İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DİFERANSİYEL DAHİLETMELERDE BOLZA PROBLEMİ VE DUALİTESİ

Gülseren ÇİÇEK
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV

Temmuz, 2005

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.Elimhan MAHMUDOV'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Aileme, eşim Cemal Çiçek'e ve küçük kızım Aylin Çiçek'e sabrı ve katkılarından dolayı teşekkürler.

Temmuz, 2005 **Gülseren ÇİÇEK**

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

A	: küme
$\operatorname{int} A$	: A kümesinin iç noktaları kümesi
riA	: A kümesinin izafi iç noktaları kümesi
coA	: A kümesinin konveks zarfı
$LinA$	: A konveks kümesi için $x_0 \in A$ olmak üzere $A - x_0$ kümesini kapsayan tüm alt uzayların kesişimi
$domf$	: f fonksiyonunun sonlu değerler aldığı noktalar kümesi
$epif$	: f fonksiyonun epigrafı
$f^*(x^*)$	: f' in dual fonksiyonu
$\partial f(x_0)$	: f'in x_0 noktasındaki subdiferansiyeli
$a(x)$	: çok değerli fonksiyon
gfa	: a'nın grafı
$doma$	: $a(x) \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan x noktaları kümesi
$a^*(y^*, z)$	: a'nın verilen y^* için z'teki yerel dual fonksiyonu
$K,\ K^*$	: sırasıyla konveks koni ve dual konisi
$K_a(z)$	: a'nın $z \in gfa$ noktasındaki teğet yönler konisi
$K_a^*(z)$	: a'nın $z \in gfa$ noktasındaki teğet yönler konisinin dual konisi
$O^+ gfa$	: a'nın resesif konisi
$a^*(y^*)$	: a'nın dual fonksiyonu
$W_A(x^*)$	: A kümesinin x^* noktasındaki "destek" fonksiyonu
$W_a(x; y^*)$	: $a(x)$ kümesinin verilen y^* için negatif işaretli destek fonksiyonu
$\Omega_a(x^*, y^*)$	: gfa kümesinin negatif işaretli destek fonksiyonu

ÖZET

DİFERANSİYEL DAHİLETMELERDE BOLZA PROBLEMİ VE DUALİTESİ

Bu tez çalışmasında Bolza tipinde diferansiyel dahil etmeler için durum kısıtlamalı optimizasyon problemi ele alınmaktadır. Bu çalışmada Pshenichnyi[1]'nin tanımladığı yerel dual fonksiyon kavramı kullanılmaktadır ve daha ayrıntılı incelemelerde yerel dual fonksiyon ile dual fonksiyon arasındaki ilişkinin faydalı olduğu gözlenmektedir.

Yerel dual fonksiyon kullanılarak optimalliğin yeterli koşulları ifade edilmektedir. Durum kısıtlamalı kontrol sistemlerinde olduğu gibi dual değişkenin sıçramaları mevcuttur[2], dolayısıyla optimalliğin yeterli koşulları arasında sıçramalar koşulu da yer almaktadır ve sıçramalar sayısı sayılabilir tane de olabilmektedir.

Konveks problem için duallik teoremi ispatlanmaktadır ve dual diferansiyel dahil etmenin Bolza problemi ile dual problemi arasında ekstremal bir bağıntı olduğu gösterilmektedir. Dual problem, sürekli konveks problemini diskret yaklaşım problemine dönüştürerek oluşturulmaktadır ve Mahmudov'un [3] makalesinde elde ettiği sonuçlar kullanılmaktadır.

SUMMARY

DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF BOLZA TYPE AND DUALITY

The present thesis is devoted to an investigation of optimization problem of Bolza type for differential inclusions with state constraints. In this study the apparatus of locally conjugate mapping, defined by Pshenichnyi [1], is used and is observed that the relation between locally conjugate mapping and conjugate function is usefull for detailed investigations.

Sufficient conditions of the optimality are formulated by using the apparatus of locally conjugate mapping. In addition we show that conjugate variable has jumps, which are typical for control systems with state constraints. Among sufficient conditions there appears a condition of jumps [2], where the number of jump points may be countable.

The duality theorem for convex problem is proved and it is shown that conjugate differential inclusion is an extremal relation for Bolza problem and its dual problem. For construction of the dual problem, the convex continuous problem is interchanged with the discrete approximation problem and results in the work [3] of Mahmudov are used.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında Bolza tipinde diferansiyel dahil etmeler için

$$I(x(.),t_1) = \varphi(x(t_1),t_1) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),t)dt \to \inf \qquad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t),t), \quad t \in [t_0,t_1] \ , \qquad (1.2)$$

$$x(t_0) = x_0 \ , \quad x(t_1) \in M \quad , \qquad (1.3)$$

$$x(t) \in F(t) \ , \quad t \in [t_0,t_1] \ , \qquad (1.4)$$

optimizasyon problemi ele alınmaktadır. Burada $a(.,t): IR^n \to 2^{IR^n}$ sınırlı, konveks, bağımlı çok değerli bir fonksiyon [1], [4], [5], $M(\subset IR^n)$ son durumlar kümesi konveks, g ve φ konveks fonksiyonlar, $g,\varphi: IR^{n+1} \to IR^1$, ve $F:[t_0,t_1] \to 2^{IR^n}$ konveks-değerli bir fonksiyon, t_0 başlangıç anı sabit, t_1 son durum anı serbest alınmaktadır. $x(t)$, (1.3) başlangıç koşulunu gerçekleyen (1.2) diferansiyel dahil etmesinin (içermesinin) mümkün çözümü, mutlak sürekli bir fonksiyondur (her $t \in [t_0,t_1]$ için $x(t) \in F(t)$).

On yedinci yüzyılda çalışan Descartes ve Fermat ile başlayarak, yıllarca matematikçiler optimal problemlerdeki optimalliği elde etmek için metotlar geliştirmeye uğraştılar. 1950'li yıllarda Lineer Optimizasyon Problemleri ve tam sayılı lineer programlama problemleri Simpleks Metoduyla çözüm buldu ve Kuhn-Tucker koşulları ile optimallik için gerek koşullar formüle edildi. 60'lı yıllara kadar Konveks programlama geliştirildi ve Optimal Kontrol Pontryagin'in Maksimum Prensibi [2] ve buna paralel olarak Richard Bellman'ın Dinamik Programlama Metodu sayesinde hem diskret hem de sürekli programlama için anlam kazandı. Daha sonra Diferansiyel Oyunlar ve Vektör Optimizasyonundaki çalışmalar geliştirildi [6].

Varyasyon Analizi ve optimal kontrol teorisindeki birçok problem diferansiyel dahil etmeli Bolza problemi şeklinde yazılabilir [7]. Bugüne kadar birçok araştırmacı bu problemle ilgilenmiştir, fakat tüm bulgular sabit zaman aralığı için yapılmaktadır. Bu tezde farklı olarak son an serbest olarak alınmaktadır ve birçok uygulamada bu araştırmalar faydalı olacaktır.

(1.1) formülünde $g \equiv 0$ olması halinde, yani I fonksiyoneli yalnızca φ fonksiyonundan oluşması durumunda, probleme Mayer problemi ve yalnızca integralden oluşan probleme (yani $\varphi \equiv 0$ olduğunda) Lagrange problemi denilmektedir. Formüle edilen problem, g'in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ değerler alabildiği Genelleştirilmiş Bolza Problemi içine gömülebilir. Konveks haldeki Genelleştirilmiş Bolza Problemini ilk araştıranlardan biri Rockafellar'dır [8]. Daha sonra Clarke [7] tanımladığı genelleştirilmiş gradyent ve Clarke normal konisi yardımıyla optimallik için gerekli koşulları formüle etmektedir. Rockafellar ve Lowen [9], [10] diferansiyel dahil etmeli problemi fonksiyonların ve çok değerli fonksiyonun konveks olması durumunda ele almaktadır ve optimalliğin gerekli koşullarını a'nın sınırlı ve g'nin Lipshitz olması durumunda elde etmektedir. Pshenichnyi [1] tanımladığı yerel dual fonksiyon sayesinde optimalliğin gerekli koşullarını a 'nın konveks-değerli olması durumunda oluşturmaktadır. Mahmudov [11], [12] yerel dual fonksiyon kavramını kısmi türevli diferansiyel dahil etmeli optimizasyon problemlerinde kullanmaktadır.

Duallik teorisi uygulama bakımından konveks optimizasyon problemlerinin temel araştırmalarından bir tanesidir [3], [4], [13], [14]. Bu teori 1970'lerin başında gelişmeye başladı ve temeli tamamen konveks analize dayanmaktadır. Hesaplama işlemlerin basitleştirilmesini sağlamaktadır ve klasik çözümü olmayan varyasyon problemlerin genel çözümünün bulunmasını mümkün kılmaktadır. Dual problemin kurulması için önce konveks sürekli problem diskret yaklaşım problemine dönüştürülmektedir. Diskret Problemin dual problemi infimal konvolüsyon ve alt sınırların konveks zarfı kavramları yardımıyla oluşturulmaktadır. Bundan yararlanarak sürekli problemin duali de bulunmaktadır. Her optimizasyon problemine bir dual problem karşılık gelmektedir. Konveks Diferansiyel dahil etmeli Bolza probleminin duali bulunabilmektedir ve bu dual problem yine bir Bolza problemi olmaktadır [15,16].

Bu çalışmada optimal problem için yerel dual fonksiyon kavramı kullanılmaktadır ve daha ayrıntılı incelemelerde yerel dual fonksiyon ile dual fonksiyon arasındaki ilişkinin faydalı olduğu gözlenmektedir.

Yerel dual fonksiyon kullanılarak optimalliğin yeterli koşulları ifade edilmektedir. Çözümün varlığı problemleri ile ilgilenilmediğinden, optimal çözümün var olduğu kabül edilmektedir. Durum kısıtlamalı kontrol sistemlerinde olduğu gibi dual değişkenin sıçramaları mevcuttur dolayısıyla optimalliğin yeterli koşulları arasında sıçramalar koşulu da yer almaktadır ve burada sıçramalar sayısı sayılabilir tane de olabilmektedir.

Dual problemin kurulması ile ilgili örnekler de yapılmıştır.

Konveks problem için duallik teoremi ispatlanmaktadır ve dual diferansiyel dahil etmenin Bolza problemi ile dual problem arasında ekstremal bir bağıntı olduğu gösterilmektedir. Dual problem, sürekli konveks problemini diskret yaklaşım problemine dönüştürerek oluşturulmaktadır ve Mahmudov'un [3]'te elde ettiği sonuçlar kullanılmaktadır.

Bu tezde ilk amacım dual fonksiyon ve yerel dual fonksiyon arasında bulduğum ilişkiyi kullanarak diferansiyel dahil etmeli Bolza problemi ile dual problemi için sonuç elde etmektir. İkinci amacım esas problemin optimal çözümü için yeterli koşulları formüle etmek ve ispatlamak, bulguların ilk kısmında elde ettiğim teoremler yardımıyla yeter koşullar için sonuçlar elde etmektir. Son olarak amacım konveks haldeki(yani problemdeki tüm fonksiyonların, kümelerin konveks olması halinde) esas problemin dual problemini formüle etmek ve iki problem arasındaki ilişkiyi bulmaktır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$domf = \{x : f(x) < +\infty\} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$epif = \{(x,\alpha) : \alpha \geq f(x), \alpha \in \mathbb{R}, x \in domf\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

kümeleri tanımlanmaktadır. *epif* kümesi, $\mathbb{R}^{n+1}$'in konveks altkümesi ise *f* fonksiyonu konvekstir. Bu durumda *domf* kümesi de konvekstir [1], [17].

