İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YANTIKIZ UZAYLAR
VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Ayşe SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr. Nurettin ERGUN

Haziran – 2003

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma 21 / 07 / 2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Nurettin ERGUN
(Danışman)

Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN

Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI

Prof.Dr. B.Melek ZEREN

Prof.Dr. Yusuf AVCI

Önsöz

Bu tez çalışması, tartışmasız biçimde, Genel Topoloji'nin en ünlü ve en güçlü **Örtülüş Özelliği** olan tıkızlığın, en az onun kadar sıradışı bir örtülüş özelliği olduğu, Jean Dieudonne tarafından tanımlandığı 1944 yılından bir kaç yıl sonra anlaşılan ünlü genelleştirmesi **yantıkızlık** ile onun en önemli üç genelleştirmesi olan **Alt yantıkızlık**, **Ötetıkızlık** ve **θ-incelebilme** kavramları üzerine, artık klasikleşen ve temel nitelikte oldukları evrensel olarak kabul gören özelliklerinin, ayrıntılı biçimde ele alınıp kanıtlandığı bir derlemedir. Hem tıkız uzaylar sınıfını hem de sözdemetriklenebilir uzaylar sınıfını kapsayabilen Yantıkız Uzaylar sınıfının önemi, özellikle Arthur Stone'un 1948 yılında kanıtladığı ünlü teorem ile (bkz. Stone Teoremi, Bölüm 2), R.H.Bing'in 1951 yılında kanıtladığı ve, ancak ve yalnız, yantıkız Moore Uzaylarının metriklenebildiğini söyleyen ünlü **Bing Metriklenebilme Teoremi** ile açığa çıkmıştır. Dolayısıyla, sözü edilen tüm bu sınıfların, sıradışı birer örtülüş özelliğini belirlemelerinin yanısıra, **Metriklenebilme Teorisi**'nde önemli görevleri vardır.

Giriş niteliğindeki Birinci Bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan tüm temel örtülüş özellikleri ve topolojik bilgiler sağlıklı ve ayrıntılı biçimde kanıtlanmıştır. Bu ayrıntılı ve sağlıklı hazırlık sonucunda, bu tezin kendi içinde yeterli bir bütünlüğe kavuştuğu söylenebilir. İkinci Bölüm, Yantıkız, Ötetıkız ve Derlemsel Normal Uzayların, Üçüncü Bölüm ise, Ötetıkız Uzayların en doğal genelleştirmelerinden birisi olan θ-incelebilir Uzayların temel örtülüş özelliklerini kanıtlamaya ayrılmıştır. Bu bölüm aynı zamanda alışılmadık bazı taban türlerinin ve Açınır Uzayların Genel Topoloji'deki önemini de açığa çıkaracaktır. Dördüncü Bölüm'de, Alt yantıkız uzayların, yantıkızlığa benzeyen ve benzemeyen özgül niteliklerini belirleyen temel sonuçlar ayrıntılı biçimde kanıtlanmakta, Beşinci Bölüm'de ise, tıkızlığın, tüm bu örtülüş özellikleri yoluyla, çoğunluğu 1970'lerde kanıtlanmış olan çeşitli güncel ve önemli karakterizasyonları elde edilmektedir. Altıncı Bölüm, yarı-açık örtülüşler yoluyla yantıkızlık ve ötetıkızlık karakterizasyonlarına ayrılmıştır.

Dolayısıyla, içinde toplam olarak 73 tane, ayrıntılı biçimde kanıtlanmış Önerme, Yardımcı Teorem ve Teorem bulunan bu tez çalışması, en önemli örtülüş özelliklerinin 1980'lerin başına değin gelişim ve evrimini elden geldiğince kapsamlı biçimde sunan 111 sayfalık bir derleme olmaktadır. Tezin, herhangi bir yerde yayınlanmamış biricik özgün sonucu ise, Bölüm 3'de yer alan Önerme'dir. Bu özellikleri nedeniyle, bu tezin, neredeyse, bu konular üstüne okuyucular için yararlı bir ders kitabı niteliğine kavuşmuş olduğunu düşünüyorum.

Bu tez çalışması boyunca, gerek Kaynakça'da yer alan makalelerin pek çoğunun Seminer Çalışması olarak anlatılması ve gerekse tezin yazılması aşamalarında görüş ve yardımlarından yararlandığım Danışman'ım, sayın Prof.Dr. Nurettin Ergun'a, ayrıca Latex yazımını öğrenmemde bana yardımcı olan sevgili arkadaşlarım Yrd.Doç.Dr. Halidun Gürses, Gülseren Çiçek ve Temha Erkoç'a içtenlikle teşekkür ederim.

Ayşe Sönmez

İçindekiler

Özet

Yantıkız Uzaylar ve Bazı Genelleştirmeleri

Bu tez çalışması, tartışmasız biçimde, Genel Topoloji'nin en ünlü ve en güçlü **Örtülüş Özelliği** olan tıkızlığın, en az onun kadar sıradışı bir örtülüş özelliği olduğu, Jean Dieudonne tarafından tanımlandığı 1944 yılından bir kaç yıl sonra anlaşılan ünlü genelleştirmesi **yantıkızlık** ile, onun en önemli üç genelleştirmesi olan **Alt yantıkızlık**, **Ötetıkızlık** ve **θ-incelebilme** kavramları üzerine, artık klasikleşen ve temel nitelikte oldukları evrensel olarak kabul gören özelliklerinin, ayrıntılı biçimde ele alınıp kanıtlandığı bir derlemedir. Hem tıkız uzaylar sınıfını hem de sözdemetriklenebilir uzaylar sınıfını kapsayabilen Yantıkız Uzaylar sınıfının önemi, özellikle Arthur Stone'un 1948 yılında kanıtladığı ünlü teorem ile (bkz. Stone Teoremi, Bölüm 2), R.H.Bing'in 1951 yılında kanıtladığı ve, ancak ve yalnız, yantıkız Moore Uzaylarının metriklenebildiğini söyleyen ünlü **Bing Metriklenebilme Teoremi** ile açığa çıkmıştır. Dolayısıyla, sözü edilen tüm bu sınıfların, sıradışı birer örtülüş özelliğini belirlemelerinin yanısıra, **Metriklenebilme Teorisi**'nde önemli görevleri vardır.

Yedi bölümlük bu tezde, sözü edilen bu uzayların önemli hemen tüm özellikleri ayrıntılı biçimde incelenip kanıtlanmaktadır. Üçüncü Bölüm içinde yer alan Önerme, bu tez çalışması içindeki biricik özgün sonuçtur. Ayrıca bu çalışmada kullanılacak olan tüm temel örtülüş özellikleri ve topolojik bilgiler ayrıntılı bir biçimde, giriş niteliğindeki Birinci Bölüm'de anlatıldığı için, bu tezin kendi içinde yeterli bir bütünlüğe ve anlatıma kavuştuğu söylenebilir.

Summary

Paracompact Spaces And Some Of Their Generalizations

This thesis with the survey character, is devoted mainly the meticulous investigation of those properties, which have already been accepted universally as classical and fundemental of **Paracompactness**, a covering property defined first by Jean Dieudonne in 1944, which is undoubdetly the most outstanding and fruitful generalization of the most powerful covering property called compactness. Some generalizations of paracompactness such as **Subparacompactness**, **Metacompactness** and **θ-refinability** and their specific properties are also investigated in detail. The class of Paracompact Spaces contain both the class of Compact Spaces and the class of Pseudometrizable Spaces and their importance is clearly understood after the well known **Stone's Theorem** proved in 1948 and the classical **Bing's Metrization Theorem** proved in 1951 which emphasize that a topological space is metrizable iff it is a paracompact Moore space. Therefore all of these spaces have important duty and function both in the Theory of Covering Properties and in the Metrization Theory. Their most important properties are proved in detail in this thesis. The Proposition given in Chapter 3 (page 58) is the unique original result of this study. This thesis has the self-containment character and the sufficient wholeness, since all the fundemental covering properties and the basic topological knowledge, which is necessary for a complete comprehention are given in the first chapter.

Bölüm 1

TEMEL ÖRTÜLÜŞ ÖZELLİKLERİ

Genel Topolojide belirli türde örtülüşlerden belirli nitelikte alt örtülüşler ya da incelmeler elde edebilme türündeki özelliklere kısaca **Örtülüş Özellikleri** denir. Topolojinin hiç kuşkusuz en ünlü örtülüş özellikleri **tıkızlık** ve **yantıkızlık**'dır. Bilindiği gibi, her açık örtülüşünden sonlu bir alt örtülüş (sırasıyla, yerel sonlu bir incelme) elde edebilen topolojik uzaylara tıkız (sırasıyla yantıkız) denilir. Yantıkız uzaylarla Bölüm 2'de ilgileneceğiz. Öte yandan, herhangi bir uzayda bile belirli tür açık örtülüşlerden yerel sonlu açık incelmeler elde edilebilir. K.Morita'nın bu ünlü sonucu aşağıda kanıtlanacaktır. Bu bölümde, başta normal uzayların olmak üzere çeşitli temel örtülüş özellikleri incelenecektir. Önce, bu tez çalışmasında kullanacağımız çeşitli incelme türlerini tanımalıyız:

Bir X topolojik uzayında $\mathcal{G}$ bir örtülüş olsun. Bir $\mathcal{U}$ örtülüşüne, her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subseteq G_U$ koşulu gerçeklenecek biçimde en az bir $G_U \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}$'nin bir **incelmesi** denir. Genellikle bir örtülüşün incelmesinin de örtülüş olması istenir ve bu durumda $\mathcal{U} \prec \mathcal{G}$ yazılır. $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \prec \mathcal{G}$ yazılışı ise $\mathcal{U}$ incelmesinin, uygun sayılabilir tane $\mathcal{U}_n$ alt ailesinin birleşimi biçiminde yazılabilmesi demektir. Bir $\mathcal{A}$ ailesinin her $A \in \mathcal{A}$ üyesi için, $A \subseteq B_A$ gerçekleyen en az bir $B_A \in \mathcal{B}$ var olduğunda da, bu ailelerin örtülüş olmalarına bakılmaksızın $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ yazacağız. Pek çok yazar bu durumda, $\mathcal{A}$ ailesine $\mathcal{B}$'nin **kısmi bir incelmesi** adını vermektedir. X uzayında herhangi bir $\mathcal{A}$ alt kümeler ailesi ve $E \subseteq X$ alt kümesi için

$$st(E, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \in \mathcal{A} : E \cap A \neq \emptyset\}$$

birleşim kümesine E'nin $\mathcal{A}$ ailesine göre **yıldız kümesi** denir. Özel olarak, herhangi $x \in X$ noktası için $st(x, \mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ olur. Kolayca $st(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha, \mathcal{A}) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} st(E_\alpha, \mathcal{A})$ ve dolayısı ile $st(E, \mathcal{A}) = \bigcup_{x \in E} st(x, \mathcal{A})$ gözlenir. O halde $x \in st(y, \mathcal{A})$ ve $y \in st(x, \mathcal{A})$ iddialarının eşdeğer olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathcal{A}$ bir örtülüş ise $E \subseteq st(E, \mathcal{A})$ ve özel olarak $\mathcal{A}$ açık bir örtülüş ise $\overline{E} \subseteq st(E, \mathcal{A})$ gerçeklendiği gözlenmelidir, çünkü ikinci iddiada, her $x \in \overline{E}$ elemanı için $st(x, \mathcal{A}) \cap E \neq \emptyset$ geçerli olacaktır. Tüm bu tez çalışmasında, herhangi bir $\mathcal{A}$ ailesi için $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ve $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ kümeleri yerine kısaca $\bigcup \mathcal{A}$ ve $\bigcap \mathcal{A}$ yazılacaktır.Eğer $\mathcal{G}$ örtülüşünün $\mathcal{U}$ incelmesi için $\{st(x, \mathcal{U})\}_{x \in X} \prec \mathcal{G}$ koşulu gerçekleniyorsa, kısacası her $x \in X$ için uygun bir $G_x \in \mathcal{G}$ aracılığı ile $st(x, \mathcal{U}) \subseteq G_x$ koşulu geçerli oluyorsa, $\mathcal{U}$ ailesine $\mathcal{G}$'nin bir **barisantrik incelmesi** ya da **ağırlık merkezli incelmesi** denir. Çok daha güçlü olan $\{st(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\} \prec \mathcal{G}$ koşulu gerçeklendiğinde ise $\mathcal{U}$ ailesine $\mathcal{G}$'nin bir **yıldız incelmesi** denir. Örneğin, normal uzaylarda sayılabilir üyeli ve noktasal sonlu açık örtülüşlerin bu türde incelmelerinin var olduğu aşağıda kanıtlanacaktır. Son olarak $\mathrm{ord}(E, \mathcal{A}) = \mathrm{card}\{A \in \mathcal{A} : A \cap E \neq \emptyset\}$ kardinal sayısına E kümesinin $\mathcal{A}$ ailesine göre **derecesi** denir. $\mathcal{A}$ örtülüşü için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{A}) \leq \omega_0 \, (\forall x \in X)$ koşulu gerçeklendiğinde, bu örtülüşe **noktasal sayılabilir örtülüş** denir. Noktasal sonlu örtülüş benzer biçimde tanımlanır; burada ω_0 ile, bilindiği gibi ilk sonsuz ordinal sayı yazılmaktadır.

Öte yandan, bir X uzayında bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ alt kümeler ailesine, ancak ve yalnız, her $x \in X$ noktasının, bu ailede sonlu tanesi dışında tüm üyelerle ayrık olabilen bir açık civarı varsa, kısacası

$$\forall x \in X, \exists G_x \in \mathcal{B}_x, \exists \Lambda_x \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\Lambda), G_x \cap A_\alpha = \emptyset \, (\forall \alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$$

koşulu gerçeklenecek biçimde sonlu elemanlı bir $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi belirlenebiliyorsa, **yerel sonlu aile** denir; burada herhangi bir A kümesi için $\mathcal{P}_{\omega_0}(A) = \{B \subseteq A : \mathrm{card}B = \omega_0\}$ ve $\mathcal{P}_{<\omega_0}(A) = \{B \subseteq A : \mathrm{card}B < \omega_0\}$ yazılmaktadır. Özel olarak bir $\mathcal{G}$ örtülüşü, eğer $\mathrm{ord}(G, \mathcal{G}) < \omega_0 \, (\forall G \in \mathcal{G})$ koşulunu gerçeklerse apaçıktır ki yerel sonlu olur, bu durumda $\mathcal{G}$ açık örtülüşüne **yıldızıl sonlu(=star-finite)** denilir. Yıldızıl sonlu olmayan yerel sonlu açık örtülüşler vardır. Örneğin d_2 iki boyutlu Eukleides metriğinin belirlediği metrik uzayda, $G_0 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$, $G_1 = \mathbb{R} \times (\frac{1}{2}, \infty)$ ve ayrıca $U_k = (k - \frac{1}{3}, k + \frac{4}{3}) \times (-1, 1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ açık kümelerinden oluşan $\mathcal{U} = \{G_0, G_1\} \cup \{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ açık örtülüşü, kolayca görülebileceği gibi yerel sonludur, çünkü uzayın herhangi bir $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noktası için $S_{d_2}((x_1, x_2), 2^{-3})$ açık yuvarı $\mathcal{U}$ ailesinde en fazla üç üye ile kesişebilmektedir. Oysa $\mathrm{ord}(G_0, \mathcal{U}) = \omega_0 = \mathrm{ord}(G_1, \mathcal{U})$ nedeniyle $\mathcal{U}$ örtülüşü yıldızıl sonlu değildir. Öte yandan bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ alt küme ailesine, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi ne olursa olsun $\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda'} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda'} \overline{A_\alpha}$ koşulunu gerçeklerse **kapanış koruyan aile** denir. Tüm yerel sonlu ailelerin bu nitelikte olduğu aşağıda gösterilecektir. Aynı bir Λ indis kümesi ile indislenmiş, kapanış koruyan $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı küme aileleri için $\{K_\alpha \cap F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı küme ailesi de kapanış koruyandır, çünkü $\Lambda' \subseteq \Lambda$ ne olursa olsun $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)$ gözlemek güç değildir; gerçekten herhangi bir $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)}$ elemanı alındığında, bu son kapanış kümesi $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} K_\alpha) \cap (\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} F_\alpha)$ kesişimi tarafından kapsandığından, boş olmadıkları apaçık olan $\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda' : x \in K_\alpha\}$ ve $\Lambda_2 = \{\alpha \in \Lambda' : x \in F_\alpha\}$ alt indis kümeleri aracılığıyla, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda'$ durumunda iddia apaçık olduğundan, $\Lambda' - \Lambda_1 \neq \emptyset$ ve $\Lambda' - \Lambda_2 \neq \emptyset$ varsayarak, $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{F}$ ailelerinin kapanış koruyanlık nitelikleri gereği ve örneğin $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'-\Lambda_1}(K_\alpha \cap F_\alpha)} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda'-\Lambda_1} K_\alpha \not\ni x$ gerçekleştiği için, sonuçta

$$\begin{aligned} x &\in \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)} - (\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'-\Lambda_1}(K_\alpha \cap F_\alpha)} \cup \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'-\Lambda_2}(K_\alpha \cap F_\alpha)}) \\ &= \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)} - \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'-(\Lambda_1\cap\Lambda_2)}(K_\alpha \cap F_\alpha)} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(\Lambda_1\cap\Lambda_2)}(K_\alpha \cap F_\alpha)} \end{aligned}$$

olur ve zorunlu olarak $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$ bulunur,çünkü boş indis kümesi üzerinden alınan birleşim boştur, kısacası var olan en az bir $\alpha_x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \subseteq \Lambda'$ indisi aracılığıyla $x \in K_{\alpha_x} \cap F_{\alpha_x} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(K_\alpha \cap F_\alpha)$ istenen sonuç bulunur. Yukarıdaki yerel sonluluk tanımında yazılı olan koşulu, $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesinden bağımsız olarak

$$\forall x \in X,\ \exists G_x \in \mathcal{B}_x,\ \operatorname{ord}(G_x, \mathcal{A}) < \omega_0$$

biçiminde de yazabileceğimize dikkat edilmelidir. Buna karşılık eğer, bu son yazılı koşuldan daha güçlü olan

$$\forall x \in X,\ \exists G_x \in \mathcal{B}_x,\ \operatorname{ord}(G_x, \mathcal{A}) \leq 1$$

koşulu gerçekleniyorsa $\mathcal{A}$ ailesine X uzayında **kesikli aile**(ya da **diskret aile**) denilir. Kolayca görüleceği gibi $\mathcal{A}$ ailesinin kesikli olabilmesi için g.y.k. $\mathcal{A}$ ailesinin **yerel sonlu** olması ve $\overline{A_\alpha} \cap \overline{A_\beta} = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in \Lambda)$ gerçeklenmesidir. Yine kolayca gözlenebileceği gibi $\mathcal{A}$ ailesinin yerel sonlu olabilmesi için g.y.k. $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin yerel sonlu olmasıdır, çünkü iyi bilindiği gibi bir G açık kümesi için $G \cap A = \emptyset$ ile $G \cap \overline{A} = \emptyset$ iddiaları eşdeğerdir. $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi yerel sonlu ise, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi ne olursa olsun

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} \overline{A_\alpha}$$

gerçeklendiği unutulmamalıdır, çünkü $x \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} A_\alpha}$ ise, sonlu bir $\Lambda_x(\subseteq \Lambda)$ indis kümesi aracılığıyla $x \notin \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'-\Lambda_x} A_\alpha} = K$ olur ve sonuçta $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} A_\alpha} = K \cup \overline{\bigcup_{\alpha\in(\Lambda'\cap\Lambda_x)} A_\alpha}$ gözleyerek ve $\Lambda' \cap \Lambda_x$ indis kümesinin, boş olmadığını ve sonlu elmanlı olduğuna dikkat ederek $x \in \bigcup_{\alpha\in(\Lambda'\cap\Lambda_x)} \overline{A_\alpha}$ bulunacağı kolayca görülmektedir. Demek ki $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} A_\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda'} \overline{A_\alpha}$ bulunur, ters kapsama zaten doğrudur. O halde yerel sonlu küme aileleri kapanış korurlar.

Örtülüş özelliklerine ilişkin neredeyse tüm teoremlerde, indis kümeleri iyi sıralanmış örtülüşlerle çalışılır. Bilindiği gibi her küme üzerinde en az bir iyi sıralama bağıntısının tanımlanabildiğini söyleyen ünlü Zermelo Teoremi, ünlü Seçme Aksiyomuna ya da Zorn Lemmasına eşdeğer olduğu için, Teorik Matematiğin vazgeçilmez temel doğrularından birisi olarak kabul edilir.

Şimdi, tümü de normal uzayların örtülüş özelliklerine ilişkin çok önemli bazı sonuçları birarada görelim. Bilindiği gibi, ayrık iki kapalı kümenin iki ayrık açık küme tarafından kapsanabildiği bir topolojik uzaya **normal uzay** denir. Böyle bir uzayda K kapalı, G açık ve $K \subseteq G$ ise, iyi bilindiği gibi, $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$ koşulları gerçeklenecek biçimde bir U açık kümesi vardır.

Normal Uzayların Örtülüş Teoremi: *Aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:*
i) *X uzayı normaldir.*
ii) (**Lefschetz Teoremi:**) *X uzayının noktasal sonlu her açık örtülüşünün bir tam daralması vardır.*
iii) (**Micheal Teoremi:**) *X uzayının her yerel sonlu açık örtülüşünün açık bir barisantrik incelmesi vardır.*
iv) (**Morita Teoremi:**) *X uzayının noktasal sonlu ve sayılabilir üyeli her $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün sayılabilir üyeli, açık ve $\overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{U}$ gerçekleyen yıldızıl sonlu bir $\mathcal{W}$ incelmesi vardır.*
v) (**Morita Teoremi:**) *X uzayının noktasal sonlu ve sayılabilir üyeli her açık örtülüşünün yerel sonlu, açık bir yıldız incelmesi vardır.*
vi) (**Bing Teoremi:**) *X uzayında sayılabilir üyeli ve kesikli her kapalı kümeler ailesinin açık ve kesikli bir tam genişlemesi vardır.*

Kanıtlama: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Normal X uzayında, indis kümesi iyi sıralanmış Λ olan noktasal sonlu $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. $\mathrm{card}\Lambda = \kappa$ ise, genelliği bozmaksızın $\Lambda = [0, \kappa) = \kappa$ alınabileceğini biliyoruz. Önce, normallik koşulunun bir gereği olarak ve $X = \bigcup \mathcal{G} = G_0 \cup \bigcup_{0<\alpha<\kappa} G_\alpha$ gerçeğinden yararlanarak

$X - \bigcup_{0<\alpha<\kappa} G_\alpha \subseteq W_0 \subseteq \overline{W_0} \subseteq G_0$ gerçeklenecek biçimde bir W_0 açık kümesini belirleyelim. O halde $X = W_0 \cup \bigcup_{0<\alpha<\kappa} G_\alpha$ bulunur. Sonlu ötesi tümevarımla çalışarak, bir $\alpha_0 < \kappa$ verildiğinde,

$$\alpha(i) \quad X = \bigcup_{\beta\leq\alpha} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha<\beta} G_\beta \, (\forall\alpha < \alpha_0) \ , \ \alpha(ii) \quad \overline{W_\alpha} \subseteq G_\alpha \ (\forall\alpha < \alpha_0)$$

koşulları gerçeklenecek biçimde $\{W_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ açık kümeler ailesi tanımlı olduğunda, $X = \bigcup_{\beta<\alpha_0} W_\beta \cup G_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha_0<\beta} G_\beta$ gerçeklendiğini göstermek istiyoruz. Bu güç değildir. Herhangi bir $x \in X$ elemanı alındığında $x \in \bigcup_{\beta<\alpha_0} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha_0\leq\beta} G_\beta$ gerçeklendiğini göstermeliyiz. Eğer $x \in \bigcup_{\alpha_0\leq\beta} G_\beta$ ise sorun yoktur; eğer $x \notin \bigcup_{\alpha_0\leq\beta} G_\beta$ ise, $\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : x \in G_\alpha\}$ alt indis kümesinin sonlu elemanlı olmasının gereği olarak, sonlu elemanlı iyi sıralanmış bu kümenin elemanları arasındaki sıralama

$$\alpha_1(x) < \alpha_2(x) < ... < \alpha_n(x)$$

olmak üzere, $x \notin \bigcup_{\alpha_0\leq\beta} G_\beta$ varsayımı nedeniyle $\alpha_n(x) < \alpha_0$ gerçeklendiğinden, hem $x \notin \bigcup_{\alpha_n(x)<\alpha} G_\alpha$ olur ve hem de $\alpha = \alpha_n(x) < \alpha_0$ ordinal sayısı için yukarıda geçerli olduğunu varsaydığımız $\alpha(i)$ koşulu nedeniyle $x \in X = \bigcup_{\beta\leq\alpha_n(x)} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha_n(x)<\beta} G_\beta$ bulunur ve $x \notin \bigcup_{\alpha_n(x)<\beta} G_\beta$ olduğu için $x \in \bigcup_{\beta\leq\alpha_n(x)} W_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha_0} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha_0\leq\beta} G_\beta$ istenen sonucu bulunur. O halde yine uzayın normal oluşunun bir gereği olarak

$$X - \left(\bigcup_{\beta<\alpha_0} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha_0<\beta} G_\beta \right) \subseteq W_{\alpha_0} \subseteq \overline{W_{\alpha_0}} \subseteq G_{\alpha_0},$$

$$X = \bigcup_{\beta\leq\alpha_0} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha_0<\beta} G_\beta$$

koşulları gerçeklenecek biçimde bir W_{α_0} açık kümesi var olur. Sonuçta, sonlu ötesi tümevarımla hem $i) X = \bigcup_{\beta\leq\alpha} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha<\beta} G_\beta$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ ve hem de $ii) \overline{W_\alpha} \subseteq G_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulları gerçeklenecek biçimde $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık kümeler ailesi belirlenmiş olur. Üstelik, herhangi bir $x \in X$ verildiğinde, $\alpha = \alpha_n(x) < \kappa$ ordinal sayısı aracılığıyla, yukarıdaki $\alpha(i)$ koşulu ve ayrıca $x \notin \bigcup_{\alpha<\beta} G_\beta$ bilgisi kullanılarak $x \in \bigcup_{\beta\leq\alpha} W_\beta \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ bulunacağı için, $\mathcal{W}$ açık kümeler ailesinin örtülüş olduğu anlaşılır. $\mathcal{W}$ açık örtülüşüne, her $\alpha \in \Lambda$ için $\overline{W_\alpha} \subseteq G_\alpha$ koşulunu gerçeklediği için, $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün bir **tam daralması** (=precise shrinking) denir.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* X uzayı *ii)* koşulunu gerçeklesin ve bu uzayda $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ yerel sonlu ve açık örtülüşü verilsin. Her yerel sonlu örtülüş noktasal sonlu olduğundan, $\overline{W_\alpha} \subseteq U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulu gerçeklenecek biçimde $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tam daralması vardır. O halde $\mathcal{W}$ ve dolayısıyla $\overline{\mathcal{W}} = \{\overline{W_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ aileleri yerel sonlu ve dolayısıyla noktasal sonlu olurlar. Şimdi, herhangi bir $x \in X$ verildiğinde, $\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : x \in \overline{W_\alpha}\}$ olmak üzere, $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesinin sonlu elemanlı olduğu ve

$$G(\Lambda_x) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda_x} U_\alpha - \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} W_\alpha} \quad (\forall x \in X)$$

açık kümesinin $x \in G(\Lambda_x)$ gerçeklediği apaçıktır, çünkü $\mathcal{W}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} \overline{W_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} W_\alpha}$ geçerlidir. Amacımız $\mathcal{G} = \{G(\Lambda_x)\}_{x\in X}$ açık örtülüşünün $\{st(x,\mathcal{G})\}_{x\in X} \prec \mathcal{U}$ gerçeklediğini göstermektir. Gerçekten, kısalık amacıyla, her $x \in X$ için $G(\Lambda_x)$ yerine G_x yazacak olursak, herhangi bir $x_0 \in X$ verildiğinde, $x_0 \in W_{\alpha_0}$ gerçekleyen ve sabit tutulmuş $\alpha_0 \in \Lambda$ indisi aracılığıyla $st(x_0,\mathcal{G}) = \bigcup\{G_x : x_0 \in G_x\} \subseteq U_{\alpha_0}$ olur, çünkü $x_0 \in G_x$ ise $\alpha_0 \in \Lambda_x$ gerçekleşmek zorundadır (eğer $\alpha_0 \notin \Lambda_x$ olsaydı, $\alpha_0 \in \Lambda - \Lambda_x$ ve $\overline{W_{\alpha_0}} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} \overline{W_\alpha}$ ve sonuçta $x_0 \in G_x = G(\Lambda_x) \subseteq X - \bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} \overline{W_\alpha} \subseteq X - \overline{W_{\alpha_0}}$ bulunurdu), kısacası $x_0 \in G_x \in \mathcal{G}$ ise $\alpha_0 \in \Lambda_x$ nedeniyle $G_x \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda_x} U_\alpha \subseteq U_{\alpha_0}$ bulunur. O halde $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x\in X}$ açık örtülüşü, $\mathcal{U}$'nun barisantrik incelmesidir. Aslında, dikkat edilirse, burada verilen kanıtlamada

$$G(\Lambda') = \bigcap_{\alpha\in\Lambda'} U_\alpha - \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda'} W_\alpha} \qquad (\forall\Lambda' \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\Lambda))$$

açık kümelerinin ailesinin, $\mathcal{U}$'nun noktasal sonlu ve barisantrik incelmesi olduğu kanıtlanmış olmaktadır, çünkü dikkat edilirse, $\mathrm{ord}(x,\mathcal{U}) = n$ ve $x \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$ ise $\Lambda' \nsubseteq \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ gerçekleyen herhangi bir sonlu Λ' alt indis kümesi için $x \notin G(\Lambda')$ olduğundan $G(\Lambda')$ kümelerinin ailesi $\mathcal{G} = \{G(\Lambda') : \Lambda' \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\Lambda)\}$ noktasal sonludur. Bu önemli gözlem aşağıda kullanılacaktır.

iii) $\Rightarrow$ *i)* X uzayında ayrık K_1 ve K_2 kapalı kümeleri verildiğinde $U_i = X - K_i\,(i = 1,2)$ açık kümeleri aracılığıyla $\mathcal{U}_0 = \{U_1, U_2\}$ açık örtülüşüne karşılık $\{st(x,\mathcal{G})\}_{x\in X} \prec \mathcal{U}_0$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü vardır. O halde K_1 ve K_2 kapalı kümelerini kapsayan $st(K_1,\mathcal{G})$ ve $st(K_2,\mathcal{G})$ açık yıldız kümeleri ayrıktır, çünkü $K_1 \cap G_1 \neq \emptyset$ ve $K_2 \cap G_2 \neq \emptyset$ gerçekleyen

herhangi $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ için $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ gerçekleşir, çünkü $x_0 \in G_1 \cap G_2$ elemanı var olsaydı ve sözgelimi $st(x_0, \mathcal{G}) \subseteq U_1$ gerçekleşseydi, sonuçta $G_1 \subseteq st(x_0, \mathcal{G}) \subseteq U_1 = X - K_1$ nedeniyle $\emptyset \neq K_1 \cap G_1 = \emptyset$ çelişkisi doğardı. Demek ki X uzayı normaldir.
$v) \Rightarrow i)$ Yukarıdaki gibi kanıtlanır.
$ii) \Rightarrow iv)$ X uzayı $ii)$ koşulunu gerçeklesin. O halde yukarda gözlendiği gibi, $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ nedeniyle X uzayı normal olur. Şimdi X uzayının sayılabilir üyeli ve noktasal sonlu $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtülüşleri verilsin. $ii)$ nedeniyle $\overline{V_n} \subseteq U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olacak biçimde bir $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tam daralması ve uzay normal olduğu için, her $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sıralı ikilisi için

$$\overline{V_n} \subseteq G_{n,1} \subseteq \overline{G_{n,1}} \subseteq \ldots \subseteq G_{n,m} \subseteq \overline{G_{n,m}} \subseteq G_{n,m+1} \subseteq \overline{G_{n,m+1}} \subseteq \ldots \subseteq U_n$$

koşulları gerçeklenecek biçimde $G_{n,m}$ açık kümeleri tümevarım yoluyla tanımlanır. Şimdi

$$W_{1,1} = G_{1,2}\ ,\ W_{n,m} = G_{n,m+1} - \overline{\bigcup_{1\leq i<m} G_{i,m-1}} \quad (2 \leq m, n \leq m)$$

olmak üzere sayılabilir üyeli $\mathcal{W} = \{W_{n,m} : 1 \leq n \leq m, m \in \mathbb{N}\}$ açık küme ailesini tanımlayalım. Apaçıktır ki $\overline{W_{n,m}} \subseteq U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklenir.Bu ailenin ayrıca

$$i)\ \overline{\bigcup_{1\leq k\leq n} G_{k,n}} \subseteq \bigcup \mathcal{W}\ , \quad ii) W_{k,n} \cap W_{i,m} = \emptyset \quad (n+3 \leq m \text{ ise})$$

koşullarını gerçeklediğini kolayca görebiliriz. $i)$ koşulu, $n = 1$ için $\overline{G_{1,1}} \subseteq G_{1,2} = W_{1,1} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ nedeniyle doğrudur; bu iddia n doğal sayısı için doğru olduğunda

$$\begin{aligned}\overline{G_{k,n+1}} \subseteq G_{k,n+2} &= \left(G_{k,n+2} - \overline{\bigcup_{1\leq i\leq n} G_{i,n}}\right) \cap \left(G_{k,n+2} \cap \overline{\bigcup_{1\leq i\leq n} G_{i,n}}\right)\\ &\subseteq W_{k,n+1} \cup \overline{\bigcup_{1\leq i\leq n} G_{i,n}} \subseteq \bigcup \mathcal{W}\end{aligned}$$

nedeniyle $n+1$ için de doğru olmaktadır. $ii)$ koşulu ise, $n+3 \leq m$ için

$$W_{k,n} \subseteq G_{k,n+1} \subseteq \overline{G_{k,n+2}} \subseteq \overline{G_{k,m-1}} \subseteq \overline{\bigcup_{1\leq i<m} G_{i,m-1}} \subseteq X - W_{i,m}$$

nedeniyle geçerli olmaktadır. Üstelik $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{G_{k,n}} \right) \subseteq \bigcup \mathcal{W} \subseteq X$ nedeniyle $\mathcal{W}$ ailesi bir örtülüştür ve her $W \in \mathcal{W}$ için $\mathrm{ord}(W, \mathcal{W}) < \omega_0$ gerçeklendiği için $\mathcal{W}$ yıldızıl sonlu bir incelmedir ve üstelik $\overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{U}$ koşulu gerçeklenmektedir.
$iv) \Rightarrow v)$ X uzayı $iv)$ koşulunu gerçeklesin ve sayılabilir üyeli noktasal sonlu $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtülüşü verilsin. O halde $\mathcal{U}$ örtülüşünün yıldızıl sonlu ve dolayısıyla yerel sonlu olan ve üstelik $\overline{\mathcal{W}^*} \prec \mathcal{U}$ gerçekleyen açık bir $\mathcal{W}^*$ incelmesi vardır ve Yardımcı Teorem 4 kullanılarak sonuçta $\overline{W_n} \subseteq U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşulunu gerçekleyen bir $\mathcal{W} = \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tam daralması tanımlanır. Yukarıdaki $ii) \Rightarrow iii)$ kanıtlamasının sonunda gözlendiği gibi, herhangi bir $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$ sonlu alt kümesi için $G(\Lambda) = \bigcap_{n \in \Lambda} U_n - \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \Lambda} W_n}$ olmak üzere $\mathcal{G} = \{G(\Lambda) : \Lambda \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathbb{N})\}$ açık ailesi $\mathcal{U}$'nun noktasal sonlu ve sayılabilir üyeli barisantrik incelmesi olur, çünkü bilindiği gibi $\mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathbb{N})$ kümesi ile $\mathbb{N}$ eşkuvvettedir. O halde yeniden $iv)$ koşulu kullanılarak $\mathcal{G}$ noktasal sonlu, sayılabilir üyeli açık örtülüşünün $\mathcal{G}^*$ gibi sayılabilir üyeli, noktasal sonlu ve barisantrik incelmesi tanımlanır. Sonuçta $\mathcal{G}^*$ açık örtülüşü, Yardımcı Teorem 3 nedeniyle $\mathcal{U}$'nun bir yıldız incelmesi olur.
$i) \Rightarrow vi)$ Sayılabilir üyeli $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı kümeler ailesi $i)$ koşulunu gerçekleyen X uzayında kesikli olsun. O halde $n \neq m$ için $K_n \cap K_m = \emptyset$ gerçekleşir. X uzayı normal olduğu için sırasıyla, birinci adımda $K_1 \subseteq G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq X - \bigcup_{1<n} K_n$ gerçekleyen G_1 açık kümesini tanımlarsak $X = \overline{G_1} \cup \bigcup_{2 \leq n} K_n$ olur, sonra $n-$inci adımın ardından, $X = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \overline{G_k} \cup \bigcup_{n+1 \leq m} K_m$ gözleyerek

$$K_{n+1} \subseteq G_{n+1} \subseteq \overline{G_{n+1}} \subseteq X - \left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} \overline{G_k} \cup \bigcup_{n+1<m} K_m \right)$$

açık kümesini belirlersek, tüm G_n açık kümeleri tümevarımla tanımlanmış olur ve kolayca $n \neq m$ için $G_n \cap G_m = \emptyset$ bulunur, çünkü sözgelimi $n < m$ ise $G_m \cap \left(\bigcup_{1 \leq k<m} \overline{G_k} \cup \bigcup_{m+1<i} K_i \right) = \emptyset$ gerçekleşmektedir. Fakat, $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ kümesi kapalı olduğu için yine uzayın normal oluşunun bir gereği olarak, var olan ve $\bigcup \mathcal{K} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ koşulunu gerçekleyen açık U kümesinden yararlanarak, $U_n = U \cap G_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ açık kümelerini tanımlarsak, $K_n \subseteq U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve üstelik $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık ailesi X uzayında kesikli olur, çünkü herhangi bir $x \in X$ alındığında, ister $x \notin \overline{U}$ ister $x \in \overline{U}$ gerçekleşsin, bu noktanın $\mathcal{U}$ ailesinde en fazla bir üyeyi kesebilen bir açık civarı kolayca tanımlanır, çünkü $x \in \overline{U}$ ise tek bir $n_x \in \mathbb{N}$ aracılığıyla $x \in G_{n_x}$

ve $G_{n_x} \cap U_n = \emptyset$ $(\forall n \neq n_x)$ olur. $\mathcal{U}$ kesikli ailesine $\mathcal{K}$ kesikli ailesinin bir **tam genişlemesi** denir.
$vi) \Rightarrow i)$ Apaçıktır. □

Jones Yardımcı Teoremi: *Bir X uzayında, $\kappa = cardA$ gerçekleyen yoğun bir A kümesi ile $2^\kappa \leq cardK$ gerçekleyen kapalı-kesikli bir K kümesi varsa, uzay normal olamaz.*
Kanıtlama: Kapalı K kümesi üzerindeki alt uzay kesikli(=diskret) olduğu için, K'nın tüm alt kümeleri bu uzayda birer kapalı kümedirler. Dolayısıyla, eğer X uzayı normal *olsaydı*, herbir $E \subseteq K$ alt kümesi için, ayrık E ve $K - E$ kapalı küme çiftine karşılık uzayın, $E \subseteq G_E$, $K - E \subseteq U_E$ ve $G_E \cap U_E = \emptyset$ koşullarını gerçekleyen G_E ve U_E açık kümeleri var olurdu. Dikkat edilirse $E_1 \neq E_2$ $(\subseteq K)$ alt kümeleri için $G_{E_1} \cap A \neq G_{E_2} \cap A$ gerçekleşir, çünkü, sözgelimi $\emptyset \neq E_1 - E_2$ ise $E_1 - E_2 \subseteq G_{E_1} \cap (K - E_2) \subseteq G_{E_1} \cap U_{E_2}$ nedeniyle $G_{E_1} \cap U_{E_2}$ açık kümesi boştan farklı olur ve A yoğun olduğu için $\emptyset \neq G_{E_1} \cap U_{E_2} \cap A \subseteq (G_{E_1} \cap A) \cap (X - G_{E_2}) = (G_{E_1} \cap A) - (A \cap G_{E_2})$ elde edilir. O halde $\varphi(E) = G_E \cap A$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}(K) \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu bire-bir olur ve sonuçta $2^\kappa \leq \text{card}K < |\mathcal{P}(K)| \leq |\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$ çelişkisi elde edilirdi . Demek ki X uzayı kesinlikle normal bir uzay değildir.
□

Herhangi bir (X, τ) topolojik uzayı ve $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ fonksiyonu için, bu fonksiyonun **sıfır kümesi** $\text{Sıf}(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, **tümleyen sıfır kümesi** ise $X - \text{Sıf}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{x \in X : 0 < |f(x)|\}$ biçiminde tanımlanır. Benzer biçimde, herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $[a < f] = f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : a < f(x)\}$ yazılır. $[a \leq f]$ ve $[f < a]$ kümeleri benzer biçimde tanımlanır. f fonksiyonu sürekli ise $[a < f]$ ve $X - \text{Sıf}(f) = [0 < |f|]$ kümelerinin açık $[a \leq f]$ ve $\text{Sıf}(f)$ kümelerinin kapalı olduğu gözlenmelidir. Üstelik $\text{Sıf}(f) \cap \text{Sıf}(g) = \text{Sıf}(|f| + |g|)$ nedeniyle, sonlu sayıda sıfır kümesinin kesişiminin yine bir sıfır kümesi ve dolayısı ile sonlu tane tümleyen sıfır kümesinin birleşiminin yine bir tümleyen sıfır kümesi olduğu anlaşılır. Topolojide, aksi açıkça vurgulanmadıkça, yalnızca sürekli gerçel değerli fonksiyonların sıfır ve tümleyen sıfır kümeleri gözönüne alınır. Şimdi Morita'nın aşağıdaki ünlü sonucunu görelim.

Morita Teoremi: *Herhangi bir topolojik uzayda, tümleyen sıfır kümelerden oluşan sayılabilir üyeli her açık örtülüşün yerel sonlu bir açık incelmesi vardır.*

Kanıtlama1: Önce Morita'nın özgün kanıtlamasını görelim. $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ açık örtülüşünün üyeleri bir X uzayında birer tümleyen sıfır kümesi olsun. O halde $[0 < f_n] = U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşulu gerçeklenecek biçimde sürekli gerçel değerli f_n fonksiyonları vardır. Dolayısı ile $K_n = X - \bigcup_{1\leq k\leq n} U_k$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kapalı kümeleri birer sıfır kümesidirler, azalırlar ve kesişimleri boştur. Oysa $X - K_n = [0 < g_n]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklenecek biçimde sürekli ve gerçel değerli $g_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır ve $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ dizisi yardımıyla $[\epsilon_m < g_n] = G_{n,m} \subseteq [\epsilon_m \leq g_n] = F_{n,m} \subseteq G_{n,m+1} \subseteq F_{n,m+1}$ ve $X - K_n = [0 < g_n] = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{n,m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}$ olur. $G_{n,m}$ kümelerinin açık, $F_{n,m}$ kümelerinin kapalı ve bu kümelerin ikinci alt indislerine göre artan olduklarını gözleyerek ve boş indis kümeleri üzerinden alınan birleşimlerin boş küme olduğunu unutmadan

$$W_n = U_n - \bigcup_{1\leq k<n} F_{k,n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

açık kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{W} = \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesinin, aranan yerel sonlu açık incelme olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten her $n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k < n$ için $F_{k,n} \subseteq X - K_k = \bigcup_{1\leq i\leq k} U_i \subseteq \bigcup_{1\leq i<n} U_i$ ve sonuçta $U_n - \bigcup_{1\leq i<n} U_i \subseteq U_n - \bigcup_{1\leq k<n} F_{k,n} = W_n$ gerçeklendiğinden, herbir $x \in X$ için $n_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$ tanımlayarak, $\mathcal{W}$ ailesinin $\mathcal{U}$ ailesini incelten bir örtülüş olduğu anlaşılır. Üstelik $n + m < N$ ise $G_{n,m} \cap W_N = \emptyset$ olur, çünkü

$$G_{n,m} \subseteq F_{n,m} \subseteq F_{n,N} \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n} F_{k,N} \subseteq \bigcup_{1\leq k<N} F_{k,N} \subseteq X - W_N$$

geçerlidir. Üstelik $X = X - \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X - K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} G_{n,m}$ nedeniyle $\mathcal{G} = \{G_{n,m} : (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ ailesi bir açık örtülüş olduğundan, $\mathcal{W}$ ailesinin yerel sonlu olduğu anlaşılır.

Kanıtlama 2: Daha kısa bir kanıtlama şöyle verilebilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = [0 < f_n] = \bigcup_{m=1}^{\infty}[\epsilon_m < f_n] = \bigcup_{m=1}^{\infty}[\epsilon_m \leq f_n]$ gerçeklendiğinden, kısacası $U_{n,m} = [\epsilon_m < f_n]$ açık kümeleri aracılığıyla, $\overline{U_{n,m}} \subseteq [\epsilon_m \leq f_n] \subseteq U_{n,m+1}$ $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ gözleyerek $U_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{n,m} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{U_{n,m}}$ geçerli olduğundan, sonuçta

$$\mathcal{U}^* = \{U_n - \bigcup_{1\leq k<n}\bigcup_{1\leq m<n} \overline{U_{k,m}} : n \in \mathbb{N}\}$$

açık kümeler ailesinin örtülüş ve istenen yerel sonlu incelme olduğunu, $n + m < N$ için $U_{n,m} \cap (U_N - \cup_{k<N} \cup_{m<N} \overline{U_{k,m}}) = \emptyset$ nedeniyle görmek kolaydır. □

Şimdi, örtülüş özelliklerine ilişkin, bu tez boyunca kullanacağımız toplam olarak 15 temel bilgiyi sırasıyla görelim:

Yardımcı Teorem 1:*Bir X uzayında $\mathcal{C}$ alt kümeler ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{A}$ ailesi bu uzayda yerel sonlu bir örtülüş ise ve ord$(A,\mathcal{C}) < \omega_0$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ koşulu gerçekleniyorsa $\mathcal{C}$ ailesi de yerel sonlu olur.*
Kanıtlama: Dikkat edilirse, her $x \in X$ için, sonlu üyeli öyle bir $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}$ alt ailesi ve $G_x \in \mathcal{B}_x$ vardır ki $G_x \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}-\mathcal{A}_x} A = \emptyset$ ve sonuçta $X = \bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_x} A \cup \bigcup_{A\in\mathcal{A}-\mathcal{A}_x} A$ nedeniyle $G_x \subseteq \bigcup\mathcal{A}_x$ bulunur. Oysa $\mathcal{A}_x$ ailesindeki sonlu sayıdaki üyenin herbiri yalnızca sonlu tane $\mathcal{C}$ üyesi ile kesişebildiğinden, sonlu üyeli öyle bir $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{C}$ alt ailesi vardır ki $\bigcup\mathcal{A}_x \cap \bigcup_{C\in\mathcal{C}-\mathcal{C}_x} C = \emptyset$ olur ve sonuçta $G_x \cap C = \emptyset$ $(\forall C \in \mathcal{C} - \mathcal{C}_x)$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 2:*Bir X uzayında her açık örtülüşün yerel sonlu ve kapalı bir incelmesi varsa uzay yantıkızdır.*
Kanıtlama: X uzayında bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü verilsin. $\mathcal{A} \prec \mathcal{G}$ gerçeklenecek biçimde yerel sonlu bir $\mathcal{A}$ kapalı kümeler örtülüşü ve $\mathcal{A}$ ailesinin yerel sonluluğu nedeniyle, var olan ve her $B \in \mathcal{B}$ için ord$(B,\mathcal{A}) < \omega_0$ gerçeklenecek biçimde $\mathcal{B}$ açık örtülüşü aracılığı ve hipotez nedeniyle, $\mathcal{K} \prec \mathcal{B}$ gerçekleyen yerel sonlu ve kapalı $\mathcal{K}$ örtülüşü vardır. O halde her $K \in \mathcal{K}$ için ord$(K,\mathcal{A}) < \omega_0$ gerçeklenir. Şimdi

$$\mathcal{K}_A = \{K \in \mathcal{K} : K \cap A = \emptyset\}\ ,\ U_A = X - \bigcup\mathcal{K}_A \quad (\forall A \in \mathcal{A})$$

tanımlanırsa, $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesinin yerel sonluluğu nedeniyle U_A kümesinin açık olduğu ve her $A \in \mathcal{A}$ için $A \cap \bigcup\mathcal{K}_A = \emptyset$ nedeniyle $A \subseteq U_A$ gerçeklendiği anlaşılır. Üstelik, herhangi bir $K \in \mathcal{K}$ verildiğinde $K \cap A \neq \emptyset$ için g.y.k. $K \cap U_A \neq \emptyset$ gerçeklenmesidir; gerçekten $K \cap A \subseteq K \cap U_A$ nedeniyle gereklik apaçıktır, tersine $K \cap U_A \neq \emptyset$ geçerli fakat $K \cap A = \emptyset$ olsaydı, sonuçta $K \in \mathcal{K}_A$ ve $K \subseteq \bigcup\mathcal{K}_A = X - U_A$ nedeniyle $\emptyset \neq K \cap U_A = \emptyset$ çelişkisi bulunurdu. O halde $\mathcal{U}_A = \{U_A : A \in \mathcal{A}\}$ açık kümeler ailesi, $X = \bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} U_A \subseteq X$ nedeniyle bir örtülüştür ve şimdi gözlenen gerçekler nedeniyle, her $K \in \mathcal{K}$ için ord$(K,\mathcal{U}_A) = $ ord$(K,\mathcal{A}) < \omega_0$ olduğundan, Yardımcı Teorem 1 nedeniyle $\mathcal{U}_A$ ailesi, X uzayında yerel sonlu olur. Artık herbir $A \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq G_A \in \mathcal{G}$ olacak biçimde tek türlü belirli bir G_A kümesi tanımlayarak, $\mathcal{U} = \{U_A \cap G_A : A \in \mathcal{A}\}$ açık kümeler ailesinin, $A \subseteq U_A \cap G_A$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ ve sonuçta $X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \subseteq \bigcup\mathcal{U} \subseteq X$

nedeniyle örtülüş olduğu ve verilen $\mathcal{G}$ örtülüşünü incelten yerel sonlu bir incelme olduğu görülür. $\square$

Micheal Genişleme Teoremi: *Bir X uzayında $\mathcal{K}$ yerel sonlu kapalı kümeler ailesi bir örtülüş ve $ord(K, \mathcal{A}) < \omega_0$ $(\forall K \in \mathcal{K})$ ise $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin, $A_\alpha \subseteq G_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulu gerçeklenecek biçimde yerel sonlu bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ "açık genişlemesi" vardır.*

Kanıtlama: Tıpkı yukarıdaki yardımcı teoremde olduğu gibi, $G_\alpha = X - \bigcup\{K \in \mathcal{K} : K \cap A_\alpha = \emptyset\}$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ tanımlamak ve ayrıca $\text{ord}(K, \mathcal{A}) = \text{ord}(K, \mathcal{G})$ gerçeklendiğini gözlemek yeterlidir. $\square$

Yardımcı Teorem 3: *Bir örtülüşün barisantrik incelmesinin barisantrik incelmesi onun yıldız incelmesidir.*

Kanıtlama: Bir X uzayında $\mathcal{A}$ bir örtülüş $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ incelmesi $\{st(x, \mathcal{B})\}_{x\in X} \prec \mathcal{A}$ ve $\mathcal{C} \prec \mathcal{B}$ incelmesi ise $\{st(x, \mathcal{C})\}_{x\in X} \prec \mathcal{B}$ koşullarını gerçeklerse, herhangi bir sabit $C_0 \in \mathcal{C}$ alındığında $st(C_0, \mathcal{C}) \subseteq A_0$ olacak biçimde bir $A_0 \in \mathcal{A}$'nın var olduğunu gösterelim. Bu kolaydır, çünkü sabit tutulmuş herhangi bir $x_0 \in C_0$ alınarak, önce $st(x_0, \mathcal{C}) \subseteq B_0 \in \mathcal{B}$ ve $st(x_0, \mathcal{B}) \subseteq A_0 \in \mathcal{A}$ koşullarını gerçekleyen B_0 ve A_0 kümelerini belirleyerek, $st(C_0, \mathcal{C}) = \bigcup\{C \in \mathcal{C} : C \cap C_0 \neq \emptyset\} \subseteq A_0$ bulunur. Çünkü $C \cap C_0 \neq \emptyset$ gerçekleyen herhangi bir $C \in \mathcal{C}$ üyesi için $x_c \in C \cap C_0$ elemanı ve $st(x_c, \mathcal{C}) \subseteq B_C$ olacak biçimde $B_C \in \mathcal{B}$ var olduğundan, sonuçta $x_0 \in C \cup C_0 \subseteq st(x_c, \mathcal{C}) \subseteq B_C$ ve dolayısıyla $C \subseteq B_C \subseteq st(x_0, \mathcal{B}) \subseteq A_0$ bulunur. Demek ki gerçekten $\{st(C, \mathcal{C}) : C \in \mathcal{C}\} \prec \mathcal{A}$ geçerli olmaktadır. $\square$

Aynı indis kümesini kullanan ve üstelik $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulunu gerçekleyen $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ örtülüşleri için $\mathcal{B}$ ailesine $\mathcal{A}$'nın **tam incelmesi** denir.

