İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARI-RİEMANN ALT-KAPSAMALAR

Hakan Mete TAŞTAN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN

Haziran, 2005

İSTANBUL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER ii
SEMBOL LİSTESİ iii
ÖZET iv
SUMMARY v
1. GİRİŞ 1
2. GENEL KISIMLAR 3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler 3
2.2. Riemann Alt-Kapsama ile İlgili Temel Bilgiler 8
2.3. **T** ve **A** Temel Tensörleri 9
2.4. Temel Tensörlerin Kovaryant Türevleri 13
2.5. Temel Denklemler 14
2.6. Liflerin Tümel Jeodezik Olma Durumu 20
2.7. Ters-de Sitter Uzayda Lifleri Tümel Jeodezik Olan
Yarı-Riemann Alt-Kapsamalar 23
2.8. Örnekler 30
3. BULGULAR 33
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 45
KAYNAKLAR 47
ÖZGEÇMİŞ 48

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim ve tez çalışmalarım sırasında benden yardımlarını esirgemeyen ve her zaman destekleyen değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Erdoğan'a teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2005 **Hakan Mete Taştan**

SEMBOL LİSTESİ

$p,\ q$	**:** noktalar
$\mathbb{R}$	**:** reel sayılar
$\mathbb{C}$	**:** karmaşık sayılar
$\mathrm{S}^n(r)$	**:** $n-$boyutlu ve r-yarı çaplı küre
$M,\ B$	**:** manifoldlar
E, F, G	**:** keyfi vektör alanları
U, V, W	**:** düşey vektör alanları
X, Y, Z	**:** yatay vektör alanları
∇	**:** bağlantı, kovaryant türev operatörü
$\aleph(M)$	**:** *M* üzerindeki vektör alanları kümesi
$\Im(M)$	**:** *M* üzerindeki düzgün fonksiyonlar kümesi
$\tau_s^r(M)$	**:** *M* üzerindeki (s,r) tipinden tensörler kümesi
κ	**:** kesitsel eğrilik
$\Re$	**:** Riemann eğriliği
Ω	**:** devirsel toplam operatörü

ÖZET

YARI-RİEMANN ALT-KAPSAMALAR

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu hakkında literatürde yer alan çalışmaların genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

İkinci bölüm sekiz alt bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2.1. de tez konusuyla ilgili temel tanım ve teoremler, Bölüm 2.2. de ise tezin asıl konusu olan Riemann alt-kapsamanın tanımı verilmiştir. Bölüm 2.3. de Riemann alt-kapsamaların çalışmasında önemli yer tutan T ve A tensörlerinin tanımları ve temel özellikleri, bir sonraki bölümde ise bu tensörlerin kovaryant türevleri ile ilgili denklemlere yer verilmiştir. Bir Riemann alt-kapsamanın, daldırmalardaki Gauss ve Codazzi denklemlerine benzer olan altı tane temel denklemi Bölüm 2.5. de verilmektedir. Bölüm 2.6. da bir Riemann alt-kapsamanın liflerinin tümel jeodezik alt manifold olma durumu irdelenmiştir. Bölüm 2.7. de ise bir Riemann alt-kapsamanın, tümel uzayını ters-de Sitter uzay seçerek, bu durumda liflerinin tümel jeodezik olma koşulu incelenmiştir. Tez konusunun daha iyi anlaşılmasını sağlayacak örnekler son alt bölümde sunulmuştur.

Tez çalışmasının bulgularını içeren üçüncü bölümde; tez konusunu açık olarak ifade eden basit ve özgün iki örnek, Yardımcı Teorem 2.4.1., Teorem 2.7.2 ile Yardımcı Teorem 2.7.3. ün genelleştirilmeleri ve beş tane de konuyla ilgili sonuç yer almaktadır.

Son bölümde ise tezle ilgili bir tartışma ile konunun genel bir değerlendirilmesine yer verilmiştir.

SUMMARY

SEMI-RIEMANNIAN SUBMERSIONS

This thesis contains four chapters. In the first chapter, it is given a general literacy evaluation about the thesis.

The second chapter contains eight sections. In section 2.1., fundamental definitions and theorems used in content of the thesis are given. Section 2.2. includes the definition of a Riemannian submersion that is main topic of the thesis. Definitions of tensors T and A which are main tools for study a Riemannian submersion are included in section 2.3. Next section covers covariant derivatives of T and A and the relations between them. In Section 2.5,, we defined six equations for Riemannian submersion which play role like Gauss and Codazzi equations for embeddings.The Riemannian submersion whose fibers being totally geodesic are investigated in section 2.6. In section 2.7., considering the total space of submersion as anti-de Sitter space, the necessary conditions for the fibers to be totally geodesic are examined. Examples that clarify the topic of thesis are shown in the last section.

Third chapter including the original part of the study contains two interesting examples which clarifying the topic. This chapter also covers a lemma and a generalization of Theorem 2.7.2. and Lemma 2.7.3 and also five results.

In the last chapter, a discussion about the thesis and a general evaluation of the topic are given.

1. GİRİŞ

Riemann alt-kapsamalarla ilgili tanımlar ilk olarak 1960 lı yılların başlarında B.L. Reinhart ve R. Hermann tarafından ortaya atılmasına rağmen bu alanda en temel ve önemli çalışma 1966 yılında B. O'Neill tarafından gerçekleştirildi. O'Neill bu çalışmasında öncelikle bir Riemann alt-kapsamasının **T** ve **A** gibi iki tane (1,2) tipinde tensörlerini tanımladı daha sonra **T** nin ve **A** nın kovaryant türevlerini ve bu kovaryant türevlerin bir çok özelliğini ortaya çıkararak bir Riemann alt-kapsamanın temel denklemlerini elde etti. Bu altı tane denklemin hepside aslında daldırmalardaki Gauss ve Codazzi denklemlerinin alt-kapsamalardaki karşılığıdır. Bir yıl sonra O'Neill Riemann alt-kapsamalar teorisiyle ilgili önemli bir çalışma daha yayınladı. Riemann alt-kapsamalar alanında daha sonra yapılan tüm çalışmalar O'Neill'in kurduğu temel denklemlerin bir sonucu olduğundan O'Neill, Riemann alt-kapsamalar teorisinin kurucusu olarak bilinir.

1975 yılında R.H. Escobales, O' Neill'in çalışmalarından faydalanarak, bir Riemann alt kapsamanın liflerinin tümel jeodezik olması halinde, yani; $\mathbf{T} \equiv 0$ olması halinde temel denklemlerini irdeledi ve bu koşul altında bir Riemann alt-kapsamasının sınıflandırmasını yaptı. 1978 yılında yine R.H. Escobales, Riemann alt-kapsamalar teorisini kompleks manifoldlara taşıyarak bu alandaki çalışmaları genişletti.

1981 yılında M.A. Magid, B. O'Neill'in ve R.H. Escobales'in çalışmalarından faydalanarak alt-kapsama kavramını yarı-Riemann manifoldlara taşıyarak yarı-Riemann alt-kapsama teorisini kurdu. Magid bu çalışmasında, yarı-Riemann alt-kapsamanın tümel uzayını, ters-De Sitter uzay ve liflerini tümel jeodezik seçerek yarı-Riemann alt-kapsamaların bir sınıflandırmasını yaptı.

1985 yılında ise Ranjan, Riemann alt-kapsamaların tümel uzayını küreler ve liflerini tümel jeodezik kabul ederek, Riemann alt-kapsamaların bir sınıflandırmasını yaptı.

2002 yılında ise G. Baditoiu ve S. Ianuş bu alandaki çalışmaları, liflerin tümel eş bükümlü (umbilic) olması durumunda irdelediler ve böylece Riemann alt-kapsamalar teorisini genişletmiş oldular.

2. GENEL KISIMLAR

2.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

V, $m-$boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde $g: V \times V \to \mathbb{R}$ şeklinde bir simetrik, bilineer dönüşüm verilsin. Eğer her $v \in V$ için $g(u,v)=0$ olacak şekilde V nin sıfırdan farklı bir u vektörü varsa, o takdirde g, V üzerinde yoz (dejenere) dur, aksi takdirde yoz olmayan (non-dejenere) denir. Eğer g, V üzerinde yoz olmayan ise, o taktirde, her $v \in V$ için $g(u,v)=0 \Rightarrow u=0$ dır.

Sıfırdan farklı her $v \in V$ için $g(v,v)>0\left(g(v,v)<0\right)$ ise g ye V üzerinde pozitif-tanımlı(negatif-tanımlı) deriz. Böylece g, bu durumda yoz olmayandır. Eğer her $v \in V$ için $g(v,v)\geq 0\left(g(v,v)\leq 0\right)$ ve $g(u,v)=0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in V$ vektörü varsa, o tadtirde g, V üzerinde pozitif(negatif) yarı-tanımlıdır. Böylece g, yarı-tanımlı ise yozdur.

W, V nin bir alt uzayı ise g, $W \times W$ ye kısıtlanabilir ve $g|_W$ kısıtlanmışı W üzerinde yine bir simetrik, bilineer formdur. $g|_W$ nin negatif tanımlı olduğu en geniş alt uzayın boyutuna da g nin V üzerindeki indeksi denir ve $indV=\delta$ ile gösterilir.

Şimdi M, $m-$boyutlu bir reel düzgün(smooth) manifold ve g de M üstünde $(0,2)$ tipinden bir tensör alanı olsun. Böylece g, M nin her p noktasındaki T_pM teğet(tanjant) uzayı üzerinde bir simetrik bilineer g_p formunu tanımlar. Duggal ve Bejancu [1].

Tanım 2.1.1. Bir düzgün M manifoldu üzerindeki bir g metrik tensörü, sabit indekse sahip, simetrik ve yoz olmayan $(0,2)$ tipinden bir tensör alanıdır. Başka deyişle $g \in \tau_2^0(M)$, M nin herhangi bir p noktasına düzgün olarak T_pM üzerindeki g_p skaler çarpımını karşılık getirir ve g nin indeksi bütün p noktaları için aynıdır.

Tanım 2.1.2. Bir yarı-Riemann manifold bir g metrik tensörü üzerine kurulu bir düzgün manifolddur.

Tanım 2.1.3. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerindeki g_p metrik tensörünün δ indeksine M nin indeksi denir. M nin boyutu n ise $0 \le \delta \le n$ yazılabilir. Eğer $\delta = 0$ ise, M bir Riemann manifoldudur. Yani $\forall p \in M$, g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlıdır.

Tanım 2.1.4. Tanım 2.1.3. deki M manifoldu için $\delta = 1$ ve $n \ge 2$ ise, M ye *Lorentz Manifold*u denir.

Uyarı 2.1.1. g sembolü yerine teğet vektörler için $g_p(x,y) = \langle x,y \rangle_p \in \mathbb{R}$, vektör alanları için $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle \in \Im(M)$ gösterimini kullanacağız.

Tanım 2.1.5. Bir düzgün M manifoldu üzerindeki ∇ *bağlantısı(connection),* aşağıdaki koşulları sağlayan $\nabla : \aleph(M) \times \aleph(M) \to \aleph(M)$ şeklinde bir fonksiyondur.

(∇1) $\nabla_V W$, V ye göre $\Im(M)-$lineerdir.

(∇2) $\nabla_V W$, W ye göre $\mathbb{R}$ $-$lineerdir.

(∇3) $f \in \Im(M)$ için $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$

$\nabla_V W$ ye W nin V ye göre kovaryant türevi denir.

Teorem 2.1.1. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde tek türlü belirli öyle bir ∇ kovaryant türev vardır ki

(∇4) $[V,W]=\nabla_V W-\nabla_W V$ ve

(∇5) $X\langle V,W\rangle=\langle\nabla_X V,W\rangle+\langle V,\nabla_X W\rangle$

koşullarını sağlar. ∇ ye M nin *Levi-Civita Bağlantısı (Connection)* denir ve aşağıdaki *Koszul Formül* ü ile karakterize edilir.

$$2\langle\nabla_V W,X\rangle=V\langle W,X\rangle+W\langle X,V\rangle-X\langle V,W\rangle$$
$$-\langle V,[W,X]\rangle+\langle W,[X,V]\rangle+\langle X,[V,W]\rangle$$

Tanım 2.1.6. M, yarı-Riemann manifold ve ∇, M üzerinde tanımlı kovaryant türev olsun .

$$\Re_{XY}Z=\nabla_{[X,Y]}Z-[\nabla_X,\nabla_Y]Z$$

şeklinde tanımlı $(1,3)$ tipinden $\Re:\aleph(M)^3\to\aleph(M)$ tensör alanına M nin *Riemann eğrilik tensör*ü denir.
Eğer $x,y\in T_pM$ ise $\Re_{xy}:T_pM\to T_pM$ lineer operatörü z yi $\Re_{xy}z$ ye gönderir. $\Re_{xy}$ ye *eğrilik operatörü* denir.

Yardımcı Teorem 2.1.1. Eğer $x,y,z,v,w\in T_pM$ ise, bu durumda

1) $\Re_{xy}=-\Re_{yx}$

2) $\langle\Re_{xy}v,w\rangle=-\langle\Re_{xy}w,v\rangle$

3) $\langle\Re_{xy}v,w\rangle=\langle\Re_{vw}x,y\rangle$

4) $\Re_{xy}z+\Re_{yz}x+\Re_{zx}y=0$ (*Birinci Bianchi Özdeşliği*)

T_pM nin 2-boyutlu bir alt uzayı Π ye M nin p noktasındaki teğet düzlemi denir. $\{v,w\}$ Π nin herhangi bir bazı olmak üzere;

$$Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 \neq 0$$

olması için gerek ve yeter koşul $g_p\big|_{\Pi}$ nin yoz olmayan olmasıdır.

Tanım 2.1.7. Π, $p \in M$ noktasında yoz olmayan bir teğet düzlem olsun.

$$\kappa(v,w) = \frac{\langle \Re_{vw}v, w\rangle}{Q(v,w)}$$

ifadesine Π nin p noktasındaki *kesitsel eğriliği* denir. Burada $\kappa(v,w)$, Π nin $\{v,w\}$ bazının seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.1.8. Eğer M yarı-Riemann manifoldunun kesit eğrilik fonksiyonu sabit ise, M ye *sabit eğrilikli* denir.