Teorem 2.1. C konveks bir küme olmak üzere (örneğin $C = \mathbb{R}^n$) $f : C \to (-\infty, +\infty]$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda ancak ve ancak her $x, y \in C$ için

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \; 0 < \lambda < 1$$

gerçeklenirse *f* fonksiyonu konvekstir.

Tanım. Bir fonksiyon, hiçbir noktada $-\infty$ değerini almıyorsa ve özdeş olarak $+\infty$ değilse has fonksiyon denir [1], [17].

Yani $domf \neq \emptyset$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) > -\infty$ sağlayan fonksiyonlar hastır.

Tanım. Herhangi bir *f* fonksiyonu için tanımlanan

$$f^*(x^*) = \sup_x \{< x, x^* > - f(x)\}$$

fonksiyonuna *f*'in dual fonksiyonu denir.

Lemma 2.1. Dual fonksiyon daima kapalı ve konvekstir [1].

Tanım. f, has konveks bir fonksiyon olsun. $x_0 \in domf$ noktasında $f(x) - f(x_0) \geq < x - x_0, x^* >$ eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için gerçekleniyorsa, x^* vektörüne f fonksiyonunun subgradyenti denir [17].

Tanım. $x_0 \in domf$ noktasında f fonksiyonunun subgradyentleri kümesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial f(x_0)$ ile gösterilir. Yani

$$\partial f(x_0) = \{x^* : f(x) - f(x_0) \geq < x - x_0, x^* >, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

kümesi f 'in x_0 noktasındaki subdiferansiyelidir [17].

Moreau-Rockafellar Teoremi. f_1 ve f_2, X uzayında has konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

içermesi gerçeklenmektedir. Dahası f_2 fonksiyonu herhangi bir $\overline{x} \in domf_1$ noktasında sürekli ise her $x \in X$ için

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$$

eşitliği sağlanmaktadır [4], [17].

İfade edilen teoremde $\partial f_1(x)$ ve $\partial f_2(x)$ kümeleri X'in dual uzayı X^* 'ın kümeleridir ve aralarındaki toplam da kümeler arasındaki cebirsel toplamı göstermektedir.

Bu teoremi genel halde yazabiliriz:

Teorem 2.2. (Moreau-Rockafellar) $f_1, f_2, \dots f_n$ fonksiyonları X'te has konveks olsunlar. Bu durumda her $x \in X$ için

$$\partial f_1(x) + \cdots + \partial f_n(x) \subset \partial(f_1 + \cdots + f_n)(x)$$

içermesi gerçeklenmektedir. Ayrıca $f_1, f_2, \ldots f_n$ fonksiyonları, biri istisna bırakılabilir, herhangi bir $\overline{x} \in (domf_1) \cap \ldots \cap (domf_n)$ noktasında sürekli iseler her $x \in X$ için

$$\partial f_1(x) + \cdots + \partial f_n(x) = \partial(f_1 + \cdots + f_n)(x)$$

eşitliği sağlanır [4], [17].

Teorem 2.3. f_1 ve f_2 her $x \in X$ için $f_1(x) \leq f_2(x)$ gerçekleyen fonksiyonlar olsun ve bir $x_0 \in X$ noktası için $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ sağlansın. Bu durumda $\partial f_1(x_0) \subseteq \partial f_2(x_0)$ gerçeklenir.[17]

İspat. $x^* \in \partial f_1(x_0)$ alalım. Subdiferansiyel tanımından

$$f_1(x) - f_1(x_0) \geq < x^*, x - x_0 >$$

sağlanmaktadır. Diğer taraftan $f_2(x) - f_2(x_0) \geq f_1(x) - f_1(x_0)$ olduğundan

$$f_2(x) - f_2(x_0) \geq < x^*, x - x_0 >$$

gerçeklenmekte, yani $x^* \in \partial f_2(x_0)$ olmaktadır. Bu ise $\partial f_1(x_0) \subseteq \partial f_2(x_0)$ olduğunu göstermektedir.

Tanım. $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ herhangi bir fonksiyon ve $h(\overline{x}, x)$ fonksiyonu

i) her $\overline{x} \neq 0$ için

$$h(\overline{x}, x) \geq F(\overline{x}, x) = \sup_{\tau(\cdot)} \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(x + \lambda\overline{x} + \tau(\lambda)) - g(x)}{\lambda},$$

ii) $h(\overline{x}, x)$, $\overline{x}$'nin konveks, kapalı (alttan yarı sürekli), pozitif homojen bir fonksiyonudur

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $h(\overline{x}, x)$'e, g fonksiyonunun $x \in domg = \{x : |g(x)| < +\infty\}$ noktasındaki üstten konveks yaklaşımı (ÜKY) denir [1].

ii)’deki supremum $\lambda \downarrow 0$ iken $\lambda^{-1}\tau(\lambda) \to 0$ gerçekleyen tüm $\tau(\cdot)$ fonksiyonları üzerinden alınmaktadır.

$\partial h(0,x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : h(\overline{x},x) \geq < \overline{x}, x^* >, \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ kümesine g fonksiyonunun x noktasındaki subdiferansiyeli denir ve $\partial g(x)$ ile gösterilir. Dikkat edilirse g fonksiyonunun konveks olması durumunda verilen tanım yukarıdaki subdiferansiyel tanımıyla çakışmaktadır.

Matematik programlamada, klasik optimal kontrol problemlerinde, diferansiyel oyunlarda, ekonomik dinamikte v.s. ortaya çıkan optimizasyon problemlerin çoğu diferansiyel dahil etmeler (içermeler) yardımıyla ifade edilebilir. Diferansiyel dahil etmelerdeki, (1.2)’deki gibi, fonksiyon çok değerli bir fonksiyondur (multifonksiyon) [5], [1].

X, Y sonlu boyutlu Öklid uzayları ve $Z = X \times Y$, onların kartezyen çarpımı olsun. $x \in X, y \in Y$ olmak üzere (x,y) onların Z’de oluşturdukları ikili ve $< x, y >$ de iç çarpımları olsun. a çok değerli fonksiyonu $a : X \to 2^Y$,

$$a(x) = \{y : (x,y) \in gfa\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $gfa = \{(x,y) : y \in a(x)\}$ kümesi a’nın grafıdır. gfa, Z’in bir konveks kümesi ise a çok değerli fonksiyonuna konveks denir. Her $x \in doma (doma = \{x : a(x) \neq \varnothing\})$ için $a(x)$ kümesi konveks küme ise a’ya konveks-değerli denir. gfa, Z’de kapalı bir küme ise a’ya kapalı fonksiyon denir. gfa bir koni ise a’ya süperlineer fonksiyon denir [18].

c bir sabit ve $\|a(x)\| = \sup_y \{\|y\| : y \in a(x)\}$ olmak üzere $\|a(x)\| \leq c(1 + \|x\|)$ ise a fonksiyonu sınırlıdır denir.

Tanım. Ω herhangi bir bölge olsun ve ρ, Hausdorff uzaklığını göstersin. Her $x_1, x_2 \in \Omega$ için

$$\rho(a(x_1),a(x_2)) \le L\|x_1 - x_2\|$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde pozitif L sabiti belirlenebilirse a çok değerli fonksiyonu Ω bölgesinde Lipshitz koşulunu gerçekliyor, denir [1].

ρ, Hausdorff uzaklığı herhangi $A,\ B \subset Y$ altkümeleri için

$\rho(A,B) = \max\{\sup\limits_{y_1\in A}\inf\limits_{y_2\in B}\|y_1 - y_2\|, \sup\limits_{y_2\in B}\inf\limits_{y_1\in A}\|y_1 - y_2\|\}$ ile verilmektedir.

Tanım. a'nın $x \in doma$ noktasındaki negatif işaretli destek fonksiyonu

$$W_a(x,y^*) = \inf\{< y,y^* >: y \in a(x)\},\ y^* \in Y^* \equiv Y$$

şeklinde tanımlanmaktadır. a'nın konveks olması halinde $a(x) = \varnothing$ için $W_a(x,y^*) = +\infty$'dur. Ayrıca

$$a(x,y^*) = \{y \in a(x) :< y,y^* >= W_a(x,y^*)\}$$

fonksiyonu tanımlanmaktadır [1].

$A \subset X$ herhangi bir küme için

$$W_A(x^*) = \inf_{y\in A} < x^*, y >$$

x^* noktasındaki negatif işaretli destek fonksiyonudur.

Tanım. a konveks çok değerli fonksiyonu için gfa'nın negatif işaretli destek fonksiyonu

$$\Omega_a(x^*,y^*) = \inf_{x,y}\{- < x,x^* > + < y,y^* >: (x,y) \in gfa\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [1], [17]. Açıktır ki

$$\Omega_a(x^*, y^*) = \inf_x \{-< x, x^* > + W_a(x, y^*)\}$$

yazılabilmektedir [1].

Tanım. $gfa = K$, bir konveks koni ise

$$a^*(y^*) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K^*\}$$

fonksiyonuna a 'nın dual fonksiyonu denir [1]. Burada K^*, K 'nın dual konisi

$$K^* = \{(x^*, y^*) :< x, x^* > + < y, y^* > \geq 0,\ (x, y) \in K\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [17].

Tanım. a konveks fonksiyonunun $Z = X \times Y$ uzayındaki resesif konisi [17]

$$O^+ gfa = \{\overline{z} : z + \lambda \overline{z} \in gfa,\ \lambda \geq 0, \forall z \in gfa\}$$

şeklindedir.

2.2. OPTİMALLİĞİN GEREK VE YETER KOŞULLARI

Diferansiyel dahil etmeli optimal problemler ile ilgili çalışmalarda en önemli konulardan biri optimalliğin gerek ve yeter koşullarını oluşturmaktır. Optimal kontrolde optimalliğin gerek ve yeter koşullarının oluşturulmasında kullanılan önemli yollardan bir tanesi dual ve yerel dual fonksiyonlar dediğimiz çok değerli fonksiyonlar kavramlarının kullanılmasıdır [1], [3], [11], [19]. Bu tezde de diferansiyel dahil etmelerde Bolza Probleminin optimalliği için yeterli koşullar yerel dual fonksiyon kavramı yardımıyla formüle edilmektedir.

Tanım. A herhangi bir küme olmak üzere

$$K_A(z) = \{\overline{z} : \overline{z} = \lambda(z_1 - z),\ \forall z_1 \in A, \lambda > 0\}$$

kümesine A kümesinin z noktasındaki teğet yönler konisi denir.

Konveks a fonksiyonu için $z_0 = (x_0, y_0) \in gfa$ noktasındaki teğet yönler konisi

$$K_a((x_0, y_0)) = K_a(z_0) = con(gfa - z_0)$$
$$= \{\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y}) : \overline{x} = \lambda(x - x_0),\ \overline{y} = \lambda(y - y_0), \lambda > 0, \forall (x, y) \in gfa\}$$

kümesidir.