Yardımcı Teorem 4: *Bir $\mathcal{A}$ örtülüşünün yerel sonlu bir incelmesinin varlığı için g.y.k. yerel sonlu bir tam incelmesinin var olmasıdır.*

Kanıtlama: Yeterlik apaçıktır. Şimdi bir X uzayında bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ örtülüşünün $\mathcal{B}$ gibi yerel sonlu bir incelmesi verilsin. Daha önce de vurgulandığı gibi Λ indis kümesinin iyi sıralanmış olduğunu varsayıyoruz. O halde her $B \in \mathcal{B}$ için $\Lambda(B) = \{\alpha \in \Lambda : B \subseteq A_\alpha\} \neq \emptyset$ olur. İyi sıralanmış bir kümede boştan farklı her alt kümenin tek türlü belirli bir minimal elemanı var olduğundan her $B \in \mathcal{B}$ için $\alpha(B) = \min\Lambda(B) \in \Lambda(B)$ iyi tanımlıdır. O halde $B \subseteq A_{\alpha(B)}$ ve her $\alpha < \alpha(B)$ için $B \not\subseteq A_\alpha$ gerçeklenir. Üstelik

$$B_\alpha^* = \bigcup_{\alpha(B)=\alpha} B \subseteq A_\alpha \qquad (\forall \alpha \in \Lambda)$$

gerçekleşir. $\mathcal{B}^* = \{B_\alpha^*\}_{\alpha\in\Lambda} \prec \mathcal{A}$ ve $X = \bigcup \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}^*$ gözlemek kolaydır. $\mathcal{B}$ ailesinin yerel sonlu oluşunun zorunlu gereği olarak, herhangi bir $x \in X$ noktasına karşılık öyle bir $W_x \in \mathcal{B}_x$ ve sonlu üyeli $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{B}$ vardır ki $W_x \cap \bigcup_{B\in\mathcal{B}-\mathcal{B}_x} B = \emptyset$ olur. O halde her $x \in X$ için $\Lambda_x = \{\alpha(B) \in \Lambda : B \in \mathcal{B}_x\}$ alt indis kümesi sonlu elemanlıdır ve $W_x \cap B_\alpha^* = \emptyset$ $(\forall \alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$ nedeniyle $\mathcal{B}^*$ örtülüşünün yerel sonlu olduğu anlaşılır. O halde aranan yerel sonlu tam incelme $\mathcal{B}^*$ olur. □

Uyarı: Yukarıdaki sonuç nedeniyle, açıkça vurgulanmasa bile tüm yerel sonlu incelmeler tam yerel sonlu incelme olarak alınacaktır. Aşağıdaki benzer sonuç da, tümüyle benzer biçimde kanıtlanabileceği için ifadesini vermek yeterlidir.

Yardımcı Teorem 5:*Bir örtülüşün noktasal-sonlu bir incelmesinin varlığı için g.y.k. noktasal sonlu bir tam incelmesinin varlığıdır.*

Yardımcı Teorem 6:*Noktasal sonlu her örtülüşün indirgenemez bir alt örtülüşü vardır.*

Kanıtlama:$\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi bir X uzayında noktasal sonlu bir örtülüş olsun. Bir $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ alt ailesine, ancak ve yalnız, $X = \bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}') = \bigcup_{A\in\mathcal{A}-\mathcal{A}'} A$ koşulu gerçekleniyorsa **atılabilir bir alt aile** diyelim. Şimdi $\mathcal{A}$'nın atılabilir alt aileleri arasında, ancak ve yalnız $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}''$ geçerli ise $\mathcal{A}' < \mathcal{A}''$ yazarak bir kısmi sıralama tanımlarsak, bu kısmi sıralamaya göre bir zincir oluşturan (yani $\alpha \neq \beta$ için ya $\mathcal{A}'_\alpha < \mathcal{A}'_\beta$ ya da $\mathcal{A}'_\beta < \mathcal{A}'_\alpha$ gerçeklenecek biçimde) $\{\mathcal{A}'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ gibi bir topluluğun, supremumu vardır ve tek türlü belirlidir, çünkü $\mathcal{A}^* = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{A}'_\alpha$ ailesi $X = \bigcup(\mathcal{A}-\mathcal{A}^*)$ gerçekleştiği için atılabilirdir ve apaçık biçimde $\sup_{\alpha\in I}\mathcal{A}'_\alpha = \mathcal{A}^*$ gerçeklenir. Gerçekten herhangi bir $x \in X$ alındığında, sonlu üyeli bir $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi aracılığı ile $x \in \bigcap_{\beta\in\Lambda_x} A_\beta$ ve $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda_x} A_\alpha$ gerçeklendiğine dikkat ederek, en az bir $\beta_x \in \Lambda_x$ için $A_{\beta_x} \in \mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ ve dolayısıyla $x \in A_{\beta_x} \subseteq \bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ göstermek yeterli olacaktır, çünkü eğer $A_\beta \in \mathcal{A}^*$ $(\forall \beta \in \Lambda_x)$ geçerli olsaydı, herbir $\beta \in \Lambda_x$ için $A_\beta \in \mathcal{A}^* = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{A}'_\alpha$ nedeniyle, uygun bir $\alpha_\beta \in I$ yardımıyla $A_\beta \in \mathcal{A}'_{\alpha_\beta}$ olur ve $\{\mathcal{A}'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi bir zincir oluşturduğundan, $\Lambda_x = \{\beta(1), \beta(2), ..., \beta(n)\}$ olmak ve sözgelimi

$$\mathcal{A}'_{\alpha_{\beta(1)}} < \mathcal{A}'_{\alpha_{\beta(2)}} < ... < \mathcal{A}'_{\alpha_{\beta(n)}}$$

gerçeklenmek üzere, $A_{\beta(k)} \in \mathcal{A}'_{\alpha_{\beta(n)}}$ $(\forall 1 \leq k \leq n)$ nedeniyle $x \notin \bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}'_{\alpha_{\beta(n)}}) = X$ çelişkisi doğardı. Demek ki, ünlü Zorn Lemması'nın gereği olarak, atılabilir alt ailelerin en az bir maksimal olanı vardır ve bu alt aile $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ ise, hem $X = \bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)$ gerçekleşir, hem de $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ alt ailesinin bir tek üyesinin bile atılamaz olduğu anlaşılır, çünkü bir $A_0 \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ üyesi için $X = \bigcup((\mathcal{A} - \mathcal{A}_0) - \{A_0\}) = \bigcup(\mathcal{A} - (\mathcal{A}_0 \cup \{A_0\}))$ geçerli olsaydı $A_0 \notin \mathcal{A}_0$ nedeniyle $\mathcal{A}_0$'ın maksimalliğine aykırı düşülürdü. Bu nedenle $\mathcal{A} - \mathcal{A}_0$ $(\subseteq \mathcal{A})$ alt ailesine **indirgenemez örtülüş** denilir. □

Uyarı:Eğer $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ örtülüşü indirgenemez ise $A_\alpha - \bigcup_{\beta \neq \alpha} A_\beta \neq \emptyset$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ gerçekleştiği gözlenmelidir, çünkü $A_{\alpha_0} - \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} A_\alpha = \emptyset$ olacak biçimde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ indisi var olsaydı $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} A_\alpha = \bigcup(\mathcal{A} - \{A_{\alpha_0}\})$ olur ve $X = A_{\alpha_0} \cup \bigcup(\mathcal{A} - \{A_{\alpha_0}\}) = \bigcup(\mathcal{A} - \{A_{\alpha_0}\})$ nedeniyle, $\mathcal{A}$ ailesinin indirgenemezliğine aykırı düşülmüş olurdu. O halde her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \in A_\alpha - \bigcup_{\beta \neq \alpha} A_\beta$ elemanlarının varlığı kaçınılmazdır. x_α noktasına A_α kümesinin, $\mathcal{A}$ örtülüşündeki **seçkin noktası** denir. Herbir seçkin noktayı, $\mathcal{A}$ indirgenemez ailesinde içeren tek bir üyenin bulunduğunu ve $\mathcal{A}$ ailesinin her üyesinde en fazla bir seçkin noktanın yer aldığını gözlemeliyiz. Aslında, herhangi bir uzayda, herhangi bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ örtülüşü için de benzer nitelikte noktalar belirlenebilir, aşağıdaki sonuç bunu açığa çıkartmaktadır. Burada M kümesine $\mathcal{A}$ örtülüşünün **seçkin kümesi** denilir. $\mathcal{A}$ örtülüşünün her üyesinde en fazla bir M elemanı bulunduğuna özellikle dikkat edilmelidir.

Yardımcı Teorem 7:*Herhangi bir uzayda, herhangi bir $\mathcal{A}$ örtülüşü için*

$$i)\, X = \bigcup_{x \in M} st(x, \mathcal{A}) = st(M, \mathcal{A}), \quad ii)\, st(x, \mathcal{A}) \cap M = \{x\} \quad (\forall x \in M)$$

koşullarını gerçekleyen bir $M = M(\mathcal{A}) \subseteq X$ alt kümesi vardır.

Kanıtlama:*ii*) koşulunu gerçekleyen ve kapsama bağıntısına göre iyi sıralanmış bir zincir oluşturan bir $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesinin

$$st(x, \mathcal{A}) \cap \bigcup_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha = \{x\} \qquad (\forall x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha)$$

gerçeklediğini görmek kolaydır, çünkü bir $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ elemanı alındığında, $y \in st(x, \mathcal{A}) \cap \bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ elemanı ne olursa olsun, uygun bir $\gamma \in \Lambda$ aracılığı ile $x, y \in M_\gamma$ olur ve sonuçta $y \in st(x, \mathcal{A}) \cap M_\gamma = \{x\}$ bulunur. Bu nedenle Zorn Lemması'nı kullanarak, $ii)$ koşulunu gerçekleyen maksimal $M \subseteq X$ alt kümesi belirlenirse, bu M kümesi için zorunlu olarak $i)$ koşulunun da gerçekleşmesi gerektiği gözlenir, çünkü $X - st(M, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ olması durumunda, bir $x_0 \in X - st(M, \mathcal{A})$ elemanı seçerek ve $x_0 \notin st(M, \mathcal{A})$ nedeniyle hem $x_0 \notin st(x, \mathcal{A})$ $(\forall x \in M)$ ve hem de $st(x_0, \mathcal{A}) \cap M = \emptyset$ gözleyerek kolayca, $st(x, \mathcal{A}) \cap (M \cup \{x_0\}) = \{x\}$ $(\forall x \in M \cup \{x_0\})$ bulunacağından, $M \cup \{x_0\}$ kümesinin $ii)$ koşulunu gerçeklediği anlaşılır, bu sonuç ise M'nin maksimalliğine aykırıdır. □

Aquaro Teoremi 1: *Sayılabilir tıkız bir uzayda her noktasal sayılabilir açık örtülüşün sonlu bir alt örtülüşü vardır.*

Kanıtlama: Sayılabilir tıkız X uzayında, $\mathcal{G}$ noktasal sayılabilir örtülüşü $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}) \leq \omega_0$ $(\forall x \in X)$ koşulunu gerçeklediğinden ve $\mathcal{G}$ örtülüşünün seçkin M kümesi $\mathrm{card}(G \cap M) \leq 1$ $(\forall G \in \mathcal{G})$ gerçeklediği için, bu seçkin küme, sayılabilir tıkız X uzayında zorunlu olarak sonlu elemanlıdır. $X = \bigcup_{x\in M} st(x, \mathcal{G})$ olduğundan, $\mathcal{G}$'nin sayılabilir üyeli ve sonuçta sonlu üyeli bir alt örtülüşü kolayca tanımlanır. □

Aquaro Teoremi 2: *Sayılabilir tıkız bir X uzayında her $\mathcal{G}$ açık örtülüşüne ve herhangi $A \subseteq X$ alt kümesine karşılık, $A \subseteq \bigcup_{x\in S} st(x, \mathcal{G})$ koşulu gerçeklenecek biçimde sonlu elemanlı bir $S \subseteq A$ alt kümesi vardır.*

Kanıtlama: A'nın bu nitelikte hiç bir sonlu alt kümesi tanımlanamasaydı, kısacası herhangi bir sonlu $S \subseteq A$ alt kümesi için $A - \bigcup_{x\in S} st(x, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ olsaydı, tümevarım yardımıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} \in A - \bigcup_{1\leq k\leq n} st(a_k, \mathcal{G})$$

gerçeklenecek ve dolayısıyla terimleri ikişerli olarak farklı olacak biçimde, bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in A^{\omega_0}$ dizisi tanımlanırdı. Dikkat edilirse her $n > 1$ için $a_n \notin \bigcup_{1\leq k<n} st(a_k, \mathcal{G})$ olur. Her $G \in \mathcal{G}$ için $\mathrm{card}(G \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\}) \leq 1$ gerçeklendiği kolayca gözlenir, çünkü $n < m$ ve $a_n, a_m \in G$ olsa, olanaksız olan $a_m \in st(a_n, \mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{1\leq k<m} st(a_k, \mathcal{G})$ sonucu bulunurdu. Sayılabilir tıkız X uzayında $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{a_k : n \leq k\}}$ gerçekleşmesi gerekirken bu olanaksızdır, çünkü bir x_0 elemanı bu kapalı kesişime ait ve $x_0 \in G_0 \in \mathcal{G}$ olsa $\omega_0 = \mathrm{card}(G_0 \cap \{a_n : n \in$

$\mathbb{N}\}) \leq 1$ çelişkisi doğardı. □

Bilindiği gibi bir X topolojik uzayı için, $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ alt kümesine $X \times X$ uzayının **köşegeni** denilir. Bazı yazarlar bu kümeye X'in köşegeni demektedirler. Jack Ceder tarafından kanıtlanan aşağıdaki kullanışlı teorem, bu kümenin, $X \times X$ çarpım uzayında bir $\mathcal{G}_\delta$ türü küme olabilmesine ilişkin bir karakterizasyon belirlemektedir.

Ceder Teoremi: *$X \times X$'in köşegeninin bir $\mathcal{G}_\delta$ türü küme olabilmesi için g.y.k., X uzayında $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n)$ $(\forall x \in X)$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisinin var olmasıdır.*

Kanıtlama: $X \times X$ uzayında $\Delta_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ olacak biçimde $G_n \subseteq X \times X$ açık kümeleri tanımlı ise, $x \in X$ ne olursa olsun $G_n(x) = \{y \in X : (x,y) \in G_n\} \subseteq X$ alt kümeleri X uzayında açıktır ve $\mathcal{G}_n = \{G_n(x) : x \in X\}$ açık örtülüşlerinin istenen koşulu gerçeklediği kolayca görülür. Tersine X uzayında, sözü edilen koşulu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi tanımlı olduğunda, $G_n = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_n} (G \times G)$ alt kümeleri $X \times X$ çarpım uzayında açıktır ve $\Delta_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}_\delta$ olur. □

Öte yandan, bir topolojik uzaya, iyi bilindiği gibi, bu uzayda tanımlı her sürekli gerçel değerli fonksiyon sınırlı olmak zorunda kalıyorsa **sözdetıkız uzay** (=**pseudocompact space**) denilir. Sayılabilir tıkız uzaylar böyledir, çünkü herhangi bir $f : X \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ sürekli fonksiyonu için, sayılabilir üyeli $\mathcal{G} = \{f^{-1}((-n,n)) : n \in \mathbb{N}\}$açık örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü var ve $n < m$ ise $f^{-1}((-n,n)) \subseteq f^{-1}((-m,m))$ geçerli olduğundan, sonuçta $X = f^{-1}((-n_0,n_0))$ ve dolayısıyla $f(X) \subseteq [-n_0,n_0]$ gerçeklenecek biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, kısacası $|f(x)| \leq n_0$ $(\forall x \in X)$ gerçekleşir. Tikhonov uzaylarının sözdetıkızlığı için aşağıdaki ünlü sonuç iyi bilinmektedir, b.k.z.[1].

Bagley&Connell&McKnight Teoremi: *Bir Tikhonov uzayının sözdetıkız olması için g.y.k., bu uzaydaki yerel sonlu açık küme ailelerinin sonlu üyeli olmasıdır.*

Kanıtlama: Yeterlik koşulunu gerçekleyen bir X Tikhonov uzayında, sürekli bir $f : X \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ fonksiyonu için, $\mathcal{G} = \{f^{-1}((k - \frac{1}{2}, k+1))\}_{k \in \mathbb{Z}}$ açık örtülüşü yerel sonlu olduğu için (çünkü, $I_k = (k - \frac{1}{2}, k+1)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ açık aralıklarının ailesi $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında yerel sonlu bir örtülüştür ve f süreklidir), sonlu üyeli olmak zorundadır ve sonuçta $f(X) \subseteq [-M_0, M_0]$ gerçeklenecek biçimde bir $M_0 > 0$ vardır. Tersine X bir sözdetıkız Tikhonov uzayı ise ve bu uzayda yerel sonlu olan ve en az sayılabilir sonsuz üyeli bir açık kümeler ailesi var olsaydı, $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibi yerel sonlu, boştan farklı bir açık kümeler ailesi var olur ve sonuçta, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in U_n$, $f_n(x_n) = 1$ ve $f_n(X - U_n) = 0$ koşullarını gerçekleyen Urysohn fonksiyonları aracılığı ile, $[0 < f_n] \subseteq U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ bulunurdu. $\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğu için $f = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$ gerçel değerli fonksiyonu iyi tanımlıdır, negatif olmayan değerler alır ve sürekli olur ama $n \leq f(x_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle, $f(X) \subseteq [0, M_0]$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $M_0 > 0$ sabiti belirlenemezdi. □

Bu bölümde son olarak kapalı ve σ-kesikli örtülüşlere ilişkin kullanışlı bazı sonuçları elde edelim. Herhangi bir X uzayında, boştan farklı açık kümelerden oluşan ve örtülüş olması gerekmeyen bir $\mathcal{G}$ ailesi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(\mathcal{G}) = \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n\}$$

kümelerinin bu uzayda *daima* kapalı olduğunu gözlemek kolaydır; gerçekten $X - F_n(\mathcal{G}) = \{x \in X : n + 1 \leq \mathrm{ord}(x, \mathcal{G})\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kümelerinin açık olduğu ve $F_n(\mathcal{G}) \subseteq F_{n+1}(\mathcal{G})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiği görülmektedir. Bu tez çalışmasında, örneğin Yardımcı Teorem8 ve Yardımcı Teorem10'da olduğu gibi, pek çok kanıtlama sırasında bu kümelerden sürekli olarak yararlanacağız. Bilindiği gibi, $\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$ koşulunu gerçekleyen, yani her açık kümesi sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilen, ya da eşdeğer olarak, her kapalı kümesi sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi olarak yazılabilen bir (X, τ) uzayına **yetkin uzay(=perfect space)** denilir.
Aşağıdaki Yardımcı Teoremi J.M. Worrell ve H.H.Wicke ikilisi 1965 yılında kanıtlamıştır, b.k.z.[2].

Yardımcı Teorem 8: *Yetkin bir uzayda, kapalı bir kümenin noktasal sonlu bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün, aşağıdaki koşulları gerçekleyen, kapalı ve σ- kesikli bir $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ incelmesi vardır:*
i) $\mathrm{ord}(K, \mathcal{G}) < \omega_0 \quad (\forall K \in \mathcal{K})$
ii) $K \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{G}$ ve $K \cap G \neq \emptyset$ ise $K \subseteq G$
Kanıtlama: $X_0 \subseteq X$ alt kümesi, yetkin X uzayında boştan farklı ve kapalı olsun ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık kümeler ailesi, X_0 için noktasal sonlu bir açık örtülüş olsun. O halde $X_0 \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ ve her $x \in X_0$ için $0 < \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}) < \omega_0$ geçerlidir; örneğin bu $x \in X_0$ için, söz gelimi $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}) = n_x \in \mathbb{N}$ ise $x \in X_0 \cap F_{n_x}(\mathcal{G})$ ve sonuçta $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X_0 \cap F_n(\mathcal{G}))$ gerçekleşir. $\emptyset \neq X_0$ nedeniy-

le $\emptyset \neq X_0 \cap F_{n_0}(\mathcal{G})$ gerçeklenecek ve dolayısıyla her $n \geq n_0$ için $\emptyset \neq X_0 \cap F_n(\mathcal{G})$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle, genelliği bozmaksızın tüm $X_0 \cap F_n(\mathcal{G})$ kesişimlerini boştan farklı varsayabiliriz. Şimdi, $1 < n$ doğal sayısı verildiğinde, uzayın yetkin oluşunun bir gereği olarak, $X_0 \cap F_{n-1}(\mathcal{G}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_{n-1,m}$ yazılışı gerçeklenecek biçimde $U_{n-1,m}$ açık kümeleri var olduğundan,

$$\begin{aligned} K_{n,m}(\Lambda') &= X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m}) \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G_\alpha \qquad (\Lambda' \in \mathcal{P}_n(\Lambda)), \\ \mathcal{K}_{n,m} &= \{K_{n,m}(\Lambda') : \Lambda' \in \mathcal{P}_n(\Lambda)\} \end{aligned}$$

kümelerini ve ailesini tanımlayalım. $\mathcal{K}_{n,m}$ ailesi X uzayında kesiklidir ve tüm üyeleri bu uzayda birer kapalı kümedir. Gerçekten, herhangi bir $x \in X$ alındığında,

$$\text{ya } x \notin X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m}) \quad \text{, ya da } x \in X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m})$$

geçerlidir. Bu seçeneklerde sözü edilen kesişim kümesi kapalı olduğu için, birinci seçenek geçerli olduğunda, x elemanının $\mathcal{K}_{n,m}$ ailesindeki tüm üyelerle ayrık olan bir açık civarı vardır; eğer ikinci seçenek geçerli ise $X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m}) \subseteq F_n(\mathcal{G}) - F_{n-1}(\mathcal{G})$ nedeniyle $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) = n$ gerçeklendiğinden, tek türlü belirli bir $\Lambda_x \in \mathcal{P}_n(\Lambda)$ indis kümesi aracılığıyla $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda_x} G_\alpha = W_x$ olur ve üstelik $\Lambda' \neq \Lambda_x$ gerçekleyen her $\Lambda' \in \mathcal{P}_n(\Lambda)$ için $\Lambda' - \Lambda_x \neq \emptyset$ olduğundan

$$W_x \cap K_{n,m}(\Lambda') \subseteq F_n(\mathcal{G}) \cap W_x \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G_\alpha = \emptyset$$

gerçekleşir. $\mathcal{K}_{n,m}$ ailesinin tüm üyelerinin X_0 alt uzayında ve sonuçta X uzayında birer kapalı küme oldukları, tümüyle benzer bir yöntemle (bu üyeye ait olmayan bir X_0 elemanının bu üyeyi kesmeyen bir açık civarının varlığını kanıtlayarak) gösterilebilir. Üstelik yukarda kanıtlandığı gibi, $X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m})$ kümesinin herhangi bir elemanı yalnızca tek bir tane $\mathcal{K}_{n,m}$ üyesine aittir ve sonuçta $X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m}) \subseteq \bigcup \mathcal{K}_{n,m} \subseteq X_0$ gerçekleşir. Öte yandan $n = 1$ için, yalnızca

$$\mathcal{K}_1 = \{K_{1,\alpha} = X_0 \cap F_1(\mathcal{G}) \cap G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

kapalı-kesikli küme ailesi tanımlanır. Apaçıktır ki $X_0 \cap F_1(\mathcal{G}) = \bigcup \mathcal{K}_1$ gerçekleşir. Gerek $\mathcal{K}_{n,m}$ $(1 < n, m \in \mathbb{N})$ ve gerekse $\mathcal{K}_1$ ailelerindeki herbir üyenin, yalnızca, bu üyenin tanımında kullanılan $G_\alpha \in \mathcal{G}$ kümeleri ile kesişebildiği,dolayısıyla bu üyenin, herhangi bir $G_\alpha \in \mathcal{G}$ verildiğinde, onunla ya ayrık olduğu ya da onun tarafından kapsandığı,özellikle gözlenmelidir. Ayrıca herbir $K \in \mathcal{K}_{n,m}$ ve $1 < n$ için $\mathrm{ord}(K, \mathcal{G}) = m$ ve her bir $K \in \mathcal{K}_1$ için $\mathrm{ord}(K, \mathcal{G}) = 1$ gözlenmelidir. Herhangi sayılabilir tane kümenin birleşiminin, ikişerli ayrık yazılışının $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n - \bigcup_{1\leq k<n} A_k)$ biçiminde olduğunu ve $X_0 \cap F_n(\mathcal{G})$ kümelerinin monoton azalmayan olduklarını anımsayarak, sonuçta

$$\begin{aligned} X_0 &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(X_0 \cap F_n(\mathcal{G})) = (X_0 \cap F_1(\mathcal{G})) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}((X_0 \cap F_n(\mathcal{G})) - (X_0 \cap F_{n-1}(\mathcal{G})) \\ &= (X_0 \cap F_1(\mathcal{G})) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(X_0 \cap (F_n(\mathcal{G}) - U_{n-1,m})) \\ &= \bigcup \mathcal{K}_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{K}_{n,m}) \end{aligned}$$

bulunur. Kısacası, X_0 kapalı kümesinin, noktasal sonlu $\mathcal{G}$ açık örtülüşünü incelten, aranan niteliklere sahip, kapalı ve σ-kesikli örtülüşü $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n,m}$ olur. □

Yardımcı Teorem 9: *Derlemsel normal bir uzayda $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı kümeler ailesi kesikli ise, $K_\alpha \subseteq U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ gerçekleyen açık ve kesikli $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi vardır.*

Not: $\mathcal{U}$ ailesine $\mathcal{K}$'nın **açık ve kesikli genişlemesi** denir.

Kanıtlama: Uzay derlemsel normal olduğundan, öncelikle $K_\alpha \subseteq G_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ gerçekleyen ve üyeleri ikişerli ayrık olan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık ailesi vardır. Oysa $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesi kesikli ve dolayısı ile yerel sonlu ve uzay normal olduğundan $\bigcup\mathcal{K} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcup\mathcal{G}$ gerçeklenecek biçimde açık bir W kümesi vardır. Şimdi, her $\alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha = G_\alpha \cap W$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tanımlayalım. $K_\alpha \subseteq G_\alpha \cap \bigcup\mathcal{K} \subseteq G_\alpha \cap W = U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ gerçekleştiği ve $\mathcal{U}$ ailesinin kesikli olduğu görülmektedir; gerçekten, herhangi bir x elemanı için $x \notin \overline{W}$ ise, x'in $\mathcal{U}$ ailesinde tüm üyelerle ayrık olan bir civarı, $x \in \overline{W}$ ise, bu kez $\overline{W} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ nedeniyle, en fazla bir $\mathcal{U}$ üyesi ile kesişebilen bir civarı vardır. □

Yardımcı Teorem 10: *X derlemsel normal bir uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir küme olsun. $\mathcal{G}$ açık ailesi K için noktasal sonlu bir açık örtülüş ise, X uzayında açık ve σ-kesikli olan ve K kümesini örten bir $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{U}_n \prec \mathcal{G}$ incelmesi*

vardır.
Kanıtlama: Dikkat edilirse, her $x \in K$ için $\mathcal{G}_x = \{G \in \mathcal{G} : x \in G\}$ ailesi sonlu üyeli ve boştan farklıdır. $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ yazalım. $\mathcal{K}_1 = \{K \cap F_1(\mathcal{G}) \cap \bigcap \mathcal{G}_x : x \in K\}$ ailesinin kesikli olduğunu, üyelerinin X uzayında kapalı kümeler ve $\mathcal{K}_1 = \{K \cap F_1(\mathcal{G}) \cap G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $K \cap F_1(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup \mathcal{K}_1$ gerçeklendiğini görmek güç değildir. Her $\mathcal{K}_1$ üyesi $\mathcal{G}$ ailesinde tek bir üye ile kesişir, tüm ötekilerle ayrıktır. Bir önceki yardımcı teorem yardımıyla, $K \cap F_1(\mathcal{G}) \cap G_\alpha \subseteq U_{1,\alpha} \subseteq G_\alpha$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ ve $K \cap F_1(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_1$ gerçeklenecek biçimde $\mathcal{U}_1 = \{U_{1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık ve kesikli genişlemesi vardır. Şimdi $K \cap F_n(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{U}_k)$ olacak biçimde, X uzayında kesikli olan ve $\mathcal{G}$ ailesini incelten $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_n$ açık aileleri tanımlanmış olduğunda

$$\mathcal{K}_{n+1} = \{K \cap (F_{n+1}(\mathcal{G}) - \bigcup_{1\leq k\leq n} (\bigcup \mathcal{U}_k)) \cap \bigcap \mathcal{G}_x : x \in K\}$$

kapalı-kesikli ailesinin aslında

$$\mathcal{K}_{n+1} = \{K \cap (F_{n+1}(\mathcal{G}) - \bigcup_{1\leq k\leq n} (\bigcup \mathcal{U}_k)) \cap \bigcap_{\alpha\in\Lambda'} G_\alpha : \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)\}$$

olduğunu, bu ailenin varolan açık ve kesikli genişlemesi $\mathcal{U}_{n+1}$ olmak üzere, $K \cap F_{n+1}(\mathcal{G}) \subseteq ((K \cap F_{n+1}(\mathcal{G})) - \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{U}_k)) \cup \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{U}_k) \subseteq \bigcup \mathcal{K}_{n+1} \cup \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{U}_k) \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n+1}(\bigcup \mathcal{U}_k)$ gerçeklendiğini ve $K = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K \cap F_n(\mathcal{G})) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{U}_n)$ ve ayrıca $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \prec \mathcal{G}$ olduğunu gözlemek kolaydır. □

Bu son yardımcı teoremin kanıtlamasında kullanılan yöntemin benzeri ile, ileride Bölüm2'de ünlü Micheal&Nagami Teoremi kanıtlanacaktır.

Bu bölümü, Kümeler Kuramı'ndan alınan ve Bölüm 3 ile Bölüm5'de kullanacağımız ve belirli nitelikteki dizilerin varlıklarını kanıtlayan aşağıdaki iki yararlı sonuçla kapatıyoruz. Özellikle, 1970 yılında kanıtlanan Burke Yardımcı Teoremi (b.k.z.[3]), ordinal sayılara ilişkin temel bilgileri bilmenin Genel Topoloji'de ne denli yaşamsal önemi olduğu gerçeğini açığa çıkaracaktır.

Yardımcı Teorem 11:*Sonlu üyeli, boştan farklı $\mathcal{A}_n$ aileleri $\mathcal{A}_{n+1} \prec \mathcal{A}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kısmi incelme koşulunu gerçeklerse, $A_{n+1} \subseteq A_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklenecek biçimde $A_n \in \mathcal{A}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ üyeleri vardır.*
Kanıtlama: Dikkat edilirse, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ve herhangi bir $A_n \in \mathcal{A}_n$ alındığında, kısmi incelme koşulları nedeniyle, $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq ... \subseteq A_2 \subseteq A_1$

koşulu gerçeklenecek biçimde, *monoton azalmayan* sonlu diziler tanımlamak güç değildir; üyelerinin ikişerli farklı olup olmadığına bakılmaksızın, böyle bir diziye, n üyeli sonlu dizi diyelim. Şimdi burada amaçlanan, *monoton artmayan* ve $A_n \in \mathcal{A}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçeklenecek biçimde en az bir sonsuz $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tanımlanabildiğini göstermektir. Oysa, her $n \in \mathbb{N}$ için, n kümeden oluşan monoton azalmayan tüm sonlu dizilerden en az birisi için, ilk n adet üyesi bu dizinin kümeleri olan $n+1$ üyeli bir sonlu dizinin var olduğunu gözlemek güç değildir. Bu nedenle, aranılan dizi tümevarım yoluyla kolayca belirlenir. □

Burke Yardımcı Teoremi:*Her $\alpha < \omega_2$ için $\Lambda_\alpha \subseteq [0, \omega_2)$ alt kümeleri sayılabilir elemanlı ise, $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \omega_2$ ve $\alpha_n \notin \Lambda_{\alpha_m}$ $(n \neq m)$ koşulları gerçeklenecek biçimde, artan bir $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır.*

Kanıtlama:Öncelikle, $A_\alpha = \{\beta \in [\alpha, \omega_2) : \alpha \notin \Lambda_\beta\}$ ($\forall \alpha < \omega_2$) alt kümelerini tanımlayarak, her $\alpha < \omega_2$ için card$A_\alpha \leq \omega_1$ gerçekleşmesinin kesinlikle olanaksız olduğunu kanıtlayalım. Olmayana ergi yöntemini kullanalım, dolayısıyla, şimdi card$A_\alpha \leq \omega_1$ ($\forall \alpha < \omega_2$) gerçekleştiğini varsayıyoruz. Kolayca, herhangi bir sabit $\alpha_0 \geq \omega_1$ alındığında card$(\bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha) \leq \alpha_0 < \omega_2 =$ card$[\alpha_0, \omega_2)$ gözleyebiliriz, çünkü, card$A_\alpha \leq \omega_1$ ($\forall \alpha \in [0, \alpha_0)$) varsayımı nedeniyle var olan $\varphi_\alpha : A_\alpha \to [0, \omega_1)$ bire-bir fonksiyonları aracılığı ile, herbir $x \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha$ için $\alpha_x = \min\{\alpha \in [0, \alpha_0) : x \in A_\alpha\} < \alpha_0$ ve $\varphi(x) = (\alpha_x, \varphi_{\alpha_x}(x)) \in [0, \alpha_0) \times [0, \omega_1)$ olmak üzere, $\varphi : \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha \to [0, \alpha_0) \times [0, \omega_1)$ fonksiyonunun, apaçık biçimde bire bir olduğuna dikkat ederek, card$(\bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha)$ $\leq$ card$([0, \alpha_0) \times [0, \omega_1)) = \alpha_0.\omega_1 = \alpha_0 < \omega_2$ bulunur. Sonuçta $[\alpha_0, \omega_2) - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha \neq \emptyset$ bulunur ve üstelik bu fark kümesinin kardinalitesi ω_2 olur. O halde bir $\beta_0 \in [\alpha_0, \omega_2) - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha$ seçerek, herbir $\alpha \in [0, \alpha_0)$ için $\alpha < \alpha_0 \leq \beta_0 < \omega_2$ yani $\beta_0 \in [\alpha, \omega_2)$ ve fakat $\beta_0 \notin A_\alpha$ nedeniyle $\alpha \in \Lambda_{\beta_0}$ ve sonuçta $[0, \alpha_0) \subseteq \Lambda_{\beta_0}$ gözlenmelidir. Tüm bunlardan $\omega_1 \leq \alpha_0 =$ card$[0, \alpha_0) \leq$ card$\Lambda_{\beta_0} \leq \omega_0$ çelişkisi doğardı. Demek ki $\{\alpha \in [0, \omega_2) : \omega_1 <$ card$A_\alpha\}$ kümesinin boş olmadığı anlaşılır. Bu, iyi sıralanmış $[0, \omega_2)$ ordinal sayılar aralığının bir alt kümesi olduğundan $\alpha_1 = \min\{\alpha \in [0, \omega_2) : \omega_1 <$ card$A_\alpha\}$ minimal elemanı iyi tanımlıdır ve $\omega_1 <$ cardA_{α_1} olur. Bundan sonra amacımız

i) $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \ldots < \omega_2$
ii) $\alpha_n \notin \Lambda_{\alpha_m}$, $(n \neq m, n, m \in \mathbb{N})$
iii) $\omega_1 <$ card$(\bigcap_{1\leq k\leq n} A_{\alpha_k})$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

koşulları gerçeklenecek biçimde α_n ordinal sayılarını tümevarımla tanımlamaktır. α_1 yukarıda tanımlanmıştır. $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ ordinal sayıları *ii*) ve *iii*) koşulları gerçeklenecek biçimde belirlenmiş olduğunda, $\gamma_0 = \sup(\bigcup_{1\le k\le n}\Lambda_{\alpha_k})+1 < \omega_2$ ordinal sayısını tanımlarsak, $\omega_2 = \aleph_2$ kardinal sayısının niteliği gereğince, her $\alpha \in [0,\omega_2)$ için $\mathrm{card}[0,\alpha) \le \omega_1$ olduğundan

$$E_n = \bigcap_{1\le k\le n} A_{\alpha_k} - [0,\gamma_0) = \bigcap_{1\le k\le n} A_{\alpha_k} \cap [\gamma_0,\omega_2)$$

kümesi için $\omega_1 < \mathrm{card}E_n = \mathrm{card}(\bigcap_{1\le k\le n} A_{\alpha_k})$ bulunur. Şimdi de, en az bir $\alpha \in E_n$ için $\omega_1 < \mathrm{card}(E_n \cap A_\alpha)$ gerçekleştiğini gösterelim. Tıpkı yukarda yapıldığı gibi, eğer $\mathrm{card}(E_n \cap A_\alpha) \le \omega_1$ $(\forall\alpha \in E_n)$ varsayımı geçerli olsaydı, $\mathrm{card}[\gamma_0,\alpha'_0) = \omega_1 = \mathrm{card}(E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0))$ gerçeklenecek biçimde bir $\alpha'_0 \in [\gamma_0,\omega_2)$ belirleyerek ve

$$\omega_1 < \mathrm{card}(E_n - \bigcup\{E_n \cap A_\alpha : \alpha \in E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0)\})$$

gözleyerek, bu son fark kümesinin, apaçıktır ki $E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0)$ kümesi tarafından kapsanamayacağı için, $\alpha'_0 < \beta'_0$ gerçekleyen bir $\beta'_0 \in E_n$ elemanı vardır ve herhangi bir $\alpha \in E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0)$ için $\alpha < \alpha'_0 < \beta'_0 < \omega_2$ yani $\beta'_0 \in [\alpha'_0,\omega_2)$ ve fakat $\beta'_0 \notin E_n \cap A_\alpha$ yani $\beta'_0 \notin A_\alpha$ nedeniyle $\alpha \in \Lambda_{\beta'_0}$ ve sonuçta $E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0) \subseteq \Lambda_{\beta'_0}$ bulunur, tüm bunlardan ise $\omega_1 = \mathrm{card}(E_n \cap [\gamma_0,\alpha'_0)) \le \mathrm{card}\Lambda_{\beta'_0} \le \omega_0$ çelişkisi doğardı. O halde $\{\alpha \in E_n : \omega_1 < \mathrm{card}(E_n \cap A_\alpha)\}$ kümesi boştan farklıdır ve $\alpha_{n+1} = \min\{\alpha \in E_n : \omega_1 < \mathrm{card}(E_n \cap A_\alpha)\}$ tanımlarsak, $\alpha_{n+1} \in E_n \subseteq [\gamma_0,\omega_2)$ nedeniyle $\alpha_{n+1} \ge \gamma_0 > \sup(\bigcup_{1\le k\le n}\Lambda_{\alpha_k})$ nedeniyle $\alpha_{n+1} \notin \bigcup_{1\le k\le n}\Lambda_{\alpha_k}$ olur, ayrıca $\alpha_{n+1} \in E_n \subseteq \bigcap_{1\le k\le n} A_{\alpha_k}$ nedeniyle, herbir $1 \le k \le n$ için $\alpha_k \notin \Lambda_{\alpha_{n+1}}$ bulunur, kısacası *i*) ve *ii*) koşulları ve $\omega_1 < \mathrm{card}(E_n \cap A_{\alpha_{n+1}}) \le \mathrm{card}(\bigcap_{1\le k\le n+1} A_{\alpha_k})$ nedeniyle *iii*) geçerli olmaktadır. Tümevarım süreci ve sonuçta kanıtlama bitirilmiştir, apaçıktır ki genelliği bozmaksızın $1 < \alpha_1$ alınabilir. $\square$

Bölüm 2

YANTIKIZ VE ÖTETIKIZ UZAYLAR

Bu bölümde yantıkız ve ötetıkız uzaylar üzerine bilinen en temel gerçekler biraraya getirilecektir. Bilindiği gibi bir topolojik uzaya, ancak ve yalnız, her açık örtülüşünün yerel sonlu bir açık incelmesi tanımlanabilirse **yantıkız** (ya da **parakompakt**)**uzay** ve her açık örtülüşünün noktasal sonlu bir açık incelmesi tanımlanabilirse **ötetıkız**(ya da **metakompakt**) **uzay** denilir.Her tıkız uzayın yantıkız ve her yantıkız uzayın ötetıkız olduğu apaçıktır. Ancak ve yalnız yantıkız ve açınır olan T_3 uzaylarının metriklenebilir olduğunu söyleyen ünlü **Bing Metriklenebilme Teoremi** yantıkız uzayların olağanüstü önemini açığa çıkartmıştır. Yantıkız uzaylar sınıfı aslında çok kalabalıktır, aşağıda verilen ve ilk kez 1948 yılında İngiliz matematikçi Arthur Stone tarafından kanıtlanan çok ünlü teorem (b.k.z.[4]), tüm sözdemetriklenebilir ve dolayısı ile tüm metriklenebilir uzayların yantıkız olduğunu söylemektedir. O halde tüm Eukleides uzaylarının boştan farklı tüm açık alt uzayları, (bu uzayların bağlantılılığı nedeniyle kapalı olamadıklarından), tıkız olmayan yantıkız Hausdorff uzayı örneği oluştururlar. A.Stone'nun bu ünlü teoreminin, belli başlı kanıtlamaları arasında en kısa olanlarından birisi aşağıda verilen ve Japon K.Nagami'ye ait olan kanıtlamadır:

Stone Teoremi: Her sözdemetrik uzay yantıkızdır.
Kanıtlama: Bir (X,d) sözdemetrik uzayında indis kümesi iyi sıralanmış bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. Bilindiği gibi $A \subseteq X$ alt kümesi ve $0 < \epsilon$ ne olursa olsun, $S_d(A,\epsilon) = \{x \in X : d(x,A) < \epsilon\}$ kümeleri bu uzayda açıktır, çünkü $x_0 \in S_d(A,\epsilon)$ ise $d(x_0,A) + \epsilon_0 < \epsilon - \epsilon_0$ olacak biçimde $0 < \epsilon_0$ vardır ve $S_d(x_0,\epsilon_0) \subseteq S_d(A,\epsilon)$ geçerlidir, ayrıca $\overline{A} \subseteq S_d(A,\epsilon)$ gerçeklenir ve dolayısıyla, tümleyeni $S_d(X-A,\epsilon)$ açık kümesi olan $K_A(\epsilon) = A - S_d(X-A,\epsilon)$ kümesinin kapalı olduğunu ve üstelik A açık ve $x \in A$ ise $x \notin \overline{X-A}$ nedeniyle $0 < \epsilon_x < d(x,X-A)$ gerçekleyen pozitif ϵ_x sayısı yardımıyla $x \in K_A(\epsilon_x)$ gerçeklendiğine dikkat edilmelidir. Şimdi, önce kısalık amacıyla $\epsilon_n = \frac{1}{n}(\forall n \in \mathbb{N})$ yazarak

$$K_{n,\alpha} = G_\alpha - \left(S_d(X - G_\alpha, \epsilon_n) \cup \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta \right) \qquad (\forall (n,\alpha) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\Lambda)$$

kapalı kümelerini tanımlayalım. Burada öncelikle, $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$ nedeniyle her $(n,\alpha) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\Lambda$ için $K_{n,\alpha} \subseteq K_{n+1,\alpha}$ gerçeklendiği gözlenmelidir. Dolayısıyla $\emptyset \neq K_{n_0,\alpha}$ ise $\emptyset \neq K_{n,\alpha}$ $(\forall n \geq n_0)$ olur. Dikkat edilirse $K_{n,\alpha}$ kümesi aslında $K_{G_\alpha}(\epsilon_n) = G_\alpha - S_d(X - G_\alpha, \epsilon_n)$ ve $X - \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ kapalı kümelerinin kesişimidir ve üstelik

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha\in\Lambda} K_{n,\alpha} = \bigcup_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\mathrm{X}\Lambda} K_{n,\alpha}$$

geçerlidir, çünkü, herhangi bir $x \in X$ için, iyi sıralanmış Λ indis kümesinin boştan farklı $\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : x \in G_\alpha\}$ alt kümesi için, $\alpha_x = \min\Lambda_x$ olmak üzere, $x \in G_{\alpha_x} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_\alpha$ olur ve yukarıda gözlendiği gibi $0 < \epsilon_{n_x} < d(x, X - G_{\alpha_x})$ nedeniyle $x \in K_{G_{\alpha_x}}(\epsilon_{n_x}) - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_\alpha = K_{\alpha_x,n_x}$ bulunur. O halde yukarıdaki bu eşitlikler nedeniyle $K_{n,\alpha}$ kümelerini boştan farklı varsayabiliriz ya da aynı şey demek olan,boştan farklı olanları ile çalışırız. Üstelik dikkat edilirse

$$K_{n,\alpha} \cap S_d(X - G_\alpha, \epsilon_n) = \emptyset \qquad \text{ve} \qquad \epsilon_n \leq d(K_{n,\alpha}, X - G_\alpha)$$

geçerlidir. Ayrıca $\alpha \neq \beta$ ve sözgelimi $\beta < \alpha$ geçerli ise $K_{n,\alpha} \subseteq X - \bigcup_{\gamma<\alpha} G_\gamma \subseteq X - G_\beta$ nedeniyle

$$\epsilon_n \leq d(K_{n,\beta}, X - G_\beta) \leq d(K_{n,\beta}, K_{n,\alpha}) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \neq \beta)$$

bulunur. O halde herbir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \{S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n})\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi kesiklidir, çünkü herbir $x \in X$ için $S_d(x, \epsilon_{6n})$ açık yuvarı bu ailede en fazla bir tek üye ile kesişebilir, çünkü $\alpha \neq \beta$ iken $y \in S_d(x, \epsilon_{6n}) \cap S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n})$ ve $z \in S_d(x, \epsilon_{6n}) \cap S_d(K_{n,\beta}, \epsilon_{3n})$ elemanları var olsaydı $\epsilon_n \leq d(K_{n,\alpha}, K_{n,\beta}) \leq d(K_{n,\alpha}, y) + d(y, x) + d(x, z) + d(z, K_{n,\beta}) < \epsilon_n$ çelişkisi bulunurdu. Ayrıca $K_{n,\alpha} \cap S_d(X - G_\alpha, \epsilon_n) = \emptyset$ nedeniyle $S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_n)$ ile $X - G_\alpha$ ayrıktır, çünkü iyi bilindiği gibi $A \cap S_d(B, \epsilon) = \emptyset$ ile $S_d(A, \epsilon) \cap B = \emptyset$ iddaları eşdeğerdedir.

