $n=l_0$ ve $p=s(x)$ parametrelerinin bir binom dağılımıdır.

Teorem3.3: x ile $x+n$ yaşları arasında ölenlerin beklenen sayısı ${}_n d_x$ için

$${}_n d_x = \int_x^{x+n} l_y \mu_y dy$$

dir.

İspat: ${}_n D_x$, x ile $x+n$ yaşları arasında ölenlerin sayısını göstersin. $E[{}_n D_x]$ sayısı ${}_n d_x$ ile gösterilir. Bir yeni doğanın x ile $x+n$ yaşları arasında ölmesinin olasılığı $s(x)$-$s(x+n)$ olduğundan

$${}_n d_x = E[{}_n D_x] = l_0 [s(x)-s(x+n)] = l_x - l_{x+n}$$

elde edilir. n=1 için ${}_1 d_x = d_x$ yazılır ve (3.3.1) den logaritmik türev alınırsa

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{d_x} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu_x$$

$$-dl_x = l_x \mu_x dx$$

elde edilir. Madem ki $l_x \mu_x = l_0\, {}_x p_0 \mu_x = l_0 f_X(x)$ dir. $l_x \mu_x$ faktörü $(x,x+dx)$ yaş aralığındaki ölümlerin beklenen yoğunluğu olarak yorumlanabilir. Ayrıca

$$l_x = l_0 \exp(-\int_0^x \mu_y dy)$$

$$l_{x+n} = l_x \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y dy)$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y \mu_y dy$$

elde edilir.

İnsanlar için 110 yaşının üstünde çok az gözlemler olduğundan, öyle bir w yaşının varlığı kabul edilir ki $x<w$ için $s(x)>0$ ve $x \geq w$ için $s(x)=0$ dır. Bu kabul edilen w yaşına limit yaşı denir. Her biri $s(x)$ canlılık fonksiyonuna sahip olan l_0 yeni doğan insan grubuna tesadüfi canlılık grubu denilecek.

Hayat Tablosu Örneği

Tablo 3.3.1
A.B.D 1979-81 Hayat Tablosu

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Yaş aralığı x-x+1	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
0-1	0.01260	100 000	1260	98 973	7 387 758	73.88
1-2	0.00093	98 740	92	98 694	7 288 785	73.82
2-3	0.00065	98 648	64	98 617	7 190 091	72.89
3-4	0.00050	98 584	49	98 560	7 091 474	71.93
4-5	0.00040	98 535	40	98 515	6 992 914	70.97
5-6	0.00037	98 495	36	98 477	6 894 399	70.00
6-7	0.00033	98 459	33	98 442	6 795 922	69.02
7-8	0.00030	98 426	30	98 412	6 697 480	68.05
8-9	0.00027	98 396	26	98 383	6 599 068	67.07
9-10	0.00023	98 370	23	98 358	6 500 685	66.08
10-11	0.00020	98 347	19	98 338	6 402 327	65.10
11-12	0.00019	98 328	19	98 319	6 303 989	64.11
12-13	0.00025	98 309	24	98 297	6 205 670	63.12
13-14	0.00037	98 285	37	98 266	6 107 373	62.14
14-15	0.00053	98 248	52	98 222	6 009 107	61.16
15-16	0.00069	98 196	67	98 163	5 910 885	60.19
16-17	0.00083	98 129	82	98 087	5 812 722	59.24
17-18	0.00095	98 047	94	98 000	5 714 635	58.28
18-19	0.00105	97 953	102	97 902	5 616 635	57.34
19-20	0.00112	97 851	110	97 796	5 518 733	56.40
20-21	0.00120	97 741	118	97 682	5 420 937	55.46
21-22	0.00127	97 623	124	97 561	5 323 255	54.53

Tablo 3.3.1
A.B.D 1979-81 Hayat Tablosu

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Yaş aralığı x-x+1	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
22-23	0.00132	97 499	129	97 435	5 225 694	53.60
23-24	0.00134	97 370	130	97 306	5 128 259	52.67
24-25	0.00133	97 240	130	97 175	5 030 953	51.74
25-26	0.00132	97 110	128	97 046	4 933 778	50.81
26-27	0.00131	96 982	126	96 919	4 836 732	49.87
27-28	0.00130	96 856	126	96 793	4 739 813	48.94
28-29	0.00130	96 730	126	96 667	4 643 020	48.00
29-30	0.00131	96 604	127	96 541	4 546 353	47.06
30-31	0.00133	96 477	127	96 414	4 449 812	46.12
31-32	0.00134	96 350	130	96 284	4 353 398	45.18
32-33	0.00137	96 220	132	96 155	4 257 114	44.24
33-34	0.00142	96 088	137	96 019	4 160 959	43.30
34-35	0.00150	95 951	143	95 880	4 064 940	42.36
35-36	0.00159	95 808	153	95 731	3 969 060	41.43
36-37	0.00170	95 655	163	95 574	3 873 329	40.49
37-38	0.00183	95 492	175	95 404	3 777 755	39.56
38-39	0.00197	95 317	188	95 224	3 682 351	38.63
39-40	0.00213	95 129	203	95 027	3 587 127	37.71
40-41	0.00232	94 926	220	94 817	3 492 100	36.79
41-42	0.00254	94 706	241	94 585	3 397 283	35.87
42-43	0.00279	94 465	264	94 334	3 302 698	34.96
43-44	0.00306	94 201	288	94 057	3 208 364	34.06
44-45	0.00335	93 913	314	93 756	3 114 307	33.16
45-46	0.00366	93 599	343	93 427	3 020 551	32.27
46-47	0.00401	93 256	374	93 069	2 927 124	31.39
47-48	0.00442	92 882	410	92 677	2 834 055	30.51
48-49	0.00488	92 472	451	92 246	2 741 378	29.65
49-50	0.00538	92 021	495	91 773	2 649 132	28.79
50-51	0.00589	91 526	540	91 256	2 557 359	27.94
51-52	0.00642	90 986	584	90 695	2 466 103	27.10
52-53	0.00699	90 402	631	90 086	2 375 408	26.28
53-54	0.00761	89 771	684	89 430	2 285 322	25.46
54-55	0.00830	89 087	739	88 717	2 195 892	24.65
55-56	0.00902	88 348	797	87 950	2 107 175	23.85
56-57	0.00978	87 551	856	87 122	2 019 225	23.06
57-58	0.01059	86 695	919	86 236	1 932 103	22.29

Tablo 3.3.1
A.B.D 1979-81 Hayat Tablosu

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Yaş aralığı x-x+1	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
58-59	0.01151	85 776	987	85 283	1 845 867	21.52
59-60	0.01254	84 789	1063	84 258	1 760 584	20.76
60-61	0.01368	83 726	1145	83 153	1 676 326	20.02
61-62	0.01493	82 581	1233	81 965	1 593 173	19.29
62-63	0.01628	81 348	1324	80 686	1 511 208	18.58
63-64	0.01767	80 024	1415	79 316	1 430 522	17.88
64-65	0.01911	78 609	1502	77 859	1 351 206	17.19
65-66	0.02059	77 107	1587	76 314	1 273 347	16.51
66-67	0.02216	75 520	1674	74 683	1 197 033	15.85
67-68	0.02389	73 846	1764	72 964	1 122 350	15.20
68-69	0.02585	72 082	1864	71 150	1 049 386	14.56
69-70	0.02806	70 218	1970	69 233	978 236	13.93
70-71	0.03052	68 248	2083	67 206	909 003	13.32
71-72	0.03315	66 165	2193	65 069	841 797	12.72
72-73	0.03593	63 972	2299	62 823	776 728	12.14
73-74	0.03882	61 673	2394	60 476	713 905	11.58
74-75	0.04184	59 279	2480	58 039	653 429	11.02
75-76	0.04507	56 799	2560	55 520	595 390	10.48
76-77	0.04867	54 239	2640	52 919	539 870	9.95
77-78	0.05274	51 599	2721	50 238	486 951	9.44
78-79	0.05742	48 878	2807	47 475	436 713	8.93
79-80	0.06277	46 071	2891	44 626	389 238	8.45
80-81	0.06882	43 180	2972	41 694	344 612	7.98
81-82	0.07552	40 208	3036	38 689	302 918	7.53
82-83	0.08278	37 172	3077	35 634	264 229	7.11
83-84	0.09041	34 095	3083	32 553	228 595	6.70
84-85	0.09842	31 012	3052	29 486	196 042	6.32
85-86	0.10725	27 960	2999	26 461	166 556	5.96
86-87	0.11712	24 961	2923	23 500	140 095	5.61
87-88	0.12717	22 038	2803	20 636	116 595	5.29
88-89	0.13708	19 235	2637	17 917	95 959	4.99
89-90	0.14728	16 598	2444	15 376	78 042	4.70
90-91	0.15868	14 154	2246	13 031	62 666	4.43
91-92	0.17169	11 908	2045	10 886	49 635	4.17
92-93	0.18570	9 863	1831	8 948	38 749	3.93
93-94	0.20023	8 032	1608	7 228	29 801	3.71

Tablo 3.3.1
A.B.D 1979-81 Hayat Tablosu

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Yaş aralığı x-x+1	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	$\overset{o}{e}_x$
94-95	0.21495	6424	1381	5733	22573	3.51
95-96	0.22976	5043	1159	4463	16840	3.34
96-97	0.24338	3884	945	3412	12377	3.19
97-98	0.25637	2939	754	2562	8965	3.05
98-99	0.26868	2185	587	1892	6403	2.93
99-100	0.28030	1598	448	1374	4511	2.82
100-101	0.29120	1150	335	983	3137	2.73
101-102	0.30139	815	245	692	2154	2.64
102-103	0.31089	570	177	481	1462	2.57
103-104	0.31970	393	126	330	981	2.50
104-105	0.32786	267	88	223	651	2.44
105-106	0.33539	179	60	150	428	2.38
106-107	0.34233	119	41	99	278	2.33
107-108	0.34870	78	27	64	179	2.29
108-109	0.35453	51	18	42	115	2.24
109-110	0.35988	33	12	27	73	2.20

A.B.D için 1979-81 hayat tablosunda (Tablo 3.3.1) ${}_tq_x, l_x, {}_td_x$ fonksiyonları l_0=100,000 için gösterilmiştir. Burada t=1 alınmıştır. Bu tablo 100,000 kişinin doğumundan ölümüne kadar gözlem yapılarak inşa edilmemiştir. Bunun yerine 1980 yılları civarındaki ölüm olasılıkları dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Bu tablo ile tesadüfi canlılık grubu kavramı kullanılarak, bu tablonun çıkarılan olasılıklara uygun olduğu varsayılmıştır. Bu tablo hakkında bazı gözlemler yapılmıştır:

1) Yeni doğanların yaklaşık olarak %1 inin ilk yılda ölmesi beklenmektedir.

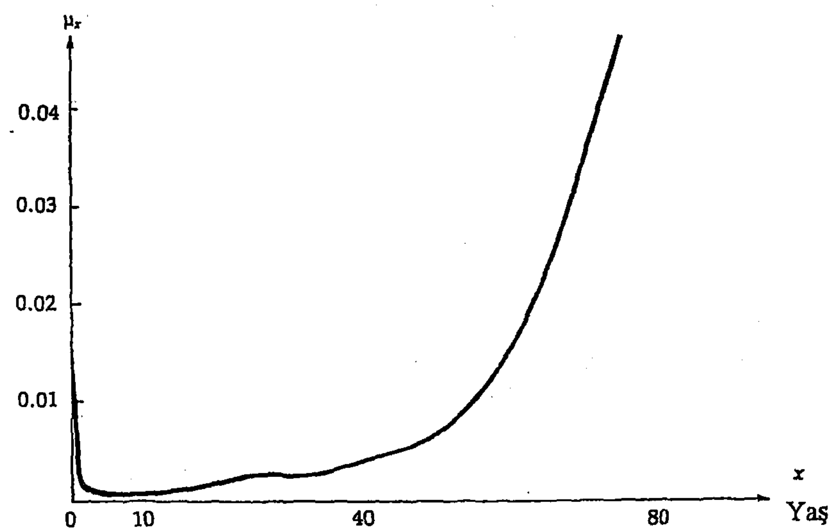
2) %77 si 65 yaşına kadar yaşayabilmektedir.

3) Maksimum ölüm sayısı 83 yaşında beklenmektedir.

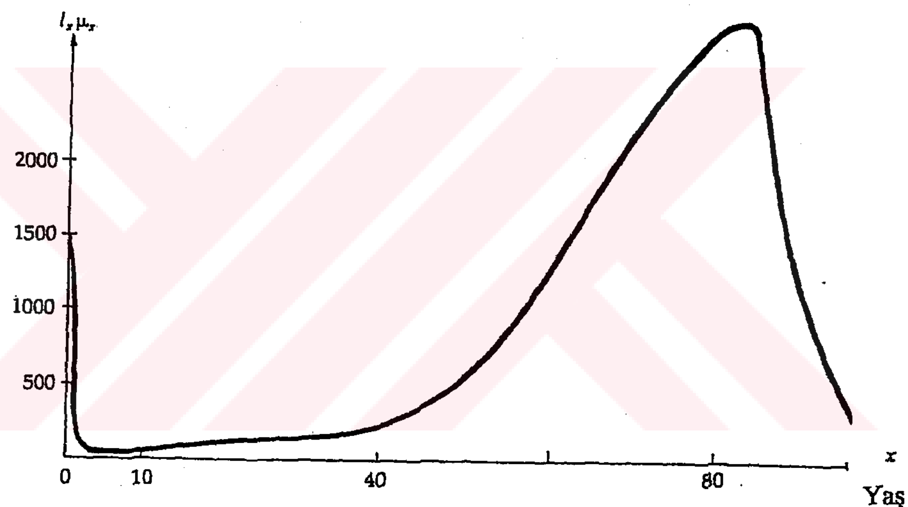
4) Limit yaşı tanımlanmamaktadır. Bir canlının 110 yaşına kadar yaşama olasılığı vardır. Fakat tablo $s(w)$=0 olan w yaşını göstermemektedir.

5) Beklenen ölüm sayılarının lokal minimum olduğu yaşlar 11 ve 27 dir.

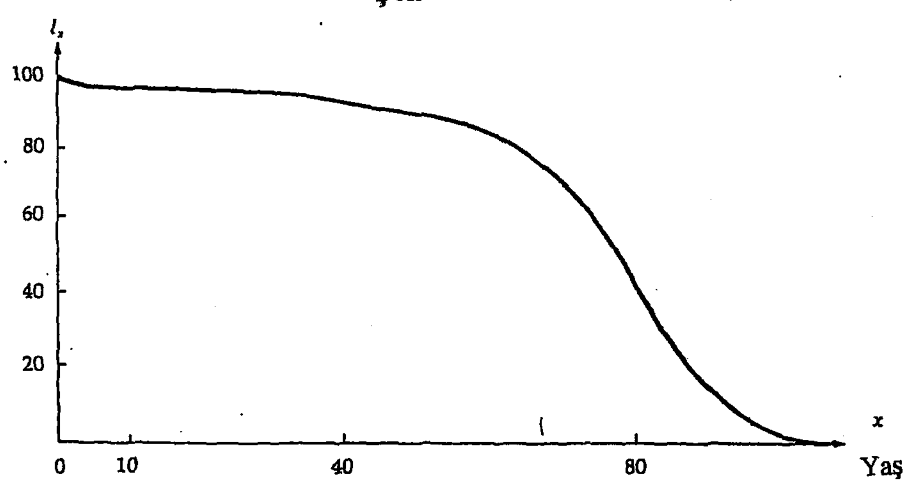
3.3.1, 3.3.2 ve 3.3.3 şekilleri yardımıyla hayat tablosu fonksiyonlarını daha iyi anlamak mümkündür.



μ_x'in grafiği
Şekil 3.3.1



$l_x\mu_x$'in grafiği
Şekil 3.3.2



l_x'in grafiği
Şekil 3.3.3

Şekil 3.3.1 den

1) Ölüm etkisinin pozitif ve $\int_0^\infty \mu_x dx = \infty$ koşulunu sağladığı görülmektedir.

2) Ölüm etkisi oldukça yüksek bir değerden başlar ve 10 yaş civarında bir minimum değere düşer.

Şekil 3.3.2 ve 3.3.3 den

1) $l_x \mu_x$ fonksiyonu yeni doğanların ölüm yaşının p.d.f. si ile orantılıdır. $l_x \mu_x$, x yaşında ölmenin beklenen yoğunluğu olduğundan $l_x \mu_x$ in grafiğine ölüm eğrisi de denebilir.

2) 10 yaşı civarında $l_x \mu_x$ in bir lokal minimumu vardır. Ölüm dağılımının modu, yani en çok ölüm olan yaş 80 civarındadır.

3) l_x fonksiyonu $s(x)$ e paraleldir. Bu, l_0 lık bir gruptan x yaşına kadar yaşayanların beklenen sayısını göstermektedir.

4) $\frac{d}{dx}(l_x \mu_x) = \frac{d}{dx}(-\frac{d}{dx} l_x) = -\frac{d^2}{dx^2} l_x$ den dolayı $l_x \mu_x$ in lokal ekstramum noktaları l_x in büküm noktalarına tekabül eder.

3.4 Deterministik Canlılık Grubu

Şimdi hayat tablosunun ikinci bir, probabilistik olmayan bir yorumu ele alınacak. Tabiatı itibariyle deterministik olan canlılık grubuna deterministik canlılık grubu denir ve aşağıdaki özelliklere sahip bir hayat tablosu ile belirlenir:

1) Grupta başlangıçta 0 yaşında l_0 canlı vardır.

2) Grup üyeleri, her yaş için yıllık azalma (veya ölüm) oranlarının etkisi altında kalmaktadır. Bu oran hayat tablosunda q_x değeri ile gösterilir.

3) Grup kapalıdır. Başlangıçtaki l_0 canlıdan başkasının gruba girmesine müsaade etmez. Ancak yıllık azalma oranının etkisiyle grupta azalma olur.

$$
\begin{aligned}
l_1 &= l_0(1-q_0) = l_0 - d_0 \\
l_2 &= l_1(1-q_1) = l_1 - d_1 = l_0 - (d_0 + d_1) \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
l_x &= l_{x-1}(1-q_{x-1}) = l_{x-1} - d_{x-1} = l_0 - \sum_{y=0}^{x-1} d_y \\
&= l_0 \left(1 - \frac{\sum_{y=0}^{x-1} d_y}{l_0} \right) = l_0(1 - {}_x q_0)
\end{aligned}
$$

burada l_x, x yaşında grupta yaşayanların sayısını göstermektedir. l_0 tarafından oluşturulan bu eşitlik zincirine radiks denir.

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0 p_0 \\ l_2 &= l_1 p_1 = (l_0 p_0) p_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\ l_x &= l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y = l_0 \, {}_x p_0 . \end{aligned}$$

Tablo 3.3.1'in q_x, l_x ve d_x başlıklı sütunları, deterministik canlılık grupları yorumuyla ilgilidir. Tesadüfi canlılık grubu ile deterministik canlılık grubunun matematiksel temelleri farklıdır. Sonuç fonksiyonları q_x, l_x ve d_x aynı matematiksel özelliklere sahiptir. Tesadüfi canlılık grup kavramı, bütün olasılık teorisini kullanmaya müsaade ettiğinden daha avantajlıdır. Deterministik canlılık grubu kavram olarak uygulanabilme bakımından daha basit ve kolaydır. Bununla beraber canlı sayısındaki tesadüfi değişme dikkate alınmaz.

Diğer hayat tablosu fonksiyonları

Teorem 3.4: T sürekli bir tesadüfi değişken ve onun dağılım fonksiyonu $G(t)$ olsun, öyle ki $G(0)=0$ ve p.d.f.si $G'(t)=g(t)$ olsun. $z(t)$ negatif olmayan , monoton , türevi olan bir fonksiyon ve $E[z(T)]$ mevcut olsun. Bu taktirde

$$E[z(T)] = \int_0^\infty z(t) g(t) dt = z(0) + \int_0^\infty z'(t)[1-G(t)]dt \ .$$

İspat: Kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned} \int_0^t z(s) g(s) ds &= -\int_0^t z(s) d[1-G(s)] \\ &= -z(s)[1-G(s)]\Big|_0^t + \int_0^t [1-G(s)] z'(s) ds. \end{aligned}$$

Eğer $\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)] = 0$ ise teorem ispatlanmış olur. İki durum incelensin:

a) $z(t)$ artmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde aşikar olarak

$$\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)] = 0$$

gerçekleşir.

b) $z(t)$ azalmayan olsun.

$$0 \le z(t)[1-G(t)] = z(t)\int_t^\infty g(s) ds \le \int_t^\infty z(s) g(s) ds \quad (\text{Yani } t \le s \Rightarrow z(t) \le z(s))$$

$E[z(T)]$ mevcut olduğu için $\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty z(s)g(s)ds = 0$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} z(t)[1-G(t)] = 0$ elde edilir.

Teorem 3.4 den $E[T(x)]$ için iki formül elde edilir. Bu beklenen değer $\overset{o}{e}_x$ ile gösterilir ve hayatın tam beklentisi olarak adlandırılır.

$$\Rightarrow \overset{o}{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t\,{}_tp_x \mu_{x+t} dt$$

Teorem 3.4 kullanılarak $z(t)=t$ ve $G(t) = 1-{}_tp_x$ için

$$\overset{o}{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

elde edilir. Ayrıca $z(t) = t^2$ için yine Teorem 3.4 kullanılarak

$$E[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2\,{}_tp_x \mu_{x+t} dt = 2\int_0^\infty t\,{}_tp_x dt$$

elde edilir. Bu sonuç $Var(T(x))$ in hesaplanmasında faydalıdır.

$$Var(T(x)) = 2\int_0^\infty t\,{}_tp_x dt - (\overset{o}{e}_x)^2 .$$

(Teorem 3.4 in bu uygulamalarında $E[T(x)]$ ve $E[T(x)^2]$ nin var olduğu kabul edildi. Bunun doğru olmadığı $s(x) = (1+x)^{-1}$ gibi yaşam fonksiyonları inşa edilebilir.)

$T(x)$ in dağılımı diğer karakteristikler tarafından belirlenebilir. (x) in medyan gelecek hayat zamanı $m(x)$ ile gösterilsin. Bu

$$\Pr[T(x) > m(x)] = \frac{1}{2}$$

veya

$$\frac{s(x+m(x))}{s(x)} = \frac{1}{2}$$

$m(x)$ e göre çözülerek bulunabilir. Özellikle $m(0)$ ı bulmak için $s[m(0)]=\frac{1}{2}$ çözülür.

Kesikli tesadüfi değişkenler için Teorem 3.4'e paralel bir teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.5: K kesikli tesadüfi değişkeni yalnız negatif olmayan tam sayılar için olasılığa sahip olsun. d.f.si $G(k)$ ve p.f. si $g(k) = \Delta G(k-1)$ olsun. $z(k)$ ise negatif olmayan , monoton bir fonksiyon ve $E[z(K)]$ mevcut olsun. Bu taktirde

$$E[z(K)] = \sum_{k=0}^{\infty} z(k)g(k) = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty}[1 - G(k)]\Delta z(k).$$

İspat:

$$\sum_{j=0}^{k-1} z(j)g(j) = -\sum_{j=0}^{k-1} z(j)\Delta[1 - G(j-1)]$$

$$= -z(j)[1 - G(j-1)]|_0^k + \sum_{j=0}^{k-1}[1 - G(j)]\Delta z(j)$$

Eğer $\lim_{k\to\infty} z(k)[1 - G(k-1)] = 0$ ise ispat gerçekleşmiş olur.

Şu iki hal göz önüne alınsın:

1) $z(k)$ artan olmasın , bu taktirde $\lim_{k\to\infty} z(k)[1 - G(k-1)] = 0$ gerçekleşmiş olur.
2) $z(k)$ azalan olmasın, bu taktirde

$$0 \le z(k)[1 - G(k-1)] = z(k)\sum_{j=k}^{\infty} g(j) \le \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j)$$

dir. Fakat $E[z(K)]$ mevcut olduğundan $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j) = 0$ dır. Böylece $\lim_{k\to\infty} z(k)[1 - G(k-1)] = 0$ gerçekleşmiş olur.

Eğer özel olarak K, (x) in gelecekteki yaşam süresinin tam kısmı ise Teorem 3.5'i kullanarak $z(k)=k$ için $E[z(K)] = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta z(k)_{k+1}p_x$ eşitliği ispat edilebilir. Buradan

$$E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x$$

elde edilir. $E[K] = e_x$ canlının x yaşından sonra tam kaç yıl yaşayacağının beklenen değerini verir ve beklenen yaşam süresinin tam kısmı (curtate expectation of life) diye adlandırılır. Sürekli değişkenlere ait modellere paralel olarak aşağıdakiler yazılabilir:

$$E[K^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1}p_x .$$

$$Var(K) = E[K^2] - E[K]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, {}_{k+1}p_x - e_x^2 .$$

l_0 başlangıç grubu canlıları tarafından x ile $x+1$ yaşları arasında yaşanan yılların toplam beklenen sayısı L_x ile gösterilsin.

$$L_x = \int_0^1 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt + l_{x+1} \qquad (3.4.1)$$

Burada integral x ve x+1 yaşları arasında ölenlerin yaşadığı yılları saymaktadır. l_{x+1} terimi ise x+1 yaşında canlı olanlar tarafından x ile x+1 yaşları arasında yaşanmış yılları saymaktadır. Kısmi integrasyonla

$$L_x = -\int_0^1 t dl_{x+t} + l_{x+1} = -t l_{x+t} |_0^1 + \int_0^1 l_{x+t} dt + l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t} dt \qquad (3.4.2)$$

T_x sembolü x yılının ardından yaşanan toplam yıl sayısını göstersin:

$$T_x = \int_0^\infty t l_{x+t} \mu_{x+t} dt = -\int_0^\infty t dl_{x+t} = \int_0^\infty l_{x+t} dt .$$

Son ifade l_{x+t} canlı tarafından $x+t$ ile $x+t+dt$ yaşları arasında yaşanan toplam zamanın integrali olarak yorumlanabilir. x yaşında bir kişinin gelecek hayat süresinin ortalama yıl sayısı cinsinden ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{T_x}{l_x} = \frac{\int_0^\infty l_{x+t} dt}{l_x} = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \overset{o}{e}_x$$

3.5 Kesirsel Yaşlar

Aktüeryal bilimde genişçe kullanılan üç kabul aşağıda ele alınacaktır. Bu kabuller canlılık fonksiyonu cinsinden ifade edilecektir. Burada x bir tam sayı ve $0 \le t \le 1$ dir. Kabuller şunlardır:

1) Ölümlerin düzgün dağılımı

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1) .$$

Bu durumda ${}_t p_x$ lineer bir fonksiyondur.

2) Ölümün etkisinin sabitliği

$$s(x+t) = s(x) e^{-\mu t} ,$$

burada $\mu = -\log p_x$ dir. Bu kabul altında ${}_t p_x$ üstel bir fonksiyonudur.

3) Balducci kabulü

$$\frac{1}{s(x+t)} = \frac{1-t}{s(x)} + \frac{t}{s(x+1)}$$

Bu kabul altında ${}_t p_x$ hiperbolik bir eğri gösterir.

Bu temel formüller yardımıyla diğer standart olasılık fonksiyonları hayat tablosunda kullanılan fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilirler. Bu sonuçlar Tablo 3.5.1 de ifade edilmiştir. Bu tabloda $0<t<1$, $0 \le y \le 1$, $y+t \le 1$ dir.