Tanım. $K_M(x_0)$, M kümesinin $x_0 \in M$ noktasındaki teğet yönler konisi olsun. Herhangi $\overline{x}_0 \in riK_M(x_0)$ yörüngesi için $Q \subseteq K_M(x_0)$ konveks konisi ve orijinin bir civarında tanımlı $\psi(\overline{x})$ sürekli fonksiyonu

(1) $\overline{x}_0 \in ri$ Q ve $Lin\ Q = Lin\ K_M(x_0)$,

(2) $\psi(\overline{x}) = \overline{x} + r(\overline{x})$, $\overline{x} \to 0$ iken $\|\overline{x}\|^{-1} r(\overline{x}) \to 0$,

(3) herhangi $\varepsilon > 0$ için $\overline{x} \in Q \cap \mathrm{S}_\varepsilon(0)$ olmak üzere $x_0 + \psi(\overline{x}) \in M$

gerçeklenecek şekilde mevcut ise $K_M(x_0)$ konisine yerel şatör denir [1]. Burada $\mathrm{S}_\varepsilon(0)$, ε yarıçaplı orijin merkezli civardır.

Pshenichnyi [1] teğet yönler konisinin dual konisi yardımıyla yeni bir çok değerli fonksiyon tanımlamaktadır:

Tanım. a konveks çok değerli fonksiyonu için

$$a^*(y^*; z) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K_a^*(z)\},\ y^* \in Y^* \equiv Y$$

şeklindeki çok değerli fonksiyona a'nın $z \in gfa$ noktasındaki yerel dual fonksiyonu (YDF), denir.

Tanım. $\mathrm{y}_0 \in a(x, y^*)$ olmak üzere herhangi bir a çok değerli fonksiyonun $(x_0, y_0) \in gfa$ noktasındaki YDF,

$$a^*(y^*;(x_0,y_0)) =$$
$$\{x^* : W_a(x,y^*) - W_a(x_0,y^*) \geq < x^*, x - x_0 >, \forall (x,y) \in gfa\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Açıktır ki, konveks a fonksiyonu için $W_a(\cdot, y^*)$ konveks olduğundan [1], a konveks fonksiyonu için YDF

$$a^*(y^*;(x_0,y_0)) = \begin{cases} \partial_x W_a(x_0,y^*), & y \in a(x_0,y^*) \\ \varnothing & , \quad \mathrm{y} \notin a(x_0,y^*) \end{cases}$$

biçimindedir.

Pshenichnyi [1] sürekli problemin optimaliğinin gerek ve yeter koşullarını oluşturmak için sonlu kesikli(diskret) yaklaşımlar yöntemini kullanmaktadır. Varyasyon problemlerinde yapılan böyle bir yaklaşım yöntemi Euler tarafından 1744 yılında Varyasyonlar Analizin klasik Euler-Lagrange denkleminin ispatında kullanılmaktadır. (Aslında benzer direkt metodu ilk Leibnitz kullanmaktadır [20]). Bu yöntemde önce direkt sürekli zamanlı optimizasyon problemi kesikli zamanlı optimizasyon problemine (yaklaşık olarak) dönüştürülmektedir; kesikli zamanlı problem için optimallik koşulları bulunur (bunları bulmak daha kolaydır), sonra yaklaşım parametreleri üzerinden formal limite geçerek esas sürekli optimal problemin koşulları oluşturulmaktadır.

Teorem 2.4. $X \equiv Y \equiv \mathbb{R}^n$ ve a konveks çok değerli bir fonksiyon , $g(x,t),\ t = 1,2,\ldots T,$ her bir t için x üzerinde sürekli fonksiyonlar ve x_0 belirli bir vektör olsun.

$$x_{t+1} \in a(x_t),\ \ t = 0,1,\ldots,T-1,\ \ x_T \in M \qquad (2.1)$$

özelliğini gerçekleyen $\{x_t\}_{t=0}^T$ yörüngesi var olsun, öyle ki, bu yörüngenin $x_t,\ t = 0,1,\ldots T$ noktasında $g(x,t)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda x_0'dan başlayan ve x_T'de biten $\{x_t\}_{t=0}^T$ yörüngesinin tüm yörüngeler arasından

$$f = \sum_{t=1}^{T} g(x_t,t) \qquad (2.2)$$

fonksiyonunu minimum yapan yörünge olması için gereken

$$x_t^* \in a^*(x_{t+1}^*;(\tilde{x}_t,\tilde{x}_{t+1}))+\lambda\partial_x g(\tilde{x}_t,t), \tag{2.3}$$

$$t=0,1,\ldots T-1,\ \ \partial_x g(x_0,0)\equiv 0,$$

$$x_T^*+x^*\in\lambda\partial_x g(\tilde{x}_T,T), \tag{2.4}$$

$$x^*\in K_M^*(\tilde{x}_T) \tag{2.5}$$

koşullarını gerçekleyen hepsi birden sıfır olmayan x^*, x_t^*, $t=0,1,\ldots T$ vektörlerinin ve $\lambda=0,1$ sayısının bulunmasıdır. $\lambda=1$ halinde koşullar yeterli de olmaktadır.

İspat. [1].

2.2.1. Bolza Probleminde Optimallik İçin Gerek Ve Yeter Koşullar

Lemma 2.2. $g(x,t)$ ve $\varphi_0(x)$, $\sum_{t=0}^{T} g(x_t,t)$ toplamına yakınsayan, x ve t ‘de sürekli, x’in herhangi sınırlı komşuluğunda Lipshitz koşulunu gerçekleyen fonksiyonlar olsun. Onların supdiferansiyalleri $\partial g(x,t)$ ve $\partial\varphi_0(x)$ herhangi sınırlı bölgede düzgün sınırlı ve x ve t’ye göre üstten yarı sürekli olsun. Sürekli fonksiyonlar dizisi $x_k(t)$ $t\in[0,1]$ aralığında $x_0(t)$ sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsarsa $\delta=2^{-m}\to 0$ ve $k\to\infty$ için

$$\sum_{t=0,\delta,\ldots,1-\delta}\delta g(x_k(t),t)\to\int_0^1 g(x_0(t),t)dt$$

gerçeklenmektedir.

İspat. [1]

Teorem 2.5.

$$I_\delta(x_\delta(\cdot)) = \sum_{t=0,\delta,\ldots,1-\delta} \delta g(x_\delta(t),t) + \varphi_0(x_\delta(1))$$
$$+\delta \sum_{t=0,\delta,\ldots,1} \left\| \tilde{x}(t) - x_\delta(t) \right\|^2$$

fonksiyonunu minimum yapan ve N_δ, M_δ konveks kümeler olmak üzere

$$x_\delta(t+\delta) \in x_\delta(t) + \delta a(x_\delta(t)), \quad t = 0,\delta,\ldots,1-\delta$$
$$x_\delta(0) \in N_\delta, \quad x_\delta(1) \in M_\delta$$

koşullarını gerçekleyen, $\tilde{x}_\delta(t)$ 'nin optimal olması için

$$-\Delta_\delta x^*(t) \in a^*(x_\delta^*(t+\delta);(\tilde{x}_\delta(t),\Delta_\delta(\tilde{x}(t)))$$
$$+2\lambda_\delta(\tilde{x}(t)-\tilde{x}_\delta(t)) + \lambda_\delta \partial g(\tilde{x}_\delta(t),t)$$
$$t = 0,\delta,\ldots,1-\delta,$$

$$x_\delta^*(0) \in K_{N_\delta}^*(x_\delta(0)),$$

$$x_\delta^*(1) + x_{\iota\delta}^* \in \lambda_\delta \partial\varphi_0(\tilde{x}_\delta(1)),$$

$$x_{\iota\delta}^* \in K_{M_\delta}^*(\tilde{x}_\delta(1)),$$

hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_\delta \geq 0$ sayısının ve $x_\delta^*(t)$, $t = 0,\delta,\ldots,1,$ $x_{\iota\delta}^*$ vektörlerin bulunmasıdır. Burada $\Delta_\delta x(t) \equiv \dfrac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}$ 'dir.

İspat. [1].

Teorem 2.6. $\varphi_0(x)$, sürekli konveks bir fonksiyon, N ve M konveks kümeler, a çok değerli fonksiyonu konveks kapalı ve sınırlı olsun. $\dot{x}(t) \in a(x(t))$ diferansiyel içermesini, $x(0) \in N$, $x(1) \in M$ sınır koşullarıyla gerçekleyen tüm yörüngeler arasından, tamamen $\operatorname{int} dom a$ kümesinde olan $\tilde{x}(t)$, $t \in [0,1]$, yörüngesinin $\varphi_0(x(1))$ fonksiyonunu minimum yapması için özdeş olarak sıfır olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan x_l^* vektörünün, mutlak sürekli $x^*(t)$ fonksiyonunun ve $\lambda_0 \geq 0$ sayısının varolmasıdır.

1) $x^*(1)+x_l^* \in \lambda_0 \partial \varphi_0(\tilde{x}(1)),\ x_l^* \in K_M^*(\tilde{x}(1)),\ x^*(0) \in K_M^*(\tilde{x}(0)),$

2) $-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))),\ t \in [0,1]$ h.h.,

3) $\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t);x^*(t)),\ t \in [0,1]$ h.h.

Ayrıca $\lambda > 0$ olması halinde 1)-3) koşulları yeterli olmaktadır.

İspat. [1].

Loewen ve Rockafellar [9],[10],[20], Clarke'nin normal konisi ve genelleştirilmiş gradyenti yardımıyla gerekli koşulları formüle etmektedir [21].

Teorem 2.7. (1.1)-(1.4) problemi $[a,b]$ aralığında alınsın. $\tilde{x}(t)$, bu problemin bir optimal çözümü ise aşağıdaki koşulları gerçekleyen, her ikisi birden sıfır olmayan $\lambda \geq 0$ sayısı ve $x^*:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyonu vardır:

1) $(\dot{x}^*(t),x^*) \in \lambda \partial_C g(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t),t) + N_C((\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)); gfa(\cdot,t)),$ h.h $t \in [a,b]$.

2) $(-\dot{x}^*(t),\dot{\tilde{x}}(t)) \in \partial_C H_\lambda(\tilde{x}(t),x^*(t),t),$ h.h.$t \in [a,b]$

3) $< x^*(t),\dot{\tilde{x}}(t) >= H_\lambda(\tilde{x}(t),x^*(t),t),$ h.h.$t \in [a,b]$

4) $(x^*(a),-x^*(b)) \in \lambda \partial_C \varphi(\tilde{x}(a),\tilde{x}(b)) + N_C(\tilde{x}(a),\tilde{x}(b);\Omega)$.

Burada $gfa(\cdot,t) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : y \in a(x,t)\}$, a 'nın grafı, N_C Clarke'nin normal konisi, $H_\lambda(x,x^*,t) :=\ \max\{< x^*,y > -\lambda g(x,y,t) : y \in a(x,t)\}$ Hamilton fonksiyonunu ve ∂_C Clarke'nin genelleştirilmiş gradyenti göstermektedir [21] ve $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ bir bölge öyle ki $(x(a),x(b)) \in \Omega$ sınır koşulu gerçeklenmekte.

1) içermesine Euler-Lagrange içermesi denir ve ilk kez Clarke tarafından Mayer problemi için kullanıldı. 2) Hamilton içermesi Clarke tarafından ispatlandı [21], [22]. 3) Weistrass-Pontryagin maksimum, şartı 1) ve 2) şartlarının konveks durumunda gerçekledikleri koşuldur. 1) ve 2) içermeleri genelde birbirinden bağımsızdır.

Mordukhovich [23] sonlu farklar metodunu geliştirerek Bolza problemi için diskret yaklaşım oluşturdu. Bunu kullanarak optimalliğin Euler-Lagrange formundaki gerekli koşullarını formüle etti.