Sonuç 2.1.1. Eğer M , c sabit eğrilikli ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\Re_{xy}z = c\{\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x\}.$$

Tanım 2.1.9. $\bar{M}$ nin bir M yarı-Riemann alt manifoldunun *ikinci temel formu* $S = 0$ ise M ye $\bar{M}$ nin bir *tümel jeodezik* alt manifoldu denir.

Tanım 2.1.10. $p \in M \subset \bar{M}$ olmak üzere $\forall v, w \in \mathrm{T}_p M$,

$$S(v,w) = \langle v,w\rangle z$$

olacak şekilde bir $z \in \mathrm{T}_p M^{\perp}$ varsa p ye *eş büküm* (umbilic) nokta denir.

Tanım 2.1.11. Eğer $M \subset \bar{M}$ yarı-Riemann alt manifoldunun her noktası eş bükümlü ise M ye *tümel eş bükümlü* alt manifold denir.

Tanım 2.1.12. M, $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun. $V \in \aleph(M)$ ve $Z \in \aleph(M)^{\perp}$ olmak üzere

$$\tilde{S}(V,Z) = teğet\bar{\nabla}_V Z$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{S} : \aleph(M) \times \aleph(M)^{\perp} \to \aleph(M)$ fonksiyonu $\Im(M)$- bilineerdir ve

$$\langle \tilde{S}(V,Z), W \rangle = -\langle S(V,W), Z \rangle$$

eşitliğini sağlar. Burada $W \in \aleph(M)$ dir.

Tanım 2.1.13. M, $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann alt manifoldu olsun.

$$\nabla^{\perp} : \aleph(M) \times \aleph(M)^{\perp} \to \aleph(M)^{\perp}$$
$$\nabla^{\perp}_V Z = dik\bar{\nabla}_V Z \qquad V \in \aleph(M),\ Z \in \aleph(M)^{\perp}.$$

Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\nabla^{\perp}$ kovaryant türevine M nin *dik kovaryant türevi (normal connection)* denir.

Tanım 2.1.14. M, $\bar{M}$ nin yarı-Riemann alt manifoldu olsun.

$$\Re^{\perp} : \aleph(M) \times \aleph(M) \times \aleph(M)^{\perp} \to \aleph(M)^{\perp}$$
$$\Re^{\perp}_{VW} X = \nabla^{\perp}_{[V,W]} X - \left[\nabla^{\perp}_V, \nabla^{\perp}_W\right] X$$

şeklinde tanımlanan $\Re^{\perp}$ tensörüne M nin *dik eğrilik tensörü* denir.

$\bar{\Re}$ ile $\Re^{\perp}$ arasındaki ilişki aşağıdaki *Ricci Denklemi* ile verilir.

$$\langle \Re^{\perp}_{VW} X, Y \rangle = \langle \bar{\Re}_{VW} X, Y \rangle + \langle \tilde{S}(V,X), \tilde{S}(W,Y) \rangle - \langle \tilde{S}(V,Y), \tilde{S}(W,X) \rangle$$

Burada $V,W \in \aleph(M)$ ve $X,Y \in \aleph(M)^{\perp}$ dir. O'Neill [2].

Tanım 2.1.15. M bir düzgün manifold olsun. Eğer $J \in \tau_1^1(M)$ tensör alanı, $\forall p \in M$, $J_p : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_p M$, $\mathrm{T}_p M$ nin bir endomorfizmi ve $J^2 = -I$ koşulunu sağlıyorsa J ye M üstünde bir *hemen hemen kompleks yapı* (*almost complex structure*) denir. Yano ve Kon [3].

2.2 RİEMANN ALT-KAPSAMA İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Tanım 2.2.1. M^{n+k} ve B^n , sırasıyla $(n+k)$ ve (n)-boyutlu düzgün Riemann manifoldları olsunlar, eğer $\pi : M^{n+k} \to B^n$, dönüşümü düzgün ve üzerine olmak üzere aşağıdaki **(AK 1)** ve **(AK 2)** koşullarını sağlıyorsa π ye bir *Riemann alt-kapsama* denir.

(AK 1) $rank(\pi) = n$ **,**

yani; π nin her $p \in M^{n+k}$ noktasındaki π_{*p} türev dönüşümü üzerinedir. Bu ise bize $\forall q \in B^n$ için $\pi^{-1}(q)$ nun M^{n+k} nın, $Boy\left(M^{n+k}\right) - Boy\left(B^n\right) = (n+k) - n = k$ boyutlu bir altmanifoldu olduğunu söyler. M^{n+k} nın, $\pi^{-1}(q)$ şeklindeki bir altmanifolduna M^{n+k} nin bir *lif (fiber)* i denir. Eğer M^{n+k} üzerindeki bir vektör alanı M^{n+k} nin bütün liflerine teğet oluyor ise, o vektör alanına *düşey* (vertical), dik oluyor ise *yatay* (horizontal) vektör alanı denir.

(AK 2) π_* *yatay vektörlerin uzunluğunu korur,*

yani; $\langle X_p, Y_p \rangle = \langle \pi_{*p}\left(X_p\right), \pi_{*p}\left(Y_p\right) \rangle^*$ dir.

Burada $p \in \pi^{-1}(q)$, $q \in B^n$, X_p ve Y_p, *p noktasındaki yatay vektörlerdir.*

$\langle\ ,\ \rangle$, M^{n+k} *üzerindeki metrik tensör ve* $\langle\ ,\ \rangle^*$, B^n *üzerindeki metrik tensördür.*

Literatürde M^{n+k} ya $\pi : M^{n+k} \to B^n$ Riemann alt-kapsamasının *tümel uzayı (total space),* B^n ye de *taban uzayı (base space)* denir. Bundan sonra kolaylık olsun diye

M^{n+k} yı M ile, B^n i de B ile göstereceğiz. M nin düşey vektör alanlarını $U, V, W, F, ...$ ile yatay vektör alanlarını da $X, Y, Z, H, ...$ harfleri ile göstereceğiz.

$\hbar$ ve ν ile sırasıyla M nin teğet uzaylarının yatay ve düşey alt uzaylara olan dik izdüşümünü göstereceğiz. Dolayısıyla $TM = \hbar(TM) \oplus \nu(TM)$ yazabiliriz.

2.3. T ve A TEMEL TENSÖRLERİ

Tanım 2.3.1. E ve F, M üzerinde tanımlı keyfi vektör alanları olmak üzere, M üzerindeki T tensör alanı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathrm{T}_E F = \hbar \nabla_{\nu E} \nu F + \nu \nabla_{\nu E} \hbar F$$

burada, ∇, M üzerinde tanımlanmış *kovaryant türev* dir.

T in (1,2) tipinden bir tensör alanı olduğu kolayca görülebilir. Şimdi T nin çok önemli üç özelliğini ifade edelim.

(T 1) T_E, TM üzerinde *ters-simetrik* bir operatördür, yani;

$$\langle \mathrm{T}_E F, G \rangle = - \langle T_E G, F \rangle$$

dir. Burada G, M üzerinde tanımlı bir vektör alanıdır. Öte yandan T_E, düşey vektör alanlarını yatay , yatay vektör alanlarını da düşey vektör alanlarına çevirir.

(T 2) T *düşey*dir, yani aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathrm{T}_E = \mathrm{T}_{\nu E} .$$

(T 3) Herhangi iki V ve W düşey vektör alanları için T *simetrik* tir, yani aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathrm{T}_V W = \mathrm{T}_W V$$

T in düşey vektör alanlarına kısıtlanışı T yi liflerin *ikinci temel form*una indirgediği **(T 3)** ten kolayca görülür.

Tanım 2.3.2. E ve F**,** M üzerindeki tanımlı keyfi vektör alanları olmak üzere, M üzerindeki A tensör alanı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathrm{A}_E F = \hbar\nabla_{\hbar E} \nu F + \nu\nabla_{\hbar E}\hbar F$$

A da T gibi (1,2) tipinden tensör alanıdır ve aşağıdaki üç önemli özelliğe sahiptir.

(A 1) A_E, *TM* üzerinde *ters-simetrik* bir operatördür ve düşey vektör alanlarını yatay, yatay vektör alanlarını da düşey vektör alanlarına çevirir.

(A 2) A *yatay* dır, yani aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathrm{A}_E = \mathrm{A}_{\hbar E}.$$

(A 3) Herhangi iki X ve Y yatay vektör alanları için A *alterneleyici* dir, yani; $\mathrm{A}_X Y = -\,\mathrm{A}_Y X$ dir.

Tanım 2.3.3. Eğer M üzerindeki bir yatay X vektör alanı B üzerindeki bir X_* vektör alanı ile $\pi-$bağımlı ise, yani; $\forall p \in M$, $\pi_{*p}\left(X_p\right) = X_{*\pi(p)}$ ise X e *temel vektör alanı* denir.

Yardımcı Teorem 2.3.1. Eğer X ve Y, M üzerinde tanımlı temel vektör alanları iseler, bu durumda

(1) $\langle X, Y\rangle = \langle X_*, Y_*\rangle^* \circ \pi$

(2) $\hbar[X,Y]$, $[X_*, Y_*]$ ile π-bağımlı temel vektör alanıdır.

(3) $\hbar\nabla_X Y$, $\nabla^*_{X_*} Y_*$ ile π-bağımlı temel vektör alanıdır.

Burada ∇^*, B üzerindeki kovaryant türevdir.

İspat: Önce (1) i ispatlayalım. $\forall p \in \pi^{-1}(p)$, $q \in B$ için,

$$\langle X_*, X_*\rangle^* \circ \pi(p) = \langle X_{*\pi(p)}, X_{*\pi(p)}\rangle^* = \langle \pi_{*p}(X), \pi_{*p}(X)\rangle^* = \langle X_p, Y_p\rangle = \langle X, Y\rangle_p$$

Böylece $\langle X, Y\rangle = \langle X_*, Y_*\rangle^* \circ \pi$ olduğu ispatlanır.

$$\pi_*\left([X,Y]\right)=\pi_*\left(\nu[X,Y]+\hbar[X,Y]\right)=\pi_*\left(\nu[X,Y]\right)+\pi_*\left(\hbar[X,Y]\right)$$

Burada (AK2) den B baz uzayı ile M nin yatay dağılımları izometrik olduğundan

$$\pi_*\left(\nu[X,Y]\right)=0$$

dır. Dolayısıyla $\pi_*\left([X,Y]\right)=\pi_*\left(\hbar[X,Y]\right)$ olur. Öte yandan

$$\pi_*\left([X,Y]\right)=\left[\pi_*(X),\pi_*(Y)\right]$$

olduğuından (2) gerçeklenir. Teorem 2.1.1. deki Koszul Förmülünü kullanalım. Keyfi Z temel vektör alanı için

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_X Y,Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle\\ &\quad-\langle X,[Y,Z]\rangle+\langle Y,[Z,X]\rangle+\langle Z,[X,Y]\rangle\end{aligned}$$

Ancak burada $X\langle Y,Z\rangle=X\left\{\langle Y_*,Z_*\rangle\circ\pi\right\}=X_*\langle Y_*,Z_*\rangle\circ\pi$ yazılabilir. Benzer formüller parantezler içinde yazılabileceğinden yukardaki denklemin sağ tarafı $2\langle\nabla_{X_*}{}^*Y_*,Z_*\rangle^*\circ\pi$ olur. Buradan $\nabla_X Y$ nin $\nabla^*{}_{X_*}Y_*$ ile $\pi-$bağımlı olduğu görülür.Böylece $\hbar\nabla_X Y$, $\nabla^*{}_{X_*}Y_*$ ile $\pi-$bağımlı temel vektör alanı olur ve ispat biter. O'Neill [4].

Yardımcı Teorem 2.3.2. M üzerindeki Z_i vektör alanları, B üzerindeki Z_{i*} vektör alanları ile $\pi-$bağımlı olan temel vektör alanları olsunlar. Farz edelim ki bir X yatay vektör alanı için $\langle X_p,(Z_i)_p\rangle=\langle X_{p'},(Z_i)_{p'}\rangle$ olsun, burada $p,p'\in\pi^{-1}(q)$ ve $q\in B$. Bu durumda
$\pi_*(X)$, B üzerinde iyi–tanımlı bir vektör alanı ve X bir temel vektör alanıdır.

Yardımcı Teorem 2.3.3. X ve Y yatay vektör alanları, V ve W düşey vektör alanları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.

(1) $\nabla_X Y=\hbar\nabla_X Y+\mathrm{A}_X Y$

(2) $\nabla_V W=\mathrm{T}_V W+\nu\nabla_V W$

(3) a) $\nabla_V X = \hbar\nabla_V X + \mathrm{T}_V X$

b) Eğer X temel ise $\hbar\nabla_V X = \mathrm{A}_X V$

c) Farz edelim ki lifler bağlantılı ve tümel jeodezik olsun ($\mathrm{T} \equiv 0$).

Eğer V vektör alanı için $\nabla_V X = \mathrm{A}_X V$ ise X temeldir.

(4) $\nabla_X V = \mathrm{A}_X V + \nu\nabla_X V$

(5) $\mathrm{A}_X Y = \dfrac{1}{2}\nu[X,Y]$

İspat: (1), (2), (3)-a) ve (4) ün ispatları **T** ve **A** temel tensörlerinin tanımlarından kolayca elde edilir. Biz (3)-b) yi ispatlayacağız.