O halde $0 < \epsilon_{3n} < \epsilon_n$ nedeniyle her $(n, \alpha) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\Lambda$ için $S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n}) \subseteq G_\alpha$ bulunur. Sözde metrik uzaylarda, boştan farklı her açık küme bir tümleyen sıfır kümesi olduğundan (çünkü G açık küme ise, $f_G(x) = d(x, X - G)$ $(\forall x \in X)$ biçiminde tanımlanan düzgün sürekli gerçel değerli fonksiyon aracılığıyla $G = [0 < f_G]$ gerçeklenir), sonuçta $U_n = \bigcup \mathcal{U}_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tümleyen sıfır kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ örtülüşünün, Bölüm1, Morita Teoremi nedeniyle $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gibi yerel sonlu bir tam incelmesi var ve $\mathcal{U}_n$ aileleri kesikli olduğundan ve $W_n = W_n \cap \bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiğinden, sonuçta

$$\mathcal{W} = \{W_n \cap S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n}) : (n, \alpha) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\Lambda\}$$

açık örtülüşünün $\mathcal{G}$'nin aranan yerel sonlu açık incelmesi olduğu anlaşılır. □

Uyarı: Nagami'nin yukarda verilen kanıtlamasında, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n = \{W_n \cap S_d(K_{n,\alpha}, \epsilon_{3n})\}_{\alpha \in \Lambda}$ yazılırsa, $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ yerel sonlu incelmesinin $\sigma-$ kesikli olduğu özellikle gözlenmelidir. Demek ki A.Stone'un aşağıda verilen teoremi de kanıtlanmış olmaktadır.

Teorem 2: Bir sözdemetrik uzayda her açık örtülüşün $\sigma-$ kesikli olan yerel sonlu ve açık bir incelmesi vardır.

Aşağıdaki teorem ise yantıkız Hausdorff uzaylarının çok güçlü ayırma özelliğine sahip olduğunu açığa çıkartmaktadır. Bilindiği gibi bir uzaya, kapalı kümelerden oluşan her kesikli ailesinin üyelerini ayıran ikişerli ayrık bir açık kümeler ailesi tanımlanabiliyorsa **derlemsel normal** denir.

Bing Teoremi [5]:Her yantıkız Hausdorff uzayı derlemsel normaldir.
Kanıtlama: Bu nitelikteki bir X uzayının öncelikle normal olduğunu gösterelim. Önce, şimdi verilecek olan kanıtlamanın tümüyle benzeri ile uzayın düzenli olduğu kanıtlanır. Şimdi de X uzayında K_1 ve K_2 ayrık kapalı kümeleri verilsin. Her $x \in K_1$ için $x \in W_x$ ve $K_2 \subseteq U_x(K_2)$ ve $W_x \cap U_x(K_2) = \emptyset$ koşullarını gerçekleyen W_x ve $U_x(K_2)$ açık kümeleri var ve üstelik her $x \in K_1$ için $K_2 \cap \overline{W_x} \subseteq U_x(K_2) \cap \overline{W_x} \subseteq \overline{U_x(K_2) \cap W_x} = \emptyset$ gerçeklendiğine dikkat ederek, $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x \in K_1} \cup \{X - K_1\}$ açık örtülüşünün yerel sonlu ve açık incelmesi $\mathcal{G}$ ise, her $G \in \mathcal{G}$ için ya $G \subseteq W_{x(G)}$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $x(G) \in K_1$ var ve $\overline{G} \cap K_2 = \emptyset$ olur ya da $G \subseteq X - K_1$ ve

dolayısıyla $G \cap K_1 = \emptyset$ olacağından, sonuçta eğer $G \cap K_1 \neq \emptyset$ ise $\overline{G} \cap K_2 = \emptyset$ bulunacağından $K_1 \subseteq st(K_1, \mathcal{G})$ ve $\overline{st(K_1, \mathcal{G})} \cap K_2 = \emptyset$ nedeniyle $st(K_1, \mathcal{G})$ ve $X - \overline{st(K_1, \mathcal{G})}$ ayrık açık kümeleri K_1 ve K_2 ayrık kapalı kümelerini kapsarlar. Şimdi, X uzayında bir $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kesikli ve kapalı ailesi alındığında, normal X uzayında, Bölüm1'deki **Normal Uzayların Örtülüş Teoremi** içinde verilen Micheal Teoremi'nin gereği olarak, $U_\alpha = X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ olmak üzere $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün,var olan açık ve barisantrik $\mathcal{G}$ incelmesi için, $x \in X$ ne olursa olsun, uygun bir $\alpha_x \in \Lambda$ sayesinde $st(x, \mathcal{G}) \subseteq U_{\alpha_x}$ olduğundan, yani $st(x, \mathcal{G})$ yıldız kümesi, birisi dışında tüm $K_\alpha \in \mathcal{K}$ kümeleri ile ayrık olduğundan, $st(K_\alpha, \mathcal{G}) \cap st(K_\beta, \mathcal{G}) = \emptyset$ $(\alpha \neq \beta)$ gerçeklendiğini gözlemek güç değildir, çünkü, sözgelimi $\alpha \neq \beta$ iken $x \in st(K_\alpha, \mathcal{G}) \cap st(K_\beta, \mathcal{G})$ gerçekleşseydi, hem $K_\alpha \cap st(x, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ ve hem de $K_\beta \cap st(x, \mathcal{G}) \neq \emptyset$ bulunurdu, bu yukarda gözlendiği gibi olanaksızdır. $\mathcal{G}$ bir örtülüş olduğundan $K_\alpha \subseteq st(K_\alpha, \mathcal{G})$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ apaçıktır, kanıtlama bitirilmiş olur. □

Teorem 4: *Yantıkız olmayan ötetıkız Hausdorff uzayları vardır.*
Kanıtlama:$X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde, her $x \neq 0$ gerçel sayısının yerel taban ailesinin $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayındaki gibi olduğu ve $x = 0$ için yerel taban ailesinin

$$\mathcal{B}_0 = \{B_0(\epsilon_n) = (-\epsilon_n, \epsilon_n) - A : \epsilon_n \downarrow 0^+\}$$

biçiminde olduğu **Delikli Aleksandroff Uzayı**, iyi bilindiği gibi düzenli olmayan bir Hausdorff uzayıdır, çünkü $\overline{B_0(\epsilon_n)} \not\subseteq B_0(\epsilon_1)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklenir. Burada $A = \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ yazılmıştır ve kolayca gözleneceği gibi bu küme bu uzayda kapalı ve seyrektir. Bu uzay düzenli olmadığı için, Bing Teoremi nedeniyle yantıkız olamaz, çünkü iyi bilindiği gibi normal Hausdorff uzayları düzenli(regüler)dir. Oysa bu uzayda, taban üyelerini kullanarak tanımlanan her $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün noktasal sonlu bir açık incelmesi vardır. Gerçekten $X - A$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayından edinilen alt uzay topolojisi ile çakıştığından, $\{U_\alpha - A\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık kümeler ailesinin $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında ve sonuçta bu uzayda yerel sonlu olan ve $X - A$ kümesini örten ve $X - A = \bigcup \mathcal{W}$ gerçekleyen $\mathcal{W}$ gibi bir açık incelmesi vardır. O halde $\mathcal{W}$ bu uzayda açık ve yerel sonlu bir ailedir. Şimdi her $a \in A$ için $a \in U_{\alpha(a)}$ olacak biçimde tek bir $\alpha(a) \in \Lambda$ indisi belirleyerek

$$U_a^* = \begin{cases} (0, 2a) \cap U_{\alpha(a)} & ; a > 0 \\ (2a, 0) \cap U_{\alpha(a)} & ; a < 0 \end{cases} \qquad (\forall a \in A)$$

olmak üzere $\mathcal{W} \cup \{U_a^*\}_{a \in A}$ ailesinin $\mathcal{U}$ örtülüşünün aranan noktasal sonlu açık incelmesi olduğu görülür. Demek ki Delikli Aleksandroff Uzayı yantıkız olmayan ötetıkız bir Hausdorff uzayıdır. Bu uzayın benzerleri $(\mathbb{R}^n, d_n)$ n-boyutlu Eukleides uzayında, $A = \{(0,0,...,0,\frac{1}{k}) : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ kümesini kapalı ve seyrek yapan topolojileri tanımlayarak kolayca verilebilir. □

Şimdi de, tümü usta matematikçi Ernest Micheal tarafından kanıtlanmış olan aşağıdaki önemli karakterizasyonları görelim, b.k.z.[6],[7].

Micheal Teoremi 1:*Düzenli bir uzayın yantıkız olabilmesi için g.y.k. her açık örtülüşünün $\sigma-$yerel sonlu bir açık incelmesinin var olmasıdır.*
Kanıtlama: Gereklik apaçıktır. Şimdi yeterlik hipotezini gerçekleyen düzenli bir X uzayının bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü verilsin. O halde $\mathcal{W} \prec \overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{G}$ koşulunu gerçekleyen bir $\mathcal{W}$ açık örtülüşü ve onun σ-yerel sonlu olan açık $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \prec \mathcal{W}$ incelmesi vardır, kısacası her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ ailesi yerel sonludur ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{U}_n)$ gerçekleşir. Şimdi de

$$\mathcal{K}_n = \{\overline{U} - \bigcup_{1 \leq k < n} \left(\bigcup \mathcal{U}_k\right) : U \in \mathcal{U}_n\} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

kapalı küme aileleri aracılığıyla $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ ailesini tanımlayalım. Apaçıktır ki $\bigcup \mathcal{K}_n \subseteq X - \bigcup_{1 \leq k < n} (\bigcup \mathcal{U}_k)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve ayrıca $\mathcal{K} \prec \overline{\mathcal{U}} \prec \overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{G}$ gerçekleşir. Üstelik $\mathcal{K}$ yerel sonlu kapalı bir örtülüştür. Gerçekten her $x \in X$ için $x \in \bigcup \mathcal{U}_{n_x} - \bigcup_{k < n_x} (\bigcup \mathcal{U}_k)$ ve sonuçta $x \in \bigcup \mathcal{K}_{n_x}$ olacak biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır ve ayrıca her $n < n_x$ için öyle bir $G_{x,n} \in \mathcal{B}_x$ ve sonlu bir $\mathcal{U}_{n,x} \subseteq \mathcal{U}_n$ alt ailesi vardır ki $G_{x,n} \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n,x}} \overline{U} = \emptyset$ olur. Sonuçta $x \in B_x \subseteq (\bigcap_{n < n_x} G_{x,n}) \cap (\bigcup \mathcal{U}_{n_x})$ gerçekleyen $B_x \in \mathcal{B}_x$ kümesinin

$$B_x \cap \bigcup_{n_x < n} \left(\bigcup \mathcal{K}_n\right) \subseteq \bigcup_{n_x < n} \left[\bigcup \mathcal{U}_{n_x} - \bigcup_{1 \leq k < n} \left(\bigcup \mathcal{U}_k\right)\right] = \emptyset$$

gerçeklediği ve tüm $\mathcal{K}$ ailesinde en fazla sonlu sayıda üye ile kesişebildiği görülmektedir. O halde X uzayı, Bölüm 1, Yardımcı Teorem 2 nedeniyle yantıkız olur. □

Sonuç:Düzenli Lindelöf uzayları yantıkızdır.

Kanıtlama: Sayılabilir üyeli her açık örtülüş σ- yerel sonludur. $\square$

Uyarı: Bir X uzayında tanımlı, sürekli gerçel değerli $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ fonksiyonlar ailesi, eğer $G_\alpha = [0 < |f_\alpha|] = \{x \in X : f_\alpha(x) \neq 0\}$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ açık kümelerinin ailesi $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ yerel sonlu ise, kolayca görüleceği gibi, $f(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x)$ $(\forall x \in X)$ biçiminde sürekli bir gerçel değerli fonksiyon belirler, çünkü herbir $x \in X$ için, öyle uygun bir $B_x \in \mathcal{B}_x$ ve sonlu $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ vardır ki $B_x \cap G_\alpha = \emptyset$ $(\forall\alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$ yani $f_\alpha(B_x) = 0(\forall\alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$ olur ve sonuçta

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\Lambda_x} f_\alpha(y) \qquad (\forall y \in B_x)$$

gerçekleşir, kısacası f fonksiyonunun, her noktanın uygun bir açık civarında, bu noktaya bağlı olarak belirlenen sonlu tane $\alpha_k \in \Lambda$ $(k = 1, ..., n)$ indisi yardımıyla

$$f = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} + ... + f_{\alpha_n}$$

gerçeklediği ve sonuçta her noktada sürekli olduğu anlaşılır. Eğer, bir $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ gerçel değerli sürekli fonksiyonlar ailesi

$$i) \quad 0 \leq f_\alpha \quad (\forall\alpha \in \Lambda) \quad , \quad ii) \quad \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) = 1 \quad (\forall x \in X)$$

koşullarını gerçeklerse bu aileye **birimin bir parçalanışı** denir. Dikkat edilirse, her $\alpha \in \Lambda$ için $0 \leq f_\alpha \leq \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha = 1$ gerçeklenir. Eğer, herbir $x \in X$ için $f_\alpha(x) = 0(\forall\alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$ koşulu gerçeklenecek biçimde sonlu elemanlı bir $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt kümesi varsa $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ fonksiyon ailesine **noktasal sonlu** denir. Eğer, $\{[0 < f_\alpha]\}_{\alpha\in\Lambda}$ yerel sonlu ve açık bir örtülüş ise, bu durumda bu aileye **yerel sonlu** fonksiyon ailesi denir. X uzayında, bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşüne karşılık

$$[0 < f_\alpha] = f_\alpha^{-1}((0,1]) \subseteq G_\alpha \qquad (\forall\alpha \in \Lambda)$$

koşulu gerçeklenecek biçimde birimin bir parçalanış ailesi $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tanımlanabiliyorsa, bu aileye $\mathcal{G}$ örtülüşünün **ikincil'i** ya da **ast'ı** denilir.

Micheal Teoremi 2: *Bir T_2 uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir:*

i) X yantıkızdır.

ii) X uzayının her açık örtülüşünün ikincili olan yerel sonlu bir birimin parçalanışı vardır.

iii) X uzayının her açık örtülüşünün ikincili olan noktasal sonlu bir birimin parçalanışı vardır.

Kanıtlama: X uzayı için iii) geçerli ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda açık bir örtülüş ve $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ birimin parçalanış ailesi de $\mathcal{G}$'nin noktasal sonlu ikincili olsun. O halde, her $x \in X$ için $\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : 0 < f_\alpha(x)\} \subseteq \Lambda$ sonlu indislidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ ve $W_{n,\alpha} = [\epsilon_n < f_\alpha]$ ve $\mathcal{W}_n = \{W_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ olsun. Kolayca $W_{n,\alpha} = [\epsilon_n < f_\alpha] \subseteq [0 < f_\alpha] \subseteq G_\alpha (\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\text{x}\Lambda)$ nedeniyle $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n \prec \mathcal{G}$ bulunur. Üstelik herbir $\mathcal{W}_n$ ailesi X uzayında yerel sonludur çünkü $x_0 \in X$ verildiğinde, sabit tutulmuş n doğal sayısı ile çalışarak, noktasal sonluluk koşulu gereği, uygun bir sonlu $\Lambda_{x_0} \subseteq \Lambda$ aracılığıyla $\sum_{\alpha\in\Lambda_{x_0}} f_\alpha(x_0) = 1$ ve $f_\alpha(x_0) = 0 (\forall\alpha \in \Lambda - \Lambda_{x_0})$ gerçeklendiğinden, süreklilikleri kullanarak

$$1 - \epsilon_{2n} < \sum_{\alpha\in\Lambda_{x_0}} f_\alpha(x) \leq 1 \qquad (\forall x \in G_{x_0,n} \in \mathcal{B}_{x_0})$$

bulunur, burada her $x \in G_{x_0,n}$ ve her $\alpha \in \Lambda_{x_0}$ için $0 < f_\alpha(x)$ ve dolayısı ile $\Lambda_{x_0} \subseteq \Lambda_x$ alınabileceğine dikkat edilmelidir. Üstelik $G_{x_0,n} \cap W_{n,\alpha} = \emptyset (\forall\alpha \in \Lambda - \Lambda_{x_0})$ gerçeklendiğini görebiliriz, gerçekten, dikkat edilirse, eğer bir $\beta \in \Lambda - \Lambda_{x_0}$ için $x \in G_{x_0,n} \cap W_{n,\beta} \neq \emptyset$ geçerli olsaydı, sonuçta $x \in [\epsilon_n < f_\beta]$ yani $\epsilon_n < f_\beta(x)$ ve $\Lambda_{x_0} \cup \{\beta\} \subseteq \Lambda_x$ ve $\epsilon_n - \epsilon_{2n} = \epsilon_{2n}$ nedeniyle

$$1 = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda_x} f_\alpha(x) \geq f_\beta(x) + \sum_{\alpha\in\Lambda_{x_0}} f_\alpha(x) > 1 + \epsilon_{2n}$$

çelişkisi elde edilirdi. Demek ki herbir $\mathcal{W}_n$ ailesi yerel sonlu ve sonuçta $\mathcal{W}$ ailesi σ-yerel sonludur. O halde düzenli olduğu için X uzayı yantıkız olur. Gerçekten, iii) koşulunu gerçekleyen X uzayının bir Tikhonof uzayı olduğunu göstermek kolaydır. $x_0 \in X$ ve $B_{x_0} \in \mathcal{B}_{x_0}$ verilsin. $\mathcal{G}_0 = \{X - \{x_0\}, B_{x_0}\}$ açık örtülüşünün ikincili olan birimin parçalanışı $\{f, g\}$ olsun, kısacası $[0 < f] \subseteq X - \{x_0\}$ ve $[0 < g] \subseteq B_{x_0}$ ve $f + g = 1$ gerçekleşsin, kolayca $f(x_0) = 0$ ve $g(x_0) = 1$ ve $g(X - B_{x_0}) = \{0\}$ gerçekleşir. iii)$\Rightarrow$ i) gösterilmiş olur.

Son olarak X uzayı i) koşulunu gerçeklesin. $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü verildiğinde, genelliği bozmaksızın $\mathcal{G}$ örtülüşünü yerel sonlu alarak, Bölüm 1, Lefschetz Teoremi nedeniyle $\overline{U_\alpha} \subseteq G_\alpha(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulunu gerçekleyen $\{\overline{U_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ tam daralması ve X uzayı normal olduğu için $f_\alpha(\overline{U_\alpha}) = 1$ ve $f_\alpha(X - G_\alpha) = 0$ ve dolayısıyla $[0 < f_\alpha] \subseteq G_\alpha$ gerçekleyen sürekli f_α Urysohn fonksiyonları yardımıyla, $f = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha$ gerçel değerli fonksiyonunun sürekli olduğunu ve her $x \in X$ için, uygun bir $\alpha_x \in \Lambda$ aracılığıyla $x \in \overline{U_{\alpha_x}}$ ve nedeniyle $1 = f_{\alpha_x}(x) \leq f(x)$ ve sonuçta **daima** $0 < f(x)(\forall x \in X)$ gerçeklendiğini gözleyerek $g_\alpha = \frac{f_\alpha}{f}$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ fonksiyonlarının $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin $\mathcal{G}$ örtülüşünün ikincili olan yerel sonlu birimin parçalanışı olduğunu görmek kolaydır. Demek ki i)$\Rightarrow$ii) gösterilmiş olur. □

Micheal Teoremi 3: *Yantıkız bir T_2 uzayının sürekli ve kapalı görüntüsü de yantıkızdır.*

Kanıtlama: X uzayı yantıkız bir T_2 uzayı ve $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli, örten ve kapalı olsun. O halde Y uzayı normal bir T_2 uzayı olur. Şimdi Y uzayında indis kümesi iyi sıralanmış herhangi bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için, tümevarımla X uzayında $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı ve yerel sonlu ailelerini aşağıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde tanımlayacağız.

$$\begin{array}{lll} \textbf{Koşn(i)} : & K_{n,\alpha} \subseteq f^{-1}(U_\alpha) & (\forall\alpha \in \Lambda), \\ \textbf{Koşn(ii)} : & f(K_{n,\alpha}) \cap f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n-1,\beta}) = \emptyset & (\forall\alpha \in \Lambda, \forall n > 1). \end{array}$$

$\mathcal{K}_1$ olarak, yantıkız X uzayında, Bölüm 1, Yardımcı Teorem 4 nedeniyle var olan ve $\overline{G_\alpha} \subseteq f^{-1}(U_\alpha)(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulunu gerçekleyen yerel sonlu ve açık $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ örtülüşü aracılığıyla $K_{1,\alpha} = \overline{G_\alpha}(\forall\alpha \in \Lambda)$ alarak $\mathcal{K}_1 = \{K_{1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ olarak tanımlanabilir. Şimdi $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n$ kapalı yerel sonlu aileleri, yukarıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde tanımlanmış olunduğunda, her $\alpha \in \Lambda$ için $f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n,\beta})$ alt kümesi Y uzayında kapalı olduğundan

$$W_{\alpha,n+1} = f^{-1}(U_\alpha) - f^{-1}f\left(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n,\beta}\right) \qquad (\alpha \in \Lambda)$$

açık kümelerini tanımlayalım. Herhangi bir $x \in X$ alındığında $x \in f^{-1}(U_{\alpha_x}) - f^{-1}(\bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha)$ olacak biçimde bir $\alpha_x \in \Lambda$ var ve üstelik $f^{-1}f(\bigcup_{\alpha<\alpha_x} K_{n,\alpha}) =$

$f^{-1}(\bigcup_{\alpha<\alpha_x} f(K_{n,\alpha})) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha)$ geçerli olduğundan $x \in W_{\alpha_x,n+1}$ olur, demek ki $\mathcal{W}_{n+1} = \{W_{n+1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık kümeler ailesi X uzayında bir örtülüştür. Dolayısı ile, tıpkı yukardaki gibi $\overline{G_{n+1,\alpha}} \subseteq W_{n+1,\alpha}(\forall\alpha \in \Lambda)$ olacak biçimde yerel sonlu $\mathcal{G}_{n+1} = \{G_{n+1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık incelmesi vardır ve $K_{n+1,\alpha} = \overline{G_{n+1,\alpha}}(\forall\alpha \in \Lambda)$ ve $\mathcal{K}_{n+1} = \{K_{n+1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ alınır. Dolayısı ile Koş$(n+1)(i)$ gerçeklenir ve üstelik

$$W_{n+1,\alpha} \cap f^{-1}f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n,\beta}) = \emptyset = f(K_{n+1,\alpha}) \cap f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n,\beta}) \qquad (\forall\alpha \in \Lambda)$$

nedeniyle Koş$(n+1)(ii)$ gerçekleşir. O halde tüm yerel sonlu ve kapalı $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailelerinin tanımlanması işlemi tamamlanmış olur. Şimdi Y uzayında

$$V_{n,\alpha} = Y - \left(f(\bigcup_{\beta\neq\alpha} K_{n,\beta}) \cup f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n+1,\beta}) \right) \qquad (\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\mathrm{x}\Lambda)$$

açık kümelerini ve $\mathcal{V}_n = \{V_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailelerini tanımlayalım. f fonksiyonu örten ve $\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_{n+1}$ aileleri X uzayında örtülüş olduklarından

$$f(K_{n,\alpha}) \cup f(\bigcup_{\beta\neq\alpha} K_{n,\beta}) = Y = f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n+1,\beta}) \cup f(\bigcup_{\alpha\leq\beta} K_{n+1,\beta}),$$

$$V_{n,\alpha} \subseteq f(K_{n,\alpha}) \cap f(\bigcup_{\alpha\leq\beta} K_{n+1,\beta}) \subseteq f(K_{n,\alpha}) \subseteq U_\alpha \qquad (\alpha \in \Lambda)$$

gözlenir. Amacımız, herbir $\mathcal{V}_n$ ailesinin Y uzayında yerel sonlu ve $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ σ-yerel sonlu ailesinin bir örtülüş olduğunu göstermektir. Herhangi bir $y \in Y$ verildiğinde $\Lambda_{y,n} = \{\alpha \in \Lambda : y \in f(K_{n,\alpha})\}$ ve $\alpha_y = \min(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{y,n})$ tanımlayalım. $\alpha_y \in \Lambda_{y,n_y}$ gerçeklenecek biçimde bir $n_y \in \mathbb{N}$ var olduğundan, $y \in f(K_{n_y,\alpha_y})$ ve $y \notin \bigcup_{\beta<\alpha_y} f(K_{n_y+1,\beta}) = f(\bigcup_{\beta<\alpha_y} K_{n_y+1,\beta})$ ve $y \notin \bigcup_{\alpha<\alpha_y} f(K_{n_y,\alpha})$ bulunur, üstelik $N_y = n_y + 1$ yazılırsa, her $\alpha > \alpha_y$ için $y \in f(K_{n_y,\alpha_y}) = f(K_{N_y-1,\alpha_y}) \subseteq f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{N_y-1,\beta})$ ve Koş$n_y(ii)$ kullanılarak $y \notin f(K_{n_y,\alpha})(\forall\alpha > \alpha_y)$ ve sonuçta

$$y \in Y - \left(f(\bigcup_{\alpha\neq\alpha_y} K_{n_y,\alpha}) \cup f(\bigcup_{\alpha<\alpha_y} K_{n_y+1,\alpha}) \right) = V_{n_y,\alpha_y} \subseteq \bigcup \mathcal{V}_{n_y}$$

olur. Demek ki $\mathcal{V}$ ailesi Y uzayında bir örtülüştür. Üstelik dikkat edilirse, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde, yukarıda belirlenen $\alpha_y \in \Lambda$ indisi aracılığıyla

$$y \in B_y = Y - \left(f(\bigcup_{\alpha<\alpha_y} K_{n,\alpha}) \cup f(\bigcup_{\alpha_y<\alpha} K_{n+1,\alpha}) \right)$$

gerçekleşir. Bu açık küme $\mathcal{V}_n$ ailesinde en fazla bir üye ile kesişebilir, çünkü $\alpha \neq \alpha_y$ için

$$B_y \cap V_{n,\alpha} \subseteq \begin{cases} Y - \left(f(\bigcup_{\gamma<\alpha_y} K_{n,\gamma}) \cup f(\bigcup_{\beta\neq\alpha} K_{n,\beta}) \right) = \emptyset & (\alpha < \alpha_y) \\ \\ Y - \left(f(\bigcup_{\alpha_y<\gamma} K_{n+1,\gamma}) \cup f(\bigcup_{\beta<\alpha} K_{n+1,\beta}) \right) = \emptyset & (\alpha_y < \alpha) \end{cases}$$

gerçekleşmektedir. Kanıtlama, Micheal Teoremi 1 nedeniyle biter. □

Aşağıdaki olağanüstü sonuç, 1955 yılında bağımsız olarak E.Micheal ve K.Nagami tarafından kanıtlanmıştır ve literatürde Micheal&Nagami Teoremi olarak bilinir, b.k.z.[8]. Ardısıra gelen ise bu teoremin bir başka söylenişidir.

Micheal&Nagami Teoremi:*Derlemsel normal uzaylarda yantıkızlık ve ötetıkızlık kavramları eşdeğerdir.*

Micheal&Nagami Teoremi:*Bir T_2 uzayının yantıkız olabilmesi için gyk derlemsel normal ve ötetıkız olmasıdır.*
Kanıtlama: Birinci söylenişi kanıtlamak yeterlidir. X derlemsel normal ve ötetıkız bir uzay ve $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda noktasal sonlu herhangi bir açık örtülüş olsun. Bölüm 1,Yardımcı Teorem 6 nedeniyle $\mathcal{G}$'nin indirgenemez olduğunu varsayabiliriz. Her $x \in X$ için $\mathcal{G}_x = \{G_\alpha \in \mathcal{G} : x \in G_\alpha\} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi sonlu üyelidir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathbf{n(i))}\mathcal{W}_n \quad \text{kesikli}, \mathbf{n(ii))}F_n(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n} (\bigcup \mathcal{W}_k), \quad \mathbf{n(iii))}F_{n-1}(\mathcal{G}) \cap \bigcup \mathcal{W}_n = \emptyset$$

koşullarını gerçekleyen ve örtülüş olmaları gerekmeyen $\mathcal{W}_n \prec \mathcal{G}$ açık ailelerinin var olduğunu kanıtlayalım. Bilindiği gibi, her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n(\mathcal{G}) = \{x \in X :$

$\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) \square n\}$ yazılmıştır ve bunlar **daima** kapalıdır, $F_0(\mathcal{G}) = \emptyset$ alınacaktır. $K_\alpha = X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} G_\beta$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ boştan farklı kapalı kümelerinin ailesi, $\alpha \neq \beta$ için $G_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$ gerçekleşmesi nedeniyle kesikli olduğu için $\mathcal{W}_1 = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık ve kesikli ailesini $K_\alpha \subseteq W_\alpha (\forall \alpha \in \Lambda)$ olacak biçimde tanımlarız, bkz Bölüm 1, Yardımcı Teorem 9. O halde $n = 1$ için yukarıdaki üç koşul da gerçeklenir. Şimdi $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, ..., \mathcal{W}_n$ açık kesikli aileleri yukarıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde tanımlı olduğunda

$$K(\Lambda') = X - \left(\bigcup_{1 \square k \square n} (\bigcup \mathcal{W}_k) \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda'} G_\alpha \right) \qquad (\forall \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda))$$

olmak üzere, $\mathcal{K}_{n+1} = \{K(\Lambda') : \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda))\}$ kapalı kümeler ailesini tanımlayalım. Bu aile kesikli olur, çünkü bir $x \in X$ alındığında

$$\begin{array}{lclcl} n+1 < \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) & \text{ise} & B_x & = & \bigcap \mathcal{G}_x \\ \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) \square n & \text{ise} & B_x & = & \bigcup_{1 \square k \square n} (\bigcup \mathcal{W}_k) \\ \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) = n+1 & \text{ise} & B_x & = & \bigcap \mathcal{G}_x \end{array}$$

tanımlarsak, ilk iki durumda B_x ile $\mathcal{K}_{n+1}$ ailesinin tüm üyeleri ayrıktır, çünkü örneğin birinci durumda $n+2 \square \operatorname{card}\mathcal{G}_x$ nedeniyle her $\Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)$ için $\mathcal{G}_x \cap \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda - \Lambda'} \neq \emptyset$ olur ve sonuçta $\bigcap \mathcal{G}_x \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda'} G_\alpha$ gerçekleşir; sonuncu durumda, tek türlü belirlenen bir $\Lambda'_x \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)$ için $B_x = \bigcap \mathcal{G}_x = \bigcap_{\alpha \in \Lambda'_x} G_\alpha$ olur ve $\Lambda' \neq \Lambda'_x$ gerçekleyen $\Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)$ için zorunlu olarak $\emptyset \neq \Lambda'_x - \Lambda' \subseteq \Lambda'_x \cap (\Lambda - \Lambda')$ bulunur ve dolayısıyla uygun bir $\gamma \in \Lambda'_x - \Lambda'$ aracılığıyla yine $B_x \subseteq G_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda'} G_\alpha$ ve $B_x \cap K(\Lambda') = \emptyset$ elde edilir. O halde herbir $\Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)$ için $K(\Lambda') \subseteq U(\Lambda')$ olacak biçimde kesikli bir $\{U(\Lambda') : \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda')\}$ açık genişleme ailesi vardır. Burada şu çok önemli gerçeğe dikkat edilmelidir:

$$K(\Lambda') \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G_\alpha \qquad (\forall \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda))$$

gerçekleşir, çünkü, eğer bir $x_0 \in K(\Lambda') - \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G_\alpha$ elemanı var olsaydı, en az uygun bir $\beta \in \Lambda'$ için $x_0 \notin G_\beta$ ve $x_0 \in X - \bigcup_{\alpha \in \Lambda - \Lambda'} G_\alpha$ nedeniyle $\operatorname{ord}(x_0, \mathcal{G}) \square n$ olur ve geçerli olduğunu varsaydığımız n(ii) koşulu kullanılarak sonuçta $x_0 \in F_n(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{1 \square k \square n} (\bigcup \mathcal{W}_k)$ çelişkisi bulunurdu. O halde

$$\mathcal{W}_{n+1} = \{U(\Lambda') \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} G_\alpha : \Lambda' \in \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda)\}$$

tanımlanırsa (n+1)(i),(n+1)(ii) ve (n+1)(iii) koşullarının tümü gerçeklenir. Gerçekten yalnızca Koş(n+1)(iii) yani $F_{n+1}(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{1\leq k\leq n+1}(\bigcup \mathcal{W}_k)$ göstermek yeterlidir, bunun için, kısalık amacıyla sağ yandaki birleşim E_{n+1} ile yazılırsa, her $x \in F_{n+1}(\mathcal{G})$ için $x \in E_{n+1}$ gösterilmelidir. Eğer $x \in \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{W}_k)$ ise sorun yoktur; eğer $x \notin \bigcup_{1\leq k\leq n}(\bigcup \mathcal{W}_k)$ ise Koş n(ii) nedeniyle $n < \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n+1$ ve sonuçta $\operatorname{ord}(x, \mathcal{G}) = n+1$ olur ve $\operatorname{card}\Lambda'_x = n+1$ gerçekleyen ve tek türlü belirlenebilen $\Lambda'_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi aracılığıyla $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda'_x} G_\alpha$ ve sonuçta

$$x \notin \left(\bigcup_{1\leq k\leq n} (\bigcup \mathcal{W}_k) \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda-\Lambda'_x} G_\alpha \right)$$

yani $x \in K(\Lambda'_x) \subseteq U(\Lambda'_x) \cap \bigcap_{\alpha\in\Lambda'_x} G_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{W}_{n+1} \subseteq E_{n+1}$ bulunur. Demek ki $n+1$-inci adımda, gösterilmesi gereken üç koşul da elde edilir ve sonuçta tüm $\mathcal{W}_n$ ailelerinin tümevarım yoluyla tanımlanması işlemi bitirilmiş olur. Üstelik $W_n = \bigcup \mathcal{W}_n (\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \subseteq X$ nedeniyle $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir açık örtülüş olur. Şimdi bu örtülüşün noktasal sonlu olduğunu gösterelim. $F_n(\mathcal{G}) \subseteq F_{n+1}(\mathcal{G})$ nedeniyle, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ gerçekleyen $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ doğal sayı dizisi ne olursa olsun, herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ verildiğinde, uygun bir $m_0 \in \mathbb{N}$ yardımıyla $n_0 < n_{m_0}$ ve sonuçta $F_{n_0}(\mathcal{G}) \subseteq F_{n_{m_0}}(\mathcal{G})$ nedeniyle $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n_m}(\mathcal{G})$ ve özel olarak $N_m = n_m - 1 (\forall m \in \mathbb{N})$ sayıları için $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{N_m}(\mathcal{G})$ gerçeklendiğinden, $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} W_{n_m}$ koşulunu gerçekleyen bir $x \in X$ elemanı var olamaz, çünkü böyle bir eleman var olsaydı, $W_n \cap F_{n-1}(\mathcal{G}) = \emptyset (\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiğini söyleyen n(iii) koşullarının zorunlu bir gereği olarak

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} (X - F_{n_m-1}(\mathcal{G})) = X - \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{N_m}(\mathcal{G}) = \emptyset$$

bulunurdu. O halde Bölüm1'deki Normal Uzayların Örtülüş Teoremi (iv) nedeniyle, her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \subseteq W_n$ gerçeklenecek biçimde, sayılabilir üyeli, yerel sonlu ve açık bir $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}} \prec \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ incelmesi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n \subseteq \bigcup \mathcal{W}_n = \bigcup_{W\in\mathcal{W}_n} W$ nedeniyle

$$\mathcal{V}_n^* = \{V_n \cap W : W \in \mathcal{W}_n\} \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{V}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n^*$$

ailelerinin, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{W\in\mathcal{W}_n}(V_n \cap W)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{V}_n^*) = \bigcup \mathcal{V}^*$ gerçeklediğini, $\mathcal{V}^* \prec \mathcal{G}$ olduğunu ve $\mathcal{V}^*$ ailesinin yerel sonlu olduğunu görmek kolaydır. Demek ki X uzayının her açık örtülüşünün açık ve yerel sonlu bir incelmesi tanımlanabilmektedir. $\square$

Aşağıdaki karşı örnek uzaylarının varlıklarını kanıtlayan da E.Micheal olmuştur.

Teorem 10: *Her noktasal sonlu açık örtülüşünün yerel sonlu açık incelmesinin var olduğu derlemsel normal olmayan bir normal T_2 uzayı vardır.*

Kanıtlama: Tarihsel öneme sahip bu çok ünlü uzay 1951 yılında Bing tarafından tanımlanmıştır. Sayılamaz sonsuz noktalı herhangi bir X kümesinin kuvvet kümesinden $\{0,1\}$ kümesine tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi olan

$$F = \{0,1\}^{\mathcal{P}(X)}$$

üzerinde çok ilginç bir topoloji tanımlayacağız. Şimdi önce herbir $A \in \mathcal{P}(X)$ için

$$f_x(A) = 1 \quad (x \in A \text{ ise}),\ f_x(A) = 0 \quad (x \notin A \text{ ise})$$

gerçekleyen tüm özel $f_x \in F$'lerin kümesini F_0 ile gösterelim. Açıktır ki $x \neq y$ ise $f_x \neq f_y$ olur. Ayrıca herhangi bir $f \in F - F_0$ için, herbir $x \in X$ için uygun bir $A_x \in \mathcal{P}(X)$ vardır ki $f(A_x) = 1 - f_x(A_x)$ gerçekleşir. Üstelik

$$\aleph_1 \leq |X| = \kappa < |\mathcal{P}(X)| = 2^\kappa < 2^{2^\kappa} = |F|$$

geçerli olduğu kolayca gözlenir. Şimdi, $F - F_0$ kümesinin tüm elemanlarının yalıtılmış olduğu ve herhangi bir $f_x \in F_0$ için ise

$$B(f_x, \mathcal{R}) = \{f \in F : \forall A \in \mathcal{R} \qquad \text{için} \qquad f(A) = f_x(A)\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}(f_x) = \{B(f_x, \mathcal{R}) : \mathcal{R} \in [\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}\}$$

ailesinin yerel taban olduğu uzayı gözönüne alalım. O halde herbir $f_x \in F$ için

$$\mathcal{X}(f_x, F) = |\mathcal{B}(f_x)| = 2^\kappa \geq 2^{\aleph_1}$$

olur. Apaçıktır ki $F - F_0$'ın tüm alt kümeleri bu uzayda açıktır. Üstelik sonlu tane boştan farklı $A_k \in \mathcal{P}(X)$ ve $\epsilon_k = 0$ ya da 1 $(1 \leq k \leq n)$ olmak üzere

$$E = \{f \in F : \forall (1 \leq k \leq n) \text{ için } f(A_k) = \epsilon_k\}$$

alt kümesi F uzayında açıktır, çünkü $f_x \in E$ ise $\mathcal{R} = \{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ olmak üzere $B(f_x, \mathcal{R}) \subseteq E$ olur. Bu uzayda tüm tek elemanlı kümeler kapalıdır. Bu uzay üstelik normaldir. Çünkü F uzayının ayrık ve kapalı H_1 ve H_2 alt kümeleri verildiğinde, $H_1^* = H_1 \cap F_0$ ve $H_2^* = H_2 \cap F_0$ ayrık kapalı kümelerinden birisi, örneğin H_1^* boş ise H_1 ve $F - H_1$ ayrık açık kümeleri H_1 ve H_2 kapalı kümelerini ayırır. Eğer hem H_1^* ve hem de H_2^* boş değilse, bu kez

$$A_1 = \{x \in X : f_x \in H_1^*\} \ , \ A_2 = \{x \in X : f_x \in H_2^*\}$$

olmak üzere

$$E_1 = \{f \in F : f(A_1) = 1, f(A_2) = 0\} \ , \ E_2 = \{f \in F : f(A_1) = 0, f(A_2) = 1\}$$

ayrık açık kümeleri yardımıyla tanımlanan

$$(E_1 - H_2) \cup (H_1 - H_1^*) \qquad \text{ve} \qquad (E_2 - H_1) \cup (H_2 - H_2^*)$$

ayrık açık kümeleri H_1 ve H_2 kümelerini ayırır. Şimdi de bu uzayın derlemsel Haussdorf (ve dolayısıyla derlemsel normal) olmadığını kanıtlayalım. Aslında daha fazlasını göstereceğiz: Gelişigüzel seçilmiş sayılamaz sonsuz tane taban üyesinin oluşturduğu

$$\{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0\}$$

ailesinin **noktasal sayılabilir olamayacağını** kanıtlayacağız. Genelliği bozmaksızın tüm bu taban üyeleri için $|\mathcal{R}_x| = n$ gerçeklenecek biçimde sabit bir n doğal sayısının var olduğunu varsayabiliriz. Şimdi herbiri n üyeli bu $\mathcal{R}_x$ kümelerinin, varlığı Zorn Lemması ile güvence altına alınan ve üyeleri ikişerli ayrık olan maksimal alt topluluğu gözönüne alınsın. O halde öyle bir $X_0^* \subseteq X_0$ alt kümesi vardır ki $\{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\}$ ailesi üyeleri ikişerli ayrık olan maksimal alt topluluk olur. O halde bunların ikişerli ayrıklığından yararlanarak kolayca

$$f \in \bigcap \{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0^*\}$$

gerçekleyen $f \in F$ elemanları kolayca tanımlanır. Yukarıda alınan taban üyelerinin noktasal sayılabilirlik koşulu geçerli olduğundan bu son kesişime en fazla sayılabilir taban üyesi katılabilir ve dolayısıyla X_0^* sayılabilir elemanlı olur. Şimdi

$$\forall A \in \mathcal{R}^* = \bigcup \{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\} \text{ için } E_A = \{x \in X_0 : A \in \mathcal{R}_x\}$$

yazılırsa, kolayca, $\{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\}$ ailesinin maksimalliği nedeniyle

$$X_0 = \bigcup\{E_A : A \in \mathcal{R}^*\}$$

bulunur. Gerçekten, eğer bir $x_0 \in X_0 - \bigcup_{A\in\mathcal{R}^*} E_A$ elemanı var olsaydı $\mathcal{R}_{x_0}$ topluluğundaki A kümelerinin hiçbiri $\mathcal{R}^* = \bigcup_{x\in X_0^*} \mathcal{R}_x$ ailesine ait olamaz ve sonuçta $\mathcal{R}_{x_0} \cap \mathcal{R}_x = \emptyset$ $(\forall x \in X_0^*)$ bulunurdu, bu ise $\mathcal{R}^*$ ailesinin maksimalliğine aykırıdır. $\mathcal{R}^*$ sayılabilir ve X_0 sayılamaz elemanlı olduğundan, uygun bir $A_1 \in \mathcal{R}^*$ için $\aleph_1 \leq |E_{A_1}|$ bulunur. Demek ki uygun bir sayılamaz sonsuz elemanlı $X_1 \subseteq X_0^*$ için, herbir $x \in X_1$ için $A_1 \in \mathcal{R}_x$ gerçekleşir. Yine genelliği bozmaksızın tüm $x \in X_1$ elemanları için $f_x(A_1) = \epsilon_1 \in \{0, 1\}$ gerçekleyen sabit bir ϵ_1 vardır. Bu sonuç kullanılırsa, ikinci aşamada öyle bir sayılamaz noktalı $X_2(\subseteq X_1)$ ve $A_2 \in \bigcap\{\mathcal{R}_x : x \in X_2\}$ alt kümeleriyle $\epsilon_2 \in \{0, 1\}$ sabiti vardır ki $A_2 \neq A_1$ ve her $x \in X_2$ için $f_x(A_2) = \epsilon_2$ gerçekleşir. n-inci adım sonunda , öyle bir özel n üyeli

$$\mathcal{R}_0 = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$$

ailesi ve sayılamaz sonsuz noktalı $X_n(\subseteq X_{n-1})$ alt kümesinin varlığı gözlenebilir ki

$$\forall x \in X_n, \forall A_k \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}^* \text{ için } f_x(A_k) = \epsilon_k$$

gerçekleşir. O halde,

$$f \in \bigcap\{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_n\}$$

gerçekleyen $f \in F$ fonksiyonları kolayca tanımlanabileceğinden, ilk başta ele alınan $\{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0\}$ noktasal sayılabilir ailesinin sayılamaz sonsuz üyeli olamayacağı gerçeği, bu ulaşılan çelişkiden anlaşılacaktır. Demek ki F_0 kapalı-kesikli kümesine ait f_x elemanlarının ikişerli ayrık taban üyeleri ile ayrılması hiç söz konusu olamaz. Oysa dikkat edilirse F uzayında, her noktasal sayılabilir açık örtülüşünün yerel sonlu bir açık incelmesi vardır. Gerçekten F uzayının noktasal sayılabilir bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü verildiğinde $\mathcal{G}_0 = \{G \in \mathcal{G} : G \cap F_0 \neq \emptyset\}$ ailesi F_0 normal alt uzayı için noktasal sayılabilir bir açık örtülüşüdür ve yukarıdaki sonuçlar nedeniyle zorunlu olarak sayılabilir üyelidir. Morita teoremi nedeniyle, F_0 uzayında $\mathcal{G}_0$ açık örtülüşünün yerel sonlu bir $\mathcal{U}$ açık incelmesi vardır ve sonuçta

$$\mathcal{U} \cup \{\{f\} : f \in F - \bigcup\mathcal{U}\}$$

ailesi $\mathcal{G}$'nin istenen yerel sonlu açık incelmesi olur çünkü $\bigcup\mathcal{U}$ kümesi hem açık hem kapalıdır. Apaçıktır ki, F uzayının yerel sonlu bir açık incelmesi varolmayan en az bir açık örtülüşü vardır çünkü bu uzay derlemsel normal olmadığı için yantıkız değildir.

Teorem 11: *En az bir noktasal sonlu açık örtülüşünün yerel sonlu açık bir incelmesinin tanımlanamadığı normal bir T_2 uzayı vardır.*
Kanıtlama: Yukarıdaki teoremde tanımlanan F karşı örnek uzayındaki F_0 alt kümesine,

$$F_1 = \{f \in F : \exists \mathcal{R}_f \in [\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}, \forall A \in \mathcal{P}(X) - \mathcal{R}_f \text{ için } f(A) = 0\}$$

alt kümesini ekleyerek $F^* = F_0 \cup F_1$ kümesinin üzerindeki alt uzayı tanımlayalım. Öncelikle

$$|F^*| = |F_1| = |[\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}| = 2^\kappa$$

olduğuna dikkat edilmelidir. F^*'ın derlemsel Hausdorff olmayan ötetıkız bir normal Hausdorff uzayı olduğunu göstermek istiyoruz. $F_0 = \{f_x : x \in X\}$ kümesinin bu uzayın kapalı ve kesikli bir alt kümesi olduğunu biliyoruz. Bu kümenin elemanlarının ikişerli ayrık esas civarları tanımlanamaz. $x \neq y (x, y \in X)$ için $B(f_x, \mathcal{R}_x) \cap B(f_y, \mathcal{R}_y) = \emptyset$ gerçekleyen $B(f_x, \mathcal{R}_x)$ esas civarları var olsaydı, öncelikle zorunlu olarak, uygun bir sayılamaz $X_1 \subseteq X$ alt kümesi ve sabit bir n doğal sayısı vardır ki, $x, y \in X_1$ için $|\mathcal{R}_x| = |\mathcal{R}_y| = n$ olur. Üstelik $\mathcal{R}_x$ ve $\mathcal{R}_y$ kesişmelidir, aksi halde F^* kümesinin $f \in B(f_x, \mathcal{R}_x) \cap B(f_y, \mathcal{R}_y) \cap F_1$ gerçekleyen en az 2^κ tane elemanı kolaylıkla tanımlanırdı. Sonuçta öyle uygun sayılamaz sonsuz elemanlı $X_2 (\subseteq X_1)$, sabit bir $A_1 \subseteq X$ alt kümesi ve sabit bir $\epsilon_1 \in \{0, 1\}$ vardır ki

$$\forall x \in X_2 \text{ için } A_1 \in \mathcal{R}_x \;,\; f_x(A_1) = \epsilon_1$$

gerçekleşir. Şimdi yukarıdaki sonucu, herbiri $n-1$ üyeli olan $\mathcal{R}_x(1) = \mathcal{R}_x - \{A_1\}$ aileleri ve ikişerli ayrık $B(f_x, \mathcal{R}_x(1))(x \in X_2)$ esas civarlar için ikinci kez yinelersek bu kez uygun bir sayılamaz sonsuz elemanlı $X_3 \subseteq X_2$, sabit bir $A_2 \subseteq X$ alt kümeleri ve sabit bir $\epsilon_2 \in \{0, 1\}$ buluruz ki

$$\forall x \in X_3 \text{ için } A_2 \in \mathcal{R}_x(1) \;,\; f_x(A_2) = \epsilon_2$$

gerçekleşir. Bu işlem üst üste n kez yinelenirse, sonuçta

$$\forall x, y \in X_{n+1} \quad \text{için} \quad B(f_x, \mathcal{R}_x) = B(f_y, \mathcal{R}_y)$$

gerçeklenecek biçimde sayılamaz sonsuz elemanlı bir $X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_0$ alt kümesinin varlığı sonucunu elde ederek bir çelişkiye varırdık. Demek ki F^* alt uzayı derlemsel Hausdorff olamaz. F^* alt uzayı F'nin kapalı bir kümesi olduğundan normal ve Hausdorff'dur. Bu alt uzay üstelik metakompakttır, çünkü herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verildiğinde, herbir $x \in X$ için

$$W_x = \{f \in F^* : f(\{x\}) = 1\} \quad \text{için} \quad f_x \in \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}$$

gerçekleyen açık kümeler yardımıyla tanımlanan

$$\mathcal{W} = \{W_x \cap U_x : x \in X\} \cup \{\{f\} : f \in F_1\}$$

açık incelmesinin noktasal sonlu olduğu kolayca görülecektir. Demek ki bu normal uzayda yerel sonlu bir açık incelmesi tanımlanamayan en az bir noktasal sonlu açık örtülüş vardır.