2.3. DUALLİK

Konveks optimizasyon problemlerin dual problemini bulmak için kullanılan tanımları verelim.

Tanım. $f_1,\ldots,f_n$ has konveks fonksiyonlar olmak üzere

$$(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} f_i)(x)=\inf\{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i):\sum_{i=1}^{n} x_i = x\}$$

ile tanımlanan $f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} f_i$ fonksiyonuna $f_1,\ldots,f_n$'lerin infimal konvolüsyonu denir [4], [17]. $\oplus$ işareti yerine, $\square$ veya ∇ işaretleri de kullanılmaktadır.

Tanım. $co(f_1 \Lambda f_2)(w)=\inf\{\alpha \in \mathbb{R} : (\alpha, w) \in co(epif_1 \cup epif_2)\}$

kümesine $f_1(w)$ ve $f_2(w)$ fonksiyonların alt sınırların konveks zarfı denir [4].

Teorem 2.8. X'te herhangi $f_1, f_2,\ldots,f_n$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda

$$(f_1 \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_n)^* = f_1^* + f_2^* + \cdots + f_n^*$$
$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)^* \le f_1^* \oplus f_2^* \oplus \cdots \oplus f_n^*$$

gerçeklenmektedir.

$f_1, f_2,\ldots,f_n$ fonksiyonları konveks has fonksiyonlar ve $\bar{x} \in (domf_1) \cap (domf_2) \cap \ldots \cap (domf_n)$ noktasında, biri hariç olabilir, sürekli iseler

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)^* = f_1^* \oplus f_2^* \oplus \cdots \oplus f_n^*$$

eşitliği doğrudur.

Aşağıdaki temel optimal problemin dual problemini kuralım [19]:

Örnek. $z \in X \times Y$ olmak üzere $f_0(z)$, X'te tanımlı has konveks kapalı fonksiyonu, $f_0 : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, $a : X \to 2^Y$ konveks çok değerli fonksiyonu , $P \subseteq Y$, $S \subseteq X$, $a(x) \cap P \neq \varnothing$ gerçekleyen $P,\ S$ konveks kümeleri, verilmektedir.

$$\begin{aligned} & f_0(x) \to \inf, \\ & a(x) \cap P \neq \varnothing, \\ & x \in S \end{aligned} \tag{2.6}$$

probleminin dual problemini kuralım.

Öncelikle (2.6) problemini, ona eşdeğer olan Z uzayında tanımlı aşağıdaki problemle değiştirelim:

$$\begin{aligned} & \varphi(z) \to \inf, \\ & z \in Q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Burada $\varphi(z) = f_0(x)$, $Q = (gfa) \cap (X \times P) \cap (S \times Y) \subseteq Z$ olmaktadır.

$\delta_Q(z)$, Q kümesinin indikatör fonksiyonu, $\delta_Q(z) = \begin{cases} 0, & z \in Q \\ +\infty, & z \notin Q \end{cases}$,olmak üzere infimal konvolüsyon yardımıyla

$$\begin{aligned} & \inf\{\varphi(z) : z \in Q\} = \inf\{\varphi(z) + \delta_Q(z)\} = -\sup\{< z, 0 > -(\varphi(z) + \delta_Q(z))\} \\ & = -(\varphi + \delta_Q)^*(0) \geq -(\varphi^* \oplus \delta_Q^*)(0) = \sup\{-\varphi^*(z^*) - \delta_Q^*(-z^*)\} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\varphi^*(z^*) = \begin{cases} f_0^*(x^*), & y^* = 0, \\ +\infty, & y^* \neq 0 \end{cases} \qquad \text{ve}$$

her $z^* = (x_0^*, 0)$ için $\delta_Q^*(-x_0^*, 0) \leq \inf\limits_{x_0^*, x^*, y^*} \{-\Omega_a(x^* - x_0^*, y^*) - W_P(-y^*) - W_S(x^*)\}$

formülleri gerçeklendiğinden (2.7) probleminin duali

$$\sup\{-f_0^*(x_0^*)+\Omega_a(x^*-x_0^*,y^*)+W_P(-y^*)+W_S(x^*)\}$$

optimizasyon problemidir.

3. BULGULAR

3.1. DUAL VE YEREL DUAL FONKSİYONLARI ARASINDA BAĞINTI

Teorem 3.1. $a: IR^n \to 2^{IR^n}$ konveks-değerli, kapalı, sınırlı, sürekli bir fonksiyon ve $W_a(x, y^*) = \inf\{< y, y^* >: y \in a(x)\}$, x üzerinde sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$$< \overline{x}_1, \frac{\partial W_a\left(x_0, y^*\right)}{\partial x} > - < \overline{y}_1, y^* > < 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen $\overline{z}_1 = \left(\overline{x}_1, \overline{y}_1\right)$ vektörü varolsun. Bu durumda $y_0 \in a(x_0, y^*)$ olmak üzere $z_0 = (x_0, y_0)$ noktası için

i) $K_a\left(z_0\right) = \left\{\overline{z} :< \overline{x}, \dfrac{\partial W_a\left(x_0, y^*\right)}{\partial x} > - < \overline{y}, y^* > < 0\right\}$ konisi, yani gfa 'nın z_0 noktasındaki teğet yönler konisi, yerel şatördür.

ii) $K_a(z_0)$ 'a karşılık gelen yerel dual fonksiyon

$$a^*\left(y^*; z_0\right) = \left\{\frac{\partial W_a\left(x_0, y^*\right)}{\partial x}\right\}$$

formülü ile verilmektedir.

İspat: $y^* \in IR^n$ olmak üzere $S_a(x, y^*) = \sup\limits_{y \in a(x)} \{< y, y^* >\}$, $a(x)$ kümesinin destek fonksiyonu olsun. Konveks analiz teorisinden, ancak ve ancak her $y^* \in IR^n$ için $< y, y^* > \leq S_a(x, y^*)$ gerçeklenirse $y \in a(x)$ 'dir, ifadesi bilinmektedir.

$S_a(x,y^*) = \sup_{y\in a(x)} < y, y^* > = -\inf_{y\in a(x)} \left\{ - < y, y^* > \right\} = -\inf_{y\in a(x)} < y, -y^* >$

$= -W_a(x,-y^*)$,

yani $S_a(x,y^*) = -W_a(x,-y^*)$ dir. Bu durumda her $y^* \in IR^n$ için $< y, y^* > \leq$ $-W_a(x,-y^*)$ olur, bu ise her $y^* \in IR^n$ için $W_a(x,-y^*) \leq < y, -y^* >$ demektir. Genelliği bozmadan her $y^* \in IR^n$ için $W_a(x,y^*) \leq < y, y^* >$ yazılabilir. Dolayısıyla $a(x)$ çok değerli fonksiyonu

$$a(x) = \{ y : W_a(x,y^*) - < y, y^* > \leq 0 \}, \ \ y^* \in IR^n \qquad (3.1)$$

ile verilebilir.

$$f_{y^*}(z) = W_a(x,y^*) - < y, y^* >, \qquad (3.2)$$

diyelim, a konveks-değerli, kapalı, sınırlı, sürekli bir fonksiyon olduğundan Lemma V.3.1'den [1] $W_a(x,y^*)$ süreklidir. Dolayısıyla $f_{y^*}(z)$ fonksiyonu da y^* üzerinde süreklidir ve z üzerinde sürekli diferansiyellenebilirdir. O halde Teorem V.2.2'in sonuçlarından [1]

$$h_{y^*}(\overline{z}, z) = < \overline{z}, f'_{y^*}(z) > = < \overline{z}, \frac{\partial W_a(x,y^*)}{\partial x} \times \{-y^*\} > \qquad (3.3)$$

fonksiyonu $f_{y^*}(z)$ için bir Üstten Konveks Yaklaşımdır(ÜKY). Dahası $y_0 \in a(x_0, y^*)$ yani $< y_0, y^* > = \inf_{y\in a(x_0)} < y, y^* > = W_a(x_0, y^*)$ olduğundan $f_{y^*}(z_0) = 0$'dır ve $h_{y^*}(\overline{z}, z_0)$, $f_{y^*}(z)$ için ÜKY'dir. Bu ÜKY $\overline{z}$ üzerinde süreklidir ve teoremin koşulundan $\overline{z}_1$ için $h_{y^*}(\overline{z}_1, z_0) < 0$ olmaktadır. Bu durumda Teorem V.3.3[1] uygulanarak $K_a(z_0) = \{ \overline{z} : h_{y^*}(\overline{z}, z_0) < 0 \}$ olduğundan ve (3.3)'ten teoremin i) şıkkının gerçeklendiği görülmektedir. Bu durumda

$$-con\partial f_{y^*}(z_0) = con\left\{ \left(-\frac{\partial W_a(x_0, y^*)}{\partial x}, y^* \right) \right\}$$

yani $K_a^*(z_0)=\left\{\left(-\frac{\partial W_a(x_0,y^*)}{\partial x},y^*\right)\right\}$ olduğundan Teorem V.3.3[1]'den

$$a^*(y^*;z_0)=\left\{\frac{\partial W_a(x_0,y^*)}{\partial x}\right\}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu ise ii) koşulunun gerçeklendiğini göstermektedir. Teorem ispatlanmıştır.

Tanım. M konveks kompakt bir küme, K kapalı bir koni olmak üzere $gfa = M + K$ şeklinde ise a'ya kuvazisüperlineer diyeceğiz.

Tanım. a konveks çok değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$a^*(y^*)=\{x^*:(-x^*,y^*)\in(O^+gfa)^*\}$$

fonksiyonuna a'nın dual fonksiyonu diyeceğiz. Açıktır ki a'nın süperlineer olması halinde bu tanım Genel Kısımlar'daki dual fonksiyon kavramıyla çakışmaktadır.

Lemma 3.1. a konveks fonksiyonu için

$$dom\ \Omega_a=\left\{(-x^*,y^*):\Omega_a(x^*,y^*)>-\infty\right\}\subseteq(O^+gfa)^*$$

gerçeklenmektedir. a kuvazisüperlineer ise

$$dom\ \Omega_a=K^*$$

dır.

İspat: Tersini kabul edelim, yani $(-x_0^*,y_0^*)\in dom\ \Omega_a$ iken $(-x_0^*,y_0^*)\notin(O^+gfa)^*$ olsun. Bu ise dual koni tanımından

$$-<\overline{x}_0,x_0^*>+<\overline{y}_0,y_0^*><0$$

gerçekleyen $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \in O^+ gfa$ ikilisi vardır demektir. $O^+ gfa$'nın tanımından

$$(x, y) + \lambda(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \in gfa, \ (x, y) \in gfa, \ \lambda \geq 0$$

dır. Dolayısıyla $\lambda \to +\infty$ için

$$\begin{aligned} &-< x + \lambda\overline{x}_0, x_0^* > + < y + \lambda\overline{y}_0, y_0^* > = -< x, x_0^* > + < y, y_0^* > \\ &+\lambda\left\{-< \overline{x}_0, x_0^* > + < \overline{y}_0, y_0^* >\right\} \to -\infty \end{aligned}$$

gerçeklenmektedir, ki bu da $(-x_0^*, y_0^*) \in dom\ \Omega_a$ ifadesiyle çelişir. Lemmanın ilk ifadesi ispatlanmıştır.

a bir kuvazisüperlineer çok değerli fonksiyon olduğunda Sonuç 9.1.2 ve Lemma 3.6.1[17] uygulayarak

$$(O^+ gfa)^* = [O^+ (M + K)]^* = (O^+ M)^* \cap (O^+ K)^* = IR^n \cap K^* = K^*$$

bulunur. Diğer taraftan

$$dom\ \Omega_a = dom\ (\Omega_M + \Omega_K) = dom\ \Omega_M \cap dom\ \Omega_K = dom\ \Omega_K = K^*$$

olduğundan

$$dom\ \Omega_a = K^*$$

elde edilir.