X temel vektör alanı ise B üzerindeki bir X_* vektör alanı ile π-bağımlıdır, yani; $\pi_*(X) = X_*$ dir. Buradan $\pi_*([X,V]) = [\pi_*(X), \pi_*(V)] = [X_*, 0] = 0$ olur. Demek ki $[X,V]$, 0 ile π-bağımlıdır bundan dolayı $[X,V]$ düşey olmak zorundadır. O halde

$$0 = \hbar([X,V]) = \hbar(\nabla_X V) - \hbar(\nabla_V X) = \mathrm{A}_X V - \hbar(\nabla_V X) \Rightarrow \hbar(\nabla_V X) = \mathrm{A}_X V.$$

(3)-c) in ispatı: $\nabla_V X = \mathrm{A}_X V$ ve $\mathrm{T} \equiv 0$ olsun. Y herhangi bir temel vektör alanı olmak üzere $V\langle X,Y\rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathrm{A}_X V = \hbar\nabla_V X$ farzedelim

$$V\langle X,Y\rangle = \langle\nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle = \langle \mathrm{A}_X V, Y\rangle + \langle X, \mathrm{A}_Y V\rangle$$

burada önce (A 1) daha sonra (A 3) özelliklerini kullanırsak;

$$V\langle X,Y\rangle = \langle\nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle = \langle \mathrm{A}_X V, Y\rangle + \langle X, \mathrm{A}_Y V\rangle = -\langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y X, V\rangle = 0$$

ve böylece ispat biter. $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, burada (1) i kullanırsak;

$$\nu[X,Y] = \mathrm{A}_X Y - \mathrm{A}_Y X = 2\mathrm{A}_X Y$$

olur ki böylece (5) ispatlanmış olur .Escobales [5].

2.4. TEMEL TENSÖRLERİN KOVARYANT TÜREVLERİ

$\nabla \mathrm{T}$ ve $\nabla \mathrm{A}$ kovaryant türev tensörlerinin T ve A temel tensörleri ile ilişkisi aşağıdaki Yardımcı Teorem yardımıyla kısmen açıklanabilir.

Yardımcı Teorem 2.4.1. Eğer X ve Y yatay ve V ve W düşey vektör alanları ise, bu durumda

a) $(\nabla_V \mathrm{A})_W = -\mathrm{A}_{\mathrm{T}_V W}$ **b)** $(\nabla_X \mathrm{A})_V = -\mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V}$

c) $(\nabla_X \mathrm{T})_Y = -\mathrm{T}_{\mathrm{A}_X Y}$ **d)** $(\nabla_V \mathrm{T})_X = -\mathrm{T}_{\mathrm{T}_V X}$

İspat: Biz sadece a) yi ispatlayacağız, diğer şıkların ispatları benzer yöntemle yapılabilir.
Herhangi $E \in \aleph(M)$ için, tensörlerin türev tanımına göre

$$(\nabla_V \mathrm{A})_W E = \nabla_V (\mathrm{A}_W E) - \mathrm{A}_{\nabla_V W} E - \mathrm{A}_W (\nabla_V E)$$

dır. A yatay olduğundan

$$\mathrm{A}_W E = 0,\ \mathrm{A}_W (\nabla_V E) = 0 \text{ ve } \mathrm{A}_{\nabla_V W} E = \mathrm{A}_{\hbar \nabla_V W} E = \mathrm{A}_{T_V W} E .$$

Böylece

$$(\nabla_V \mathrm{A})_W E = -\mathrm{A}_{\mathrm{T}_V W} E$$

olur ki E keyfi olduğundan istenen elde edilir. O'Neill [4].

Sonuç 2.4.1. **a)** Eğer A paralel ise, bu durumda A özdeş olarak sıfırdır, yani; $\forall E \in \aleph(M)$ için $\nabla_E \mathrm{A} = 0 \Rightarrow \mathrm{A} \equiv 0$.

b) Eğer T paralel ise, bu durumda T özdeş olarak sıfırdır, yani; $\forall E \in \aleph(M)$ için

$$\nabla_E \mathrm{T} = 0 \Rightarrow \mathrm{T} \equiv 0 .$$

İspat: Benzer ispat olduklarından biz sadece b) yi ispatlayacağız.

V, W düşey, X yatay vektör alanı olmak üzere Yardımcı Teorem 2.3.1.-d) den

$$\langle (\nabla_W \mathrm{T})_X W, X\rangle = -\langle \mathrm{T}_{\mathrm{T}_W X} W, X\rangle = -\langle \mathrm{T}_W \mathrm{T}_W X, X\rangle = \langle \mathrm{T}_W X, \mathrm{T}_W X\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_W X = 0 .$$

Böylece **T**, yatayları sıfıra gönderir.

Öte yandan $\langle \mathrm{T}_W V, X\rangle = -\langle \mathrm{T}_W X, V\rangle = 0 \Rightarrow \mathrm{T}_W V = 0$

buradan **T** in düşeyleri de sıfıra gönderdiğini görürüz. $\mathrm{T}_E = \mathrm{T}_{vE}$ olduğundan $\mathrm{T}_E = 0$ olur, E keyfi olduğundan $\mathrm{T} \equiv 0$ olur . Escobales [5].

Yardımcı Teorem 2.4.2. Eğer X ve Y yatay ve V ve W düşey vektör alanları ise, bu durumda

a) $\langle (\nabla_E \mathrm{A})_X Y, V\rangle = -\langle (\nabla_E \mathrm{A})_Y X, V\rangle$

b) $\langle (\nabla_E \mathrm{T})_V W, X\rangle = \langle (\nabla_E \mathrm{T})_W V, X\rangle$

Yardımcı Teorem 2.4.3. Eğer V düşey vektör alanı ve Ω; X, Y, Z yatay vektör alanları üzerinden değişen devirsel toplamı gösteriyorsa, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\Omega \langle (\nabla_Z \mathrm{A})_X Y, V\rangle = \Omega \langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{T}_V Z\rangle .$$

2.5. TEMEL DENKLEMLER

Bir $\pi : M \to B$ şeklindeki Riemann alt-kapsamanın, daldırmalardaki Gauss ve Codazzi denklemlerine karşılık gelen tam altı tane temel denklemi B.O'Neill tarafından aşağıdaki üç teorem yardımıyla kurulmuştur.

Teorem 2.5.1. Eğer U, V, W, F düşey vektör alanları ve X yatay vektör alanı ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\langle \Re_{UV} W, F\rangle = \langle \hat{\Re}_{UV} W, F\rangle - \langle \mathrm{T}_U W, \mathrm{T}_V F\rangle + \langle \mathrm{T}_V W, \mathrm{T}_U F\rangle$

b) $\langle \Re_{UV} W, X\rangle = \langle (\nabla_V T)_U W, X\rangle - \langle (\nabla_U T)_V W, X\rangle$

(Burada $\Re$ ve $\hat{\Re}$ sırasıyla M tümel uzayının ve $\pi^{-1}(q) \subset M$ liflerinin *Riemann eğrilik tensörü* dür). Dikkat edilirse bu iki denklem $\pi^{-1}(q)$, $(q \in B)$ liflerinin Gauss ve Codazzi denklemlerine karşılık gelir.

İspat: $\Re_{UV}W = \nabla_{[U,V]}W - [\nabla_U, \nabla_V]W$

Her zaman olduğu gibi Lie parantezlerini sıfır kabul edebiliriz, şu halde $[U,V]=0$ dır. Böylece $\Re_{UV}W = -\nabla_U(\nabla_V W) + \nabla_V(\nabla_U W)$ olur. Burada Yardımcı Teorem 2.3.3. deki eşitlikleri kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Re_{UV}W &= -\nabla_U\left(\mathrm{T}_V W + \hat{\nabla}_V W\right) + \nabla_V\left(\mathrm{T}_U W + \hat{\nabla}_U W\right) \\
&= -\nabla_U(\mathrm{T}_V W) - \nabla_U(\hat{\nabla}_V W) + \nabla_V(\mathrm{T}_U W) + \nabla_V(\hat{\nabla}_U W) \\
&= -\hbar\nabla_U(\mathrm{T}_V W) - \mathrm{T}_U(\mathrm{T}_V W) - \mathrm{T}_U(\hat{\nabla}_V W) - \hat{\nabla}_U\hat{\nabla}_V W + \hbar\nabla_V(\mathrm{T}_U W) \\
&\quad + \mathrm{T}_V(\mathrm{T}_U W) + \mathrm{T}_V(\hat{\nabla}_U W) + \hat{\nabla}_V\hat{\nabla}_U W
\end{aligned}$$

Buradan

$$\nu\Re_{UV}W = -\hat{\nabla}_U\hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_V\hat{\nabla}_U W - \mathrm{T}_U(\mathrm{T}_V W) + \mathrm{T}_V(\mathrm{T}_U W) \quad \text{ve}$$

$$\hbar\Re_{UV}W = -\hbar\nabla_U(\mathrm{T}_V W) - \mathrm{T}_U(\hat{\nabla}_V W) + \hbar\nabla_V(\mathrm{T}_U W) + \mathrm{T}_V(\hat{\nabla}_U W)$$

Böylece $\langle \Re_{UV}W, F\rangle = \langle \nu\Re_{UV}W, F\rangle$

$$= \langle \underbrace{-\hat{\nabla}_U\hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_V\hat{\nabla}_U W}_{\hat{\Re}_{UV}W}, F\rangle + \langle \mathrm{T}_V\mathrm{T}_U W, F\rangle - \langle \mathrm{T}_U\mathrm{T}_V W, F\rangle$$

T, ters-simetrik olduğundan,

$$\langle \Re_{UV}W, F\rangle = \langle \hat{\Re}_{UV}W, F\rangle - \langle \mathrm{T}_U W, \mathrm{T}_V F\rangle + \langle \mathrm{T}_V W, \mathrm{T}_U F\rangle$$

olur ki a) nın ispatı tamamlanır. Öte yandan

$$\langle \Re_{UV}W, X\rangle = -\langle \nabla_U(\mathrm{T}_V W), X\rangle + \langle \nabla_V(\mathrm{T}_U W), X\rangle - \langle \mathrm{T}_U(\hat{\nabla}_V W), X\rangle + \langle \mathrm{T}_V(\hat{\nabla}_U W), X\rangle$$

$$= -\langle (\nabla_U \mathrm{T})_V W, X\rangle - \langle \mathrm{T}_{\nabla_U V} W, X\rangle - \langle \mathrm{T}_V (\nabla_U W), X\rangle - \langle \mathrm{T}_U (\hat{\nabla}_V W), X\rangle$$
$$+\langle (\nabla_V \mathrm{T})_U W, X\rangle + \langle \mathrm{T}_{\nabla_V U} W, X\rangle + \langle \mathrm{T}_U (\nabla_V W), X\rangle + \langle \mathrm{T}_V (\hat{\nabla}_U W), X\rangle$$

Burada

$$\langle \mathrm{T}_U (\nabla_V W), X\rangle = \langle \mathrm{T}_U (\hat{\nabla}_V W), X\rangle \text{ ve } \langle \mathrm{T}_V (\nabla_U W), X\rangle = \langle \mathrm{T}_V (\hat{\nabla}_U W), X\rangle$$

olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\langle \Re_{UV} W, X\rangle = -\langle (\nabla_U \mathrm{T})_V W, X\rangle - \langle \mathrm{T}_{\nabla_U V} W, X\rangle + \langle (\nabla_V \mathrm{T})_U W, X\rangle + \langle \mathrm{T}_{\nabla_V U} W, X\rangle$$
$$= -\langle (\nabla_U \mathrm{T})_V W, X\rangle + \langle (\nabla_V \mathrm{T})_U W, X\rangle - \langle \mathrm{T}_{\underbrace{[U,V]}_{0}} W, X\rangle$$
$$= -\langle (\nabla_U \mathrm{T})_V W, X\rangle + \langle (\nabla_V \mathrm{T})_U W, X\rangle$$

olur ki b) nin ispatı tamamlanır.

Sıradaki Teorem M ile B in geometrilerini kıyaslamaya yarayacak iki tane denklem içermektedir ki bu iki denklem Teorem 2.5.1. deki iki denklemin dualleridir. B nin $\Re^*$ eğrilik tensörünün yatay liftini tekrar $\Re^*$ ile gösterelim. Eğer h_1, h_2, h_3, h_4, M nin yatay vektörleri ise

$\langle \Re^*_{h_1 h_2}(h_3), h_4\rangle = \langle \Re^*_{h_1^* h_2^*}(h_3^*), h_4^*\rangle$ dır. Burada $h_i^* = \pi_*(h_i)$.

Teorem 2.5.2. Eğer X, Y, Z, H yatay vektör alanları ve V düşey vektör alanı ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\langle \Re_{XY} Z, H\rangle = \langle \Re^*_{XY} Z, H\rangle - 2\langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{A}_Z H\rangle + \langle \mathrm{A}_Y Z, \mathrm{A}_X H\rangle + \langle \mathrm{A}_Z X, \mathrm{A}_Y H\rangle$

b) $\langle \Re_{XY} Z, V\rangle = \langle (\nabla_Z \mathrm{A})_X Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{T}_V Z\rangle - \langle \mathrm{A}_Y Z, \mathrm{T}_V X\rangle - \langle \mathrm{A}_Z X, \mathrm{T}_V Y\rangle$

İspat: İspatlayacağımız denklemler tensör denklemleri olduğundan X, Y, Z vektör alanlarını temel, parantezleri düşey kabul edebiliriz.

$$\Re_{XY}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \qquad (2.5.1).$$

Şimdi burada her bir terimi açalım. Yardımcı Teorem 2.3.1. den $[X,Y] = 2\mathrm{A}_X Y$ yazabiliriz. Böylece Yardımcı Teorem 2.3.3. deki eşitlikleri kullanarak

$$\nabla_{[X,Y]}Z = 2\mathrm{A}_Z\left(\mathrm{A}_X Y\right) + 2\mathrm{T}_{\mathrm{A}_X Y}\left(Z\right) \qquad (2.5.2)$$

elde ederiz. Yardımcı Teorem 2.3.1. e dayanarak $\hbar\nabla_Y Z$ yi $\nabla^*_Y Z$ gibi düşünebiliriz. Böylece

$$\nabla_Y Z = \nabla^*_Y Z + \mathrm{A}_Y Z$$

olur. Yine Yardımcı Teorem 2.3.3. ü kullanırsak

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla^*_X \nabla^*_Y Z + \mathrm{A}_X\left(\nabla^*_Y Z\right) + \mathrm{A}_X \mathrm{A}_Y Z + \nu\nabla_X\left(\mathrm{A}_Y Z\right) \qquad (2.5.3)$$

elde ederiz. Şimdi bu üç denklemi birleştirirsek, aşağıdaki iki denklemi elde ederiz.

$$\hbar\Re_{XY}Z = -\left[\nabla^*_X, \nabla^*_Y\right]Z + 2\mathrm{A}_Z \mathrm{A}_X Y - \mathrm{A}_X \mathrm{A}_Y Z + \mathrm{A}_Y \mathrm{A}_X Z \qquad (2.5.4),$$

$$\nu\Re_{XY}Z = 2\mathrm{T}_{\mathrm{A}_X Y}\left(Z\right) - \nu\nabla_X\left(\mathrm{A}_Y Z\right) + \nu\nabla_Y\left(\mathrm{A}_X Z\right) - \mathrm{A}_X\left(\nabla^*_Y Z\right) + \mathrm{A}_Y\left(\nabla^*_X Z\right) \qquad (2.5.5)$$

Yardımcı Teorem 2.3.1. ve $\Re^*$ tanımından, B nin eğrilik tensörünün M deki lifti

$$\Re^*_{XY}Z = \nabla^*_{[X,Y]}Z - \left[\nabla^*_X, \nabla^*_Y\right]Z$$

şeklindedir. Burada $\hbar[X,Y] = 0$ olduğunu hesaba katarsak; (2.5.4) denkleminin sağ yanındaki birinci terim $\Re^*_{XY}Z$ ye eşit olur. (2.5.4) denkleminin H yatay vektör alanı ile iç çarpımını alırsak kolayca Gauss Denkleminin benzeri olan (a) yı elde ederiz.