Tablo 3.5.1
Kesirsel yaşlar için olasılık fonksiyonları

	Kabuller		
Fonksiyon	Düzgün Dağılım	Sabit Etki	Balducci
${}_tq_x$	tq_x	$1-p_x^t$	$\frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
μ_{x+t}	$\frac{q_x}{1-tq_x}$	$-\log p_x$	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1-p_x^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_yq_{x+t}$	$\frac{yq_x}{1-tq_x}$	$1-p_x^y$	$\frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
${}_tp_x$	$1-tq_x$	p_x^t	$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tp_x\,\mu_{x+t}$	q_x	$-p_x^t \log p_x$	$\frac{p_xq_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$

Bu ölümlerin düzgün dağılımı için gösterilsin:

$$ {}_tq_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} \qquad 0 \le t \le 1, $$

$s(x+t)$ yerine kabuldeki eşiti konulsun.

$$ \Rightarrow {}_tq_x = \frac{s(x)-[(1-t)s(x)+ts(x+1)]}{s(x)} $$
$$ = \frac{t(s(x)-s(x+1))}{s(x)} = tq_x $$

2.ifade için (3.2.1) kullanılırsa ve $s(x+t)$ yerine yazılıp pay ve payda $s(x)$'e bölünürse

$$ \mu_{x+t} = \frac{[s(x)-s(x+1)]}{[(1-t)s(x)+ts(x+1)]} = \frac{q_x}{1-tq_x}. $$

elde edilir.
3. ifade $y=1-t$ için 4. ifadenin özel bir durumudur.
4.ifade için

$$ {}_yq_{x+t} = \frac{s(x+t)-s(x+t+y)}{s(x+t)} $$

de $s(x+t)$ ve $s(x+t+y)$ nin eşitlikleri yerine konulsun:

$$
\begin{aligned}
{}_y q_{x+t} &= \frac{[(1-t)s(x)+ts(x+1)]-[(1-t-y)s(x)+(t+y)s(x+1)]}{(1-t)s(x)+ts(x+1)} \\
&= \frac{y[s(x)-s(x+1)]/s(x)}{\{s(x)-t[s(x)-s(x+1)]\}/s(x)} \\
&= \frac{yq_x}{1-tq_x}.
\end{aligned}
$$

elde edilir. 5.ifade 1.nin tümleyenidir. Son ifade ise 2. ve 5. ifadelerin çarpımına eşittir.

x tam sayısı için yeni bir tesadüfi değişken $S=S(x)$, $T=K+S$ olarak tanımlansın. Burada T ölüme kadar geçen zamanı , K gelecekteki yaşam süresinin tam kısmı ve S ise ölüm yılında yaşanan kesirsel kısmı gösteren tesadüfi değişkendir.

$$
\begin{aligned}
\Pr[k < T \le k+s] &= \Pr[(K=k)\cap(S\le s)] \\
&= {}_{k|s}q_x \\
&= {}_k p_x \, {}_s q_{x+k}.
\end{aligned}
$$

Tablo 3.5.1 de gösterilen ölümlerin düzgün dağılımı kabulü altında

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Pr[(K=k)\cap(S\le s)] &= {}_k p_x \; s\, q_{x+k} \\
&= {}_{k|}q_x \; s \\
&= \Pr(K=k)\Pr(S\le s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla K ve S arasındaki birleşik olasılık K ve S nin ayrı olasılıklarına ayrılabilir. Buna göre ölümlerin düzgün dağılımı kabulü altında K ve S tesadüfi değişkenleri bağımsızdır.
$\Pr(S\le s)=s$, (0,1) üzerinde bir düzgün dağılımın d.f.si olduğundan S de düzgün dağılıma sahiptir.

Teorem 3.6: Ölümün etkisinin sabit olması kabulü altında K ve S tesadüfi değişkenlerinin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul p_{x+k}'nın, k dan bağımsız olmasıdır.

İspat: Tablo 3.5.1 den

$$
\begin{aligned}
\Pr[(K=k)\cap(S\le s)] &= {}_k p_x \; {}_s q_{x+k} \\
&= {}_k p_x \, [1-(p_{x+k})^s]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

1) K ve S tesadüfi değişkenleri bağımsız ise p_{x+k}, k dan bağımsızdır. Aksi taktirde p_{x+k}, k dan bağımsız olmasa K ve S nin birleşik olasılıkları ayrı olasılıklara ayrılamaz ve K, S den bağımsız değildir sonucu ortaya çıkar.

2) Eğer $p_{x+k} = p_x$ sabit ise

$$\Pr[(K = k) \cap (S \le s)] = p_x^k (1 - p_x^s) = \frac{(1 - p_x) p_x^k (1 - p_x^s)}{(1 - p_x)}$$
$$= \Pr(K = k) \Pr(S \le s).$$

bulunur. Buradan K ve S nin bağımsız olduğu sonucuna varılır.

3.6 Ölümün Analitik Kuralları

Ölümün veya hayat fonksiyonlarının bir analitik formunu postüle etmenin üç temel avantajı vardır. Birincisi felsefidir. Fizikte incelenen bir çok fenomen basit formüllerle etkili bir şekilde ifade edilirler. Bu yüzden biyolojik argümanlar kullanarak bazı yazarlar insan canlılığının da benzer şekilde basit kurallara uyduğunu ileri sürmüşlerdir. İkinci avantajı pratikliktir. Birkaç parametreye bağlı olan bir fonksiyonu anlatmak, 100 parametreli veya ölüm olasılıklı bir hayat tablosunu anlatmaktan daha kolaydır. Ayrıca , bazı analitik ifadeler birden fazla hayatı ilgilendiren olasılık ifadelerini hesaplama da uygun olan güzel özelliklere haizdir. Basit bir analitik hayat fonksiyonunun üçüncü avantajı, fonksiyonun birkaç parametresinin ölüm datasından kolayca hesaplanabilmesidir.

Basit analitik hayat fonksiyonlarına olan destek son yıllarda azalmıştır. Birçok insan, ölümün evrensel kurallarının olduğuna inanışın daha denenmediğini düşünmektedir. Bugünkü hızlı bilgisayarlar sayesinde, hesaplamada analitik fonksiyonların fazla bir önemi kalmadığı görüşündeler. Bununla beraber biyolojik argümanlar ölümün analitik ifadesi için bugünlerde bazı ilginç araştırmalarda tekrar kullanılmaktadır.

Tablo 3.6.1
Çeşitli kanunlar altında yaşam ve ölüm fonksiyonları

Kanun	μ_x	$s(x)$	sınırlamalar
De Moivre (1729)	$(w-x)^{-1}$	$1-\frac{x}{w}$	$0 \le x < w$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x-1)]$	$B>0, c>1, x \ge 0$
Makeham (1860)	$A+Bc^x$	$\exp[-Ax-m(c^x-1)]$	$B>0, A \ge -B, c>1, x \ge 0$
Weibull (1939)	kx^n	$\exp[-ux^{n+1}]$	$k>0, n>0, x \ge 0$

Tablo 3.6.1 de bazı analitik ölüm ve canlılık fonksiyonları verilmektedir. Bunları bulan kişiler ve yayın tarihleri beraber verilmektedir. Bu tabloda kullanılan bazı özel semboller ve ilgili sonuçlar şöyle yazılabilir:

* $m = \dfrac{B}{\log c}$, $u = \dfrac{k}{(n+1)}$.
* Gompertz in kuralı Makeham'ın kuralının A=0 için özel halidir.
* Gompertz ve Makeham kurallarında c=1 ise üstel dağılım elde edilir.
* Makeham kuralında A sabiti kaza ile ölümün riskini ifade ediyor ve Bc^x terimi ise yaşlanma rizikosunu ifade ediyor olarak yorumlanabilir.

Tablo 3.6.1 in $s(x)$ sütunundaki ifadeler ${}_xp_0 = s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds)$ eşitliğine yerleştirilerek elde edilebilir. Örneğin Makeham kuralı için

$$\begin{aligned} s(x) &= \exp[-\int_0^x (A+Bc^s)ds] \\ &= \exp[-Ax - B(c^x-1)/\log c] \\ &= \exp[-Ax - m(c^x-1)] \end{aligned}$$

elde edilir, burada $m = \dfrac{B}{\log c}$ dir.

3.7 Seçme ve Nihai Tablolar

Hayat tabloları kullanılan ayrıntılara göre ya ülkedeki toplam nüfus üzerinden ya da sigortalı kişiler üzerinden yapılırlar. Üç çeşit hayat tablosu incelenir: Seçme (select), Nihai (ultimate), ve Toplam (aggregate) hayat tabloları.

Seçme Tablolar:

Seçme tablolarda yaşam fonksiyonları iki değişkene bağlıdırlar. Birisi poliçenin yapıldığı (kişinin seçildiği) yaş, $[x]$, ve ikinci değişken poliçe esnasında geçen süre t dir. Bu yüzden kullanılan hayat tabloları iki boyutlu bir yapı gösterirler. [ ] gösterilişi seçilen yaşı ifade eder. Aşağıdaki tabloda 30 yaş grubu hakkında elde edilen özel bilgilerle $q_{[30]+i}$, $(i = 0,1,2,\ldots)$ olasılıkları 1.satıra yerleştirilmiştir.

Tablo 3.7.1
4 yıllık seçme periyodu için seçme, nihai ve toplam tablo

$[x]$	1.	2.	3.	4.	5.
[30]	$q_{[30]}$	$q_{[30]+1}$	$q_{[30]+2}$	$q_{[30]+3}$	$q_{[30]+4} \cong q_{34}$
[31]	$q_{[31]}$	$q_{[31]+1}$	$q_{[31]+2}$	$q_{[31]+3}$	$q_{[31]+4} \cong q_{35}$
[32]	$q_{[32]}$	$q_{[32]+1}$	$q_{[32]+2}$	$q_{[32]+3}$	$q_{[32]+4} \cong q_{36}$
[33]	$q_{[33]}$	$q_{[33]+1}$	$q_{[33]+2}$	$q_{[33]+3}$	$q_{[33]+4} \cong q_{37}$
[34]	$q_{[34]}$	$q_{[34]+1}$	$q_{[34]+2}$	$q_{[34]+3}$	$q_{[34]+4} \cong q_{38}$

2.satırda 31 yaşında olan kişiler hakkında elde edilen özel bilgilerle hesaplanan ölüm olasılıkları yani $q_{[31]+i}$, $(i=0,1,2,\ldots)$ yer almaktadır. Bu şekilde elde edilen tabloya seçme hayat tablosu denir.

Seçme ve Nihai Tablolar:

Seçme tablosunda aynı yaşa gelen farklı olasılıklar söz konusudur. Eğer $\forall j>0$ ve her $[x]$ için $\left|q_{[x]+r}-q_{[x-j]+r+j}\right|$ farkı belirli bir pozitif sabitten küçük kalacak şekilde en küçük bir r tamsayısı mevcutsa, varolan iki boyulu seçme tablosunun $r+1$. sütundan sonraki parçasını kesip atmak suretiyle bir seçme ve nihai tablo elde edilmiş olunur. İlk r yıllık süreye seçme periyodu denir. Buna göre $q_{[x-j]+r+j} \cong q_{[x]+r}$, $(j>0)$ ifadesi geçerli olur. Nihai tabloda belirli yaş için ölüm olasılığı olarak $q_{[x]+r} \cong q_{x+r}$ alınabilir.

Toplam Tablo:

Hayat fonksiyonlarının yalnız yaşa bağlı olarak ifade edildiği hayat tablolarına toplam tablo denir. Seçme ve nihai tablonun son sütunu özel bir toplam tablodur. Buna ekseri nihai tablo adı verilir. Bu konuda yapılmış gerçek bir tablo olarak 1979-1982 yılları arasında yayınlanan AF80 tablosunu verilebilir. Bu tablodan alınmış bir kesit Tablo 3.7.2 olarak aşağıda verilmektedir.

Tablo 3.7.2
AF80 seçme ve nihai tablosundan bir kısım

$[x]$	(1) $1{,}000\,q_{[x]}$	(2) $1{,}000\,q_{[x]+1}$	(3) $1{,}000\,q_{x+2}$	(4) $l_{[x]}$	(5) $l_{[x]+1}$	(6) l_{x+2}	(7) $x+2$
30	0.222	0.330	0.422	9906.7380	9904.5387	9901.2702	32
31	0.234	0.352	0.459	9902.8941	9900.5769	9897.0919	33
32	0.250	0.377	0.500	9898.7547	9896.2800	9892.5461	34
33	0.269	0.407	0.545	9894.2903	9891.6287	9887.6028	35
34	0.291	0.441	0.596	9889.4519	9886.5741	9882.2141	36

Bu tablo 2 yıllık seçme periyoduna sahiptir. Bu tabloda 32 yaşı için üç ayrı ölüm olasılığı görülmektedir. Bu olasılıklar arasında

$$q_{[32]}=0.000250<q_{[31]+1}=0.000352<q_{32}=0.000422.$$

sıralanış aşikardır. Hayat sigortası yaptırdıktan sonra ölüm olasılığı hemen azalmaktadır. Bu tablodaki 3.sütun nihai ölüm olasılıkları olarak göz önüne alınabilir.

Bölüm 4

Hayat Sigortası

Hayat sigortası kişinin ölümü halinde geride bıraktığı kişilerin uğrayacağı kayıpların riskini büyük sayıda bir grup insanla paylaşmasıdır. Riskin paylaşılması genellikle bir sigorta şirketi aracılığı ile olur ve hayat sigortası, kişinin ölümü halinde yakınlarına belirli bir miktar paranın ödenmesini sağlar. Bu miktara tazminat (benefit) denir.

Bu bölümde tesadüfi vakitsiz ölümlerin finansal etkisini azaltmak için düzenlenen hayat sigortaları modelleri ele alınacaktır. Bu tür sigortaların uzun zamanlı olması nedeni ile ödeme zamanına kadar olan yatırım kazançlarının tutarı bir belirsizlik elemanı oluşturmaktadır. Bazı sigortalarda hasar talebinin ortaya çıkışı ve büyüklüğü belirlidir, model içinde hasar talebinin sadece zamanı belirsizdir. Bu bölümde incelenen hayat sigortalarında ödemelerin büyüklüğü ve zamanı yalnız sigortalının ölüm zamanına bağlıdır. Diğer bir deyişle model T nin, yani sigortalının gelecekteki hayat zamanının bir fonksiyonu olarak, inşa edilmektedir.

Bu bölümde her şey canlıların sigortası üzerine inşa edilmektedir. Bununla beraber kullanılan fikirler diğer objeler içinde, örneğin; makineler, ücretler ve iş kazaları içinde aynıdır. Gerçekte genel model, finansal kayıpların büyüklüğü ve zamanının, yalnız tesadüfi olayın zamanına bağlı olarak ifade edilebildiği hallerde faydalıdır.

4.1 Ölüm Anında Ödenebilir Sigortalar

Bir hayat sigorta tazminatının ödenme zamanı ve miktarı, sigorta başlangıcından sigortalının ölümüne kadar geçen zaman aralığına bağlıdır. Modelde b_t tazminat fonksiyonunu, v_t ise iskonto fonksiyonunu gösterir. v_t fonksiyonu ödeme zamanından geriye doğru poliçe başlangıç zamanına kadar geçen faiz iskonto faktörüdür. t ise poliçe başlangıcından ölüme kadar olan zaman aralığını göstermektedir. Bu bölümde, ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigortada t süresi poliçe başlangıcından ödemeye kadar geçen süreden daha büyük ve eşit olabilir. İskonto fonksiyonu için faiz etkisinin deterministik olduğu kabul edilecek, yani model faiz etkisi için bir olasılık dağılımı içermeyecek.
z_t ile şimdiki değer fonksiyonunu gösterilsin:

$$z_t = b_t v_t$$

yani z_t, ödenecek olan tazminatın poliçe başlangıcındaki değeridir. Poliçe başlangıcından sigortalının ölümüne kadar geçen zaman sigortalının gelecek hayat zaman tesadüfi değişkeni $T=T(x)$ dir. Böylece tazminat değerinin poliçe başlangıcındaki değeri bir z_T tesadüfi değişkenidir. Bu tesadüfi değişken Z ile gösterilsin. Model

$$Z = b_T v_T$$

eşitliğine dayanmaktadır.

Hayat sigortası analizinin ilk adımı b_t ve v_t nin tanımlanmasıdır. Ondan sonraki adımda, Z nin olasılık dağılımının bazı karakteristiklerini belirlemek olacaktır. Bu karakteristikler T nin kabul edilen dağılımının sonuçlarıdır. Bu adımlar birkaç geleneksel sigorta için yapılacak.

***n* Yıl Süreli Hayat Sigortası (Level Benefit Insurance)**

n yıllık hayat sigortası, sadece sigortalının poliçe tarihinden itibaren n yıl içinde ölürse ödeme yapmayı tahakkuk eder. Eğer (x) in ölümü halinde bir birimlik ödeme yapılırsa

$$b_t = \begin{cases} 1, & t \le n \\ 0, & t > n \end{cases} \quad ; \quad v_t = v^t \ , \ t \ge 0 \quad ; \quad Z = \begin{cases} v^T, & T \le n \\ 0 \ , & T > n \end{cases}$$

dir. Bu tanımlar iki kabulü varsayarlar: Birincisi, gelecek hayat zamanı negatif olmayan bir değişken olduğundan, b_t, v_t ve Z sadece negatif olmayan değerler için tanımlanır. İkincisi, b_t nin 0 olduğu bir t değeri için v_t nin değeri söz konusu olmaz. Bu nedenle, v_t nin tanımı uygun olduğu zaman kullanılır.

Z nin beklenen değerine net tek prim denir. Buna net denir çünkü diğer yüklemeler burada eklenmemiştir. Ayrıca yıllık, yarıyıllık, aylık gibi primlerden farklı olarak tek bir primdir. Bu daha kesin olarak "ödemelerin şimdiki değerlerinin bekleneni" şeklinde ifade edilebilir.

n yıllık ve (x) in ölümü anında bir birim ödemeli sigortanın net tek primi $E[Z]$ olup $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ ile gösterilir. Bu $E[Z] = E[z_T]$ olarak hesaplanabilir. Bu taktirde T nin 3. bölümde verilen p.d.f. si kullanılarak

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = E[z_T] = \int_0^{\infty} z_T f_T(t) dt = \int_0^{n} v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

yazılır. Z nin dağılımının j.momenti

$$E[Z^j] = \int_0^{n} (v^t)^j \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{n} e^{-(\delta j)t} \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

ile hesaplanır. İkinci integralden şu elde edilir: Z nin j.momenti, aynı zamanda (x) in ölümü halinde bir birim ödemeli n yıllık sigortanın, verilen faiz etkisinin j katına eşit faiz etkisi kullanılarak elde edilen net tek primdir. Yüksek momentlerin bu özelliği genel olarak bir birim ödemeli sigortalarda faiz etkisi deterministik ise geçerlidir. Aşağıdaki teoremde bunun için yeter bir şart ifade edilir.

Teorem 4.1: (x) üzerine yapılan bir hayat sigortası için t zamanında faiz etkisi δ_t ve tazminat ve iskonto fonksiyonları b_t ve v_t olsun. Her t için $b_t^j = b_t$ ise, δ_t faiz etkisinde hesaplanan $E[Z^j]$ değeri, j>0 için $j\delta_t$ faiz etkisinde hesaplanan $E[Z]$ değerine eşittir. Yani

$$E[Z^j]@\delta_t = E[Z]@j\delta_t$$

İspat:

$$\begin{aligned} E[Z^j] &= E[(b_T v_T)^j] \\ &= E[b_T^j v_T^j] \\ &= E[b_T v_T^j] \end{aligned}$$

Genel olarak $v_t = \exp(-\int_0^t \delta_s ds)$ dir. Burada t zamanı poliçe başlangıcı ile sigortalının ölümü arasında geçen zamandır.

$$\Rightarrow v_t^j = \exp(-\int_0^t j\delta_s ds)$$

Bu ise $j\delta_t$ faiz etkisi altında v_t yi verir.

Teorem 4.1 den $Var(Z)={}^2\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}^1_{x:\overline{n}|})^2$ elde edilir. Burada ${}^2\overline{A}^1_{x:\overline{n}|}$, 2δ faiz etkisinde hesaplanan n yıllık ve bir birim ödemeli sigorta için net tek primi göstermektedir. Teorem 4.1 , t ölüm anında ödemenin yapıldığı sigortalar için ispat edildi. Bu teorem, ödemenin ölüm anının bir fonksiyonu olan bir zamanda da ödenmesi haline de genişletilebilir.

Tam Hayat Sigortası

Tam hayat sigortası, sigortalının gelecekte herhangi bir zamanda ölümü halinde ödeme yapar. (x) in ölümü halinde ödeme bir birim olsun, bu taktirde

$$\begin{aligned} b_t &= 1,\ t \geq 0 \\ v_t &= v^t, t \geq 0 \\ Z &= v^T, T \geq 0 \end{aligned}$$

dır. Net tek prim

$$\overline{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x \mu_{x+t} dt.$$

x yaşında seçilmiş şu an x+h yaşında olan bir canlı için net tek prim şöyledir:

$$\overline{A}_{[x]+h} = E[Z] = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_{[x]+h} \mu_{x+h+t} dt$$

Tam hayat sigortası n yıl süreli sigortanın $n \to \infty$ için limit halidir.

Örnek 4.1: 100 bağımsız canlıdan her biri

* x yaşında
* $\mu = 0.04$ sabit ölüm etkisine haiz
* Ölüm anında ödenecek olan 10 birimlik tazminatla sigortalanmış olsunlar.

Tazminat ödemeleri $\delta = 0.06$ kazandıran bir yatırım fonundan çekilerek yapılacaktır. t=0 anında elde en az ne kadar fon olmalıdır ki her bir bireyin ölümü halinde yeterli fon 0.95 olasılıkla temin edilmiş olabilsin?

Çözüm: Her bir hayat için

$$b_t = 10 \quad , t \geq 0$$
$$v_t = v^t \quad , t \geq 0$$
$$Z = 10 v^T , \; T \geq 0$$

dır. Sigortalılar numaralanırsa, bütün ödemelerin t=0 için şimdiki değeri

$$S = \sum_{j=1}^{100} Z_j$$

Burada Z_j, j. hayatın ölümü halinde yapılacak ödemenin t=0 anındaki şimdiki değeridir. Ortalama değer ve varyansı hesaplamak için, Z, bir birimlik ödemeli tam hayat sigortasının şimdiki değerinin 10 katıdır. Sabit faiz etkisi δ ve ölüm etkisi μ için bir birim ödemeli tam hayat sigortasının net tek primi

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu \, dt = \frac{\mu}{\mu + \delta}.$$

Bu örnek için $$E[Z] = 10\overline{A}_x = (10)(\frac{0.04}{0.1}) = 4$$

$$E[Z^2] = 10^2 \, {}^2\overline{A}_x = 100 \frac{0.04}{0.04 + 2(0.06)} = 25$$

$$\Rightarrow Var(Z) = 9.$$

$E[S] = 100(4) = 400$, $Var(S) = 100(9) = 900$ bulunur.

Analitik olarak istenilen minimum miktar h için

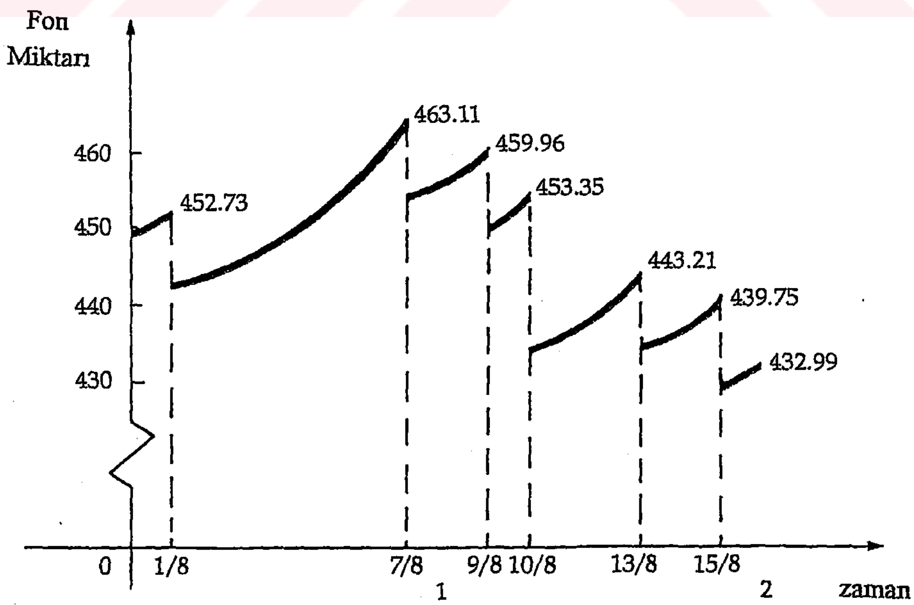
$$\Pr(S \leq h) = 0.95$$

veya buna denk olarak

$$\Pr\left(\frac{S - E[S]}{\sigma(S)} \leq \frac{h - 400}{30}\right) = 0.95$$

olmalıdır. Normal dağılımı kullanarak $\frac{h-400}{30} = 1.645 \Rightarrow h = 449.35$ elde edilir.
Başlangıç fonu 449.35 ile bütün ödemelerin şimdiki değerlerinin beklenen değeri 400 arasındaki fark 49.35 olup, bu risk yüklenmesinden kaynaklanmaktadır. Hayat başına yüklenme miktarı 0.4935 dir veya net tek primin %12.34 dür veya birim ödeme başına %4.935 dir.

Bu örnekte, 2.bölümde olduğu gibi S nin olasılık dağılımına bir normal yaklaşım kullanılmaktadır. Kısa periyotlu örneklerde, toplanan gelir beklenen hasar talebi artı risk yüklemesine eşit idi. Bu toplam gelir, hasar taleplerinin aşırı olması olasılığı altında belirlenmiştir. Uzun periyotlu hayat sigortası örneğinde, toplanan gelir artı faiz geliri tazminat ödemelerini örtmeye yetecek miktarda belirlenmiştir. Başlangıç fonu, 449.35, muhtemel olan 1000 lik ödemenin %45 ini örtmekten daha azdır. Fondaki ilk iki yıldaki ödeme şeması aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.(Şekil 4.1.1) Burada 1/8, 7/8, 9/8, 13/8 ve 15/8 zamanlarında 1 ölüm ve 10/8 de 2 ölüm olması farzedilmiştir. Sıçrama noktaları ile temsil edilen tazminat ödemeleri arası, $\delta = 0.06$ ile fonun büyümesini karakterize eden üstel eğrilerdir.



Fon için gelir grafiği
Şekil 4.1.1

n Yıllık Vade Sonu Ödenen Sigorta (Pure Endowment Insurance)

n yıllık vade sonu ödenen sigortada, eğer sigortalı, sigorta başlangıcından n yıl sonra yaşarsa, kendisine ödeme yapılır. Ödenen miktar 1 birim ise

$$b_t = \begin{cases} 0 & , t \le n \\ 1 & , t > n \end{cases} ; \qquad v_t = v^n \quad , t \ge 0 \qquad ; \qquad Z = \begin{cases} 0 & , T \le n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

Vade sonu ödenen sigortada belirsiz eleman yalnız bir hasar talebinin ortaya çıkıp çıkmamasıdır. Ödemenin büyüklüğü ve zamanı, hasar talebinin ortaya çıkması halinde önceden belirlenmiştir. Bunun için net tek prim $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ ile gösterilir. $Z = v^n Y$ ifadesindeki Y, $x+n$ yaşında canlı olma olayının göstergesidir. Eğer sigortalı $x+n$ de yaşarsa Y nin değeri 1, aksi taktirde 0 dır.