Aşağıdaki Örnek Lemma'daki ters içermenin genelde doğru olmadığını göstermektedir:

Örnek 1.1: X ve Y tek boyutlu reel eksenler olmak üzere $a : X \to 2^Y$ fonksiyonu $a(x) = \{y : y \geq x^2\}$, $gfa = \{(x, y) : y \geq x^2\}$ ile verilmektedir. $O^+ gfa = \{0\} \times Y^+$ olduğu görülmekte, burada Y^+ pozitif y-eksenini göstermektedir. Dolayısıyla $(O^+ gfa)^* = \{(-x^*, y^*) : x^* \in X, y^* \in Y^+\}$ 'dir ve $x_0^* = 1, y_0^* = 0$ olmak üzere $(-x_0^*, y_0^*) \in (O^+ gfa)^*$ fakat $(-x_0^*, y_0^*) \notin dom\ \Omega_a$ olduğu açıktır, çünkü

$$\Omega_a(1,0)=\inf_{\substack{x,y \\ (x,y)\in gfa}}\{-<1,x>+<0,y>\}=\inf_x\{-<1,x>\}\to-\infty,$$

olmaktadır.

Lemma 3.2. a bir kuvazisüperlineer fonksiyon ve $W_a(.,y^*)$ has kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\sup_{x^*\in a^*(y^*)}\{<x,x^*>+\Omega_M(x^*,y^*)\}=\inf_{y\in a(x)}<y,y^*>$$

gerçeklenmektedir.

İspat: Lemma 3.1'den

$$dom\ \Omega_a=(O^+gfa)^*=K^*$$

olmaktadır. Dolayısıyla Teorem III .4.1[1] kullanılarak

$$\sup_{x^*}\{<x,x^*>+\Omega_a(x^*,y^*):(-x^*,y^*)\in dom\ \Omega_a\}=$$
$$\sup_{x^*}\{<x,x^*>+\Omega_a(x^*,y^*):(-x^*,y^*)\in(O^+gfa)^*\}=$$
$$\sup_{x^*}\{<x,x^*>+\Omega_a(x^*,y^*):x^*\in a^*(y^*)\}=$$
$$\sup_{x^*}\{<x,x^*>+\Omega_M(x^*,y^*):x^*\in a^*(y^*)\}=W_a(x,y^*)$$

bulunmaktadır, burada a kuvazisüperlineer olduğundan

$$\Omega_a(x^*,y^*)=\inf_{x,y}\{-<x,x^*>+<y,y^*>:(x,y)\in gfa\}=$$
$$\inf_{x,y}\{-<x,x^*>+<y,y^*>:(x,y)\in M+K\}=$$
$$\inf_{x,y}\{-<x,x^*>+<y,y^*>:(x,y)\in M\}=\Omega_M(x^*,y^*)$$

dir.

Uyarı: $M=\{0\}$ ise $\Omega_M=0$'dır ve yukarıda ifade edilen Lemma 3.2, TeoremIII.4.5[1] teoremi ile çakışır.

Lemma 3.3. a konveks çok değerli bir fonksiyon olsun. x_0 noktasının

$$\inf_x \left\{-< x, x^* > + W_a(x, y^*)\right\}, \ x^*, \mathrm{y}^* \in IR^n$$

probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$y_0 \in a(x_0, y^*) \ \text{ olmak üzere } \ x^* \in a^*(y^*; z_0)$$

gerçeklenmesidir.

İspat: Teorem IV.2.1 [1] nedeniyle, ancak ve ancak

$$0 \in \partial_x[-< x_0, x^* > + W_a(x_0, y^*)],$$

yani

$$x^* \in \partial_x W_a(x_0, y^*)$$

gerçeklenirse x_0 noktası

$$-< x, x^* > + W_a(x, y^*)$$

konveks fonksiyonun minimum noktası olmaktadır. Dolayısıyla Ω_a 'nın tanımından $y_0 \in a(x_0, y^*)$ olduğu açıktır. Bu durumda Teorem III.2.1 [1] kullanılarak

$$a^*(y^*; z_0) = \partial_x W_a(x_0, y^*)$$

olduğundan aranan sonuç elde edilmektedir.

Teorem 3.2. a, Lipschitz koşulunu gerçekleyen konveks-değerli kapalı sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$$a_z(\overline{x}) = \left\{\overline{y} : (\overline{x}, \overline{y}) \in K_a(z)\right\}$$

olmak üzere $W_{a_z}(\overline{x}, y^*)$ fonksiyonu kapalı olsun. Bu durumda $y \in a(x, y^*)$ iken herhangi bir $z = (x, y) \in gfa$ için $W_{a_z}(\cdot, y^*)$ fonksiyonu $W_a(\cdot, y^*)$ 'in Ü.K.Y.dır ve bunun yanında

$$a^*(y^*; z) = \partial_x W_a(x, y^*)$$

gerçeklenmektedir.

İspat. $y \in a(x)$ olmak üzere $z = (x, y)$ için $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y}) \in K_a(z)$ olsun. O halde teğet yönler konisinin tanımından, oldukça küçük $\lambda \geq 0$ için $z + \lambda\overline{z} + \tau(\lambda) \in gfa$ gerçekleyen ve $\lambda \downarrow 0$ iken $\lambda^{-1}\tau(\lambda) \to 0$ sağlayan $\tau(\lambda) \in Z = X \times Y$ fonksiyonu vardır. Yani

$$y + \lambda\overline{y} + \tau_y(\lambda) \in a(x + \lambda\overline{x} + \tau_x(\lambda)),\ \tau = (\tau_x, \tau_y),\ \tau_x(\lambda) \in X, \tau_y(\lambda) \in Y$$

olmaktadır.

a fonksiyonu Lipschitz koşulunu gerçeklediğinden Lemma V.3.2 [1] nedeniyle $W_a(x, y^*)$ fonksiyonu da bu koşulu gerçeklemektedir. Böyle fonksiyonlar için

$$F(\overline{x}, x) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(W_a(x + \lambda\overline{x}, y^*) - W_a(x, y^*))$$

olmaktadır. $\tau(\lambda)$ 'nın seçiminden bağımsız $\lambda \downarrow 0$ iken $\lambda^{-1}\tau(\lambda) \to 0$ olduğundan

$$F(\overline{x}, x) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda}(W_a(x + \lambda\overline{x} + \tau_x(\lambda), y^*) - W_a(x, y^*))$$

eşitliğin gerçeklendiği kolayca görülür. $y \in a(x, y^*)$ koşulundan $W_a(x, y^*) = \langle y, y^* \rangle$ 'dir ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\lambda}(W_a(x + \lambda\overline{x} + \tau_x(\lambda), y^*) - W_a(x, y^*)) \leq \frac{1}{\lambda}(\langle y + \lambda\overline{y} + \tau_y(\lambda), y^* \rangle$$
$$- \langle y, y^* \rangle) = \langle \overline{y}, y^* \rangle + \langle \frac{\tau_y(\lambda)}{\lambda}, y^* \rangle$$

bulunur. O halde

$$F(\overline{x},x)=\limsup_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda}(W_a(x+\lambda\overline{x}+\tau_x(\lambda),y^*)-W_a(x,y^*))\leq$$
$$\limsup_{\lambda\downarrow 0}[<\overline{y},y^*>+<\lambda^{-1}\tau_y(\lambda),y^*>]=<\overline{y},y^*>.$$

Yani

$$F(\overline{x},x)\leq\inf_{\overline{y}}\{<\overline{y},y^*>:\overline{y}\in a_z(\overline{x})\}$$

elde edilir. Bundan başka, $\overline{x}\notin dom\ a_z$ için $W_{a_z}(\overline{x},y^*)=+\infty$ alalım. O halde a_z'ye Lemma 3.2 uygulanarak

$$W_{a_z}(\overline{x},y^*)=\sup_{x^*}\{<\overline{x},x^*>:x^*\in a_z^*(y^*)\}$$

olur. Fakat diğer taraftan tanımdan $a^*(y^*;z)=a_z^*(y^*)$ 'dir [1]. Buradan $W_{a_z}(\overline{x},y^*)$, $\overline{x}$ 'in pozitif homojen konveks kapalı bir fonksiyonu olmak üzere,

$$F(\overline{x},x)\leq W_{a_z}(\overline{x},y^*)=\sup_{x^*}\{<\overline{x},x^*>:x^*\in a^*(y^*;z)\}$$

bulunur, yani $W_{a_z}(\overline{x},y^*)$, $W_a(\cdot,y^*)$ fonksiyonunun x noktasındaki üstten konveks yaklaşımıdır. İspatı tamamlamak için Teorem II.3.11 [1] uygulamak kalıyor, böylece

$$\partial W_a(x,y^*)=\partial h(0,x)=a^*(y^*;z)$$

bulunur.

Şimdi dual fonksiyon ve yerel dual fonksiyon (YDF) arasındaki bağıntıyı inceleyelim. Bunun için aşağıdaki iki teorem yararlı olacaktır.

$K_M(z)$, $M(\subseteq Z=X\times Y)$ konveks kümesinin $z\in M$ noktasındaki teğet yönler konisini anımsayalım

$$K_M(z)=con(M-z)=\{\overline{z}:\overline{z}=\lambda(z_1-z),\ \lambda>0,\ z_1\in M\}. \qquad (3.4)$$

Teorem 3.3. $O^{+}M$, $M \subset Z$ konveks kapalı kümesinin resesif konisi olsun. Bu durumda

$$\bigcap_{z \in M} K_M(z) = O^{+}M \text{ ‘dir.}$$

İspat. Önce

$$M = \bigcap_{z \in M} (z + K_M(z)) \tag{3.5}$$

olduğu gösterilmektedir. $z_0 \in M$ keyfi bir nokta olsun. (3.4) tanımında $\lambda = 1$ alındığında $\overline{z} = z_0 - z$ şeklindeki tüm vektörlerin $K_M(z)$ konisine ait olduğu açıktır, yani $z \in M$ olmak üzere $z_0 \in z + K_M(z)$. Dolayısıyla $z_0 \in \bigcap_{z \in M} z + K_M(z)$ gerçeklenmektedir.

Şimdi son içerme sağlansın. O halde her $z \in M$ için $z_0 \in z + K_M(z)$ ‘dir, ya da $z_0 - z = \gamma(z_1 - z) \in K_M(z)$ olacak şekilde $z_1 \in M$ noktası ve $\gamma > 0$ sayısı vardır. $z_1, z \in M$ ve M konveks olduğundan $z_0 = \gamma z_1 + (1-\gamma)z \in M$ bulunur. Yani (3.5) ifadesi sağlanır.