Şimdi (2.5.5) denkleminin V düşey vektör alanı ile iç çarpımını bulalım;

$$\langle \Re_{XY}Z, V\rangle = 2\langle \mathrm{T}_{\mathrm{A}_X Y}\left(Z\right), V\rangle - \langle \nabla_X\left(\mathrm{A}_Y Z\right), V\rangle + \langle \nabla_Y\left(\mathrm{A}_X Z\right), V\rangle$$

$$-\langle \mathrm{A}_X\left(\nabla_Y Z\right), V\rangle+\langle \mathrm{A}_Y\left(\nabla_X Z\right), V\rangle \tag{2.5.6}$$

T nin temel özelliklerinden

$$\langle \mathrm{T}_{\mathrm{A}_X Y}\left(Z\right), V\rangle=\langle \mathrm{T}_V Z, \mathrm{A}_X Y\rangle \tag{2.5.7}$$

yazabiliriz. Daha ileri olarak,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_Y\left(\mathrm{A}_X Z\right), V\rangle-\langle \nabla_X\left(\mathrm{A}_Y Z\right), V\rangle&=\langle\left(\nabla_Y \mathrm{A}\right)_X Z, V\rangle-\langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z, V\rangle\\&+\langle \mathrm{A}_X\left(\nabla_Y Z\right), V\rangle-\langle \mathrm{A}_Y\left(\nabla_X Z\right), V\rangle\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

(2.5.7) ve (2.5.8) yi (2.5.6) da yerine yazarsak;

$$\langle \Re_{XY} Z, V\rangle=\langle\left(\nabla_Y \mathrm{A}\right)_X Z, V\rangle-\langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z, V\rangle+2\langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{T}_V Z\rangle$$

olur. Bu ise YardımcıTeorem 2.4.2. ve Yardımcı Teorem 2.4.3. den Codazzi Denkleminin benzeri olan (b) ye eşittir.

Teorem 2.5.3. Eğer X ve Y yatay vektör alanları ve V ve W düşey vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\langle \Re_{XV} Y, W\rangle=\langle\left(\nabla_X \mathrm{T}\right)_V W, Y\rangle+\langle\left(\nabla_V \mathrm{A}\right)_X Y, W\rangle-\langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_W Y\rangle+\langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle$

b) $\langle \Re_{VW} X, Y\rangle=\langle\left(\nabla_V A\right)_X Y, W\rangle-\langle\left(\nabla_W \mathrm{A}\right)_X Y, V\rangle+\langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle$

$$-\langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{A}_Y V\rangle-\langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_W Y\rangle+\langle \mathrm{T}_W X, \mathrm{T}_V Y\rangle$$

Eğer a ve b lineer bağımsız vektörler olmak üzere, a ile b in gerdiği düzlemi P_{ab} ile gösterirsek ve temel denklemlerdeki $\Re$ Riemann eğriliğinin yerine κ *kesitsel eğriliği* kullanırsak oldukça kullanışlı bir sonuç elde ederiz.

Sonuç 2.5.1. $\pi: M \rightarrow B$ Riemann bir alt-kapsama ve κ, κ_* ve $\hat{\kappa}$ sırasıyla M nin, B nin ve liflerin kesitsel eğriliği olsun. Eğer x ve y yatay ve v ve w düşey vektörler ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\kappa\left(\mathrm{P}_{vw}\right)=\hat{\kappa}\left(\mathrm{P}_{vw}\right)-\dfrac{\langle \mathrm{T}_v v, \mathrm{T}_w w\rangle-\langle \mathrm{T}_v w, \mathrm{T}_v w\rangle}{\langle v, v\rangle\ \langle w, w\rangle-\left(\langle v, w\rangle\right)^2}$

b) $\kappa\left(\mathrm{P}_{xv}\right)=\dfrac{\langle\left(\nabla_x \mathrm{T}\right)_v\ v, x\rangle+\langle \mathrm{A}_x v, \mathrm{A}_x v\rangle-\langle \mathrm{T}_v x, \mathrm{T}_v x\rangle}{\langle x, x\rangle\ \langle v, v\rangle}$

c) $\kappa\left(\mathrm{P}_{xy}\right)=\kappa_*\left(\mathrm{P}_{x_* y_*}\right)-\ \dfrac{3\langle \mathrm{A}_x y, \mathrm{A}_x y\rangle}{\langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle-\left(\langle x, y\rangle\right)^2}$

burada $x_*=\pi_*\left(x\right)$.

İspat: Dikkat edilirse a) denklemi *liflerin* Gauss denklemine karşılık gelir.
v ile w, M nin lineer bağımsız herhangi iki teğet(tanjant) vektörü olmak üzere

$$\kappa\left(\mathrm{P}_{vw}\right)=\frac{\langle \Re_{vw} v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\ \langle w, w\rangle-\left(\langle v, w\rangle\right)^2}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi, herhangi $p \in M$ noktasında v düşey x yatay vektör olmak üzere

$$\kappa\left(\mathrm{P}_{vx}\right)=\frac{\langle \Re_{vx} v, x\rangle}{\langle v, v\rangle\ \langle x, x\rangle-\left(\langle v, x\rangle\right)^2} \tag{2.5.9}$$

olur. Öte yandan Teorem 2.5.3 a-) da vektör alanları yerine küçük harflerle göstereceğimiz vektörleri yazabiliriz, yani;

$$\langle \Re_{xv} y, w\rangle=\langle\left(\nabla_x \mathrm{T}\right)_v\ w, y\rangle+\langle\left(\nabla_v \mathrm{A}\right)_x\ y, w\rangle-\langle \mathrm{T}_v x, \mathrm{T}_w y\rangle+\langle \mathrm{A}_x v, \mathrm{A}_y w\rangle$$

Burada $y=x$ ve $w=v$ yazarsak,

$$\langle \Re_{xv} x, v\rangle=\langle\left(\nabla_x \mathrm{T}\right)_v\ v, x\rangle+\langle\left(\nabla_v \mathrm{A}\right)_x\ x, v\rangle-\langle \mathrm{T}_v x, \mathrm{T}_v x\rangle+\langle \mathrm{A}_x v, \mathrm{A}_x v\rangle$$

olur. Bu son denklemi (2.5.9) da yerine yazarsak,

$$\langle\left(\nabla_v \mathrm{A}\right)_x\ x, v\rangle=0 \quad \text{ve } \langle v, x\rangle=0$$

olduğundan

$$\kappa\left(\mathrm{P}_{xv}\right)=\frac{\langle\left(\nabla_x \mathrm{T}\right)_v\, v,x\rangle+\langle \mathrm{A}_x v,\mathrm{A}_x v\rangle-\langle \mathrm{T}_v x,\mathrm{T}_v x\rangle}{\langle x,x\rangle\;\langle v,v\rangle}$$

elde edilir ki b)ispatlanmış olur. a) ve c) nin ispatları benzer yöntemle yapılabilir. O’Neill [4].

2.6. LİFLERİN TÜMEL JEODEZİK OLMA DURUMU

$\pi : M \to B$ bir Riemann alt-kapsama olsun. $\pi^{-1}\left(q\right)$, $(q\in B)$ liflerinin *tümel jeodezik* olması **T** temel tensörünün M üstünde özdeş olarak sıfır olmasına denktir. Bu durumda Bölüm 2.5 de karşımıza çıkan temel denklemler daha sade ve kullanışlı hale gelirler. Bu bölümde M nin liflerini tümel jeodezik varsayıyoruz, yani; $\mathbf{T}\equiv 0$**.**

Yardımcı Teorem 2.6.1. $\pi : M \to B$ bir Riemann alt-kapsama olsun. X,Y,Z yatay ve V düşey vektör alanları olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir.

a) $\nu\left(\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z\right)=-\nu\left(\Re_{YZ}X\right)$

b) $\hbar\left(\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y (V)\right)=\hbar\left(\Re_{XV}Y\right)$

İspat: Sadece a) yı ispatlayalım. Teorem 2.5.2-b) de $\mathrm{T}\equiv 0$ koşulunu kullanırsak

$$\langle \Re_{XY}Z,V\rangle=\langle\left(\nabla_Z \mathrm{A}\right)_X Y,V\rangle$$

elde ederiz. Burada X,Y ve Z in yerlerini değiştirirsek

$$\langle \Re_{YZ}X,V\rangle=\langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z,V\rangle$$

olur ki bu da istenen a) denklemine denktir.

Sonuç 2.6.1. Eğer Yardımcı Teorem 2.6.1. deki M manifoldu *c sabit kesit eğrilikli* ise, bu durumda

a) $\nu\left((\nabla_X \mathrm{A})_Y Z\right) = 0$

b) $\hbar\left((\nabla_X \mathrm{A})_Y V\right) = 0$

İspat: M manifoldu c sabit kesit eğrilikli olduğundan

$$\Re_{YZ} X = c\left\{\langle Z, X\rangle Y - \langle Y, X\rangle Z\right\}$$

yazılabilir. Burada Y ve Z yatay olduğundan

$$\Re_{YZ} X = \hbar \Re_{YZ} X$$

olur, dolayısıyla $\nu(\Re_{YZ} X) = 0$ olur ki Yardımcı Teorem 2.6.1-a) dan $\nu\left((\nabla_X \mathrm{A})_Y Z\right) = 0$ çıkar. b) in ispatı da benzer şekildedir.

Yardımcı Teorem 2.6.2. $\pi : M \to B$ bir Riemann alt-kapsama olsun. Eğer $x, y,$ $p \in M$ noktasında yatay vektörler ve u düşey vektör ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\left(\mathrm{A}_x \mathrm{A}_y + \mathrm{A}_y \mathrm{A}_x\right)(u) = -\nu\left(\Re_{ux} y + \Re_{uy} x\right) .$$

İspat: x ve y yatay vektörlerini , p noktasını içine alan lif üzerinde tanımlı X ve Y temel vektör alanlarına genişletelim. Bu durumda p noktasında;

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_u \left(\mathrm{A}_X Y\right), u\rangle &= \langle (\nabla_u \mathrm{A})_x\, y + \mathrm{A}_{\nabla_u X} y + \mathrm{A}_x\left(\nabla_u Y\right), u\rangle \\
&= \langle (\nabla_u \mathrm{A})_x\, y, u\rangle + \langle \mathrm{A}_{\mathrm{A}_x u} y, u\rangle + \langle \mathrm{A}_x \mathrm{A}_y u, u\rangle \\
&= \langle (\nabla_u \mathrm{A})_x\, y, u\rangle - \langle \mathrm{A}_y \mathrm{A}_x u, u\rangle + \langle \mathrm{A}_x \mathrm{A}_y u, u\rangle \\
&= \langle (\nabla_u \mathrm{A})_x\, y, u\rangle + \langle \mathrm{A}_y u, \mathrm{A}_x u\rangle - \langle \mathrm{A}_x u, \mathrm{A}_y u\rangle \\
&= \langle (\nabla_u \mathrm{A})_x\, y, u\rangle
\end{aligned}$$

Teorem 2.5.3-a) dan

$$\langle \nabla_u \left(\mathrm{A}_x y\right), u\rangle = \langle \Re_{ux} y, u\rangle - \langle \mathrm{A}_x u, \mathrm{A}_y u\rangle$$

elde edilir. Son denklemin sol tarafı X ve Y ye göre ters-simetrik iken sağ tarafı simetriktir. Buradan

$$\langle \nabla_u \left(\mathrm{A}_X Y \right), u \rangle = 0 \text{ ve } \langle \Re_{ux} y, u \rangle = \langle \mathrm{A}_x u, \mathrm{A}_y u \rangle$$

p noktasındaki herhangi x, y atay ve düşey u vektörü için;

$$\langle \Re_{ux} y, w \rangle + \langle \Re_{wx} y, u \rangle = \langle \mathrm{A}_x u, \mathrm{A}_y w \rangle + \langle \mathrm{A}_x w, \mathrm{A}_y u \rangle$$

yada

$$\langle \Re_{ux} y, w \rangle + \langle \Re_{uy} x, w \rangle = -\langle \left(\mathrm{A}_x \mathrm{A}_y + \mathrm{A}_y \mathrm{A}_x \right)(u), w \rangle$$

olur. Buradan

$$\left(\mathrm{A}_x \mathrm{A}_y + \mathrm{A}_y \mathrm{A}_x \right)(u) = -v\left(\Re_{ux} y + \Re_{uy} x \right)$$

elde edilir.