Bölüm 3

TETA İNCELMELER VE TETA TABANLAR

Bu bölümde, ağırlıklı olarak John M. Worrell ve Howard H. Wicke ikilisinin, ötetıkızlık kavramını genelleştiren 1965 tarihli ünlü ve tarihsel makalesindeki sonuçları göreceğiz, b.k.z.[2]. Son ikisi dışında bu bölümdeki tüm sonuçlar bu ikiliye aittir. Son Uyarı'nın içinde verilen Önerme ise, bu tez çalışmasının biricik özgün sonucudur. Bu bölümdeki en önemli üç kavram, sayılabilir mertebeli taban, θ-incelme (sözle:teta incelme) ve θ-taban (sözle:teta taban) olacaktır.

Tanım 1: Bir X topolojik uzayında bir $\mathcal{B}$ tabanına, ancak ve yalnız, yetkin azalan ve tekdüze bir aile olan ve $x \in \bigcap \mathcal{B}'$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi, $x \in X$ noktası için bu uzayda bir yerel taban görevi görüyorsa, **sayılabilir mertebeli taban** denilir.

Burada şu kavramlar kullanılmıştır: Üyeleri boş olmayan alt kümeler olan bir $\mathcal{A}$ ailesine, ancak ve yalnız, her $A \in \mathcal{A}$ için $A^* \subset A$ yani $A^* \subseteq A$ ve $A^* \neq A$ koşulunu gerçekleyen en az bir $A^* \in \mathcal{A}$ üyesi tanımlanabiliyorsa, **yetkin azalan aile** ve herhangi iki $\mathcal{A}$ üyesi kapsama bağıntısına göre kıyaslanabiliyorsa **tekdüze** (ya da **monoton**) **aile** denilir. Kolayca görülebileceği gibi, yetkin azalan bir aile sonsuz üyeli olmak zorundadır. Sayılabilir mertebeli tabanlar alışılagelen tabanlardan çok farklıdır. Örneğin, $\mathcal{B} = \{(r-\epsilon, r+\epsilon) : r \in \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{Q}^+\}$ ailesinin $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında bir taban olduğunu biliyoruz. Oysa, $0 < \epsilon_0$ ve r_0 rasyonel sayıları sabit ve $\epsilon_n = \epsilon_0 + 2^{-n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere, $\mathcal{B}' = \{(r_0 - \epsilon_n, r_0 + \epsilon_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi, yetkin azalan ve tekdüze ve $r_0 \in \bigcap \mathcal{B}'$ koşulları gerçeklenmesine karşın, kolayca görülebileceği gibi, r_0 gerçel sayısı için $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında bir yerel taban değildir, kısacası, $\mathcal{B}$ bu uzayda sayılabilir mertebeli bir taban olamaz. Öz T_1 ve dolayısıyla T_1 uzaylarında bu nitelikteki tabanları tanımlamak daha kolaydır, b.k.z. Teorem 2.

Aşağıdaki sonuç, bu bölümde yaşamsal önemi olan bir yöntemi kullanacaktır. Onun uzun kanıtlamasının kavranması, ardısıra gelen teoremlerin kavranmasını kolaylaştıracaktır.

Worrell&Wicke Teoremi 1:*Bir (X,τ) uzayında, her $x \in X$ noktası için, $x \in B_x$ gerçekleyen bir B_x açık kümesinin üzerindeki alt uzayın, sayılabilir mertebeli bir tabanı varsa, bu uzayda tüm alt uzayların bu nitelikte bir tabanı vardır.*

Kanıtlama: Herbir $x \in X$ için, B_x üzerindeki alt uzayda sayılabilir mertebeli taban görevi gören ve $B_x = \cup\mathcal{B}_x$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_x$ açık küme ailesi tanımlı olsun. Şimdi, tüm bu ailelerin topluluğunda, bir $\alpha_0 < \kappa$ için, eğer herbir $\alpha < \alpha_0$ için $\mathcal{B}_{x_\alpha}$ aileleri tanımlı ve $X - \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\alpha}) \neq \emptyset$ gerçekleniyorsa, belirli bir $x_{\alpha_0} \in X - \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\alpha})$ noktası seçerek, $\mathcal{B}_{x_\alpha} < \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ $(\forall\alpha < \alpha_0)$ biçiminde bir iyi sıralama tanımlansın. Kuşkusuz bu süreç, $X = \bigcup_{\alpha<\kappa}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\alpha})$ gerçeklenecek biçimde, tek türlü belirli bir $\kappa(\leq \mathrm{card}X)$ kardinal sayısında sonlanır. Şimdi de

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^*_{x_\alpha} &= \{B \in \mathcal{B}_{x_\alpha} : B - \bigcup_{\beta<\alpha}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\beta}) \neq \emptyset\} \quad (\alpha < \kappa)\,,\\ \mathcal{B}^* &= \bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{B}^*_{x_\alpha}\end{aligned}$$

ailelerini tanımlayalım. $\mathcal{B}^*$ ailesinin X uzayı için bir taban olduğunu gözlemek güç değildir, çünkü, $y \in G \in \tau$ ise ve $y \in \bigcup\mathcal{B}_{x_\alpha}$ gerçekleyen en küçük $\alpha < \kappa$ ordinal sayısı sözgelimi β ise yani, $y \in \bigcup\mathcal{B}_{x_\beta} - \bigcup_{\gamma<\beta}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\gamma})$ gerçekleniyorsa, $y \in \bigcup\mathcal{B}_{x_\beta} = B_{x_\beta}$ ve $y \in G \cap B_{x_\beta} \in \tau$ olur ve $\mathcal{B}_{x_\beta}$ ailesi B_{x_β} açık alt uzayında taban görevi gördüğünden, $y \in B \subseteq G \cap B_{x_\beta}$ gerçekleyen bir $B \in \mathcal{B}_{x_\beta}$ vardır ve kolaylıkla $B \subseteq G$ ve $y \in B - \bigcup_{\gamma<\beta}(\bigcup\mathcal{B}_{x_\gamma}) \neq \emptyset$ nedeniyle $B \in \mathcal{B}^*_{x_\beta} \subseteq \mathcal{B}^*$ bulunur. Şimdi de sırasıyla şunları gözleyelim.

1) $\mathcal{B}^*$ tabanı, X uzayı için sayılabilir mertebeli bir tabandır. Gerçekten, $\mathcal{B}^{**} \subseteq \mathcal{B}^*$ alt ailesi tekdüze, yetkin azalan ve $x \in \bigcap\mathcal{B}^{**}$ olsun. Öncelikle $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}^* = \bigcup_{\alpha<\kappa}(\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}^*_{x_\alpha}) \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa}(\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_\alpha})$ nedeniyle, $\alpha_0 = \min\{\alpha < \kappa : \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_\alpha} \neq \emptyset\}$ ordinal sayısı belirlensin. O halde $\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} \neq \emptyset$ olur. Apaçıktır ki $x \in \bigcap\mathcal{B}^{**} \subseteq \bigcap(\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}})$ gerçekleşir. Önce $\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ ailesinin x noktası için bir yerel taban olduğu göstermeliyiz. Herhangi bir $B_0 \in \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} \cap \mathcal{B}^{**}$ alınsın. $\mathcal{B}^{**}$ yetkin azalan olduğu için $B_1 \subset B_0$ gerçekleyen $B_1 \in \mathcal{B}^{**}$ vardır. $B_1 \in \bigcup_{\alpha<\kappa}\mathcal{B}^*_{x_\alpha}$ nedeniyle, uygun bir $\beta < \kappa$ yardımıyla,

$B_1 \in \mathcal{B}^*_{x_\beta} \subseteq \mathcal{B}_{x_\beta}$ ve sonuçta $B_1 \in \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_\beta} \neq \emptyset$ nedeniyle $\alpha_0 \leq \beta$ olur. Aslında, kolayca $\alpha_0 = \beta$ gözlenir, çünkü $\alpha_0 < \beta$ varsayımı geçerli olsaydı $\bigcup \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta}(\bigcup \mathcal{B}_{x_\gamma})$ olur ve sonuçta $B_0 \in \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ ve $B_1 \in \mathcal{B}^*_{x_\beta}$ gerçekleri kullanılarak, $\emptyset \neq B_1 - \bigcup_{\gamma<\beta}(\bigcup \mathcal{B}_{x_\gamma}) \subseteq B_0 - \bigcup_{\gamma<\beta}(\bigcup \mathcal{B}_{x_\gamma}) \subseteq \bigcup \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} - \bigcup \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} = \emptyset$ çelişkisi bulunurdu. Demek ki, herhangi bir $B_0 \in \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ alındığında, uygun bir $B_1 \in \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_\beta} = \mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ sayesinde $B_1 \subset B_0$ gerçeklenmektedir. Apaçıktır ki $\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}} (\subseteq \mathcal{B}^{**})$ ailesi tekdüzedir. Demek ki, bu aile, $B_{x_{\alpha_0}} = \bigcup \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ alt uzayında, sayılabilir mertebeli $\mathcal{B}_{x_{\alpha_0}}$ tabanının, tekdüze, yetkin azalan ve $x \in \bigcap(\mathcal{B}^{**} \cap \mathcal{B}_{x_{\alpha_0}})$ koşulunu gerçekleyen bir alt ailesi olduğundan, x noktası için bir yerel taban olur. O halde, $\mathcal{B}^{**}$ ailesi de aynı noktada bir yerel taban olur.
2) Şimdi, herhangi bir $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$ alt uzayı alınsın. $\mathcal{B}^*$ ailesinin, herbirisi iyi sıralanmış indis kümeleriyle ile indislenmiş $\mathcal{B}^*_n = \{B_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ alt ailelerinin, aşağıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde tanımlanabildiğini göstermek istiyoruz. Aşağıda, $\mathcal{B}^*_n(X_0)$ ile kısaca $\{B \cap X_0 : B \in \mathcal{B}^*_n\}$ ailesi yazılacaktır.

$i)\mathcal{B}^*_{n+1} \prec \mathcal{B}^*_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
$ii)$ Her $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda_n$ için $x_{n,\alpha} \in (B_{n,\alpha} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\alpha} B_{n,\beta}$ vardır (sözle: $\mathcal{B}^*_n(X_0)$ ailesinin her üyesinin bir seçkin noktası vardır),
$iii)$ Bir $x \in X_0$ için, $x \in (B_{N,\alpha} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\alpha} B_{N,\beta}$ ve $n < N$ ve $x \in (B_{n,\gamma} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\gamma} B_{n,\beta}$ ise, $B_{N,\alpha} \subseteq B_{n,\gamma}$ olur, (sözle: Bir $x \in X_0$ elemanını, $n < N$ olmak üzere $\mathcal{B}^*_N$ ailesinde ilk içeren küme, $\mathcal{B}^*_n$ ailesinde ilk içeren üyenin alt kümesidir). Üstelik $x \in G \subset B_{n,\gamma}$ olacak biçimde bir G açık kümesi varsa $B_{N,\alpha} \subset B_{n,\gamma}$ gerçeklenir.

Gerçekten, birinci aşamada $\mathcal{B}^*_1(X_0) \subseteq \mathcal{B}^*$ alt ailesinin tanımını, seçkin noktalarının tanımının iyi sıralamayı koruyacak biçimde yapılması sağlanır. İkinci aşamada, $B_{1,0} \in \mathcal{B}^*_1$ kümesinin, en az bir öz açık alt kümesi bulunan alt kümelerinden (eğer varsa) yararlanarak $\mathcal{B}^*_2(X_0)$ ailesinin üyeleri tanımlanır, örneğin bir $\alpha_0 \in \Lambda_2$ için, tüm $B_{2,\alpha}$ $(\alpha < \alpha_0)$ üyeleri tanımlanmış ve $(B_{1,0} \cap X_0) - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} B_{2,\alpha} \neq \emptyset$ ise, bu boştan farklı kümenin noktaları arasında, onları içeren ve $B_{1,0}$ tarafından kapsanabilen bir öz alt açık kümesi tanımlanabilenler varsa, aynı nitelikte bir $B \in \mathcal{B}^*$ üyesi var olacağından, bu tür noktalardan belirli birisi x_{2,α_0} olarak ve $B_{2,\alpha_0} = B$ olarak tanımlanarak $x_{2,\alpha_0} \in (B_{2,\alpha_0} \cap X_0) - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} B_{2,\alpha}$ olur, eğer $(B_{1,0} \cap X_0) - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} B_{2,\alpha}$ kümesinin bu tür noktaları yoksa $B_{2,\alpha_0} = B_{1,0}$ alınır. Sonuçta, $B_{1,0} \cap X_0$ kümesini örten $\mathcal{B}_2^*$ üyeleri tanımlanmış olur. Sonra benzer işlemler, $(B_{1,1} \cap X_0) - B_{1,0}, \ldots, (B_{1,\alpha} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\alpha} B_{1,\beta}, \ldots$ kümelerinin noktaları için yinelenerek sürdürülür. $\mathcal{B}_2^*(X_0)$ ailesinin tanımından sonraki aşamalarda, tümevarımla $\mathcal{B}_n^*(X_0)$ ailelerinin üyeleri tanımlanır. Kolayca

$$X_0 = \bigcup \mathcal{B}_n^*(X_0) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gözlenir. Bu ailelerin istenenleri gerçeklediği kolayca görülür. Şimdi $\mathcal{B}_{X_0}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^*(X_0)$ ailesini tanımlayalım.

3) Bu son aşamada $\mathcal{B}_{X_0}^*$ ailesinin, X_0 alt uzayında sayılabilir mertebeli bir taban olduğunu gösterelim. Bu amaçla, $G \in \tau$ ve $x \in G \cap X_0$ alınsın. Bu elemana karşılık, iyi sıralanmış her Λ_n indis kümesinde $x \in (B_{n,\alpha_n(x)} \cap X_0) - \bigcup_{\alpha<\alpha_n(x)} B_{n,\alpha}$ koşulunu gerçekleyen $\alpha_n(x) \in \Lambda_n$ indisini belirlersek, öncelikle $iii)$ koşulunun bir gereği olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_{n+1,\alpha_{n+1}(x)} \subseteq B_{n,\alpha_n(x)}$ olur. Önce $\{B_{n,\alpha_n(x)} \cap X_0\}_{n=1}^{\infty}$ ailesinin $x \in X_0$ için X_0 alt uzayında bir yerel taban olduğunu gözleyelim. Şu irdelemeyi yapalım: Eğer, $B_{m+1,\alpha_{m+1}(x)} = B_{m,\alpha_m(x)}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ varsa, yine $iii)$ koşulu gereği, $x \in U \subset B_{m,\alpha_m(x)}$ gerçeklenecek biçimde bir öz açık U kümesi tanımlanamayacağından , sonuçta $G \cap B_{m,\alpha_m(x)} \subset B_{m,\alpha_m(x)}$ gerçekleşemeyecek ve $B_{m,\alpha_m(x)} = G \cap B_{m,\alpha_m(x)} \subseteq G$ ve $B_{m,\alpha_m(x)} \cap X_0 \subseteq G \cap X_0$ olacaktır; yok eğer bu nitelikte bir m doğal sayısı bulunamıyorsa, $B_{n+1,\alpha_{n+1}(x)} \subset B_{n,\alpha_n(x)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve $\mathcal{B}^*$ ailesinin, yetkin azalan, tekdüze ve $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,\alpha_n(x)}$ koşulunu gerçekleyen $\{B_{n,\alpha_n(x)}\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi, x için, X uzayında ve sonuçta $\{B_{n,\alpha_n(x)} \cap X_0\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi ise X_0 alt uzayında bir yerel taban olur. Şimdi, son olarak, $\mathcal{B}_{X_0}^{**} \subseteq \mathcal{B}_{X_0}^*$ alt ailesi yetkin azalan, tekdüze ve $x \in \bigcap \mathcal{B}_{x_0}^{**}$ gerçeklerse, bu ailenin $x \in X_0$ noktası için X_0 alt uzayında bir yerel taban olduğunu göstererek kanıtlamayı bitirelim. Bu aile, yetkin azalan olduğu için sonsuz üyelidir ve her üyesi x noktasını içerir. Bir $\mathbb{N}_0$ $(\subseteq \mathbb{N})$ sonlu alt kümesinin

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \ , \ \exists \beta_n \in \Lambda_n \ , \ B_{n,\beta_n} \cap X_0 \in \mathcal{B}_{X_0}^{**}$$

gerçeklediğini varsayalım. $\alpha_n = \min\{\alpha \in \Lambda_n : B_{n,\alpha} \cap X_0 \in \mathcal{B}_{X_0}^{**}\}$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ indislerini belirleyelim. O halde $B_{n,\alpha_n} \cap X_0 \in \mathcal{B}_{X_0}^{**}$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ ve ayrıca $B_{n,\alpha} \cap X_0 \notin \mathcal{B}_{X_0}^{**}$ $(\alpha < \alpha_n, \alpha \in \Lambda_n)$ olur. Tekdüzelik koşulu gereği $B_{m,\alpha_m} \cap X_0 \subseteq B_{n,\alpha_n} \cap X_0$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}_0$ ve yetkin azalanlık varsayımı gereği $\mathcal{B}_{X_0}^{**} \ni B_{N,\gamma_N} \cap X_0 \subset B_{m,\alpha_m} \cap X_0$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir N doğal sayısı ve $\gamma_N \in \Lambda_N$ indisi vardır. Şimdi $N \in \mathbb{N} - \mathbb{N}_0$ gösterelim. Gerçekten, eğer $N \in \mathbb{N}_0$ olsaydı, öncelikle biraz önce gözlendiği gibi $B_{m,\alpha_m} \cap X_0 \subseteq B_{N,\alpha_N} \cap X_0$ geçerli olur ve biraz önce tanımlanan $\alpha_N \in \Lambda_N$ minimal indisi aracılığıyla $\alpha_N \leq \gamma_N$ olurdu ve $\alpha_N < \gamma_N$ varsayımı bize

$$\begin{aligned} x_{N,\gamma_N} \in (B_{N,\gamma_N} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\gamma_N} B_{N,\beta} &= (B_{N,\gamma_N} \cap X_0) - \bigcup_{\beta<\gamma_N} (B_{N,\beta} \cap X_0) \\ &\subseteq (B_{m,\alpha_m} \cap X_0) - (B_{N,\alpha_N} \cap X_0) = \emptyset \end{aligned}$$

çelişkisini vereceği için, önce $\alpha_N = \gamma_N$ ve sonra $\emptyset \neq B_{N,\gamma_N} \cap X_0 = B_{N,\alpha_N} \cap X_0 \subset B_{m,\alpha_m} \cap X_0 \subseteq B_{N,\alpha_N} \cap X_0$ çelişkisi elde edilirdi. Demek ki, her $n \in \mathbb{N}_0$ için $B_{n,\alpha_n} \cap X_0 \in \mathcal{B}^{**}_{X_0}$ koşulunun gerçeklendiği $\mathbb{N}_0\,(\subseteq \mathbb{N})$ sonlu kümesi ne olursa olsun, yetkin azalanlık hipotezi gereği var olan ve $\mathcal{B}^{**}_{X_0} \ni B_{N,\gamma_N} \cap X_0 \subset B_{n,\alpha_n} \cap X_0$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$ koşulunu gerçekleyen $B_{N,\gamma_N} \cap X_0 \in \mathcal{B}^{**}_{X_0}$ üyesinin birinci indisi kesinlikle $\mathbb{N}_0$ kümesine ait olamaz. Tüm bunlardan ve *iii*) koşulundan şu çok önemli gözleme ulaşırız:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists(\gamma_n, E) \in \Lambda_n \times \mathcal{B}^{**}_{X_0},\ E \subseteq B_{n,\gamma_n} \qquad (*).$$

O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{B}^*_n$ ailesinde, bir $\mathcal{B}^{**}_{X_0}$ üyesini kapsayan en küçük indisli üye iyi tanımlıdır; bu üyeyi yukarıdakilerle uyum göstermesi için $B_{n,\alpha_n} \in \mathcal{B}^*_n$ ile gösterelim. Ayrıca $\mathcal{B}^{**}_{X_0}$ ailesi yetkin azalan olduğu için, $n < N$ olduğunda, öyle bir $N < M$ ve $B_{M,\alpha_M} \in \mathcal{B}^*_M$ vardır ki,

$$\mathcal{B}^{**}_{X_0} \ni B_{M,\alpha_M} \cap X_0 \subseteq B_{n,\alpha_n} \cap X_0 \quad \text{ve} \quad B_{M,\alpha_M} \cap X_0 \subseteq B_{N,\alpha_N} \cap X_0$$

olur. Dikkat edilirse $x_{M,\alpha_M} \in (B_{M,\alpha_M} \cap X_0) - \bigcup_{\alpha<\alpha_M} B_{M,\alpha}$ seçkin noktasının aracılığı ve *iii*) koşulu yardımıyla $\mathcal{B}^*_n$ ailesinde x_{M,α_M} noktasını içeren ilk üye B_{n,β_n} ise $B_{M,\alpha_M} \subseteq B_{n,\beta_n}$ ve sonuçta $\mathcal{B}^{**}_{X_0} \ni B_{M,\alpha_M} \cap X_0 \subseteq B_{n,\beta_n}$ nedeniyle $\alpha_n \leq \beta_n$ olur ve $\alpha_n < \beta_n$ varsayılması durumunda, yine *iii*) nedeniyle, hem $x_{M,\alpha_M} \notin \bigcup_{\beta<\beta_n} B_{n,\beta}$ ve hem de $x_{M,\alpha_M} \in B_{M,\alpha_M} \cap X_0 \subseteq B_{n,\alpha_n} \cap X_0 \subseteq B_{n,\alpha_n} \subseteq \bigcup_{\beta<\beta_n} B_{n,\beta}$ çelişik sonuçları doğacağı için $\alpha_n = \beta_n$ bulunur. O halde yine *iii*) koşulunun gereği olarak, sonuçta $n < N$ ise $B_{N,\alpha_N} \subseteq B_{n,\alpha_n}$ bulunacağı anlaşılmış olur, kısacası, belirlenen bu kümelerin dizisi $\{B_{n,\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ yetkin azalan ve tekdüzedir ve sonuçta $\{B_{n,\alpha_n} \cap X_0\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, üstelik $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(B_{n,\alpha_n} \cap X_0)$ gerçeklendiği için, $x \in X_0$ noktası için X_0 alt uzayında bir yerel taban olur, o halde yukarıdaki (*) koşulu gereği $\mathcal{B}^{**}_{X_0}$ ailesinin, aynı alt uzayda $x \in X_0$ için bir yerel taban olduğu anlaşılır. Kanıtlama bitirilmiştir. □

Aşağıdaki sonuç için gerekli olan şu kavramı tanımalıyız: Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız

$$\text{ya} \quad i)\ \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \quad ,\text{ya da} \quad ii)\ \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset \qquad (\forall x, y \in X)$$

koşulu gerçeklenirse, bir **öz T_1 uzayı** denilir. Tüm T_1 uzaylarının bu nitelikte oldukları apaçıktır ve metriklenemeyen açınır uzayların, T_1 uzayı olmayan birer öz T_1 uzayı oldukları birazdan gözlenecektir.

Worrell&Wicke Teoremi 2: *Bir X öz T_1 uzayının sayılabilir mertebeli bir tabanının var olabilmesi için g.y.k., bu uzayda, aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanlar dizisinin varlığıdır: i) $\mathcal{B}_{n+1} \prec \mathcal{B}_n\, (\forall n \in \mathbb{N})$, ii) $x \in B_n \in \mathcal{B}_n\, (\forall n \in \mathbb{N})$ ve $B_{n+1} \subseteq B_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşullarını gerçekleyen herhangi bir $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ olur.*

Kanıtlama:Gereklik: X bir öz T_1 uzayı olsun ve sayılabilir mertebeli bir $\mathcal{B}$ tabanı var olsun. Bir önceki kanıtlamada olduğu gibi, $\mathcal{B}_n^*$ aileleri, X_0 yerine X ile çalışılarak tanımlanırsa, onlar yardımıyla tanımlanan

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n^* \cup \mathcal{B}_{n+1}^* \cup \mathcal{B}_{n+2}^* \cup \ldots \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ailelerinin herbirinin X uzayı için bir taban olacağı apaçıktır. Bu tanımdan hem $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve hem de $\mathcal{B}_{n+1} \prec \mathcal{B}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiği anlaşılır. $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanlar dizisinin, aranan dizi olduğunu göstermek istiyoruz. Bu amaçla, öncelikle, bir önceki kanıtlamada yapıldığı gibi, her $n \in \mathbb{N}$ için, iyi sıralanmış Λ_n indis kümeleri aracılığıyla indislenmiş $\mathcal{B}_n^* = \{B_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ yazalım. Bu ailenin herbir üyesinin seçkin noktasını yine $x_{n,\alpha}$ ile yazalım. Şimdi sabit bir $x_0 \in X$ elemanı verildiğinde, $x_0 \in B_{n,\alpha_0} \in \mathcal{B}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $B_{n+1,\alpha_0} \subseteq B_{n,\alpha_0}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşullarını gerçekleyen $\mathcal{B}_0 = \{B_{n,\alpha_0}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. Genelliği bozmaksızın, $B_{n,\alpha_0} \in \mathcal{B}_n^*$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiğini varsayabileceğimize dikkat edilmelidir. Amacımız artık, bu dizinin x_0 noktası için bir yerel taban olduğunu göstermektir. Önce iyi tanımlı

$$\alpha_n = \min\{\alpha \in \Lambda_n : \exists B \in \mathcal{B}_0\,,\ B \subseteq B_{n,\alpha}\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

indislerini belirleyelim. O halde, bir $\mathcal{B}_0$ üyesi kapsayan en küçük indisli $\mathcal{B}_n^*$ üyesi B_{n,α_n} olur. $B_{n+1,\alpha_{n+1}} \subseteq B_{n,\alpha_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiğini gözlemek güç değildir. Gerçekten, $\mathcal{B}_0$ dizisinin azalanlığı nedeniyle, herhangi $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde, öyle bir $(m, B) \in \mathbb{N} \times \mathcal{B}_m^*$ vardır ki $\mathcal{B}_0 \ni B \subseteq B_{n,\alpha_n}$ ve

$B \subseteq B_{n+1,\alpha_{n+1}}$ ve $n+1 < m$ koşulları gerçeklenir. Varsayalım ki $B = B_{m,\gamma_m} \in \mathcal{B}^*_m \cap \mathcal{B}_0$ ve seçkin noktası x_{m,γ_m} olsun. O halde, bir önceki kanıtlamada gözlendiği gibi, x_{m,γ_m} noktasını $\mathcal{B}^*_n$ ve $\mathcal{B}^*_{n+1}$ ailelerinde içeren en küçük indisli üyeler, sırasıyla B_{n,α_n} ve $B_{n+1,\alpha_{n+1}}$ olurlar ve bir önceki kanıtlamadaki *iii)* koşulu nedeniyle, istenen $B_{n+1,\alpha_{n+1}} \subseteq B_{n,\alpha_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kapsamaları bulunur. Şimdi şu irdelemeleri yapalım: Eğer uygun bir $n \in \mathbb{N}$ için $B_{n+1,\alpha_{n+1}} = B_{n,\alpha_n}$ gerçekleniyorsa, B_{n,α_n} kümesi, x_{m,γ_m} seçkin noktasını içeren hiç bir öz açık kümeyi kapsayamayacaktır ve dolayısıyla uzayın öz T_1 olması ve yine *iii)* koşulu nedeniyle ve $x_0 \in B_{n,\alpha_n}$ olduğu için, x_{m,γ_m} noktasını içeren her açık kümede x_0 bulunacaktır, kolaylıkla $\overline{\{x_0\}} \cap \overline{\{x_{m,\gamma_m}\}} \neq \emptyset$ ve sonuçta $\overline{\{x_0\}} = \overline{\{x_{m,\gamma_m}\}}$ bulunur. O halde, bu uzayda x_0 noktasını içeren her açık küme, $x_0 \in \overline{\{x_{m,\gamma_m}\}}$ nedeniyle, B_{n,α_n} ile kesişir ve sonuçta bu kesişim B_{n,α_n} kümesine eşit olacağından, sonuçta bu açık küme bir $\mathcal{B}_0$ üyesini kapsar. Eğer $B_{n+1,\alpha_{n+1}} \subset B_{n,\alpha_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçekleniyorsa, $\{B_{n,\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, yetkin azalan, tekdüze ve $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,\alpha_n}$ nedeniyle ve gereklik varsayımı gereği, $\mathcal{B}$ sayılabilir mertebeli bir taban olduğundan, x_0 için bir yerel taban olur ve sonuçta bu dizinin her üyesi uygun bir $\mathcal{B}_0$ üyesini kapsadığı için, $\mathcal{B}_0$ ailesi, bu nokta için bir yerel taban olur.

Yeterlik: X uzayında, hipotezdeki koşulları yerine getiren bir $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanlar dizisi tanımlı olsun. Bu taktirde, tıpkı bir önceki teoremin kanıtlamasında yapıldığı gibi, indis kümeleri iyi sıralanmış olan ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\mathcal{U}_n = \{U_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ açık örtülüşleri tanımlıdır:

i) $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{B}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$,
ii) $\exists x_{n,\alpha} \in U_{n,\alpha} - \bigcup_{\beta<\alpha} U_{n,\beta} \quad (\forall (n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda_n)$
iii) $n < m,\ x \in U_{m,\alpha} - \bigcup_{\beta<\alpha} U_{m,\beta}$ ve $x \in U_{n,\gamma} - \bigcup_{\beta<\gamma} U_{n,\beta}$ ise $U_{m,\alpha} \subseteq U_{n,\gamma}$.

$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ ailesinin X uzayı için bir taban olduğu apaçıktır. Bu taban X uzayı için sayılabilir mertebeli bir tabandır, çünkü $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi yetkin azalan, tekdüze ve $x \in \bigcap \mathcal{B}'$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_n$ ailesinde, bir $\mathcal{B}'$ üyesini kapsayan en küçük indisli üye $B_{n,\alpha_n} \in \mathcal{U}_n$ iyi tanımlı olduğundan, kolaylıkla, tıpkı bir önceki teoremde yapıldığı gibi $B_{n+1,\alpha_{n+1}} \subseteq B_{n,\alpha_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kanıtlayarak, $\mathcal{B}'$ ailesinin x noktası için bir yerel taban olduğu görülür. □

Tanım 2: Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız, her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, aşağıdaki koşul gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık incelmeler dizisi tanımlanabilirse **θ-incelebilir uzay** ve $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisine ise $\mathcal{U}$ örtülüşünün bir **θ-incelmesi** denir:

$$\forall x \in X \ , \ \exists n_x \in \mathbb{N} \ , \ \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x}) < \omega_0 \ .$$

Uyarı: Her ötetıkız uzayın θ-incelebilir olduğu apaçıktır. Ötetıkız olamayan θ-incelebilir T_2 uzaylarının varlığı için, **Handbook of Set-Theoretic Topology** başlıklı ansiklopedik kitabın, Dennis Burke tarafından yazılan dokuzuncu bölümüne başvurulmalıdır. θ-incelebilir uzaylar, olağanüstü kalabalık bir sınıf olan alt yantıkız uzaylar sınıfını bile kapsamaktadır, bkz. Bölüm 4, Burke Teoremi 2.

θ-incelebilir uzayların, ötetıkız uzayların pek çok özelliğini genelleştirdiği, aşağıdaki sonuçlardan anlaşılacaktır:

Yardımcı Teorem 1:*Bir uzayın θ-incelebilir olabilmesi için g.y.k., uzayın her açık $\mathcal{U}$ örtülüşüne karşılık,*

$$i) \ \mathcal{G}_n \prec \mathcal{U} \ , \ ii) \ ord(x, \mathcal{G}_n) < \omega_0 \ (\forall x \in K_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

koşulları gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi ile sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşünün varlığıdır.
Kanıtlama:X uzayı θ-incelebilir ve $\mathcal{U}$ bu uzayda açık bir örtülüş olsun. $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi $\mathcal{U}$ örtülüşünün θ-incelmesi ise, her $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için, $K_{n,m} = F_m(\mathcal{G}_n) = \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n) \leq m\}$ kapalı kümelerinin oluşturduğu sayılabilir üyeli örtülüş $\mathcal{K} = \{K_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ aranandır, çünkü apaçıktır ki, her (n,m) sıralı ikilisi ve her $x \in K_{n,m}$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n) < \omega_0$ gerçeklenmektedir. Tersine, X uzayının her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşı, sözü edilen $i)$ ve $ii)$ niteliklerine sahip kapalı bir $\mathcal{K}$ örtülüşü ile $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ örtülüşler dizisi tanımlanabiliyorsa, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ ve $K_n \subseteq \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n) < \omega_0\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ örtülüşler dizisinin, $\mathcal{U}$ örtülüşünün bir θ-incelmesi olduğu anlaşılır. □

Yardımcı Teorem 2:*θ-incelebilir bir uzayda, kapalı bir kümenin tıkız olabilmesi için g.y.k. sayılabilir tıkız olmasıdır.*
Kanıtlama: Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. X sayılabilir tıkız ve θ-incelebilir bir uzay olsun. Bu uzayın tıkız olduğunu göstermek yeterli olacaktır, çünkü kolayca gözlenebileceği gibi θ-incelebilir bir uzayın kapalı alt uzayları da θ-incelebilirdir. X uzayında herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün sayılabilir

üyeli bir açık incelmesinin varlığını kanıtlamak kolaydır, çünkü, yukardaki yardımcı teorem nedeniyle, $\mathcal{U}$ örtülüşüne karşılık belirlenen $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşünün herbir K_n üyesi için, sayılabilir tıkız K_n kapalı alt uzayında, $\mathcal{G}_n(K_n) = \{G \cap K_n : G \in \mathcal{G}_n\}$ açık örtülüşünün, noktasal sonlu olduğundan, Bölüm 1, Aquaro Teoremi 1 nedeniyle, sonlu bir alt örtülüşü vardır ve apaçıktır ki bu alt örtülüş $\mathcal{U}$'nun kısmi bir incelmesidir. O halde $\mathcal{U}$'nun sayılabilir üyeli bir *alt örtülüşü* belirlenir. □

Yardımcı Teorem 3:*θ-incelebilir bir uzayın, her açık örtülüşünün indirgenemeyen bir açık incelmesi vardır.*
Kanıtlama:X bir θ-incelebilir uzay ve $\mathcal{U}$ açık bir örtülüş olsun. Yukarıdaki Yardımcı Teorem 1 yardımıyla belirlenen $\mathcal{K}$ ve $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ örtülüşleri için, $\mathcal{G}_n^* = \{G \in \mathcal{G}_n : G \cap K_n \neq \emptyset\}$ açık ailesinin, K_n alt uzayı için noktasal sonlu bir örtülüş olduğundan, Bölüm 1, Yardımcı Teorem 6 nedeniyle, bu alt uzay için, indirgenemeyen bir $\mathcal{G}_n^{**}(\subseteq \mathcal{G}_n^*)$ alt örtülüşü vardır. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n^{**} \prec \mathcal{U}$ incelmesinin, aranan indirgenemeyen incelme olduğu apaçıktır. □

Yardımcı Teorem 4:*Bir uzayın yantıkız bir T_2 uzayı olabilmesi için g.y.k. derlemsel normal, θ-incelebilir bir T_1 uzayı olmasıdır.*
Kanıtlama: Yeterlik koşullarını gerçekleyen bir X uzayının, öncelikle normal bir T_1 uzayı olduğu için düzenli olduğunu gözlemeliyiz. Bu uzayın herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, yukarıdaki kanıtlamalarda yapıldığı gibi, varlığı kanıtlanan $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ kapalı örtülüşünün herbir K_n üyesi için, $\mathcal{G}_n^* = \{G \in \mathcal{G}_n : G \cap K_n \neq \emptyset\}$ açık ailesi bir açık örtülüş olduğundan, Bölüm 1, Yardımcı Teorem 10 nedeniyle, X uzayında σ-kesikli ve açık öyle bir $\mathcal{U}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m} \prec \mathcal{G}_n^* \prec \mathcal{U}$ incelmesi vardır ki, $K_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n \subseteq \bigcup \mathcal{G}_n^* \subseteq \bigcup \mathcal{G}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçekleşir. O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m} \prec \mathcal{U}$ incelmesi, düzenli X uzayında, σ-kesikli ve açık bir örtülüştür, dolayısıyla Bölüm 2'deki Micheal Teoremi 1 nedeniyle X uzayı yantıkız olur. □

Sonuç:*X bir T_2 uzayı ise, aşağıdakiler eşdeğerdir:*
i) X yantıkızdır.
ii) X derlemsel normal ve ötetıkızdır.
iii) X derlemsel normal ve alt yantıkızdır.
iv) X derlemsel normal ve θ-incelebilirdir.
Kanıtlama: Her alt yantıkız uzayın θ-incelebilir ve her yantıkız T_2 uzayının ise alt yantıkız olduğu Bölüm 4'de kanıtlanacaktır. □

Uyarı: Şimdi sırasıyla açınır uzayların, önce θ-incelmeler ve ardından θ-tabanlar yoluyla iki önemli karakterizasyonunu görelim. Bilindiği gibi, bir X topolojik uzayına, ancak va yalnız, aşağıdaki eşdeğer koşullardan birisini (ve dolayısıyla ikisini de) gerçekleyecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisine sahip ise **açınır(=developable)uzay**, bu açık örtülüşler dizisine ise bu açınır uzayın **açınımı** denilir:

> $i)$Her $x \in X$ için $\mathcal{B}_x = \{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi, X uzayında yerel tabandır,
> $ii)x \in G_n \in \mathcal{G}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşulunu gerçekleyen $G_n \in \mathcal{G}_n$ üyeleri nasıl seçilirse seçilsin, $\mathcal{B}_x = \{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x \in X$ için bir yerel tabandır.

Dikkat edilirse $i) \Rightarrow ii)$ apaçıktır, tersine $ii)$ geçerli iken, bir $x_0 \in X$ elemanı için $\{st(x_0, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi (X, τ) uzayında yerel taban görevi göremeseydi, uygun bir $U_0 \in \tau_{x_0}$ için $\bigcup_{G \in (\mathcal{G}_n)_{x_0}} G = st(x_0, \mathcal{G}_n) \not\subseteq U_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve sonuçta, her $n \in \mathbb{N}$ için $G_n \not\subseteq U_0$ gerçeklenecek biçimde $G_n \in (\mathcal{G}_n)_{x_0}$ üyeleri var olurdu, bu ise, bu belirlenen üyelerin belirlediği $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, $x_0 \in X$ için bir yerel taban olamaması demektir, kısacası $ii)$ varsayımına aykırı düşülmüş olunurdu. Yukarıdaki eşdeğerlik nedeniyle, açınır bir uzayda, açınımın, bu uzay için bir tabanlar dizisi görevi gördüğünü söyleyebiliriz.

Tüm sözdemetrik uzaylar birer açınır uzaydır, gerçekten (X, d) sözdemetrik uzayında $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, 2^{-n}) : x \in X\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ açık örtülüşlerinin dizisi bu uzay için bir açınımdır, çünkü $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$st(x, \mathcal{G}_n) = \bigcup \{S_d(y, 2^{-n}) : x \in S_d(y, 2^{-n})\} \subseteq S_d(x, \frac{2}{2^n})$$

geçerlidir ve sonuçta $0 < \epsilon$ verildiğinde, var olan ve $2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}$ gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ aracılığıyla $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq S_d(x, \frac{2}{2^n}) \subseteq S_d(x, \epsilon)$ geçerli olur.

Öte yandan herhangi bir açınır uzayda, aşağıda Teorem 4'ün kanıtlamasında görüleceği gibi, her $x \in X$ için $\overline{\{x\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n)$ gerçekleştiği için, böyle bir uzayda eğer $y \in \overline{\{x\}}$ ise, $y \in st(x, \mathcal{G}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olur ve sonuçta $x \in st(y, \mathcal{G}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kısacası $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} st(y, \mathcal{G}_n) = \overline{\{y\}}$ ve sonuçta $\{x\} \subseteq \overline{\{y\}}$ yani $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ nedeniyle $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ bulunur. Demek ki açınır bir uzayda, x, y elemanları ne olursa olsun ya $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ ya da $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ koşulları gerçekleşir, çünkü, eğer bir $z \in \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ elemanı varsa $\overline{\{x\}} = \overline{\{z\}} = \overline{\{y\}}$ geçerli olacaktır. O halde tüm açınır uzaylar birer öz T_1 uzayıdır. T_1 uzayı olamayan açınır uzayların var olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten metrik olamayan bir d sözdemetriğinin, örneğin $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde, her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |sinx - siny|$ biçiminde tanımlanan sözdemetriğin belirlediği (X,d) uzayı, T_1 uzayı olamayan bir açınır uzay örneğidir, çünkü bu sözdemetrik uzayda

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X : d(y,x) = 0\} = \{x, x \mp 2\pi, x \mp 4\pi, x \mp 6\pi, ...\} \ (\forall x \in \mathbb{R})$$

nedeniyle, hiçbir tek nokta kümesi kapalı değildir.

Çok önemli bir ayrıntı, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımına sahip açınır bir uzayda bu açınımın

$$\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

koşulunu gerçeklediği varsayımının yapılabileceğini söylemektedir. Gerçekten, X uzayı için, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir açınım ise $\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2^* = \mathcal{G}_1^* \wedge \mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3^* = \mathcal{G}_2^* \wedge \mathcal{G}_3$,... biçiminde tanımlanan $\{\mathcal{G}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisinin, $\mathcal{G}_{n+1}^* \prec \mathcal{G}_n^* \prec \mathcal{G}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve her $x \in X$ için $st(x, \mathcal{G}_n^*) \subseteq st(x, \mathcal{G}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklendiği için, X uzayında bir açınım olduğu anlaşılmaktadır, istenilen nitelikte açınım olarak bu yeni dizi alınır; burada, bilindiği gibi, herhangi bir uzayda, herhangi $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{U}$ açık örtülüşlerinin, $\mathcal{G} \wedge \mathcal{U}$ işareti ile yazılan **ortak incelmesi**, $\{G \cap U : G \in \mathcal{G}, U \in \mathcal{U}\}$ açık örtülüşüne denilir. Bundan böyle, tüm açınır uzayların açınımlarının $\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ koşulunu gerçeklediği varsayılacaktır. Bu Uyarının başında belirtilen ve açınımların gerçeklediği *ii)* koşulu ve Teorem 2 nedeniyle, tüm açınır uzayların, sayılabilir mertebeli bir tabanlarının var olduğu anlaşılır.

Aşağıdaki iki sıradışı teoremin kanıtlanması boyunca, her zaman olduğu gibi $x \in \bigcup \mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ yazılacaktır. Aşağıdaki ilk teorem, Bing Metriklenebilme Teoreminin açınır uzaylar için benzeridir.