Diğer taraftan

$$O^{+}\left[\bigcap_{z \in M} (z + K_M(z))\right] = \bigcap_{z \in M} [O^{+}(z + K_M(z))] \text{ ’dir.}$$

Aslında z, kapalı konveks $M = \bigcap_{z \in M} (z + K_M(z))$ kümesinin keyfi bir noktası ise resesif koni tanımından açıktır ki her $\lambda \geq 0$ için $z + \lambda \overline{z}$ ışını her bir $z + K_M(z)$, $z \in M$, konisine aittir. Bu ise

$$\overline{z} \in \bigcap_{z \in M} [O^{+}(z + K_M(z))]$$

demektir. Dolayısıyla

$$O^{+}M = O^{+}\left[\bigcap_{z\in M}(z+K_M(z))\right] = \bigcap_{z\in M}[O^{+}(z+K_M(z))] = \bigcap_{z\in M}K_M(z)$$

bulunur. Teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.4. *M* kapalı konveks bir küme ve $z \in M$ olmak üzere $K_M^*(z)$, $K_M(z)$ teğet yönler konisinin dual konisi olsun. Bu durumda

$$\overline{\bigcup_{z\in M}K_M^*(z)} = (O^{+}M)^*$$

eşitliği gerçeklenmektedir, burada üst çizgi kapanışı göstermektedir.

İspat.

$$\overline{\bigcup_{z\in M}K_M^*(z)} = \left(\bigcap_{z\in M}K_M(z)\right)^* \qquad (3.6)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Herhangi bir $z_0^* \in \overline{\bigcup_{z\in M}K_M^*(z)}$ alalım. Bu durumda $z_n^* \to z_0^*$ gerçeklenecek şekilde $z_n^* \in \bigcup_{z\in M}K_M^*(z)$ dizisi vardır. Her bir z_n^* için $z_n^* \in \bigcup_{z\in M}K_M^*(z)$ olduğundan $z_n^* \in K_M^*(z_n)$ gerçeklenecek şekilde $z_n \in M$ noktaları vardır. Dolayısıyla $z_n^* \in K_M^*(z_n)$ bağıntısı yardımıyla $\{z_n\}$ dizisi belirlenir. Diğer taraftan $K_M(z_n) \supseteq \bigcap_{z\in M}K_M(z)$ olduğundan dual operatörün özelliklerinden $K_M^*(z_n) \subseteq \left(\bigcap_{z\in M}K_M(z)\right)^*$ olduğu görülmektedir. Öyleyse $z_n^* \in \left(\bigcap_{z\in M}K_M(z)\right)^*$ ‘dir ve dual koni kapalı bir küme olduğundan $z_0^* \in \left(\bigcap_{z\in M}K_M(z)\right)^*$ elde edilir.

Şimdi (3.6)'daki ters içermeyi ispatlayalım. Herhangi bir $z_1^* \in \left(\bigcap_{z \in M} K_M(z) \right)^*$ alalım ve tersini kabul edelim, yani $z_1^* \notin \overline{\bigcup_{z \in M} K_M^*(z)}$ olduğunu varsayalım. O halde her bir $z \in M$ için $z_1^* \notin K_M^*(z)$'tir. Yani her $z \in M$ için $< z_1^*, \overline{z}_1 >< 0$ gerçekleyen $\overline{z}_1 \in K_M(z)$ $(\overline{z}_1 \neq 0)$ vektörü vardır. Bu ise $\overline{z}_1 \in \bigcap_{z \in M} K_M(z)$ için $< z_1^*, \overline{z}_1 >< 0$ anlamına gelir, yada dual koni tanımından $z_1^* \notin \left(\bigcap_{z \in M} K_M(z) \right)^*$ sağlanmaktadır. Bulunan ifade kabulümüzle çelişir, dolayısıyla

$$\left(\bigcap_{z \in M} K_M(z) \right)^* \subseteq \overline{\bigcup_{z \in M} K_M^*(z)}$$

elde edilmektedir. Teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.5. *a* konveks, kapalı bir fonksiyon olsun. Bu durumda dual fonksiyon $a^*(y^*)$ ve *a*'nın yerel dual fonksiyonu(YDF) arasında

$$a^*(y^*) = \overline{\bigcup_{z \in gfa} a^*(y^*; z)}, \; y \in a(x, y^*)$$

bağıntısı vardır.

İspat. Bir önceki teoremde $M = gfa$ alınırsa

$$a^*(y^*) = \overline{\bigcup_{z \in gfa} a^*(y^*; z)}$$

elde edilir. Teorem III.2.1 [1] nedeniyle $y \notin a(x, y^*)$ iken $z = (x, y)$ için $a^*(y^*; z) = \varnothing$ gerçeklenmektedir.

3.2. OPTİMALLİK İÇİN YETERLİ KOŞULLAR

$\tilde{x}(t_0) = x_0$ olmak üzere $t \in [t_0, t_1]$ için $\tilde{x}(t)$, (1.1)-(1.4) probleminin bir mümkün çözümü olsun. $x^*(t)$ dual değerin her $x(t) \in F(t)$ için gerçeklenen dual diferansiyel içermesi (dahil etmesi)[1]

a) $-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)), t) + \partial g(\tilde{x}, t),\ t \in [t_0, t_1]$ h.h.;

$\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t), x^*(t), t),\ t \in [t_0, t_1]$ h.h.

yazılmaktadır. $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $x^*(t)$ çözümü a) dual içermesini hemen her yerde(h.h.) gerçeklemektedir ve mutlak sürekli ile sıçrama fonksiyonların toplamı şeklindedir.

$$\tau_i (i = 1, 2, \ldots),\ t_0 < \tau_i < t_1,$$
$$x_i^* = x^*(\tau_i + 0) - x^*(\tau_i - 0)\ \ (i = 1, 2, \ldots),$$

sırasıyla sıçrama noktalarını ve $x^*(t)$ 'nin sıçrama değerlerini ifade etsin.

Tanım. $\tilde{x}(t)$ mümkün yörüngesi

$$-< x^*(t), \tilde{x}(t) >< W_{M \cap F(t)}(-x^*(t)),\ \ t_0 \le t < t_1$$

koşulunu gerçekliyorsa M kümesi üzerinde mutlak geçişen yörünge denir.

Bu tanımla her $t \in [t_0, t_1)$ için $\tilde{x}(t) \notin M$ ifadesi sağlanmış olur:

$$-< x^*(t), \tilde{x}(t) >< W_{M \cap F(t)}(-x^*(t)),\ \ t_0 \le t < t_1$$

olduğundan

$$-< x^*(t), \tilde{x}(t) >< \inf_{x(t) \in M \cap F(t)} < x(t), -x^*(t) >,\ \ t_0 \le t < t_1$$

yani

$$-<x^*(t),\tilde{x}(t)>< \ -\sup_{x(t)\in M\cap F(t)} <x(t),x^*(t)>,\ \ t_0\le t<t_1$$

buradan $\sup\limits_{x(t)\in M\cap F(t)} <x(t),x^*(t)><\ <x^*(t),\tilde{x}(t)>,\ \ t_0\le t<t_1$, bulunur. Dolayısıyla $t\in[t_0,t_1)$ olmak üzere her $x(t)\in M\cap F(t)$ için $<x(t),x^*(t)><\ <x^*(t),\tilde{x}(t)>$ gerçeklenmektedir. Teorem I.2.7 [1] nedeniyle her $t\in[t_0,t_1)$ için $\tilde{x}(t)\notin M\cap F(t)$ ’tir. Fakat her $t\in[t_0,t_1]$ için $\tilde{x}(t)\in F(t)$ olduğundan $\tilde{x}(t)\notin M$, $t\in[t_0,t_1)$, olmalı.

Tanım. $\theta<\theta^{'}$ gerçekleyen herhangi $\theta,\theta^{'}\in[t_0,t_1]$ için ve $x(t_0)=x_0$ başlangıç koşulunu sağlayan (1.2) diferansiyel içermesinin herhangi mümkün yörüngesi için

$$I(x(\cdot),\theta)<I(x(\cdot),\theta^{'})$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $I(x(\cdot),t)$ fonksiyonuna *t* argümanına göre monoton artandır, denir.

Teorem 3.6. $t\in[t_0,t_1]$ olmak üzere $\tilde{x}(t)$, (1.1)-(1.4) probleminin herhangi bir mümkün yörüngesi olsun ve a) içermesini gerçekleyen $x^*(t)$ mutlak sürekli fonksiyonu varolsun. (1.2) diferansiyel içermesinin herhangi $x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, mümkün yörüngesi için $I(x(\cdot),t)$ fonksiyonu *t* argümanına göre monoton artan ve

1) $x^*(t_1)\in\partial\varphi(\tilde{x}(t_1),t_1)\cap K_M^*(\tilde{x}(t_1))$;

2) x_i^* sıçramaları $<\tilde{x}(\tau_i),x_i^*>=W_{F(\tau_i)}(x_i^*)$ gerçeklesin;

3) $\tilde{x}(t)$, M ’de mutlak geçişen olsun

koşullarının sağlandığı farz edilsin. Bu durumda $\tilde{x}(t)$ yörüngesi optimaldir.

İspat. $x(t)\in F(t)$, $[t_0,\theta]$ aralığında mutlak geçişen, yani $x(\theta)\in M$ gerçekleyen, herhangi bir mümkün yörünge olsun. Bu durumda

$$I(x(\cdot),\theta)\ge I(\tilde{x}(\cdot),t_1)$$

olduğunu gösterelim. a konveks olduğundan YDF, $\partial_x W_a(\cdot, x^*(t), t)$ ile ifade edilebilir ve $a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)$ 'in tanımından a) içermesi

$$-\dot{x}^*(t) \in \partial_x W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) + \partial_x g(\tilde{x}(t), t)],\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.},$$
$$W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) = < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >,\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.}$$

olur ve Moreau-Rockafellar Teoremi'nden [4],

$$-\dot{x}^*(t) \in \partial_x [W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) + g(\tilde{x}(t), t)],\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.},$$
$$W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) = < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >,\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.}$$

şeklinde yazılabilir. Başka ifade ile

$$W_a(x(t), x^*(t), t) + g(x(t), t) - (W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) + g(\tilde{x}(t), t)) \geq$$
$$< -\dot{x}^*(t), x(t) - \tilde{x}(t) >, \quad t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.},$$

yada

$$W_a(x(t), x^*(t), t) - W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) + g(x(t), t) - g(\tilde{x}(t), t)) \geq$$
$$< -\dot{x}^*(t), x(t) - \tilde{x}(t) >, \quad t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.}, \qquad (3.7)$$
$$W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) = < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >$$

elde edilir. $W_a(x(t), x^*(t), t) \leq < \dot{x}(t), x^*(t) >$ eşitsizliği var olduğundan

$$< \dot{x}(t), x^*(t) > - < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) > \geq W_a(x(t), x^*(t), t) - W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)$$

yazılabilir. Bundan faydalanarak (3.7)'deki eşitsizlik

$$< \dot{x}(t), x^*(t) > - < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) > + g(x(t), t) - g(\tilde{x}(t), t)$$
$$\geq < x(t) - \tilde{x}(t), -\dot{x}^*(t) >$$