$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = E[Z] = v^n E[Y] = v^n \, {}_n p_x$ ve $Var(Z) = v^{2n} Var(Y) = v^{2n} \, {}_n p_x \, {}_n q_x = {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} - (A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})^2$.

n Yıllık Ölüm Halinde ve Vade Sonunda Ödenen Sigorta (Endowment Insurance)

n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta ise sigorta başlangıcından n yıl içinde sigortalı ölürse varislere veya n yıl sonunda sigortalı yaşarsa kendisine bir ödeme yapılır. Eğer sigorta ödemesi 1 birim ise ve ölüm tazminatı ölüm anında ödenebilir ise

$$b_t = 1 \ , \ t \ge 0 \ , \ v_t = \begin{cases} v^t & , t \le n \\ v^n & , t > n \end{cases} , \quad Z = \begin{cases} v^T & , T \le n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

dir. Bu halde net tek prim $\bar{A}_{x:\overline{n|}}$ ile gösterilir. Bu sigorta, n yıllık sigorta ile n yıllık vade sonu ödenen sigortanın kombinasyonu olarak düşünülebilir. Z_1, Z_2, Z_3 ile sırasıyla n yıllık süreli, n yıllık vade sonu ve n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigortanın şimdiki değerlerinin tesadüfi değişkenlerini göstersin. Daha önceki tanımlardan

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & , T \le n \\ 0 & , T > n \end{cases} ; \quad Z_2 = \begin{cases} 0 & , T \le n \\ v^n & , T > n \end{cases} ; \quad Z_3 = \begin{cases} v^T & , T \le n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_3 = Z_1 + Z_2$$

Her iki tarafın beklenen değeri hesaplanırsa

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \tag{4.1.1}$$

elde edilir. n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta için $b_t = 1$ olduğundan teorem 4.1 kullanılarak

$$E[Z_3^j]@\delta = E[Z_3]@j\delta .$$

$$Var(Z_3) = {}^2\overline{A}_{x:\overline{n}|} - (\overline{A}_{x:\overline{n}|})^2 \tag{4.1.2}$$

elde edilir. $Var(Z_3)$ ü hesaplamak için $Z_3 = Z_1 + Z_2$ eşitliği kullanılırsa

$$Var(Z_3) = Var(Z_1) + Var(Z_2) + 2Cov(Z_1, Z_2).$$

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ formülü yardımıyla ve her T için $Z_1 Z_2 = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$Cov(Z_1, Z_2) = -E[Z_1]E[Z_2] = -\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} .$$

elde edilir. Bu sonuçlar yerine konulursa $Var(Z_3)$ için bir formül elde edilmiş olur. Net tek primler pozitif olduklarından $Cov(Z_1, Z_2)$ negatiftir. Bu beklenen bir şeydir, çünkü biri 0 iken diğeri pozitif bir sayıdır. Diğer taraftan Z_1 ve Z_2 nin korelasyon katsayıları -1 değildir, çünkü birbirlerinin kesin lineer fonksiyonları değildir.

Ertelenmiş Hayat Sigortası

m yıllık ertelenmiş sigorta, sigortalının poliçe başlangıcından ez az m yıl sonra ölümü halinde ödeme yapar. m yıl ertelenmiş ve ölüm anında birim miktar ödemeli tam hayat sigortasında

$$b_t = \begin{cases} 1 & , \ t > m \\ 0 & , \ t \le m \end{cases} \quad ; \quad v_t = v^t \quad , \quad t > 0 \quad ; \quad Z = \begin{cases} v^T & , \ T > m \\ 0 & , \ T \le m \end{cases}$$

bunun net tek primi ${}_{m|}\overline{A}_x$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$${}_{m|}\overline{A}_x = \int_m^{\infty} v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt .$$

Değişken Tazminatlı Hayat Sigortası

Yıllık bir şekilde artan tam hayat sigortası; birinci yılda ölüm halinde 1 birim ödeme, ikinci yıl ölüm halinde 2 birim ödeme ve bu şekilde devam eden bir artan tam hayat sigortasıdır. Bu sigorta aşağıdaki fonksiyonlarla ifade edilebilir:

$$b_t = [t+1] \ , \ t \ge 0 \quad ; \quad v_t = v^t \ , \ t \ge 0 \quad ; \quad Z = [T+1]v^T \ , \ T \ge 0$$

(Burada köşeli parantez tam değer fonksiyonudur. $[t]$=k , $k \le t < k+1$, $k = 0, \mp 1, \ldots$)

Böyle bir sigortanın net tek primi

$$(I\bar{A})_x = E[Z] = \int_0^\infty [t+1] v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt\,.$$

Artma oranları bir yıl olduğu gibi $1/m$ yılda bir de olabilir. m artışlı tam hayat sigortasında, birinci $1/m$ yılda ölüm halinde ödenen tazminat $1/m$; ikinci $1/m$ yılda ölüm halinde ödenen tazminat $2/m$ ve bu şekilde $1/m$ yıl için tazminat $1/m$ artırılır. Böyle bir sigortanın fonksiyonları

$$b_t = \frac{[tm+1]}{m} \quad , \; t \geq 0 \; ; \; v_t = v^t \quad , \; t \geq 0 \; ; \; Z = \frac{v^T [Tm+1]}{m} \quad , \; T \geq 0$$

dır. Net tek prim ise aşağıdaki şekildedir:

$$(I^{(m)}\bar{A})_x = E[Z]$$

$m \to \infty$ için limit halinde bu sigorta, t anında ölüm halinde t ödemesi yapan bir sigortaya dönüşür. Bunun fonksiyonları

$$b_t = t \quad , \; t \geq 0 \; ; \qquad v_t = v^t \quad , \; t \geq 0 \qquad ; \; Z = Tv^T \quad , \; T \geq 0\,.$$

bunun net tek prim sembolü $(\bar{I}\,\bar{A})_x$ dir. Bu şekilde sürekli olarak artan tam hayat sigortası bir takım ertelenmiş tam hayat sigortaları kümesine denktir. Bu denklik teminatlar için net tek primlerin eşit olduğunu gösterir. Bu denklik aşağıdaki gibi gösterilebilir. Tanımdan

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^\infty t v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

integraldeki t, 0 dan t ye kadar integral alınarak yazılırsa

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^\infty \left(\int_0^t ds \right) v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

integrallerin sırası değiştirilirse her bir s değeri için t üzerinden s den ∞ kadar integre edilirse

$$(\bar{I}\,\bar{A})_x = \int_0^\infty \int_s^\infty v^t\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt ds = \int_0^\infty {}_{s|}\bar{A}_x ds$$

elde edilir.

Eğer m li artışlı hayat sigortasında tazminat ödemesi ölümün n yıl içinde olması halinde yapılırsa, sigorta bir artan n yıllık hayat sigortası olur. Artan n yıllık hayat sigortasının tümleyeni olarak azalan n yıllık hayat sigortası söz konusudur. Bu sigortada birinci yılda ölüm halinde n birim ödeme, ikinci yılda ölüm halinde n-1 birim ödeme yapılır. Bu şekilde azalarak teminat n. yıl sonunda sona erer. Böyle bir sigortanın fonksiyonları şunlardır:

$$b_t = \begin{cases} n-[t] & , t \le n \\ 0 & , t > n \end{cases} \quad ; \quad v_t = v^t \quad , \quad t > 0 \quad ; \; Z = \begin{cases} v^T(n-[T]) & , T \le n \\ 0 & , T > n \end{cases}$$

Bu sigortanın net tek primi aşağıdaki şekildedir:

$$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t (n-[t])_t p_x \mu_{x+t} dt$$

Bu sigorta ile n yıllık artan sigortanın toplamı n yıl için toplam tazminatı n+1 olan bir sigortaya dönüşür.

4.2 Ölüm Yılının Sonunda Ödenebilir Sigortalar

Şimdiye kadar kullanılan modeller T cinsinden inşa edildiler. Buna göre ödeme ölüm anında yapılmaktaydı. Fakat bir çok hayat sigortalarında T nin dağılımı kesikli hayat tabloları şeklinde verilmektedir, yani K nın dağılım olasılığı cinsinden verilmektedir. Bu boşluğu doldurmak için kullanılacak modelde, ölüm tazminatı ödemesinin büyüklüğü ve zamanı, sigortalının poliçe başlangıcından ölüm zamanına kadar geçen tamamlanmış yıl sayısına bağlı olacaktır. Buna ölüm yılı sonunda ödenebilir sigortalar denir.

Model, sigortalının gelecekteki yaşam süresinin tam kısım fonksiyonuna bağlı olacaktır. Eğer sigortalı, sigortanın k+1 . yılında ölürse b_{k+1} tazminat fonksiyonu ve v_{k+1} iskonto fonksiyonu, ödeme zamanından poliçe başlangıç zamanına kadar olan periyoda bağlıdır. k ise sigortalının gelecekteki yaşam süresinin tam kısmını göstermektedir. Bu tazminat ödemesinin poliçe başlangıcındaki değeri olan z_{k+1} için

$$z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1}$$

yazabilir. z_{K+1} tesadüfi değişkeni tekrar Z ile gösterilecek.

Ölüm yılının sonunda bir birim ödemeyi temin eden n yıllık sigorta için

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & , \; k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ 0 & , \; d.y. \end{cases} \quad ; \quad v_{k+1} = v^{k+1} \quad ; \quad Z = \begin{cases} v^{k+1} & , K = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & , d.y. \end{cases}$$

Bu sigorta için net tek prim

$$A^1_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \,.$$

Teorem 4. 1 , uygun değişiklikler yapılarak ölüm yılı sonunda ödenen sigortalar için de geçerli hale getirilir. Örneğin yukarıdaki n yıllık sigorta için

$$Var(Z) = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2$$

olup, burada ${}^2A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\,{}_kp_x q_{x+k}$ dır. (x) için tam hayat sigortası modeli $n \to \infty$ için yapılarak elde edilir. Bunun net tek primi ise $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x q_{x+k}$ olarak elde edilir.

$$\Rightarrow l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k}$$

Bu eşitlik poliçe başlangıç zamanındaki bir dengeyi göstermektedir. Bu denge, x yaşında sigortalı l_x canlı için toplam net tek prim ile onların beklenen ölümleri halinde ödenecek fonu arasındadır.

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \qquad (4.2.1)$$

ifadesi, r. sigorta yılından sonraki beklenen ölümler için yapılacak ödemelerin başlangıçtaki değerini göstermektedir. Fonda r yıl sonra yığılması beklenen değer

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1} d_{x+k}$$

dır. Çünkü yukarıdaki beklenen değer (4.2.1) r yıl sonrasına yığılırsa

$$v^{-r}\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} = \sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1} d_{x+k}$$

elde edilir. Bu ifade ile $l_x A_x$ ifadesi karşılaştırılırsa bunun $l_{x+r}A_{x+r}$ olduğu görülür. Bu miktar ile gerçek fon arasındaki fark, gerçek ölümlerin hayat tablosundan hesaplanan beklenen ölümlerden sapmalarından ve gerçek faiz gelirlerinin kabul edilmiş orana göre yapılan faiz gelirlerinden sapmalarından dolayıdır.

Örnek 4.2: 30 yaşında 100 canlıdan oluşan bir grup için, ölüm yılı sonunda her biri için 1,000 ödeme yapılacak şekilde bir fon kurulmaktadır. Bunun için karşılıklı yapılan anlaşmaya göre faiz oranı %6 esas alınarak hazırlanan hayat tablosuna ([9], sayfa 678-680) göre hesaplanan tam hayat sigortası net tek primi ödenecektir. Fonun gerçek deneyimi ikinci ve beşinci yıllarda 1 er ölümdür. Gerçek faiz oranı ise birinci yılda %6; 2.ve 3. yıllarda %6½; 4. ve 5.yıllarda %7 dir. 5 yıl sonunda fonun plana göre hesaplanan beklenen büyüklüğü ile gerçek fon arasındaki fark nedir?

Çözüm: $1{,}000A_{30} = 102.4835$. 100 canlı için fon 10,248.35 ile başlıyor. Ayrıca $A_{35} = 0.1287194$ ve $l_{35}/l_{30} = 0.9915040$.
30 yaşındaki 100 canlı için fonda 5 yıl sonra beklenen miktar

$$(1{,}000)(100)\frac{l_{35}}{l_{30}}A_{35} = 12{,}762.58.$$

dir ve gerçek fonun gelişimi ise şöyle olacaktır:

$$k = 0 \Rightarrow F_0 = 10{,}248.35.$$
$$k = 1 \Rightarrow F_1 = (10{,}248.35)(1.06) = 10{,}863.25$$
$$k = 2 \Rightarrow F_2 = (10{,}863.25)(1.065) - 1{,}000 = 10{,}569.36$$
$$k = 3 \Rightarrow F_3 = (10{,}569.36)(1.065) = 11{,}256.37$$
$$k = 4 \Rightarrow F_4 = (11{,}256.37)(1.07) = 12{,}044.32$$
$$k = 5 \Rightarrow F_5 = (12{,}044.32)(1.07) - 1{,}000 = 11{,}887.42.$$

Böylece istenilen fark 12,762.58-11,887.42=875.16.

Bu yatırım ve ölüm tecrübesinin 5 yıllık periyot için toplam bir sonucudur. Faiz artışlarından yatırım gelirlerinin fazla olması gerekirken, 5 yılda 0.8496 oranında olması beklenen ölüm sayısı 2 olarak gerçekleşmiştir. Bu da beklenenden fazla kayıplara neden olmuştur.

Ölüm yılının sonunda ödenebilen 1 birimli n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta bu paragrafin n yıllık sigortası ile daha önceki paragrafta incelenen bir birim ödemeli n yıllık vade sonu sigortanın bir kombinasyonudur. Bunun için fonksiyonlar aşağıda olduğu gibidir:

$$b_{k+1} = 1 \quad , \quad k = 0,1,\ldots$$
$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & , \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ v^n & , \quad k = n, n+1,\ldots \end{cases}$$
$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & , \quad K = 0,1,\ldots,n-1 \\ v^n & , \quad K = n, n+1,\ldots \end{cases}$$

Bunun net tek primi

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k} + v^n\, {}_n p_x.$$

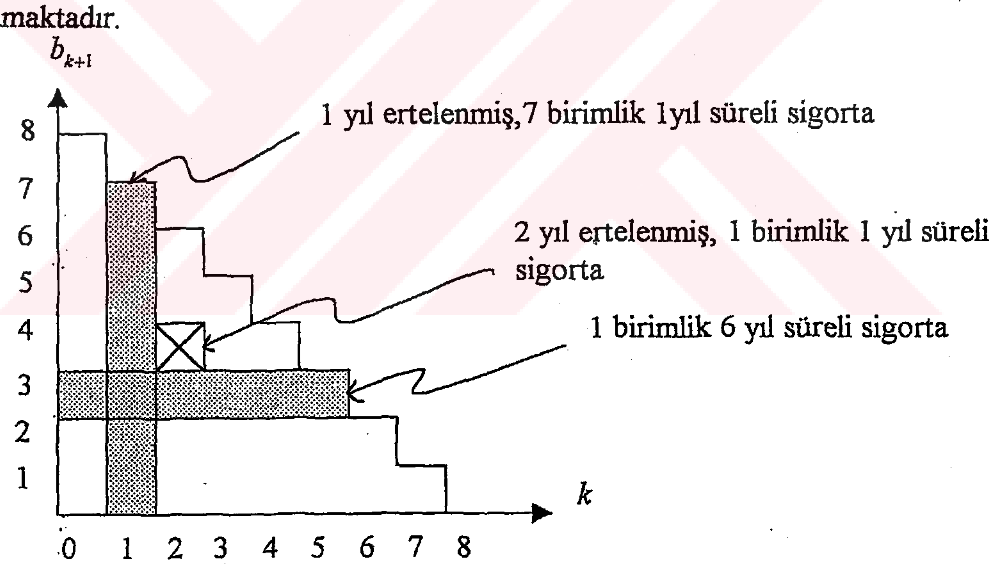
Sigortalının k+1. yılda ölmesi halinde, (k+1). sigorta yılının sonunda k+1 birim ödemeli, artmalı tam hayat sigortası fonksiyonları:

$$b_{k+1} = k+1 \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$v_{k+1} = v^{k+1} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$Z = (K+1)v^{K+1}, \quad K = 0,1,2,\ldots$$

Bunun net tek primi $(IA)_x$ ile gösterilir. Buna karşılık azalan n yıllık sigortanın fonksiyonları

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k & , \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & , \quad k = n, n+1,\ldots \end{cases}$$
$$v_{k+1} = v^{k+1} \quad , \quad k = 0,1,\ldots$$
$$Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1} & , \quad K = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & , \quad K = n, n+1,\ldots \end{cases}$$

Bu sigortanın net tek primi $(DA)^1_{x:\overline{n}|}$dir. Ölüm anında ödenebilir sigortalarda olduğu gibi, ölüm yılının sonunda ödenebilir artan sigorta, her biri bir birim ödemeli ertelenmiş sigortaların bir kombinasyonuna eşittir. Benzer şekilde, azalan sigortalar ise süreli sigortaların bir kombinasyonuna eşittir. Şekil 4.2.1, 8 yıllık azalan sigorta için bunu açıklamaktadır.



8 yıl süreli yıllık bir şekilde azalan sigorta
Şekil 4.2.1

Teorem 4.2: Süreli sigortaların kombinasyonu ile ertelenmiş sigortanın kombinasyonlarının net tek primleri arasında şöyle bir bağıntı vardır:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)_{k|}A^1_{x:\overline{1}|} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}$$

İspat:

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_xq_{x+k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)(v^k\,{}_kp_x)(vq_{x+k}) \qquad (4.2.2)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)_{k|}A^1_{x:\overline{1}|}$$

(4.2.2) de $n-k=\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)$ konulursa

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)v^{k+1}\,{}_kp_xq_{x+k}$$

elde edilir. Toplam sırası değiştirilirse

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(1)v^{k+1}\,{}_kp_xq_{x+k}$$

elde edilir. Buradan $A^1_{x:\overline{n}|}$ile karşılaştırılırsa $(DA)^1_{x:\overline{n}|}=\sum_{j=0}^{n-1}A^1_{x:\overline{n-j}|}$yazılabilir.

4.3 Ölüm Anında Ödenebilen Sigortalar ile Ölüm Yılının Sonunda Ödenen Sigortalar Arasındaki Bağıntı

Önce, ölüm halinde 1 birim tazminat ödemeli tam hayat sigortası ile başlansın.

$$\overline{A}_x=\int_0^{\infty}v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_kp_x\int_0^1v^{s-1}\,{}_sp_{x+k}\mu_{x+k+s}ds$$

Bir yaş aralığında ölümlerin düzgün dağıldığı kabul edilirse

$${}_sp_{x+k}\mu_{x+k+s}=q_{x+k} \qquad (0\le s\le 1).$$

Bu yukarıda yerine yazılırsa

$$\overline{A}_x=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_kp_xq_{x+k}\int_0^1(1+i)^{1-s}ds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_k p_x q_{x+k} \bar{s}_{\overline{1|}} = \frac{i}{\delta} A_x$$

Bu eşitlik tam yaşlar arasındaki ölümlerin düzgün dağıldığı kabulü altında gerçeklenir. Bu kabulün etkisi, ölüm anında bir birim ödemenin, ölüm yılı boyunca sürekli olarak bir birim ödemeye denk oluşudur. Faiz dikkate alındığında, yıl boyunca sürekli olarak bir birim ödeme ölüm yılı sonunda i/δ ödemesine denktir.

Yukarıdaki en son eşitliğe, daha önce gösterilen bilgilerle ulaşılabilir. $T=K+S$ yazılsın, burada S, ölüm yılında yaşanan kesir kısmının tesadüfi değişkenidir. Ölümlerin düzgün dağıldığı kabulü altında, K ve S bağımsızdır ve S birim aralık üzerinde düzgün dağılıma sahiptir. Buradan K+1 ve 1-S' nin bağımsız olduğu ve 1-S' nin birim aralık üzerinde düzgün dağılıma sahip olduğu sonucu çıkar.

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= E[v^T] = E[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] \\ &= E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}]\end{aligned}$$

sağdaki 1. çarpan $A_x$dir. 1-S' nin birim aralık üzerinde düzgün dağılıma sahip olmasından ikinci çarpan için $E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^t 1dt = \frac{i}{\delta}$ yazılabilir. Buradan tekrar $\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$ elde edilir.

Şimdi yıllık artışlı ve ölüm anında ödemeli n yıllık sigorta ele alınsın. Bu sigorta için şimdiki değer tesadüfi değişkeni

$$Z = \begin{cases} [T+1]v^T & , \quad T < n \\ 0 & , \quad T \geq n \end{cases}$$

dir. $[T+1]=K+1$ olduğundan, $T=K+S$ eşitliği kullanılabilir. Buradan

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1}v^{S-1} & , \quad T < n \\ 0 & , \quad T \geq n \end{cases}$$

elde edilir. W, yıllık artışlı ölüm yılının sonunda ödenecek n yıllık sigortanın şimdiki değerinin tesadüfi değişkeni göstersin.

$$W = \begin{cases} (K+1)v^{K+1} & , \quad K = 0,1,\ldots,n-1 \\ 0 & , \quad K = n, n+1,\ldots \end{cases}$$

$$Z = W(1+i)^{1-S}$$

$$E[Z] = E[W(1+i)^{1-S}]$$

W, K+1 in bir fonksiyonu ve K+1 ve 1-S bağımsız olduğu için

$$E[Z] = E[W]E[(1+i)^{1-S}] = (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}\frac{i}{\delta}$$

elde edilir. Ölümlerin düzgün dağılımı kabulü altında tam hayat ve artan sigorta için elde edilen bu sonuçlar çok benzerdir.

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x \text{ ve } (I\,\overline{A})^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{x:\,\overline{n}|}$$

Benzerliğin temellerini bulmak için genel modele bakılsın:

$$Z = b_T v_T \tag{4.3.1}$$

yukarıdaki iki sigorta için , kullanılan koşullar:

$v_T = v^T$ ve b_T ise yalnız T nin tam kısmının yani K nın fonksiyonudur. Bu son özellik $b_T = b^*_{K+1}$ olarak yazılırsa $Z = b^*_{K+1}v^T = b^*_{K+1}v^{K+1}(1+i)^{1-S}$ den

$$E[Z] = \mathrm{E}[b^*_{K+1}v^{K+1}(1+i)^{1-S}]$$

elde edilir. Ölümlerin düzgün dağılımı kabulü altında K ve S' nin bağımsız olduğu ve 1-S' nin de düzgün dağıldığı elde edilir. Yukarıdaki beklenen değer

$$E[Z] = E[b^*_{K+1}v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] = E[b^*_{K+1}v^{K+1}]\frac{i}{\delta} \tag{4.3.2}$$

olarak yazılabilir.

K nın bir fonksiyonu olmayan ve ölüm anında ödeme yapacak olan bir sigortayı ölüm yılı sonunda ödenen bir sigortanın değerleri cinsinden ifade etmek için daha ileri analiz gerekir. Örneğin; ölüm anında ödenebilir, sürekli olarak artan bir tam hayat sigortası ele alınsın. Bunun fonksiyonları

$$b_t = t \quad , \quad t > 0 \quad ; \quad v_t = v^t \quad , \quad t > 0 \quad ; \quad z_t = tv^t \; , \; t > 0$$

idi. $(\bar{I}\,\overline{A})_x$ i bulmak için

$$Z = (K+S)v^{K+S} = (K+1)v^{K+S} - (1-S)v^{K+1}(1+i)^{1-S}$$

$$= (K+1)v^{K+1}(1+i)^{1-S} - v^{K+1}(1-S)(1+i)^{1-S}$$

Ölümlerin düzgün dağılımlarının kabulü altında, beklenen değer hesaplanırsa

$$E[Z] = E[(K+1)v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] - E[v^{K+1}]E[(1-S)(1+i)^{1-S}]$$

$$= (IA)_x \frac{i}{\delta} - A_x E[(1-S)(1+i)^{1-S}]$$

1-S 'nin dağılımı düzgün olduğundan

$$E[(1-S)(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 u(1+i)^u du$$

$$= (\overline{D}\overline{s})_{\overline{1}|} = \frac{1+i}{\delta} - \frac{i}{\delta^2}.$$

$$\Rightarrow (\bar{I}\,\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right)A_x\right].$$

bulunur.

4.4 Zincirleme Eşitlikler

Sigorta modellerinin değerleri için zincirleme (recursion) eşitlikleri daha önceki paragrafların ifadelerinden doğrudan elde edilir. Örneğin;

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_k p_x q_{x+k} = vq_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1}\,{}_k p_x q_{x+k} = vq_x + vp_x \sum_{k=1}^{\infty} v^k\,{}_{k-1} p_{x+1} q_{x+k}$$

$$= vq_x + vp_x \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1}\,{}_j p_{x+1} q_{x+1+j}$$

$$= vq_x + vp_x A_{x+1}$$

Bu eşitlikten şöyle bir yorum yapılabilir: (x) için tam hayat sigortanın net tek primi olan A_x, hem bir yıl içinde ölüm halinde bir birimlik ödemenin iskonto değerini içermeli hem de söz konusu yaşta canlı olunması halinde bir birimlik tam hayat sigortanın net tek primini içermelidir. Aynı eşitlik olasılık görüşü açısından da elde edilebilir.

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}] = E[v^{K+1} \mid K \geq 0]$$

$E[Z]$, (x) in birinci yılda ölmesi halinde, yani K=0 için ve tümleyeni olan (x) in birinci yılda yaşaması halinde yani $K \geq 1$ için hesaplanırsa

$$E[Z] = E[v^{K+1} \mid K = 0]\Pr(K = 0) + E[v^{K+1} \mid K \geq 1]\Pr(K \geq 1)$$

yazılır. Burada $E[v^{K+1} \mid K = 0]$=v , $\Pr(K = 0) = q_x$, $\Pr(K \geq 1) = p_x$ konulabilir. Geriye kalan terim için

$$E[v^{K+1} \mid K \geq 1] = vE[v^{(K-1)+1} \mid K-1 \geq 0]$$

yazılabilir. K, (x) in gelecek yaşam süresinin tam kısmı olup $K \geq 1$ olduğunda, K-1 de $(x+1)$ için gelecek süresinin tam kısmıdır. Eğer $x+1$ yaşı için (K-1) in şartlı dağılımı olasılığının aynı olduğu kabul edilirse

$$E[v^{(K-1)+1} \mid K-1 \geq 0] = A_{x+1} \tag{4.4.1}$$

Bu yukarıda yerine yazılırsa

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x \tag{4.4.2}$$

elde edilir. Seçme tabloların ifadelerine göre (4.4.1) un sağ tarafı $A_{[x]+1}$ olacaktır. (4.4.2) deki her x, $[x]$ olacaktır. Burada p_x yerine $1-q_x$ yazılırsa ve her iki taraf $(1+i)l_x$ ile çarpılırsa

$$l_x(1+i)A_x = l_x A_{x+1} + d_x(1-A_{x+1})$$

elde edilir.

Bu eşitlik l_x ile bölünürse ve her iki taraftan $A_x + q_x(1-A_{x+1})$ ifadesi çıkartılırsa

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1-A_{x+1})$$

elde edilir. Bu eşitlik şunu göstermektedir: x ile $x+1$ yaşlarındaki net tek primlerin farkı, x yaşındaki net tek primin faizinden yıllık bir birim sigortanın maliyetinin farkıdır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafından iA_x çıkarılırsa ve sonra v^x ile çarpılırsa

$$v^x A_{x+1} - v^{x-1}A_x = -v^x q_x(1-A_{x+1})$$

elde edilir.