Sonuç 2.6.2. Yardımcı Teorem 2.6.2. de $M = \mathrm{S}^n(1)$ alırsak;

$$\left(\mathrm{A}_X \mathrm{A}_Y + \mathrm{A}_Y \mathrm{A}_X \right)(V) = -2\langle X, Y \rangle V \text{ ve } \mathrm{A}_X^2 V = -\|X\|^2 V \text{ olur.}$$

İspat: $\mathrm{S}^n(1) = \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 \right\}$ Riemann küresi, sabit c=1 eğrilikli olduğundan

$$\Re_{VX} Y = 1.\left\{ \langle X, Y \rangle V + \langle V, Y \rangle X \right\} = \langle X, Y \rangle V \text{ ve}$$
$$\Re_{VY} X = 1.\left\{ \langle V, X \rangle Y + \langle X, Y \rangle V \right\} = \langle X, Y \rangle V$$

olur dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.5.2. den

$$\left(\mathrm{A}_X \mathrm{A}_Y + \mathrm{A}_Y \mathrm{A}_X \right)(V) = -2\langle X, Y \rangle V \text{ bulunur ve burada } Y = X \text{ yazarsak}$$

$$2A_X A_X V = 2A_X^2 V = -2\langle X, X\rangle V = -2\|X\|^2 V$$

buluruz ki bu da $A_X^2 V = -\|X\|^2 V$ olduğunu gösterir. Ranjan [6].

2.7. TERS-DE SİTTER UZAYDA LİFLERİ TÜMEL JEODEZİK OLAN YARI-RİEMANN ALT-KAPSAMALAR

Tanım 2.7.1. Aşağıdaki teoremlerde karşılaşacağımız H_1^{2n+1} kompleks hiperbolik uzayına *görecelik teorisi'* nde ters-de Sitter uzay (*anti-de Sitter space)* denir.

$\mathbb{C}^{n+1}$ üzerinde

$$(z, w) = -z_0\overline{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k \ ,$$

$$\langle z, w\rangle = \mathrm{Re}(z, w) = -x_0u_0 - y_0v_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k u_k + y_k v_k \quad \text{olsun.}$$

Burada,

$$z = (z_0, ..., z_n) = (x_0 + iy_0, ...x_n + iy_n)$$

$$w = (w_0, ..., w_n) = (u_0 + iv_0, ..., u_n + iv_n)$$

$$\begin{aligned} H_1^{2n+1} &= \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} : (z, z) = -1 = \langle z, z\rangle \right\} \\ &= \left\{ (x_0, y_0, ..., x_n, y_n) : -x_0^2 - y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 + ... + x_n^2 + y_n^2 = -1 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan H_1^{2n+1} ye *kompleks hiperbolik uzay* denir. H_1^{2n+1}, -1 sabit kesit eğrilikli ve $(1, 2n)$ işaretli ($2n+1$)- boyutlu bir Lorentz manifold'dur.

Yardımcı Teorem 2.7.1. M_1^{m+k}, negatif sabit kesitsel eğrilikli Lorentz manifoldu olmak üzere, eğer $\pi : M_1^{m+k} \to B^n$ tümel jeodezik liflere sahip bir yarı-Riemann alt-kapsama ise, bu durumda $k = 1$ dir.

İspat: Sonuç 2.5.1-b) den $T \equiv 0$ olduğundan

$$\kappa\left(\mathrm{P}_{XV}\right)=\frac{\langle \mathrm{A}_X V,\mathrm{A}_X V\rangle}{\langle X,X\rangle\langle V,V\rangle}<0$$

yazabiliriz. $\mathrm{A}_X V$ ile X yatay ve B, Riemann manifoldu olduğundan

$\langle \mathrm{A}_X V,\mathrm{A}_X V\rangle>0$ ve $\langle X,X\rangle>0$

dır. Böylece $\langle V,V\rangle<0$ olmak zorundadır, yani V zamansaldır. M, Lorentz manifoldu olduğundan zamansal vektörlerin uzayı bir-boyutlu olmak zorundadır, başka deyişle; düşey vektörlerin uzayı bir-boyutludur.

Teorem 2.7.1. Eğer $\pi:\mathrm{H}_1^{m+1}\to B^m$, tümel jeodezik liflere sahip bir yarı-Riemann alt-kapsama ise, bu durumda $m=2n$ dir. (bir $n>0$ için).

İspat: H_1^{m+1} nin lifleri tümel jeodezik ve bir-boyutlu olduğundan liflerin jeodezik eğrilerine teğet öyle bir düzgün V düşey vektör alanı vardır ki $\langle V,V\rangle=-1$ olur.

X ve Y, H_1^{m+1} üzerinde yatay vektör alanları olsun. $\mathrm{A}_X V$ nin yatay olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$0=Y\langle X,V\rangle=\langle\nabla_Y X,V\rangle+\langle X,\nabla_Y V\rangle=\langle \mathrm{A}_Y X,V\rangle+\langle X,\mathrm{A}_Y V\rangle$$

X ile Y nin yerlerini değiştirirsek

$0=\langle \mathrm{A}_X Y,V\rangle+\langle Y,\mathrm{A}_X V\rangle$ olur.

$\mathrm{A}_X Y+\mathrm{A}_Y X=0$ olduğundan yukarıdaki son iki denklemi toplarsak

$$\langle X,\mathrm{A}_Y V\rangle+\langle Y,\mathrm{A}_X V\rangle=0$$

elde ederiz. Bu yüzden $\mathrm{A}\_V:\hbar_X\to\hbar_X$ ters-simetrik bir operatör olur. Şimdi eğer $\hbar_X$ yatay alt uzayı tek boyutlu olursa, bu durumda A_V nin özdeğerlerinden biri mutlaka 0 olacaktır. Öte yandan Sonuç 2.5.1-b) den

$$\frac{\langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_X V\rangle}{\langle X, X\rangle\langle V, V\rangle} = -1$$

olur, ancak $\langle V, V\rangle = -1$ olduğundan

$$\langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_X V\rangle = \langle X, X\rangle$$

dır, başka deyişle; A_V bir *izometri* dir. O halde $\hbar_X$ kesinlikle tek boyutlu olamaz, yani; $m = 2n$ olmak zorundadır.

V bir önceki Teoremdeki gibi olsun. V jeodezik vektör alanı olduğundan $\nabla_V V = 0$ dır. E, H_1^{2n+1} üzerinde tanımlı herhangi bir vektör alanı olmak üzere $\phi(E) = \mathrm{A}_E V$ ve η, V ye dual 1-form olsun, yani; $\eta(V) = -1$. Bu durumda aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 2.7.2. (1) $\phi(V) = 0$.

(2) $\eta(\phi(E)) = 0$.

(3) $\phi^2(E) = -E - \eta(E)V$.

(4) $\langle \phi(E), \phi(F)\rangle = \langle E, F\rangle + \eta(E).\eta(F)$.

(5) $\eta(E) = \langle E, V\rangle$.

İspat: (1), (2) ve (5) açıktır.

(3) $E = X + \lambda V$ olsun, burada X yataydır. Bu durumda

$$\phi^2(E) = \mathrm{A}_{\mathrm{A}_E V} V = \mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V} V$$

dir. Ancak herhangi yatay Y vektör alanı için

$$\langle \mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V} V, Y\rangle = -\langle \mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V} Y, V\rangle = \langle \mathrm{A}_Y(\mathrm{A}_X V), V\rangle = -\langle \mathrm{A}_Y V, \mathrm{A}_X V\rangle = -\langle X, Y\rangle$$

olduğundan $\mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V} V = -X$ olur. Böylece

$$\phi^2\left(X+\lambda V\right)=-X=-\left(X+\lambda V\right)-\eta\left(X+\lambda V\right)V=-E-\eta\left(E\right)V.$$

(4) $E=X+\lambda V,\ \ F=Y+\mu V$

olsun, burada X ve Y yataydır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\langle\phi\left(E\right),\phi\left(F\right)\rangle&=\langle \mathrm{A}_E V,\mathrm{A}_F V\rangle=\langle \mathrm{A}_X V,\mathrm{A}_Y V\rangle=\langle X,Y\rangle\\&=\langle X+\lambda V,Y+\mu V\rangle+\eta\left(X+\lambda V\right)\eta\left(Y+\mu V\right).\end{aligned}$$

$\pi:\mathrm{H}_1^{2n+1}\to B^{2n}$, tümel jeodezik liflere sahip bir yarı-Riemann alt-kapsama ve V bir tek düşey vektör alanı olmak üzere aşağıdaki teoremler geçerlidir.

Teorem 2.7.2. Eğer X, H_1^{2n+1} üzerinde bir temel vektör alanı ise, bu durumda $\mathrm{A}_X V$ de bir temel vektör alanıdır.

İspat: Bu ispat için Yardımcı Teorem 2.3.2. den faydalanalım.

Y_i, B^{2n} üzerindeki Y_{i_*} ile $\pi-$bağımlı H_1^{2n+1} üzerindeki bir temel vektör alanı ve X yatay vektör alanı olsun. Eğer bu şekildeki Y_i ler için $\langle X,Y_i\rangle_p=\langle X,Y_i\rangle_{p'}$ ise (burada $p,p'\in\pi^{-1}\left(q\right)$ ve $q\in B^{2n}$), bu durumda X temeldir. Bu demektir ki herhangi temel Y vektör alanları için $V\langle \mathrm{A}_X V,Y\rangle=0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}V\langle \mathrm{A}_X V,Y\rangle&=\langle\nabla_V\left(\mathrm{A}_X V\right),Y\rangle+\langle \mathrm{A}_X V,\nabla_V Y\rangle\\&=\langle\nabla_V\left(\mathrm{A}_X V\right),Y\rangle+\langle \mathrm{A}_X V,\mathrm{A}_Y V\rangle\\&=\langle\nabla_V\left(\mathrm{A}_X V\right),Y\rangle+\langle X,Y\rangle\end{aligned}$$

X in temel olduğunu göstermek için $\nabla_V\left(\mathrm{A}_X V\right)=-X$ olduğunu göstermeliyiz. H_1^{2n+1} üzerinde

$$\Re_{VX}V=\nabla_V\nabla_X V-\nabla_X\nabla_V V-\nabla_{[X,V]}V=-\left\{\langle X,V\rangle V-\langle V,V\rangle X\right\}=-X$$

dir, çünkü H_1^{2n+1} nin eğriliği -1 dir. Burada $\nabla_V V=0$ ve $\left[V,X\right]$ düşey olduğundan

$$\nabla_{[X,V]}V = \alpha\nabla_V V = 0$$

olur (burada $\alpha \in \Im\left(\mathrm{H}_1^{2n+1}\right)$) böylece $\Re_{VX}V = \nabla_V \nabla_X V = -X$

olur. Ancak $\langle \nabla_X V, V\rangle = \frac{1}{2}X\langle V, V\rangle = 0$ olduğundan

$$\nabla_V\left(\nabla_X V\right) = \nabla_V\left(\mathrm{A}_X V + \nu\nabla_X V\right) = \nabla_V\left(\mathrm{A}_X V\right)$$

olur ve ispat biter.

Yardımcı Teorem 2.7.3. Eğer X ve Y, H_1^{2n+1} üzerinde yatay vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\hbar\left(\nabla_X\left(\mathrm{A}_Y V\right)\right) = \mathrm{A}_{(\nabla_X Y)}V \ .$$

İspat: Z herhangi bir yatay vektör alanı olmak üzere

$$\langle \nabla_X \mathrm{A}_Y V, Z\rangle = \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y}V, Z\rangle$$

eşitliğini göstermeliyiz. Teorem 2.5.2-b) den

$$\langle \Re_{YZ}X, V\rangle = \langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z, V\rangle \Rightarrow \langle \Re_{YZ}V, X\rangle = -\langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z, V\rangle \ .$$

$$\Re_{YZ}V = -\left\{\underbrace{\langle Y,V\rangle}_{0}Z - \underbrace{\langle Z,V\rangle}_{0}Y\right\} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\langle\left(\nabla_X \mathrm{A}\right)_Y Z, V\rangle = 0$$

elde ederiz. Bunu açalım, yani;

$$0 = \langle \nabla_X\left(\mathrm{A}_Y Z\right), V\rangle - \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y}Z, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y\left(\nabla_X Z\right), V\rangle.$$

Burada

$$\mathrm{A}_Y Z = -\langle \mathrm{A}_Y Z, V\rangle V = \langle \mathrm{A}_Y V, Z\rangle V$$

yazabiliriz, bunu yukarıdaki denklemde kullanırsak;

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla_X \langle \mathrm{A}_Y V, Z\rangle V, V\rangle - \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y} Z, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y \left(\nabla_X Z\right), V\rangle \\
&= \langle \mathrm{A}_Y V, Z\rangle \underbrace{\langle \nabla_X V, V\rangle}_{0} + \langle X \langle \mathrm{A}_Y V, Z\rangle V, V\rangle - \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y} Z, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y \left(\nabla_X Z\right), V\rangle \\
&= -\langle \nabla_X \left(\mathrm{A}_Y V\right), Z\rangle - \langle \mathrm{A}_Y V, \nabla_X Z\rangle - \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y} Z, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y \left(\nabla_X Z\right), V\rangle \\
&= \langle \nabla_X \left(\mathrm{A}_Y V\right), Z\rangle + \langle \mathrm{A}_Y V, \nabla_X Z\rangle - \langle Z, \mathrm{A}_{\nabla_X Y} V\rangle + \langle \mathrm{A}_Y \left(\nabla_X Z\right), V\rangle \\
&= \langle \nabla_X \left(\mathrm{A}_Y V\right), Z\rangle - \langle \mathrm{A}_{\nabla_X Y} V, Z\rangle
\end{aligned}$$

olur ki bu da aradığımız sonuçtur.

Yardımcı Teorem 2.7.2. ve Teorem 2.7.2. den ϕ nin B^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı ürettiğini görebiliriz.