şeklinde ifade edilebilir. Yani hemen her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$< \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) > + < x(t) - \tilde{x}(t), \dot{x}^*(t) > \geq g(\tilde{x}(t), t) - g(x(t), t)$$

elde edilir. $\psi(t) = < x(t) - \tilde{x}(t), x^*(t) >$ fonksiyonunu tanımlayalım, bu durumda (3.7) eşitsizliği hemen her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$\frac{d\psi(t)}{dt} \geq g(\tilde{x}(t),t) - g(x(t),t)$$
(3.8)

ifadesine dönüşür. (3.8)’i integre edersek

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}(t)dt = < x(t_1) - \tilde{x}(t_1), x^*(t_1) > \geq \int_{t_0}^{t_1} [g(\tilde{x}(t),t) - g(x(t),t)]dt \qquad (3.9)$$

elde edilir. $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ mutlak sürekli fonksiyonlar olduğundan ve $x^*(t)$ mutlak sürekli ve sıçrama fonksiyonların toplamı şeklinde yazılabildiğinden $\psi(t)$ fonksiyonu

$$\psi(\theta) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \dot{\psi}(t)dt + \sum_{i \in J(\theta)} [\psi(\tau_i + 0) - \psi(\tau_i - 0)]$$
$$J(t) = \{i : \ \tau_i \in [t_0, t]\} \qquad (3.10)$$

şeklinde gösterilebilir [24]. $\psi(t)$ fonksiyonunun $\tau_i (i = 1, 2, \ldots)$ noktasındaki sıçrama değerleri hesaplanabilir. Teoremin 2) koşulu dikkate alınırsa ve $x(\tau_i + 0) = x(\tau_i - 0) = x(\tau_i)$, $\tilde{x}(\tau_i + 0) = \tilde{x}(\tau_i - 0) = \tilde{x}(\tau_i)$

$$\begin{aligned}
&\psi(\tau_i + 0) - \psi(\tau_i - 0) \\
&= < x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i), x^*(\tau_i + 0) > - < x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i), x^*(\tau_i - 0) > \\
&= < x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i), x^*(\tau_i + 0) - x^*(\tau_i - 0) > = < x(\tau_i) - \tilde{x}(\tau_i), x_i^* > \\
&= < x(\tau_i), x_i^* > - < \tilde{x}(\tau_i), x_i^* > = < x(\tau_i), x_i^* > - W_{F(\tau_i)}(x_i^*)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dahası $x(\tau_i) \in F(\tau_i)$ ve

$$< x(\tau_i), x_i^* > \geq \inf\{< x(\tau_i), x_i^* >: x(\tau_i) \in F(\tau_i)\} = W_{F(\tau_i)}(x_i^*)$$

sağlandığından

$$\psi(\tau_i + 0) - \psi(\tau_i - 0) \geq 0 \quad \forall \tau_i \in [t_0, \theta]$$

bulunur, yani

$$\sum_{i \in J(\theta)} [\psi(\tau_i + 0) - \psi(\tau_i - 0)] \geq 0.$$

Teoremin 1) koşulundan $x^*(t_1) \in K_M^*(\tilde{x}(t_1))$ ‘dir ve dual koni tanımından $x(t_1) \in M$ olmak üzere $< x(t_1) - \tilde{x}(t_1), x^*(t_1) > \geq 0$ bulunur ve t_1 serbest olduğundan açıktır ki, bu eşitsizlik herhangi $t_1 = \theta$ için doğrudur. O halde (3.9)’dan

$$\int_{t_0}^{\theta} \dot{\psi}(t)dt \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.10)’dan $\psi(\theta) \geq \psi(t_0)$ gerçeklenir, yani

$$< x(\theta) - \tilde{x}(\theta), x^*(\theta) > \geq < x(t_0) - \tilde{x}(t_0), x^*(t_0) > = 0.$$

Son eşitsizlikten ve Teoremin 3) koşulundan

$$- < x(\theta), x^*(\theta) > \leq - < \tilde{x}(\theta), x^*(\theta) > < W_{M \cap F(\theta)}(-x^*(\theta)) \qquad (3.11)$$

bulunur. $\Delta I = I(x(\cdot), \theta) - I(\tilde{x}(\cdot), t_1)$, I hedef fonksiyonelinin $\tilde{x}(t)$ yörüngesinden $x(t)$ yörüngesine geçişinde meydana gelen artımı olsun. Bu durumda

$$\Delta I = \varphi(x(\theta), \theta) + \int_{t_0}^{\theta} g(x(t), t)dt - \varphi(\tilde{x}(t_1), t_1) - \int_{t_0}^{t_1} g(\tilde{x}(t), t)dt$$

$$= \varphi(x(\theta), \theta) + \int_{t_0}^{\theta} g(x(t), t)dt - \varphi(x(t_1), t_1) - \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), t)dt$$

$$+ \varphi(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), t)dt - \varphi(\tilde{x}(t_1), t_1) - \int_{t_0}^{t_1} g(\tilde{x}(t), t)dt.$$

Diğer taraftan (3.9) eşitsizliği ve Teoremin 1) koşulundan

$$\int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - g(\tilde{x}(t), t)]dt + \varphi(x(t_1), t_1) - \varphi(\tilde{x}(t_1), t_1) \geq 0$$

bulunur. Bu ifadeyi kullanarak son eşitsizlikten

$$\Delta I \geq \varphi(x(\theta), \theta) + \int_{t_0}^{\theta} g(x(t), t)dt - \varphi(x(t_1), t_1) - \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), t)dt \qquad (3.12)$$

bulunur.

$\tilde{x}(t)$'nin optimal olduğunu göstermek için tersini kabul edelim, yani optimal olmasın. Bu şu anlama gelir: $x(t_0)=x_0$, $x(\theta)\in M$ gerçekleyen herhangi $x(t)$, $t\in[t_0,\theta]$, mümkün yörüngesi için $I(x(\cdot),\theta)<I(\tilde{x}(\cdot),t_1)$, yani $\Delta I<0$ olsun. Bu durumda (3.12) eşitsizliğinden $0>\Delta I\geq I(x(\cdot),\theta)-I(x(\cdot),t_1)$, yani $I(x(\cdot),\theta)<I(x(\cdot),t_1)$ bulunur. $I(x(\cdot),t)$ fonksiyonu monoton artan olduğundan

$$\theta<t_1 \tag{3.13}$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla (3.11) ve (3.13) eşitsizliklerinden $x(\theta)\notin M\cap F(\theta)$ bulunur. O halde $x(\theta)\notin M$, yani $x(t)$ yörüngesi $[t_0,\theta]$ aralığında $x(\theta)\in M$ gerçekleyemeyen bir yörüngedir. Kabulümüzle çelişmektedir. Bu ise $\tilde{x}(t)$'in optimal olduğu anlamına gelmektedir.

3.3. DUALLİK VE DUALLİK TEOREMLERİ

(1.1)-(1.4) problemini konveks problem olarak ele alalım, yani problemdeki fonksiyonlar, çok değerli fonksiyon ve küme konveks ve F çok değerli fonksiyonu konveks-değerli olsun. $\varphi^*(\,\cdot\,,t_1)$ ve $g^*(\,\cdot\,,t)$, sırasıyla $\varphi(\,\cdot\,,t_1)$ ve $g(\,\cdot\,,t)$ fonksiyonların dual fonksiyonlarını göstersin.

$$\Omega_a(x^*,y^*,t)=\inf\{-<x,x^*>+<y,y^*>:(x,y)\in gfa\}$$

fonksiyonu anımsanırsa, açıktır ki $\Omega_a(x^*,y^*,t)=\inf\limits_x\{-<x,x^*>+W_a(x,y^*,t)\}$'dir.

$$\sup_{x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1)} \{-\varphi^*(v^*(t_1)-\xi^*(t_1),t_1)-\int_{t_0}^{t_1} g^*(u^*(t),t)dt +$$
$$< x(t_0),x^*(t_0)> +\int_{t_0}^{t_1} \Omega_a(-\xi^*(t)-\dot{x}^*(t)-u^*(t),x^*(t),t)dt - \tag{3.14}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} W_{F(t)}(\xi^*(t))dt + W_M(v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1))\}.$$

problemine (1.1)-(1.4) probleminin dual problemi denir. Burada $x^*(t),\xi^*(t),u^*(t)$ ve $v^*(t_1)$ fonksiyonları mutlak sürekli fonksiyonlardır. Kıvırcık parantezde bulunan ifade $I_*(x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1),t_1)$ ile gösterilsin.

Teorem 3.7. (1.1)-(1.4) probleminin herhangi $x(t)$ ve dual (3.14) probleminin herhangi $\{x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1)\}$ mümkün çözümleri için

$$I(x(t),t_1) \geq I_*(x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1),t_1)$$

eşitsizliği gerçeklenmektedir.

İspat. Ω_a, W_M ve $W_{F(t)}$ fonksiyonlarının tanımlarından ve dual fonksiyonun

$$-\varphi^*(v^*(t_1)-\xi^*(t_1),t_1) = -\sup_{x(t_1)}\{< x(t_1),v^*(t_1)-\xi^*(t_1)> -$$
$$\varphi(x(t_1),t_1)\} = \inf_{x(t_1)}\{-< x(t_1),v^*(t_1)-\xi^*(t_1)> +\varphi(x(t_1),t_1)\},$$

$$-g^*(u^*(t),t) = -\sup_{x(t)}\{< x(t),u^*(t)> -g(x(t),t)\} =$$
$$\inf_{x(t)}\{-< x(t),u^*(t)> +g(x(t),t)\}$$

formüllerinden

$$I_*(x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1),t_1) \leq -< x(t_1),v^*(t_1)-\xi^*(t_1)> +$$
$$\varphi(x(t_1),t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[-< x(t),u^*(t)> +g(x(t),t)]dt + < x(t_0),x^*(t_0)>$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}[< -\xi^*(t)-\dot{x}^*(t)-u^*(t),x(t)> + < x^*(t),\dot{x}(t)>]dt \qquad (3.15)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}< x(t),\xi^*(t)> dt + < x(t_1),v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1)> =$$

$$I(x(t),t_1) + < x(t_0),x^*(t_0)> + \int_{t_0}^{t_1} d < x(t),x^*(t)> - < x(t_1),x^*(t_1)>$$

$$= I(x(t),t_1)$$

bulunur.

Teorem 3.8. $t\in[t_0,t_1]$ olmak üzere $x(t)$ yörüngesi (1.1)-(1.4) konveks probleminin bir çözümü olsun. $x^*(t),\xi^*(t),u^*(t)$ ve $v^*(t_1)$ de aşağıdaki özellikleri gerçekleyen fonksiyonlar olsun:

$x^*(t)$, a) dual içermesini sağlasın, $u^*(t)\in\partial g(\tilde{x}(t),t)$, $v^*(t_1)-\xi^*(t_1)\in\partial\varphi(\tilde{x}(t_1),t_1)$,

$\xi^*(t)\in K^*_{F(t)}(\tilde{x}(t))$ ve $v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1)\in K^*_M(\tilde{x}(t_1))$. Bu durumda

$\{x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1)\}$ dual problemin mümkün bir çözümüdür ve bu halde iki problemin değerleri çakışmaktadır.