Bu ifade $x=y$ den ∞ kadar toplanırsa

$$-v^{y-1}A_y = -\sum_{x=y}^{\infty} v^x q_x(1-A_{x+1})$$

ve buradan

$$A_y = \sum_{x=y}^{\infty} v^{x-y+1} q_x(1-A_{x+1})$$

elde edilir. Bu ise (y) için net tek primin, sigortalının hayatı boyunca yıllık sigorta için maliyetinin şimdiki değerlerinin toplamıdır. Benzer ifadeler, ölüm anında ödenebilen sigortalar içinde elde edilebilir. (x)' e uygulanan bir tam hayat sigortası için

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\delta+\mu_x) = \delta\bar{A}_x - \mu_x(1-\bar{A}_x)$$

yazılabilir. Bu ifade $\overline{A}_x$ in tanımından şartlı beklenen değer kullanılarak elde edilebilir.

$$\overline{A}_x = E[v^T] = E[v^T \mid T \leq h]\Pr(T \leq h) + E[v^T \mid T > h]\Pr(T > h)$$

$\Pr(T \leq h) = {}_h q_x$, $\Pr(T > h) = {}_h p_x$

T nin $T \leq h$ koşulu altında p.d.f.si

$$f_T(t \mid T \leq h) = \begin{cases} \dfrac{f_T(t)}{F_T(h)} = \dfrac{{}_t p_x \mu_{x+t}}{{}_h q_x} & , \quad (0 \leq t \leq h) \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

Böylece

$$E[v^T \mid T \leq h] = \int_0^h v^t \frac{{}_t p_x \mu_{x+t}}{{}_h q_x} dt$$

ve

$$E[v^T \mid T > h] = v^h E[v^{T-h} \mid T - h > 0] = v^h \overline{A}_{x+h}$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \overline{A}_x = \int_0^h v^t \frac{{}_t p_x \mu_{x+h}}{{}_h q_x} dt \, {}_h q_x + v^h \overline{A}_{x+h} \, {}_h p_x$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A}_{x+h} - \overline{A}_x}{h} = \frac{-1}{h} \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt + \overline{A}_{x+h} \frac{1 - v^h \, {}_h p_x}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \frac{d}{ds} \int_0^s v^t \, {}_t p_x \mu_{x+t} dt \,|_{s=0} = \mu_x$$

ve

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v^h \, {}_h p_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t \, {}_t p_x) \,|_{t=0} = \mu_x + \delta$$

olduğundan

$$\frac{d}{dx} \overline{A}_x = -\mu_x + \overline{A}_x(\mu_x + \delta)$$

elde edilir.

Bölüm 5

Hayat Rantları

Hayat rantları (anüiteleri), belirli bir canlının yaşadığı sürece, sürekli olarak veya eşit aralıklarla (aylık, 3 aylık, yıllık gibi.) yapılan ödemeler serisidir. Hayat rantları geçici olabilir, yani belirli bir yıl sayısıyla sınırlandırılabilir veya hayat boyu ödenebilir. Ödemeler hemen başlayabilir, veya ertelenebilir. Ödemeler, ödeme aralığının başında veya aralığın sonunda olabilir.

Hayat rantları hayat sigorta işlemlerinde önemli rol oynar. Hayat sigortaları ekseri, net tek prim yerine rant halindeki primlerle satın alınırlar. Talep halinde ödenecek miktar belirli bir hesapla rant haline çevrilir. Bazı hayat sigortaları da ölüm halinde tek bir ödeme yerine çeşitli gelir imkanları sağlar. Örneğin, yaşayan eşe veya emekli olan sigortalıya aylık gelir şeklinde ödeme yapılır. Rantların emeklilik sistemlerinde de merkezi bir yeri vardır. Gerçekte, emeklilik planları, aktif servis esnasında ödenen katkılarla satın alınmış bir ertelenmiş hayat rantı gibi düşünülebilir. Yapılan katkıların geçici rant olarak değerlendirilmesinde yalnız faiz ve ölüm değil maaş artışı, sistemden ayrılma gibi faktörlerde dikkate alınmalıdır. Bu daha ileriki bölümde anlatılacaktır.

Hayat rantlarının işçilerin maluliyet ve tazminat sigortalarında da bir rolü vardır. Rant ; maluliyet sigortası halinde işçinin tekrar iş görebilir olması durumunda, ailelere ödenecek tazminat sigortası ise dul eşin tekrar evlenmesi durumunda sona erer.

5.1 Sürekli Hayat Rantları

Sürekli yönteme göre ödemelerin sürekli olarak, yani sonsuz derecede küçük aralıklarda yapıldığı varsayılır. Bu teorik yaklaşımdır. Zaten sürekli yöntem teorik yönden önemlidir, incelenmesi bu bakımdan aktüerya bilimi için ilgi ve önem konusudur.

Her yıl bir oranında sürekli olarak ödenebilen rantlar ile başlansın. Tam hayat rantı ölünceye kadar ödemeyi temin eder. Dolayısıyla yapılacak ödemelerin şimdiki değeri her $T \geq 0$ için $Y = \bar{a}_{\overline{T|}}$ dir. Burada T, (x) in gelecekteki yaşam zamanıdır. Y nin dağılım fonksiyonu buradan aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\bar{a}_T \leq y) = \Pr(1 - v^T \leq \delta\, y)$$

$$= \Pr(v^T \geq 1-\delta\, y) = \Pr\left(T \leq \frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}\right)$$

$$= F_T\left(\frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}\right) \qquad (0 < y < \frac{1}{\delta})$$

Y nin p.d.f.si

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_T\left(\frac{-\log(1-\delta\, y)}{\delta}\right) = \frac{f_T([-\log(1-\delta\, y)]/\delta)}{1-\delta\, y} \quad , \quad (0 < y < \frac{1}{\delta})$$

Sürekli tam hayat rantı için aktüeryal şimdiki değer $\bar{a}_x$ ile gösterilsin. Burada x sabit indeksi, (x) in ölümü halinde rantın sona ereceğini göstermektedir ve $T(x)$ in dağılımı x yaşında elde edilen bilgilere bağlıdır. Toplam ölüm (mortalite) altında T nin p.d.f. si ${}_t p_x \mu_{x+t}$ dir. Buna göre aktüeryal şimdiki değer

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\, {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

olarak hesaplanabilir. Kısmi integrasyonla

$f(t) = \bar{a}_{\overline{t|}}$, $dg(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} dt$, $g(t) = -{}_t p_x$ ve $df(t) = v^t dt$ kullanılırsa

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t E_x dt$$

elde edilir.

Genel olarak bir rant için aktüeryal şimdiki değerin belirlemesi için geçerli ödeme tekniği aşağıdaki şekildedir:

$$\text{APV} = \int_0^\infty v^t \Pr[\text{ödemenin } t \text{ zamanında yapılması}] \times [t \text{ deki ödeme oranı}]\, dt$$

$\bar{a}_x$ in yukarıdaki ifadesi parçalanırsa

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^1 v^t\, {}_t p_x dt + \int_1^\infty v^t\, {}_t p_x dt \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1|}} + v p_x \int_0^\infty v^s\, {}_s p_{x+1} ds \qquad (5.1.1) \\ &= \bar{a}_{x:\overline{1|}} + v p_x \bar{a}_{x+1} \end{aligned}$$

Bu ifade bir geriye dönüş (backward) zincirleme formülüdür. Tam hayat rantı için başlangıç değeri $\bar{a}_w = 0$ dır. $\bar{a}_{x:\overline{1|}}$ terimini hesaplamak için çeşitli yollar vardır. Basit bir yaklaşım, integral için trapez kuralını kullanmaktır.

$$\bar{a}_{x:\overline{1}|}=\int_0^1 v^t\,{}_t p_x dt=\frac{1+vp_x}{2}$$

Bileşik faiz teorisine benzer bir bağıntı

$$1=\delta\,\bar{a}_{\overline{t}|}+v^t$$

dir. Bu eşitlik şöyle yorumlanabilir: Şimdi bir birim yatırım yapıldığında, bu yatırım t yıl boyunca sürekli olarak ödenebilen δ yıllık faiz oranından ve t zamanında faiz sona erdiğinde yatırımın geri ödenmesinden oluşur. Bu bağıntı bütün t değerleri için doğrudur dolayısıyla T tesadüfi değişkeni için de doğru olur. Her iki tarafın beklenen değeri alınırsa

$$1=\delta\,\bar{a}_x+\bar{A}_x$$

elde edilir. Bu eşitlik de yukarıdakine benzer şekilde yorumlanabilir: Şimdiki yatırılan bir birim, (x) in yaşadıkça sürekli olarak ödenebilen δ yıllık faizden ve ölüm anında faiz sona erdiğinde 1 birimlik yatırımın geri ödenmesinden oluşur.

Bu modelde ölüm riskini ölçmek için $Var(\bar{a}_{\overline{T}|})$ yi hesaplanabilir.

$$Var(\bar{a}_{\overline{T}|})=Var\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right)=\frac{Var(v^T)}{\delta^2}=\frac{{}^2\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

Ayrıca $1=\delta\,\bar{a}_{\overline{T}|}+v^T$ olduğundan $Var(\delta\,\bar{a}_{\overline{T}|}+v^T)=0$ dır. Böylece her yıl δ lık bir sürekli hayat rantı ile ölüm anında ödenecek 1 birimlik hayat sigortasının kombinasyonunda ölüm riski yoktur.

Teorem 5.1: Ölümün etkisinin (μ) ve faiz etkisinin (δ) sabit olduğu kabulü altında,

a) $\bar{a}_x=\dfrac{1}{\delta+\mu}$

b) $Var(\bar{a}_{\overline{T}|})=\dfrac{\mu}{(2\delta+\mu)(\delta+\mu)^2}$

c) $\bar{a}_{\overline{T}|}$ nin $\bar{a}_x$ i geçmesi olasılığı $\left(\dfrac{\mu}{\delta+\mu}\right)^{\mu/\delta}$ dır.

İspat:

a) $\bar{a}_x=\int_0^\infty v^t\,{}_t p_x dt=\int_0^\infty e^{-\delta t}e^{-\mu t}dt=\dfrac{1}{\delta+\mu}.$

b) $\bar{A}_x=1-\delta\,\bar{a}_x=\dfrac{\mu}{\mu+\delta}$ ve moment kuralına göre ${}^2\bar{A}_x=\dfrac{\mu}{\mu+2\delta}$ dır.

$$Var(\bar{a}_{\overline{T|}}) = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\mu}{2\delta+\mu} - \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)^2\right] = \frac{\mu}{(2\delta+\mu)(\delta+\mu)^2}\,.$$

c) $$\Pr(\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x) = \Pr\left(\frac{1-v^T}{\delta} > \bar{a}_x\right) = \Pr\left[T > -\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)\right]$$

$$= {}_{t_0}p_x \quad , \quad t_0 = -\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)$$

$$= \left(\frac{\mu}{\delta+\mu}\right)^{\mu/\delta}.$$

Şimdi geçici hayat rantı ele alınsın. (x) yaşadığı sürece her yıl bir birim olmak üzere n yıl boyunca sürekli olarak ödenecek olan, n yıllık geçici hayat rantı tesadüfi değişkeninin şimdiki değeri aşağıdaki şekildedir:

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} & , \quad 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & , \quad T \ge n. \end{cases}$$

n yıllık geçici hayat rantının aktüeryal şimdiki değeri $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ ile gösterilir ve

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E[Y] = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\,{}_np_x\,.$$

Buradan kısmi integrasyonla

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

elde edilir. Bu, n yıllık geçici rant için aktüeryal şimdiki değerin geçerli ödeme formudur. Bunun için de (5.1.1) formülüne benzer bir formül elde edilir. Burada $n=y-x$ alınır. Burada değişecek olan sadece başlangıç değerleridir. $\bar{a}_{y:\overline{0|}} = 0$ başlangıç değeri olarak alınır. Tekrar yukarıdaki Y ye dönülürse

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} = \dfrac{1-Z}{\delta} & , \quad 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} = \dfrac{1-Z}{\delta} & , \quad T \ge n \end{cases}$$

burada

$$Z = \begin{cases} v^T & , \quad 0 \le T < n \\ v^n & , \quad T \ge n. \end{cases}$$

Yukarıdaki Z, n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigortanın şimdiki değer tesadüfi değişkenidir.

$$E[Y] = \bar{a}_{x:\overline{n|}} = E\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] = \frac{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\delta}$$

ve

$$Var(Y) = \frac{Var(Z)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\overline{n|}} - (\bar{A}_{x:\overline{n|}})^2}{\delta^2}$$

$$= \frac{1 - 2\delta\, {}^2\bar{a}_{x:\overline{n|}} - (1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}})^2}{\delta^2}$$

$$= \frac{2}{\delta}(\bar{a}_{x:\overline{n|}} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n|}}) - (\bar{a}_{x:\overline{n|}})^2.$$

n yıllık ertelenmiş tam hayat rantı için analiz benzer şekilde yapılır. Y şimdiki değer tesadüfi değişkeni şu şekilde tanımlansın:

$$Y = \begin{cases} 0 \qquad\quad = \bar{a}_{\overline{T|}} - \bar{a}_{\overline{T|}} & , \quad 0 \le T < n \\ v^n \bar{a}_{\overline{T-n|}} = \bar{a}_{\overline{T|}} - \bar{a}_{\overline{n|}} & , \quad T \ge n. \end{cases}$$

Y nin beklenen değeri alınırsa

$${}_{n|}\bar{a}_x = E[Y] = \int_n^\infty v^n \bar{a}_{\overline{t-n|}}\, {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty v^n \bar{a}_{\overline{s|}}\, {}_{n+s} p_x \mu_{x+n+s}\, ds$$

$$= v^n\, {}_n p_x \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{s|}}\, {}_s p_{x+n} \mu_{x+n+s}\, ds$$

$$\Rightarrow \; {}_{n|}\bar{a}_x = {}_nE_x \bar{a}_{x+n}.$$

Burada ${}_nE_x$, x yaşında bulunan bir kimsenin $x+n$ yaşına gelince, kendisine yapılacak 1 birimlik ödemenin iskontolu değeridir. Ayrıca şu yazılabilir:

(n yıl ertelenmiş tam hayat rantı için Y)=(tam hayat rantı için Y)-(n yıllık geçici hayat rantı için Y)

beklenen değer alınırsa

$$ {}_{n|}\overline{a}_x = \overline{a}_x - \overline{a}_{x:\overline{n|}} $$

elde edilir. Bunun aktüeryal şimdiki değeri

$$ {}_{n|}\overline{a}_x = \int_n^{\infty} v^t\,{}_t p_x dt = \int_n^{\infty} {}_t E_x dt $$

geriye dönüş zincirleme formülleri $n=y-x>1$ için yazılırsa, başlangıç değeri olarak $u(y) = \overline{a}_y$ kullanılır.

Ertelenmiş rantlar için Y nin varyansının hesaplanmasının bir yolu aşağıdaki gibidir:

$$ Var(Y) = \int_n^{\infty} v^{2n} (\overline{a}_{\overline{t-n|}})^2\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt - ({}_{n|}\overline{a}_x)^2 $$

$$ = v^{2n}\,{}_n p_x \int_0^{\infty} (\overline{a}_{\overline{s|}})^2\,{}_s p_{x+n} \mu_{x+n+s} ds - ({}_{n|}\overline{a}_x)^2 $$

Kısmi integrasyon kullanarak

$$ = v^{2n}\,{}_n p_x \int_0^{\infty} 2\overline{a}_{\overline{s|}} v^s\,{}_s p_{x+n} ds - ({}_{n|}\overline{a}_x)^2 $$

$$ = \frac{2}{\delta} v^{2n}\,{}_n p_x \int_0^{\infty} (v^s - v^{2s})\,{}_s p_{x+n} ds - ({}_{n|}\overline{a}_x)^2 $$

$$ = \frac{2}{\delta} v^{2n}\,{}_n p_x (\overline{a}_{x+n} - {}^2\overline{a}_{x+n}) - ({}_{n|}\overline{a}_x)^2. $$

n yıllık garantili ve hayat rantı

Bu, ilk n yıl için ödeme garantili hayat rantıdır. Burada n yıl içinde sigortalı ölse de ölmese de tam n yıl ödeme yapılacak. Sigortalı n yıldan daha fazla yaşarsa ölene kadar ödeme yapılacak anlamındadır. Rant ödemelerinin şimdiki değeri

$$ Y = \begin{cases} \overline{a}_{\overline{n|}} & , \quad T \le n \\ \overline{a}_{\overline{T|}} & , \quad T > n \end{cases} $$

dir. Bunun aktüeryal şimdiki değeri $\overline{a}_{\overline{x:\overline{n|}}}$ ile gösterilir. Bu sembol ödemelerin max($T(x)$,n)'e kadar devam ettiğini göstermektedir.

$$ \overline{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = E[Y] = \int_0^n \overline{a}_{\overline{n|}}\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt + \int_n^{\infty} \overline{a}_{\overline{t|}}\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt $$

$$ = {}_n q_x \overline{a}_{\overline{n|}} + \int_n^{\infty} \overline{a}_{\overline{t|}}\,{}_t p_x \mu_{x+t} dt $$

kısmi integrasyonla

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t \, {}_t p_x dt$$

elde edilir. Bu aktüeryal şimdiki değerin geçerli ödeme formudur, çünkü 0 dan n zamanına kadar ödeme garantilidir, n den daha fazla ödeme (x) yaşarsa mümkündür.

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} + 0 & , \ T \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}) & , \ T > n \end{cases}$$

Burada Y, $\bar{a}_{\overline{n}|}$ sabit terimi ile n yıllık ertelenmiş rantın tesadüfi değişkeninin toplamıdır.

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_nE_x \bar{a}_{x+n} = \bar{a}_{\overline{n}|} + (\bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|})$$

Bundan başka $Var(Y - \bar{a}_{\overline{n}|}) = Var(Y)$ olduğu için n yıllık ve garantili hayat rantının varyansı, n yıllık ertelenmiş rantın varyansı ile aynıdır.

Finans matematiğinde

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^{n-t} dt$$

fonksiyonuna benzer şekilde hayat rantlarında da

$$\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \int_0^n \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} dt$$

yazılabilir. Bu ifade, sürekli yıllık 1 birim ödemeli n yıllık geçici hayat rantının sonunda, aktüeryal yığılan toplam değeri göstermektedir. Böyle bir toplam değer (x) canlısı için $x+n$ yaşında yaşarsa elde edilir.

5.2 Kesikli Hayat Rantları

Kesikli hayat rantları teorisi, adım adım sürekli hayat rantlarının benzeridir. Burada integraller yerine toplamlar, integrant yerine toplam terimleri ve diferansiyeller yerine farklar gelecektir. Sürekli rantlarda, ödemenin ödeme aralığının başında veya sonunda ödenmesi arasında fark yoktur. Kesikli rantlar için fark anlamlıdır. Önce, başlangıçta ödenen rantlarla başlansın, çünkü bunlar aktüeryal uygulamalarda daha büyük rol oynar. Örneğin bir çok bireysel hayat sigortaları, periyodik primler halinde devre başında ödenen rantlar olarak satın alınırlar.

(x) canlısı yaşadıkça, her yılın başına 1 birim ödemeli bir rant ele alınsın. Buna devre başı ödemeli tam hayat rantı denir. Böyle bir rantın Y şimdiki değer tesadüfi değişkeni $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ ile verilir, burada K tesadüfi değişkeni (x) in gelecek yaşam süresinin tam kısmıdır. Bu tesadüfi değişkenin mümkün olan değerleri $\ddot{a}_{\overline{1}|} = 1$ den $\ddot{a}_{\overline{w-x}|}$ e kadar kesikli değer kümesinin elemanlarıdır. Bu değerler $1/d$ den küçüktür. $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$

değerine ait olasılık $\Pr(K = k) = {}_kp_x q_{x+k}$ dır. Rantın aktüeryal şimdiki değeri olan $\ddot{a}_x$ ele alınsın.

$$\ddot{a}_x = E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k}, \tag{5.2.1}$$

$\Delta f(k) = {}_kp_x q_{x+k} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x$ ve $g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$ olsun. $\Delta g(k) = \Delta\, \ddot{a}_{\overline{k+1}|} = v^{k+1}$ ve $f(k) = -{}_kp_x$ olur. Kısmi toplama kullanılırsa

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1}p_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x.$$

Yukarıdaki ifade, devre başı ödemeli tam hayat sigortasının aktüeryal şimdiki değerinin geçerli ödeme formudur. Burada ${}_kp_x$ terimi, k zamanında 1 birimlik ödemenin yapılabilmesinin olasılığıdır.

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1}p_x = 1 + vp_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x+1} = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}.$$

(5.2.1) den

$$\ddot{a}_x = E\left[\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right] = \frac{1 - A_x}{d}$$

elde edilir ve

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty}|} - \ddot{a}_{\overline{\infty}|} A_x,$$
$$1 = d\,\ddot{a}_x + A_x.$$

bulunur. (Bu formül sürekli haldeki $1 = \delta\, \bar{a}_x + \bar{A}_x$ formülüne karşı gelmektedir.)

Yukarıdaki formülü şöyle algılanabilir. Şimdi 1 birim yapılan yatırım (x) yaşadıkça her yıl d faiz oranı kadar gelirle (x) in ölümü halinde ödenecek olan 1 birimlik ödemenin birleşiminden oluşmaktadır. Varyans ise

$$Var(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) = Var\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right) = \frac{Var(v^{K+1})}{d^2} = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2}.$$

şeklinde bulunur.

Her yıl bir birim devre başı ödemeli n yıllık geçici hayat rantı için şimdiki değerin tesadüfi değişkeni

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & , \quad 0 \le K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & , \quad K \ge n, \end{cases}$$

Bunun aktüeryal şimdiki değeri

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k} p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|\,n} p_x$$

şeklindedir. Kısmi toplam yardımıyla yukarıdaki ifade şöyle yazılabilir:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_k p_x$$

Buna geçerli ödeme formundaki aktüeryal şimdiki değer denir. Buradan tekrar zincirleme formülü olarak

$$\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1:\overline{y-(x+1)}|}$$

elde edilir. Bu formül yukarıda elde edilen gibidir, fakat başlangıç değeri farklıdır, Burada $\ddot{a}_{y:\overline{0}|} = 0$ dır.

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & , \quad 0 \le K < n \\ v^n & , \quad K \ge n \end{cases}$$

olmak üzere $Y = 1 - Z/d$ dir. (Z, ölüm halinde ve vade sonunda 1 birim ödemeli sigortanın şimdiki değerini göstermektedir.)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - E[Z]}{d} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

$$1 = d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$$

$$Var(Y) = \frac{Var(Z)}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2}{d^2}$$

(x) yaşadıkça n yıllık ertelenmiş devre başında bir birim ödemeli tam hayat rantı için şimdiki değer

$$Y = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le K < n \\ {}_{n|}\ddot{a}_{\overline{K+1-n}|} & , \quad K \ge n \end{cases}$$

ve bunun aktüeryal şimdiki değeri

$$E[Y] = {}_{n|}\ddot{a}_x = {}_nE_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=n}^{\infty} v^k\,{}_k p_x;$$

Benzer şekilde varyans hesaplanırsa

$$Var(Y)=\frac{2}{d}v^{2n}{}_{n}p_x(\ddot{a}_{x+n}-{}^{2}\ddot{a}_{x+n})+{}_{n|}{}^{2}\ddot{a}_x-({}_{n|}\ddot{a}_x)^2.$$

elde edilir.

***n* yıllık garantili ve devre başı ödemeli hayat rantı**

En az *n* yıl ödeme garantili hayat rantıdır. Şimdiki değer

$$Y=\begin{cases}\ddot{a}_{\overline{n}|} & , \quad 0\le K<n\\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & , \quad K\ge n\end{cases}$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}=E[Y]=\ddot{a}_{\overline{n}|\,n}q_x+\sum_{k=n}^{\infty}\ddot{a}_{\overline{k+1}|\,k}p_x q_{x+k}\,.$$

Burada kısmi toplama yapılırsa aktüeryal şimdiki değer

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}=\ddot{a}_{\overline{n}|}+\sum_{k=n}^{\infty}v^k{}_kp_x$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}=\ddot{a}_{\overline{n}|}+\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

elde edilir. (x) yaşadıkça n yıllık geçici devre başında 1 birim ödemeli hayat rantının süresinin sonunda biriken aktüeryal değer $\ddot{s}_{x:\overline{n}|}$ dir.

$$\ddot{s}_{x:\overline{n}|}=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}$$

Yukarıda devre başı hayat rantlarına göre yapılan işlemler devre sonu ödemeli hayat rantı içinde yapılabilir. Örneğin devre sonu ödemeli tam hayat rantı için şimdiki değer tesadüfi değişkeni $Y=a_{\overline{K}|}$ dır. Bu taktirde

$$a_x=E[Y]=\sum_{k=0}^{\infty}{}_kp_xq_{x+k}a_k$$

kısmi toplamaya göre aktüeryal şimdiki değerin geçerli ödeme formu

$$a_x=\sum_{k=1}^{\infty}v^k{}_kp_x$$

olarak bulunur.

$$Y=\frac{1-v^K}{i}=\frac{[1-(1+i)v^{K+1}]}{i}$$

olduğundan beklenen değeri alınırsa

$$a_x = E[Y] = \frac{1-(1+i)A_x}{i}$$

bulunur. Bu formül $1 = ia_x + (1+i)A_x$ olarak ifade edilebilir. Bu, (x) yaşadığı sürece her yılın sonunda i lik bir faiz ödemesi ve ölüm yılının sonunda mecburen ödenen 1 birimlik ana paranın i ile faizlendirilmesidir. Diğer devre sonu ödemeli hayat rantları benzer şekilde yapılabilirler.

Devre sonu ödemeli geçici hayat rantı için şimdiki değer tesadüfi değişkeninin beklenen değer ve varyansını aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|} = \dfrac{1-v^K}{i}, & 0 \le K < n \\ a_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{i}, & K \ge n \end{cases}$$

ise

$$Z_1 = \begin{cases} (1+i)v^{K+1}, & 0 \le K < n \\ 0 & , K \ge n \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 \ , & 0 \le K < n \\ v^n, & K \ge n \end{cases}$$

olmak üzere $Y = \dfrac{1-Z_1-Z_2}{i}$ yazılabilir. Her iki tarafın beklenen değeri alınırsa

$$E[Y] = a_{x:\overline{n}|} = \frac{1-(1+i)A^1_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{i}$$

bulunur. Buradan

$$1 = i\, a_{x:\overline{n}|} + i\, A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$$

elde edilir. Varyans hesaplanırsa

$$Var(Y) = \frac{Var(Z_1+Z_2)}{i^2} = \frac{Var(Z_1) + 2Cov(Z_1,Z_2) + Var(Z_2)}{i^2}$$

$Var(Z_1) = (1+i)^2[{}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2]$ ve $Var(Z_2) = v^{2n}\,{}_np_x(1-{}_np_x)$ gerçeklenir.

Ayrıca $\forall K$ için $Z_1Z_2 = 0$ olduğundan $Cov(Z_1,Z_2) = -(1+i)A^1_{x:\overline{n}|}v^n\,{}_np_x$ elde edilir. Yukarıda yerine yazılırsa

$$Var(Y) = \frac{(1+i)^2[{}^2A^1_{x:\overline{n}|} - (A^1_{x:\overline{n}|})^2] - 2(1+i)A^1_{x:\overline{n}|}v^n\,{}_np_x + v^{2n}\,{}_np_x(1-{}_np_x)}{i^2}$$

elde edilir.