Şimdi şuna dikkat edelim; B^{2n} üzerindeki metrik Hermitian dır. Gerçekten;Yardımcı Teorem 2.7.2 den $\forall X, Y \in \mathrm{H}_1^{2n+1}$ temel vektör alanları için,

$$\langle \phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle \qquad (2.7.1.)$$

gerçeklenir. Böylece B^{2n} nin bir Kaehler manifoldu olduğunu göstermek için $\forall X_*, Y_* \in T\left(B^{2n}\right)$ için

$$\nabla^*_{X_*} \phi Y_* = \phi\left(\nabla^*_{X_*} Y_*\right) \qquad (2.7.2.)$$

eşitliğini göstermemiz gerekir. Oysa

$\left(\nabla^*_{X_*} Y_*\right)$, $\hbar \nabla_X Y$ ile $\pi-$bağımlı ve

$\nabla^*_{X_*} \phi Y_*$, $\hbar\left(\nabla_X \phi Y\right)$ ile $\pi-$bağımlı olduğundan

$$\hbar\left(\nabla_X \phi Y\right)=\phi\left(\nabla_X Y\right)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu ise Yardımcı Teorem 2.7.3. te zaten gerçeklenmiştir. Sonuçta (2.7.1.) ve (2.7.2.) den B^{2n} bir Kaehler Manifoldu olur .

Teorem 2.7.3. B^{2n} üzerindeki bu hemen hemen kompleks yapı integrallenebilirdir .

İspat: Bunun için $\mathrm{N}_\phi\left(X_*,Y_*\right)=0$ olduğunu göstermemiz gerekir. Burada X_* ve Y_* B^{2n} üzerinde vektör alanları ve N_ϕ, ϕ nin *Nijenhuis* tensörüdür.

$\mathrm{N}_\phi\left(X_*,Y_*\right)$ ye karşılık gelen temel vektör alanı;

$$\hbar\left[\phi(X),\phi(Y)\right]-\hbar\left[X,Y\right]-\phi\left[X,\phi(Y)\right]-\phi\left[\phi(X),Y\right]=$$

$$=\hbar\left(\nabla_{\phi X}\phi Y\right)-\hbar\left(\nabla_{\phi Y}\phi X\right)-\hbar\left(\nabla_X Y\right)+\hbar\left(\nabla_Y X\right)$$

$$-\phi\left(\nabla_X \phi Y\right)+\phi\left(\nabla_{\phi Y} X\right)-\phi\left(\nabla_{\phi X} Y\right)+\phi\left(\nabla_Y \phi X\right)$$

$$=\overbrace{\hbar\left(\nabla_{\mathrm{A}_X V}\left(\mathrm{A}_Y V\right)\right)}^{(a)}-\overbrace{\hbar\left(\nabla_{\mathrm{A}_Y V}\left(\mathrm{A}_X V\right)\right)}^{(b)}-\overbrace{\hbar\left(\nabla_X Y\right)}^{(c)}+\overbrace{\hbar\left(\nabla_Y X\right)}^{(d)}$$

$$\overbrace{-\mathrm{A}_{\nabla_X\left(\mathrm{A}_Y V\right)}V}^{(e)}+\overbrace{\mathrm{A}_{\nabla_{\left(\mathrm{A}_Y V\right)}X}V}^{(f)}-\overbrace{\mathrm{A}_{\nabla_{\left(\mathrm{A}_X V\right)}Y}V}^{(g)}+\overbrace{\mathrm{A}_{\nabla_Y\left(\mathrm{A}_X V\right)}V}^{(h)}$$

Yardımcı Teorem 2.7.3 de X yerine $\mathrm{A}_X V$ yazarsak;

$$\hbar\left(\nabla_{\mathrm{A}_X V}\left(\mathrm{A}_Y V\right)\right)=\mathrm{A}_{\nabla_{\mathrm{A}_X V}Y}V \text{, benzer şekilde } \quad \hbar\left(\nabla_{\mathrm{A}_Y V}\left(\mathrm{A}_X V\right)\right)=\mathrm{A}_{\nabla_{\mathrm{A}_Y V}X}V$$

olur. Öte yandan

$$\mathrm{A}_{\nabla_X\left(\mathrm{A}_Y V\right)}V=\hbar\left(\nabla_X\left(\mathrm{A}_{\mathrm{A}_Y V}V\right)\right)=-\hbar\left(\nabla_X Y\right)$$

ve benzer şekilde

$$\mathrm{A}_{\nabla_Y\left(\mathrm{A}_X V\right)}V=\hbar\left(\nabla_Y\left(\mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V}V\right)\right)=-\hbar\left(\nabla_Y X\right)$$

Böylece $(a)=(g)$, $(b)=(f), (e)=-(c)$ ve $(h)=-(d)$ olur ve istenen çıkar. Magid[7]

2.8. ÖRNEKLER

Örnek 2.8.1. M_1 ve M_2**,** Riemann manifoldları ve $M_1 \times M_2$, bu manifoldların Riemann çarpımı olmak üzere

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i,\ i = 1,2$$

dönüşümleri birer Riemann alt-kapsamadır.

Örnek 2.8.2. M herhangi bir Riemann manifold olsun. TM, M nin teğet demeti olmak üzere

$$\pi : TM \to M$$

bir Riemann alt-kapsamadır. Carmo [8].

Örnek 2.8.3. *(Kompleks İzdüşüm Uzayı)*

$$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} = \left\{ (z_0, \ldots, z_n) = z \neq 0,\ z_j = x_j + iy_j,\ j = 0,1,\ldots,n,\ i^2 = -1. \right\}$$

$\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde bir eşdeğerlik bağıntısı vardır.

$z = (z_0, \ldots z_n) \sim w = (w_0, \ldots, w_n)$ eğer $z_j = \lambda w_j$ ise, burada $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

$[z] = ($ z den ve orjinden geçen kompleks doğrular).

$\mathrm{P}^n(\mathbb{C}) = \left\{ \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim \right\}$ bir düzgün manifoldtur. $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ ye *kompleks izdüşüm uzayı* denir.

S^{2n+1}, $\mathbb{C}^{n+1}$ üzerindeki birim küre olsun, yani;

$$\mathrm{S}^{2n+1} = \left\{ E \in \mathbb{C}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2} : \langle E, E \rangle = 1 \right\}.$$

$\mathbb{C}^{n+1}$ üzerindeki " $\sim$ " bağıntısını S^{2n+1} üzerine şu şekilde indirgeyebiliriz.

$z \sim w$ eğer $e^{i\theta} z = w$ ise.

$$\pi : \mathrm{S}^{2n+1} \to \mathrm{P}^n(\mathbb{C})$$

$$\pi^{-1}\left(\left[z\right]\right)=\left\{e^{i\theta}E\in \mathrm{S}^{2n+1},\ E\in\left[z\right]\cap \mathrm{S}^{2n+1},\ 0\le\theta\le 2\pi\ \right\}=\left[z\right]\cap \mathrm{S}^{2n+1}$$

şeklinde tanımlanan π dönüşümü bir Riemann alt-kapsamadır.

N, $\mathrm{S}^{2n+1}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ küresinin birim normali olsun. Eğer J, $\mathbb{C}^{n+1}$ üzerinde doğal hemen hemen kompleks yapı ise, $J\mathrm{N}$ vektör alanının integral eğrileri S^{2n+1} üzerindeki büyük çemberlerdir. π nin lifleri tümel jeodezik olduğundan T özdeş olarak sıfırdır. A tensörü aşağıdaki gibi belirlenebilir.

Eğer X ve Y, S^{2n+1} üzerinde yatay vektör alanları ise (yani; $J\mathrm{N}$ e dik iseler)

$$\mathrm{A}_X\left(J\mathrm{N}\right)=\hbar\nabla_X\left(J\mathrm{N}\right)=\hbar J\nabla_X N=\hbar JX=JX$$

olur sonuçta $\mathrm{A}_X J\mathrm{N}=JX$. Öte yandan

$$\langle \mathrm{A}_X Y, J\mathrm{N}\rangle=-\langle Y,\mathrm{A}_X\left(J\mathrm{N}\right)\rangle=-\langle Y,JX\rangle=\langle X,JY\rangle$$
$$\mathrm{A}_X Y=\langle \mathrm{A}_X Y,J\mathrm{N}\rangle J\mathrm{N}$$

olduğundan $\mathrm{A}_X Y=\langle X,JY\rangle JN$ olur.

Eğer X, S^{2n+1} üzerinde temel vektör alanı ise , bu durumda JX de temel vektör alanıdır. Bu durum $\mathrm{P}^n\left(\mathbb{C}\right)$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı belirler.

P_{xy}, $\mathrm{P}^n\left(\mathbb{C}\right)$ ye teğet düzlem olmak üzere Sonuç 2.5.1-c) den

$$\kappa_{xy}={}^{1+3\langle x,Jy\rangle^2}\Big/_{\left\|x\wedge y\right\|^2}$$ olur . O'Neill [4].

Örnek 2.8.4. $M=\mathrm{S}_1^{m+1}\left(c\right)$ bir $(m+1)-$ boyutlu yarı uzay form ve $F(t)$,

$$F(t)=\left\{x\in M\subset\mathbb{R}_1^{m+2}=\mathbb{R}_1^1\times\mathbb{R}^{m+1}:x_1=x_{m+2}+t\right\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzaysal hiperyüzey olsun. Bu durumda $M = \cup_{t \in \mathbb{R}_1^1} F(t)$ olduğunu görebiliriz ve $\pi : M \to B = \mathbb{R}_1^1$ dönüşümünü

$$\pi\left(F(t)\right) = t$$

şeklinde tanımlarsak; π, lifleri tümel eş bükümlü fakat tümel jeodezik olmayan bir yarı –Riemann alt-kapsama olur.

Örnek 2.8.5. $M = \mathrm{S}_1^{m+1}(c)$ bir $(m+1)-$boyutlu yarı uzay form ve

$$\mathrm{S}^m(c_1),\ \mathrm{S}^m(c_1) = \left\{ x \in M : x_1^2 = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c},\ c_1 \le c \right\}$$

şeklinde tanımlanan bir uzaysal hiperyüzey olsun. Bu durumda $M = \cup_{c_1} \mathrm{S}^m(c_1)$ olduğunu görebiliriz ve $\pi : M \to B = \mathbb{R}_1^1$ dönüşümünü

$$\pi\left(\mathrm{S}^m(c_1)\right) = x_1$$

şeklinde tanımlarsak; π, lifleri tümel eş bükümlü fakat tümel jeodezik olmayan bir yarı –Riemann alt-kapsama olur. Kwon ve Suh [9].

3. BULGULAR

Örnek 3.1. $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^+$

$$(x,y,z) \to \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

şeklinde olsun. $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ olduğundan π, C^∞- sınıfındandır, yani; düzgündür. Herhangi bir $r \in \mathbb{R}^+$ için,

$$\pi^{-1}(r) = S^2(r) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\} \middle| x^2+y^2+z^2 = r^2 \right\}$$

(Orijin merkezli ve r- yarıçaplı, 2-boyutlu küre, bu küreye bazı kaynaklarda *Riemann küresi* de denir). $\pi^{-1}(r)$, $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ın lifidir. Üstelik tümel eş bükümlü lifidir.

$$\pi_x(x,y,z) = \frac{1}{r}x, \quad \pi_y(x,y,z) = \frac{1}{r}y \text{ ve } \quad \pi_z(x,y,z) = \frac{1}{r}z$$

dir. Dolayısıyla $p = (p_1, p_{2,} p_3) \in \pi^{-1}(r)$ noktasında π nin Jakobiyeni

$$J\pi_p = \left[\pi_x(p), \pi_y(p), \pi_z(p) \right] = \frac{1}{r}(p_1, p_2, p_3) \neq (0,0,0)$$

olduğundan $rank(\pi) = 1$, yani; π, maksimal ranka sahiptir. Böylece (AK 1) sağlanır.

$X_p = (p_1, p_2, p_3)$ yer vektörü $p \in S^2(r)$ noktasındaki bir tek yatay vektördür.

$$\pi_{*p}(X_p) = J\pi_p . X_p = \frac{1}{r}(p_1 \ p_2 \ p_3) . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}.r^2 = r.$$

O halde $\pi_{*p}(X_p).\pi_{*p}(X_p) = r^2$ olur. Öte yandan

$$\langle X_p, X_p \rangle = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = r^2$$

olduğundan (AK 2) sağlanır.

Sonuçta $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^+$ bir Riemann alt-kapsama olur.

Örnek 3.2. $\pi : M \to \mathbb{R}_1^+$

$$(x,y,z) \to \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$$

şeklinde olsun. Burada $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}_1^3 \,\middle|\, x^2 > y^2 + z^2\right\}$ dir. π, M üzerinde C^∞-sınıfındandır, yani; düzgündür. Herhangi bir $r \in \mathbb{R}_1^+$ için,

$$\sqrt{x^2 - y^2 - z^2} = r \Rightarrow \langle \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}, \sqrt{x^2 - y^2 - z^2} \rangle_1^* = \langle r, r \rangle_1^* = -r^2$$
$$\Rightarrow -\left(x^2 - y^2 - z^2\right) = -r^2 \Rightarrow -x^2 + y^2 + z^2 = -r^2$$

(burada $\langle , \rangle_1^*$, $\mathbb{R}_1^+$ üzerindeki negatif-tanımlı metriktir.) olduğundan

$$\pi^{-1}(r) = \mathrm{H}^2(r) = \left\{(x,y,z) \in M \,\middle|\, -x^2 + y^2 + z^2 = -r^2\right\}$$

iki- kanatlı hiperboloidi, M nin lifidir.

$$\pi_x(x,y,z) = -\frac{1}{r}x, \quad \pi_y(x,y,z) = \frac{1}{r}y \ \text{ ve } \ \pi_z(x,y,z) = \frac{1}{r}z$$

dir. Dolayısıyla $p = (p_1, p_{2,} p_3) \in \pi^{-1}(r)$ noktasında π nin Jakobiyeni

$$J\pi_p = \left[\pi_x(p), \pi_y(p), \pi_z(p)\right] = \frac{1}{r}(-p_1, p_2, p_3) \neq (0,0,0)$$

olduğundan $rank(\pi) = 1$, yani; π, maksimal ranka sahiptir. Böylece (AK 1) sağlanır. $X_p = (-p_1, p_2, p_3)$, $p \in \mathrm{H}^2(r)$ noktasındaki bir tek yatay vektördür.

$$\pi_{*p}(X_p) = J\pi_p . X_p = \frac{1}{r}(-p_1 \ p_2 \ p_3).\begin{pmatrix} -p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}.(-r^2) = -r.$$

O halde $\langle \pi_{*p}\left(X_p\right), \pi_{*p}\left(X_p\right)\rangle_1^* = -r^2$ olur. Öte yandan

$$\langle X_p, X_p \rangle_1 = -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -r^2$$

(burada $\langle , \rangle_1$, M üzerindeki metriktir.) olduğundan (AK 2) sağlanır.