Worrell&Wicke Teoremi 3: *Bir uzayın açınır olabilmesi için g.y.k., sayılabilir mertebeli bir tabanı olan, θ-incelebilir bir öz T_1 uzayı olmasıdır.*
Kanıtlama: Açınır uzayların, tüm alt yantıkız uzaylar gibi θ-incelebilir olduğu Bölüm 4'de kanıtlanacaktır. O halde Teorem 2 nedeniyle gereklik apaçıktır. Şimdi amacımız, yeterlikte belirtilen üç koşulu gerçekleyen bir X uzayının bir açınımının varlığını kanıtlamak olacaktır. Bu amaçla, önce bu uzayın,

Teorem 2'de kanıtlandığı gibi, sayılabilir mertebeli tabanı varolan her öz T_1 uzayı için yapıldığı gibi, $\mathcal{B}_{n+1} \prec \mathcal{B}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçekleyen bir özel $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanlar dizisine sahip olduğunu anımsayarak, tümevarım yoluyla, bu uzayda aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi ile, herbirisi sayılabilir üyeli $\mathcal{K}_n = \{K_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşler dizisinin var olduğunu göstermek istiyoruz:

$i)\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{B}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),

$ii)\{\mathcal{U}_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi, $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ örtülüşünün θ-incelmesidir,

$iii)X = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m} = \bigcup \mathcal{K}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),

$iv)$Her $x \in K_{n,m}$ için $1 \leq \text{ord}(x, \mathcal{U}_{n,m}) < \omega_0$,

$v)$Her $G_{n,\alpha} \in \mathcal{G}_n$ için öyle bir $x_{n,\alpha} \in G_{n,\alpha}$ seçkin noktası vardır ki

$x_{n,\alpha} \in K_{i,j}$ ve $i < n, j < n$ ise $G_{n,\alpha} \subseteq \bigcap(\mathcal{U}_{i,j})_{x_{n,\alpha}}$,

$x_{n,\alpha} \notin K_{i,j}$ ve $i < n, j < n$ ise $G_{n,\alpha} \cap K_{i,j} = \emptyset$.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ ve Λ_n indis kümesi iyi sıralanmış bir küme olmak üzere, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_n$ örtülüşleri ile $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n$ kapalı örtülüşleri tanımlanmış olduğunda $\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n$ incelmesi şöyle tanımlanır: Önce $G_{n,0} \in \mathcal{G}_n$ kümesine ait noktaları, tıpkı, bu bölümdeki Teorem 1'de anlatıldığı gibi, $G_{n+1,\alpha} \in \mathcal{B}_{n+1}$ üyelerinden birer seçkin noktayı, $v)$ koşulunu gerçekleyecek ve $G_{n+1,\alpha} \subseteq G_{n,0}$ olacak biçimde ($x_{n+1,\alpha} \in G_{n+1,\alpha}$ seçkin noktası için, $v)$ koşulunu, yalnızca, $x_{n+1,\alpha} \in K_{n,i}$ ($i \leq n$) ya da $x_{n+1,\alpha} \in K_{i,n}$ ($i \leq n$) durumları ile $\notin$ durumları için gerçeklemenin yeterli olacağına dikkat ederek) örteriz. Sonra $G_{n,1} - G_{n,0}$ kümesinin noktaları ile, herbirini $G_{n,1}$ tarafından kapsanacak ve seçkin noktaları benzeri nitelikleri gerçekleyecek biçimde yeni $G_{n+1,\alpha} \in \mathcal{B}_{n+1}$ üyeleri ile örtme işlemini, sonlu ötesi tümevarım yöntemiyle sürdürürüz. İyi sıralanmış Λ_{n+1} indis kümesiyle indislenmiş açık $\mathcal{G}_{n+1} = \{G_{n+1,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_{n+1}}$ örtülüşünü böylelikle tanımladıktan sonra onun $\{\mathcal{U}_{n+1,m}\}_{m=1}^{\infty}$ gibi θ-incelmesi ile, bu θ-incelme tarafından belirlenen $\mathcal{K}_{n+1} = \{K_{n+1,m}\}_{m=1}^{\infty}$ kapalı küme dizisi tanımlanır. Sonuçta, tümevarım yoluyla, hem $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve hem de $\{\mathcal{K}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin yukarıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde tanımlanması işlemi bitirilmiş olur. Şimdi, son aşamada, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, bu uzayın aranan açınımı olduğunu gösterelim. Bunu, olmayana ergi yöntemiyle yapacağız. Var olan uygun bir $x_0 \in X$ noktası için $\{st(x_0, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bu nokta için bir yerel taban olamadığı varsayımının, bizi bir çelişkiye ulaştırması gerektiğini kanıtlayacağız. Demek ki, öyle bir $W_0 \in \tau_{x_0}$ vardır ki $st(x_0, \mathcal{G}_n) \not\subseteq W_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) olur, yani, her $n \in \mathbb{N}$ için, $G_{n,\alpha(n)} \not\subseteq W_0$ olacak biçimde en az bir $G_{n,\alpha(n)} \in (\mathcal{G}_n)_{x_0}$ üyesi vardır. Tüm kanıtlama boyunca

x_0 artık *sabit tutulmuştur.* Şimdi önce, $n_1 = 1$ olmak üzere, herbir $i > 1$ için

$$N_i = \sum_{1 \le k < i} n_k \quad \text{ve} \quad m_i = N_i + n_i$$

doğal sayılarını tümevarımla belirleyelim. $n_1, n_2, ..., n_{i-1}$ doğal sayıları belirlenmiş olduğunda, $N_i = \sum_{1 \le k < i} n_k$ yazarak, $x_0 \in X = \bigcup \mathcal{K}_{N_i} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{N_i,m}$ nedeniyle, $x_0 \in K_{N_i,m}$ gerçeklenecek biçimdeki en küçük m doğal sayısına n_i ve $m_i = N_i + n_i$ diyelim. Özellikle, $1 < i$ için $m_{i-1} = N_{i-1} + n_{i-1} = N_i$ nedeniyle $m_i = m_{i-1} + n_i$ gerçeklendiği gözlenmelidir. O halde, tüm n_i ve m_i doğal sayılarının tümevarımla tanımlanması işlemi bitirilmiş olur ve üstelik $x_0 \in K_{N_i,n_i} - \bigcup_{m<n_i} K_{N_i,m}$ ve $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_{N_i,n_i}$ geçerli olur. Yukarda belirlenen ve $G_{m_i,\alpha(m_i)} \not\subseteq W_0$ gerçekleyen $G_{m_i,\alpha(m_i)} \in (\mathcal{G}_{m_i})_{x_0}$ üyesi için $x_0 \in K_{N_i,n_i} \cap G_{m_i,\alpha(m_i)} \neq \emptyset$ nedeniyle $x_{m_i,\alpha(m_i)} \in G_{m_i,\alpha(m_i)}$ seçkin noktasının, $N_i < m_i$ ve $n_i < m_i$ bilgileri nedeniyle, $v)$ koşulunun bir gereği olarak $x_{m_i,\alpha(m_i)} \in K_{N_i,n_i}$ gerçeklemek zorunda olduğu ve sonuçta her $i > 1$ için $G_{m_i,\alpha(m_i)} \subseteq \bigcap(\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{x_{m_i,\alpha(m_i)}}$ geçerli olduğu anlaşılır. Şimdi, $x_0 \in K_{N_i,n_i}$ nedeniyle, $iv)$ koşulunun gereği olarak $(\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{x_0}$ alt ailesinin sonlu üyeli olduğuna dikkat ederek

$$\mathcal{U}^*_{N_i,n_i} = \{U \in (\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{x_0} : U \not\subseteq W_0\}$$

sonlu üyeli ailesini tanımlayalım. $G_{m_i,\alpha(m_i)} \not\subseteq W_0$ ve $G_{m_i,\alpha(m_i)} \subseteq \bigcap(\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{x_{m_i,\alpha(m_i)}}$ kapsama bağıntısı nedeniyle, kolaylıkla $\emptyset \neq (\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{x_{m_i,\alpha(m_i)}} \subseteq \mathcal{U}^*_{N_i,n_i}$ bulunur. $\mathcal{U}_{N_i,n_i} \prec \mathcal{G}_{N_i} = \mathcal{G}_{m_i-1}$ gerçeklendiğinden, herbir $U \in \mathcal{U}^*_{N_i,n_i}$ üyesini kapsayan tek bir tane $\mathcal{G}_{N_i}$ üyesi belirleyerek, bu belirlenen üst üyelerden oluşan, sonlu üyeli $\mathcal{G}^*_{N_i} \subseteq (\mathcal{G}_{N_i})_{x_0}$ alt ailesini tanımlayalım. Şu önemli ayrıntıya dikkat edilmelidir: $\mathcal{G}^*_{N_i}$ ailesinin sonlu sayıda üyesinin hiçbirisi W_0 tarafından kapsanamaz ve dolayısıyla $\mathcal{G}^*_{N_{i+1}}$ ailesinin herbir üyesi, uygun bir $\mathcal{U}^*_{N_i,n_i}$ üyesi tarafından ve sonuçta uygun bir $\mathcal{G}^*_{N_i}$ üyesi tarafından kapsanır, çünkü $G_{N_{i+1},\alpha} \in \mathcal{G}^*_{N_{i+1}}$ ise $x_0 \in G_{N_{i+1},\alpha} \cap K_{N_i,n_i} \neq \emptyset$ ve $N_i < N_{i+1}$ ve $n_i < N_{i+1}$ nedeniyle $\xi_i = x_{N_{i+1},\alpha} \in G_{N_{i+1},\alpha}$ seçkin noktası aracılığıyla ve $v)$ koşulunun gereği olarak $x_0 \in G_{N_{i+1},\alpha} \subseteq \bigcap(\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{\xi_i}$ olur ve sonuçta her $U \in (\mathcal{U}_{N_i,n_i})_{\xi_i}$ için $U \not\subseteq W_0$ bulunur, kısacası $U \in \mathcal{U}^*_{N_i,n_i}$ gerçekleşir. O halde her $i > 1$ için $x \in \bigcap \mathcal{G}^*_{N_i}$ ve $\mathcal{G}^*_{N_{i+1}} \prec \mathcal{G}^*_{N_i}$ kısmi incelme koşulu yerine geldiği için, Bölüm 1'deki Yardımcı Teorem 11 nedeniyle, her $i > 1$ için

$$G_i \in \mathcal{G}^*_{N_i} \ , \ G_{i+1} \subseteq G_i \ , \ x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$$

koşulları gerçeklenecek biçimde bir $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinin var olduğu anlaşılır. Bu bölümdeki Teorem 2 nedeniyle, bu dizi $x_0 \in X$ noktası için bir yerel taban görevi görür ve sonuçta $G_{i_0} \subseteq W_0$ ve $i_0 > 1$ gerçekleyen bir üye var olmak zorundadır, bu sonuç ise $\mathcal{G}^*_{N_{i_0}}$ ailesinin üyelerinin hiçbirisinin W_0 tarafından kapsanmadığı gerçeğiyle çelişmektedir. Ulaşılan bu çelişki kanıtlamayı bitirir.
□

Tanım 3: Bir (X, τ) uzayında, bir $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ tabanına, ancak ve yalnız, aşağıdaki koşulu gerçeklerse, bu uzay için bir **θ-taban** denilir:

$$\forall x \in X, \forall U \in \tau_x, \exists (n_x, B_x) \in \mathbb{N} \times \mathcal{B}_{n_x}, 1 \leq \mathrm{ord}(x, \mathcal{B}_{n_x}) < \omega_0, B_x \subseteq U \ .$$

Worrell&Wicke Teoremi 4: *Bir uzayın açınır olması için g.y.k. θ-tabanlı yetkin bir uzay olmasıdır.*
Kanıtlama: $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımına sahip olan açınır bir X uzayında her $A \subseteq X$ alt kümesi için $\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} st(A, \mathcal{G}_n)$ gerçeklenir, çünkü $x \in \overline{A}$ için g.y.k., her $n \in \mathbb{N}$ için $\emptyset \neq A \cap st(x, \mathcal{G}_n)$ yani $x \in st(A, \mathcal{G}_n)$ gerçeklenmesidir. O halde, açınır uzaylarda her kapalı küme bir $\mathcal{G}_\delta$ türü kümedir. Üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için, $\{\mathcal{U}_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi, $\mathcal{G}_n$ örtülüşünün bir θ-incelmesi ise, $x \in X$ ve $W \in \tau_x$ verildiğinde $st(x, \mathcal{G}_{n_x}) \subseteq W$ olacak biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır ve $\{\mathcal{U}_{n_x,m}\}_{m=1}^{\infty}$ örtülüş dizisi, $\mathcal{G}_{n_x}$ örtülüşünün bir θ-incelmesi olduğundan $\mathrm{ord}(x, \mathcal{U}_{n_x,m_x}) < \omega_0$ gerçeklenecek biçimde bir $m_x \in \mathbb{N}$ var ve her $U \in (\mathcal{U}_{n_x,m_x})_x$ için, $x \in U \subseteq st(x, \mathcal{U}_{n_x,m_x}) \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n_x}) \subseteq W$ bulunur, kısacası $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m}$ ailesi X uzayı için bir θ-taban olur. Şimdi, tersine, X uzayında, $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ ailesi bir θ-taban olsun ve üstelik X uzayı yetkin olsun. O halde tüm alt uzaylar da birer yetkin uzay olur. Bilindiği gibi

$$X_{n,m} = F_m(\mathcal{B}_n) = \{x \in X : \mathrm{ord}(x, \mathcal{B}_n) \leq m\} \quad ((n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

kümeleri kapalıdır ve üstelik herbir $\mathcal{B}_n$ taban ailesi $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots$ kapalı kümelerinin her birisi için noktasal sonlu bir açık örtülüşdür. O halde Bölüm 1, Yardımcı Teorem 8 nedeniyle, her $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ doğal sayı ikilisine karşılık ve her $x \in X_{n,m}$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{B}_n) \leq m$ gerçeklendiğine dikkat ederek

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,m,1} &\cup \mathcal{K}_{n,m,2} \cup \ldots \cup \mathcal{K}_{n,m,m} \prec \mathcal{B}_n \ , \\ X_{n,m} &= \bigcup_{1 \leq k \leq m} (\bigcup \mathcal{K}_{n,m,k}) \end{aligned}$$

koşulları gerçeklenecek biçimde, $X_{n,m}$ alt uzayında ve dolayısıyla X uzayında kapalı-kesikli olan $\mathcal{K}_{n,m,k}$ aileleri vardır ve üstelik $K \in \mathcal{K}_{n,m,k}$ için $\mathrm{ord}(K, \mathcal{B}_n) =$

k olur ve $B \in \mathcal{B}_n$ ve $K \cap B \neq \emptyset$ ise $K \subseteq B$ gerçekleşir. Şimdi son aşamada, $\mathcal{B}_n = \{B_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere

$$\mathcal{G}_{n,m,k} = \{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_{n,\alpha} : \Lambda \in \mathcal{P}_k(\Lambda)\} \cup \{X - \bigcup \mathcal{K}_{n,m,k}\}$$

açık küme ailelerini tanımlarsak, bunların herbirisinin X uzayı için bir örtülüş olduğunu görebiliriz, çünkü her $x \in \bigcup \mathcal{K}_{n,m,k}$ için, tek türlü belirlenebilen bir $K \in \mathcal{K}_{n,m,k}$ ve $\Lambda(K) \in \mathcal{P}_k(\Lambda_n)$ aracılığıyla $x \in K \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda(K)} B_{n,\alpha} \subseteq \bigcup \mathcal{G}_{n,m,k}$ olur, çünkü $\bigcap_{\alpha\in\Lambda(K)} B_{n,\alpha} \in \mathcal{G}_{n,m,k}$ gerçeklenir. Üstelik her $x \in \bigcup \mathcal{K}_{n,m,k}$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_{n,m,k}) = 1$ geçerlidir. Artık, $\{\mathcal{G}_{n,m,k} : (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, 1 \leq k \leq m\}$ açık örtülüşler dizisinin, X uzayı için bir açınım olduğunu gözlemek güç değildir. Gerçekten $x \in X$ ve $U \in \tau_x$ alındığında, $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ tabanlar dizisi X uzayında bir θ-taban olduğundan, öyle bir $(n_x, B_x) \in \mathbb{N} \times (\mathcal{B}_{n_x})_x$ ikilisi vardır ki $\mathrm{ord}(x, \mathcal{B}_{n_x}) = m_x$ ve $B_x \subseteq U$ olur. O halde $x \in X_{n_x,m_x}$ ve $x \in \bigcup \mathcal{K}_{n_x,m_x,m_x}$ olur ve tek türlü belirlenebilen bir $\Lambda_x \in \mathcal{P}_{m_x}(\Lambda_{n_x})$ aracılığıyla $st(x, \mathcal{G}_{n_x,m_x,m_x}) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda_x} B_{n_x,\alpha} \subseteq B_x \subseteq U$ bulunur. Demek ki X bir açınır uzaydır. □

Bu bölümü θ-tabanların varlığına ilişkin ve H.Bennett&D.Lutzer ikilisi tarafından 1972 yılında verilen aşağıdaki karakterizasyonla kapatıyoruz, b.k.z.[9]. Teorem 4'ün, bu sonucun kolay bir çıkarsaması olduğu özellikle gözlenmelidir. Şimdi, gerekli olan şu tanımı verelim: Bir X uzayında bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık aileler dizisine (burada $\mathcal{G}_n$ ailelerinin birer örtülüş olmaları *gerekmemektedir*), ancak ve yalnız, her $x \in X$ için, $\mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in \bigcup \mathcal{G}_n\}$ olmak üzere, $\mathcal{B}_x = \{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}_x}$ ailesi, x elemanı için bu uzayda bir yerel taban oluyorsa, bir **sözde açınım** denilir ve bir sözde açınımı var olan bir topolojik uzaya ise **sözde açınır uzay** denilir. Burada, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ açık ailesinin X uzayında bir örtülüş olduğu ve ayrıca her açınır uzayın sözde açınır olduğu apaçıktır. Ayrıca sözde açınır bir uzayda tüm alt uzayların da sözde açınır olduğu kolayca görülmektedir.

Bennett&Lutzer Teoremi:*Bir uzayın bir θ-tabanının varlığı için g.y.k. sözde açınır uzay olmasıdır.*

Kanıtlama:$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ ailesi, bir X uzayı için , bir θ-tabanı ise, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{B}_n = \{B_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ olmak üzere

$$\mathcal{B}_{n,m} = \{\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B_{n,\alpha} : \Lambda \in \mathcal{P}_m(\Lambda_n)\} \quad ((n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

ailelerinin oluşturduğu $\{\mathcal{B}_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ açık aileleri dizisinin, uzay için bir sözde açınım olacağı apaçıktır. Bu nedenle, yalnızca yeterlik gösterilmelidir. Şimdi, X sözde açınır uzayında $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık aileleri dizisi bir sözde açınım olsun. Bir kaç aşamalı bir kanıtlamanın sonucunda bu ailelerden yararlanarak, bu uzayın bir θ-tabanının tanımlanabildiğini göreceğiz. Önce, ilk aşamada, her $n \in \mathbb{N}$ için, indis kümeleri iyi sıralanmış Λ_n olan $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ aileleri aracılığıyla aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ailesinin tanımlanabildiğini gösterelim:

$i)$Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{A}_n$ ailesi $\bigcup \mathcal{A}_n$ kümesinde kapalı-kesiklidir,

$ii)\forall x \in X,\ \forall U \in \tau_x,\ \exists(n_x, A_x) \in \mathbb{N}\times\mathcal{A}_{n_x},\ x \in A_x \subseteq U.$

Gerçekten de, herbir $(n,\alpha,m) \in \mathbb{N}\times\Lambda_n\times\mathbb{N}$ sıralı üçlüsü için

$$A_{n,\alpha}(m) = (G_{n,\alpha} - \bigcup_{\beta<\alpha} G_{n,\beta}) \cap \Big((\bigcup \mathcal{G}_m) - \bigcup\{G \in \mathcal{G}_m : G \not\subseteq G_{n,\alpha}\}\Big)$$

kümelerini ve $\mathcal{A}_{n,m} = \{A_{n,\alpha}(m)\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ ve $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{n,m}$ ailelerini tanımlayalım. Dikkat edilirse, herbir (n,α,m) üçlüsü için

$$A_{n,\alpha}(m) = G_{n,\alpha} \cap (\bigcup_{G\in\mathcal{G}_m} (G - \bigcup_{\beta<\alpha} G_{n,\beta})) \cap (X - \bigcup\{G \in \mathcal{G}_m : G \not\subseteq G_{n,\alpha}\})$$

gerçekleşir. Şimdi $x \in U \in \tau$ olsun. Uzayın sözde açınırlığı nedeniyle $st(x, \mathcal{G}_{n_x}) \subseteq U$ olacak biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}_x$ var ve $\alpha_x = \min\{\alpha \in \Lambda_{n_x} : x \in G_{n_x,\alpha}\}$ olmak üzere, var olan ve $st(x, \mathcal{G}_{m_x}) \subseteq G_{n_x,\alpha_x}$ gerçekleyen $m_x \in \mathbb{N}_x$ aracılığıyla şunlar gözlenir:Herhangi bir $G_{m_x,\alpha} \in \mathcal{G}_{m_x}$ üyesi için, eğer $x \in G_{m_x,\alpha} \in \mathcal{G}_{m_x}$ ise, zorunlu olarak $G_{m_x,\alpha} \subseteq st(x,\mathcal{G}_{m_x}) \subseteq G_{n_x,\alpha_x}$ gerçeklendiğinden, sonuçta $x \notin \bigcup\{G \in \mathcal{G}_{m_x} : G \not\subseteq G_{n_x,\alpha_x}\}$ ve dolayısıyla $x \in A_{n_x,\alpha_x}(m_x) \in \mathcal{A}_{n_x,m_x}$ bulunur ve ayrıca $x \in A_{n_x,\alpha_x}(m_x) \subseteq G_{n_x,\alpha_x} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n_x,\alpha} \subseteq G_{n_x} \subseteq st(x,\mathcal{G}_{n_x}) \subseteq U$ gerçekleşir. Demek ki yukarıdaki $ii)$ koşulu geçerlidir. Şimdi de $\mathcal{A}_{n,m}$ ailesinin, $\bigcup \mathcal{A}_{n,m}$ kümesi üzerinde tanımlı olan alt uzayda kapalı-kesikli olduğunu gösterelim. Bir $x \in \bigcup \mathcal{A}_{n,m}$ elemanı alınsın. O halde $x \in A_{n,\alpha_x}(m)$ olacak biçimde bir $\alpha_x \in \Lambda_n$ indisi var ve ayrıca

$$x \in A_{n,\alpha_x}(m) \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}_m} (G - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n,\alpha}) = \bigcup_{\beta\in\Lambda_m} (G_{m,\beta} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n,\alpha})$$

olduğundan, $x \in G_{m,\beta_x} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n,\alpha} \neq \emptyset$ yani $G_{m,\beta_x} \not\subseteq \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n,\alpha}$ ve $x \in G_{m,\beta_x}$ koşulları gerçeklenecek biçimde bir $\beta_x \in \Lambda_m$ vardır. Ayrıca herhangi bir $\alpha < \alpha_x$ için $G_{m,\beta_x} \not\subseteq G_{n,\alpha}$ geçerli olacağından (çünkü aksi durumda olanaksız olan $G_{m,\beta_x} \subseteq \bigcup_{\alpha<\alpha_x} G_{n,\alpha}$ bulunurdu), $G_{m,\beta_x} \in \{G \in \mathcal{G}_m : G \not\subseteq G_{n,\alpha}\}$ ve dolayısıyla $G_{m,\beta_x} \cap \bigcup_{\alpha<\alpha_x} A_{n,\alpha}(m) = \emptyset$ gerçekleşir, çünkü, apaçıktır ki $A_{n,\alpha}(m) \cap \bigcup\{G \in \mathcal{G}_m : G \not\subseteq G_{n,\alpha}\} = \emptyset$ geçerlidir. Öte yandan $A_{n,\alpha}(m) \subseteq \bigcup_{G\in\mathcal{G}_m}(G - \bigcup_{\beta<\alpha} G_{n,\beta}) \subseteq X - \bigcup_{\beta<\alpha} G_{n,\beta}$ nedeniyle

$$G_{n,\alpha_x} \cap \bigcup_{\alpha_x<\alpha} A_{n,\alpha}(m) \subseteq \bigcup_{\alpha_x<\alpha} (G_{n,\alpha_x} - \bigcup_{\gamma<\alpha} G_{n,\gamma}) = \emptyset$$

geçerlidir. O halde, bu sonuçlardan $x \in W_x = G_{n,\alpha_x} \cap G_{m,\beta_x} \in \tau$ ve $W_x \cap \bigcup_{\alpha\neq\alpha_x} A_{n,\alpha}(m) = \emptyset$ yani $\operatorname{ord}(W_x, \mathcal{A}_{n,m}) = 1$ bulunur, kısacası $\mathcal{A}_{n,m}$ ailesi $\bigcup \mathcal{A}_{n,m}$ kümesinde hem kesikli bir ailedir, hem de üyeleri bu alt uzayda birer kapalı kümedir, başka bir deyişle yukardaki $i)$ koşulunun da gerçeklendiği anlaşılır.

Şimdi, $\mathcal{U}$ bu sözde açınır uzayın herhangi bir açık örtülüşü olsun. $\mathcal{A}$ ailesinin gerçeklediği $ii)$ özelliği nedeniyle, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A}_n(\mathcal{U}) = \{A \in \mathcal{A}_n : \exists U \in \mathcal{U}, A \subseteq U\}$ olmak üzere, $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ ailesi, X uzayı için bir örtülüştür. Şimdi, herbir $A \in \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ üyesi için iyi belirlenmiş ve $A \subseteq U_A \in \mathcal{U}$ gerçekleyen U_A belirlensin. Yukarıda gözlendiği gibi $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})(\subseteq \mathcal{A}_n)$ alt ailesinin, herhangi bir üyesinin herhangi bir noktasının, $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ ailesinde, bu üye dışında tüm ötekilerle ayrık olan açık bir yerel taban üyesi var olduğundan, herbir $A \in \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ için $A \subseteq W_A \subseteq U_A$ ve $W_A \cap \bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U}) = A$ koşulları gerçeklenecek biçimde, X uzayında açık olan bir W_A vardır. O halde

$$\mathcal{W}_n = \{W_A : A \in \mathcal{A}_n(\mathcal{U})\} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olmak üzere, $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n \prec \mathcal{U}$ ve ayrıca $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U})) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_n)$ $= \bigcup \mathcal{W} \subseteq X$ nedeniyle, $\mathcal{W}$'nin X uzayında, $\mathcal{U}$ örtülüşünü incelten açık bir örtülüş olduğu anlaşılır. $\mathcal{A}_n$ ailesinin üyeleri ikişerli ayrık olduğundan, her $x \in \bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ için kolayca $\operatorname{ord}(x, \mathcal{W}_n) = 1$ gözlenir, çünkü $2 \leq \operatorname{ord}(x, \mathcal{W}_n)$ olsaydı, uygun ve *farklı* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ üyeleri için $x \in W_{A_1} \cap W_{A_2}$ geçerli olur ve sonuçta $x \in W_{A_1} \cap W_{A_2} \cap (\bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U})) = (W_{A_1} \cap (\bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U}))) \cap (W_{A_2} \cap (\bigcup \mathcal{A}_n(\mathcal{U}))) = A_1 \cap A_2 = \emptyset$ bulunurdu. O halde $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$ açık örtülüşünün aşağıdaki özelliklere sahip olduğu anlaşılır:

$iii) \forall x \in X,\ \exists n_x \in \mathbb{N},\ 1 = \operatorname{ord}(x, \mathcal{W}_{n_x}),$

$iv) \forall x \in X,\ \forall U \in \tau_x,\ \exists (n_x, W_x) \in \mathbb{N} \times \mathcal{W}_{n_x},\ 1 = \operatorname{ord}(x, \mathcal{W}_{n_x})$ ve $W_x \subseteq U$

Şimdi, artık kanıtlamanın son aşamasına geçebiliriz. Sözde açınır X uzayında, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{G}_n$ ailesi, $X_n = \bigcup \mathcal{G}_n$ açık alt uzayında bir açık örtülüşdür.X_n

alt uzayı sözde açınır olduğundan, yukarıdaki sonuçların gereği olarak, X_n açık alt uzayında ve dolayısıyla X uzayında öyle uygun bir $\mathcal{W}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{W}_{n,m}$ *açık ailesi* vardır ki $\mathcal{W}_n \prec \mathcal{G}_n$ olur ve yukarıdaki *iii*) ve *iv*) koşulları gerçeklenir. O halde $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{G}_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ nedeniyle, kolayca, $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{W}_{n,m}$ ailesinin X uzayında bir θ-taban olduğu anlaşılır. □

Uyarı: Yukarıdaki son teoremde, herhangi bir sözde açınır uzayda, herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün, aşağıdaki koşul gerçeklenecek biçimde bir $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n \prec \mathcal{U}$ açık incelmesinin var olduğu da kanıtlanmıştır, bu gerçek özellikle gözlenmelidir:

$$\forall x \in X \ , \ \exists n_x \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq \text{ord}(x, \mathcal{W}_{n_x}) < \omega_0 \ .$$

Her açık örtülüşünden, bu nitelikte bir incelme elde edebilen topolojik uzaylara **zayıf alt ötetıkız uzay** ya da **zayıf θ-incelebilir uzay** denilir. Demek ki, *tüm sözde açınır uzaylar, zayıf θ-incelebilirdir.*

Uyarı: Bennett&Lutzer, yukarıdaki teoremin kanıtlamasını verdikleri ve Kaynakça'da belirtilen makalelerinde, aşağıdaki şaşırtıcı yanlışı yapmaktadırlar. $X = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde, tüm irrasyonellerin birer yalıtılmış nokta ve herbir $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısının yerel taban ailesinin ise, $I_{r,\epsilon} = (r - \epsilon, r + \epsilon)$ ve $B_{r,\epsilon} = \{r\} \cup (I_{r,\epsilon} - \mathbb{Q})$ olmak üzere, $\mathcal{B}_r = \{B_{r,\epsilon} : \epsilon \in \mathbb{Q}^+\}$ olduğu topolojik uzay gözönüne alınsın. $B_{r,\epsilon} \cap \mathbb{Q} = \{r\}$ $(\forall(r,\epsilon) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+)$ nedeniyle, $\mathbb{Q}$ kümesi bu uzayda, kapalı-kesikli olup, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayının tüm G açık kümeleri için G ve $G - \mathbb{Q}$ kümelerinin, bu yeni uzayda açık oldukları görülmektedir. Bu uzay, düzenli olmayan, ötetıkız, yerel tam metriklenebilen bir Hausdorff uzayıdır. İrrasyonellerin tam metriklenebilen yerel taban üyelerinin varlığı apaçıktır. Öte yandan $(r, \epsilon) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ ne olursa olsun, $B_{r,\epsilon}$ yerel taban kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi, bu küme üzerinde

$$d_r(x, y) = |x - r| + |y - r| \qquad (\forall(x, y) \in B_{r,\epsilon})$$

biçiminde tanımlanan d_r postane metriğinin belirlediği metrik uzay topolojisi ile çakışır çünkü, $d_r(x, r) = |x - r|$ $(\forall x \in B_{r,\epsilon})$ ve her $x \in B_{r,\epsilon} - \{r\}$ noktası için $0 < \epsilon_r < \frac{1}{2}|x - r|$ olmak üzere, $S_{d_r}(x, \epsilon_r) = \{x\}$ gerçekleştiği apaçıktır. $(B_{r,\epsilon}, d_r)$ metrik uzayında tüm Cauchy dizilerinin r rasyonel sayısına yakınsadıklarını görmek kolaydır. Şimdi, aşağıdakini kanıtlayalım. Bu, aynı zamanda bu tez çalışmasında yer alan biricik özgün sonuçtur.

Önerme: *Yukarıdaki X yantıkız olmayan, yerel tam metriklenebilen, ötetıkız bir T_2 uzayıdır.*
Kanıtlama: Her $(r,\epsilon) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ için $[r-\epsilon, r+\epsilon] = \overline{B_{r,\epsilon}}$ nedeniyle bu uzay düzenli (ve sonuçta yantıkız) olamaz. Oysa bu uzay ötetıkızdır. Gerçekten, bu şaşırtıcı uzayın, herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü alındığında, her $r \in \mathbb{Q}$ için $B_{r,\epsilon_r} \subseteq G_r \in \mathcal{G}$ olacak biçimde bir $(\epsilon_r, G_r) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathcal{G}$ ikilisi vardır. Şimdi, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ metrik uzayının $X_0 = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} I_{r,\epsilon_r}$ açık alt uzayını tanımlayalım. X_0 bir metrik uzayın alt uzayı olarak metriklenebilirdir ve sonuçta yantıkızdır, dolayısıyla, bu alt uzayda $\mathcal{U} = \{I_{r,\epsilon_r}\}_{r\in\mathbb{Q}}$ açık örtülüşünün, bu alt uzayda yerel sonlu (ve sonuçta noktasal sonlu) ve sayılabilir üyeli $\mathcal{W}$ gibi bir açık incelmesi vardır. O halde $\mathbb{Q} \subseteq X_0 = \bigcup \mathcal{W}$ olur ve $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ gerçekleşir. Ayrıca, her $r \in \mathbb{Q}$ için $r \in W_r$ ve $\delta_r < \epsilon_r$ ve dolayısıyla $r \in W_r \cap B_{r,\delta_r} \subseteq B_{r,\delta_r} \subseteq B_{r,\epsilon_r} \subseteq G_r$ olacak biçimde bir $(\delta_r, W_r) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathcal{W}$ ikilisi vardır. Üstelik her $W \in \mathcal{W}$ için $W - \mathbb{Q} \subseteq I_{r(W),\epsilon_r(W)} - \mathbb{Q} \subseteq B_{r(W),\epsilon_r(W)} \subseteq G_{r(W)}$ kapsamaları gerçeklenecek biçimde, iyi tanımlı bir $r(W) \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır. O halde

$$\mathcal{W}_1 = \{W - \mathbb{Q} : W \in \mathcal{W}\}\ ,\ \mathcal{W}_2 = \{W_r \cap B_{r,\delta_r}\}_{r\in\mathbb{Q}}$$

aileleri, X uzayının bir açık alt uzayı olan X_0 üzerinde, noktasal sonlu ve açık ailelerdir ve $\mathbb{Q} = X_0 \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup \mathcal{W}_2$ ve $X_0 - \mathbb{Q} = \bigcup \mathcal{W}_1$ nedeniyle $X_0 \subseteq \bigcup \mathcal{W}_2 \cup \bigcup \mathcal{W}_1 \subseteq \bigcup \mathcal{W} \subseteq X_0$ ve sonuçta $X_0 = \bigcup \mathcal{W}_1 \cup \bigcup \mathcal{W}_2$ bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{W}_3 = \{\{x\} : x \in X - X_0\}$ olmak üzere $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3$ ailesinin, X uzayı için yukarıda verilen $\mathcal{G}$ örtülüşünü incelten ve üstelik her $x \in X - X_0$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = 0 < 1 = \mathrm{ord}(x, \mathcal{W}_0)$ ve her $x \in X_0$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{W}_3) = 0 < \mathrm{ord}(x, \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = \mathrm{ord}(x, \mathcal{W}_0) < \omega_0$ gerçekleştiği için, noktasal sonlu bir açık örtülüş olduğu anlaşılmaktadır. □

Bennett&Lutzer ikilisi, bu uzayın θ-incelebilir *olmayan* zayıf θ-incelebilir bir uzay olduğunu iddia etmişlerdir, oysa, bilindiği gibi her ötetıkız uzay θ-incelebilirdir.

Bölüm 4

ALT YANTIKIZ UZAYLAR

Bu bölümde, yantıkızlık kavramının en önemli genelleştirmelerinden birisi ve belki de birincisi olan alt yantıkızlık ile ilgili belli başlı sonuçları göreceğiz. 1966 yılında Rus matematikçi Alexander Arkhangelskii σ-yantıkızlığı aşağıdaki biçimde tanımladı. Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız, her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, aşağıdaki koşul gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi tanımlanabilirse **σ-yantıkız uzay** denir:

$$\forall x \in X,\ \exists (n_x, U_x) \in \mathbb{N} \times \mathcal{U},\ st(x, \mathcal{G}_{n_x}) \subseteq U_x\ .$$

Kolayca görüleceği gibi, yukarıdaki tanımda, $\mathcal{G}_n^* = \mathcal{G}_n \wedge \mathcal{G}_{n-1}^* \wedge \mathcal{U}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ açık örtülüşlerini tümevarımla tanımlayarak

$$i)\quad \mathcal{G}_{n+1}^* \prec \mathcal{G}_n^* \prec \mathcal{G}_1^* \prec \mathcal{U}$$
$$ii)\quad \forall x \in X,\ \exists (n_x, U_x) \in \mathbb{N} \times \mathcal{U},\ st(x, \mathcal{G}_{n_x}^*) \subseteq U_x$$

koşullarının gerçeklendiği kolayca görüleceğinden, genelliği bozmaksızın, σ-yantıkızlığın tanımında $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık tanımlanan $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, daha baştan, tanımda verilen koşulun yanısıra $\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n \prec \mathcal{G}_1 \prec \mathcal{U}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklediğini varsayabiliriz.

Öte yandan, her açık örtülüşünün σ-yerel sonlu ve kapalı bir incelmesinin tanımlanabildiği uzaylara ise **alt yantıkız uzay**(=**subparacompact space**) denilir. Bu kavramı 1969 yılında Amerikalı Dennis Burke tanımlamıştır. Aşağıdaki Burke Teoremi 1, alt yantıkızlık ve σ-yantıkızlık kavramlarının aslında eşdeğer olduğunu açığa çıkartmaktadır. Alt yantıkız uzayların sınıfı olağanüstü kalabalıktır, çünkü tüm açınır uzaylar, tüm yarı-metriklenebilir uzaylar ve tüm düzenli yantıkız uzaylar alt yantıkızdır. Aslında σ-yerel sonlu ve kapalı incelmeler 1950'lerden beri Topolojinin gündemidir. Aşağıdaki iki ünlü ve tanınmış sonuç 1950'lerde kanıtlanmıştır. Burke bu nedenle bu yaygın kavrama özerk bir kimlik kazandırmış, bir ad bulmuş ve bu sınıfa ilişkin önemli sonuçları kanıtlamıştır, b.k.z.[10]. Burke, her alt yantıkız uzayın θ-incelebilir olduğunu da kanıtlamıştır. Bu nedenle θ-incelebilir uzaylara **alt ötetıkız** da denilir.

Bing Teoremi: *Her açınır uzay alt yantıkızdır.*
Kanıtlama: X uzayında $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi bir açınım olsun. Bu uzayın, indis kümesi iyi sıralanmış olan herhangi bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü verildiğinde,

$$K_{n,\alpha} = K(U_\alpha, \mathcal{G}_n) - \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta \qquad ((n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda)$$

olmak üzere, $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı küme ailelerini tanımlayalım. Dikkat edilecek olursa, herhangi bir uzayda herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü ve $A \subseteq X$ alt kümesine karşılık, $K(A,\mathcal{G}) = \{x \in X : st(x,\mathcal{G}) \subseteq A\}$ biçiminde tanımlanan alt küme kapalıdır, çünkü $x \notin K(A,\mathcal{G})$ yani $st(x,\mathcal{G}) = \cup(\mathcal{G})_x \not\subseteq A$ ise, var olan ve $G \not\subseteq A$ gerçekleyen $G \in (\mathcal{G})_x$ kümesi, apaçıktır ki $G \cap K(A,\mathcal{G}) = \emptyset$ gerçekler, tüm bunlardan $\overline{K(A,\mathcal{G})} \subseteq K(A,\mathcal{G})$ bulunur. Üstelik dikkat edilirse, $\mathcal{G}$ bir örtülüş olduğundan

$$K(A,\mathcal{G}) \subseteq st(K(A,\mathcal{G}),\mathcal{G}) = \bigcup_{x\in K(A,\mathcal{G})} st(x,\mathcal{G}) \subseteq A$$

geçerlidir. Bu nedenle, yukarıdaki kapalı kümeler için $K_{n,\alpha} = K(U_\alpha,\mathcal{G}_n) \cap (X - \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta) \subseteq U_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ gerçekleşir. Ayrıca herhangi bir $G \in \mathcal{G}_n$ için $\mathrm{ord}(G,\mathcal{K}_n) \leq 1$ geçerlidir. Gerçekten, bu $G \in \mathcal{G}_n$ için $G \cap K_{n,\alpha} \neq \emptyset$ ve $\beta \neq \alpha$, $\beta \in \Lambda$ ise $G \cap K_{n,\beta} = \emptyset$ gözlemek güç değildir, çünkü $x \in G \cap K_{n,\alpha}$, $y \in G \cap K_{n,\beta}$ ve $\alpha \neq \beta$ geçerli olsaydı, sözgelimi $\alpha < \beta$ durumunda, hem $y \in K_{n,\beta} \subseteq U_\beta - \bigcup_{\gamma<\beta} U_\gamma$ ve hem de $x \in K_{n,\alpha} \subseteq K(U_\alpha,\mathcal{G}_n)$ nedeniyle $y \in G \subseteq st(x,\mathcal{G}_n) \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} U_\gamma$ geçerli olurdu! $\mathcal{G}_n$ bir açık örtülüş olduğundan, $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin X uzayında kesikli olduğu ve $K_{n,\alpha} \subseteq U_\alpha$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda)$ nedeniyle $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \prec \mathcal{U}$ gerçekleştiği anlaşılır. Üstelik $\mathcal{K}$ bir örtülüştür, çünkü herhangi bir $x \in X$ verildiğinde, Λ iyi sıralanmış bir indis kümesi olduğundan, uygun bir $\alpha_x \in \Lambda$ aracılığıyla $x \in U_{\alpha_x} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha$ olur ve öte yandan, $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi uzay için bir açınım olduğundan, $st(x,\mathcal{G}_{n_x}) \subseteq U_{\alpha_x}$ gerçeklenecek biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır, sonuçta $x \in K(U_{\alpha_x},\mathcal{G}_{n_x}) - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha = K_{n_x,\alpha_x} \subseteq \bigcup \mathcal{K}_{n_x}$ olur, kısacası $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{K}_n) = \bigcup \mathcal{K}$ bulunur. □

Bilindiği gibi, bir (X,τ) topolojik uzayına, ancak ve yalnız, X üzerinde tanımlı ve üçgen eşitsizliğini gerçeklemesi gerekmeyen, buna karşılık

$i)$ $d(x,y)=0$ için g.y.k. $x=y$,

$ii)$ $d(x,y)=d(y,x)$ $(\forall x,y\in X)$

$iii)$ $x\notin \overline{A}$ için g.y.k. $0<d(x,A)$

koşullarını gerçekleyen bir $d: X\times X\to[0,\infty)$ fonksiyonu tanımlanabilirse **yarı-metriklenebilir topolojik uzay** ve d fonksiyonuna ise **yarı-metrik** denilir. Bu tür uzaylarda $i)$ ve $iii)$ koşulları nedeniyle, tüm sonlu alt kümelerin kapalı ve sonuçta uzayın bir T_1 uzayı olduğu görülür. Üçgen eşitsizliği koşulu koşulmadığı için $S_d(x,\epsilon)=\{y\in X: d(x,y)<\epsilon\}$ alt kümelerinin birer açık küme olduğu iddiası, ne yazık ki kanıtlanamaz. Buna karşılık, böyle bir uzayda boştan farklı herhangi bir G açık kümesi için $G=\bigcup_{x\in G}S_d(x,\epsilon_x)$ yazılışı gerçeklenir, çünkü her $x\in G$ için, $x\notin K_G=X-G=\overline{K_G}$ nedeniyle $\epsilon_x=d(x,K_G)>0$ ve sonuçta $\emptyset=S_d(x,\epsilon_x)\cap K_G$ yani $S_d(x,\epsilon_x)\subseteq G$ olur. Üstelik, $x\in X$ ve $0<\epsilon$ ne olursa olsun $\epsilon\leq d(x,X-S_d(x,\epsilon))$ nedeniyle $x\notin\overline{X-S_d(x,\epsilon)}=X-\text{iç}S_d(x,\epsilon)$ ve sonuçta $x\in\text{iç}S_d(x,\epsilon)\in\tau$ geçerlidir. Bu nedenle,kolayca $\mathcal{B}_x=\{\text{iç}S_d(x,\epsilon_n):\epsilon_n\downarrow 0^+\}$ ailesinin, yarı-metriklenebilir X uzayında $x\in X$ için yerel taban olduğu gözlenir. Ayrıca, her $A\subseteq X$ alt kümesi ve $0<\epsilon$ için $\overline{A}\subseteq S_d(A,\epsilon)$ olur, dolayısıyla $\epsilon_n\downarrow 0^+$ gerçekleyen $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi aracılığıyla ve $\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_d(A,\epsilon_n)$ bulunur.

McAuley Teoremi [11]: *Her yarı-metriklenebilir uzay alt yantıkızdır.*
Kanıtlama:$\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü, yarı-metriklenebilir X uzayı için bir açık örtülüş olsun, burada Λ iyi sıralanmıştır. X üzerindeki topolojiyi yarı-metrikleyen yarı-metrik d olsun. Şimdi, sabit bir $\epsilon_n\downarrow 0^+$ dizisi ile çalışarak

$$A_{n,\alpha}=\{x\in U_\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta : S_d(x,\epsilon_n)\subseteq U_\alpha\}\quad ((n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\Lambda)$$

kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{A}_n=\{A_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ailelerini tanımlayalım. Apaçıktır ki $A_{n,\alpha}\cap\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta=\emptyset=\overline{A_{n,\alpha}}\cap\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$ olur. Her $(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\Lambda$ için $\overline{A_{n,\alpha}}\subseteq S_d(A_{n,\alpha},\epsilon_n)=\bigcup_{x\in A_{n,\alpha}}S_d(x,\epsilon_n)\subseteq U_\alpha$ ve $\overline{A_{n,\alpha}}\subseteq U_\alpha-\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$ ve ayrıca $U_\alpha\cap\bigcup_{\alpha<\beta}A_{n,\beta}=\emptyset$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_{n,\alpha}$ gözlenir. Herhangi bir $x\in X$ alındığında, var ve tek türlü belirlenebilen $\alpha_x\in\Lambda$ yardımıyla $x\in U_{\alpha_x}-\bigcup_{\alpha<\alpha_x}U_\alpha$ olduğundan, sonuçta $x\in\text{iç}S_d(x,\epsilon_n)\cap U_{\alpha_x}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ ve kolayca, her $\alpha\neq\alpha_x$ için, ister $\alpha<\alpha_x$ isterse $\alpha_x<\alpha$ olsun $(\text{iç}S_d(x,\epsilon_n)\cap U_{\alpha_x})\cap A_{n,\alpha}=\emptyset$ gözlenir, çünkü $\alpha_x<\alpha$ için apaçık olan bu iddia $\alpha<\alpha_x$

için, bir $y \in A_{n,\alpha} \cap \text{iç}S_d(x,\epsilon_n)$ elemanının varlığı varsayımı, $y \in S_d(x,\epsilon_n)$ nedeniyle $x \in S_d(y,\epsilon_n) \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha$ olanaksız sonucunu doğuracağı için geçerlidir. Bu nedenle, herbir $\mathcal{A}_n$ ailesi ve sonuçta $\mathcal{K}_n = \overline{\mathcal{A}_n} = \{\overline{A_{n,\alpha}}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi X uzayında kesiklidir. $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ kapalı ve σ-kesikli ailesi, apaçıktır ki bir örtülüştür ve $\overline{A_{n,\alpha}} \subseteq U_\alpha$ $((n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$ nedeniyle $\mathcal{U}$'nun incelmesidir.
□

Şimdi de Burke'ün özgün sonuçlarını görelim. Anahtar sonuç kuşkusuz Burke Teoremi 1'dir. Önce, gerekli olduğu için aşağıdaki yardımcı sonuçları kanıtlamalıyız.

Yardımcı Teorem 1:σ*-yantıkız bir uzayda, her* $\mathcal{U}$ *açık örtülüşüne karşılık, aşağıdakileri gerçekleyen bir* $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *örtülüş dizisi vardır:*

i)$\mathcal{U}_{n+1} \prec \mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_1 = \mathcal{U} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

*ii)*Her $(x,n) \in X \times \mathbb{N}$ için $st(x,\mathcal{U}_m) \subseteq U_n$ olacak biçimde bir $m \geq n$ doğal sayısı ve $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır.

Kanıtlama:Bölümün başında, σ-yantıkızlık tanımından sonra yapılan uyarıdan yararlanarak ve σ-yantıkızlık hipotezi kullanılarak, tümevarım yardımıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_n(n), \mathcal{U}_{n+1}(n), \mathcal{U}_{n+2}(n), \ldots$ açık örtülüşleri

i)$\mathcal{U}_1(1) = \mathcal{U}$,

ii)$\mathcal{U}_{n+1}(n+1) = \mathcal{U}_{n+1}(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$,

iii)$\mathcal{U}_n(n) \succ \mathcal{U}_{n+1}(n) \succ \mathcal{U}_{n+2}(n) \succ \ldots \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

iv) $m \geq n+1$ için $\mathcal{U}_m(n) \succ \mathcal{U}_m(n+1) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

v) Her $(x,n) \in X \times \mathbb{N}$ için $st(x,\mathcal{U}_m(n)) \subseteq U_n$ olacak biçimde bir $m \geq n$ ve $U_n \in \mathcal{U}_n(n)$ vardır.

koşulları gerçeklenecek biçimde tanımlanabilir, dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ olarak $\mathcal{U}_n(n)$ örtülüşünü almak yeterli olacaktır. □

Yardımcı Teorem 2:X *uzayında, her açık örtülüşün* σ*-kapanış koruyan kapalı bir incelmesi var olsun ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\mathcal{U}_n = \{U_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ *açık örtülüşleri* $U_{n+1,\alpha} \subseteq U_{n,\alpha}$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ *gerçeklesin. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için, aşağıdakiler gerçeklenecek ve* $\mathcal{K}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n,m}$ *yazılışı geçerli olacak biçimde* $\mathcal{K}_n$ *kapalı örtülüşleri vardır:*

i) $\mathcal{K}_{n,m} = \{K_{n,m,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi kapanış korur,

ii) $K_{n,m,\alpha} \subseteq K_{n,m+1,\alpha} \subseteq U_{n,\alpha} \quad (\forall(m,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$,

iii) $K_{n+1,m,\alpha} \subseteq K_{n,m,\alpha} \quad (\forall(m,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$.

Kanıtlama: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ açık örtülüşünün, σ-kapanış koruyan kapalı incelmesi $\mathcal{F}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n,m}$ olsun. Kapanış koruyan sonlu sayıda kapalı küme ailesinin birleşimi de aynı nitelikte olduğundan, genelliği bozmaksızın, tanımlanan bu ailelerin $\mathcal{F}_{n,1} \subseteq \mathcal{F}_{n,2} \subseteq ...$ gerçeklediğini varsayabiliriz. Şimdi de

$$\begin{aligned} K_{n,m,\alpha} &= \emptyset \qquad (m < n, \alpha \in \Lambda), \\ K_{n,m,\alpha} &= \bigcup \{K \in \bigcup_{n \leq k \leq m} \mathcal{F}_{k,m} : K \subseteq U_{n,\alpha}\} \qquad (n \leq m, \alpha \in \Lambda) \end{aligned}$$

kümelerinin, kolayca kapalı olduklarını gözleyerek, $\mathcal{K}_{n,m} = \{K_{n,m,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ ve $\mathcal{K}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n,m} = \bigcup_{m=n}^{\infty} \mathcal{K}_{n,m}$ ailelerinin istenilen nitelikte oldukları anlaşılır. $\square$

Burke Teoremi 1:*Bir X uzayı için aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:*

1)X *σ-yantıkızdır.*

2)X *alt yantıkızdır.*

3)X *'in her açık örtülüşünün σ-kesikli ve kapalı bir incelmesi vardır.*

4)X *'in her açık örtülüşünün σ-kapanış koruyan ve kapalı bir incelmesi vardır.*

Kanıtlama:1) $\Rightarrow$ 3) X uzayı σ-yantıkız olsun. X uzayının, indis kümesi iyi sıralanmış herhangi bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. Yukarıdaki Yardımcı Teorem1 nedeniyle, orada sözü edilen i) ve ii) koşulları gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ örtülüşler dizisi vardır. Şimdi sırasıyla

$$\begin{aligned} \Lambda_x &= \{\alpha \in \Lambda : \exists n \in \mathbb{N}, st(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_\alpha\} \quad (\forall x \in X) \\ A_{n,\alpha} &= \{x \in X : st(x, \mathcal{U}_n) \subseteq U_\alpha \text{ ve } \alpha = \min \Lambda_x\} \quad (\forall (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda) \\ E_{n,m,\alpha} &= \{x \in A_{n,\alpha} : \exists U_n \in \mathcal{U}_n, st(x, \mathcal{U}_m) \subseteq U_n\} \quad (m \geq n) \end{aligned}$$

kümelerini tanımlarsak, $\mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçeği ve ii) koşulu nedeniyle $\Lambda_x \neq \emptyset$ ($\forall x \in X$) olduğunu ve dolayısıyla $\alpha_x = \min \Lambda_x$ indislerinin her $x \in X$ için iyi tanımlandığına dikkat edilmelidir. Ayrıca, $\alpha \neq \beta$ için $A_{n,\alpha} \cap A_{n,\beta} = \emptyset$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_{n,\alpha}$ kolayca gözlenir. Ayrıca ii) koşulunu kullanarak kolayca $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} E_{n,m,\alpha}$ elde edileceği gözlenmelidir. Üstelik, bir $x \in A_{n,\alpha}$ ve $\gamma < \alpha$ için $st(x, \mathcal{U}_m) \subseteq U_\gamma$ gerçeklenecek biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısının varolamayacağına özellikle dikkat edilmelidir. Ayrıca herbir $U \in \mathcal{U}_m$ kümesi, en fazla, tek bir $\alpha \in \Lambda$ için $E_{n,m,\alpha}$ ile kesişebilir. Gerçekten, $x \in U \cap E_{n,m,\alpha}$ ve $y \in U \cap E_{n,m,\beta}$ ve $\alpha \neq \beta$, sözgelimi $\alpha < \beta$

geçerli olsaydı, sonuçta uygun bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ aracılığı ile, $x \in U \cap A_{n,\alpha}$ nedeniyle $U \subseteq st(y,\mathcal{U}_m) \subseteq U_n \subseteq st(x,\mathcal{U}_n) \subseteq U_\alpha$ ve $\alpha < \beta$ olurdu, oysa yukarıda vurgulandığı gibi $y \in E_{n,m,\beta} \subseteq A_{n,\beta}$ nedeniyle $st(y,\mathcal{U}_m) \subseteq U_\alpha$ ve $\alpha < \beta$ gerçekleşmesi kesinlikle olanaksızdır. Demek ki $m \geq n$ olmak üzere $\{E_{n,m,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $\mathcal{K}_{n,m} = \{\overline{E_{n,m,\alpha}}\}_{\alpha\in\Lambda}$ aileleri kesiklidir ve üstelik $\mathcal{U}_m$ açık bir örtülüş olduğu için $\overline{E_{n,m,\alpha}} \subseteq st(E_{n,m,\alpha},\mathcal{U}_m) = \bigcup_{x\in E_{n,m,\alpha}} st(x,\mathcal{U}_m) \subseteq U_n \in \mathcal{U}_n$ nedeniyle, $\mathcal{K}_{n,m} \prec \mathcal{U}_n \prec \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$ gerçeklendiği anlaşılır. Ayrıca $\bigcup\mathcal{K}_{n,m} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{E_{n,m,\alpha}} \supseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_{n,m,\alpha}$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_{n,m,\alpha} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}(\bigcup\mathcal{K}_{n,m}) = \bigcup\mathcal{K} \subseteq X$ nedeniyle kapalı ve σ-kesikli olan $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\mathcal{K}_{n,m}$ ailesinin $\mathcal{U}$ örtülüşünü incelten bir örtülüş olduğu anlaşılır.