Yılda *m* kez ödemeli hayat rantları

Bu model için sadece devre başı ödemeli hayat rantlarından kısaca bahsedilecektir. Pratikte hayat rantları aylık, 3 aylık veya yarı yıllık olarak ödenir. Her yıl 1 birim ödemeli hayat rantının (x) yaşadığı sürece yılda m kez yani $1/m$ yıllık aralıklarla, bu aralıkların başında $1/m$ lik ödeme yapılmasının aktüeryal şimdiki değeri $\ddot{a}_x^{(m)}$ dir. Y nin dağılımı için K ve J=$[(T-K)m]$ tesadüfi değişkenleri kullanılacaktır. Burada "[ ]" en büyük tam sayı fonksiyonunu göstermektedir, öyle ki J, ölüm yılında yaşanan m li periyotların sayısını göstermektedir. Devre başı ödemeli hayat rantı için her K tam yılı için m ödeme ve ölüm yılında $1/m$ değerinde J+1 ödeme olacaktır. Böylece

$$Y=\sum_{j=0}^{mK+J}\frac{1}{m}v^{j/m}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m}|}=\frac{1-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}}.$$

$$\begin{aligned}A_x^{(m)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}v^{k+(j+1)/m}\;{}_{k+j/m}p_x\;{}_{1/m}q_{x+k+j/m}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\;{}_kp_x\sum_{j=0}^{m-1}v^{-(1-(j+1)/m)}\;{}_{j/m}p_{x+k}\;{}_{1/m}q_{x+k+j/m}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\;{}_kp_x\sum_{j=0}^{m-1}v^{-(1-(j+1)/m)}\;{}_{j/m|1/m}q_{x+k}\end{aligned}$$

olduğundan $E[Y]=\ddot{a}_x^{(m)}=\dfrac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}$ elde edilir. Yukarıdaki ile aynı şekilde

$$Var(Y)=\frac{Var(v^{K+(J+1)/m})}{(d^{(m)})^2}=\frac{{}^2A_x^{(m)}-(A_x^{(m)})^2}{(d^{(m)})^2}$$

ve $1=d\ddot{a}_x+A_x=d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)}+A_x^{(m)}$ elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)}&=\frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x-\frac{1}{d^{(m)}}(A_x^{(m)}-A_x)\\&=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\ddot{a}_x-\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}(A_x^{(m)}-A_x)\\\Rightarrow\ddot{a}_x^{(m)}&=\frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}-\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}A_x^{(m)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Bölüm 6

Primler

Pratikte, bireysel hayat sigortası hayat rantları şeklinde olup, sigorta sözleşmesinde, ödenecek primler belirtilmektedir. Bu primler; sigortanın başlaması ve muhafaza edilmesi için giderleri, sigortacı kuruluş için kazancı, beklenmeyen olayları dengelemeyi karşılarlar. Bu bölümde hesaplanan primler yalnız tazminatı (benefiti) karşılamak içindir. Giderleri, kazancı ve beklenmeyen olayları karşılamak için değildir.

Sigorta primlerinin belirlenmesinde bir prim prensibi kabul edilmektedir. 3 ayrı prim prensibi aşağıda uygulama üzerinde açıklanacaktır. Bütün bu prensipler sigortacı kuruluşun zenginliği esasına dayanmaktadır. Sigortanın belirli bir prim sayesinde yapılması halinde, sigortacının kaybının bugünkü değerinin tesadüfi değişkeni, modelde prensipler için bir anahtar oluşturmaktadır. I. Prensip, zarar tesadüfi değişkeninin pozitif olmasını ve belirli bir olasılığı aşmamasını ister. II. ve III. Prensipler, sigortacının beklenen faydasına dayanmaktadır. II. Prensip, bir lineer fayda fonksiyonu kullanır ve zarar tesadüfi değişkenin sıfır beklenen değerli olmasını ister.

Bir sigortacı, hayat yaşı 0 ve gelecek yaşam süresinin tam kısmı K olan bir canlı için bir poliçe yapmayı planlamaktadır. Bunun olasılık fonksiyonu (p.f.)

$$_{k|}q_0 = 0.2 \qquad k = 0,1,2,3,4$$

olarak verilsin. Poliçeye göre, ölüm yılının sonunda sigortacı 1 birim ödeyecek, P primi ise sigortalı tarafından yaşadığı sürece ödenecektir. K=k ve keyfi bir P primi için poliçenin finansal kaybının şimdiki değeri aşağıdaki gibidir:

$$l(k) = v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = \left(1+\frac{P}{d}\right)v^{k+1} - \frac{P}{d} \qquad (k = 0,1,2,3,4)$$

Buradan zarar tesadüfi değişkeni

$$L = v^{K+1} - P\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

olarak elde edilir.

P yıllık primini,

a) I.Prensip: Sigortacının bir pozitif finansal kaybının olması olasılığının en çok 0.25 olması durumunda en az olacak şekilde hesaplayalım(i=0.06):

k arttıkça $l(k)$ azaldığından, I. Prensibin isteği, P nin $v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|} = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde alınması halinde mümkün olur. Bu taktirde finansal kayıp yalnız

K=0 için olur. Bunun olasılığı ise 0.2 dir, böylece 0.2<0.25 temin edilmiş olur. Bu prensibe göre

$$P = \frac{v^2}{\ddot{a}_{\overline{2}|}} = \frac{v^2}{\dfrac{1-v^2}{1-v}} = \frac{v^2}{1+v} = \frac{(1.06)^{-2}}{1+(1.06)^{-1}} = 0.45796.$$

b) II.Prensip: Sigortacı, $u(x) = x$ fayda fonksiyonunu kullandığında, riski kabul edip etmemesi halinde fark olmayacak şekilde hesaplayalım(i=0.06):

P primi $u(w) = E[u(w-L)]$ olacak şekilde belirlenmek isteniyor. $u(x) = x$ olduğundan $w = E[w-L] = w - E[L]$ dir. Böylece II. Prensip $E[L]$=0 olacak şekilde P nin seçilmesine denk olur.
Bunun için

$$\sum_{k=0}^{4}(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|})\Pr(K=k) = 0$$

olması isteniyor. Buradan P=0.30272 elde edilir.

c) III.Prensip: Sigortacı, $u(x) = -e^{-0.1x}$ fayda fonksiyonunu kullandığında riski kabul edip etmemesi halinde farklı durum ortaya çıkmayacak şekilde hesaplayalım(i=0.06):

Tekrar (1.2.6) dan $u(x) = -e^{-0.1x}$ olduğu için $-e^{-0.1w} = E[-e^{-0.1(w-L)}]$ elde edilir. O halde III. Prensibin gerçekleşmesi demek $E[e^{0.1L}] = 1$ olacak şekilde P nin bulunması demektir.

$$\sum_{k=0}^{4}\exp[0.1(v^{k+1} - P\ddot{a}_{\overline{k+1}|})]\Pr(K=k) = 1 \Rightarrow P = 0.30628$$

bulunur.

I. Prensip ile tanımlanan primlere yüzdesel primler denir. II.Prensip pratikte bir çok uygulamaya sahiptir. Buna denklik prensibi denir. $E[L]$=0 olmalıdır. Burada

E[Tazminatın Şimdiki Değeri]=E[Primlerin Şimdiki Değeri]

eşitliği söz konusudur. III. prensibe göre hesaplanan primlere üstel primler denir. Üstel primler şu anlamda orantılı değildir. 10 birimlik tazminat içeren bir poliçe için prim , 1 birim tazminat içeren bir poliçenin priminin 10 katından daha fazladır.

6.1 Sürekli Primler

(x) canlısının ölümünde hemen ödenecek bir birimlik tam hayat sigortası için sürekli yıllık primler denklik prensibi kullanılarak belirlensin. Sürekli olarak ödenen $\overline{P}$ primi için

$$l(t) = v^t - \overline{P}\overline{a}_{\overline{t}|}$$

göz önüne alınsın. Bu, ölümün t anında olması halinde sigortacının kaybının şimdiki değeridir. $l(t)$ fonksiyonu t ye göre azalan olup, $l(0) = 1$. $t \to \infty$ için $l(t) \to -\dfrac{\overline{P}}{\delta}$ dur. $l(t_0) = 0$ olan t_0 için, eğer ölüm t_0 dan önce olmuşsa, pozitif bir kayıp; eğer ölüm t_0 dan sonra olmuşsa negatif bir kayıp, yani sigortacı için bir kazanç söz konusudur.

$$L = l(T) = v^T - \overline{P}\overline{a}_{\overline{T}|}$$

random kayıp değişkenini göstersin. Eğer sigortacı primini denklik prensibine göre belirliyorsa, prim $\overline{P}(\overline{A}_x)$ ile gösterilsin. Bu taktirde $E[L]$=0 olduğu için yukarıdaki ifadenin beklenen değeri alınırsa $\overline{A}_x - \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_x = 0$ ve buradan $\overline{P}(\overline{A}_x) = \dfrac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}$ elde edilir. L nin varyansı kayıpların ölçüsü olarak kullanılabilir. $E[L]$=0 olduğundan

$$Var(L) = E[L^2]$$

olur.

$$Var(v^T - \overline{P}\overline{a}_{\overline{T}|}) = Var\left[v^T - \frac{\overline{P}(1-v^T)}{\delta}\right] = Var\left[v^T\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right) - \frac{\overline{P}}{\delta}\right]$$

$$= Var\left[v^T\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)\right] = Var(v^T)\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)^2 = \left[{}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2\right]\left(1+\frac{\overline{P}}{\delta}\right)^2$$

$\delta\,\overline{a}_x + \overline{A}_x = 1$ olduğundan yukarıdaki ifade şu şekilde yazılabilir:

$$Var(L) = \frac{{}^2\overline{A}_x - (\overline{A}_x)^2}{(\delta\,\overline{a}_x)^2}$$

Denklik prensibi kullanılarak sürekli hayat sigortasının farklı türleri için sürekli yıllık primlerin formülleri elde edilebilir.
Genel olarak kayıp

$$b_T v_T - \overline{P}Y = Z - \overline{P}Y$$

dır. Burada b_t ve v_t sırasıyla tazminat miktarı ve iskonto faktörüdür. $\overline{P}$ sürekli net yıllık prim için genel bir semboldür. Y ve Z ise daha önceki bölümlerde tanımlandığı gibidir. Denklik prensibi uygulanırsa

$$E[b_T v_T - \overline{P}Y] = 0 \Rightarrow \overline{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}$$

bulunur. Bu formülle elde edilen primler Tablo 6.1.1 de verilmektedir.

Tablo 6.1.1
Sürekli primler

	Kayıp Bileşenleri		Prim Formülü
Plan	$b_T v_T$	Y	$\overline{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}$
Tam hayat sigortası	$1 v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\bar{a}_x}$
n yıllık süreli sigorta	$1 v^T$ 0	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}, T > n$	$\overline{P}(\overline{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\overline{A}^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n yıllık endowment sigortası	$1 v^T$ $1 v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}, T > n$	$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
h ödemeli tam hayat sigortası	$1 v^T$ $1 v^T$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil}, T > h$	${}_h\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
h ödemeli n yıllık endowment sigortası	$1 v^T$ $1 v^T$ $1 v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil}, h < T \le n$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil}, T > n$	${}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
n yıllık pür endowment	0 $1 v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}, T > n$	$\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n yıllık ertelenmiş tam hayat rantı	0 $\bar{a}_{\overline{T-n}\rceil} v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}, T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}, T > n$	$\overline{P}({}_{n\mid}\bar{a}_x) = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}^{\ \ 1}\bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigortaya ait L kaybının varyansını aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$Z_3 = Z_2 + Z_1$ den

$$Var(L) = Var\left\{ Z_3 \left[1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})}{\delta} \right] - \frac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})}{\delta} \right\}$$

$$= \left[1 + \frac{\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})}{\delta} \right]^2 \left[{}^2\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil} - (\overline{A}_{x:\overline{n}\rceil})^2 \right]$$

ve $1 = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} + \overline{A}_{x:\overline{n}\rceil}$ kullanılarak

$$Var(L) = \frac{{}^{2}\bar{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|})^2}{(\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}$$

elde edilir.

$1 = \delta\,\bar{a}_x + \bar{A}_x$ ve $1 = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$ eşitlikleri sürekli primler arasındaki bağıntıları bulmak için kullanılır. Örneğin; $1 = \delta\,\bar{a}_x + \bar{A}_x$ kullanılarak

$$\delta + \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} \Rightarrow \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1-\delta\,\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\,\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}$$

elde edilir.

$1 = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$ kullanılarak

$$\delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} \Rightarrow \bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1-\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\delta\,\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n}|}}$$

bulunur. Şimdiye kadar incelenen primler denklik prensibinden elde edilen primler idi. Şimdi yüzdesel primlere örnek verilsin.

Örnek 6.1: 55 yaşında bir sigortalı için yüzdesel primi, pozitif kaybın olması olasılığının %25 i aşmaması halinde aşağıdaki sigorta planlarına göre belirleyiniz.

a) 20 yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen
b) 20 yıllık süreli
c) 10 yıllık süreli

($\delta = 0.06$ ve ölüm tablosu ([9], sayfa 676) kullanılacak)

Çözüm:

a) 20 yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta için kayıp fonksiyonu

$$L = \begin{cases} v^T - \bar{P}\bar{a}_{\overline{T}|} & , \quad T < 20 \\ v^{20} - \bar{P}\bar{a}_{\overline{20}|} & , \quad T \geq 20 \end{cases}$$

T nin artmayan bir fonksiyonudur. L kaybının pozitif olması olasılığını en fazla 0.25 yapan T değerleri $\xi_T^{0.25}$ in altında kalan değerlerdir. $l_{55} = 86{,}408.60$ ve $l_{70.617} = 64{,}806.45$ olduğundan $\Pr(T < 15.617) = 0.25$ dir. Buna göre yüzdesel prim hesabına göre istenilen prim $\dfrac{v^{15.617}}{\bar{a}_{\overline{15.617}|}} = 0.03865$ olup, bu primle T=15.617 de kayıp sıfırdır.

b) 20 yıllık sigorta için kayıp fonksiyonu

$$L=\begin{cases} v^T-\overline{P}\bar{a}_{\overline{T}|} & , \quad T<20 \\ -\overline{P}\bar{a}_{\overline{20}|} & , \quad T\ge 20 \end{cases}$$

dir. Bu da T nin artmayan bir fonksiyonudur. Madem ki $\Pr(T<15.617)=0.25$ dir. O halde yüzdesel prim hesabına göre istenilen prim tekrar $\dfrac{v^{15.617}}{\bar{a}_{\overline{15.617}|}}=0.03865$ bulunur. Burada elde edilen prim güvenilir değildir çünkü (a) ve (b) deki planlarda aynı prim elde edildi. Halbuki 20 yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta için prim 20 yıllık süreli sigortada ki priminden daha fazladır.

c) 10 yıllık süreli sigortanın kayıp fonksiyonu

$$L=\begin{cases} v^T-\overline{P}\bar{a}_{\overline{T}|} & , \quad T<10 \\ -\overline{P}\bar{a}_{\overline{10}|} & , \quad T\ge 10 \end{cases}$$

Prim sıfıra eşitlenirse, Pr(L>0)=Pr(T<10) olur. Bu olasılık için hayat tablosundan

$$\frac{l_{55}-l_{65}}{l_{55}}=0.1281$$

bulunur. Sigortacının finansal kaybının en fazla 0.25 olduğu en az negatif olmayan yıllık prim sıfırdır. Bu durumda Pr(L>0)=0.1281 ve yüzdesel prim $\overline{P}=0$ dır. Bu örnekten şunu çıkarmak mümkündür. Yüzdesel prim prensibi bireysel sigortalarda çelişkili sonuçlar verir.

Tam hayat sigortası için,

$$L=v^T-\overline{P}\bar{a}_{\overline{T}|} \quad , \quad T\ge 0$$

dır. L nin d.f si aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$F_L(u)=\Pr(L\le u)=\Pr\left[v^T-\overline{P}\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right)\le u\right]=\Pr\left(v^T\le\frac{\delta u+\overline{P}}{\delta+\overline{P}}\right)$$

$$=\Pr\left[T\ge-\frac{1}{\delta}\log\left(\frac{\delta u+\overline{P}}{\delta+\overline{P}}\right)\right]=1-F_T\left(-\frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta u+\overline{P}}{\delta+\overline{P}}\right]\right) \quad , \quad \left(-\frac{\overline{P}}{\delta}<u\right) \qquad (6.1.1)$$

L nin p.d.f si ise

$$\frac{d}{du}F_L(u)=f_L(u)=f_T\left(-\frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\delta u+\overline{P}}{\delta+\overline{P}}\right]\right)\frac{1}{\delta u+\overline{P}} \quad , \quad \left(-\frac{\overline{P}}{\delta}<u\right).$$

6.2 Kesikli Primler

Burada sigorta edilen tutar, ölüm yılının sonunda ve ilk prim ise poliçenin başlaması ile ödenecektir. Diğer primler poliçe başlangıcının yıl dönümlerinde, sigortalı yaşadıkça ödenecektir. Yıllık primlerin kümesi bir devre başı ödemeli hayat rantı oluştururlar. Bu şartlar altında bir birimlik tam hayat sigortasının yıllık primleri P_x ile gösterilsin. Bu sigorta için kayıp fonksiyonu

$$L = v^{K+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \quad K = 0,1,2,3,....$$

Denklik prensibi $E[L] = 0$ olmasını istemektedir. Buradan

$$E[v^{K+1}] - P_x E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = 0 \Rightarrow P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

bulunur. Bu formül $\overline{P}(\overline{A}_x) = \dfrac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}$ nin kesikli benzeridir. Varyans için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$Var(L) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{(d\ddot{a}_x)^2}$$

Denklik prensibini kullanarak kesikli primli hayat sigortalarının yıllık primleri için formüller aşağıdaki gibi elde edilir. Genel kayıp ifadesi şu şekildedir:

$$b_{K+1} v_{K+1} - PY$$

Burada b_{k+1} ve v_{k+1} sırasıyla tazminat ve iskonto fonksiyonları, P sigortalı kişinin yaşadıkça periyot başında ödeyeceği prim, Y ise kesikli yıllık şimdiki değer tesadüfi değişkenidir. Denklik prensibi kullanırsa

$$E[b_{K+1} v_{K+1} - P\,Y\,] = 0 \Rightarrow P = \frac{E[b_{K+1} v_{K+1}]}{E[Y]}$$

elde edilir. Bu formül yardımıyla elde edilen kesikli sigortalar için prim formülleri Tablo 6.2 .1 de verilmektedir.

Tablo 6.2.1
Kesikli yıllık primler

Plan	Kayıp Bileşenleri $b_{K+1}v_{K+1}$	Y	Prim Formülü $\overline{P}=\dfrac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[Y]}$
Tam hayat sigortası	$1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,2,\ldots$	$P_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
n yıllık süreli sigorta	$1v^{K+1}$ 0	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, K=n,n+1,\ldots$	$P^1_{x:\overline{n}\rceil}=\dfrac{A^1_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n yıllık endowment sigortası	$1v^{K+1}$ $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rceil}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
h ödemeli tam hayat sigortası	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}, K=h,h+1,\ldots$	${}_hP_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
h ödemeli n yıllık endowment sigortası	$1v^{K+1}$ $1v^{K+1}$ $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}, K=h,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rceil}, K=n,n+1,\ldots$	${}_hP_{x:\overline{n}\rceil}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
n yıllık pür endowment	0 $1v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
n yıllık ertelenmiş tam hayat rantı	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}\rceil}v^n$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}, K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}, K=n,n+1,\ldots$	$P({}_{n\rceil}\ddot{a}_x)=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta için L kaybının varyansını hesaplayalım:

Tablo 6.2 .1 deki notasyonla başlansın:

$$Z=\begin{cases} v^{K+1} & , \quad K=0,1,2,\ldots,n-1 \\ v^n & , \quad K=n,n+1,\ldots \end{cases}$$

$$L=Z-P_{x:\overline{n}\rceil}\frac{1-Z}{d}\Rightarrow Var(L)=Var[Z(1+\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d})-\frac{P_{x:\overline{n}\rceil}}{d}]=\frac{{}^2A_{x:\overline{n}\rceil}-(A_{x:\overline{n}\rceil})^2}{(d\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil})^2}$$

Örnek 6.2: 10000 birimlik kesikli primli tam hayat sigortası göz önüne alınsın. Bu poliçe için yıllık prim π ve her bir poliçe için kayıp tesadüfi değişkeni $L(\pi)$ olsun. Poliçe yaşı 35 alınacak ve %6 faizli açıklayıcı hayat tablosu ([9], sayfa 678) kullanılacaktır.

a) $L(\pi_a)$ nın dağılımının ortalaması 0 olacak şekilde π_a primini bulunuz. $L(\pi_a)$ nın varyansını hesaplayınız.

b) $L(\pi_b)$ nin pozitif olması olasılığının 0.5 ten küçük olması için en küçük negatif olmayan π_b primini hesaplayınız. $L(\pi_b)$ nin varyansını bulunuz.

c) 100 tane bağımsız poliçede toplam kaybın normal dağılıma göre pozitif olmasının olasılığının 0.05 olması için π_c primini hesaplayınız.

Çözüm: Denklik prensibine göre

a)
$$\pi_a = 10000P_{35} = 10000\frac{A_{35}}{\ddot{a}_{35}} = \frac{1287.194}{15.39262} = 83.62$$

$$Var[L(\pi_a)] = (10000)^2 \frac{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}{(d\ddot{a}_{35})^2} = 2{,}412{,}713$$

b)
$$\Pr[L(\pi_b) > 0] < 0.5 \Rightarrow \Pr[(10000v^{K+1} - \pi_b \ddot{a}_{\overline{K+1|}}) > 0] < 0.5$$

hayat tablosundan ${}_{42}p_{35} = 0.5125101$ ve ${}_{43}p_{35} = 0.4808964$ görülmektedir. Buradan π_b, $10000v^{43} - \pi_b \ddot{a}_{43} = 0$ olacak şekilde seçilirse

$$P[L(\pi_b) > 0] = \Pr(K < 42) < 0.5 \Rightarrow \pi_b = 50.31$$

bulunur.

$$Var[L(\pi_b)] = (10000)^2[{}^2A_{35} - (A_{35})^2]\left(1 + \frac{\pi_b}{10000}\frac{1}{d}\right)^2 = 2171630$$

c) π_c primi ile bir poliçedeki kayıp

$$L(\pi_c) = 10000v^{K+1} - \pi_c \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \left(10000 + \frac{\pi_c}{d}\right)v^{K+1} - \frac{\pi_c}{d}$$

$$E[L(\pi_c)] = \left(10000 + \frac{\pi_c}{d}\right)A_{35} - \frac{\pi_c}{d}$$

$$Var[L(\pi_c)] = \left(10000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{35} - (A_{35})^2\right]$$
$$= \left(10000 + \frac{\pi_c}{d}\right)^2 (0.01831562).$$

elde edilir. Her bir poliçe için $L_i(\pi_c) = L(\pi_c)$, $(i = 1,2,\ldots,100)$ olup $S = \sum_{i=1}^{100} L_i(\pi_c)$ toplam kayıp tesadüfi değişkenini göstermektedir.

$$E[S] = 100E[L(\pi_c)]$$

ve poliçelerin bağımsız olması koşulu altında

$$Var(S) = 100Var[L(\pi_c)]$$

dir. $\Pr(S > 0) = 0.05$ olacak şekilde π_c yi belirlemek için normal yaklaşım kullanılırsa,

$$\frac{0 - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645 \Rightarrow 10\left\{\frac{-E[L(\pi_c)]}{\sqrt{Var[L(\pi_c)]}}\right\} = 1.645$$

$$(10)\left[\frac{-A_{35}\left[10000 + \frac{\pi_c}{d}\right] + \frac{\pi_c}{d}}{\left[10000 + \frac{\pi_c}{d}\right]\sqrt{{}^2A_{35} - (A_{35})^2}}\right] = 1.645 \Rightarrow \pi_c = 100.66$$

$1 = d\ddot{a}_x + A_x$ ve $1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}$ özdeşlikleri kesikli primler arasında bağıntı bulmak için kullanılabilir. Tam hayat sigortaları için

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x \Rightarrow d + P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} \Rightarrow P_x = \frac{dA_x}{1 - A_x}$$

n yıllık ölüm halinde ve vade sonunda ödenen sigorta için

$$1 = d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \Rightarrow d + P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \Rightarrow P_{x:\overline{n}|} = \frac{dA_{x:\overline{n}|}}{1 - A_{x:\overline{n}|}}$$

elde edilir.

Yılda *m* kez ödemeli primler

Eğer primler bir poliçe yılında m defa ödenirse, buna kesirsel prim denir. Ölüm yılı sonunda 1 birim ödemeli tam hayat sigortası için her m lik periyodun başlangıcında ödenebilen primler $P_x^{(m)}$ ile gösterilsin. $P^{(m)}(\bar{A}_x)$ sembolü ise sigortanın ölüm anında ödenmesi durumunu gösterir. m=2,4 veya 12 tipik örneklerdendir.

Tablo 6.2.2 de hayat sigortaları için kesirsel primleri göstermektedir. Prim formülleri denklik prensibi kullanılarak gösterilebilir.

Tablo 6.2.2
Kesirsel primler

	Ödeme yöntemleri	
Plan	Poliçe yılının sonunda	Ölüm anında
Tam hayat sigortası	$P_x^{(m)}=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_x)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}$
n yıllık süreli sigorta	$P_{x:\overline{n}\rvert}^{1(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{1})=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}}$
n yıllık endowment sigortası	$P_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}}$	$P^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}}$
h ödeme yıllı tam hayat sigortası	${}_hP_x^{(m)}=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_x)=\dfrac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}}$
h ödeme yıllı n yıllık endowment sigortası	${}_hP_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}}$	${}_hP^{(m)}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}}$

Bazı uygulamalarda yılda m kez ödemeli primleri, yıllık primin çarpanı olarak ifade etmek uygundur. Bu genel sigorta primi olan, ${}_hP_{x:\overline{n}\rvert}^{m}$ için gösterilsin. Diğer sigortalar için primler benzer şekilde hesaplanabilir.

$$ {}_hP_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}} $$

ve

$$ A_{x:\overline{n}\rvert}={}_hP_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert} $$

olduğundan

$$ {}_hP_{x:\overline{n}\rvert}^{(m)}=\frac{{}_hP_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}^{(m)}} $$

olarak yazılabilir.

Bölüm 7

Rezervler

Bir hayat rantı veya bir hayat sigorta poliçesi, belirli (sınırlı veya sınırsız) bir süre boyunca geçerli bir anlaşmayı belirler. Böyle bir anlaşmanın değeri, sigortalanan kişinin anlaşma yapıldığı tarihteki yaşına dayanarak hesaplanan sigorta tutarının peşin değeri idi. Buna net tek prim de denilmişti. Rezerv (matematik karşılık) kavramı anlaşma tarihini izleyen zamanlarda poliçe değerini hesaplama gereksiniminden doğmuştur.

Net primlerin hesaplanmasında sigortalının ödeyeceği net primlerin peşin değeri ile sigortacının yükümlülüklerinin peşin değerinin denkliği esas alınır. Eğer sigorta poliçesi net tek primle alınmışsa, sigortalı sigortacıya karşı sorumluluğunu başlangıçta yerine getirmiş olur. Örneğin, x yaşında bir kişinin yaşam boyu devam eden bir hayat sigortası için sigorta poliçesi net tek primle alınmışsa, başlangıç anında (t=0) sigortanın değeri, kısaca A_x net tek prim olur. Bu değer x yaşındaki kişinin öldüğü yılın sonunda 1 liralık tazminat ödemesi için, sigortacının o tarihteki sorumluluğunu belirler. n yıl sonra (t=n anında) sigortalı hayattaysa , anlaşma yürürlüktedir ve sigortacının sorumluluğu, sigortalı x+n yaşına girdiğinde A_{x+n} değerinde olmalıdır. Tek primli sigortalarda t=n anındaki bu sorumluluk rezerv olarak adlandırılır ve x+n yaşındaki kişi için sigorta tutarının peşin değeridir.