Sonuçta $\pi : M \to$ □$_1^+$ bir yarı-Riemann alt-kapsama olur.

Sonuç 3.1. $\pi : M \to B$ herhangi bir Riemann alt-kapsama olsun. Eğer X ve Y temel vektör alanları ve V düşey vektör alanı ise, bu durumda $V\langle X, Y\rangle = 0$ dır. Gray [10].

İspat: $V\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \nabla_V Y\rangle = \langle \hbar\nabla_V X, Y\rangle + \langle X, \hbar\nabla_V Y\rangle$

X ve Y temel olduğundan Yardımcı Teorem 2.3.3-b) den

$$\hbar\nabla_V X = \mathrm{A}_X V \text{ ve } \hbar\nabla_{\mathrm{V}} Y = \mathrm{A}_Y V$$

dir. Böylece $V\langle X,Y\rangle = \langle \mathrm{A}_V X, Y\rangle + \langle X, \mathrm{A}_V Y\rangle$

olur. Şimdi, burada önce (A1) i daha sonra da (A3) ü kullanırsak ;

$$V\langle X,Y\rangle = -\langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle - \langle \mathrm{A}_Y X, V\rangle = -\langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle = 0$$

olur ve ispat biter.

Aşağıdaki iki Yardımcı Teorem, $\nabla\mathrm{T}$ ve $\nabla\mathrm{A}$ tensörlerinin T ve A cinsinden ifade edilmesinde belirleyicilik açısından oldukça önemlidir.

Yardımcı Teorem 3.1. $\pi : M \to B$ bir Riemann alt-kapsama olsun. Eğer X, Y, Z, H yatay ve U, V, W, F düşey vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\langle \left(\nabla_X \mathrm{T}\right)_V Y, Z\rangle = \langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{T}_V Z\rangle - \langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{T}_V Y\rangle$

b) $\langle \left(\nabla_U \mathrm{T}\right)_V X, Y\rangle = \langle \mathrm{T}_U X, \mathrm{T}_V Y\rangle - \langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_U Y\rangle$

c) $\langle (\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle = \langle \mathrm{T}_U W, \mathrm{T}_V F\rangle - \langle \mathrm{T}_U F, \mathrm{T}_V W\rangle$

d) $\langle (\nabla_X T)_Y Z, H\rangle = 0$

e) $\langle (\nabla_U \mathrm{T})_X V, Y\rangle = \langle \mathrm{T}_U X, \mathrm{T}_V Y\rangle$

f) $\langle (\nabla_X \mathrm{T})_Y Z, U\rangle = -\langle \mathrm{T}_U Z, \mathrm{A}_X Y\rangle$

g) $\langle (\nabla_U T)_X V, W\rangle = 0$

h) $\langle (\nabla_X \mathrm{T})_Y U, V\rangle = 0$

ı) $\langle (\nabla_U \mathrm{T})_X Y, Z\rangle = 0$

İspat: d), f) ve h) da Yardımcı Teorem 2.4.1-c) nin, e), g) ve ı) da Yardımcı Teorem 2.4.1-d) nin basit sonuçlarıdır. Biz a) yı ispatlayalım.

$$(\nabla_X T)_V Y = \nabla_X \left(\mathrm{T}_V Y\right) - \mathrm{T}_{\nabla_X V} Y - \mathrm{T}_V \nabla_X Y$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\langle (\nabla_X T)_V Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X \left(\mathrm{T}_V Y\right), Z\rangle - \langle \mathrm{T}_{\nabla_X V} Y, Z\rangle - \langle \mathrm{T}_V \nabla_X Y, Z\rangle \\ &= \nabla_X \langle \mathrm{T}_V Y, Z\rangle - \langle \mathrm{T}_V Y, \nabla_X Z\rangle - \langle \mathrm{T}_{\nabla_X V} Y, Z\rangle - \langle \mathrm{T}_V (\nabla_X Y), Z\rangle\end{aligned}$$

T, yatayları düşeylere çevirdiğinden,

$$\langle \mathrm{T}_V Y, Z\rangle = 0 \text{ ve } \langle \mathrm{T}_{\nabla_X V} Y, Z\rangle = 0$$

dır. Öte yandan Yardımcı Teorem 2.3.3-(3)-a) dan

$$\langle \mathrm{T}_V Y, \nabla_X Z\rangle = \langle \mathrm{T}_V Y, \mathrm{A}_X Z\rangle$$

ve T ters-simetrik olduğundan

$$-\langle \mathrm{T}_V \left(\mathrm{A}_X Y\right), Z\rangle = \langle \mathrm{T}_V Z, \mathrm{A}_X Y\rangle$$

dir. Böylece

$$\langle (\nabla_X \mathrm{T})_V Y, Z\rangle = \langle \mathrm{A}_X Y, \mathrm{T}_V Z\rangle - \langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{T}_V Y\rangle$$

bulunur ve ispat biter. b) ve c) nin de ispatları da tamamen benzer şekildedir.

Yardımcı Teorem 3.2. $\pi : M \to B$ bir alt-kapsama olsun. Eğer X, Y, Z, H yatay ve U, V, W, F düşey vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

a) $\langle (\nabla_U \mathrm{A})_X V, W \rangle = \langle \mathrm{T}_U V, \mathrm{A}_X W \rangle - \langle \mathrm{T}_U W, \mathrm{A}_X V \rangle$

b) $\langle (\nabla_X \mathrm{A})_Y V, W \rangle = \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W \rangle - \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{A}_Y V \rangle$

c) $\langle (\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H \rangle = \langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{A}_Y H \rangle - \langle \mathrm{A}_X H, \mathrm{A}_Y Z \rangle$

d) $\langle (\nabla_U \mathrm{A})_V W, F \rangle = 0$

e) $\langle (\nabla_X \mathrm{A})_U Y, V \rangle = -\langle \mathrm{A}_X U, \mathrm{A}_Y V \rangle$

f) $\langle (\nabla_U \mathrm{A})_V W, X \rangle = \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{T}_U V \rangle$

g) $\langle (\nabla_X \mathrm{A})_U Y, Z \rangle = 0$

h) $\langle (\nabla_U \mathrm{A})_V X, Y \rangle = 0$

ı) $\langle (\nabla_X \mathrm{A})_U V, W \rangle = 0$

İspat: d), f) ve h) Yardımcı Teorem 2.4.1-a) nın, e), g) ve ı) da Yardımcı Teorem 2.5.1-b) nin basit sonuçlarıdır. Biz a) nın ispatını yapalım.

$$
\begin{aligned}
\langle (\nabla_U \mathrm{A})_X V, W \rangle &= \langle \nabla_U (\mathrm{A}_X V) - \mathrm{A}_{\nabla_U X} V - \mathrm{A}_X \nabla_U V, W \rangle \\
&= \langle \nabla_U (\mathrm{A}_X V), W \rangle - \underbrace{\langle \mathrm{A}_{\nabla_U X} V, W \rangle}_{0} - \langle \mathrm{A}_X \nabla_U V, W \rangle \\
&= \nabla_U \underbrace{\langle \mathrm{A}_X V, W \rangle}_{0} - \langle \mathrm{A}_X V, \nabla_U W \rangle - \langle \mathrm{A}_X \hbar (\nabla_U V), W \rangle \\
&= -\langle \mathrm{A}_X V, \nu(\nabla_U W) \rangle - \langle \mathrm{A}_X (\mathrm{T}_U V), W \rangle \\
&= \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{T}_U V \rangle - \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{T}_U W \rangle
\end{aligned}
$$

olur ve ispat biter. b) ile c) nin ispatları da benzer şekilde yapılır.

Sonuç 3.2. Eğer U, V, W ve F düşey vektör alanları ve Ω, U, V ve W üzerinden değişen devirsel toplam ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\Omega\langle(\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle = 0 \ .$$

İspat: $\Omega\langle(\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle = \langle(\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle + \langle(\nabla_W \mathrm{T})_U V, F\rangle + \langle(\nabla_V \mathrm{T})_W U, F\rangle$

Burada Yardımcı Teorem 3.1-c) yi kullanırsak

$$\Omega\langle(\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle = \langle \mathrm{T}_U W, \mathrm{T}_V F\rangle - \langle \mathrm{T}_U F, \mathrm{T}_V W\rangle + \langle \mathrm{T}_W V, \mathrm{T}_U F\rangle$$
$$-\langle \mathrm{T}_W F, \mathrm{T}_U V\rangle + \langle \mathrm{T}_V U, \mathrm{T}_W F\rangle - \langle \mathrm{T}_V F, \mathrm{T}_W U\rangle$$

Burada (T3) özelliğini kullanırsak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak kolayca

$$\Omega\langle(\nabla_U \mathrm{T})_V W, F\rangle = 0$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Sonuç 3.3. Eğer X, Y, Z ve H yatay vektör alanları ve Ω, X, Y ve Z üzerinden değişen devirsel toplam ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\Omega\langle(\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H\rangle = 2.\Omega\langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{A}_Y H\rangle \ .$$

İspat: $\Omega\langle(\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H\rangle = \langle(\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H\rangle + \langle(\nabla_Z \mathrm{A})_X Y, H\rangle + \langle(\nabla_Y \mathrm{A})_Z X, H\rangle$

Burada Yardımcı Teorem 3.2-c) yi kullanırsak

$$\Omega\langle(\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H\rangle = \langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{A}_Y H\rangle - \langle \mathrm{A}_X H, \mathrm{A}_Y Z\rangle + \langle \mathrm{A}_Z Y, \mathrm{A}_X H\rangle$$
$$-\langle \mathrm{A}_Z H, \mathrm{A}_X Y\rangle + \langle \mathrm{A}_Y X, \mathrm{A}_Z H\rangle - \langle \mathrm{A}_Y H, \mathrm{A}_Z X\rangle$$

Burada (A3) özelliğini kullanırsak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak kolayca

$$\Omega\langle(\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, H\rangle = 2.\Omega\langle \mathrm{A}_X Z, \mathrm{A}_Y H\rangle$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Yardımcı Teorem 3.1. ve Yardımcı Teorem 3.2. de elde ettiğimiz bir çok sayıdaki denklemlere rağmen bazı hallerde $\nabla \mathrm{T}$ kovaryant türevini (benzer şekilde $\nabla \mathrm{A}$), örneğin

$$\langle (\nabla_X \mathrm{T})_V W, Y\rangle \text{ ve } \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle$$

yi **T** ve **A** cinsinden yazamıyoruz. Bununla beraber

$$\langle (\nabla_X \mathrm{T})_V W, Y\rangle \text{ ile } \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle$$

arasında bir ilişki bulduk ve bunu aşağıda Yardımcı Teorem olarak veriyoruz.

Yardımcı Teorem 3.3. Eğer V ve W düşey ve X ve Y yatay vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\langle (\nabla_Y \mathrm{T})_V W, X\rangle - \langle (\nabla_X T)_V W, Y\rangle = \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle + \langle (\nabla_W \mathrm{A})_X Y, V\rangle \ .$$

İspat: *Birinci Bianchi Özdeşliği*nden $\Re_{XV} Y + \Re_{VY} X + \Re_{YX} V = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$0 = \langle \Re_{XV} Y + \Re_{VY} X + \Re_{YX} V, W\rangle = \langle \Re_{XV} Y, W\rangle + \langle \Re_{VY} X, W\rangle + \langle \Re_{YX} V, W\rangle$$

(3.I)

yazabiliriz. Teorem 2.5.3-a) dan

$$\langle \Re_{XV} Y, W\rangle = \langle (\nabla_X \mathrm{T})_V W, Y\rangle + \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle - \langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_W Y\rangle + \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle \qquad (3.2)$$

yazabiliriz. $\Re$ eğrilik tensörünün simetri özelliklerini kullanarak;

$$\langle \Re_{VY} X, W\rangle = -\langle \Re_{YV} X, W\rangle = -\langle (\nabla_Y \mathrm{T})_V W, X\rangle - \langle (\nabla_V \mathrm{A})_Y X, W\rangle + \langle \mathrm{T}_V Y, \mathrm{T}_W X\rangle - \langle \mathrm{A}_Y V, \mathrm{A}_X W\rangle$$

(3.3) yazabiliriz. Öte yandan

$$\langle \Re_{YX} V, W\rangle = -\langle \Re_{XY} V, W\rangle = -\langle \Re_{VW} X, Y\rangle$$

dır. Burada Teorem 2.5.3-b) yi kullanırsak;

$$
\begin{aligned}
\langle \Re_{YX}V, W\rangle = & -\langle (\nabla_V \mathrm{A})_X\, Y, W\rangle + \langle (\nabla_W \mathrm{A})_X\, Y, V\rangle - \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle \\
& + \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{A}_Y V\rangle + \langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_W Y\rangle - \langle \mathrm{T}_W X, \mathrm{T}_V Y\rangle \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. (3.2), (3.3) ve (3.4) deki denklemleri (3.1) de yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1. $\pi : M_1^{n+1} \to B^n$ bir yarı-Riemann alt-kapsama ve M lifleri tümel jeodezik olan zamansal jeodezikli bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer X, M üzerinde bir temel vektör alanı ve V bir tek düşey vektör alanı ise, bu durumda $\mathrm{A}_X V$ de temel vektör alanıdır.