4) $\Rightarrow$ 2)Her açık örtülüşünün σ-kapanış koruyan ve kapalı bir incelmesinin var olduğu bir X uzayı ve bu uzayda, her zaman olduğu gibi, indis kümesi yine iyi sıralanmış bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık örtülüşü alalım. Yardımcı Teorem2'den yararlanarak ve öncelikle her $n \in \mathbb{N}$ için $U_\alpha = U_{n,\alpha}(1)$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ ve $\mathcal{U}_n(1) = \{U_{n,\alpha}(1)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tanımlayarak, bu açık örtülüşlere karşılık, hipotez gereği σ-kapanış koruyan va kapalı $\mathcal{K}_n(1) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\mathcal{K}_{n,m}(1)$ incelmelerinin tanımlandığı ve sonra, tümevarım yardımıyla, bir $k \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{U}_{n,k} = \{U_{n,\alpha}(k)\}_{\alpha\in\Lambda}$ olmak üzere $\{\mathcal{U}_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşlerine karşılık, kapalı ve σ-kapanış koruyan $\mathcal{K}_n(k) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\mathcal{K}_{n,m}(k)$ incelmelerinin

i) $\mathcal{K}_{n,m}(k) = \{K_{n,m,\alpha}(k)\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapanış korur,

ii) $K_{n,m,\alpha}(k) \subseteq K_{n,m+1,\alpha}(k) \subseteq U_{n,\alpha}(k) \subseteq U_\alpha \quad (\forall\alpha \in \Lambda)$,

iii) $K_{n+1,m,\alpha}(k) \subseteq K_{n,m,\alpha}(k)$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ yani $\mathcal{K}_{n+1}(k) \prec \mathcal{K}_n(k)$,

gerçeklenecek biçimde tanımlanması durumunda, $\mathcal{U}_n(k+1)$ açık örtülüşünün,

iv) $U_{n,\alpha}(k+1) = U_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} K_{1,n,\beta}(k) \quad (\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$

biçiminde tanımlandığı süreci tümevarımla sürdürerek, tüm $k \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $\{\mathcal{U}_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\mathcal{K}_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ örtülüş dizileri belirlenmiş olur. Herhangi bir $x \in X$ verildiğinde, $x \in U_{\alpha_x} - \bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha$ gerçeklenecek biçimde bir $\alpha_x \in \Lambda$ var ve *ii)* koşulu nedeniyle $\bigcup_{\alpha<\alpha_x} K_{1,n,\alpha}(k) \subseteq \bigcup_{\alpha<\alpha_x} U_\alpha$ geçerli olduğundan $x \in U_{n,\alpha_x}(k+1) \subseteq \bigcup\mathcal{U}_n(k+1)$ bulunur, kısacası $\mathcal{U}_n(k+1)$ ailelerinin gerçekten birer açık örtülüş olduğu gözlenmiş olur. Şimdi

$$F_{n,m,\alpha}(k) = K_{1,n,\alpha}(k) \cap K_{n,m,\alpha}(k+1) \quad (\forall(k,n,m,\alpha) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\Lambda)$$

kapalı kümelerinin ailesi $\mathcal{F}_{n,m}(k) = \{F_{n,m,\alpha}(k)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tanımlansın. Dikkat edilirse, $\alpha < \beta$ için $K_{1,n,\alpha}(k) \cap K_{n,m,\beta}(k+1) = \emptyset$ olduğu ve dolayısıyla sonuçta

$$F_{n,m,\alpha}(k) \cap F_{n,m,\beta}(k) = \emptyset \qquad (\alpha \neq \beta)$$

gerçeklendiği kolayca görülür, çünkü $\alpha < \beta$ ise, $K_{1,n,\alpha}(k) \cap K_{n,m,\beta}(k+1) \subseteq K_{1,n,\alpha}(k) \cap U_{n,\beta}(k+1) \subseteq K_{1,n,\alpha}(k) - \bigcup_{\gamma<\beta} K_{1,n,\gamma}(k) = \emptyset$ olur. Dolayısı ile $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ikilisi ne olursa olsun, ikisi de kapanış koruyan $\mathcal{K}_{1,n}(k) = \{K_{1,n,\alpha}(k)\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $\mathcal{K}_{n,m}(k+1) = \{K_{n,m,\alpha}(k+1)\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı küme aileleri aracılığıyla tanımlandığı için, Bölüm1'de kanıtlandığı gibi, $\mathcal{F}_{n,m}(k)$ kapalı küme ailesi de kapanış korur, üstelik üyeleri ikişerli ayrık olduğu için bu aile kapalı-kesikli olur. O halde $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_{n,m}(k)$ kapalı küme ailesi σ-kesikli olur ve $\mathcal{F}_{n,m}(k) \prec \mathcal{K}_{n,m}(k+1) \prec \mathcal{U}_n(k+1) \prec \mathcal{U}$ nedeniyle $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ gerçekleşir. Son olarak bunun bir örtülüş olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ verildiğinde $x \in K_{m,n,\alpha_x}(k)$ ve k', n', m' doğal sayıları ile $\alpha < \alpha_x$ indisi ne olursa olsun $x \notin K_{n',m',\alpha}(k')$ gerçeklenecek biçimde bir $\alpha_x \in \Lambda$ ve n, m, k doğal sayıları iyi tanımlı ve *iii)* koşulu ve ayrıca $X = \bigcup \mathcal{K}_n(k) = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{K}_{n,m}(k)) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Lambda} K_{n,m,\alpha}(k)$ geçerli olduğundan, sonuçta

$$\begin{aligned} x &\in K_{m,n,\alpha_x}(k) - \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha<\alpha_x} K_{n,m,\alpha}(k) \\ &\subseteq K_{1,n,\alpha_x}(k) - \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha<\alpha_x} K_{n,m,\alpha}(k) = K_{1,n,\alpha_x}(k) - \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\neq\alpha_x} K_{n,m,\alpha}(k) \\ &\subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}(K_{1,n,\alpha_x}(k) \cap K_{n,m,\alpha_x}(k)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m,\alpha_x}(k) \subseteq \bigcup \mathcal{F} \end{aligned}$$

bulunur, yukarda, $K_{1,n,\alpha_x}(k) \cap \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha_x<\alpha} K_{n,m,\alpha}(k) = \emptyset$ nedeniyle geçerli olan

$$K_{1,n,\alpha_x}(k) = K_{1,n,\alpha_x}(k) - \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha_x<\alpha} K_{n,m,\alpha}(k)$$

eşitliği ile, $X = \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{\alpha\neq\alpha_x} K_{n,m,\alpha}(k) \cup K_{n,m,\alpha_x}(k))$ nedeniyle geçerli olan

$$X - \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup_{\alpha\neq\alpha_x} K_{n,m,\alpha}(k)) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{n,m,\alpha_x}(k)$$

bağıntılarından yararlanılmıştır.

3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 4)Apaçıktır.

2) $\Rightarrow$ 1) X alt yantıkız uzayında herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verilsin. $\mathcal{U}$'nun $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ gibi σ-kesikli ve kapalı bir incelmesi vardır. Herhangi bir uzayda, kolayca gözleneceği gibi, kesikli-kapalı bir örtülüşün üyeleri birer kapaçık küme olduklarından, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ ve $K_n = \bigcup \mathcal{K}_n$ olmak üzere, $\mathcal{K}_n$ ailesi K_n kapalı alt uzayında kesikli-kapalı bir örtülüş olduğu için, X uzayında, $K_{n,\alpha} = K_n \cap G_{n,\alpha}$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda)$ gerçeklenecek biçimde $G_{n,\alpha}$ açık kümeleri vardır ve her (n,α) ikilisi için $K_{n,\alpha} \subseteq U_{n,\alpha} \in \mathcal{U}$ olacak biçimde tek türlü belirli bir $U_{n,\alpha}$ belirleyerek, $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha} \cap U_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ ve $\mathcal{U}_n = \{U - K_n : U \in \mathcal{U}, U - K_n \neq \emptyset\}$ aileleri ile $\mathcal{G}_n^* = \mathcal{G}_n \cup \mathcal{U}_n$ açık örtülüşlerini tanımlayalım. $\alpha \neq \beta$ için $K_n \cap G_{n,\alpha} \cap G_{n,\beta} = K_{n,\alpha} \cap K_{n,\beta} = \emptyset$ gözleyerek, her $x \in K_n$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n^*) = \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n) = 1$ olduğu ve tek türlü belirlenebilen uygun bir $\alpha_x \in \Lambda_n$ indisi sayesinde $st(x, \mathcal{G}_n^*) = st(x, \mathcal{G}_n) = G_{n,\alpha_x} \cap U_{n,\alpha_x} \subseteq U_{n,\alpha_x}$ bulunacağı görülür. $X = K_n \cup (X - K_n) \subseteq \bigcup \mathcal{G}_n \cup \bigcup \mathcal{U}_n \subseteq X$ nedeniyle herbir $\mathcal{G}_n^*$ bir açık örtülüştür. O halde $\{\mathcal{G}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi σ-yantıkızlık tanımındaki koşulu gerçekler. □

Sonuç: Her yantıkız T_2 uzayı alt yantıkızdır.
Kanıtlama:Bölüm2'deki ilgili sonuçlardan kolayca elde edilir.

Burke Teoremi 2:*Her alt yantıkız uzay θ-incelebilirdir.*
Kanıtlama: Yukarıdaki teoremin 2) $\Rightarrow$ 1) kanıtlamasında gözlendiği gibi, alt yantıkız bir X uzayında,herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, her $x \in K_n$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n^*) = 1$ koşulu gerçeklenecek biçimde, sayılabilir üyeli $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü ve $\{\mathcal{G}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi tanımlanabildiği için, Bölüm 3, Yardımcı Teorem 1 nedeniyle, X uzayı θ-incelebilirdir. □

Uyarı: Daha önce, yantıkız olmayan ötetıkız T_2 uzaylarının var olduklarını görmüştük, aşağıdaki sonuçlar ise, yantıkızlık, ötetıkızlık ve alt yantıkızlık kavramlarının ikişer ikişer farklı olduğunu açığa çıkartmaktadır. Üstelik, yantıkız olan her T_2 uzayının normal (hatta derlemsel normal) olmasına karşın, alt yantıkız olan her T_2 uzayının normal olması gerekmediği de anlaşılacaktır. Demek ki alt yantıkızlık, yantıkızlıktan çok daha zayıf bir örtülüş özelliğidir.

Burke Teoremi 3:*Alt yantıkız olmayan yerel tıkız ve ötetıkız T_2 uzayları vardır.*

Kanıtlama:$X = (\omega_2 \times \omega_2) - \{(0,0)\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki topolojiyi tanımlayalım. Her $0 < \alpha < \omega_2$ için, $(0,\alpha)$ ve $(\alpha,0)$ elemanlarının yerel taban aileleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(0,\alpha)} &= \{(\omega_2 \times \{\alpha\}) - S : S \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\omega_2 \times \{\alpha\})\} \\ \mathcal{B}_{(\alpha,0)} &= \{(\{\alpha\} \times \omega_2) - S : S \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\{\alpha\} \times \omega_2)\} \end{aligned}$$

olsun, tüm öteki noktalar birer yalıtılmış nokta olsunlar. Kolayca görüleceği gibi, her $0 < \alpha < \omega_2$ için $G_\alpha = \omega_2 \times \{\alpha\}$ ve $U_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_2$ alt kümeleri bu uzayda birer kapaçık kümedir, $G_\alpha \in \mathcal{B}_{(0,\alpha)}$ ve $U_\alpha \in \mathcal{B}_{(\alpha,0)}$ gerçeklenir ve üstelik bu kümeler bu uzayda birer tıkız kümedir, çünkü $(0,\alpha) \in G_\alpha$ olduğu için, G_α kümesini bu uzayda örten her açık örtülüş, zorunlu olarak G_α kümesini üye bulundurmak zorundadır, bu nedenle böyle bir örtülüşün $\{G_\alpha\}$ gibi tek üyeli bir alt örtülüşü vardır. O halde bu uzay yerel tıkız bir T_2 uzayıdır. Bu uzayda, herhangi bir açık örtülüşün, yerel taban üyelerinden oluşan ve her $x \in X$ için $\mathrm{ord}(x, \mathcal{W}) \leq 2$ gerçeklenecek biçimde $\mathcal{W}$ gibi bir açık incelmesi var olduğundan bu uzay aynı zamanda ötetıkızdır. Şimdi, bu uzayın alt yantıkız olamadığını gösterebilmek için şu ara bilgiyi görelim:

Ara Bilgi:$A, B \subseteq X$ alt kümeleri, her $\alpha \in \omega_2$ için $\mathrm{card}(A \cap U_\alpha) \leq \omega_0$ ve $\mathrm{card}(B \cap G_\alpha) \leq \omega_0$ gerçeklerse $X \neq A \cup B$ olur.
Gerçekten, $A \subseteq X$ alt kümesi bu nitelikte olmak üzere $\beta_0 = \{\beta \in \omega_2 : (\alpha,\beta) \in A \cap U_\alpha$ ve $\alpha \in \omega_1\}$ ordinal sayısı apaçıktır ki, $\pi_2((\alpha,\beta)) = \beta$ gerçekleyen izdüşüm fonksiyonu ve her $\alpha \in \omega_1$ için $\beta(\alpha) = \sup \pi_2(A \cap U_\alpha) < \omega_2$ olmak üzere, $\beta_0 = \sup_{\alpha \in \omega_1} \beta(\alpha) < \omega_2$ gerçeklediği için sonuçta $(\omega_1 \times [\beta_0 + 1, \omega_2)) \cap A = \emptyset$ olur. Bu nedenle, eğer $X = A \cup B$ geçerli olsaydı, $\omega_1 \times [\beta_0 + 1, \omega_2) \subseteq B$ bulunur ve sonuçta her $\gamma \in [\beta_0 + 1, \omega_2)$ için $\omega_1 \times \{\gamma\} \subseteq G_\gamma \cap (\omega_1 \times [\beta_0 + 1, \omega_2)) \subseteq G_\gamma \cap B$ olur ve $\omega_1 = \mathrm{card}(\omega_1 \times \{\gamma\}) \leq \mathrm{card}(G_\gamma \cap B) \leq \omega_0$ çelişkisi doğardı. Şimdi bu Ara Bilgi'nin yardımıyla $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha < \omega_2}$ ve $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha < \omega_2}$ olmak üzere, X uzayının, $\mathcal{G} \cup \mathcal{U}$ açık örtülüşünden, hiçbir σ-kesikli incelme örtülüş elde edilemeyeceğini gösterelim. Varsayalım ki $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \prec \mathcal{G} \cup \mathcal{U}$ incelmesi σ-kesikli bir örtülüş olsun. O halde herbir $\mathcal{A}_n$ ailesi X uzayında kesiklidir ve $\mathcal{A}_{n,1} = \{A \in \mathcal{A}_n : \exists \alpha < \omega_2, A \subseteq G_\alpha\}$ ve $\mathcal{A}_{n,2} = \{A \in \mathcal{A}_n : \exists \alpha < \omega_2, A \subseteq U_\alpha\}$ alt aileleri aracılığıyla, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n,1} \cup \mathcal{A}_{n,2}$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{A}_{n,1} \cup \bigcup \mathcal{A}_{n,2})$ gerçekleşir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \bigcup \mathcal{A}_{n,1}$ ve $B_n = \bigcup \mathcal{A}_{n,2}$ yazılırsa $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$ bulunur. Üstelik $\alpha \neq \beta$ için $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset = G_\alpha \cap G_\beta$ olduğundan, sözgelimi herbir $A \in \mathcal{A}_{n,1}$ üyesi, tek

bir G_α tarafından kapsanır. Herbir $0 < \alpha < \omega_2$ için, $(\alpha, 0)$ elemanının $\mathcal{A}_{n,1}$ ailesinde en fazla tek bir üye ile kesişebilen bir yerel taban üyesi var ve bu üye, sonlu bir $S(\subseteq U_\alpha)$ alt kümesi yardımıyla $U_\alpha - S$ biçiminde olduğundan, sonuçta $\mathrm{card}(U_\alpha \cap A_n) < \omega_0$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times (0,\omega_2))$ ve benzer biçimde $\mathrm{card}(G_\alpha \cap B_n) < \omega_0$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times (0,\omega_2))$ olur. O halde $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ yazılırsa, her $\alpha < \omega_2$ için $\mathrm{card}(A \cap U_\alpha) \leq \mathrm{card}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap U_\alpha)) \leq \omega_0$ ve $\mathrm{card}(B \cap G_\alpha) \leq \omega_0$ ve Ara Bilgi nedeniyle $X \neq A \cup B$ bulunur, bu ise, yukarıda bulunan $X = A \cup B$ sonucuyla çelişmektedir. Demek ki yerel yıkız ve ötetıkız T_2 uzayı X alt yantıkız değildir. Bu kanıtlamadaki X uzayını, $1 < \alpha$ gerçekleyen ordinal sayısı için, ω_α kardinal sayısı aracılığıyla tanımlayabileceğimize ve dolayısıyla bu niteliklere sahip, eşyapılı olmayan pek çok uzay tanımlayabileceğimize dikkat edilmelidir. □

Burke Teoremi 4: *Yerel tıkız, ötetıkız ve alt yantıkız olup yantıkız ve normal olmayan T_2 uzayları vardır.*

Kanıtlama: Bir önceki teoremde tanımlanan X uzayı aracılığıyla $Y = X \cap (\omega_2 \times \omega_0) = (\omega_2 \times \omega_0) - \{(0,0)\}$ alt uzayının tüm bu niteliklere sahip olduğunu görmek güç değildir. $Y \subseteq X$ alt kümesinin X uzayında kapaçık bir alt küme olduğu için, Y uzayının ötetıkız ve yerel tıkız bir T_2 uzayı olduğu görülür ve $K_0 = Y - (\omega_2 \times (\omega_0 - \{0\})) = (\omega_2 - \{0\}) \times \{0\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = \omega_2 \times \{n\}$ olmak üzere $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$ gerçekleştiğinden ve birleşime katılanlar, kapalı yantıkız ve T_2 niteliklerine sahip alt uzaylar olduğundan, Y alt yantıkız bir uzay olur. K_n'ler tıkız alt uzay ve K_0 ise kesikli topoloji ile donatılmış yantıkız bir uzay olduğundan, Y uzayının alt yantıkız olduğu kolayca görülür. Oysa, bu uzayda $F_1 = \{0\} \times (0, \omega_0)$ ve $F_2 = (0, \omega_2) \times \{0\}$ ayrık kapalı kümelerini ayıran iki ayrık açık küme tanımlanamadığı için bu T_2 uzayı normal değildir, dolayısı ile kesinlikle yantıkız olamaz. □

Bu bölümde, bundan sonra amacımız, alt yantıkızlığın J. Chaber tarafından 1979 yılında verilen karakterizasyonunu kanıtlamak olacaktır, b.k.z. Chaber Teoremi. Bunun için, öncelikle altı tane, hazırlık niteliğinde ve tümü de J. Chaber tarafından kanıtlanmış olan yardımcı teoremi görmeliyiz. Aşağıdaki tüm sonuçlarda, her zaman olduğu gibi, herhangi bir X uzayında bir $\mathcal{U}$ örtülüşü ve $A \subseteq X$ alt kümesi için $\mathcal{U}(A)$ işareti ile, A kümesi için bir örtülüş olan $\{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi anlaşılacaktır. Ayrıca herhangi bir uzayda, kapalı bir alt uzaydaki yerel sonlu (sırasıyla, kesikli) bir ailenin, uzayda da yerel sonlu (sırasıyla, kesikli) olacağı unutulmamalıdır.

Yardımcı Teorem 3: *Bir X uzayının alt yantıkız olabilmesi için g.y.k., her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, uzayın, herbir K_n alt uzayında $\mathcal{U}(K_n)$ açık örtülüşünün kesikli ve kapalı bir incelmesinin var olduğu, sayılabilir üyeli bir, $\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ kapalı örtülüşünün tanımlanabilmesidir.*
Kanıtlama: Yeterlik apaçıktır. Gereklik ise, X alt yantıkız bir uzay ve $\mathcal{U}$ bu uzayın herhangi bir açık örtülüşü olduğunda, var olan σ-kesikli ve kapalı $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \prec \mathcal{U}$ incelmesi aracılığıyla, $K_n = \bigcup \mathcal{K}_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) kapalı kümelerinin ailesi $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ için, istenilenlerin gerçekleştiğine dikkat ederek elde edilir, çünkü, apaçıktır ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{K}_n \prec \mathcal{U}(K_n)$ incelmeleri K_n alt uzayında kesikli örtülüşlerdir. □

Yardımcı Teorem 4: *Düzenli bir uzayın alt yantıkız olabilmesi için g.y.k. her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, uzayın, her K_n alt uzayında $\mathcal{U}(K_n)$ açık örtülüşünün, bu alt uzayda açık ve kesikli bir incelmesinin var olduğu, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşünün tanımlanabilmesidir.*
Kanıtlama: Gereklik, bir önceki yardımcı teorem ile, $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık belirlenen sayılabilir üyeli $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü ve her $n \in \mathbb{N}$ için, K_n alt uzayında, $\mathcal{K}_n \prec \mathcal{U}(K_n)$ ve $K_n = \bigcup \mathcal{K}_n$ gerçekleyen $\mathcal{K}_n$ incelmesinin üyelerinin, K_n kapalı alt uzayında birer kapaçık küme olmasının kolay bir sonucudur, çünkü bilindiği (ya da kolayca gözlenebileceği) gibi, herhangi bir X uzayında eğer $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kesikli-kapalı bir *örtülüş* ise, $F_\alpha = X - \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) örtülüş kümeleri, X uzayında birer kapaçık kümedir. Yeterlik uzayın ve sonuçta herbir K_n alt uzayının düzenli oluşundan kolayca elde edilir. □

Yardımcı Teorem 5: *Bir X uzayının θ-incelebilir olabilmesi için g.y.k., her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, uzayın, herbir K_n alt uzayında, $\mathcal{U}(K_n)$ açık örtülüşünün noktasal sonlu ve açık bir incelmesinin var olduğu, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşünün tanımlanabilmesidir.*
Kanıtlama: Yukarıdakiler gibi yapılır. □

Tanım: Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız, herhangi iki ayrık F_1 ve F_2 kapalı kümesine karşılık, uzayın, herbir K_n alt uzayında, $K_n \cap F_1$ ve $K_n \cap F_2$ ayrık kapalı kümelerini, iki ayrık açık küme ile ayırabilme koşulu gerçeklenecek biçimde, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü tanımlanabilirse **alt normal uzay** denir. X uzayına, ancak ve yalnız, kapalı-kesikli herhangi bir $\mathcal{F}$ ailesine karşılık, uzayın herbir K_n alt uzayında $\mathcal{F}(K_n)$ kapalı-kesikli ailesinin üyeleri, ikişerli ayrık açık kümelerle ayrılabilme koşulu gerçeklenecek biçimde sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü tanımlanabilirse, **derlemsel alt normal uzay** denir.

Yardımcı Teorem 6: *i) Bir uzayın alt normal olabilmesi için g.y.k. her ayrık kapalı küme çiftinin ayrık G_δ kümeleriyle ayrılabilmesidir.*
ii) Tüm yetkin uzaylar ve tüm alt yantıkız uzaylar derlemsel alt normaldir.
Kanıtlama: *i)* X uzayı alt normal ve F_1 ve F_2 bu uzayda iki ayrık kapalı küme olsun. O halde uzayın öyle bir sayılabilir üyeli $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ örtülüşü ve her $n \in \mathbb{N}$ için, uzayın $G_{n,1}$ ve $G_{n,2}$ açık kümeleri vardır ki $K_n \cap F_i \subseteq K_n \cap G_{n,i}$ $(i = 1,2)$ ve $K_n \cap G_{n,1} \cap G_{n,2} = \emptyset$ gerçekleşir. Sonuçta $F_1 = (F_1 - K_n) \cup (F_1 \cap K_n) \subseteq (X - K_n) \cup G_{n,1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ nedeniyle $F_1 \subseteq E_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_{n,1} \cup (X - K_n))$ ve benzer biçimde $F_2 \subseteq E_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_{n,2} \cup (X - K_n))$ olur ve kolayca, birer G_δ kümesi olan E_1 ve E_2 kümeleri için $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olur, çünkü $A \cup (X - B) = (A \cap B) \cup (X - B)$ özdeşliği nedeniyle, bu son kesişim

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[((G_{n,1} \cap K_n) \cup (X - K_n)) \cap ((G_{n,2} \cap K_n) \cup (X - K_n))] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X - K_n) = \emptyset$$

kümesine eşittir. Şimdi tersine, X uzayında, iki ayrık kapalı küme iki ayrık G_δ kümesi tarafından kapsanabiliyorsa ve F_1 ile F_2 kapalı kümeleri ayrık ise, onları kapsayan ve ayrık olan G_δ kümeleri $E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,i}$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $\emptyset = E_1 \cap E_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_{n,1} \cap G_{n,2})$ nedeniyle, $K_n = X - (G_{n,1} \cap G_{n,2})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kapalı kümelerinin $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi X uzayında bir örtülüş olur ve $K_n \cap G_{n,1} \cap G_{n,2} = \emptyset$, $K_n \cap F_i \subseteq K_n \cap E_i \subseteq K_n \cap G_{n,i}$ $(\forall n \in \mathbb{N}, i = 1,2)$ olduğundan, K_n alt uzayında, ayrık $K_n \cap F_1$ ve $K_n \cap F_2$ kapalı kümeleri iki ayrık açık küme ile ayrılır.
ii) X yetkin bir uzay, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda kapalı-kesikli bir aile olsun. Eğer $\mathcal{F}$ bir örtülüş ise $X = F_\alpha \cup \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta$ ve $F_\alpha \cap \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta = \emptyset$ ve sonuçta $F_\alpha = X - \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ nedeniyle, bu ailenin üyeleri, uzayda birer kapaçık küme olacağından, Λ indis kümesinin, ikişerli ayrık sayılabilir tane alt kümesine bir parçalanışı $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ olmak ve $K_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_n} F_\alpha$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere, uzayın sayılabilir üyeli kapalı örtülüşü $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ için, derlemsel alt normallik tanımındaki koşullar yerine gelir, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{F}(K_n) = \{K_n \cap F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$ ailesinin üyelerini K_n alt uzayında kendileri ile ayırırız.

Eğer $\mathcal{F}$ ailesi bir örtülüş değilse, bu kez, $K_0 = \bigcup \mathcal{F}$ ve uzayın yetkin oluşu nedeniyle var olan ve $X - \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ gerçekleyen kapalı K_n kümeleri aracılığıyla, sayılabilir üyeli $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, K_2, ...\}$ kapalı örtülüşü, tanımdaki koşulu apaçık biçimde yerine getirir, çünkü $\mathcal{F}(K_0) = \mathcal{F}$ olur ve $\mathcal{F}$ ailesinin tüm üyeleri K_0 alt uzayında birer kapaçık kümedirler ve ayrıca $\mathcal{F}(K_n) = \{\emptyset\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçekleşir.
Şimdi, son olarak, X alt yantıkız bir uzay ve $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapalı kümeler ailesi bu uzayda kesikli olsun. Her $\alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha = X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} F_\beta$ tanımlansın. Apaçıktır ki $\text{ord}(U_\alpha, \mathcal{F}) \leq 1$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ koşulunu gerçekleyen $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün, X uzayında var olan σ-kesikli kapalı incelmesi $\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \prec \mathcal{U}$ ise, $\text{ord}(K, \mathcal{F}) \leq 1\,(\forall K \in \mathcal{K})$ gerçekleşir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = \bigcup \mathcal{K}_n$ olmak üzere, $\mathcal{K}_n$ kapalı-kesikli ailesi K_n alt uzayında bir örtülüştür ve apaçıktır ki, $\mathcal{F}(K_n) = \{K_n \cap F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ olmak üzere $\text{ord}(K, \mathcal{F}(K_n)) \leq 1\,(\forall n \in \mathbb{N}, \forall K \in \mathcal{K}_n)$ gerçekleşir. O halde Bölüm 1'deki Micheal Genişleme Teoremi, her $n \in \mathbb{N}$ için, K_n alt uzayında, $\mathcal{K}_n$ kapalı-kesikli örtülüşü ile $\mathcal{F}(K_n)$ ailesine uygulanırsa, $K_n \cap F_\alpha \subseteq K_n \cap G_\alpha$ $(\forall (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda)$ olacak ve ayrıca her $K \in \mathcal{K}_n$ için $\text{ord}(K, \mathcal{F}(K_n)) = \text{ord}(K, \mathcal{G}(K_n)) \leq 1$ gerçeklenecek biçimde, $\mathcal{G}(K_n) = \{K_n \cap G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesini belirleyen, uzayın $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık ailesi vardır. O halde her $K \in \mathcal{K}_n$ için $\text{ord}(K, \mathcal{G}(K_n)) \leq 1$ nedeniyle, $\mathcal{G}(K_n)$ ailesinin üyeleri ikişerli ayrıktır, çünkü sözgelimi $\mathcal{K}_n = \{K_{n,\gamma}\}_{\gamma \in \Lambda_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olmak üzere, $\alpha \neq \beta$ ise, her $\gamma \in \Lambda_n$ indisi için $\text{ord}(K_{n,\gamma}, \mathcal{G}(K_n)) \leq 1$ gerçekleşmesi nedeniyle $K_{n,\gamma} \cap G_\alpha \cap G_\beta = K_{n,\gamma} \cap (K_n \cap G_\alpha) \cap (K_n \cap G_\beta) = \emptyset$ olur ve sonuçta $K_n \cap G_\alpha \cap G_\beta = \bigcup_{\gamma \in \Lambda_n} (K_{n,\gamma} \cap G_\alpha \cap G_\beta) = \emptyset$ bulunur. Tüm bunlar, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı kümeler örtülüşünün, derlemsel alt normallik tanımındaki koşulu gerçeklediğini söylemektedir. □

Aşağıdaki çok önemli yardımcı teoremlerde, bir X uzayında, herhangi bir $\mathcal{G}$ açık kümeler ailesi ve her $n \in \mathbb{N}$ için, alışageldiği gibi, $F_n(\mathcal{G}) = \{x \in X : \text{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n\}$ yazılacaktır. Bu kümelerin kapalı olduğu unutulmamalıdır.

Uyarı: Yukarıdaki yardımcı teorem, tüm açınır uzayların, birer yetkin uzay (ve aynı zamanda birer alt yantıkız uzay) olarak derlemsel alt normal olduğunu söylemektedir. Öte yandan, Burke Teoremi 4'de varlığı kanıtlanan alt yantıkız T_2 uzayı normal olamadığı için derlemsel normal *olmayan* bir derlemsel alt normal uzay örneği oluşturmaktadır. Öte yandan, $X = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ kümesi üzerinde, aşağıdaki biçimde tanımlanan topolojik uzayın, derlemsel normal (hatta normal) *olmayan*, açınır (ve sonuçta derlemsel alt normal), düzenli bir T_2 uzayı olduğu iyi bilinmektedir. Bu kümenin elemanları olan (x, y) sıralı gerçel sayı ikililerinin ikinci bileşenlerinin negatif olmadığı gözlenerek, yerel taban aileleri

$$\begin{aligned} 0 < y \quad &\text{ise} \quad \mathcal{B}_{(x,y)} = \{B_{(x,y)}(\epsilon) = S_{d_2}((x,y),\epsilon) : 0 < \epsilon < y\}\,, \\ y = 0 \quad &\text{ise} \quad \mathcal{B}_{(x,0)} = \{B_{(x,0)}(\epsilon) = S_{d_2}((x,\epsilon),\epsilon) \cup \{(x,0)\} : 0 < \epsilon\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır, burada d_2 ile iki boyutlu Öklid metriği yazılmaktadır. Bu uzaya, iyi bilindiği gibi **Moore-Niemytzki Düzlemi** denilir. $(x, 0)$ noktasının yerel taban ailesinin üyelerinin, O eksenine $(x, 0)$ noktasında teğet olan açık yuvarlara, bu noktadan oluşan tek elemanlı kümeyi ekleyerek oluşturulduğu ve $B_{(x,0)}(\epsilon) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(x, 0)\}$ gerçeklendiği, dolayısıyla, bu uzaydaki tüm yerel taban kümeleri arasında $(x, 0)$ noktasını içerenlerin, ancak ve yalnız $\mathcal{B}_{(x,0)}$ üyeleri olduğu görülmektedir. Bu nedenle $X_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ alt kümesi kapalı-kesiklidir. Bu uzayda, $A = \mathbb{Q} \times \{0\}$ ve $B = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \{0\}$ ayrık kapalı kümelerini içeren ayrık açık kümeler tanımlanamadığı için, bu uzay normal (ve sonuçta derlemsel normal) olamaz. Bunu, ünlü Baire Kategori Teoreminden yararlanarak kanıtlamak olasıdır; oysa, bu uzayın normal olmadığı gerçeği, çok daha kolay bir biçimde, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ yoğun kümesine sahip olduğu için, ayrılabilir olan bu uzayın, $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli kapalı- kesikli bir alt kümesi tanımlanabildiği için, Bölüm 1'deki Jones Yardımcı Teoremi'nden kolayca elde edilir. Oysa, yine kolayca gözlenebileceği gibi

$$\mathcal{G}_n = \{B_{(x,y)}(2^{-n}) : 2^{-n} < y\} \cup \{B_{(x,0)}(2^{-n}) : x \in \mathbb{R}\} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

açık örtülüşler dizisi, bu uzayda bir açınım olduğu için, Moore-Niemytzki Düzlemi açınır (ve düzenli) bir T_2 uzaydır ve sonuçta derlemsel alt normaldir.

Yardımcı Teorem 7: *Bir X uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir:*

i) X derlemsel alt normaldir.

ii) X uzayında, herhangi bir $\mathcal{F}$ kapalı-kesikli ailesine karşılık, uzayın, herbir K_n alt uzayında $\mathcal{F}(K_n)$ kapalı-kesikli ailesinin kesikli-açık genişlemesi var olacak biçimde, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü vardır.

iii) X uzayında $\mathcal{U}$ açık bir aile, $\mathcal{F}$ kapalı-kesikli ailesi $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ gerçekliyorsa, uzayın, herbir K_n alt uzayında $\mathcal{F}(K_n) \prec \mathcal{U}_n \prec kap_{K_n}(\mathcal{U}_n) = \overline{\mathcal{U}_n} \prec \mathcal{U}$ koşulunu gerçekleyen kesikli-açık bir $\mathcal{U}_n$ genişlemesi var olacak biçimde, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü vardır.

iv) X uzayında, herhangi bir kapalı- kesikli $\mathcal{F}$ ailesinin, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_1(\mathcal{G}_n)$

gerçeklenecek biçimde, sayılabilir tane $\mathcal{G}_n$ açık genişlemesi vardır.

Kanıtlama: $i) \Rightarrow iv)$ Eğer X uzayı için $i)$ geçerli ve $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi X uzayında kapalı-kesikli ise, her $n \in \mathbb{N}$ için K_n *alt uzayında* $\mathcal{F}(K_n) \prec \mathcal{U}_n$ ve $\bigcup\mathcal{U}_n \subseteq K_n$ ve $K_n \cap F_\alpha \subseteq U_{n,\alpha}$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ koşulları gerçeklenecek biçimde, uzayın sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü ve üyeleri ikişerli ayrık bir $\mathcal{U}_n$ açık genişlemesi var olduğundan, $\alpha \neq \beta$ için, $K_n \cap U_{n,\alpha} \cap U_{n,\beta} = \emptyset$ ve $\mathcal{U}_n = \{K_n \cap U_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ koşulları gerçeklenecek biçimde $U_{n,\alpha} \in \tau$ açık kümeleri vardır. Şimdi $G_{n,\alpha} = U_{n,\alpha} \cup (X - K_n)$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$ açık kümeleri aracılığıyla $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailelerini tanımlayalım. Her $x \in X$ için, $x \in K_{n_x}$ olacak biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ var ve $\alpha \neq \beta$ için $(K_{n_x} \cap G_{n_x,\alpha}) \cap (K_{n_x} \cap G_{n_x,\beta}) = K_{n_x} \cap, U_{n_x,\alpha} \cap U_{n_x,\beta} = \emptyset$ nedeniyle $2 \leq \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x})$ gerçeklenmesi kesinlikle olanaksızdır, kısacası $x \in F_1(\mathcal{G}_{n_x})$ ve sonuçta $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_1(\mathcal{G}_n)$ bulunur ve üstelik $F_\alpha = (F_\alpha \cap K_n) \cup (F_\alpha - K_n) \subseteq U_{n,\alpha} \cup (X - K_n) = G_{n,\alpha}$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$ nedeniyle her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{F} \prec \mathcal{G}_n$ geçerli olur.

$iv) \Rightarrow i)$Eğer $iv)$ koşulu geçerli ise X uzayı derlemsel alt normal olur, çünkü bu uzayda kapalı-kesikli $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi verildiğinde, $iv)$ koşulu nedeniyle, her $n \in \mathbb{N}$ için, $F_\alpha \subseteq W_{n,\alpha}$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$ ve $\mathcal{F} \prec \mathcal{W}_n = \{W_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_1(\mathcal{W}_n)$ gerçekleyen kesikli-açık genişlemeleri vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mathcal{W}_n$ aileleri X uzayında kesikli olduğu için $\alpha \neq \beta$ ise $\overline{W_{n,\alpha}} \cap \overline{W_{n,\beta}} = \emptyset$ gerçeklendiği gözlenmelidir. $K_n = F_1(\mathcal{W}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ kapalı kümelerinden oluşan $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü, derlemsel alt normallik tanımında belirtilen koşulu gerçekler, çünkü $\mathcal{F}(K_n) = \{F_\alpha \cap F_1(\mathcal{W}_n)\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi için $F_\alpha \cap F_1(\mathcal{W}_n) \subseteq K_n \cap W_{n,\alpha}$ $(\forall(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda)$ olur ve bu üst kümeler K_n alt uzayında ikişerli ayrık açık kümelerdir.

$iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$Apaçıktır, çünkü $iii)$ geçerli ve $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kapalı-kesikli bir aile ise, $U_\alpha = X - \bigcup_{\beta\neq\alpha} F_\beta$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ ve $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ olmak üzere, $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ yani $\mathcal{F} \prec \mathcal{U}$ gerçekleştiğinden, her $n \in \mathbb{N}$ için, K_n alt uzayında, $\mathcal{F}(K_n) \prec \mathcal{U}_n \prec \mathrm{kap}_{K_n}\mathcal{U}_n = \overline{\mathcal{U}_n} \prec \mathcal{U}$ olacak biçimde, X uzayında, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü vardır.

$i) \Rightarrow iii)$$X$ derlemsel alt normal bir uzay, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ bu uzayda kapalı-kesikli bir aile ve $F_\alpha \subseteq U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \Lambda)$ olacak biçimde bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ açık ailesi verilsin. Derlemsel alt normallik nedeniyle uzayın öyle bir, sayılabilir üyeli $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü vardır ki herbir K_n alt uzayında $\mathcal{F}(K_n)$ ailesinin $\mathcal{W}_n$ gibi kesikli-açık bir genişlemesi vardır. O halde X uzayında, var olan uygun $W_{n,\alpha}$ açık kümeleri aracılığıyla $\mathcal{W}_n = \{K_n \cap W_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ve her $(n,\alpha) \in \mathbb{N}\times\Lambda$ için $K_n \cap F_\alpha \subseteq K_n \cap W_{n,\alpha}$ ve $W_{n,\alpha} \subseteq U_\alpha$ varsayabileceğimizi biliyoruz. Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $H_{n,1} = K_n \cap \bigcup\mathcal{F}$ve $H_{n,2} = K_n -$

$\bigcup \mathcal{W}_n = K_n - \bigcup_{\alpha\in\Lambda} W_{n,\alpha}$ ayrık kapalı kümelerini ve $\mathcal{H}_0 = \{H_{n,1}, H_{n,2}\}$ ailesini tanımlayalım. Bu aile K_n kapalı alt uzayında kapalı-kesikli ve derlemsel alt normal bir uzayda tüm kapalı alt uzaylar da derlemsel alt normal olduğu için, K_n alt uzayında, sayılabilir üyeli öyle bir $\mathcal{K}_n = \{K_{n,m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü vardır ki, herbir $K_{n,m}$ alt uzayında $\mathcal{H}_0(K_{n,m}) = \{H_{n,1} \cap K_{n,m}, H_{n,2} \cap K_{n,m}\}$ ailesinin üyelerini ikişerli ayıran ayrık açık kümeler vardır. O halde, uzayda $H_{n,i} \cap K_{n,m} \subseteq K_{n,m} \cap G_{n,i}$ $(i = 1, 2)$ ve $K_{n,m} \cap G_{n\,1} \cap G_{n,2} = \emptyset$ gerçeklenecek biçimde $G_{n,i}$ $(i = 1, 2)$ açık kümeleri vardır. Sonuçta

$$\begin{aligned} K_{n,m} \cap H_{n,1} \subseteq \overline{K_{n,m} \cap G_{n,1}} &= \mathrm{kap}_{K_{n,m}}(K_{n,m} \cap G_{n,1}) \\ &\subseteq K_{n,m} - (K_{n,m} \cap G_{n,2}) \subseteq K_{n,m} - H_{n,2} \end{aligned}$$

bulunur. Artık, her (n, m) doğal sayı ikilisi ve $\alpha \in \Lambda$ için $F_\alpha \cap K_{n,m} \subseteq (W_{n,\alpha} \cap K_{n,m}) \cap H_{n,1} \subseteq K_{n,m} \cap W_{n,\alpha} \cap G_{n,1}$ olduğuna dikkat ederek X uzayının $\mathcal{W}_n^* = \{W_{n,\alpha} \cap G_{n,1}\}_{\alpha\in\Lambda}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ açık küme ailelerini tanımlarsak, $\mathcal{F}(K_{n,m}) \prec \mathcal{W}_n^*(K_{n,m}) \prec \overline{\mathcal{W}_n^*}(K_{n,m}) \prec \mathcal{U}$ gerçeklendiğini gözlemek güç değildir, çünkü, $K_{n,m} - H_{n,2} = K_{n,m} - (K_n - \bigcup \mathcal{W}_n) = K_{n,m} \cap \bigcup \mathcal{W}_n$ olduğu için ve $\mathcal{W}_n = \{K_n \cap W_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesi K_n alt uzayında açık-kesikli olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{K_{n,m} \cap W_{n,\alpha} \cap G_{n,1}} &\subseteq \overline{W_{n,\alpha}} \cap \overline{K_{n,m} \cap G_{n,1}} \subseteq (K_{n,m} - H_{n,2}) \cap \overline{W_{n,\alpha}} \\ &\subseteq (K_{n,m} \cap \bigcup \mathcal{W}_n) \cap \overline{W_{n,\alpha}} = K_{n,m} \cap W_{n,\alpha} \subseteq U_\alpha \end{aligned}$$

geçerlidir ve X uzayının sayılabilir üyeli $\mathcal{K}^* = \{K_{n,m} : (n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ kapalı örtülüşünün, *iii*) koşulunda yazılanları yerine getirdiği anlaşılır. □

Aşağıdaki son yardımcı teorem, derlemsel normal uzayların, Bölüm 1, Yardımcı Teorem 10'da kanıtlanan özelliğinin benzerinin, derlemsel alt normal uzaylar için geçerli olduğunu açığa çıkartmaktadır.

Yardımcı Teorem 8: *X derlemsel alt normal uzayında, herhangi bir noktasal sonlu $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{V}_n \prec \bigcup_{n=1}^\infty \overline{\mathcal{V}_n} \prec \mathcal{U}$ koşulları gerçeklenecek biçimde σ-kesikli bir $\mathcal{V}$ incelmesi vardır.*

Kanıtlama: Önce $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ noktasal sonlu açık örtülüşü için $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n(\mathcal{U})$ gerçeklendiğini ve $\mathcal{K}_1 = \{F_1(\mathcal{U}) \cap U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ailesinin X uzayında kapalı-kesikli olduğunu ve $F_1(\mathcal{U}) = \bigcup \mathcal{K}_1$ ve $\mathcal{K}_1 \prec \mathcal{U}$ gerçeklendiğini gözleyelim. O halde, Yardımcı Teorem 7 *iii*) kullanılarak, uzayın, $X = \bigcup_{n=1}^\infty K_{1,n}$ gerçekleyen sayılabilir üyeli bir $\{K_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ kapalı örtülüşü ve herbir $K_{1,n}$ kapalı alt uzayında, $\mathcal{K}_1(K_{1,n}) \prec \mathcal{W}_{1,n} \prec \overline{\mathcal{W}_{1,n}} \prec \mathcal{U}$ koşulları gerçeklenecek biçimde kesikli-açık $\mathcal{W}_{1,n}$ ailesi vardır, dolayısıyla bu ailelerin X uzayında da kesikli olacağı apaçıktır ve üstelik $F_1(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_1(\mathcal{U}) \cap K_{1,n}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{K}_1(K_{1,n})) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_{1,n})$ gerçekleşir. Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için X uzayında kapalı-kesikli olan

$$\mathcal{K}_{2,n} = \{(F_2(\mathcal{U}) \cap (K_{1,n} - \bigcup \mathcal{W}_{1,n})) \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} U_\alpha : \Lambda' \in \mathcal{P}_2(\Lambda)\}$$

ailelerini tanımlayalım. O halde, yine Yardımcı Teorem 7 *iii*) kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{2,m}(n)$ olacak ve herbir $K_{2,m}(n)$ kapalı alt uzayında $\mathcal{K}_{2,n}(K_{2,m}(n)) \prec \mathcal{W}_{2,m}(n) \prec \overline{\mathcal{W}_{2,m}(n)} \prec \mathcal{U}$ gerçekleşecek ve ayrıca X uzayında $\bigcup \mathcal{K}_{2,n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{2,n}(K_{2,m}(n)) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_{2,m}(n))$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olacak biçimde, uzayın $\{K_{2,m}\}_{m=1}^{\infty}$ kapalı küme örtülüş dizileri ve $K_{2,m}(n)$ alt uzayının kesikli-açık $\mathcal{W}_{2,m}(n)$ aileleri vardır. Bu aileler, apaçıktır ki X uzayında kesiklidirler. Bu yeni aileleri ve kapalı kümeleri (örneğin Cantor köşegen sayma fonksiyonu yardımıyla) yeniden numaralandırarak (bu durumda, ikinci adımdaki tüm kapalı kümelerin yazılış sırası

$$K_{2,1}(1), K_{2,2}(1), K_{2,1}(2), K_{2,3}(1), K_{2,2}(2), K_{2,1}(3), \ldots$$

olacaktır), sonuçta belirlenecek olan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{2,n}$ örtülüşü aracılığıyla

$$F_2(\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_{1,n}) \;\cup\; \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{W}_{2,n}),$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{W}_{1,n}} \;\cup\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{W}_{2,n}} \prec \mathcal{U}$$

gerçekleştiği gözlenir. Bu işlem tümevarım ile sürdürülerek ve örneğin bir sonraki adımda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{K}_{3,n} = \{[F_3(\mathcal{U}) \cap (K_{2,n} - (\bigcup \mathcal{W}_{1,n} \cup \bigcup \mathcal{W}_{2,n}))] \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda'} U_\alpha : \Lambda' \in \mathcal{P}_3(\Lambda)\}$$

kesikli-kapalı kümesi tanımlayarak aranan σ-kesikli ve kapalı $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{V}_n}$ incelmesi tanımlanmış olur. $\square$

Aşağıdaki karakterizasyonun, Bölüm 3'deki Yardımcı Teorem 4'ü genelleştirdiğine dikkat edilmelidir, b.k.z.[12].

Chaber Teoremi: *Bir uzayın alt yantıkız olabilmesi için g.y.k. θ-incelebilir ve derlemsel alt normal olmasıdır.*

Kanıtlama: Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. Yeterlik ise, yeterlik koşullarını gerçekleyen derlemsel alt normal bir uzayda, gözönüne alınan herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün, Yardımcı Teorem 5 nedeniyle, uzayın, herbir K_n kapalı alt uzayında $\mathcal{U}(K_n)$ açık örtülüşünün noktasal sonlu bir $\mathcal{U}_n$ açık incelmesi var olacak biçimde, sayılabilir üyeli bir $\mathcal{K}_{\mathcal{U}} = \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ kapalı örtülüşünün var oluşu ve herbir K_n kapalı alt uzayının derlemsel alt normal olması nedeniyle, bu alt uzaylara Yardımcı Teorem 8'in uygulanabilir olmasının kolay bir sonucudur. □

Bölüm 5

YENİ TIKIZLIK KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde daha önceki bölümlerde verilen kimi örtülüş özelliklerinden yararlanarak, onlar yoluyla, tıkızlık için çeşitli karakterizasyonların belirlendiği tarihsel önemdeki ünlü bazı teoremlerin kanıtlamaları verilecektir. Doğal olarak, önce bu nitelikteki karakterizasyonların birincisi olan ve ötetıkız uzayların önemini açığa çıkaran aşağıdaki ünlü sonuçla başlıyoruz:

Arens & Dugundji Teoremi: *Bir uzayın tıkız olabilmesi için g.y.k. sayılabilir tıkız ve ötetıkız olmasıdır.*
Kanıtlama: Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. Oysa yeterlik, Bölüm1, Yardımcı Teorem 6'nın ardından gelen Uyarı'nın gereği olarak, sayılabilir tıkız bir uzayda her indirgenemez açık örtülüşün sonlu üyeli olmak zorunda kalışının kolay bir sonucudur. □

Bundan sonra, yukarıdaki teoremdeki ötetıkızlık koşulunu büyük ölçüde zayıflaştıran ve Harold H. Wicke ve John M.Worrell tarafından kanıtlanan aşağıdaki sonucu görelim, b.k.z.[13]. Burada, gerekli olduğu için **zayıf** $\delta\theta$-**örtülüş** tanımını vermeliyiz. Bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşüne ,ancak ve yalnız, aşağıdaki koşul gerçeklenecek biçimde,sayılabilir sayıda $\mathcal{G}_n$ alt ailelerin $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ birleşimi olarak yazılabilirse bir **zayıf** $\delta\theta$- **örtülüş** denir:

$$\forall x \in X, \qquad \exists n_x \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq ord(x, \mathcal{G}_{n_x}) \leq \omega_0$$

Ancak ve yalnız her açık örtülüşünden bu nitelikte bir açık incelme elde edebilen bir uzaya **zayıf** $\delta\theta$-**incelebilir uzay** ya da **zayıf altöteLindelöf uzayı** denilir. Her ötetıkız uzayın ve her yanLindelöf uzayın (= her açık örtülüşünün yerel sayılabilir ve açık bir incelmesinin tanımlanabildiği uzay), bu nitelikte olduğu kolayca görülmektedir.