Yaşam boyu devam eden hayat sigortası A_x miktarında net tek primle değil de P_x miktarında yıllık prim ödemesiyle alındığında, yıllık net prim

$$P_x \ddot{a}_x = A_x$$

denkliğine dayanarak hesaplanır. Bu denklik sigorta poliçesinin satışı anında sigortalının ödeyeceği primlerin peşin değeri ile sigortacının yükümlülüklerinin peşin değerinin eşitliğini ifade eder. Başka bir deyişle, başlangıç anında (t=0) sigortacının gelecekteki yükümlülüklerini yerine getirmek için elinde bir miktar para bulundurması gerekmez; çünkü sigortalıdan almayı umduğu primler ile sigortalıya ödeyeceklerinin değeri denktir.

$$A_x - P_x \ddot{a}_x = 0$$

Buna karşın, n yılın sonunda (t=n) sigortalı hayattaysa sigortalının ödeyeceği primlerin değeri $P_x \ddot{a}_{x+n}$, sigortacının yükümlülüklerinin değeri A_{x+n} olur ve bunlar birbirine denk değildir. Dolayısıyla sigortacı gelecekteki yükümlülüklerini karşılamak için

$$A_{x+n} - P_x \ddot{a}_{x+n}$$

miktarda parayı elinde bulundurmak zorundadır. Bu değer $t=n$ anında poliçe değeri veya rezerv olarak adlandırılır. Yukarıdaki örneklere dayanarak, rezerv herhangi bir t anı için gelecekteki sigorta tutarının peşin değerinin, gelecekteki primlerin peşin değerini aşan kısmı olarak tanımlanır [1].

Bu bölümde başlangıç tarihinden sonraki periyotlarda söz konusu olan ödemeler ele alınacak. Bunun için bir dengeleme unsuru gerekmektedir. Denge unsuru, daha önceden Bölüm 6'da II. ve III. prensiplerden elde edilen primler kullanılarak açıklansın.

Bir sigortacı, ölüm yılının sonunda ödenecek 1 birimlik ödemeyi, her yılın başında sigortalı yaşadıkça ödenecek P primi ödemesine karşılık, satmış olsun. Sigortalının, sigorta başlangıcından bir yıl sonra hala yaşadığı kabul edilsin. Ayrıca i=0.06 ve K için aşağıdaki olasılık fonksiyonu kabul edilmiş olsun.

$${}_{k|}q_0 = 0.2 \quad , \quad (k = 0,1,2,3,4)$$

$K \geq 1$ olması halinde koşullu olasılık fonksiyonu

$$\Pr(K = k \mid K \geq 1) = \frac{\Pr(K = k)}{\Pr(K \geq 1)} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 , \qquad (k = 1,2,3,4)$$

sigortacının gelecekteki finansal kaybının 1 yıl sonraki şimdiki değeri

$${}_1L = v^{(K-1)+1} - P\ddot{a}_{\overline{(K-1)+1}|} .$$

${}_1V$ rezervini aşağıda belirtilen şekillerde hesaplayalım:

a) II. Prensip; $u(x) = x$ servet fayda fonksiyonunu kullanan sigortacı için, 0.30272 primini alarak riske devam etmesi ile , ${}_1V$ miktarını bir reasüröre ödeyerek riski ona devretmesi arasında fark olmasın.

Öyle bir ${}_1V$ miktarı aranıyor ki $u(w-{}_1V) = E[u(w-{}_1L) \mid K \geq 1]$ olsun. II. Prensibe göre $u(x) = x$ olduğu için $w-{}_1V = E[w-{}_1L \mid K \geq 1] = w - E[{}_1L \mid K \geq 1]$. Buna göre II.Prensip ${}_1V$ in

$${}_1V = E[{}_1L \mid K \geq 1]$$

olacak şekilde seçilmesine denktir. Buradan

$${}_1V = \sum_{k=1}^{4} (v^{(k-1)+1} - 0.30272\ddot{a}_{\overline{(k-1)+1}|}) \Pr(K = k \mid K \geq 1) = 0.1511.$$

elde edilir.

b) III. Prensip; $u(x) = -e^{-0.1x}$ servet fayda fonksiyonu kullanan sigortacı için, 0.30628 primini alarak riske devam etmesi ile bir reasüröre ${}_1V$ miktarını ödemesi arasında fark olmasın.

III. Prensip kullanırsa (1.2.1) den

$$-e^{-0.1(w-{}_1V)} = E[-e^{-0.1(w-{}_1L)} \mid K \geq 1] = -e^{-0.1w} E[e^{0.1{}_1L} \mid K \geq 1].$$

Buradan III. Prensip, ${}_1V$ in şu şekilde seçilmesine denktir.

$${}_1V = 10 \log E[e^{0.1{}_1L} \mid K \geq 1].$$

0.30628 primi kullanılarak ${}_1V$=0.14925 elde edilir.

Bundan sonra, rezervler yukarıda (a) kısmında da açıklandığı gibi denklik prensibine dayandırılacaktır. Buna göre t zamanındaki rezerv, gelecekteki tazminatın şimdiki değeri ile gelecekteki primlerin şimdiki değeri arasındaki farkın koşullu beklenen değeridir. Buradaki koşul, t zamanında sigortalının yaşıyor olmasıdır. Yukarıda (b) kısmında bulunan rezerv tipine üstel rezerv denir. Bu bölümde, primlerin hesaplanmasında kabul edilen ölüm ve faiz oranları rezervlerin hesaplanmasında da kabul edilmeye devam edilecektir.

7.1 Sürekli Rezervler

Denklik prensibi kullanılarak rezervler incelensin. (x) için 1 birim ödemeli ve $\bar{P}(\bar{A}_{[x]})$ yıllık primli sigortalının t yıl daha yaşadığını kabul eden tam hayat sigortası için rezervler ele alınsın. Bu durumda beklenen kayıp

$${}_tL = v^{T(x)-t} - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}}.$$

Buna göre rezerv

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{[x]}) = E[{}_tL \mid T(x) > t] = E[v^{T(x)-t} \mid T(x) > t] - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})E[\bar{a}_{\overline{T(x)-t|}} \mid T(x) > t]$$

$$= \bar{A}_{[x]+t} - \bar{P}(\bar{A}_{[x]})\bar{a}_{[x]+t}.$$

Poliçe yapıldığında tek bilinen (x) yaşı olması durumunda ve gelecek yaşam süresi dağılımı için toplam ölüm tablosunun kullanılması durumunda $T(x)$-t nin şartlı dağılımı da $T(x+t)$ in dağılımı ile aynıdır. Buradan yukarıdaki ifadeyi

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}$$

olarak yazılabilir.

Yukarıdaki rezerv ifadesi şunu söylemektedir:

(Rezerv)=($x+t$ yaşındaki tam hayat sigortasının aktüeryal şimdiki değeri)

- ($x+t$ yaşından sonra ödenecek yıllık $\overline{P}(\overline{A}_x)$ primlerinin aktüeryal şimdiki değeri)

$\overline{P}(\overline{A}_x)$ ve ${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$ formüllerle bağlıdır. t=0 için yukarıda ${}_0\overline{V}(\overline{A}_x)=0$ elde edilir. Bu sözleşmenin yapıldığı tarihte denklik prensibinin uygulanmasıyla elde edilir. ${}_tL$ nin varyansı hesaplanırsa

$$ {}_tL = v^{T(x)-t}\left[1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]-\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta} $$

$$ Var[{}_tL \mid T(x)>t]=\left[1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]^2 Var\left[v^{T(x)-t}\mid T(x)>t\right] $$

$$ =\left[1+\frac{\overline{P}(\overline{A}_x)}{\delta}\right]^2\left[{}^2\overline{A}_{x+t}-(\overline{A}_{x+t})^2\right] $$

elde edilir. Sürekli rezervler çeşitli sigortalar için Tablo 7.1.1 de gösterilmektedir.

Tablo 7.1.1

x poliçe yaşı, t süresi ,1 birim tazminatlı sürekli rezervler

Plan	Notasyon	Formül
Tam hayat sigortası	${}_t\overline{V}(\overline{A}_x)$	$\overline{A}_{x+t}-\overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{x+t}$
n yıllık süreli sigorta	${}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert})$	$\begin{cases}\overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}\vert}-\overline{P}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert})\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert} & t<n \\ 0 & t=n\end{cases}$
n yıllık endowment sigortası	${}_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\overline{n}\vert})$	$\begin{cases}\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}\vert}-\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\vert})\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert} & t<n \\ 1 & t=n\end{cases}$
h ödeme yıllı,tam hayat sigortası	${}^h_t\overline{V}(\overline{A}_x)$	$\begin{cases}\overline{A}_{x+t}-{}_h\overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{x+t:\overline{h-t}\vert} & t\le h \\ \overline{A}_{x+t} & t>h\end{cases}$
h ödeme yıllı n yıllık endowment sigortası	${}^h_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\overline{n}\vert})$	$\begin{cases}\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}\vert}-{}_h\overline{P}(\overline{A}_{x:\overline{n}\vert})\overline{a}_{x+t:\overline{h-t}\vert} & t\le h<n \\ \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}\vert} & h<t<n \\ 1 & t=n\end{cases}$
n yıllık pür endowment	${}_t\overline{V}(\overline{A}_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1})$	$\begin{cases}A_{x+t:\overline{n-t}\vert}^{\;\;1}-\overline{P}(A_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1})\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert} & t<n \\ 1 & t=n\end{cases}$
Tam hayat rantı	${}_t\overline{V}({}_{n\vert}\overline{a}_x)$	$\begin{cases}{}_{n-t\vert}\overline{a}_{x+t}-\overline{P}({}_{n\vert}\overline{a}_x)\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert} & t\le n \\ \overline{a}_{x+t} & t>n\end{cases}$

7.2 Kesikli Rezervler

Yıllık prim ödemeli ve tazminatın ölüm yılının sonunda ödenmesi koşulunu taşıyan sigortalar incelensin: Örneğin (x) canlısı için primli bir tam hayat sigortası ele alınsın. Sigortalının k yıl yaşaması halinde, rezerv ${}_kV_x$ ile gösterilsin. ${}_kV_x$, k süresi sonunda beklenen ${}_kL$ kaybının koşullu beklenen değeridir. Yani

$$ {}_kL = v^{(K(x)-k)+1} - P_x \ddot{a}_{\overline{(K(x)-k)+1|}} $$

$$ {}_kV_x = E[{}_kL \mid K(x) = k, k+1, \ldots] $$

dir. Buradan

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k} $$

olarak elde edilir. Bu formül gelecekteki tazminatın aktüeryal şimdiki değerinden gelecekteki primlerin aktüeryal şimdiki değerin farkıdır.

$$ {}_kV_x = E[{}_kL \mid K(x) = k, k+1, \ldots] = Var\left[v^{[K(x)-k]+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right) \mid K(x) = k, k+1, \ldots \right] $$

$$ = \left(1+\frac{P_x}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+k} - (A_{x+k})^2 \right] $$

elde edilir. Kesikli rezervler çeşitli sigortalar için Tablo 7.2.1 de gösterilmektedir.

1 birim tazminatlı kesikli n yıllık ölüm halinde ve vade sonu ödemeli sigorta için $Var\ [{}_kL \mid K(x) = k, k+1, \ldots]$ ifadesini aşağıdaki şekilde hesaplayalım:

$$ {}_kL = \begin{cases} v^{K(x)-k+1}\left(1+\dfrac{P_{x:\overline{n|}}}{d}\right) - \dfrac{P_{x:\overline{n|}}}{d} & , \ K(x) = k, k+1, \ldots, n-1 \\ v^{n-k}\left(1+\dfrac{P_{x:\overline{n|}}}{d}\right) - \dfrac{P_{x:\overline{n|}}}{d} & , \ K(x) = n, n+1, \ldots \end{cases} $$

$$ Var[{}_kL \mid K(x) = k, k+1, \ldots] = \left(1+\frac{P_{x:\overline{n|}}}{d}\right)^2 \left[{}^2A_{x+k:\overline{n-k|}} - (A_{x+k:\overline{n-k|}})^2 \right]. $$

Tablo 7.2.1
x poliçe yaşı, k süresi, 1 birim tazminatlı kesikli rezervler

Plan	Notasyon	Formül
Tam hayat sigortası	${}_kV_x$	$A_{x+k}-P_x\ddot{a}_{x+k}$
n yıllık süreli sigorta	${}_kV^1_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A^1_{x+k:\overline{n-k}\rvert}-P^1_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 0 & k=n \end{cases}$
n yıllık endowment sigortası	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}-P_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
h ödeme yıllı,tam hayat sigortası	${}^h_kV_x$	$\begin{cases} A_{x+k}-{}_hP_x\,\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert} & k<h \\ A_{x+k} & k\geq h \end{cases}$
h ödeme yıllı n yıllık endowment sigortası	${}^h_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}-{}_hP_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert} & k<h<n \\ A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & h\leq k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
n yıllık pür endowment	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}^{\;\;1}-P_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Tam hayat rantı	${}_kV({}_{n\rvert}\ddot{a}_x)$	$\begin{cases} {}_{n-k\rvert}\ddot{a}_{x+k}-P({}_{n\rvert}\ddot{a}_x)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ \ddot{a}_{x+k} & k\geq n \end{cases}$

Örnek 7.1: 50 yaşındaki kişilerden oluşan l_{50} kişilik bir grubun her birisine kesikli bazlı 5 yıllık 1000 birimlik hayat sigortasının yapıldığı kabul edilsin. Bu grup için beklenen para akışını ve rezervleri belirleyiniz. Bunun için hayat tablosunu ([9], sayfa 675) ve %6 faiz oranını kullanınız.

Çözüm: Önce yıllık prim π hesaplanır.

$$\pi = 1000P^1_{50:\overline{5}\rvert} = 6.55692$$

Buna göre istenilen değerler aşağıdaki toplu olarak verilmektedir.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Yıl	Yılın başlangıcında beklenen prim	Yılın başlangıcında beklenen fon	Beklenen faiz	Beklenen ölüm sayısı	Yılın sonunda beklenen fon	Yılın sonunda yaşaması beklenen canlı sayısı	1,000 ${}_hV^1_{50:\overline{5}\rvert}$
h	$l_{50+h-1}\pi$	$(2)_h+(6)_{h-1}$	$(0.06)(3)_h$	$1{,}000d_{50+h-1}$	$(3)_h+(4)_h-(5)_h$	l_{50+h}	$(6)_h/(7)_h$
1	586903	586903	35214	529884	92233	88979.11	1.04
2	583429	675662	40540	571432	144770	88407.68	1.64
3	579682	724452	43467	616416	151503	87791.26	1.73
4	575640	727143	43629	665065	105707	87126.20	1.21
5	571280	676987	40619	717606	0	86408.60	0.00

Rezerv değerleri formüllerle hesaplanabilir: Örneğin 2 periyot sonrası için

$$1000A^{1}_{52:\overline{3}|} = 20.09 \ , \quad \ddot{a}_{52:\overline{3}|} = 2.81391$$

Buradan

$$1000\,{}_{2}V^{1}_{50:\overline{5}|} = 20.09 - (6.55692)(2.81391) = 1.64$$

elde edilir.

Bölüm 8

Çoklu Azalma Teorisinin Özel Emeklilik Planlarına Uygulanması

Çoklu Azalma (Dekrament) Teorisi ' nin amacı, tek bir canlının belirli bir statüde bulunma süresinin sona ermesini ve sona erme nedenlerini ilgilendiren iki veya daha fazla tesadüfi değişkenin olasılık dağılımını inşa etmektir. Bu şekilde elde edilen model birçok uygulama sahasına sahiptir. Aktüeryal bilimde , verilen bir statünün sona ermesine azalma denir. Dolayısıyla bu teoriye de çoklu azalma teorisi adı verilir. Bioistatistikte bu teoriye risklerin rekabeti teorisi denir. Bu teorinin temelleri 1874 de Makeham tarafindan atılmış, daha sonraları 1932 de Menge ve 1948 de Nesbitt ve Van Eenam tarafindan geliştirilmiştir. 1964 de Hickman bu teoriyi stokastik model dili kullanarak yeniden geliştirmiştir.

Çoklu azalma modeli bir çok finansal güvenlik sistemlerinin incelenmesi için bir yöntem verir. Örneğin hayat sigorta poliçeleri , sigortalının kaza ile ölümü halinde veya sigortalının çalışamaz duruma düşmesi halinde özel tazminatlar (benefit) temin ederler. Tek azalma modelleri ile , yani tek bir sebebe dayanarak inşa edilen olasılık dağılımları yardımıyla böyle çok tazminatlı poliçeler için bir matematiksel model oluşturmak mümkün değildir. Ayrıca sigortalının prim ödeme esnasında çekilmesi halinde kayba uğramaması için temin edilen tazminatların hesabı da çoklu azalma modelinin bir uygulamasıdır.

Çoklu azalma modelinin en çok kullanıldığı yerlerden biri de emeklilik planlarıdır. Bir planın katılımcıları bir çalışanlar grubu veya tek bir çalışan olabilir veya bir grup işverenin işçilerinden oluşabilir. Bir emeklilik planı, katılımcılarına yaşlılık halinde emeklilik tazminatı ve maluliyet haline emeklik tazminatı veya belirli bir servis temin eder. İşten ayrılmalarda , üyenin yapmış olduğu katkıların birikimini veya bir ertelenmiş emeklilik tazminatı temin eder. Eğer bir ölüm hali ortaya çıkarsa, ya toplu bir para ödemesi veya dul eşe veya çocuklarına belirli bir devamlı gelir temin eder. Tazminatların maliyetinin karşılanması için ödenmesi gereken ödemelere katkılar denir. Bu katkılar belli bir oranda çalışan ve işveren tarafindan karşılanırlar.

Bir emeklilik planı, ertelenmiş hayat rantını (emeklilik esnasında ödenen) ve belirli yardımcı rantları, aktif servis esnasında geçici olarak ödenen katkı rantları karşılığında satılan bir sistem olarak düşünülebilir. Tazminatların ve katkıların aktüeryal bugünkü değerlerinin dengelenmesi bireysel bazda olduğu gibi bütün servis üyelerinin toplamı bazında da yapılabilir. Bu dengelenmeyi gerçekleyen metotlara emeklilik fonlama teorisi adı verilir [9], [10].

Bu ve bundan sonraki bölümlerde emeklilik planlarına ait tazminat ve katkıların aktüeryal değerlendirilmesi tipik bir katılımcı esas alınarak yapılacak ve bu değerlendirme bütün katılımcılar üzerinden toplanarak toplam değerlere varılacaktır.

8.1 Çoklu Azalma Tabloları

Farklı fonlar, tazminatların farklı çeşitleri nedeniyle farklı yapılar arzedebilirler. Bununla beraber bütün hallerde gelecekteki tazminatların ve katkıların değerlendirilmesi, bir çoklu azalma tablosuna dayanan parasal fonksiyonları ve maaş artış oranlarını gösteren cetveller yardımıyla yapılır. Çoklu azalma tablolarına servis tablosu da denilir. Bu tablolarda şu semboller kullanılır:

l_x = Serviste tam x yaşında olan aktif üye sayısı,
w_x = Serviste x yaşında olanlardan $x+1$ yaşına kadar ayrılan aktif üye sayısı,
d_x = Serviste x yaşında olup $x+1$ yaşına kadar ölen aktif üye sayısı,
i_x = Serviste x yaşında olanlardan $x+1$ yaşına kadar maluliyetten ayrılan aktif üye sayısı,
r_x = Serviste x yaşında olanlardan emekli yaşına kadar gelip emekli olan aktif üye sayısı.

Bu değişkenlere ait bir azalma tablosu örneği olarak Tablo 8.1.1 verilebilir. Bu bölümde verilecek örneklerde bu tablo kullanılacaktır. Buna göre, burada incelenen özel emeklilik modelinde 4 ayrı azalma nedeni söz konusu olmaktadır. Bu tesadüfi değişkeler yardımıyla sistem hakkındaki bütün olasılıklar hesaplanabilir.

Bu modele göre sistemi x yaşında terkeden toplam insan sayısı aşağıdaki şekildedir.

$$l_x - l_{x+1} = w_x + d_x + i_x + r_x$$

x yaşındaki bir aktif üyenin tam bir yıl içinde geri çekilme, ölüm, maluliyet ve yaşlılıktan emeklilik nedeniyle sistemden ayrılmasının olasılıkları sırasıyla $q_x^w, q_x^d, q_x^i, q_x^r$ ile gösterilsin. Buna göre x yaşındaki aktif bir üyenin sistemde 1 yıl kalmasının olasılığı

$$p_x = 1-(q_x^w + q_x^d + q_x^i + q_x^r)$$

olur. Aşağıdaki eşitlikleri kolayca yazılabilir:

$$l_{x+1} = l_x p_x, \qquad p_x = l_{x+1}/l_x$$

Aynı zamanda x yaşındaki bir aktif üyenin sistemde k yıl kalmasının olasılığı şu şekilde ifade edilebilir:

$$_k p_x = l_{x+k}/l_x$$

Örneğin Tablo 8.1.1'e göre tam 18 yaşında olan bir aktif üyenin 3 yıl sistemde kalmasının olasılığı

$$ {}_3p_{18} = l_{21}/l_{18} = 72706/100000 = 0.72706. $$

Tablo 8.1.1
Emeklilik azalma tablosu ve maaş cetveli

Yaş x	l_x	w_x	d_x	i_x	r_x	s_x
18	100000	10000	80			1.00
19	89920	8992	72			1.10
20	80856	8085	65			1.21
21	72706	6907	58			1.33
22	65741	5917	59			1.46
23	59765	5080	54			1.59
24	54631	4371	49			1.73
25	50211	3766	50			1.87
26	46395	3248	46			2.02
27	43101	2802	47			2.16
28	40252	2415	44			2.29
29	37793	2079	45			2.42
30	35669	1784	46			2.55
31	33839	1557	47	3		2.67
32	32232	1354	49	3		2.78
33	30826	1171	49	3		2.88
34	29603	1007	50	6		2.98
35	28540	856	51	6		3.08
36	27627	746	52	6		3.18
37	26823	644	54	8		3.28
38	26117	548	55	8		3.38
39	25506	459	56	8		3.48
40	24983	375	57	10		3.58
41	24541	295	61	10		3.68
42	24175	218	65	12		3.78
43	23880	143	69	12		3.88
44	23656	71	76	14		3.98
45	23495		82	14		4.08
46	23399		92	16		4.18
47	23291		100	19		4.28
48	23172		108	21		4.38
49	23043		120	23		4.47
50	22900		130	28		4.56
51	22742		143	32		4.65
52	22567		156	39		4.73
53	22372		170	44		4.81
54	22158		184	53		4.88
55	21921		200	61		4.95
56	21660		217	71		5.01
57	21372		236	83		5.07
58	21053		254	99		5.13
59	20700		276	118		5.19
60	20306		297	146	4061	5.24
61	15802		253	153	2370	5.29
62	13026		228	178	1303	5.33
63	11317		216	217	1132	5.37
64	9752		203	265	975	5.40
65	8309				8309	

Tam 18 yaşında olan bir aktif üyenin sistemi 1 yıl içinde terketmesinin olasılığı

$$q_{18} = (l_{18} - l_{19})/l_{18} = (100000 - 89920)/100000 = 0.1008$$

olarak elde edilir. Tam 20 yaşında olan bir üyenin gelecek yılda sistemden geri çekilmesinin olasılığı

$$q_{20}^{w} = w_{20}/l_{20} = 8085/80856 = 0.09999$$

dir.

8.2 Azalmanın Etkisi

Bir çoklu azalma tablosundaki azalmanın toplam etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_x = (-1/l_x).(dl_x/dx)$$

Bu fonksiyon tekli azalma modellerindeki ile aynıdır. Azalma etkisi yardımıyla azalma sebeplerinin olasılık dağılımlarını ifade etmek mümkündür. Benzer şekilde x yaşında her bir azalma sebebinin de etkisi tanımlanabilir. Örneğin maluliyet sebebiyle olan azalmanın etkisi

$$\mu_x^i = (-1/l_x).(dl_x^i/dx)$$

olarak hesaplanır. Burada l_x^i fonksiyonu aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$l_x^i = \sum_{t=0}^{\infty} i_{x+t}$$

Bu ifade; x yaşında olup, sistemi maluliyet sebebi ile terkedecek olanların toplam sayısıdır. Benzer şekilde diğer değişkenlerinde azalma etkileri hesaplanabilir.

Pratikte l_x^i fonksiyonuna nadir rastlanır ve bu azalmanın kısmi etkilerinin hesaplanması için kullanılır. Bu fonksiyonlar bütün değişkenler üzerinden toplanırsa

$$l_x = l_x^w + l_x^d + l_x^i + l_x^r$$

elde edilir.

Bu fonksiyonlar yardımı ile x yaşındaki bir aktif üyenin, örneğin maluliyet sebebi ile sistemi x ile $x+n$ yaşları arasında terketmesinin olasılıkları hesaplanır:

$${}_nq_x^i = (l_x^i - l_{x+n}^i)/l_x = \left(\frac{1}{l_x}\right)\sum_{t=0}^{n-1} i_{x+t}$$

Buna göre x yaşındaki bir aktif üyenin bir yıl içinde maluliyet nedeniyle sistemi terketmesinin olasılığı

$$q_x^i = i_x / l_x$$

dir.

Azalma etkileri ile azalma olasılıkları arasında önemli bir fark vardır. Olasılıklarda belirli bir zaman aralığı söz konusu olup, bu zaman içinde bütün azalma sebepleri işlemektedir, öyle ki herhangi bir sebepten olan azalmanın sayısı diğerlerinin büyüklüklerinden bağımsız değildir. Örneğin, diğer bütün azalma çeşidi artarsa, bir tanesinin azalması sebebiyle azalma olasılığı azalabilir. Diğer taraftan her azalma etkisi zaman aralığına bağlı değildir ve diğer azalmaların değişiminden etkilenmezler.

Kısmi azalma etkileri, azalma tablosundan yaklaşık olarak hesaplanabilir. Örneğin x yaşındaki maluliyetten azalmanın etkisi aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak bulunabilir:

$$\mu_x^i \cong (i_{x-1} + i_x)/(2l_x)$$

Bir çoklu azalma tablosundan her bir azalma sebebi için tek azalma tabloları tanımlanabilir. Bu tablo söz konusu azalmanın diğerlerinden bağımsız olarak işlevini gösterir. Her tablo, tek bir sebeple sistemde azalan aktif üye sayısını gösterir. Tersine olarak her bir sebep için tek azalma tabloları verilmiş ise bunlar yardımıyla çoklu azalma tablosu inşa edilebilir.

8.3 Özel Emeklilik Planlarının Özellikleri

Özel emeklilik planlarının değerlendirilmesi için bir çoklu azalma tablosuna ve maaş cetveline ihtiyaç vardır. Yukarıda verilen 4' lü azalma tablosu ve maaş cetveli bu amaç için bir örnektir. Burada söz konusu edilen 4 ayrı tesadüfi değişken (geri çekilme, ölüm, maluliyet ve yaştan emeklilik) için değişik uygulama özellikleri söz konusu olabilir.

Sistemden geri çekilme durumunda , aktif üye tarafından daha önce yapılan katkılar iki türlü değerlendirilebilir. Ya bu katkılar belirli bir değerlendirme ile üyeye geri ödenir veya bir korunmuş emeklilik hakkı olarak değerlendirilir. Korunan emeklilik sabit bir değer olabilir veya olmayabilir. Örneğin kişi başına düşen milli gelir arttıkça o da artabilir veya emekliliğe kadar sabit bir değerde kalır. Bütün bu haklar için sistemde bazı koşullar konulabilir, örneğin sistemde belirli bir süre aktif olarak kalma mecburiyeti gibi.

Bir çok planlarda maluliyetten emeklilik için bazı koşullar konabilir. Örneğin maluliyetten emeklilik için belirli bir süreyi serviste geçirme mecburiyeti istenebilir. Ayrıca emeklilik tazminatı için oran tespiti farklı yapılabilir. Yani verilecek emeklilik tazminatı normal yaştaki emeklilikten farklı olabilir.