İspat: Y herhangi bir temel vektör alanı olmak üzere Teorem 2.7.2 gereğince $\nabla_V \langle \mathrm{A}_X V, Y\rangle = 0$ olduğunu göstermeliyiz. (A3) özelliğinden

$$\nabla_V \langle \mathrm{A}_X V, Y\rangle = -\nabla_V \langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle$$

olur. Böylece

$$\nabla_V \langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle = \langle \nabla_V \left(\mathrm{A}_X Y\right), V\rangle + \langle \mathrm{A}_X Y, \nabla_V V\rangle .$$

V bir tek düşey vektör alanı olmak üzere M zamansal jeodezikli ve lifler tümel jeodezik olduğundan V aynı zamanda jeodezik vektör alanıdır, yani; $\nabla_V V = 0$ dır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\nabla_V \langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle &= \langle \nabla_V \left(\mathrm{A}_X Y\right), V\rangle \\
&= \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X\, Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_{\nabla_V X} Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X \left(\nabla_V Y\right), V\rangle
\end{aligned}
$$

X ve Y temel olduğundan $\nabla_V X = \mathrm{A}_X V$ ve $\nabla_V Y = \mathrm{A}_Y V$

dir. Böylece

$$\nabla_V \langle \mathrm{A}_X Y, V\rangle = \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X\, Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_{\mathrm{A}_X V} Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X \left(\mathrm{A}_Y V\right), V\rangle$$

$$= \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle - \langle \mathrm{A}_Y (\mathrm{A}_X V), V \rangle - \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y V \rangle$$
$$= \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle + \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y V \rangle - \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y V \rangle$$
$$= \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle$$

Yardımcı Teorem 3.3. te $W = V$ yazarsak

$$\langle (\nabla_Y \mathrm{T})_V V, X \rangle - \langle (\nabla_X T)_V V, Y \rangle = \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle + \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle$$

olur. $\mathrm{T} \equiv 0$ olduğundan

$$2\langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle = 0 \;\Rightarrow \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, V \rangle = 0 .$$

Yardımcı Teorem 3.4. $\pi : M_1^{n+1} \to B^n$ bir yarı-Riemann alt-kapsama ve M lifleri tümel jeodezik olan zamansal jeodezikli bir Lorentz manifoldu olsun. Eğer X ve Y, M üzerinde yatay vektör alanları ise, bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\hbar\left(\nabla_X (\mathrm{A}_Y V)\right) = \mathrm{A}_{(\nabla_X Y)} V \;.$$

İspat: Yardımcı Teorem 2.4.3. ten

$$\Omega \langle (\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, V \rangle = \Omega \langle \mathrm{A}_Y Z, \mathrm{T}_V X \rangle$$

yazabiliriz. Hipotezden $\mathbf{T} \equiv 0$ olduğundan

$$\Omega \langle (\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, V \rangle = 0$$

olur. Öte yandan düşey vektörler zamansal olduklarından devirsel toplamdaki her bir terimin işareti negatiftir. O halde toplam sonuç sıfır olduğundan her bir terim sıfır olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$\langle (\nabla_X \mathrm{A})_Y Z, V \rangle = 0$$

olur. İspatın geri kalan kısmı Teorem 2.7.2 ile aynıdır.

Teorem 3.2. $\pi : M_1^{2n+k}(c) \to B^{2n}$ bir yarı-Riemann alt-kapsama olsun. $M_1^{2n+k}(c)$ negatif c-sabit eğrilikli, lifleri tümel jeodezik olan zamansal jeodezikli bir Lorentz manifoldu ve B^{2n} herhangi bir Riemann manifoldu ise, bu durumda

i) $k = 1$

ii) B^{2n} bir Kaehler manifoldu olur.

İspat: i) $M_1^{2n+k}(c)$, lifleri tümel jeodezik olan zamansal jeodezikli bir manifold olduğundan, $M_1^{2n+k}(c)$ üzerinde $\nabla_V V = 0$ ve $\langle V, V \rangle = 1/c$ olacak şekilde bir düşey V vektör alanı vardır. Öte yandan $M_1^{2n+k}(c)$ nin indeksi 1 olduğundan $k = 1$ olmak zorundadır. Böylece i) ispatlanır.

ii) $M_1^{2n+1}(c)$ üzerindeki ϕ dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım:

$$\phi : T\left(M_1^{2n+1}(c)\right) \to T\left(M_1^{2n+1}(c)\right)$$
$$E \to \mathrm{A}_E V$$

X ve Y temel vektör alanları olmak üzere ϕ dönüşümü

$$\phi^2(X) = -X \quad \text{ve} \quad \langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle \tag{3.5}$$

koşullarını gerçekler. Böylece B^{2n} nin bir Kaehler manifoldu olduğunu göstermek için $\forall X_*, Y_* \in T\left(B^{2n}\right)$ için

$$\nabla^*_{X_*} \phi Y_* = \phi\left(\nabla^*_{X_*} Y_*\right) \tag{3.6}$$

eşitliğini göstermemiz gerekir. Oysa

$\left(\nabla^*_{X_*} Y_*\right)$, $\hbar \nabla_X Y$ ile $\pi -$bağımlı ve

$\nabla^*_{X_*} \phi Y_*$, $\hbar\left(\nabla_X \phi Y\right)$ ile $\pi -$bağımlı olduğundan

$$\hbar\left(\nabla_X \phi Y\right) = \phi\left(\nabla_X Y\right)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Bu ise Yardımcı Teorem 3.4. te zaten gerçeklenmiştir. B^{2n} üzerinde ki J hemen hemen kompleks yapısını

$$J : T\left(B^{2n}\right) \to T\left(B^{2n}\right)$$

$$X_* \;\to\; \pi_* \circ \phi \circ \pi_*^{-1}\left(X_*\right)$$

şeklinde tanımlarsak B^{2n} bir Kaehler Manifoldu olur.

Sonuç 3.4. $\mathrm{S}_1^{2n+1}(1)$ den B^{2n} ye lifleri tümel jeodezik olan bir π yarı-Riemann alt – kapsama yoktur.

İspat: Var olduğunu kabul edelim. $\mathrm{S}_1^{2n+1}(1)$ zamansal jeodeziklere sahip olduğundan $\nabla_V V = 0$ ve $\langle V, V\rangle = -1$ olacak olacak şekilde bir V düşey vektör alanı vardır. Oysa Sonuç 2.5.1-b) den

$$\frac{\langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_X V\rangle}{\langle X, X\rangle\langle V, V\rangle} = 1 \Rightarrow \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_X V\rangle = -\langle X, X\rangle$$

olur ki bu $\mathrm{S}_1^{2n+1}(1)$ nin indeksinin 1 oluşuyla çelişir.

Şimdi liflerin *dik eğriliği* ile ilgili bir Teorem verelim.

Teorem 3.3. $\pi : M \to B$ herhangi bir Riemann alt-kapsama ve $\pi^{-1}(q)$, $q \in B$, M nin herhangi bir lifi olsun. $\Re^{\perp}$, lifin dik eğriliğini göstermek üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\langle \Re^{\perp}_{VW} X, Y\rangle = \langle\left(\nabla_V \mathrm{A}\right)_X Y, W\rangle - \langle\left(\nabla_W \mathrm{A}\right)_X Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle - \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{A}_Y V\rangle .$$

İspat: Tanım 2.1.12. ile Tanım 2.3.1. i karşılaştırırsak

$$\tilde{S}(V,X) = \mathrm{T}_V X$$

elde ederiz. (Burada V, $\pi^{-1}(q)$ lifinin teğet, yani düşey, X ise $\pi^{-1}(q)$ ye dik, yani yatay vektör alanıdır.) O halde Tanım 2.1.14 te verilen *Ricci Denklemi*

$$\langle \Re^{\perp}_{VW} X, Y\rangle = \langle \overline{\Re}_{VW} X, Y\rangle + \langle \mathrm{T}_V X, \mathrm{T}_W Y\rangle - \langle \mathrm{T}_W X, \mathrm{T}_V Y\rangle$$

haline dönüşür.Bu denklemde $\langle \overline{\Re}_{VW} X, Y\rangle$ yerine Teorem 2.5.3-b) deki eşitini yazarsak kolayca

$$\langle \Re^{\perp}_{VW} X, Y\rangle = \langle (\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle - \langle (\nabla_W \mathrm{A})_X Y, V\rangle + \langle \mathrm{A}_X V, \mathrm{A}_Y W\rangle - \langle \mathrm{A}_X W, \mathrm{A}_Y V\rangle$$

elde ederiz. Böylece liflerin dik eğriliğinin sadece **A** temel tensörü tarafından belirlendiğini görürüz.

Sonuç 3.5. $\pi : M \to B$ herhangi bir Riemann alt-kapsama olsun. $\forall q \in B$ için $\pi^{-1}(q)$ lifi M nin bir hiperyüzeyi ise bu durumda $\Re^{\perp} \equiv 0$ olur.

İspat: $\forall q \in B$ için $\pi^{-1}(q)$ lifi M nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu takdirde lineer bağımsız bir tek yatay vektör alanı vardır, bunu X ile gösterelim. (A3) ten

$$\mathrm{A}_X X = 0$$

olur. Öte yandan herhangi V düşey vektör alanı için;

$$\langle \mathrm{A}_X V, X\rangle = \langle \mathrm{A}_X X, V\rangle = 0$$

$\mathrm{A}_X V$ ile X lineer bağımlı olduğundan $\mathrm{A}_X V = 0$ olmak zorundadır. Böylece $\mathrm{A} \equiv 0$ olur. Sonuçta Teorem 3.3. ten istenen kolayca çıkar.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar kısaca aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Örnek 3.1. ve Örnek 3.2. sırasıyla Riemann ve yarı-Riemann alt-kapsamalar konusunu en açık bir biçimde anlamamızı sağlayacak şekilde ortaya çıkarılmışlardır.

Riemann ve yarı-Riemann alt-kapsamalarda çalışırken, tümel uzaydaki temel vektör alanı baz uzayındaki bir vektör alanı ile $\pi-$bağımlı olduğundan baz uzayının geometrisini tümel uzayın yatay dağılımlarının geometrisiyle ilişkilendirebiliriz. Bu yüzden bir yatay vektör alanın temel olması tercih edilir. Sonuç 3.1. de verilenler yukarıda açıkladığımız ihtiyacı karşılamayı amaçlamaktadır. Sonuç 3.1. de verilen ispat daha önce A. Gray tarafından [10]verilen ispattan daha sade ve açıktır.

Tez konusunun temel yapı taşları olan T ve A tensorlerinin kovaryant türevleri ile ilgili formüller Yardımcı Teorem 3.1. ve Yardımcı Teorem 3.2. sayesinde çoğaltılarak daha sonra bu alanda yapılacak çalışmalar için kolaylık sağlanmıştır. Ayrıca bu yardımcı teoremlerden konuyla ilgili çalışmalara uygulama açısından kolaylık sağlayacak olan Sonuç 3.2. ve Sonuç 3.3. ortaya çıkarılmıştır.

İspatı Yardımcı Teorem 3.3. de verilen

$$\langle(\nabla_Y \mathrm{T})_V W, X\rangle - \langle(\nabla_X T)_V W, Y\rangle = \langle(\nabla_V \mathrm{A})_X Y, W\rangle + \langle(\nabla_W \mathrm{A})_X Y, V\rangle$$

formülü T ile A nın kovaryant türevlerini ilişkilendirmesi bakımından ilginç olup, Teorem 2.7.2. nin genelleştirilmesi olan Teoremin 3.1. ve bu çalışmanın asıl teoremi olan Teorem 3.2. nin ispatında önemli bir rol oynamıştır.

Yardımcı Teorem 3.4. ile Yardımcı Teorem 2.7.3. genelleştirilmiştir.

Ayrıca, bu çalışmada bir Riemann alt-kapsamanın liflerinin dik eğriliği olan $\Re^{\perp}$ e de yer verilmiş olup, $\Re^{\perp}$ nin A temel tensörü tarafından belirlendiği Teorem 3.3. de ispatlanmıştır ve bu teoremin önemli bir uygulaması Sonuç 3.5. te verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] DUGGAL, K.L. ve BEJANCU, A., 1996, *Lightlike submanifolds of Semi-Riemannian manifolds and applications,* Kluwer Academic Publisher.

[2] O'NEILL, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity,* Academic Press, 0-12-526740-1.

[3] YANO, K. ve KON, M., 1984, *Structures on manifolds,* World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 9971-966-15-8.

[4] O'NEILL, B., 1966, The fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.*, 13, 459-469.

[5] ESCOBALES Jr., R.H., 1975, Riemannian submersions with totally geodesic fibers, *J. Differential Geometry.,* 10, 253-276.

[6] RANJAN, A., 1985, Riemannian submersions of spheres with totally geodesic fibers, *Osaka J. Math.,* 22, 243-260.

[7] MAGİD, M.A., 1981, Submersions from Anti-de Sitter space with totally geodesic fibers, *J. Differential Geometry.,* 16, 323-331.

[8] DO CARMO, M., 1992, *Riemannian Geometry,* Birkhauser, 0-8176-3490-8.

[9] KWON, J.K. ve SUH. Y.J., 1997, On Semi-Riemannian submersions of codimension one, *Math. J. Toyama Univ.,* 20, 15-35.

[10] GRAY, A., 1967, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.,* 16, 715-737.

[11] O'NEILL, B., 1967, Submersions and geodesics, *Duke Math. J.*, 34, 459-469.

[12] VILMS, J., 1970, Totally geodesic maps, *J. Differential Geometry*, 4, 73-79.

ÖZGEÇMİŞ

27.03.1973 tarihinde Artvin'in Şavşat ilçesinin Küplüce Köyü'nde doğdum. İlkokulu Küplüce Köyü İlkokulu'nda, Ortaokulu Şavşat Ortaokulu'nda okudum. Liseyi Giresun Atatürk Lisesi'nde tamamladım. 1992 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 1996 yılında bu bölümden mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladım. 2001 yılı Ocak ayında yüksek lisans eğitimimi tamamladım ve 13 Şubat 2001 tarihinde aynı anabilim dalında doktora eğitimine başladım. 6 Kasım 1996 tarihinden itibaren İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.