Wicke & Worrell Teoremi: *Bir uzayın tıkız olabilmesi için g.y.k. sayılabilir tıkız ve zayıf altöteLindelöf uzayı olmasıdır.*

Kanıtlama: Sayılabilir tıkız olan bir X uzayının, herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün yukarıda yazılı olan koşulu gerçekleyen bir $\mathcal{G}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ alt örtülüşü var olsun. Bu alt örtülüşün uygun sonlu sayıda üyesinin uzayı örttüğünü göstermek istiyoruz; bunun için $\mathcal{G}^*$'ın sayılabilir sayıda üyesinin uzayı örttüğünü göstermek yeterlidir.

$$A_n = \{x \in X : 0 < ord(x, \mathcal{G}_n) \leq \omega_0\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alt kümelerinin birleşiminin X olduğu apaçıktır. Şimdi, $S(\mathcal{G}^*)$ ailesi, uzayın, sayılabilir sayıda $\mathcal{G}^*$ üyesi ile örtülebilen tüm alt kümelerinin oluşturduğu aileyi göstermek üzere $X \notin S(\mathcal{G}^*)$ varsayılması durumunda bir çelişkiye varmak istiyoruz. Bu varsayım altında varolan ve $A_n \notin S(\mathcal{G}^*)$ gerçekleyen en küçük indisli A_n kümesinin indisi n_1 olsun. Şimdi, tümevarımla, öyle bir monoton artmayan ve üyeleri boştan farklı bir kapalı kümeler dizisi $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$'nin varlığını göstereceğiz ki, kesin artan n_k doğal sayıları sayesinde

$$\bigcup_{n<n_k} (K_k \cap A_n) = \emptyset \quad , \quad K_k \cap A_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*) \qquad (*)$$

gerçekleşecektir. Tüm $A_n (n < n_1)$ kümelerinin $S(\mathcal{G}^*)$ üyesi olmaları nedeniyle, uygun bir sayılabilir üyeli $\mathcal{G}^*(1) (\subseteq \mathcal{G}^*)$ alt ailesi yardımıyla $\bigcup_{n<n_1} A_n \subseteq \mathcal{G}^*(1)$ gerçekleşir. $X \notin S(\mathcal{G}^*)$ varsayımı nedeniyle $K_1 = X - \bigcup \mathcal{G}^*(1)$ kapalı kümesi boş değildir, üstelik

$$\bigcup_{n<n_1} (K_1 \cap A_n) = \emptyset \quad , \quad K_1 \cap A_{n_1} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleştiği görülür. (*) koşullarını gerçekleyen K_k kapalı kümesi ve n_k doğal sayısı tanımlı olsun. Eğer $K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*)$ gerçekleşmeseydi, uygun bir sayılabilir üyeli $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}^*$ alt ailesi için $K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \subseteq \bigcup \mathcal{G}_0$ geçerli olurdu. Oysa

$$(K_k \cap A_{n_k}) - \bigcup \mathcal{G}_0$$

alt kümesi $\mathcal{G}_{n_k}$ açık kümeler ailesi tarafından kapsandığından ünlü Zorn Lemması yardımı ile

$$M \subseteq (K_k \cap A_{n_k}) - \bigcup \mathcal{G}_0 \subseteq st(M, \mathcal{G}_{n_k})$$

$$ve \qquad \forall x \in M \text{ için} \qquad st(x, \mathcal{G}_{n_k}) \cap (M - \{x\}) = \emptyset$$

koşulları gerçeklenecek biçimde bir maksimal M kümesi vardır. Fakat uzay sayılabilir tıkız ve $M \subseteq K_k - \bigcup \mathcal{G}_0 \subseteq \bigcup \mathcal{G}_{n_k}$ olduğu için ,hiç bir ω_0-limit noktası varolmayan M kümesi zorunlu olarak sonlu noktalıdır; üstelik $M \subseteq A_{n_k}$ olduğundan

$$K_k \cap A_{n_k} \subseteq \bigcup \mathcal{G}_0 \cup st(M, \mathcal{G}_{n_k})$$

kullanılarak, sonuçta $K_k \cap A_{n_k} \in S(\mathcal{G}^*)$ çelişkisi doğardı. Demek ki zorunlu olarak

$$K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleşir. Bu son kümenin en az bir A_n ile kesişimi de $S(\mathcal{G}^*)$ üyesi olamaz; bu nitelikteki en küçük indisli A_n kümesinin indisini n_{k+1} ile gösterirsek ,(*) nedeniyle, öncelikle $n_k < n_{k+1}$ gerçekleşir ve üstelik

$$\bigcup_{n<n_{k+1}} (K_k \cap A_n) \subseteq \bigcup \mathcal{G}^*(k+1)$$

olacak biçimde sayılabilir üyeli bir $\mathcal{G}^*(k+1)(\subseteq \mathcal{G}^*)$ alt ailesi vardır. Şimdi

$$K_{k+1} = K_k - \left(\bigcup \mathcal{G}_{n_k} \cup \bigcup \mathcal{G}^*(k+1)\right) (\subseteq K_k)$$

boştan farklı kapalı kümesini tanımlayacak olursak, kolayca

$$\bigcup_{n<n_{k+1}} (K_{k+1} \cap A_n) = \emptyset \qquad , \qquad K_{k+1} \cap A_{n_{k+1}} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleştiği gözlenebilecektir. O halde tümevarımla istenen nitelikte, üyeleri boştan farklı olan ve monoton artmayan $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ kapalı kümeler dizisinin tanımı bitirilmiş olur. X sayılabilir tıkız olduğundan bu dizinin kesişim kümesi boştan farklı olmalıdır oysa

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \cap A_n\right) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n<n_m}(K_k \cap A_n)\right) = \emptyset$$

nedeniyle bu kesişim boştur; bu çelişki kanıtlamayı bitirir. □

Şimdi de daha da zayıflaştırılmış olan ve bir önceki teoremdeki yöntemin benzerini kullanarak Jozef Chaber tarafından kanıtlanan aşağıdaki sonuçları görelim, b.k.z.[14]. Aslında aşağıdaki her iki teorem, onun özgün sonuçlarının daha genelleştirilmiş biçimleridir:

Chaber Teoremi 1:*Bir uzayın tıkız olabilmesi için g.y.k., sayılabilir tıkız olması ve her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık ($\mathcal{U}$'nun bir incelmesi olması gerekmeyen) aşağıdaki koşulu gerçekleyen bir $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ açık örtülüşünün var olmasıdır:*

$$\forall x \in X \ , \ \exists \mathcal{U}(x) \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}) \ , \ \bigcap_{n \in \mathbb{N}(x)} st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$$

Kanıtlama: Burada herbir $x \in X$ elemanı için $\mathbb{N}(x) = \{n \in \mathbb{N} : x \in \cup\mathcal{G}_n\}$ ve herhangi bir A alt kümeler ailesi için $\mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} : \text{card}\mathcal{A}' \leq \omega_0\}$ yazılmıştır. $\mathcal{G}$ bir örtülüş yani $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{G}_n)$ geçerli olduğundan, apaçıktır ki $\mathbb{N}(x) \neq \emptyset$ $(\forall x \in X)$ gerçeklenir. Gereklik apaçıktır, yeterlik gösterilmelidir. Amacımız, hipotezde sözü edilen aracı $\mathcal{G}$ örtülüşünden yararlanarak $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt örtülüşünün varlığını kanıtlamaktır. Kanıtlamayı iki aşamada yapacağız.

Birinci Aşama: Bu aşamada her $\mathcal{G}_n$ açık ailesinin X için bir açık örtülüş olması özel varsayımı altında çalışalım. O halde, her $x \in X$ için $\mathbb{N}(x) = \mathbb{N}$ olur ve hipotezde verilen koşul bu özel durumda $\bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$ biçimine dönüşür. Şimdi $\mathcal{U}$'nun sayılabilir üyeli herhangi bir $\mathcal{U}_0$ alt ailesi için $X \neq \bigcup \mathcal{U}_0$ çalışma varsayımı altında bir çelişkiye varmak istiyoruz. Dikkat edilirse, bir $A \subseteq X$ alt kümesi eğer $\mathcal{U}$'nun sayılabilir üyeli bir alt ailesi tarafından örtülmüyorsa, $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ alt aileleri ne olursa olsun $A - \bigcup \mathcal{U}_1 \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ gerçekleşecektir. Şimdi herhangi bir $x_0 \in X$ alınsın. $\bigcap_{n=1}^{\infty} st(x_0, \mathcal{G}_n) \subseteq$

$\bigcup \mathcal{U}(x_0)$ gerçeklenecek biçimde bir $\mathcal{U}(x_0) \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ var olduğundan, çalışma varsayımının bir gereği olarak, her $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ için $X - \bigcup \mathcal{U}(x_0) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ geçerli ve $X - \bigcup \mathcal{U}(x_0) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(X - st(x_0, \mathcal{G}_n))$ olduğundan sonuçta öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$X - st(x_0, \mathcal{G}_{n_0}) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

gerçekleşir. Bu yöntemi ve çalışma varsayımını ard arda kullanarak, sonlu ötesi tümevarımla, her $\alpha < \omega_1$ için

$$\textbf{Koş}\alpha(\mathbf{1}): \quad x_\alpha \in X - \bigcup_{\beta<\alpha} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta})$$

$$\textbf{Koş}\alpha(\mathbf{2}): \quad X - \bigcup_{\beta\leq\alpha} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta}) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

koşulları gerçeklenecek biçimde, X kümesinde bir $\{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ sonlu ötesi dizisi ile $\mathbb{N}$ kümesinde bir $\{n_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ dizisinin tanımlanabildiğini gösterelim. $x_0 \in X$ ile $n_0 \in \mathbb{N}$ biraz önce belirlenmiştir. Herhangi bir $\alpha_0 < \omega_1$ verildiğinde, her $\alpha < \alpha_0$ için Koşα(1) ve Koşα(2) koşulları gerçeklenecek biçimde $x_\alpha \in X$ ve $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tanımlanmış olduğunda, şimdi

$$\textbf{Koş}(*): \quad X - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha}) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

geçerli olduğunu gösterelim. Eğer α_0 bir ardıl ordinal ise $\alpha_0 = \gamma_0 + 1$ gerçekleyen $\gamma_0 < \omega_1$ vardır ve hem $\gamma_0 < \alpha_0$ ve $\bigcup_{\alpha<\alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha}) = \bigcup_{\alpha\leq\gamma_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha})$ eşitliği ve hem de Koşγ_0(2) koşulu geçerli olduğundan, bu durumda Koş(*) elde edilir; eğer α_0 bir limit ordinal sayı ise, bu kez $\gamma_n < \gamma_{n+1} < \alpha_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçekleyen uygun bir $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi aracılığı ile $\alpha_0 = sup_n \gamma_n$ olur ve herhangi bir $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ için, $\gamma_n < \alpha_0$ sayılarının, Koşγ_n(2) koşullarını gerçeklemesinden yararlanarak

$$\emptyset \neq K_n = \left(X - \bigcup_{\beta\leq\gamma_n} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta})\right) - \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olur ve apaçıktır ki $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ nedeniyle $\bigcup_{\beta\leq\gamma_n} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta}) \subseteq \bigcup_{\beta\leq\gamma_{n+1}} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta})$ ve sonuçta $K_{n+1} \subseteq K_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) bulunur.X sayılabilir tıkız olduğundan, sonuçta bu kapalı küme dizisi için

$$\begin{aligned}\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n &= \left(X - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\beta \leq \gamma_n} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta})\right) - \bigcup \mathcal{U}_0 \\ &= \left(X - \bigcup_{\beta < \alpha_0} st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta})\right) - \bigcup \mathcal{U}_0\end{aligned}$$

olur yani Koş(*) yine elde edilir. O halde

$$x_{\alpha_0} \in X - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha})$$

elemanı vardır ve Koş(*) kullanılarak

$$\emptyset \neq (X - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha})) - \bigcup \mathcal{U}(x_{\alpha_0}) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

olduğundan, sol yandaki fark kümesinin bir üst kümesi olan aşağıdaki fark kümesi için

$$\begin{aligned}&(\quad X - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha})) - \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x_{\alpha_0}, \mathcal{G}_n) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [X - (\bigcup_{\alpha < \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha}) \cup st(x_{\alpha_0}, \mathcal{G}_n))] \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0\end{aligned}$$

ve dolayısıyla var olan uygun bir $n_{\alpha_0} \in \mathbb{N}$ yardımıyla

$$X - \bigcup_{\alpha \leq \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha}) = X - (\bigcup_{\alpha < \alpha_0} st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha}) \cup st(x_{\alpha_0}, \mathcal{G}_{n_{\alpha_0}})) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$$

sonucu herbir $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ için geçerli olur, yani Koşα_0(1) ve Koşα_0(2) koşullarının geçerli oldukları anlaşılır. Sonuçta sonlu ötesi tümevarım inşası bitirilmiş olur. Şimdi ise, var olan sabit ve belirli bir $m \in \mathbb{N}$ aracılığı ile card$\Lambda = \omega_1$ gerçekleyen

$$\Lambda = \{\alpha < \omega_1 : n_\alpha = m\} \subseteq \omega_1 = [0, \omega_1)$$

alt kümesi iyi tanımlıdır. Dikkat edilecek olursa $X_0 = \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ kümesi kesiklidir, çünkü $st(x_\alpha, \mathcal{G}_m) \cap X_0 = \{x_\alpha\}$ $(\forall \alpha \in \Lambda)$ ve sonuçta $\mathrm{card}(G \cap X_0) \leq 1$ $(\forall G \in \mathcal{G}_m)$ geçerlidir; gerçekten $x_\beta \in st(x_\alpha, \mathcal{G}_m)$ ise Koş$\beta(1)$ ve $x_\beta \in st(x_\alpha, \mathcal{G}_{n_\alpha})$ nedeniyle $\beta \leq \alpha$ olur, üstelik $\beta < \alpha$ ve $\beta \in \Lambda$ geçerli olması durumunda, $x_\alpha \in st(x_\beta, \mathcal{G}_m) = st(x_\beta, \mathcal{G}_{n_\beta}) \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} st(x_\gamma, \mathcal{G}_{n_\gamma})$ bulunurdu, bu ise Koş$\alpha(1)$ koşuluna aykırıdır. O halde $\mathcal{G}_m$ açık örtülüşüne ve X_0 alt kümesine karşılık Bölüm 1, Aquaro Teoremi 2'deki sonlu alt küme belirlenemez. Bu çelişki birinci aşamanın kanıtlamasını bitirir.

İkinci Aşama:Şimdi, herbir $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{G}$ açık ailelerinin birer örtülüş olması gerekmediği fakat $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ açık örtülüşünün hipotezdeki koşulu gerçeklediği durumda bir kanıtlama verelim. Bu kez $\mathcal{U}$'nun uygun sonlu bir alt örtülüşünün varlığını göstermek istiyoruz. $\mathcal{U}$'nun bu nitelikte hiç bir sonlu alt topluluğu tanımlanamasaydı, bu kez tümevarım kullanılarak ve $\mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} : \mathrm{card}\mathcal{U}' < \omega_0\}$ yazarak $K_0 = X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$K_n = \begin{cases} K_{n-1} - \bigcup \mathcal{G}_n & ; K_{n-1} - \bigcup \mathcal{G}_n \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U})) \\ K_{n-1} - \bigcup \mathcal{U}_n & ; \exists \mathcal{U}_n \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U}) \quad , \qquad K_{n-1} - \bigcup \mathcal{G}_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n \end{cases}$$

kapalı kümelerinin, tanımlarında hangi seçenek geçerli olursa olsun, $\emptyset \neq K_n \subseteq K_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $K_n \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ $(\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U}))$ gerçekledikleri tümevarımla kolayca gözlenir. O halde uzay sayılabilir tıkız olduğundan $\emptyset \neq K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ kapalı kümesi de benzer niteliklere sahiptir, kısacası her $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U})$ için $K \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ olur. Oysa, bunun şimdi kesinlikle olanaksız olduğunu ve $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ gerçekleyen sonlu bir $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesinin tanımlanabildiğini, birinci aşamadan yararlanarak gösterebiliriz. Gerçekten bu amaçla

$$\mathbb{N}_K = \{n \in \mathbb{N} : K \cap \bigcup \mathcal{G}_n \neq \emptyset\}$$

kümesini tanımlayarak ve her $n \in \mathbb{N}_K$ için $\emptyset \neq K \cap \bigcup \mathcal{G}_n \subseteq K_n \cap \bigcup \mathcal{G}_n$ nedeniyle, uygun bir $\mathcal{U}_n \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U})$ alt ailesi yardımıyla $K_n = K_{n-1} - \bigcup \mathcal{U}_n$ ve sonuçta $K \subseteq K_{n-1} \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n \cup \bigcup \mathcal{G}_n = \bigcup(\mathcal{G}_n \cup \mathcal{U}_n)$ gerçekleştiği, kısacası herbir $n \in \mathbb{N}_K$ için $\mathcal{G}_n^* = \mathcal{G}_n \cup \mathcal{U}_n$ açık ailelerinin K için bir açık örtülüş olduğu ve her $x \in K$ için $\mathbb{N}(x) = \{n \in \mathbb{N}_K : x \in \bigcup \mathcal{G}_n\}$ olması nedeniyle, $\mathcal{U}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_K} \mathcal{U}_n \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ aracı ailesi yardımıyla $st(x, \mathcal{G}_n^*) = st(x, \mathcal{G}_n) \cup st(x, \mathcal{U}_n) \subseteq st(x, \mathcal{G}_n) \cup \bigcup \mathcal{U}^*$ olur ve

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_K} st(x,\mathcal{G}_n^*) \subseteq \bigcup\mathcal{U}^* \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}_K} st(x,\mathcal{G}_n) \subseteq \bigcup\mathcal{U}^* \cup \bigcup\mathcal{U}(x)$$

bulunur. Dikkat edilirse $\mathcal{U}^*(x) = \mathcal{U}^*\cup\mathcal{U}(x)(\subseteq \mathcal{U})$ ailesi apaçıktır ki sayılabilir üyelidir ve $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_K} st(x,\mathcal{G}_n^*) \subseteq \mathcal{U}^*(x)$ geçerli olmaktadır. Dolayısı ile $\mathcal{U}(K) = \{U\cap K : U \in \mathcal{U}\}$ ve $\mathcal{G}^*(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_K}\mathcal{G}_n^*(K)$ örtülüşleri ve sayılabilir tıkız K uzayı için birinci aşamadaki tüm hipotezlerin gerçeklendiği anlaşılır ve sonuçta K'nın $\mathcal{U}(K)$ açık örtülüşünün sonlu üyeli bir alt ailesi tarafından örtüldüğü gözlenir. Bu çelişki, ikinci aşamanın ve sonuçta tüm kanıtlamanın bitirilmesi demektir. □

Sonuç 1:Sözde $\mathcal{G}_\delta$-köşegenli sayılabilir tıkız uzaylar tıkızdır.
Kanıtlama:Bölüm 1, Ceder Teoremi nedeniyle

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}(x)} st(x,\mathcal{G}_n) \qquad (\forall x \in X)$$

koşulunu gerçekleyen uzaylara **sözde $\mathcal{G}_\delta$-köşegenli uzay** denilir.Bu tür sayılabilir tıkız uzaylarda kolayca görüleceği gibi, Chaber Teoremi 1 nedeniyle, her $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü vardır.

Sonuç 2:Açınır bir T_1 uzayının tıkız olabilmesi için g.y.k. sayılabilir tıkız olmasıdır.

Kanıtlama:Açınır T_1 uzaylarının köşegenleri bir $\mathcal{G}_\delta$-türü kümedir.

Sonuç 3: Metriklenebilir uzaylarda tıkızlık ve sayılabilir tıkızlık kavramları eşdeğerdir.
Kanıtlama: Her metriklenebilir uzay açınır bir T_1 uzayıdır.

Chaber Teoremi 2:*Bir uzayın tıkız olabilmesi için g.y.k. sayılabilir tıkız olması ve her $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne karşılık, aşağıdaki koşul gerçeklenecek biçimde açık bir $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_n$ zayıf $\delta\theta$-örtülüşün var olmasıdır:*

$$\forall x \in X \ , \ \exists\mathcal{U}(x) \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}) \ , \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}_x^*}(\bigcap(\mathcal{G}_n)_x) \subseteq \bigcup\mathcal{U}(x)$$

Kanıtlama: Burada $\mathbb{N}_x^* = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq \text{ord}(x, \mathcal{G}) \leq \omega_0\}$ ve her $n \in \mathbb{N}_x^*$ için $(\mathcal{G}_n)_x = \{G \in \mathcal{G}_n : x \in G\}$ yazılmıştır. Kolaylık amacıyla herhangi bir $\mathcal{A}$ alt kümeler ailesi için de, benzer biçimde $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ ve $\bigcap_{A \in \mathcal{A}_x} A = \bigcap \mathcal{A}_x$ yazılacaktır. Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. Yeterliğin kanıtlanmasını yine iki aşamada yapacağız.
Birinci Aşama: Bu aşamada $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün kendisinin noktasal sayılabilir olduğu özel durumu irdeliyoruz. Bu nedenle, varsayımımız, her $x \in X$ için $\bigcap \mathcal{G}_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $\mathcal{U}(x) \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ ailesinin var olduğunu söylemektedir. Şimdi, eğer $\mathcal{U}$'nun sayılabilir üyeli hiçbir alt ailesi örtülüş olmasaydı, zorunlu olarak $\omega_1 \leq cardX = \kappa_X$ gerçeklendiğine dikkat ederek,bir çelişkiye varılacağını göstermek amacıyla, sonlu ötesi tümevarımla

$$i) x_\alpha \in G_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$$

$$ii) X - \bigcup_{\beta \leq \alpha} G_\beta \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

$$iii) \exists \mathcal{U}^* \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}) \text{ , } X - \bigcup_{\alpha < \kappa} G_\alpha \subseteq \bigcup \mathcal{U}^*$$

koşulları gerçeklenecek biçimde bir κ ordinal sayısı tanımlanır. Gerçekten i) koşulu nedeniyle bu işlem $\kappa \leq \kappa_X$ adım sonunda bitmek zorundadır ve ii) koşulu nedeniyle bu κ sayısı bir ardıl ordinal sayı olamaz, kısacası κ bir limit ordinaldir. Önce gelişigüzel seçilen bir $x_0 \in X$ için, hipotez nedeniyle

$$\emptyset \neq X - \bigcup \mathcal{U}(x_0) \subseteq \bigcup_{G_\alpha \in (\mathcal{G})_{x_0}} (X - G_\alpha) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

olur ve $\text{card}(\mathcal{G})_{x_0} \leq \omega_0$ olduğundan

$$X - G_0 \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

koşulu gerçeklenecek biçimde bir $G_0 \in (\mathcal{G})_{x_0}$ vardır.Herbir $\alpha < \alpha_0 < \kappa_X$ için x_α elemanları $x_\alpha \in G_\alpha \in (\mathcal{G})_{x_\alpha}$ üyeleri, i) ve ii) koşulları gerçeklenecek biçimde belirlenmiş olduğunda, sayılabilir tıkızlık koşulu kullanılarak α_0 ister ardıl limit ordinal sayı olsun

$$\bigcup_{\alpha<\alpha_0}(X - G_\alpha) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}))$$

gerçeklendiği gösterilerek, bir $x_{\alpha_0} \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(X - G_\alpha)$ elemanını belirleyip, $\bigcap(\mathcal{G})_{x_{\alpha_0}} \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x_{\alpha_0})$ gerçekleştiğini anımsayarak

$$\emptyset \neq (X - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} G_\alpha) - \bigcup \mathcal{U}(x_{\alpha_0}) \subseteq \bigcup_{G_{\alpha_0}\in(\mathcal{G})_{x_{\alpha_0}}} (X - (\bigcup_{\alpha<\alpha_0} G_\alpha \cup G_{\alpha_0}))$$

ve sonuçta, uygun bir $G_{\alpha_0} \in (\mathcal{G})_{x_{\alpha_0}}$ belirleyerek, herbir $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ için geçerli olan

$$X - \bigcup_{\alpha\leq\alpha_0} G_\alpha = X - (\bigcup_{\alpha<\alpha_0} G_\alpha \cup G_{\alpha_0}) \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$$

sonucu elde edilir. O halde sonlu ötesi tümevarım inşası bitirilmiş olur. Dikkat edilirse, $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi $\mathcal{G}$'nin yukarıdaki sonlu ötesi tümevarım işleminde belirlenen üyelerinden oluşan alt ailesi olmak üzere, iii) nedeniyle $\mathcal{G}^* \cup \mathcal{U}^*$ açık örtülüştür, noktasal-sayılabilirdir ve apaçık biçimde bir zayıf $\delta\theta-$örtülüş olduğu için Wicke&Worrell Teoremi nedeniyle sonlu bir alt örtülüşü vardır. O halde zorunlu olarak, öyle bir $\beta_0 < \kappa$ vardır ki $X = \bigcup_{\alpha\leq\beta_0} G_\alpha \cup \bigcup \mathcal{U}^*$ gerçekleşir, bu ise ii) nedeniyle kesinlikle olanaksızdır.

İkinci Aşama:Şimdi sayılabilir tıkız X uzayında açık bir zayıf $\delta\theta$ örtülüş olan $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ ailesi, hipotezdeki koşulları gerçeklesin, kısacası her $x \in X$ için $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_x^*}(\bigcap(\mathcal{G}_n)_x) \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$ geçerli olsun. $\mathcal{U}$'nun sayılabilir üyeli bir alt örtülüşünün tanımlanabildiğini göstermek istiyoruz. Kanıtlamada kullanılacağı için şu temel bilgileri anımsayalım.

Ara Bilgi: Bir X uzayında her $A \subseteq X$, için $k(A) = \bigcup\{\overline{B} : B \in \mathcal{P}_{\omega_0}(A)\}$ biçiminde tanımlanan işlemin bir Kuratowski kapanış işlemi olduğu ve $A \subseteq k(A) \subseteq \overline{A}$ gerçeklendiği görülmektedir. Bu kapanış işleminin X üzerinde belirlediği uzay X^c ile gösterilir, dolayısı ile bu uzayda, ancak ve yalnız $A = k(A)$ koşulunu gerçekleyen alt kümeler kapalıdır ve bu uzayın kısaca τ_c ile yazılan topolojisi ile ilk uzayın topolojisi arasında $\tau \subseteq \tau_c$ bağıntısı geçerlidir. Üstelik, X uzayının herhangi bir $\mathcal{G}$ açık ailesi için

$$K(\mathcal{G}) = \{x \in X : ord(x, \mathcal{G}) \leq \omega_0\}$$

alt kümesi X^c uzayında kapalıdır, çünkü kolayca görüleceği gibi

$$K(\mathcal{G}) = (X - \bigcup \mathcal{G}) \cup \{x \in X : 1 \leq ord(x, \mathcal{G}) \leq \omega_0\} = k(K(\mathcal{G}))$$

gerçekleşir, çünkü özellikle, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in K(\mathcal{G})$ elemanları $1 \leq \mathrm{ord}(x_n, \mathcal{G}) \leq \omega_0$ gerçekler ve $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ olursa, ya $x \in X - \bigcup \mathcal{G}$ olur ya da $1 \leq ord(x, \mathcal{G})$ ve sonuçta $\mathcal{G}_x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_{x_n}$ gözleyerek $1 \leq \mathrm{ord}(x, \mathcal{G}) \leq \omega_0$ bulunur. Üstelik X uzayının sayılabilir tıkız olması için g.y.k. X^c uzayının olmasıdır. Gerçekten $\tau \subseteq \tau_c$ nedeniyle yeterlik apaçıktır. Tersine X sayılabilir tıkız ve $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi X^c uzayında boştan farklı ve azalan bir kapalı küme dizisi ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in K_n$ olmak üzere $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_k : n \leq k\}} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} k(K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ bulunur.

Yukarıdaki bilgiler nedeniyle X^c nin sayılabilir tıkız olduğunu bildiğimizden ve $\mathcal{U}$ ailesinin X^c için bir açık örtülüş olması gerçeğinden ötürü, genelliği bozmaksızın $X = X^c$ alabiliriz. Şimdi eğer $\mathcal{U}$'nun sayılabilir bir alt örtülüşü tanımlanamasaydı, $K_0 = X$ alarak ve $X_n = \{x \in X : ord(x, \mathcal{G}_n) \leq \omega_0\} = K(\mathcal{G}_n)$ kümelerinin $X^c = X$ uzayında kapalı olduklarını bildigimiz için,(ayrıca $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ gözlenmelidir.) tümevarım yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$K_n = \begin{cases} K_{n-1} \cap X_n & ; K_{n-1} \cap X_n \not\subseteq \bigcup \mathcal{U}_0 \qquad (\forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})) \\ K_{n-1} - \bigcup \mathcal{U}_n & ; \exists \mathcal{U}_n \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}) \qquad , \qquad K_{n-1} \cap X_n \subseteq \bigcup \mathcal{U}_n \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan kapalı kümelerinin $\emptyset \neq K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ gerçeklediği ve K kümesinin $\mathcal{U}$ örtülüşünün hiçbir sayılabilir alt ailesi tarafından örtülemediğini anlarız. Aslında şimdi, $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ gerçekleyen uygun bir $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U})$ ailesinin var olduğunu, Birinci Aşamadan yararlanarak göstereceğiz, böylelikle elde edilen çelişki kanıtlamayı bitirecektir. Gerçekten

$$\mathbb{N}_K = \{n \in \mathbb{N} : \exists \mathcal{U}_n \in \mathcal{P}_{\omega_0}(\mathcal{U}), K_n = K_{n-1} - \bigcup \mathcal{U}_n\}$$

tanımlanırsa $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_K} K_n \cap \bigcap_{n \notin \mathbb{N}_K} K_n$ gerçekleşir ve üstelik $\mathcal{U}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_K} \mathcal{U}_n$ yazılırsa, her $n \in \mathbb{N}_k$ için $K_n = K_{n-1} - \bigcup \mathcal{U}_n$ ve $(K_n \cap X_n) - \bigcup \mathcal{U}_n = (K_{n-1} \cap X_n) - \bigcup \mathcal{U}_n = \emptyset$ olması nedeniyle $K \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}_K} (X - \bigcup \mathcal{U}_n) = X - \bigcup_{n \in \mathbb{N}_K} (\bigcup \mathcal{U}_n) = X - \bigcup \mathcal{U}^*$ ve $K = K - \bigcup \mathcal{U}^*$ ve ayrıca her $n \in \mathbb{N}_K$ için $K \cap X_n \subseteq (K_n - \bigcup \mathcal{U}^*) \cap X_n \subseteq (K_n - \bigcup \mathcal{U}_n) \cap X_n = \emptyset$ bulunur. Demek ki bir $n \in \mathbb{N}_K$ için $x \in K \cap \bigcup \mathcal{G}_n$ olursa $\omega_1 \leq \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_n)$ olur, kısacası $\mathbb{N}_K \cap \mathbb{N}_x^* = \emptyset (\forall x \in K)$ ve $K = \bigcup_{n=1}^{\infty}(K \cap X_n) = \bigcup_{n \notin \mathbb{N}_K}(K \cap X_n)$ bulunur. O halde

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{N} - \mathbb{N}_K : K \cap \bigcup \mathcal{G}_n \neq \emptyset\} \quad , \quad \mathcal{G}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n$$

tanımlanırsa ve $n \in \mathbb{N}_0$ için $x \in K \cap \bigcup \mathcal{G}_n$ gerçekleşirse $x \in K_n \cap \bigcup \mathcal{G}_n = K_{n-1} \cap (X_n \cap \bigcup \mathcal{G}_n)$ ve sonuçta $1 \leq \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_n) \leq \omega_0$ olur, kısacası $\mathcal{G}^*(K) = \{G \cap K : G \in \mathcal{G}^*\}$ açık örtülüşü K alt uzayında noktasal-sayılabilir olur ve $\mathbb{N}_x^* = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \in \bigcup \mathcal{G}_n\}$ nedeniyle $\bigcap(\mathcal{G}^*(K))_x = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_x^*}(\mathcal{G}_n)_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$ geçerli olduğundan, X^c uzayının sayılabilir tıkız K alt uzayı için Birinci Aşama kullanılarak istenilen çelişkiye ulaşılır. □

Uyarı: Wicke&Worrell Teoremi'nin Chaber Teoremi 2'nin kolay bir sonucu olduğu, başka bir deyimle Chaber'in bu ikinci teoreminin Wicke&Worrell Teoremi'nin bir genelleştirmesi olduğu kolayca görülür, çünkü $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$, sayılabilir tıkız ve zayıf altöteLindelöf X uzayının, verilen bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü-ne karşılık belirlenen bir zayıf $\delta\theta-$incelmesi ise, her $x \in X$ için var olan ve $1 \leq \operatorname{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x}) \leq \omega_0$ yani $n_x \in \mathbb{N}_x^*$ gerçekleyen n_x doğal sayısı aracılığıyla, $\operatorname{card}(\mathcal{G}_{n_x})_x \leq \omega_0$ olduğu için, apaçıktır ki

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_x^*} (\bigcap(\mathcal{G}_n)_x) \subseteq \bigcap(\mathcal{G}_{n_x})_x \subseteq \bigcup(\mathcal{G}_{n_x})_x \subseteq \bigcup \mathcal{U}(x)$$

koşulu gerçeklenecek biçimde sayılabilir üyeli bir $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi kolayca tanımlanır, dolayısıyla Chaber Teoremi 2 nedeniyle X uzayı tıkız olur.

Şimdi de Tikhonov (tümüyle düzenli T_2) uzaylarının tıkızlığı için aşağıdaki ünlü sonucu görelim. Bilindiği gibi, sayılabilir sayıda açık-yoğun kümenin kesişiminin yoğun ya da eşdeğer olarak, sayılabilir sayıda kapalı-seyrek kümenin birleşiminin içinin boş olduğu bir uzaya, bu tür uzayları ilk tanımlayan Fransız matematikçi Rene Baire'nin adını vererek **Baire uzayı** denilir.Bu tür uzaylarda, noktasal sonlu bir açık örtülüşe karşılık ilginç bir açık ailenin varlığı kanıtlanabilir. Burada gerektiği için önce şu temel gerçeği gözleyelim. Bir Baire uzayının boştan farklı tüm açık kümeleri üzerindeki alt uzaylar da birer Baire uzayıdır, çünkü, X bir Baire uzayı ve G boştan farklı açık kümesi ve $G_n \subseteq G$ alt kümeleri bu alt uzayda açık-yoğun ise, $G = kap_G G_n = \overline{G_n} \cap G$ nedeniyle $G_n \subseteq G \subseteq \overline{G_n}$ yani $\overline{G} = \overline{G_n}(\forall n \in \mathbb{N})$ bulunur ve $U_n = G_n \cup (X - \overline{G}) \subseteq X$ kümeleri X uzayında açık-yoğun olur ve G alt uzayının boştan farklı herhangi bir U açık alt kümesi, hem X uzayında açık olur ve hem de

$$\emptyset \neq U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = U \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \cup (X - \overline{G})) = U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

gerçekleşeceği için, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ kesişiminin G alt uzayında boştan farklı tüm açık kümelerle kesiştiği, yani yoğun olduğu anlaşılır. Şimdi önce, gerekli olduğu için, aşağıdaki Yardımcı Teoremi görelim:

Watson Yardımcı Teoremi:(X, τ) *bir Baire uzayı,* $\mathcal{U}$ *bu uzayda naktasal sonlu bir açık örtülüş ise, üyeleri boştan farklı olan ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir açık kümeler ailesi* $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ *vardır:*

i) ya $B \cap U = \emptyset$ ya $B \subseteq U$ $(\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}), \forall U \in \mathcal{U})$,

ii) $\forall G \in \tau, G \neq \emptyset$ için $\exists B_G \in \mathcal{B}(\mathcal{U}), B_G \subseteq G$.

Kanıtlama: Her $n \in \mathbb{N}$ için $F_n(\mathcal{U}) = \{x \in X : ord(x, \mathcal{U}) \leq n\}$ kapalı kümeleri tanımlansın. $\mathcal{U}$ noktasal sonlu olduğundan $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\mathcal{U})$ geçerlidir. Şimdi $\emptyset \neq G \in \tau$ verilsin ve sabit tutulsun. Yukarıda gözlenen temel gerçek nedeniyle, G alt uzayı da bir Baire uzayı ve $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(G \cap F_n(\mathcal{U}))$ nedeniyle, var olan uygun bir $n_0 \in \mathbb{N}$ yardımıyla

$$\emptyset \neq \text{iç}_G kap_G(G \cap F_{n_0}(\mathcal{U})) = \text{iç}(\overline{G \cap F_{n_0}(\mathcal{U})} \cap G) \subseteq G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U})$$

olur. Sonuçta $\{n \in \mathbb{N} : \emptyset \neq G \cap \text{iç}F_n(\mathcal{U})\}$ kümesi boş olamaz. Bu kümenin en küçük elemanı, sözgelimi, n_0 doğal sayısı olsun. O halde $\emptyset \neq G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U})$ olur ve apaçıktır ki her $x \in G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U})$ elemanı için $\text{ord}(x, \mathcal{U}) \leq n_0$ bulunur. Dikkat edilirse en az bir $x_0 \in G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U})$ için $ord(x_0, \mathcal{U}) = n_0$ olmak zorundadır, çünkü aksi durumda $G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U}) \subseteq F_{n_0-1}(\mathcal{U})$ olur ve n_0 doğal sayısının tanımı gereği $\emptyset \neq G \cap \text{iç}F_{n_0}(\mathcal{U}) \subseteq G \cap \text{iç}F_{n_0-1}(\mathcal{U}) = \emptyset$ çelişkisi bulunurdu. O halde $\mathcal{U}_{x_0} = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\} = \{U_k : 1 \leq k \leq n_0\}$ ve $\mathcal{B}_{x_0} \ni W_{x_0} \subseteq G \cap F_{n_0}(\mathcal{U})$ olmak üzere $x_0 \in W_{x_0} \cap \bigcap \mathcal{U}_{x_0}$ olur, kısalık amacıyla $B_G = W_{x_0} \cap \bigcap \mathcal{U}_{x_0}$ yazalım. Kolayca şunlar gözlenir: $\emptyset \neq B_G \subseteq G$

olur ve her $U \in \mathcal{U}$ için, eğer $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ise $B_G \subseteq U$, yok eğer $U \notin \mathcal{U}_{x_0}$ ise $B_G \cap U \subseteq F_{n_0}(\mathcal{U}) \cap U \cap \bigcap \mathcal{U}_{x_0} = \emptyset$ gerçekleşir. Bu nedenle, tüm B_G kümelerinin ailesi $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ aranandır. □

Aşağıdaki teorem 1980 ve 1981 yılında iki genç matematikçi B.Scott ve S.Watson tarafından bağımsız olarak kanıtlanmıştır. Verilen kanıtlama S.Watson'a aittir, b.k.z.[15].

Scott & Watson Teoremi: *Bir Tikhonov uzayının tıkız olabilmesi için g.y.k. sözdetıkız ve ötetıkız olmasıdır.*

Kanıtlama: X Tikhonov uzayı sözdetıkız ve ötetıkız olsun. Bu uzayın herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü verilsin. Uzay düzenli olduğundan $\overline{\mathcal{U}} \prec \mathcal{G}$ gerçekleyen açık bir $\mathcal{U}$ incelmesi vardır. X ötetıkız olduğu için $\mathcal{U}$'nun noktasal-sonlu açık bir incelmesi vardır. Genelliği bozmaksızın onu yine $\mathcal{U}$ ile gösterelim. Watson Yardımcı Teoremi nedeniyle, $\mathcal{U}$ örtülüşüne karşılık orada sözü edilen koşulları gerçekleyen açık bir $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ ailesi vardır. Şimdi kısaca

$$\mathcal{U}_B = \{U \in \mathcal{U} : B \subseteq U\} \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{U}))$$

yazalım. $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ ve $\mathcal{U}$ noktasal-sonlu olduğundan sonuçta her $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ üyesi için $\mathcal{U}_B$ alt ailesi sonlu üyelidir. Herhangi bir $B_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ alalım ve eğer $X - \overline{\bigcup \mathcal{U}_{B_1}} \neq \emptyset$ ise ikinci adımda $\mathcal{B}(\mathcal{U}) \ni B_2 \subseteq X - \overline{\bigcup \mathcal{U}_{B_1}}$ belirleyelim. Her $1 \leq k \leq n$ için $B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ üyeleri belirlenmiş ve aşağıdaki tümleyen küme boştan farklı olduğunda

$$\mathcal{B}(\mathcal{U}) \ni B_{n+1} \subseteq X - \overline{\bigcup_{1 \leq k \leq n} (\bigcup \mathcal{U}_{B_k})}$$

kümesini belirleyelim. Dikkat edilirse bu işlem sonlu bir adım sonra bitmelidir.Gerçekten, eğer bitmeseydi, her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ kümeleri tanımlı olur ve üstelik herbir $U \in \mathcal{U}$ üyesi, en fazla tek bir B_n kümesi ile kesişebilir çünkü , $U \cap B_n \neq \emptyset$ ise $U \cap B_m = \emptyset (\forall m > n)$ geçerlidir, çünkü, Watson Yardımcı Teoreminde gözlendiği gibi, $U \cap B_n \neq \emptyset$ nedeniyle zorunlu olarak $B_n \subseteq U$ yani her $m > n$ için $U \in \mathcal{U}_{B_n}$ ve $U \subseteq \mathcal{U}_{B_n} \subseteq \overline{\bigcup_{1 \leq k \leq m} (\bigcup \mathcal{U}_{B_k})} \subseteq X - B_m$ olur ve kanıtlanan bu gözlem nedeniyle $U \cap B_m = \emptyset (\forall m < n)$ bulunur. Dolayısıyla tanımlanabilmeleri durumunda, sonsuz üyeli $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi X uzayında kesikli ve sonuçta yerel sonlu olur, bu ise

Bölüm1'de kanıtlanan Bagley&Connell&McKnight Teoremi'ne aykırıdır. Demek ki, uygun bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için, yukarıdaki işlem n_0-ıncı adımda sonlanmalıdır, kısacası $X - \overline{\bigcup_{1\le k\le n_0}(\bigcup \mathcal{U}_{B_k})} = \emptyset$ bulunur, yani $\mathcal{U}^* = \bigcup_{1\le k\le n_0}\mathcal{U}_{B_k}(\subseteq \mathcal{U})$ sonlu üyeli ailesi için $X = \overline{\bigcup \mathcal{U}^*}$ olur. $\overline{\mathcal{U}^*} \prec \mathcal{G}$ olduğundan, sonuçta $\mathcal{G}$'nin sonlu üyeli bir alt ailesinin örtülüş olduğu anlaşılır. □

Bu bölümde son olarak amacımız Smith Teoremi 2'yi kanıtlamaktır, b.k.z.[16]. Önce aşağıdaki sonucu görelim:

Smith Teoremi 1: *Her θ-incelebilir uzay zayıf $\overline{\theta}$-incelebilirdir.*
Kanıtlama: X uzayı θ-incelebilir olsun. $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verildiğinde θ-incelebilirlik koşulu gereği öyle bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık incelmeler dizisi vardır ki, her $x \in X$ için $1 \le \text{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x}) < \omega_0$ gerçeklenecek biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır.Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha} : \alpha \in \Lambda_n\}$ yazarak, $\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}_1$ ve

$$\mathcal{G}_n^* = \{G_{n,\alpha} - \bigcup_{1\le k<n} F_{n-k}(\mathcal{G}_k) : \alpha \in \Lambda_n\} \quad (\forall n > 1)$$

açık ailelerini tanımlarsak, öncelikle $\bigcup \mathcal{G}_n^* \cap \bigcup_{1\le k<n} F_{n-k}(\mathcal{G}_k) = \emptyset$ gerçeklendiğini gözleyerek, $\mathcal{G}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n^*$ açık ailesinin bir örtülüş olduğu anlaşılır, çünkü, herhangi bir $x \in X$ verildiğinde, $1 \le \text{ord}(x, \mathcal{G}_n) < \omega_0$ koşulunu gerçekleyen en küçük n doğal sayısı n_x ve $\text{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x}) = m_x$ ve dolayısıyla $x \in F_{m_x}(\mathcal{G}_{n_x})$ olmak üzere, $n_x + m_x < n$ koşulunu gerçekleyen her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x \in F_{m_x}(\mathcal{G}_{n_x}) \subseteq F_{n-n_x}(\mathcal{G}_{n_x}) \subseteq \bigcup_{1\le k<n} F_{n-k}(\mathcal{G}_k) \subseteq X - \bigcup \mathcal{G}_n^*$$

nedeniyle $x \notin \bigcup \mathcal{G}_n^* (\forall n > n_x + m_x)$ gözlenir ve sonra, $n_x = 1$ ise $x \in \bigcup \mathcal{G}_1^*$ yok eğer $1 < n_x$ ise, herhangi $1 \le k < n_x$ için $\omega_0 \le ord(x, \mathcal{G}_k)$ ve sonuçta $x \notin \bigcup_{1\le k<n_x} F_{n_x-k}(\mathcal{G}_k)$ olur ve $x \in G_{n_x,\alpha_x}$ olacak biçimde $\alpha_x \in \Lambda_{n_x}$ indisi var olduğundan sonuçta $x \in \bigcup \mathcal{G}_{n_x}^*$ yani $1 \le ord(x, \mathcal{G}_{n_x}^*) \le ord(x, \mathcal{G}_{n_x}) = m_x < \omega_0$ bulunur. O halde $\mathcal{G}^*$ açık örtülüşü aşağıda verilen koşulları gerçeklediği için $\mathcal{U}$ örtülüşünün bir zayıf $\overline{\theta}$-incelmesi olur. □

Bir X uzayında aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ açık örtülüşüne bir zayıf $\overline{\theta}$-örtülüş ve her açık örtülüşün bu nitelikte bir incelmesinin tanımlanabildiği bir topolojik uzaya ise **zayıf $\overline{\theta}$-incelebilir** uzay denir:

$i)\forall x \in X, \exists n_x \in \mathbb{N}, 1 \leq ord(x, \mathcal{G}_{n_x}) < \omega_0$,

$ii)\forall x \in X, \exists N_x \in \mathbb{N}, ord(x, \mathcal{G}_n) = 0 (\forall n \geq N_x)$

Aşağıdaki teoremde tanımlanan Tikhonov uzayı, Bennett&Lutzer ikilisinin, Kaynakça'da yer alan makalesinde tanımlanmıştır. Bu uzayın sözü edilen niteliklerini kanıtlamak için, Bölüm 1'deki Burke Yardımcı Teoremi kullanılacaktır.