Yaştan emeklilikte belirli bir sınır konabilir. Örneğin emekli olma yaşı 65 ise r_x için yalnız r_{65} söz konusudur. r_{65} ile l_{65} sayısı aynıdır. Bazen bu emeklilik yaşı bir aralığa yayılır, örneğin eğer üye serviste toplam 40 yıl geçirmiş ise 60 ile 65 yaşı arasında emekli olma hakkı verilir. Ayrıca 65 yaşında emekli olabilmek için serviste minimum bir süre geçirmiş olması , örneğin 15 yıl gibi, şartı konabilir. Bu durumda, aktif üye sisteme en geç 50 yaşında girmesi halinde emeklilik şansına sahip olabilir.

Bazı emeklilik planlarında tazminatlar maaşa bağlı olmayıp serviste geçen süreye bağlı olarak hesaplanır. Fakat bir çok planlarda emeklilik tazminatları ve katkılar üyenin aldığı maaşa bağlıdır. Bu nedenle bir maaş cetveli gerekir. s_x ile x yaşındaki bir üyenin maaş büyüklüğü gösterilirse, s_{x+t} / s_x oranı , üyenin $x+t$, $x+t+1$ yaş yılındaki kazancının x, $x+1$ yaş yılındaki kazancına oranını gösterir. Bu oranlar tablo 8.1 de gösterilmektedir. Bu oranlarda enflasyon etkisi göz ardı edilmiştir. Eğer enflasyon faktörü de dikkate alınırsa, enflasyona ait oran s_x ile çarpılmalıdır. Örneğin her yıl ortalama % 30 enflasyon etkisi katılmak istenirse cetveldeki terimler $(1.30)^{x-18}$ ile çarpılarak yeniden düzenlenmelidir.

Bu ve bundan sonra anlatılacak örneklerde Tablo 8.1.1 kullanılacaktır. Bu tabloya göre emeklilik 60 ile 65 yaşları arasında olmaktadır. Ayrıca maluliyetten emekli olma 31 yaşından sonra mümkün olmaktadır. Sisteme 18 yaşında üye olunabilmekte ve geri çekilme 44 yaşına kadar mümkündür. Bu tablo için azalma oranları gösterilmemektedir, fakat bunlar teoride oluşturulan formüller yardımıyla elde edilebilirler.

Bütün azalma etkilerinin 60 ile 65 yaşları arası hariç diğer bütün yaşlar için sürekli olduğu kabul edilmektedir. 60 ile 65 yaşları arasında süreksiz olabilir. Geri çekilme oranları sistemde geçen sürenin ve yaşın bir fonksiyonu olabilir.

Emekli olanlar için de ayrı bir ölüm tablosu gerekir. Genellikle maluliyetten emekli olanlarla normal yaştan emekli olanlar için ayrı ayrı ölüm tablolarının kullanılması daha uygundur.

Maaş cetvelleri maaş artış hesaplamalarında standart bir pratiği gösterememektedir. Farklı şirketlerdeki maaş artışları farklı olabilmektedir.

Bir çok emeklilik planlarında kadın ve erkek ayrımı yapılması alışılagelmiştir. Özellikle emeklilik yaşında farklılık vardır. Kadınlar için emeklilik 60 yaşından önce olabilir. Ayrıca kadın ve erkek için ayrı ayrı azalma oranları söz konusudur. Dolayısıyla kadın ve erkekler için farklı emeklilik planları hazırlanır.

Ayrıca birçok şirketlerde yönetici sınıf ile rutin çalışanlar arasında farklı servis tabloları ve maaş cetvelleri kullanılmaktadır.

Katkı esaslı emeklilik planlarında, plan başlayınca çalışan ve işveren katkı oranlarının başta belirlenmesi gerekir. Belirli aralıklarla , örneğin yıllık , 3 yıllık gibi, gelecekte beklenen tazminat ve katkıların değerlendirilmesi yapılmalıdır ve bunlar planın varlıkları ile karşılaştırılmalıdır.

Aşağıda bir emeklilik planında değerlendirilmesi gereken hususlar belirtilmektedir:

(1) Katkılar

(a) Üyelerin gelecekte yapacağı katkıların bugünkü değeri,
(b) İşverenin gelecekte yapacağı katkıların bugünkü değeri. İşveren katkısı sabit bir değer olabilir, üyenin katkısının veya maaşının veya her ikisinin bir kombinasyonunun belirli bir oranı olabilir. Birçok planda , maaşa dayalı katkıya ilaveten sorumlulukların karşılanabilmesi için sabit bir toplam tutar da belirlenmektedir.

(2) Tazminatlar

(a) Yaşlılıktan emeklilik,
(b) Maluliyetten emeklilik,
(c) Sistemden geri çekilme (Üyenin o vakte kadar yaptığı katkılar kendisine faizsiz veya daha düşük faizle birikimlerinin toptan geri ödenmesi veya serviste belirli bir süreyi doldurması halinde emeklilik yaşı gelince kendisine enflasyonla artacak olan belirli bir emekli maaşın bağlanması hakkı verilir.)
(d) Ölüm halinde, (Dul eşe ve yetim çocuklara ya toplu para ödenmesi veya emeklilik tazminatı ödenmesi)

Emeklilik fonlarının hesaplanması ölüm oranlarına, yaşlılıktan ve maluliyetten emeklilik oranlarına, geri çekilme oranlarına ve maaş cetveline bağlıdır. Plana daha çeşitli ve ayrıntılı tazminat ve katkılar ilave edilmesi halinde, bunlara ait aktüeryal hesapların yapılabilmesi için bunlarla ilgili data gereklidir. Bu datalar ne kadar ayrıntılı ve fazla ise aktüerin emeklilik planını değerlendirmesi daha iyi sonuç verir.

Bir emeklilik fonunun değerlendirilmesi için aşağıdaki bilgilerin elde bulunması gerekir:

(a) Servis tablosu,
(b) Maaş cetveli (Tazminatların maaşa bağlı olmaması halinde gerekli değildir.)
(c) Yıllık 1 birim miktarında emeklilik tazminatının rant değerleri. Rant değerleri, fonun yapısına, tazminat ve katkıların ödenme periyotlarına, enflasyonun dikkate alınmasına göre hesaplanırlar.

Bölüm 9

Belirlenmiş Maaş Esaslı Emeklilik Programlarının Aktüeryal Değerlendirilmesi

Bu emeklilik programında, katılımcı emekli olduğunda ne kadar maaş alacağını önceden bilmektedir. Katılımcının emekli maaşı her çalışma yılına karşılık belirli miktarda gelire hak kazanma, çalışma döneminin sonundaki aylık gelirin belirli bir yüzdesine hak kazanma ya da bu iki yöntemin birleşiminden oluşan bir metoda göre önceden tespit edilebilmektedir [10].

Belirlenmiş maaş esaslı emeklilik programlarının en önemli avantajı, çalışanın emeklilik dönemindeki maaşını önceden biliyor olması ve bu maaşını alamama riskinin olmamasıdır.

9.1 Üyenin Aldığı Yıllık Maaşa Bağlı Olmayan Emeklilik

Bu emeklilik türünde katılımcının servisin her bir yılı için P miktarında bir emeklilik maaşına hak kazandığı kabul edilecek.

x yaşında bir üyenin maluliyetten y yaşında emekli olması halinde kendisine yıllık 1 birim emekli maaşı ödenmesinin x yaşındaki değeri; (Emekliliğin yıl ortasında olduğu kabul edilecektir.)

$$v^{y+\frac{1}{2}-x}\frac{i_y}{l_x}\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{v^{y+\frac{1}{2}}i_y\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}}}{v^x l_x}$$

$$=\frac{C^{ia}_y}{D_x},$$

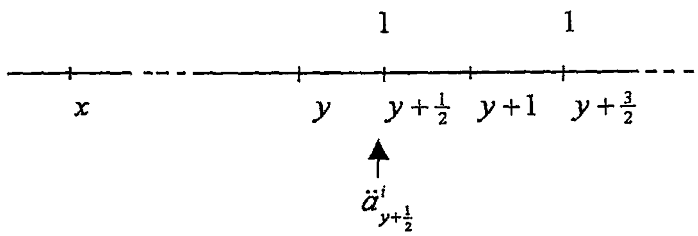
burada $C^{ia}_y = v^{y+\frac{1}{2}}i_y\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}}$, $(y<65)$, $D_x = v^x l_x$,

$v = (1+j)^{-1}$,

j = yıllık faiz oranı,

i_y = y ile $y+1$ yaşları arasında maluliyetten emekli olanların sayısı,

l_x = x yaşındaki aktif üye sayısıdır.



$$\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_{y+\frac{1}{2}}$$

x yaşında bir üyenin herhangi bir yaşta (limit yaşı 64 olmak üzere) maluliyetten emekli olması halinde kendisine yıllık 1 birim emekli maaşı ödenmesinin x yaşındaki değeri; (Emeklilik başlangıçlarının yıl ortasında olduğu kabul ediliyor.)

$$\frac{C_x^{ia}}{D_x} + \frac{C_{x+1}^{ia}}{D_x} + \frac{C_{x+2}^{ia}}{D_x} + \cdots + \frac{C_{64}^{ia}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{y=x}^{64} C_y^{ia}$$

$$= \frac{M_x^{ia}}{D_x},$$

burada $M_x^{ia} = \sum_{y=x}^{64} C_y^{ia} = \sum_{t=0}^{64-x} C_{x+t}^{ia}$ dır.

Bu emeklilik türü servisin her bir yılı için P emeklilik miktarını ödemeyi kabul ettiğinden ve değerlendirme zamanı x'e kadar geçen süre n yıl ise geçmiş servis süresine bakıldığında ortaya çıkan emeklilik maaşı nP olur. Buna göre bu ödemelerin x yaşındaki değeri;

$$(nP)\frac{M_x^{ia}}{D_x}$$

dir. Plandaki x yaşındaki bütün üyeler için geçmiş servis süresinden gelen toplam değer;

$$(\sum n)P\frac{M_x^{ia}}{D_x}$$

olur.

x yaşında bir üyenin serviste ileride geçireceği süreden dolayı ortaya çıkacak olan emeklilik tazminatlarını değerlendirmek için önce y ile $y+1$ yaşları arasında servisten ortaya çıkan tazminat düşünülsün. Bu yıllar arasında maluliyetten emekli olma olasılığı $\frac{i_y}{l_x}$ ve emekliliğin yıl ortasında olduğu farz edilirse ilk yarı yıldan ortaya çıkacak emekliliğin miktarı $\frac{P}{2}$ dir. Sonraki yıllarda örneğin $y+1$ ile $y+2$ yılları arasında emekliliğin meydana gelmesi olasılığı $\frac{i_{y+1}}{l_x}$ ve y'den $y+1$'e emekliliğin miktarı P olacaktır. Benzer bir şekilde gelecekteki her bir yıl için servisten y ile $y+1$ yaşları arasında hak kazanılan miktar P olacak. y ile $y+1$ yaşları arasında gelecek servisten gelen emekliliğin x yaşındaki toplam değeri şu şekilde hesaplanır:
İlk önce y noktasındaki toplam değer;

$$\frac{1}{2}Pv^{\frac{1}{2}}\frac{i_y}{l_x}\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}}+Pv^{1\frac{1}{2}}\frac{i_{y+1}}{l_x}\ddot{a}^i_{y+1\frac{1}{2}}+\cdots+Pv^{(64-y)+\frac{1}{2}}\frac{i_{64}}{l_x}\ddot{a}^i_{64\frac{1}{2}}$$

dir. Bu toplamı x'e götürmek için v^{y-x} ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{2}Pv^{y+\frac{1}{2}-x}\frac{i_y}{l_x}\ddot{a}^i_{y+\frac{1}{2}}+Pv^{y+1\frac{1}{2}-x}\frac{i_{y+1}}{l_x}\ddot{a}^i_{y+1\frac{1}{2}}+\cdots+Pv^{64\frac{1}{2}-x}\frac{i_{64}}{l_x}\ddot{a}^i_{64\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{P}{D_x}(\frac{1}{2}C_y^{ia}+C_{y+1}^{ia}+\cdots+C_{64}^{ia})$$

$$=\frac{P}{D_x}(\overline{M}_y^{ia})$$

bulunur. Burada $\overline{M}_y^{ia}=M_y^{ia}-\frac{1}{2}C_y^{ia}$ dır. Bütün bunlar y'ler üzerinden toplanırsa (x'den 64'e kadar)

$$=\frac{P}{D_x}\sum_{y=x}^{64}\overline{M}_y^{ia}=\frac{P}{D_x}\sum_{t=0}^{64-x}\overline{M}_{x+t}^{ia} \quad (y=x+t)$$

$$=\frac{P}{D_x}\overline{R}_x^{ia},$$

burada $\overline{R}_x^{ia} = \sum_{t=0}^{64-x} \overline{M}_{x+t}^{ia}$ dır. Bu ifade x yaşındaki bütün üyeler üzerinden toplanırsa;

$$(\sum P)\frac{\overline{R}_x^{ia}}{D_x}$$

elde edilir.

Gelecek servisten ortaya çıkan emekliliğin x yaşındaki değerini hesaplamak için doğrudan bir yaklaşım aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{P}{D_x}(\frac{1}{2}C_x^{ia} + 1\frac{1}{2}C_{x+1}^{ia} + 2\frac{1}{2}C_{x+2}^{ia} + \cdots + (64\frac{1}{2} - x)C_{64}^{ia})$$

Yukarıdaki model i yerine r yazılarak ve tam 65 yaşında emekliliğin eklenmesi ile yaştan emeklilik haline genişletilebilir. 65 yaşından itibaren her yıl 1 birim emekli maaşı ödenmesinin x yaşındaki değeri;

$$v^{65-x}\frac{r_{65}}{l_x}\ddot{a}_{65}^{r} = \frac{v^{65} r_{65} \ddot{a}_{65}^{r}}{v^x l_x} = \frac{C_{65}^{ra}}{D_x}$$

dır. Bu ifadede C_{65}^{ra}' nın $C_y^{ia} = v^{y+\frac{1}{2}} i_y \ddot{a}_{y+\frac{1}{2}}^{i}$ den farklı olmasının nedeni 65' in son emeklilik yaşı olmasıdır. r_{65}, 65 yaşında yaştan emekli olanların sayısını göstermektedir. Bazı hallerde maluliyet ve yaştan emeklilik tazminatı bir arada değerlendirilir. Aşağıda %4 faiz kullanılarak hesaplanan yaştan emeklilik fonksiyonları (Tablo 9.1.1) , maluliyetten emeklilik fonksiyonları (Tablo 9.1.2) ve katkı fonksiyonları (Tablo 9.1.3) ([10], sayfa 440-443) verilmektedir.

Tablo 9.1.1
%4 yıllık faizle hesaplanan yaştan emeklilik fonksiyonları

Yaş x	C_x^r	M_x^r	$\bar{R}_x^r$	C_x^{ra}	M_x^{ra}	$\bar{R}_x^{ra}$	${}^s\bar{M}_x^{ra}$	${}^s\bar{R}_x^{ra}$	${}^zC_x^{ra}$	${}^zM_x^{ra}$	${}^z\bar{R}_x^{ra}$
20		1524	65669		16742	719370	20258	2567780		88345	3798939
25		1524	58049		16742	635660	31308	2445228		88345	3357212
30		1524	50430		16742	551950	42462	2265084		88345	2915486
35		1524	42810		16742	468240	51565	2033040		88345	2473760
40		1524	35191		16742	384530	59936	1758471		88345	2032033
45		1524	27571		16742	300820	68307	1442047		88345	1590307
50		1524	19951		16742	217110	76344	1083936		88345	1148580
55		1524	12332		16742	133399	82873	688322		88345	706854
56		1524	10808		16742	116657	83877	605450		88345	618509
57		1524	9284		16742	99915	84882	521572		88345	530163
58		1524	7760		16742	83173	85886	436690		88345	441818
59		1524	6236		16742	66431	86891	350804		88345	353473
60	379	1524	4712	4520	16742	49689	75887	263913	23321	88345	265127
61	212	1145	3378	2459	12222	35207	58152	188026	12811	65024	188443
62	112	933	2339	1258	9764	24214	48686	129874	6618	52213	129824
63	94	821	1462	1016	8505	15079	42944	81187	5397	45596	80920
64	78	727	688	814	7489	7082	38243	38243	4352	40199	38022
65	649	649		6675	6675				35846	35846	

Tablo 9.1.2
%4 yıllık faizle hesaplanan maluliyetten emeklilik fonksiyonları

Yaş x	C_x^i	M_x^i	$\bar{R}_x^i$	C_x^{ia}	M_x^{ia}	$\bar{R}_x^{ia}$	${}^s\bar{M}_x^{ia}$	${}^s\bar{R}_x^{ia}$	${}^zC_x^{ia}$	${}^zM_x^{ia}$	${}^z\bar{R}_x^{ia}$
20		189	6841		1821	64923	2203	215088		8636	318302
25		189	5897		1821	55820	3404	201761		8636	275122
30		189	4952		1821	46718	4642	182173		8636	231941
35	1	185	4016	15	1774	37699	5441	157184	45	8513	188977
40	2	177	3111	22	1688	29034	6004	128781	75	8243	147045
45	2	166	2254	25	1572	20873	6361	97957	98	7819	106825
50	4	151	1459	39	1421	13367	6391	65879	173	7197	69159
55	7	127	757	69	1170	6831	5618	35026	335	6036	35759
56	8	120	634	77	1100	5696	5320	29408	377	5700	29891
57	9	112	518	85	1023	4634	4972	24089	424	5323	24379
58	10	103	410	96	938	3653	4566	19117	484	4899	19268
59	11	93	312	109	842	2763	4088	14550	554	4415	14611
60	14	82	224	127	733	1975	3509	10462	657	3861	10472
61	14	68	149	126	606	1306	2871	6953	658	3204	6940
62	15	54	88	139	480	763	2187	4082	729	2546	4064
63	18	39	41	159	341	353	1404	1895	844	1817	1882
64	21	21	11	182	182	91	491	491	974	974	487

Tablo 9.1.3
%4 yıllık faizle hesaplanan katkı fonksiyonları

Yaş x	D_x	$\overline{D}_x$	$\overline{N}_x$	${}^s\overline{D}_x$	${}^s\overline{N}_x$	${}^sD_x$
18	49363	46021	438252	46021	973119	49363
19	42680	39791	392231	43770	927098	46948
20	36902	34404	352440	41629	883328	44651
21	31906	29823	318037	39665	841699	42435
22	27740	25994	288214	37951	802034	40500
23	24248	22780	262220	36220	764083	38554
24	21313	20074	239440	34728	727863	36871
25	18835	17785	219366	33258	693135	35222
26	16734	15841	201581	31999	659877	33803
27	14948	14186	185740	30642	627878	32288
28	13423	12771	171555	29246	597236	30739
29	12118	11558	158784	27970	567990	29326
30	10997	10515	147226	26813	540020	28043
31	10032	9610	136711	25659	513207	26785
32	9188	8819	127102	24517	487548	25542
33	8449	8126	118283	23403	463031	24334
34	7802	7518	110157	22404	439628	23249
35	7232	6982	102640	21505	417224	22276
36	6732	6508	95658	20695	395719	21407
37	6284	6084	89150	19956	375024	20613
38	5884	5704	83066	19280	355068	19887
39	5525	5364	77362	18667	335788	19227
40	5204	5059	71997	18111	317121	18629
41	4915	4785	66938	17609	299010	18087
42	4656	4539	62153	17157	281401	17598
43	4422	4317	57614	16750	264244	17157
44	4212	4117	53297	16386	247494	16763
45	4022	3937	49180	16063	231108	16411
46	3852	3769	45243	15754	215045	16100
47	3687	3607	41474	15438	199291	15778
48	3527	3449	37867	15107	183853	15447
49	3372	3297	34418	14738	168746	15073
50	3222	3150	31121	14364	154008	14693
51	3077	3006	27971	13978	139644	14308
52	2936	2867	24965	13561	125666	13886
53	2799	2732	22098	13141	112105	13461
54	2665	2600	19366	12688	98964	13006
55	2535	2472	16765	12236	86276	12549
56	2409	2347	14294	11758	74040	12068
57	2285	2225	11947	11281	62282	11586
58	2165	2106	9722	10804	51001	11105
59	2046	1988	7616	10318	40197	10621
60	1930	1687	5628	8840	29879	10115
61	1444	1295	3940	6851	21039	7641
62	1145	1051	2646	5602	14188	6102
63	956	874	1595	4693	8586	5136
64	792	721	721	3893	3893	4279
65	649					

Örnek 9.1: Tablo 9.1.1 , Tablo 9.1.2 ve Tablo 9.1.3'ü kullanarak 30 yaşında emeklilik planına giren şu anda 40 yaşında olan bir üye için aşağıdaki emeklilik hallerinin şimdiki değerini hesaplayınız.

(a) Yaşlılık ve Maluliyetten emeklilik üzerine yıllık 1000$ emekli maaşı alması
(b) Yaşlılıktan dolayı emeklilik üzerine gelecek servisin her bir yılı için yıllık 100$ emekli maaşı alması
(c) Maluliyetten dolayı emekli olması halinde üyelik süresinin her bir yılı için yıllık 50$ emekli maaşı alması
(d) Emeklilik halinde serviste ileride geçireceği her bir yıl için 100$ ve ayrıca 65'inden önce emekli olmaması halinde ilave olarak yıllık 200$ bir emekli maaşı alması

Çözüm:
(a)

$$\frac{1000}{D_{40}}(M_{40}^{ia}+M_{40}^{ra})=\frac{1000}{5204}(1688+16742)\cong 3542\ \$$$

(b)

$$\frac{P}{D_x}\overline{R}_x^{ra}=\frac{100}{D_{40}}\overline{R}_{40}^{ra}=\frac{100}{5204}(384530)\cong 7389\ \$$$

(c) Geçmişte 10 yıllık bir üyelik söz konusu olup;

$$\frac{(10)(50)}{D_{40}}M_{40}^{ia},$$

Gelecek servis yılları için;

$$\frac{P}{D_x}\overline{R}_{40}^{ia},$$

bulunur. O halde toplam emeklilik değeri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{50}{D_{40}}(10M_{40}^{ia}+\overline{R}_{40}^{ia})=\frac{50}{5204}((10)(1688)+29034)\cong 441\ \$$$

(d) Emeklilik için hiç bir sebep verilmediğine göre hem maluliyetten hem yaştan emeklilik için hesaplama yapılacaktır. Buna göre gelecek servis yılları için emekliliğin değeri;

$$\frac{100}{D_{40}}(\overline{R}_{40}^{ia}+\overline{R}_{40}^{ra})$$

ve ek olarak 65 yaşında emekli olursa alacağı 200$ emekli maaşının değeri;

$$\frac{200}{D_{40}}C_{65}^{ra}$$

O halde toplam değer;

$$\frac{100}{D_{40}}(\overline{R}_{40}^{ia}+\overline{R}_{40}^{ra}+2C_{65}^{ra})=\frac{100}{5204}(29034+384530+(2)(6675))\cong 8204\ \$$$

bulunur.

9.2 Çalışanın Ortalama Maaşına Göre Belirlenen Emeklilik

Bu modelde emeklilik maaşı servisin her bir yılı için ortalama maaşın $1/K$ sına eşit olarak alınır. Buna göre servisin her bir yılı için ortalama maaşın $1/K$ sı olan emeklilik maaşı servis boyunca alınan toplam maaşın $1/K$ sına eşittir.

x yaşındaki bir üye için geçmişteki servisten dolayı biriken emekliliğin değeri;

$$\frac{(\text{Geçmişteki toplam maaş})}{K}\frac{M_x^{ia}}{D_x}$$

dir. x yaşındaki bütün üyeler üzerinden toplam alınırsa, geçmiş servis emekliliğinin toplam değeri;

$$\frac{1}{K}(TPS)_x\frac{M_x^{ia}}{D_x}$$

olur. $(TPS)_x$, x yaşındaki üyelerin değerlendirme tarihine (x' e) kadar olan geçmiş maaşlarının toplamıdır.

Gelecek servisten birikecek olan emekliliğin değerini bulmak için gelecek kazançları tahmin etmek gerekir. Bunun içinde maaş cetveli kullanılır. x yaşındaki üyenin maaşı S ise y ile $y+1$ yaşları arasında alması beklenen maaş $S\frac{s_y}{s_x}$ dir. y ile $y+1$ yaşları arasında gelecek servisten gelen emekliliğin x yaşındaki değeri;

$$\frac{1}{K}\frac{1}{D_x}S\frac{s_y}{s_x}\overline{M}_y^{ia}$$

$$=\frac{S}{K}\frac{{}^s\overline{M}_y^{ia}}{{}^sD_x},$$

burada ${}^s\overline{M}_y^{ia}=s_y\overline{M}_y^{ia}$ ve ${}^sD_x=s_xD_x$ dir. Servisin gelecek bütün yılları için emekliliğin toplam değeri;

$$\frac{S}{K}\sum_{y=x}^{64}\frac{{}^{s}\overline{M}_{y}^{ia}}{{}^{s}D_{x}}$$

$$=\frac{S}{K}\frac{{}^{s}\overline{R}_{x}^{ia}}{{}^{s}D_{x}},$$

burada ${}^{s}\overline{R}_{x}^{ia}=\sum_{y=x}^{64}{}^{s}\overline{M}_{y}^{ia}$ dır. Bu ifade bütün x yaşındaki üyeler üzerinden toplanırsa;

$$\frac{(AS)_{x}}{K}\frac{{}^{s}\overline{R}_{x}^{ia}}{D_{x}}$$

elde edilir. $(AS)_{x}, x$ yaşındaki üyelerin o yıl içerisinde alacakları maaş toplamını göstermektedir. Yaşlılıktan emeklilik içinde benzer formüller i yerine r konularak bulunabilir.

Örnek 9.2: Yaşları 55 (veya 55' e yakın) olan bir planın üyelerinin toplam maaşları 15000\$ ve geçmiş maaşları toplamı 200000\$ olsun. Buna göre servisin her bir yılı için ortalama maaşın 1/60' ı kadar tazminat sağlayan emekliliklerinin şimdiki değerini hesaplayınız. (Tablo 9.1.1 , Tablo 9.1.2 ve Tablo 9.1.3'ü kullanınız.)

Çözüm: $(AS)_{55}=15000\$$

$$(TPS)_{55}=200000\$$$

$$\frac{200000}{60}\frac{(M_{55}^{ia}+M_{55}^{ra})}{D_{55}}+\frac{15000}{60}\frac{({}^{s}\overline{R}_{55}^{ia}+{}^{s}\overline{R}_{55}^{ra})}{{}^{s}D_{55}}$$

$$=\frac{200000}{60}\frac{(1170+16742)}{2535}+\frac{15000}{60}\frac{(35026+688322)}{12549}$$

$$\cong\ 37963\$$$

9.3 Çalışanın Son Emeklilik Maaşına Göre Belirlenen Emeklilik

Bu emeklilik planında servisin her bir yılı için emeklilik maaşı, emekliliğe yakın olan maaşın 1/*K*' sına eşittir. Emekliliğe yakın maaş olarak emeklilik zamanında son maaş kullanıldığı gibi emeklilikten önceki son *m* yılın ortalaması alınarak elde edilen maaşta kullanılabilir. İkinci usul daha yaygındır.

x yaşında emekli olacak bir kişinin son m yılın maaşlarının ortalaması ;

$$z_{x}=\frac{1}{m}(s_{x-m}+s_{x-m+1}+\cdots+s_{x-1})$$

ile gösterilir. Burada kullanılan tablolar m=3 için hazırlanmıştır.

$$m = 3 \Rightarrow z_x = \frac{1}{3}(s_{x-3} + s_{x-2} + s_{x-1})$$

Bugünkü maaşı S olan x yaşında bir üye için, eğer $x+t$ yaşında emekli olursa, emekliliğin dayandığı maaş; (Emekliliğin yıl ortasında olduğu kabul edilirse)

$$S\frac{z_{x+t+\frac{1}{2}}}{s_x}$$

olur. Eğer değerlendirme zamanına kadar geçmiş olan süre n yıl ise $x+t$ ile $x+t+1$ yaşları arasında maluliyetten emekliliğin şimdiki değeri;

$$\frac{n}{K}S\frac{z_{x+t+\frac{1}{2}}}{s_x}\frac{C^{ia}_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{n}{K}S\frac{{}^{z}C^{ia}_{x+t}}{{}^{s}D_x},$$

burada ${}^{z}C^{ia}_x = z_{x+\frac{1}{2}}C^{ia}_x$ dır. Bu ifade emekliliğin mümkün olduğu bütün gelecek yıllar üzerinden toplanırsa, geçmiş servis süresinin etkisinin toplam değeri;

$$\frac{n}{K}\frac{S}{{}^{s}D_x}\sum_{t=0}^{64-x}{}^{z}C^{ia}_{x+t}$$

$$= \frac{n}{K}\frac{S}{{}^{s}D_x}{}^{z}M^{ia}_x,$$

burada ${}^{z}M^{ia}_x = \sum_{t=0}^{64-x}{}^{z}C^{ia}_{x+t} = \sum_{y=x}^{64}{}^{z}C^{ia}_y$ dır. x yaşındaki bütün üyeler üzerinden geçmiş servis sürelerinin etkilerinin toplam değeri;

$$\frac{(nS)_x}{K}\frac{{}^{z}M^{ia}_x}{{}^{s}D_x}$$

dir. Burada $(nS)_x, x$ yaşındaki üyelerin o yıl içerisinde alması beklenen maaşların geçmiş servis süreleriyle çarpımlarının toplam değerini göstermektedir.

Gelecek servis yıllarının emekliliğe etkisi daha önceki bölümlerde anlatılana benzer bir şekilde aşağıdaki formülle ifade edilir. $x+t$ ile $x+t+1$ yaşları arasında gelecek servisten gelen emekliliğin toplam değeri;

$$\frac{S}{K^sD_x}\left\{\frac{1}{2}{}^zC^{ia}_{x+t}+{}^zC^{ia}_{x+t+1}+{}^zC^{ia}_{x+t+2}+\cdots+{}^zC^{ia}_{64}\right\}$$

$$=\frac{S}{K^sD_x}({}^zM^{ia}_{x+t}-\frac{1}{2}{}^zC^{ia}_{x+t})$$

$$=\frac{S}{K^sD_x}{}^z\overline{M}^{ia}_{x+t},$$

burada ${}^z\overline{M}^{ia}_{x+t}={}^zM^{ia}_{x+t}-\frac{1}{2}{}^zC^{ia}_{x+t}$ dır. Bu açıklamalar bütün gelecek servis yılları üzerinden toplanırsa, gelecek servis emekliliğinin toplam değeri;

$$\frac{S}{K^sD_x}\sum_{t=0}^{64-x}{}^z\overline{M}^{ia}_{x+t}$$

$$=\frac{S}{K^sD_x}{}^z\overline{R}^{ia}_x,$$

olur. Burada ${}^z\overline{R}^{ia}_x=\sum_{t=0}^{64-x}{}^z\overline{M}^{ia}_{x+t}$ dır. x yaşındaki bütün üyeler için gelecek servis emekliliğinin toplam değeri;

$$\frac{1}{K}(AS)_x\frac{{}^z\overline{R}^{ia}_x}{{}^sD_x}$$

olur. Yaştan emekliliğe dayanan durum için benzer açıklamalar elde edilebilir.

Örnek 9.3: Yaşları 45 (veya 45' e yakın) olan ve servisin her bir yılı için son maaşın 1/100' ü kadar emeklilik miktarı sağlayan bir planın 4 üyesi aşağıdaki maaşlara ve geçmiş servis sürelerine sahip olsunlar.

A	5000$	20
B	2000$	10
C	4000$	5
D	3000$	10

Buna göre bu üyeler için emekliliğin şimdiki toplam değerini bulunuz. (Tablo 9.1.1 , Tablo 9.1.2 ve Tablo 9.1.3'ü kullanınız.)

Çözüm: $(nS)_{45}$ =(5000)(20)+(2000)(10)+(4000)(5)+(3000)(10)=170000

$(AS)_{45}$ = 5000+2000+4000+3000=14000

$$\frac{170000}{100}\frac{{}^{z}M_{45}^{ia}+{}^{z}M_{45}^{ra}}{{}^{s}D_{45}}+\frac{14000}{100}\frac{{}^{z}\overline{R}_{45}^{ia}+{}^{z}\overline{R}_{45}^{ra}}{{}^{s}D_{45}}$$

$$\frac{170000}{100}\frac{(7819+88345)}{16411}+\frac{14000}{100}\frac{(106825+1590307)}{16411}$$

$$\cong 9962+14478=24440\$$$

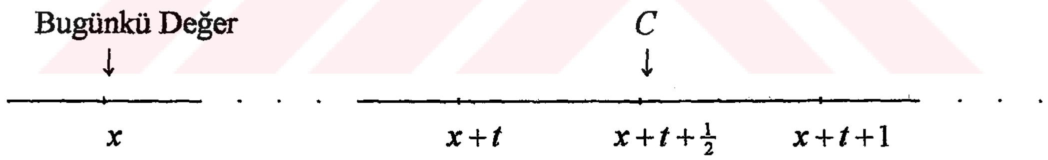
Bölüm 10

Belirlenmiş Katkı Esaslı Emeklilik Programlarının Aktüeryal Değerlendirilmesi

Emeklilik maaşı sağlanmasında ikinci yaklaşım prim esaslı emeklilik programları da denen belirlenmiş katkı modelidir. Bu modelde, programa katılan çalışan ve işverenin katkıları ile yatırım kazançlarının toplandığı bireysel fon hesapları bulunmaktadır. Program üyesinin emekli maaşı, emeklilik gününde fon hesabında birikmiş olan paranın tutarına bağlıdır [10].

10.1 Gelecekteki Katkıların Bugünkü Değeri

Üyeler tarafından ödenen katkıların önce her yıl için sabit olduğu göz önüne alınsın. x yaşındaki bir üyenin $x+t$ yaşı ile $x+t+1$ yaşı arasında ödeyeceği C katkısının bugünkü değeri $C\, v^{t+1/2} \dfrac{l_{x+t+1/2}}{l_x}$ olacaktır.



Burada ödemenin ortalama olarak yıl ortasında yapıldığı kabul edilmektedir. Yukarıda hesaplanan bugünkü değer şu şekilde yazılabilir:

$$C\frac{D_{x+t+1/2}}{D_x} \quad \text{veya} \quad C\frac{\overline{D}_{x+t}}{D_x},$$

burada

$$D_x = v^x l_x$$

dir .

$$\overline{D}_x = \frac{D_x + D_{x+1}}{2}$$

şeklinde pratik olarak da hesaplanabilir.

x yaşındaki bir üyenin servis sonuna kadar yapacağı toplam katkının bugünkü değeri

$$C\frac{\overline{N}_x}{D_x}$$

olur , burada

$$\overline{N}_x = \sum_{t=0}^{64-x} \overline{D}_{x+t}$$

dir. Programdaki, bugün x yaşında olan bütün üyelerin yapacakları toplam katkının bugünkü değeri

$$(AC)_x \frac{\overline{N}_x}{D_x}$$

olur. $(AC)_x$ ile x yaşındaki bütün üyelerin gelecek yılda yapacağı toplam katkılar gösterilmektedir.

Birçok hallerde ödenen katkılar üyenin aldığı yıllık maaşa bağlı olarak hesaplanır. Bir üyenin x yaşında ödediği katkı C ile gösterilirse, aynı üyenin y ile $y+1$ yaşları ödeyeceği katkı

$$C\frac{s_y}{s_x}$$

olarak hesaplanabilir. Buradan bu katkının bugünkü değeri

$$\frac{1}{D_x} C \frac{s_y}{s_x} \frac{D_y + D_{y+1}}{2} = C \frac{{}^s\overline{D}_y}{{}^sD_x}$$

bulunur. Burada

$${}^s\overline{D}_y = s_y \frac{(D_y + D_{y+1})}{2} \quad \text{ve} \quad {}^sD_x = s_x D_x$$

dir.

Üyenin gelecekte yapacağı bütün katkıların bugünkü toplam değeri

$$C\frac{{}^s\overline{N}_x}{{}^sD_x}$$

olur, burada

$${}^s\overline{N}_x = \sum_{t=0}^{64-x} {}^s\overline{D}_{x+t}$$

dir.

Bugün x yaşında olan bütün üyelerin gelecekteki yapacağı katkıların bugünkü değeri aşağıda olduğu gibidir:

$$(AC)_x \frac{{}^s\overline{N}_x}{{}^sD_x}$$

Eğer işverenin de katkıları hesaba katılırsa, benzer şekilde bir formül ile hesaplanır. İşverenin katkıları ekseri yıl sonunda yapıldığından üyelerin katkı formülleri $v^{1/2}$ ile çarpılarak işverenin katkılarının bugünkü değeri hesaplanabilir.

Örnek 10.1: Çalışanın emeklilik fonuna katkıları, maaşından diğer emeklilik düzenlemeleri de hesaba katılarak 400$ miktarında sabit bir kesinti yapılarak, kalan miktarın %5 oranındadır. 30 yaşında ve maaşı 7000$ olan bir üyenin ödeyeceği toplam katkıların bugünkü değeri nedir? (Tablo 9.1.3'ü kullanınız.)

Çözüm:

y ile $y+1$ yaşları arasında ödeyeceği katkının bugünkü değeri

$$\frac{1}{D_{30}} 0.05\left(7000\frac{s_y}{s_{30}} - 400\right)\overline{D}_y$$

$$= 350\frac{s_y}{s_{30}}\frac{\overline{D}_y}{D_{30}} - 20\frac{\overline{D}_y}{D_{30}}$$

$$= 350\frac{{}^s\overline{D}_y}{{}^sD_{30}} - 20\frac{\overline{D}_y}{D_{30}}$$

olacaktır. Gelecek yıllar üzerinden toplam alınarak, üyenin gelecekte yapacağı bütün katkıların bugünkü toplam değeri

$$350\frac{{}^s\overline{N}_{30}}{{}^sD_{30}} - 20\frac{\overline{N}_{30}}{D_{30}}$$

$$= 350\frac{540020}{28043} - 20\frac{147226}{10997}$$

$$= 6472\,\$.$$

10.2 Emeklilik ve Ölüm Halinde Toplu Para Ödemeleri

Emeklilik halinde toplu bir para ödemesi ya ayrı bir tazminat olarak değerlendirilir, ya da emekliliğin bir kısmına sayılır. Eğer ayrı bir tazminat olarak değerlendirilirse, kullanılacak model, daha önce anlatılan emekli maaş rantlarına ait olan formüllerdeki rant kısmı atılarak elde edilir. Yani, örneğin; C_x^{ra} yerine C_x^r, M_x^{ra} yerine M_x^r kullanılır.

Ölüm halinde ödenecek olan toplu para, ölüm tarihindeki maaş oranına bağlıdır. x yaşındaki bir üyenin şimdiki maaşı S olsun ve gelecekte herhangi bir yaşta ölmesi halinde ödenecek olan tazminat 1 birim olsun. Bu takdirde bu tazminatların bugünkü değeri

$$\frac{S}{s_x l_x}\sum_{t=0}^{64-x} s_{x+t} v^{t+1/2} d_{x+t}$$

$$=\frac{S}{{}^sD_x}\,{}^sM_x^d$$

olur. Burada

$${}^sM_x^d = \sum_{t=0}^{64-x} {}^sC_{x+t}^d$$

ve

$${}^sC_x^d = s_x v^{x+1/2} d_x$$

dir. x yaşındaki bütün üyelerin ölüm tazminatlarının toplam değeri

$$(AS)_x \frac{{}^sM_x^d}{{}^sD_x}$$

olur. $(AS)_x$ ile x yaşındaki bütün üyelerin o yıl içinde almayı bekledikleri toplam maaşlar ifade edilmiştir.

Örnek 10.2: 40 yaşındaki bir üye programa 30 yaşında katılmış olsun. Maluliyet veya yaşlılıktan emekliliğe ayrılması halinde, servisteki her yılı için 100$ miktarında bir tazminatın toplu ödeme olarak bugünkü değeri nedir? (Tablo9.1.1, Tablo9.1.2 ve Tablo9.1.3'ü kullanınız.)

Çözüm: Bugünkü değer, geçmişteki servisten gelen 1000$ miktarındaki tazminatın, gelecekteki servisin her bir yılı için hak kazanılan 100$ miktara eklenmesi ile bulunacak.

$$1000\frac{M_{40}^i + M_{40}^r}{D_{40}} + 100\frac{\overline{R}_{40}^i + \overline{R}_{40}^r}{D_{40}}$$

$$= 1000\frac{177+1524}{5204} + 100\frac{3111+35191}{5204}$$

$$= 327 + 736 = 1063\$.$$

Burada

$$C^i_{x+t} = v^{x+t+1/2} i_{x+t}, \quad M^i_x = \sum_{t=0}^{64-x} C^i_{x+t} \quad \text{ve} \quad \overline{R}^i_x = \sum_{t=0}^{64-x} \left(M^i_{x+t} - \tfrac{1}{2} C^i_{x+t}\right)$$

dir.

10.3 Katkıların Geri Ödenmesi

Ölüm veya programdan ayrılma halinde üyenin ödediği katkılar ya faiz dikkate alınarak yada alınmayarak üyeye tazminat olarak geri ödenir. Faiz dikkate alındığında, değerlendirme, gerçek faiz oranından (i) daha düşük bir (j) oranı kullanılarak yapılır. x yaşında bir üyenin $x+t$, $x+t+1$ yaşları arasında ölmesi halinde o zamana kadar ödediği katkılar j oranında faizlendirilerek bir tazminat olarak ödenir. Burada ölümün ortalama olarak yıl ortasında olduğu kabul edilir. Bu tazminat $(PC)(1+j)^{t+1/2}$ olarak ifade edilir. Bu ifadede (PC) , x yaşından evvel üyenin yaptığı katkıların j faiz oranıyla toplam değerini göstermektedir. Buna göre bu tazminatın x yaşındaki bugünkü değeri

$$(PC) v^{t+1/2} (1+j)^{t+1/2} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

$$= (PC)\frac{(1+j)^{x+t+1/2} v^{x+t+1/2} d_{x+t}}{(1+j)^x v^x l_x}$$

$$= (PC)\frac{{}^jC^d_{x+t}}{{}^jD_x}$$

olur. Burada

$$1+J = \frac{1+i}{1+j} \quad \text{ve} \quad v = (1+i)^{-1}$$

olmak üzere

$${}^jD_x = (1+j)^x v^x l_x = (1+j)^x D_x = \frac{l_x}{(1+J)^x}$$

$${}^jC^d_x = \frac{d_x}{(1+J)^{x+1/2}} = (1+j)^{x+1/2} C^d_x \ .$$

Programdaki gelecek yıllar üzerinden toplam alınırsa, üyenin x yaşına kadar ödediği katkılardan elde edeceği ölüm tazminatının bugünkü değeri

$$(PC)\frac{{}^jM_x^d}{{}^jD_x}$$

bulunur. Burada

$${}^jM_x^d = \sum_{t=0}^{64-x} {}^jC_{x+t}^d .$$

x yaşındaki bütün üyelerin ölüm tazminatları toplanırsa

$$(TPC)_x \frac{{}^jM_x^d}{{}^jD_x}$$

elde edilir. $(TPC)_x$ ile x yaşındaki tüm üyelerin, değerlendirme tarihine kadar katkılarının geri ödenmesi hesaplanırken birleşik faizle birikmiş, toplam geçmiş katkıları belirtilmiştir.

Gelecekteki katkılardan elde edilecek ölüm tazminatını hesaplarken, eğer katkılar maaşa bağlı değilse, her yıl için C olarak alınırlar. $x+t$ ile $x+t+1$ yaşları arasındaki yıl içerisinde ödenen katkıların, ölüm üzerine, bir ölüm tazminatı olarak geri ödenmesine ilişkin $x+t$ yaşındaki değeri

$$\frac{C}{l_{x+t}}(\tfrac{1}{2}v^{1/2}d_{x+t} + v^{3/2}(1+j)d_{x+t+1} + v^{5/2}(1+j)^2 d_{x+t+2} + \dots)$$

olacaktır.

x yaşındaki aktüeryal değeri de yukarıdaki ifadenin $v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ ve $\frac{(1+j)^{x+t+1/2}v^x}{(1+j)^{x+t+1/2}v^x} = 1$ ile çarpımından şöyle bulunur:

$$\frac{C}{(1+j)^{x+t+1/2}v^x l_x}\left\{\tfrac{1}{2}(1+j)^{x+t+1/2}v^{x+t+1/2}d_{x+t} + (1+j)^{x+t+3/2}v^{x+t+3/2}d_{x+t+1} + \dots\right\}$$

$$= \frac{C}{D_x}.\frac{1}{(1+j)^{x+t+1/2}}\left(\tfrac{1}{2}{}^jC_{x+t}^d + {}^jC_{x+t+1}^d + \dots + {}^jC_{64}^d\right)$$

$$= \frac{C}{D_x}.\frac{{}^jM_{x+t}^d - \frac{1}{2}{}^jC_{x+t}^d}{(1+j)^{x+t+1/2}}$$

$$= \frac{C}{D_x}.\frac{{}^j\overline{M}_{x+t}^d}{(1+j)^{x+t+1/2}}.$$

Programdaki gelecek yıllar için katkıların toplamı alınırsa, ölüm halinde bir ölüm tazminatı olarak ödenecek gelecekteki toplam katkıların bugünkü değeri

$$\frac{C}{D_x}\sum_{t=0}^{64-x}\frac{{}^{j}\overline{M}_{x+t}^{d}}{(1+j)^{x+t+1/2}}$$

$$=\frac{C}{D_x}{}^{j}\overline{R}_x^{d}$$

olacaktır. Burada

$${}^{j}\overline{R}_x^{d}=\sum_{t=0}^{64-x}\frac{{}^{j}\overline{M}_{x+t}^{d}}{(1+j)^{x+t+1/2}}.$$

Katkıların maaşa bağlı olması halinde ise maaş skalası kullanılacaktır. Yani, eğer x yaşındaki katkı maaşın $\%C$ ise, $x+t$ yılından $x+t+1$ yılına kadarki katkı, artık $0.01CS\frac{s_{x+t}}{s_x}$ olacaktır. Böylece, $x+t$ den $x+t+1$ yılına kadar yapılacak katkıların, ölüm halinde bir ölüm tazminatı olarak geri ödenmesinin bugünkü değeri

$$0.01CS\frac{s_{x+t}}{s_x}.\frac{1}{D_x}.\frac{{}^{j}\overline{M}_{x+t}^{d}}{(1+j)^{x+t+1/2}}$$

$$=\frac{0.01CS}{{}^{s}D_x}.\frac{{}^{sj}\overline{M}_{x+t}^{d}}{(1+j)^{x+t+1/2}}$$

olur. Burada ${}^{sj}\overline{M}_x^{d}=s_x\,{}^{j}\overline{M}_x^{d}$.

Gelecekteki yıllar üzerinden toplam alınarak, ölüm halinde bir ölüm tazminatı olarak ödenecek gelecekteki toplam katkıların bugünkü değeri

$$\frac{0.01CS}{{}^{s}D_x}\sum_{t=0}^{64-x}\frac{{}^{sj}\overline{M}_{x+t}^{d}}{(1+j)^{x+t+1/2}}$$

$$=\frac{0.01CS}{{}^{s}D_x}{}^{sj}\overline{R}_x^{d}$$

bulunur. Burada

$${}^{sj}\overline{R}_x^{d}=\sum_{t=0}^{64-x}\frac{s_{x+t}}{(1+j)^{x+t+1/2}}{}^{j}\overline{M}_{x+t}^{d}.$$

Programdan çekilme halinde ödenecek katkıların bugünkü değerlerinin formülleri, yukarıda, ölüm hali için elde edilenlerle aynı olup, sadece ifadelerde "d" yerine "w" yazılarak bulunacaktır.

Ölüm veya programdan çekilme halinde katkıların geri ödenmesi hesaplanırken kullanılan j faiz oranı sıfır veya i gerçek faiz oranına eşitse formüllerde sadeleştirme mümkündür. Aşağıdaki örnekte Tablo 10.3.1 ve Tablo 10.3.2 den yararlanınız.

Örnek 10.3: 40 yaşında ve bugünkü maaşı 4000$ olan bir emeklilik programı üyesi için, çekilme veya ölüm halinde katkıların bir tazminat olarak geri ödenmesinin bugünkü değerini bulunuz. Katkılar maaşın %2'si oranındadır. Geçmişteki katkılar %3 faiz oranıyla birikmiş olup 500$ lık bir miktara ulaşmışlardır.

Çözüm:

Ölüm veya programdan çekilme halinde bir tazminat olarak ödenecek geçmiş katkıların bugünkü değeri

$$\frac{500}{{}^{j}D_{40}}({}^{j}M_{40}^{d}+{}^{j}M_{40}^{w}) \quad , \quad [{}^{j}D_{40}=(1.03)^{40}D_{40}]$$

$$=\frac{500}{(3262)(5204)}(2338+735)$$

$$=91$$

bulunur.

Şimdi de ölüm veya programdan çekilme halinde bir tazminat olarak ödenecek gelecekteki katkıların bugünkü değeri hesaplanırsa ;

$$\frac{0.02(4000)}{{}^{s}D_{40}}({}^{sj}\overline{R}_{40}^{d}+{}^{sj}\overline{R}_{40}^{w})$$

$$=\frac{80}{18629}(36298+1424)$$

$$=162$$

elde edilir. Böylece ölüm veya programdan çekilme halinde bir tazminat olarak ödenecek toplam katkıların bugünkü değeri

$$91+162=253\$$$

olur.

Yıllık %4 Faizli Emeklilik Fonu Tabloları

Tablo 10.3.1
Yıllık %3 birikimli faizli ölüm halinde yapılacak ödemelerin fonksiyonları

Yaş x	${}^{j}C_x^d$	${}^{j}M_x^d$	${}^{j}\overline{R}_x^d$	${}^{sj}\overline{R}_x^d$
20	53	3110	31397	87726
25	39	2881	23699	76546
30	35	2701	17504	63288
35	36	2525	12495	49451
40	39	2338	8474	36298
45	53	2120	5288	24285
50	80	1803	2859	13927
55	117	1332	1177	5999
56	125	1215	930	4776
57	135	1090	713	3690
58	145	955	526	2743
59	155	810	369	1940
60	165	655	243	1285
61	140	490	147	783
62	124	350	79	423
63	117	226	34	181
64	109	109	8	43

Tablo 10.3.2
Yıllık %3 birikimli faizli geri çekilme halinde yapılacak ödemelerin fonksiyonları

Yaş x	${}^{j}C_x^w$	${}^{j}M_x^w$	${}^{j}\overline{R}_x^w$	${}^{sj}\overline{R}_x^w$
20	6633	43550	119400	207911
25	2944	19045	42211	98740
30	1328	8041	13391	38289
35	608	3007	3281	10741
36	524	2399	2334	7826
37	448	1875	1608	5516
38	378	1427	1063	3729
39	313	1049	666	2389
40	253	735	389	1424
41	197	482	205	766
42	144	285	93	352
43	94	140	32	124
44	46	46	6	24

Tartışma ve Sonuç

Aktüerya matematiği sigorta sistemlerinin matematiksel yapısını inceleyen bir bilim dalıdır. Sigorta sistemlerinde değişkenlerin tesadüfi olması nedeniyle aktüerya matematiği olasılık ve istatistik teorisi ile yakından ilgilidir [5], [12]. Yaşam süresi, kayıplar sürekli tipte tesadüfi değişkenlerdir. Bu nedenle tesadüfi değişkelerin dağılım fonksiyonuna, olasılık yoğunluk fonksiyonuna, beklenen değer, varyans ve moment oluşturma fonksiyonlarına ihtiyaç vardır.

Sigorta sistemlerinde, riskin bulunması nedeniyle, aktüerya matematiği Risk Teorisi [13] ile ve sigorta sistemlerinin ekonomik özellikler taşıması nedeniyle Fayda Teorisi [6] ile de yakından ilgilidir.

Tezimizde Aktüerya Matematiği en son yapılan araştırmalarda kullanılan kavram ve yöntemlerin ışığı altında incelenmiştir. Tezimizdeki prim, rezerv ve rant hesapları için Fayda Teorisinin temel özelliği olan

$$u(w-G)=E[u(w-X)]$$

eşitliğinden yararlanılmıştır.

Tezimizde ele aldığımız Bireysel Emeklilik Modelleri, Çoklu Azalma Teorisi yardımıyla incelenmiştir. Bu modellere uygulama olarak iki esas emeklilik planı söz konusu edilmiştir. Bunlar Belirlenmiş Maaş Esaslı ve Belirlenmiş Katkı Esaslı Emeklilik planlarıdır.

Tezimizde ele alınan konular finans ve ekonomi dünyasında önemli bir yer tutmaktadır.

Kaynakça

[1] **MORALI, N. (1997) :** Hayat Sigortaları için Aktüeryal Teknikler, Genç Sigortacılar Derneği Yayınları, İSTANBUL

[2] **URAL, K. (1994) :** Yaşam Sigortalarının Aktüeryal Prensipleri, Aktüerler Derneği Yayınları , İSTANBUL

[3] **ARROW, K. J. (1963) :** Uncertainty and the Welfare of Medical Care, American Economic Review , Vol.53, s. 941-73.

[4] **DE GROOT, M. H. (1970) :** Optimal Statistical Decisions , McGraw-Hill, NEW YORK.

[5] **DE GROOT, M. H. (1986) :** Probability and Statistics, Addison- Wesley, ISBN 0-201-11366-X , USA.

[6] **FRIEDMAN , M. , SAVAGE , L. J. (1948) :** The Utility Analysis of Choices Involving Risk , Journal of Political Economy , Vol.56, s. 279-304.

[7] **PRATT , J. W. (1964) :** Risk Aversion in the Small and in the Large Econometrica , Vol.XXXII , s. 122-36

[8] **MOOD, A. M. , GRAYBILL , F. A. , BOES, D.C. (1974) :** Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill , ISBN 0-07-042864-6 , NEW YORK.

[9] **BOWERS, N. L. , GERBER H.U. , HICKMAN J. C. , JONES D.A. , NESBITT C.J. (1997) :** Actuarial Mathematics , The Society of Actuaries, ISBN 0-938959-46-8 , USA.

[10] **NEILL , A. (1977) :** Life Contingencies , Heinemann , ISBN 0-434-91440-1 , LONDON.

[11] **CHIANG, C. L. (1968) :** Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics John Wiley and Sons, NEW YORK

[12] **LINDGREN, B. W. (1993) :** Statistical Theory, Chapman & Hall / CRC, ISBN 0-412-04181-2 , LONDON

[13] **BUHLMANN, H. (1970) :** Mathematical Methods in Risk Theory , Springer, NEW YORK.

Özgeçmiş

1978 yılında İstanbul' da doğdum. 1988' de Yavuztürk İlkokulunu bitirdim. 1991 yılında Mehmet Ali Yılmaz Ortaokulu'nu bitirdim. 1994 yılında Haydarpaşa Lisesi'ni bitirdim. 1999 yılında İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü birincilikle bitirdim. 2001 yılından beri özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.