Teorem: *θ-incelebilir olmayan zayıf $\overline{\theta}$-incelebilir Tikhonov uzayları vardır.*
Kanıtlama: $\omega_2 = [0, \omega_2)$ ordinal sayılar aralığından $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi olan $X = \{0, 1\}^{\omega_2}$ üzerinde aşağıdaki Tikhonov uzayını tanımlayalım. Apaçıktır ki card$X = 2^{\omega_2}$ olur. Şimdi, herhangi bir $f \in X$ ve $\Lambda \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\omega_2)$ için $B(f, \Lambda) = \{g \in X : g(\alpha) = f(\alpha)\ (\forall \alpha \in \Lambda)\}$ ve ayrıca

$$X_0 = \{f \in X : \exists \alpha < \omega_2\ ,\ f(\alpha) = 1\ ,\ f(\beta) = 0\ (\forall \beta \in \omega_2, \beta \neq \alpha)\}$$

tanımlansın. Herbir $f \in X_0$ için $f(\alpha) = 1$ gerçekleyen tam bir tane $\alpha < \omega_2$ ordinal sayısı var olduğundan, bu fonksiyonu f_α ile yazarsak, kolayca $f_\alpha(\alpha) = 1$, $f_\alpha(\beta) = 0$ $(\forall \beta \in \omega_2, \beta \neq \alpha)$ ve $f_\alpha \notin \bigcup_{\beta \neq \alpha} B(f_\beta, \{\beta\})$ gerçekleşir. Üstelik, $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ ise, $f \in X$ ne olursa olsun

$$B(f, \Lambda) = \Pi_{\alpha \in \omega_2 - \Lambda}\{0, 1\}_\alpha \times \{f(\alpha_1)\}_{\alpha_1} \times \{f(\alpha_2)\}_{\alpha_2} \times ... \times \{f(\alpha_n)\}_{\alpha_n}$$

gözleyerek kolayca card$B(f, \Lambda) = \text{card}(\{0, 1\}^{\omega_2 - \Lambda}) = 2^{\omega_2}$ bulunacaktır. Ayrıca $f_1, f_2 \in X$ ne olursa olsun, $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \omega_2$ sonlu alt kümeleri, eğer, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ gerçeklerse, $B(f_1, \Lambda_1) \cap B(f_2, \Lambda_2)$ kesişim kümesinin boştan farklı ve üstelik $\text{card}(B(f_1, \Lambda_1) \cap B(f_2, \Lambda_2)) = 2^{\omega_2}$ gerçeklediğine, hatta, sonlu elemanlı Λ kümeleri ikişerli ayrık olmak üzere, kesiştirilen $B(f, \Lambda)$ kümelerinin sayısının sonlu tane değil ω_1 tane bile olsaydı, kesişim kümesinin yine 2^{ω_2} kardinaliteli olacağına dikkat edilmelidir. Şimdi, card$X_0 = \omega_2 <$ card$X =$ card$(X - X_0) = 2^{\omega_2}$ gözleyerek, $X - X_0$ kümesinin herbir elemanını birer yalıtılmış nokta ve her $\alpha < \omega_2$ için $\mathcal{B}_{f_\alpha} = \{B(f_\alpha, \Lambda) : \Lambda \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\omega_2)\}$ ailesini $f_\alpha \in X_0$ elemanı için yerel taban olarak tanımlayarak belirlenen topolojik uzayın, tümüyle düzenli bir T_2 uzayı ve dolayısıyla bir Tikhonov uzayı olduğu anlaşılır. Çünkü dikkat edilirse $\epsilon \in \{0, 1\}$ tam sayısı ve $\alpha \in \omega_2$ sabit ordinal sayısı ne olursa olsun $X_{\alpha,\epsilon} = \{f \in X : f(\alpha) = \epsilon\}$ alt kümesinin ve sonuçta, $f \in X_0$ ve $\Lambda \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\omega_2)$ ne olursa olsun $B(f,\Lambda) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_{\alpha,f(\alpha)}$ gerçekleyen $B(f,\Lambda)$ yerel taban üyesinin ve dolayısıyla bu uzaydaki *tüm yerel taban kümelerinin* birer kapaçık küme olduğu görülmektedir. Bu uzayda, herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verildiğinde, her $\alpha \in \omega_2$ için, $f_\alpha \in U_\alpha \in \mathcal{U}$ gerçekleyen bir U_α örtülüş üyesi ve $f_\alpha \in B(f_\alpha, \Lambda(\alpha)) \subseteq U_\alpha$ gerçeklenecek biçimde $\Lambda(\alpha) \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\omega_2)$ kümeleri belirlenirse, $\Lambda'(\alpha) = \{\alpha\} \cup \Lambda(\alpha)$ $(\forall \alpha < \omega_2)$ tanımlayarak $f_\alpha \in B(f_\alpha, \Lambda(\alpha)) \cap B(f_\alpha, \{\alpha\}) = B(f_\alpha, \Lambda'(\alpha)) \subseteq U_\alpha$ $(\forall\alpha \in \omega_2)$ gözlenir. O halde $\mathcal{W}_1 = \{B(f_\alpha, \Lambda'(\alpha))\}_{\alpha<\omega_2}$ ve $\mathcal{W}_2 = \{\{f\} : f \in X - X_0\}$ olmak üzere $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 \prec \mathcal{U}$ gerçekleştiği ve $\mathcal{W}$ açık örtülüşünün, her $\alpha < \omega_2$ için $\mathrm{ord}(f_\alpha, \mathcal{W}_2) = 0 < \mathrm{ord}(f_\alpha, \mathcal{W}_1) = \mathrm{ord}(f_\alpha, \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2) = 1$ ve ayrıca her $f \in X - X_0$ için $\mathrm{ord}(f, \mathcal{W}_2) = 1$ nedeniyle, apaçık biçimde $\mathcal{U}$ örtülüşünün bir zayıf $\overline{\theta}$-incelmesi olduğu anlaşılır. Burada, $\omega_1 \leq \mathrm{ord}(f, \mathcal{W}_1)$ gerçekleyen sayılamaz sonsuz sayıda $f \in X - X_0$ elemanlarının var olabileceğine dikkat edilmelidir, bu durum aşağıdaki örtülüş için gerçekleşecektir. Demek ki X Tikhonov uzayı zayıf $\overline{\theta}$-incelebilirdir. Şimdi, son olarak bu uzayın θ-incelebilir *olmadığını* gösterelim. Bu amaçla, özel

$$\mathcal{U}_0 = \{B(f_\alpha, \{\alpha\})\}_{\alpha<\omega_2} \cup \{\{f\} : f \in X - X_0\}$$

açık örtülüşünden, bir θ-incelme elde edilemeyeceğini göstereceğiz. $\mathcal{U}_0' = \{B(f_\alpha, \{\alpha\})\}_{\alpha<\omega_2}$ alt ailesi için, $\mathrm{card}\{f \in X - X_0 : \omega_1 \leq \mathrm{ord}(f, \mathcal{U}_0')\} = 2^{\omega_2}$ gerçekleştiği kolayca görüldüğünden, eğer $\mathcal{U}_0$ örtülüşü için θ-incelme koşulu gerçekleyen bir örtülüşler dizisi tanımlamak istiyorsak, bu dizinin üyesi olan örtülüşlerin hiçbirisi $\mathcal{U}_0$ olmamalıdır! Şimdi, $\mathcal{U}_0$ örtülüşünün herhangi bir $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık incelmeler dizisi alınsın. Her $\alpha < \omega_2$ için, $f_\alpha \in X_0$ elemanını içeren biricik $\mathcal{U}_0$ üyesi $B(f_\alpha, \{\alpha\})$ olduğu için

$$f_\alpha \in B(f_\alpha, \Lambda_{\alpha,n}) \subseteq V_{\alpha,n} \in \mathcal{V}_n\ ,\ \ B(f_\alpha, \Lambda_{\alpha,n}) \subseteq B(f_\alpha, \{\alpha\})\ (\forall(\alpha,n) \in \omega_2 \times \mathbb{N})$$

koşulları gerçeklenecek biçimde $\Lambda_{\alpha,n} \subseteq \omega_2$ sonlu alt kümeleri vardır. O halde $\alpha \in \Lambda_{\alpha,n}$ ve sonuçta $\alpha \in \Lambda_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\alpha,n}$ $(\forall\alpha < \omega_2)$ gerçekleyen, sayılabilir elemanlı alt kümeleri belirlenmiş olur. Bölüm 1'deki Burke Yardımcı Teoremi nedeniyle $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \omega_2$ ve $\alpha_n \notin \Lambda_{\alpha_m}$ $(n \neq m)$ koşulları gerçeklenecek biçimde artan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ordinal sayılar dizisi vardır. Şimdi, $g(\alpha_n) = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ve $g(\alpha) = 0\,(\forall\alpha \in \omega_2 - \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\})$ biçiminde tanımlanan özel $g \in X - X_0$ elemanının $\omega_0 \leq \mathrm{ord}(g, \mathcal{V}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ gerçeklediğini gözleyelim. Gerçekten, $n \in \mathbb{N}$ sabit doğal sayısı alındığında, her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k \in \Lambda_{\alpha_k,n} \subseteq \Lambda_{\alpha_k}$ ve $m \neq k$ için $\alpha_m \notin \Lambda_{\alpha_k}$ ve sonuçta

$\alpha_m \notin \Lambda_{\alpha_k,n}$ olduğundan, kolayca her $\alpha \in \Lambda_{\alpha_k,n}$ için, ister $\alpha = \alpha_k$ isterse $\alpha \neq \alpha_k$ olsun, $f_{\alpha_k}(\alpha) = g(\alpha)$ olur ve sonuçta $g \in B(f_{\alpha_k}, \Lambda_{\alpha_k,n}) \subseteq V_{\alpha_k,n}(\in \mathcal{V}_n)$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ bulunur; apaçıktır ki $k \neq m$ için $B(f_{\alpha_k}, \Lambda_{\alpha_k,n}) \neq B(f_{\alpha_m}, \Lambda_{\alpha_m,n})$ nedeniyle, istenen $\omega_0 \leq \mathrm{ord}(g, \mathcal{V}_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ sonucu elde edilir. Demek ki, $\mathcal{U}_0$ özel örtülüşünün herhangi bir $\{\mathcal{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$ incelmeler dizisinin θ-incelme koşulunu gerçekleyemediği, kısacası X uzayının θ-incelebilir olmadığı anlaşılmaktadır. Ayrıca yukarda tanımlanan X Tikhonov uzayının, $2^{\omega_2} < \kappa$ gerçekleyen herhangi bir κ kardinal sayısı yardımıyla tanımlayarak, bu niteliklere sahip ve birbirleriyle eş yapılı olmayan sonsuz sayıda Tikhonov uzayının tanımlanabildiği de anlaşılmış olur. □

Lindelöf uzaylarına ilişkin önemli bir gerçek, iyi bilindiği gibi, bu tür uzaylarda kapalı-kesikli kümelerin ve kesikli, hatta yerel sayılabilir küme ailelerinin sırasıyla sayılabilir noktalı ve sayılabilir üyeli olmalarıdır. Bu gerçek Lindelöf'lüğün tanımından kolayca elde edilir.

Smith Teoremi 2: *Zayıf $\overline{\theta}$-incelebilir bir uzayın Lindelöf uzayı olabilmesi için g.y.k. bu uzaydaki kesikli ailelerin sayılabilir üyeli olmasıdır.*

Kanıtlama: Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. X yeterlik koşullarını gerçekleyen zayıf $\overline{\theta}$-incelebilir bir Lindelöf uzayı olsun. Bu uzayın herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü verilsin. Zayıf $\overline{\theta}$-incelebilirlik koşulu gereği öyle bir açık $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \prec \mathcal{U}$ incelmesi vardır ki $\mathcal{G}^* = \{\bigcup \mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşü noktasal-sonludur ve ayrıca her $x \in X$ için $1 \leq ord(x, \mathcal{G}_{n_x}) < \omega_0$ koşulu gerçeklenecek biçimde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_n = \{G_{n,\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda_n}$ yazılışı geçerli olacak biçimde Λ_n indis kümeleri vardır. Şimdi tümevarım kullanarak $n, m \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun, sayılabilir üyeli uygun $\mathcal{U}_{n,m} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailelerinin, $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m}$ ailesi örtülüş olacak biçimde tanımlanabildiğini göstermek istiyoruz. n, m doğal sayıları ne olursa olsun $F_n(\mathcal{G}^*) = \{x \in X : ord(x, \mathcal{G}^*) \leq n\}$ ve benzer biçimde $F_n(\mathcal{G}_m) = \{x \in X : ord(x, \mathcal{G}_m) \leq n\}$ kümelerinin kapalı oldukları ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\mathcal{G}^*) = X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_n(\mathcal{G}_m)$ geçerli olduğu bilinmektedir. Birinci adımda $\mathcal{U}_{1,1}$ alt ailesinin tanımını başarmalıyız. Bu amaçla, önce, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$K(1, n, \Lambda, 1) = F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_n) \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_{n,\alpha} \qquad (\forall \Lambda \in \mathcal{P}_1(\Lambda_n))$$

kümelerinin ailesi $\mathcal{K}_{1,n,1} = \{K(1,n,\Lambda,1) : \Lambda \in \mathcal{P}_1(\Lambda_n)\}$ tanımlansın.Bu aile X uzayında kesiklidir. Gerçekten, tıpkı Bölüm1, Yardımcı Teorem 8'in kanıtlamasında yapıldığı gibi, herhangi bir $x \in X$ alındığında, $x \notin (F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_n))$ ise, apaçıktır ki, x elemanının $\mathcal{K}_{1,n,1}$ ailesindeki hiçbir küme ile kesişmeyen açık bir civarı vardır; eğer $x \in F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_n)$ ise, $\mathcal{G}_n$ ailesinde bu elemanı içeren bir tek üye vardır ve bu üye G_{n,α_x} ise, apaçıktır ki $G_{n,\alpha_x} \cap K(1,n,\Lambda,1) = \emptyset$ $(\alpha_x \notin \Lambda)$ nedeniyle bu küme $\mathcal{K}_{1,n,1}$ ailesinde en fazla tek bir üye ile kesişir, ötekilerle ayrıktır. O halde $\mathcal{K}_{1,1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{1,n,1}$ ailesi sayılabilir üyelidir ve üstelik

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_n)) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{K}_{1,n,1})$$

gerçekleştiği görülmektedir. $\mathcal{K}_{1,1}$ ailesinin herbir üyesini kapsayan tek bir $\mathcal{U}$ üyesi belirleyerek $\mathcal{U}_{1,1}$ ailesi tanımlanmış olur. Şimdi, herbiri sayılabilir üyeli olan $\mathcal{U}_{1,1}, \mathcal{U}_{1,2}, ...\mathcal{U}_{1,m}$ ailelerinin tanımının

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{1 \leq k \leq m} (F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_k(\mathcal{G}_n)) \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq m} (\bigcup \mathcal{U}_{1,k}) \qquad (*)$$

koşulu gerçeklenecek biçimde yapılmış olması varsayımı altında $\mathcal{U}_{1,m+1}$ ailesinin tanımını başarmalıyız. Bu amaçla herbir $\Lambda \in \mathcal{P}_{m+1}(\Lambda_n)$ alt indis kümesi için

$$K(1,n,\Lambda,m+1) = (F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_{m+1}(\mathcal{G}_n) - \bigcup_{1 \leq k \leq m} (\bigcup \mathcal{U}_{1,k})) \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_{n,\alpha}$$

kümelerinin ailesi $\mathcal{K}_{1,n,m+1} = \{K(1,n,\Lambda,m+1) : \Lambda \in \mathcal{P}_{m+1}(\Lambda_n)\}$ tanımlansın. Bu aile X uzayında kesiklidir. Gerçekten herhangi bir $x \in X$ elemanı alındığında, eğer bu eleman

$$F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_{m+1}(\mathcal{G}_n) - \bigcup_{1 \leq k \leq m} (\bigcup \mathcal{U}_{1,k})$$

kapalı kümesine ait değilse, bu elemanın $\mathcal{K}_{1,n,m+1}$ ailesinde hiç bir üye ile kesişmeyen bir açık civarı vardır; yok eğer x elemanı bu kapalı kümeye ait ise, yukarıdaki (*) kapsama bağıntısı nedeniyle $\mathrm{ord}(x, \mathcal{G}_n) \leq m$ gerçekleşmesi sözkonusu olamayacağından $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda_x} G_{n,\alpha} = W_x$ ve $\mathrm{card}\Lambda_x = m + 1$

koşulu gerçeklenecek biçimde bir $\Lambda_x \in \mathcal{P}_{m+1}(\Lambda_n)$ vardır ve W_x açık kümesi apaçıktır ki $W_x \cap \bigcup_{\Lambda \neq \Lambda_x} K(1, n, \Lambda, m+1) = \emptyset$ gerçekler, kısacası $\mathcal{K}_{1,n,m+1}$ ailesinde birisi dışındaki tüm üyelerle ayrık olur. O halde bu aile ve sonuçta $\mathcal{K}_{1,m+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{1,n,m+1}$ ailesi sayılabilir üyelidir, herbir üyesini kapsayan tek bir $\mathcal{U}$ üyesini belirleyerek $\mathcal{U}_{1,m+1}$ ailesi tanımlanırsa, kolayca

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{1 \leq k \leq m+1} (F_1(\mathcal{G}^*) \cap F_k(\mathcal{G}_n)) \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq m+1} (\bigcup \mathcal{U}_{1,k})$$

gerçekleştiği görülür. O halde tüm $\mathcal{U}_{1,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) ailelerinin tümevarım yoluyla tanımlanması işlemi bitirilmiş olmaktadır. Şimdi tümü sayılabilir üyeli olan

$$\mathcal{U}_{1,1}, \mathcal{U}_{1,2}, \ldots, \mathcal{U}_{2,1}, \mathcal{U}_{2,2}, \ldots, \mathcal{U}_{n,1}, \mathcal{U}_{n,2}, \ldots$$

ailelerinin tanımının

$$F_n(\mathcal{G}^*) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{U}_{k,i})$$

koşulu gerçeklenecek biçimde tanımlanmış olduğunu varsayalım. Amacımız şimdi $\mathcal{U}_{n+1,1}$ ailesinin tanımını başarmaktır. Kolayca görüleceği gibi, herbir $\Lambda \in \mathcal{P}_1(\Lambda_k)$ için,

$$K(n+1, k, \Lambda, 1) = (F_{n+1}(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_k) - \bigcup_{1 \leq k \leq n} \bigcup_{i=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{U}_{k,i})) \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_{k,\alpha}$$

kümelerinden oluşan $\mathcal{K}_{n+1,k,1}$ olmak üzere, kesinlikle sayılabilir üyeli olan $\mathcal{K}_{n+1,1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n+1,k,1}$ ailesi tanımlanır ve

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_{n+1}(\mathcal{G}^*) \cap F_1(\mathcal{G}_k)) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{K}_{n+1,k,1}) \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{n+1,1}$$

gerçekleşecek biçimde sayılabilir üyeli $\mathcal{U}_{n+1,1} \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi tanımlanır. Şimdi $\mathcal{U}_{n+1,1}, \mathcal{U}_{n+1,2}, \ldots, \mathcal{U}_{n+1,m}$ aileleri tanımlanmış olunduğunda, herbir $\Lambda \in \mathcal{P}_{m+1}(\Lambda_k)$ için

$$(F_{n+1}(\mathcal{G}^*) \cap F_{m+1}(\mathcal{G}_k)) - (\bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{\infty}(\bigcup \mathcal{U}_{k,i}) \cup \bigcup_{j=1}^{m}(\bigcup \mathcal{U}_{n+1,j})) \cap \bigcap_{\alpha\in\Lambda} G_{k,\alpha}$$

kümelerine $K(n+1, k, \Lambda, m+1)$ denilirse, bunların oluşturduğu kesikli $\mathcal{K}_{n+1,k,m+1}$ aileleri aracılığıyla $\mathcal{K}_{n+1,m+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_{n+1,k,m+1}$ tanımlanarak, sayılabilir üyeli $\mathcal{U}_{n+1,m+1}$ ailesi belirlenir. Tüm bu sürecin sonunda, sayılabilir üyeli $\mathcal{U}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m} (\subseteq \mathcal{U})$ alt örtülüşünün

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(\mathcal{G}^*) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcup \mathcal{U}_{n,m}) = \bigcup \mathcal{U}^*$$

gerçeklediği anlaşılır. O halde $\mathcal{U}$ örtülüşünün sayılabilir üyeli bir alt ailesi tanımlanabilmektedir. $\square$

Bölüm 6

YARI-AÇIK ÖRTÜLÜŞLER VE YANTIKIZLIK

Bu bölümde yarı- açık örtülüşlerden yararlanarak, tümü H.Junnila'ya ait olan, yantıkızlık ve ötetıkızlık ile ilgili bazı karakterizasyonlar verilecektir, b.k.z.[17]. Bilindiği gibi bir X topolojik uzayında, $\mathcal{A}$ örtülüşüne, ancak ve yalnız, her $x \in X$ için $x \in$ iç$st(x, \mathcal{A})$ koşulu gerçekleniyorsa **yarı-açık örtülüş** denilir. Her zaman olduğu gibi $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ yazılacaktır. Her açık örtülüşün yarı-açık olduğu apaçıktır. Öte yandan her yerel sonlu kapalı örtülüş de yarı-açıktır, çünkü herhangi bir $\mathcal{K}$ yerel sonlu kapalı örtülüşü ve herhangi bir $x \in X$ alındığında $X = \bigcup \mathcal{K}_x \cup \bigcup(\mathcal{K} - \mathcal{K}_x)$ gerçeklendiğinden, ve herhangi bir uzayda $X = A \cup B$ ise iç$X =$ iç$(A \cup B) \subseteq$ iç$A \cup \overline{B} \subseteq X$ nedeniyle $X =$ iç$A \cup \overline{B}$ geçerli ve ayrıca $\mathcal{K}$'nın yerel sonluluğu nedeniyle $x \notin \bigcup(\mathcal{K} - \mathcal{K}_x) = \overline{\bigcup(\mathcal{K} - \mathcal{K}_x)}$ olduğundan, sonuçta $x \in$ iç$\bigcup \mathcal{K}_x \subseteq \bigcup \mathcal{K}_x = st(x, \mathcal{K})$ gerçeklenir. Yine bilindiği gibi $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X uzayının örtülüşleri olmak üzere $\mathcal{V}$'nin her üyesi $\mathcal{U}$'nun uygun sonlu sayıda üyesinin birleşimi tarafından kapsanabiliyorsa $\mathcal{V}$'ye, $\mathcal{U}$'nun **S-incelmesi** denilir. Her tür incelme apaçıktır ki bir S-incelmesidir. Şimdi başta söz ettiğimiz karakterizasyonlara geçebiliriz.
Yardımcı Teorem 1:X *uzayının her yerel sonlu, yarı-açık örtülüşünün yerel sonlu kapalı S-incelmesi vardır.*
Kanıtlama:$\mathcal{A}$ örtülüşü X uzayının yerel sonlu, yarı-açık bir örtülüşü olsun. $\mathcal{A}$'nın herhangi bir $\mathcal{A}'$ alt ailesinden yararlanarak

$$K(\mathcal{A}') = \overline{\bigcap \mathcal{A}'} - \text{iç}\bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$$

kapalı kümesini tanımlayalım. Dikkat edilirse $\mathcal{A}'$ sonsuz üyeli bir alt aile ise $\bigcap \mathcal{A}' = \emptyset$ olduğundan $K(\mathcal{A}') = \emptyset$ gerçekleşir. $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ olsa; en az bir $x \in X$ için ord$(x, \mathcal{A}) \geq \omega_0$ sağlanırdı, bu aynı zamanda noktasal sonlu olan $\mathcal{A}$ yerel sonlu örtülüşü için olanaksızdır. Her $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ için, $K(\mathcal{A}')$ kümesi ile $\mathcal{A}'$ alt ailesi arasındaki ilişki $K(\mathcal{A}') \subset \bigcup \mathcal{A}'$ biçimindedir. Kapsamanın gerçeklendiğini gösterebilmek için $x \in K(\mathcal{A}')$ alalım. $x \notin$ iç$\bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ ve

$\mathcal{A}$ yarı-açık olduğundan $x \in$ iç$\bigcup \mathcal{A}_x$ sağlanır. Bu durumda öyle bir $A_0 \in \mathcal{A}'$ vardır ki $A_0 \in \mathcal{A}_x$ sağlanır, çünkü $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}_x = \emptyset$ olsaydı $x \in$ iç$\bigcup \mathcal{A}_x \subseteq$ iç$(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ bulunurdu. Dolayısıyla $x \in A_0 \subseteq \mathcal{A}'$ elde edilir. $\mathcal{K} = \{K(\mathcal{A}') : \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}\}$ kapalı kümeler ailesi $\mathcal{A}$ örtülüşünün aranan yerel sonlu, S-incelmesidir. Çünkü $\mathcal{A}$'nın X'in yerel sonlu örtülüşü olması nedeniyle $\mathcal{A}_x$'in $\mathcal{A}$'nın sonlu üyeli alt ailesi olduğuna dikkat ederek $x \in K(\mathcal{A}_x)$ olduğu kolayca görülür. Yukarıda $\mathcal{K}$'nın her üyesinin $\mathcal{A}$'nın sonlu üyeli alt kümelerinin birleşimi tarafından kapsandığını gösterdiğimizden $\mathcal{K}$ örtülüşü $\mathcal{A}$'nın bir S-incelmesidir. Dolayısıyla $\mathcal{K}$'nın X uzayının yerel sonlu örtülüşü olduğunu gösterirsek kanıtlama bitmiş olur. Bilindiği gibi $\mathcal{A}$ yerel sonlu olduğundan $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$ ailesi de yerel sonlu dolayısıyla noktasal sonludur. Bu nedenle sonlu olan $\mathcal{A}_x^* = \{A \in \mathcal{A} : x \in \overline{A}\}$ alt aile yardımıyla tanımlanan $O_x = X - \overline{\bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)}$ açık kümesi x noktasını içerir. Çünkü $x \notin \bigcup(\mathcal{A} - \mathcal{A}_x^*) = \bigcup_{A \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_x^*} \overline{A}$ ve $\mathcal{A}$ yerel sonlu alt ailesi kapanış koruduğundan $x \notin \overline{(\bigcup \mathcal{A} - \mathcal{A}_x^*)}$ yani $x \in O_x$ bulunur. Şimdi $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ve $K(\mathcal{A}') \cap O \neq \emptyset$ iken $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}_x^*$ olduğunu gözlemleyelim. Böylece O_x komşuluğu ile kesişen ancak sonlu sayıda $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ alt ailesi olduğu gösterilmiş olacak. $K(\mathcal{A}') \cap O_x \neq \emptyset$ ise $\overline{\bigcap \mathcal{A}'} \cap O_x \neq \emptyset$ ve $\overline{\bigcap \mathcal{A}'} \cap O_x \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{A}' \cap O_x}$ olduğundan $\bigcap \mathcal{A}' \cap O_x \neq \emptyset$ bulunur. Dolayısıyla her $A \in \mathcal{A}' \subseteq \bigcup \mathcal{A}_x^*$ olduğundan, her $A \in \mathcal{A}'$ için $A \cap (\bigcup \mathcal{A}_x^*) \neq \emptyset$ yani $A \in \mathcal{A}_x^*$ bulunur, kanıtlama biter.

$\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X uzayının örtülüşleri olmak üzere, her bir $x \in X$ için aşağıdaki özellik sağlanacak biçimde uygun bir $\mathcal{U}' \in \mathcal{P}_{<\omega_0}(\mathcal{U}_x)$ alt ailesi bulunabiliyorsa $\mathcal{V}$'ye $\mathcal{U}$ örtülüşünün **zayıf noktasal sonlu incelmesi** denilir. Her noktasal sonlu incelme, apaçıktır ki zayıf noktasal sonlu bir incelmedir.

$$\forall V \in \mathcal{V}_x,\ \exists U_V \in \mathcal{U}',\ V \subseteq U_V$$

Yardımcı Teorem 2:X *topolojik uzayının her noktasal sonlu, yarı-açık incelmeye sahip açık örtülüşünün açık, zayıf noktasal sonlu incelmesi vardır.*
Kanıtlama:$\mathcal{U}$, X uzayının $\mathcal{A}$ gibi noktasal sonlu, yarı-açık incelmesine sahip açık örtülüşü olsun. $\mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ örtülüşünün incelmesi olduğundan herbir $A \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq U_A$ koşulu gerçeklenecek biçimde $U_A \in \mathcal{U}$ vardır. Şimdi herbir $x \in X$ için; $\mathcal{U}(x) = \{U_A : A \in \mathcal{A}_x\}$ sonlu ailesini ($\mathcal{A}$ noktasal sonlu olduğundan $\mathcal{A}_x$ ve sonuçta $\mathcal{U}_x$ sonlu üyelidir) ve x noktasının $V(x) =$ iç$st(x, \mathcal{A}) \cap \bigcap \mathcal{U}(x)$ açık komşuluğunu ($\mathcal{A}$ yarı-açık olduğundan $st(x, \mathcal{A})$ x'in komşuluğudur, dolayısıyla $x \in$ iç$st(x, \mathcal{A})$ sağlanır) tanımlayalım.

X uzayının $\mathcal{V} = \{V(x) : x \in X\}$ açık örtülüşü $\mathcal{U}$ örtülüşünün aranan zayıf noktasal sonlu incelmesidir. Herhangi bir $x \in X$ için $x \in V(x)$ ile birlikte $x \in V(y)$ gerçekleyen $y \in X$ varolabilir. $x \in V(x)$ iken $V(x)$, $\mathcal{U}(x)$ sonlu alt ailesinin herhangi bir üyesi tarafından kapsanır. $y \neq x$ için $x \in V(y)$ ise; $x \in st(y, \mathcal{A})$ bulunur. Böylece $x \in A'$ ve $y \in A'$ koşullarını sağlayan $A' \in \mathcal{A}$ bulunur. $\mathcal{A}, \mathcal{U}$ örtülüşünün incelmesi olduğundan $A' \subseteq U_{A'} \in \mathcal{U}(x)$ özelliğini sağlayan $U_{A'} \in \mathcal{U}$ vardır ve $V(y) \subseteq U_{A'}$ bulunur. Böylece herbir $V \in \mathcal{V}_x$ için, $\mathcal{U}$ örtülüşünün $\mathcal{U}(x)$ sonlu alt ailesinin bazı üyeleri tarafından kapsandığını göstermiş olduk.

Yardımcı Teorem 3:$\mathcal{A}$, *X uzayının noktasal sonlu, yarı-açık örtülüşü ve herbir $A \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{B}(A)$, X uzayının A alt uzayında (noktasal sonlu) yarı-açık örtülüş olsun. Bu durumda, $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ailesi X uzayının (noktasal sonlu) yarı-açık örtülüşüdür.*

Kanıtlama:$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}(A)$ $(\forall A \in \mathcal{A})$ noktasal sonlu olduğundan $\mathcal{B}$ örtülüşünün noktasal sonlu olduğunu görmek kolaydır. $\mathcal{B}$'nin yarı-açık olduğunu göstermek için herhangi bir $x \in X$ alalım. Herbir $A \in \mathcal{A}_x$ için $\mathcal{B}(A)$ X'in A alt uzayında yarı-açık örtülüş olduğundan, $st(x, \mathcal{B}(A))$, A alt uzayında x noktasının komşuluğudur. Alt uzay tanımından x noktasının X uzayında $O(A) \cap A = st(x, \mathcal{B}(A))$ gerçeklenecek biçimde $O(A)$ komşuluğu vardır. Şimdi x noktasının $O(A)$ komşuluklarından faydalanarak $O = st(x, \mathcal{A}) \cap \{O(A) : A \in \mathcal{A}_x\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{A}$, X uzayında yarı-açık örtülüş olduğundan O, noktasının komşuluğudur. Herhangi bir $y \in O$ alınırsa $y \in st(x, \mathcal{A})$ olduğundan $y \in A'$ olacak biçimde $A' \in \mathcal{A}_x$ vardır. Dolayısıyla $x \in A' \cap O(A') = st(x, \mathcal{B}(A')) \subseteq st(x, \mathcal{B})$ yani sonuçta $O \subseteq st(x, \mathcal{B})$ elde edilir. Ve böylece $\mathcal{B}$'nin , X uzayının yarı-açık örtülüşü olduğu gösterilmiş olur.

Bilindiği gibi f X'den Y topolojik uzayına bir fonksiyon olmak üzere, eğer herbir $y \in Y$ için X uzayında $f^{-1}(y)$ kümesinin U komşuluğu ne olursa olsun, $f(U)$ Y uzayında y noktasının bir komşuluğu oluyorsa f fonksiyonununa **sözde-açık (=pseudo-open)** denilir.

Yardımcı Teorem 4:$\mathcal{A}$, *X topolojik uzayının yarı-açık örtülüşü ve f, X'den Y topolojik uzayı üzerine sözde-açık fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{B} = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ailesi Y uzayı için bir yarı-açık örtülüşdür.*

Kanıtlama:$\mathcal{B}$, Y uzayının bir örtülüşüdür. Çünkü $\mathcal{A}$, X uzayının örtülüşü ve f, üzerine olduğundan, $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} f(A) = f(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) = f(X) = Y$ sağlanır. $\mathcal{B}$ aynı zamanda yarı-açıktır. Bunu gösterebilmek için herhangi bir $y \in$

Y alalım. $st(y, \mathcal{B}) = \bigcup_{y \in f(A)} f(A) = f(\bigcup_{y \in f(A)} A) = f(\bigcup_{f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset} A) = f(st(f^{-1}(y), \mathcal{A})) = f(\bigcup_{x \in f^{-1}(y)} st(x, \mathcal{A})) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} f(st(x, \mathcal{A}))$ eşitliği geçerlidir. $\mathcal{A}$, X uzayının yarı-açık örtülüşü olduğundan $st(x, \mathcal{A})$ $(\forall x \in f^{-1}(y))$ x noktasının komşuluğudur ve f sözde-açık olduğundan $f(st(x, \mathcal{A}))$, y noktasının Y uzayında komşuluğudur. Herhangi sayıda komşuluğun birleşimi yine komşuluk olacağından $st(y, \mathcal{B})$ yıldız kümesi Y uzayında y noktasının komşuluğudur.

Bundan sonra yarı-açık kavramından yararlanarak yantıkızlık ile ilgili karakterizasyonlar vereceğiz. Herhangi bir kümeler ailesi kapsama bağıntısına göre iyi sıralı ise, monoton olduğunu hatırlayarak bu karakterizasyonlara geçelim.

Teorem 1: *Bir topolojik uzayın yantıkız olması için g.y.k. her monoton açık örtülüşünün yerel sonlu açık incelmeye sahip olmasıdır.*

Kanıtlama: Yeterlik gösterilmelidir. X uzayının her monoton açık örtülüşünün yerel sonlu yarı-açık incelmesi var olsun. Şimdi bu koşul altında öncelikle şu iddiayı ispatlayalım. X uzayının her açık örtülüşünün yerel sonlu kapalı S-incelmesi vardır. $\mathcal{U}$, X'in sonlu üyeli bir açık örtülüşü ise, X uzayının yerel sonlu, açık (dolayısıyla yarı-açık) örtülüşü olacağından Yardımcı Teorem 1'den $\mathcal{U}$ yerel sonlu kapalı S-incelmesine sahiptir. $\mathcal{U}$ örtülüşünün kardinalitesi ne olursa olsun iddianın doğru olduğunu göstermek için sonlu ötesi tümevarım kullanacağız. k her $h < k$ için iddianın doğru olduğu sonsuz kardinal sayı ve $\mathcal{U}$, X'in $|\mathcal{U}| = k$ özelliğini sağlayan açık örtülüşü olsun. γ, k kardinal sayısına karşılık gelen ilk ordinal sayı olmak üzere $\mathcal{U}$ örtülüşünü $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$ formunda ifade edeceğiz. Herbir $\alpha < \gamma$ için $V_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} U_\beta$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \gamma\}$ X uzayının monoton açık örtülüşüdür. Yeterlik varsayımımız nedeniyle $\mathcal{V}$'nin $\mathcal{K}$ gibi yerel sonlu kapalı S-incelmesi vardır. K, $\mathcal{K}$ ailesinin bir üyesi olsun. $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$'nin S-incelmesi olduğundan K, $\mathcal{V}$ ailesinin sonlu alt ailesinin birleşimi tarafından kapsanır ve $\mathcal{V}$ monoton artan olduğundan K birleşime katılan kümelerden birisi tarafından kapsanır. Sözkonusu küme $V_{\alpha(K)} (\supseteq K)$ $(\alpha(K) < \gamma)$ olsun. $W(K) = \{X - K\} \cup \{U_\alpha : \alpha \leq \alpha(K)\}$ ailesi $K \subseteq V_{\alpha(K)} \subseteq \bigcup_{\beta \leq \alpha(K)} U_\beta$ olduğundan, X uzayının $\mathcal{W}(K) < k$ özelliğini sağlayan açık örtülüşüdür. İddiamıza göre $\mathcal{W}(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}(K)$ gibi yerel sonlu kapalı F-incelmesine sahiptir. Her $K \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{F}' = \{F \cap K : F \in \mathcal{F}(K)\}$ X uzayının K alt uzayının yerel sonlu kapalı örtülüşüdür. $\mathcal{F}$ ailesinin herhangi bir $F \cap K$ $(F \in \mathcal{F}(K))$ kümesi alınsın. $\mathcal{F}(K)$, $\mathcal{W}(K)$'nın S-incelmesi olduğundan F, $\mathcal{W}(K)$'nın sonlu tane üyesinin birleşimi tarafından kapsanır. Yani $F \subseteq \{X - K\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ ve buradanda $F \cap K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cap K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ elde edilir. Böylece $\mathcal{F}$ ailesinin

her üyesinin $\mathcal{U}$ örtülüşünün sonlu üyesinin birleşimi tarafından kapsandığı yani $\mathcal{U}$ örtülüşünün S -incelmesi olduğu gösterilmiş oldu. Böylece iddianın kanıtlaması bitirilmiş olur.
X uzayında her açık örtülüşün kapalı yerel sonlu S-incelmesine sahip olduğunu gösterdik. Her yönlü örtülüş kendisinin S-incelmesidir. Dolayısıyla X'in her yönlü açık örtülüşünün yerel sonlu kapalı incelmesi vardır. Dolayısıyla X ötetıkızdır. □

Teorem 2:*Bir topolojik uzayın ötetıkız olması için g.y.k. uzayın her açık örtülüşünün nokta sonlu, yarı-açık incelmeye sahip olmasıdır.*
Kanıtlama: Gereklik açıktır. Yeterliği göstermek için X uzayının herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşü alınsın. Varsayımımızdan $\mathcal{U}$'nun, $\mathcal{V}$ gibi noktasal sonlu, yarı-açık incelmesi vardır. Yardımcı Teorem 2'den bu durumda $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ gibi açık, zayıf noktasal sonlu incelmeye sahiptir. Bir topolojik uzayın her açık örtülüşünün açık zayıf noktasal sonlu incelmesinin olması durumunda ötetıkız olacağı bilgisiyle teorem kanıtlanmış olur. □

Bu bölümü Teorem 2'nin iki sonucu ile bitireceğiz:
Sonuç 1: Bir topolojik uzay her üyesi uzayın ötetıkız alt uzayı tarafından içerilen noktasal sonlu, yarı-açık örtülüşe sahip ise ötetıkızdır.
Kanıtlama:$\mathcal{A}$, X uzayının her $A \in \mathcal{A}$ için $A \subset M(A)$ olacak biçimde $M(A)$ ötetıkız altuzayının varolduğu, noktasal sonlu, yarı-açık örtülüşü olsun. Bu varsayım altında $\mathcal{U}$, X uzayının herhangi bir açık örtülüşü olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{U}|M(A) = \{U \cap M(A) : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X uzayının $M(A)$ alt uzayının açık örtülüşü ve $M(A)$ ötetıkız olduğundan sözkonusu açık örtülüşün $M(A)$ uzayında $\mathcal{V}(A)$ gibi noktasal sonlu, açık incelmesi vardır. $A \subset M(A)$ olduğundan $\mathcal{V}(A)$, A için de bir noktasal sonlu örtülüştür. Dolayısıyla her $A \in \mathcal{A}$ için $\mathcal{V}'(A) = \{V \cap A : V \in \mathcal{V}(A)\}$ ailesi A alt uzayının noktasal sonlu açık örtülüşüdür.
$\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}'(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ailesinin X uzayının noktasal sonlu, yarı-açık örtülüşü olduğu Yardımcı Teorem 3'den elde edilir. Aynı zamanda $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ için bir incelmedir. Çünkü herhangi bir $V \in \mathcal{V}(A)$ ve $A \in \mathcal{A}$ için; $\mathcal{V}(A)$ $\mathcal{U}|M(A)$'nın incelmesi olduğundan $V \subset U_V \cap M(A)$ olacak biçimde $U_V \in \mathcal{U}$ vardır. Dolayısıyla, $V \cap A \subseteq V \subseteq U_V \cap M(A) \subseteq U_V$ sağlanır. Böylece X uzayının her açık örtülüşünün noktasal sonlu, yarı-açık incelmeye sahip olduğunu gösterdik. Böylece Teorem 2'den X ötetıkız bulunur.
Sonuç 2: Yantıkız uzayın sözde-açık, tıkız fonksiyon altında sürekli görüntüsü

ötetıkızdır.

Kanıtlama: f, X yantıkız uzayından Y topolojik uzayı üzerine sözde-açık, tıkız sürekli fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$, Y uzayının herhangi bir açık örtülüşü olsun. Bu durumda $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} f^{-1}(U)$ ve f sürekli dolayısıyla her $U \in \mathcal{U}$ için $f^{-1}(U)$ X uzayında açık olduğundan $Q = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ X uzayının açık örtülüşü olur. X yantıkız olduğundan sözkonusu örtülüşün $\mathcal{V}$ gibi yerel sonlu, açık incelmesi vardır. Şimdi $\mathcal{V}$ örtülüşünden yararlanarak oluşturulan $\mathcal{G} = \{f(V) : V \in \mathcal{V}\}$ ailesini gözönüne alalım. f üzerine olduğundan $Y = f(X) = f(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V) = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} f(V)$ gerçeklenir. Aynı zamanda $\mathcal{V}$, X de Q'nun incelmesi olduğundan her $V \in \mathcal{V}$ için $V \subseteq f^{-1}(U)$ olacak biçimde $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu kapsamadan $f(V) \subseteq ff^{-1}(U) \subseteq U$ elde edilir. Dolayısıyla Y topolojik uzayında $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$'nun incelmesidir. $\mathcal{V}$, X uzayının açık dolayısıyla yarı-açık örtülüşü ve f, X'den Y üzerine sözde-açık fonksiyon olduğundan Yardımcı Teorem 4'den $\mathcal{G}$, Y uzayında yarı-açık örtülüş bulunur. $\mathcal{G}$ aynı zamanda noktasal sonludur. Bunu gösterebilmek için herhangi bir $y \in Y$ alınsın. f tıkız olduğundan $f^{-1}(\{y\})$ X'in tıkız alt kümesidir. Her $V \in \mathcal{V} - \mathcal{V}'$ için $f^{-1}(\{y\}) \cap V = \emptyset$ gerçeklenecek biçimde $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ sonlu üyeli alt ailesi vardır. Bu eşitlikten $f(f^{-1}(\{y\}) \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$ ve nihayet $\{y\} \cap f(V) = \emptyset$ elde ederiz. Böylece her $y \in Y$'nin $\mathcal{G}$'nin sonlu sayıda elemanına ait olduğu gösterilmiş oldu. Y topolojik uzayının herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün noktasal sonlu, yarı-açık incelmeye sahip olduğu gösterildi. Dolayısıyla Teorem 2'den Y ötetıkız bulunur.

Bölüm 7

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, 1944 yılında Jean Dieudonne tarafından [18] tanımlandıktan kısa bir süre sonra, Arthur H.Stone ve R.H.Bing'in iki tarihsel ve ünlü makalesi aracılığıyla, metriklenebilme teorisindeki temel ve olağanüstü önemi anlaşılan ve tıkızlık kavramının en ünlü ve en önemli genelleştirmesi sayılan **yantıkızlık** kavramının ve onun bazı tanınmış genelleştirmelerinin temel özellikleri üzerine bilinen en önemli sonuçlar anlatılmıştır. Kendi içinde yeterli bütünlüğe sahip bu tez çalışması, böylelikle yantıkızlık ve benzeri kavramlar üzerine bir tür giriş niteliğinde bir kitap olarak nitelendirilebilir. Yantıkız uzayların Genel Topoloji'deki önemi kuşkusuz, buradaki sonuçların ötesine geçer. Ayrıca çağdaş Diferansiyel Geometri'nin temel uzayları olan Manifold'ların ve daha genel olarak Yerel Öklid Uzayları'nın yantıkız olduğu unutulmamalıdır.

Yantıkız Hausdorff uzaylarının derlemsel normal olmaları nedeniyle, yantıkızlık kavramının, Normal Uzayların topolojik yapısının anlaşılmasında da önemli görevleri vardır. İki normal T_2 uzayının çarpım uzayının normal olmasının gerekmediği, dahası tıkız bir metriklenebilir uzay ile normal bir T_2 uzayının çarpım uzayının bile normal olmasının gerekmediği bilindiğinden, hangi normal T_2 uzaylarının çarpımının normal olabildiğini sorgulayan araştırmaların kimisinde, yantıkız uzaylar kilit görevler üstlenirler. Örneğin, bu konuda H.Tamano'nun 1960 yılında kanıtladığı ünlü sonuç aşağıdadır:

Tamano Teoremi: *X normal bir T_2 uzayı ve tX onun bir tıkızlaştırması ise $X \times tX$ çarpım uzayının normal olabilmesi için g.y.k. X'in yantıkız olmasıdır.*

Öte yandan, bu konuda bir başka önemli sonuç, 1975 yılında Mary Ellen Rudin ve öğrencisi Micheal Starbird tarafından kanıtlanan aşağıdakidir:

Rudin&Starbird Teoremi: *X metriklenebilir ve Y yantıkız bir T_2 uzayı ise $X \times Y$ çarpım uzayının normal olabilmesi için g.y.k. bu çarpımın yantıkız olmasıdır.*

Yantıkızlık kavramı ile ilgili bir başka zorlu ve sıradışı problem ünlü **Dowker Öngörüsü** olmuştur. C.H.Dowker, 1951 yılında yazdığı ünlü makalesinde, her normal T_2 uzayının **sayılabilir yantıkız** olduğunu, kısacası bu uzayların sayılabilir üyeli her açık örtülüşlerinden, yerel sonlu ve sayılabilir üyeli açık bir incelme elde edebildiklerini öngördü. Dowker bu öngörüyü yaparken, normal bir T_2 uzayının sayılabilir yantıkız olması savı ile, bu uzaydaki, sayılabilir üyeli herhangi bir $\mathcal{G} = \{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtülüşüne karşılık, $\overline{U_n} \subseteq G_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ tam daralma koşulunu gerçekleyen bir $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtülüşünün varlığı savının eşdeğer olduğu gerçeğinden esinlenmişti. İyi bilindiği gibi normal bir uzayda, bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün, eğer noktasal sonlu ise, bu nitelikte bir açık incelmesi vardır. Bu zorlu ve sıradışı öngörünün yanlış olduğu, ortaya atılışından 20 yıl sonra Amerikalı Mary Ellen Rudin tarafından kanıtlanmıştır. Bu usta kadın topolog, sayılabilir yantıkız olmayan normal T_2 uzaylarının var olduğunu kanıtlayarak, bu tür uzaylara **Dowker Uzayı** demiştir. Bu soruyla ilişkili ve ilginç bir başkası, normal olmayan, düzenli ve sayılabilir yantıkız T_2 uzaylarının varlığı sorusudur. Bu nitelikteki T_2 uzaylarına **Karşıt-Dowker Uzayı** denilir. Bu tür uzayların varlıklarını, metriklenebilme sorusuyla ilişkilendiren aşağıdaki ünlü sonuç, Amerikalı Micheal Wage tarafından 1976 yılında kanıtlanmıştır. Bilindiği gibi düzenli ve açınır T_2 uzaylarına, onları ilk kez tanımlayan Amerikalı usta Matematikçinin adı verilerek **Moore uzayı** denilir.

Wage Teoremi: *Metriklenemeyen normal bir Moore uzayı varsa, bir Karşıt-Dowker Uzayı vardır.*

Yantıkız uzaylar, ayrıca, genelleştirilmiş metrik uzaylar kavramının tanımlanması ve kavranmasında belirleyici görevler üstlenmiştir. Bir (X, τ) topolojik uzayına, ancak ve yalnız, aşağıdaki koşullar gerçeklenecek biçimde bir $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \tau$ fonksiyonu tanımlanabilirse **yarı-katmanlanabilir uzay**

(=**semi-stratifiable space**) denilir:

$$i)\ \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x) \quad (\forall x \in X)\ ,\ ii)\ y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} g(n,x_n) \quad \text{ise} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Üstelik, bunların yanısıra $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{g(n,K)}$ koşulu her $K \subseteq X$ kapalı kümesi için gerçekleniyorsa, bu uzaya **katmanlanabilir uzay** denilir, burada her $A \subseteq X$ için $g(n,A) = \bigcup_{x\in A} g(n,x)$ yazılmıştır. Her katmanlanabilir uzayın yantıkız ve her yarı-katmanlanabilir uzayın ise alt yantıkız olduğu bilinmektedir, kısacası bu iki kavram hem metrik uzay ve hem de yantıkızlık kavramlarını genelleştirmiş olmaktadır. Öte yandan, bir $\mathcal{A}$ ailesine, bir topolojik uzayda, ancak ve yalnız, $\mathcal{B} = \{\text{iç}A : A \in \mathcal{A}\}$ bu uzayda bir taban olabiliyorsa **sözde taban** denilir. Metrik uzayların en önemli genelleştirmelerin birisi olan M_2 **uzayları**, σ-kapanış koruyan bir sözde tabanları tanımlanabilen topolojik uzaylara denilir. Aşağıdaki ünlü teorem, sırasıyla, bağımsız olarak 1976 ve 1978 yıllarında Gary Gruenhage ve Heikki Junnila tarafından kanıtlanmıştır.

Gruenhage&Junnila Teoremi: *Bir Tikhonov uzayının katmanlanabilir olabilmesi için g.y.k. bir M_2-uzayı olmasıdır.*

Yantıkız uzaylar ve genelleştirmeleri ile genelleştirilmiş metrik uzaylara ilişkin, yakın yıllarda kanıtlanmış pek çok önemli karakterizasyon ve çözülmemiş soru için Kaynakça'da verilen **Handbook of Set-Theoretic Topology** ve **Recent Progress in Topology** başlıklı, kapsamlı ve ansiklopedik kitaplarda, ilgili bölümlere başvurulmalıdır, b.k.z.[19],[20]. Sözü edilen bölümlerin kaynakçalarında, bu konulara ilişkin çok sayıda kaynak nitelikli makale yazılıdır. Kısacası yantıkızlık ve benzeri kavramlar üzerine, pek çok sıradışı soru ve sonuç, Genel Topoloji'nin gündeminde ön sıralardaki önem ve çekiciliklerini korumaktadır.

Kaynakça

[1] BAGLEY R.W.&E.H. CONNELL&J.D. MCKNIGHT Jr
On properties characterizing pseudocompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **9**(1958), 500-506.

[2] WORRELL J.M.&H.H. WICKE
Characterizations of developable spaces, Canad. J. Math. **17**(1965),820-829.

[3]BURKE D.K.
On p-spaces and wΔ-spaces, Pacific J.Math.**35**(1970),285-296.

[4] STONE A.H.
Paracompactness and product spaces, Bull.Amer.Math.Soc. **54**(1948),977-982.

[5] BING R.H.
Metrization of Topological sapces, Canad. J. Math.**3**(1951), 175-186.

[6] MICHEAL E.
A note on paracompact spaces, Proc.Amer.Math.Soc. **4**(1953),831-838.

[7]MICHEAL E.
Another note on paracompact spaces, Proc.Amer.Math.Soc. **8**(1958),822-828.

[8] MICHEAL E.
Point-finite and locally finite coverings, Canad.J.Math. **7**(1955),275-279.

[9] BENNETT H.&D.LUTZER
A note on weak θ-refinability, Gen. Topology Apply. **2**(1972), 49-54.

[10] BURKE D.K.
On subparacompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **23**(1969), 655-663.

[11] MCAULEY L.F.
A note on complete collectionwise normality and paracompactness, Proc. Amer. Math. Soc. **9**(1958),796-799.

[12] CHABER J.
On supparacaompact and related properties, Gen. Topology Appl. **10**(1979), 13-17.

[13] WICKE H.H.&J.M. WORRELL Jr.
Point-countability and compactness, Proc. Amer. Math. Soc. **55**(1976),427-431.

[14] CHABER J.
Conditions which imply compactness in countably compact spaces, Bull.Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **24**(1976), 993-998.

[15] WATSON W.S.
Pseudocompact metacompact spaces are compact, Proc. Amer. Math. Soc. **81**(1981),151-152.

[16] SMITH J.C.
Properties of weak $\overline{\theta}$-refinable spaces, Proc.Amer.Math.Soc. **53**(1975),511-517.

[17] JUNNILA H.J.K.
Paracompactness, metacompactness and semi-open covers, Proc. Amer. Math. Soc. **73**(1979),244-248.

[18] DIEUDONNE J.
Une generalisation des espaces compacts, J. Math. Pures Apply. **23**(1944), 65-76.

[19] HUSEK M.&J. VAN MILL
Recent Progress in General Topology, North-Holland, 1992.

[20] KUNEN K.&J.E. VAUGHAN
Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984.

Özgeçmiş

01.05.1978 tarihinde G.Antep'in İslahiye ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi sırasıyla Muratpaşa İlköğretim Okulu, Mehmet Bayazıt, Gaziemir ve Prof. Faik Somer Liselerinde tamamladım. 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandım. 1999 yılında mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım. Kasım 1999 tarihinde İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dal'ında araştırma görevlisi olarak atandım ve halen bu bölümde görevimi sürdürmekteyim.

Dizin