İspat. $-\dot{x}^*(t)\in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)),t)+\partial g(\tilde{x},t),\ t\in[t_0,t_1]$ h.h. ve $u^*(t)\in\partial g(\tilde{x}(t),t)$ olduğundan

$$-\dot{x}^*(t)-u^*(t)\in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)),t),\ t\in[t_0,t_1] \text{ h.h.}$$

gerçeklenecektir. Ayrıca YDF

$$a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)),t)=\{x^*:(-x^*,x^*(t))\in K_a^*((\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)))\}$$

yazılabildiğinden hemen her $t\in[t_0,t_1]$ için

$$(\dot{x}^*(t)+u^*(t),x^*(t))\in K_a^*((\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)))$$

ve dual koninin tanımından hemen her $t\in[t_0,t_1]$ ve her $(x,y)\in gfa(\cdot,t)$, $x\in F(t)$ için

$$< \dot{x}^*(t) + u^*(t), x - \tilde{x}(t) > + < x^*(t), y - \dot{\tilde{x}}(t) > \geq 0$$

bulunur. Diğer taraftan $\xi^*(t) \in K^*_{F(t)}(\tilde{x}(t))$ olduğundan $x \in F(t)$ olmak üzere dual koni tanımından

$$< \xi^*(t), x - \tilde{x}(t) > \geq 0 \text{ ve}$$

sonuçta

$$< \xi^*(t) + \dot{x}^*(t) + u^*(t), x - \tilde{x}(t) > + < x^*(t), y - \dot{\tilde{x}}(t) > \geq 0$$

gerçeklenmektedir. Bu ise $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $(-\xi^*(t) - \dot{x}^*(t) - u^*(t), x^*(t)) \in dom\Omega_a$ demektir. $\partial_x g(x,t) \subset dom\ g^*(\cdot,t)$ ve $\partial_x \varphi(x,t_1) \subset dom\ \varphi^*(\cdot,t_1)$ [17] olduğu göz önüne alınırsa $\{x^*(t), \xi^*(t), u^*(t), v^*(t_1)\}$, dual problemin bir çözümüdür sonucu çıkar.

Lemma 3.3 ve a) dual diferansiyel içermesinden

$$\begin{aligned} &\Omega_a(\xi^*(t) - \dot{x}^*(t) - u^*(t), x^*(t), t) = \\ &- < \tilde{x}(t), \xi^*(t) - \dot{x}^*(t) - u^*(t) > + W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t), \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{3.16}$$

olduğu açıktır. Teoremin koşullarından ve $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} &g^*(u^*(t), t) =< \tilde{x}(t), u^*(t) > - g(\tilde{x}(t), t), \\ &\varphi^*(v^*(t_1) - \xi^*(t_1), t_1) =< \tilde{x}(t_1), v^*(t_1) - \xi^*(t_1) > - \varphi(\tilde{x}(t_1), t_1), \\ &W_{F(t)}(\xi^*(t)) =< \xi^*(t), \tilde{x}(t) >, \ t \in [t_0, t_1], \\ &W_M(v^*(t_1) - x^*(t_1) - \xi^*(t_1)) =< v^*(t_1) - x^*(t_1) - \xi^*(t_1), \tilde{x}(t_1) >, \\ &W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) =< \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >, \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{3.17}$$

bulunmaktadır. (3.16), (3.17) bağıntılarından ve Teorem 3.7'in ispatından (bk. (3.15)) istenen sonuç elde edilmektedir, yani

$$\sup_{x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1)} I_*(x^*(t),\xi^*(t),u^*(t),v^*(t_1),t_1) =$$

$$-\varphi^*(v^*(t_1)-\xi^*(t_1),t_1) - \int_{t_0}^{t_1} g^*(u^*(t),t)dt$$

$$+ < \tilde{x}(t_0), x^*(t_0) > + \int_{t_0}^{t_1} \Omega_a(-\xi^*(t) - \dot{x}^*(t) - u^*(t), x^*(t), t)dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} W_{F(t)}(\xi^*(t))dt + W_M(v^*(t_1) - x^*(t_1) - \xi^*(t_1)) =$$

$$- < \tilde{x}(t_1), v^*(t_1) - \xi^*(t_1) > + \varphi(\tilde{x}(t_1), t_1)$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} [< \tilde{x}(t), u^*(t) > - g(\tilde{x}(t),t)]dt + < \tilde{x}(t_0), x^*(t_0) >$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} [- < \tilde{x}(t), -\xi^*(t) - \dot{x}^*(t) - u^*(t) > + < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >]dt -$$

$$\int_{t_0}^{t_1} < \xi^*(t), \tilde{x}(t) > dt$$

$$+ < v^*(t_1) - x^*(t_1) - \xi^*(t_1), \tilde{x}(t_1) > = I(\tilde{x}(t), t_1) = \inf_{x(\cdot)} I(x(\cdot), t_1).$$

3.4. ÖRNEKLER

Örnek 1. $a:\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ çok değerli fonksiyon ve $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^n$ olmak üzere $Z = X \times Y$ olsun. $(x,y)\in Z$ için $\phi(x,y) = f(x)+h(y)$ konveks fonksiyonu ve

$$a(x) = \{y : \phi(x,y) \le 0\}$$

tanımlansın. $z_1 = (x_1, y_1) \in gfa = \{(x,y) : \phi(x,y) = f(x)+h(y) \le 0\}$ için $\phi(z_1) < 0$ gerçeklensin ve $z_0 = (x_0, y_0) \in gfa$ olmak üzere $\phi(z_0) = 0$ olsun. Bu durumda yerel dual fonksiyonu bulunuz.

$\phi_1(z) \equiv f(x)$ ve $\phi_2(z) \equiv h(y)$ alalım. Bu durumda $\phi(z) = \phi_1(z) + \phi_2(z)$ yazılabilir. $z_0 = (x_0, y_0) \in gfa$ için

$$\begin{aligned}\partial\phi_1(z_0) &= \{z_1^* : \phi_1(z)-\phi_1(z_0) \geq < z_1^*, z-z_0 >, \forall z\} \\
&= \{z_1^* : f(x)-f(x_0) \geq < z_1^*, z-z_0 >, \forall z\} \\
&= \{z_1^* = (x_1^*, y_1^*) : f(x)-f(x_0) \geq < x_1^*, x-x_0 > + < y_1^*, y-y_0 > \\
&\qquad , \forall (x,y)\} \\
&= \{(x_1^*, 0) : f(x)-f(x_0) \geq < x_1^*, x-x_0 >, \forall x\} \\
&= \{(x_1^*, 0) : x_1^* \in \partial f(x_0)\}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}&\partial\phi_2(z_0) = \{z_2^* : \phi_2(z)-\phi_2(z_0) \geq < z_2^*, z-z_0 >, \forall z\} \\
&= \{z_2^* : h(y)-h(y_0) \geq < z_2^*, z-z_0 >, \forall z\} \\
&= \{(0, y_2^*) : h(y)-h(y_0) \geq < y_2^*, y-y_0 >, \forall y\} \\
&= \{(0, y_2^*) : y_2^* \in \partial h(y_0)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Genelliği bozmadan

$$\partial\phi_2(z_0) = \{(0, y_1^*) : y_1^* \in \partial h(y_0)\}$$

yazılabilir, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\partial\phi_1(z_0) + \partial\phi_2(z_0) &= \{(x_1^*, 0) : x_1^* \in \partial f(x_0)\} + \{(0, y_1^*) : y_1^* \in \partial h(y_0)\} \\
&= \{(x_1^*, y_1^*) : x_1^* \in \partial f(x_0),\ y_1^* \in \partial h(y_0)\} = \partial f(x_0) \times \partial h(y_0)\end{aligned}$$

bulunur. $dom\phi = dom\phi_1 \cap dom\phi_2$ ve

$$dom\phi_1 = \{z : \phi_1(z) < +\infty\} = \{(x,y) : f(x) < +\infty\} = domf \times Y,$$

$$dom\phi_2 = \{z : \phi_2(z) < +\infty\} = \{(x,y) : h(y) < +\infty\} = X \times domh$$

olduğundan

$$\begin{aligned}dom\phi &= (domf \times Y) \cap (X \times domh) = (X \cap domf) \times (domh \cap Y) \\
&= domf \times domh\end{aligned}$$

olduğu görülür. $(x_0, y_0) \in domf \times domh = dom\phi_1 \cap dom\phi_2$ gerçeklendiğinden Moreau-Rockafellar Teoremi uygulanabilir [4], [17], yani $\partial\phi(z_0) = \partial\phi_1(z_0) + \partial\phi_2(z_0) = \partial f(x_0) \times \partial h(y_0)$ yazılabilir. Bundan faydalanarak

$$
\begin{aligned}
con\partial\phi(z_0) &= \{\overline{z} : \overline{z} = \lambda z^*, z^* \in \partial\phi(z_0),\ \lambda \geq 0\} \\
&= \{(\overline{x},\overline{y}) : (\overline{x},\overline{y}) = \lambda(x^*, y^*), x^* \in \partial f(x_0), y^* \in \partial h(y_0), \lambda \geq 0\} \\
&= \{(\overline{x},\overline{y}) : \overline{x} = \lambda x^*, \overline{y} = \lambda y^*, x^* \in \partial f(x_0), y^* \in \partial h(y_0), \lambda \geq 0\}
\end{aligned}
$$

konisi bulunur. Teorem II.3.17 [1]'e göre ve $-con\partial\phi(z_0) = K_a^*(z_0)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
a^*(y^*; z_0) &= \{x^* : (-x^*, y^*) \in K_a^*(z_0)\} \\
&= \{\lambda x^* : x^* \in \partial f(x_0), -y^* \in \lambda\partial h(y_0), \lambda \geq 0\}
\end{aligned}
$$

olduğu çıkar. $y^* = x^*(t),\ z_0 = (x_0, y_0) = (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))$ alınarak

$$
a^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))) = \{\lambda x^* : x^* \in \partial f(\tilde{x}(t)), -x^*(t) \in \lambda\partial h(\dot{\tilde{x}}(t)), \lambda \geq 0\}
$$

bulunur ve

$$
-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)))
$$

olduğundan

$$
-(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in \lambda(t)[\partial f(\tilde{x}(t)) \times \partial h(\dot{\tilde{x}}(t))]
$$

gerek şartı bulunur.

Teorem 3.9. (1.1)-(1.4) problemi Mayer problemi olarak ele alınsın. $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $\tilde{x}(t)$ bu problemin herhangi bir mümkün yörüngesi olsun. $f(x),\ h(y)$ sürekli fonksiyonlar ve $\phi(x, y)$ konveks fonksiyonu, $\phi(x, y) = f(x) + h(y)$, olmak üzere a sınırlı konveks çok değerli fonksiyonu

$$
a(x) = \{y : \phi(x, y) \leq 0\}
$$

kümesi ile verilsin. $\phi(x_1, y_1) < 0$ gerçekleyen $z_1 = (x_1, y_1)$ noktası ve

$$
\begin{aligned}
&-(\dot{x}^*(t), x^*(t)) \in \lambda(t)[\partial f(\tilde{x}(t)) \times \partial h(\dot{\tilde{x}}(t))] \\
&\lambda(t)\phi(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) = 0,\ \ \lambda(t) \geq 0
\end{aligned}
$$

sağlayan $x^*(t)$ mutlak sürekli fonksiyonu ve $\lambda(t)$ fonksiyonu varolsun. I fonksiyonu t argümanına göre monoton artan ve Teorem 3.6'ın 1)-3) koşulları gerçekleniyor olsun. Bu durumda $\tilde{x}(t)$ ele aldığımız problem için optimal yörüngedir.

İspat. $g(x,t)=0$ ve Örnek 1'de bulunan YDF'den Teorem 3.6'daki a) diferansiyel içermesi $x^*(t)$ için verilen şartla çakışır. Dolayısıyla Teorem 3.6'ın tüm koşulları sağlanmaktadır, o halde $\tilde{x}(t)$ ifade edilen problem için optimal yörüngedir sonucuna varılır.

Örnek 2. $f(x,u)$, x'te diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve U kontrol kümesi olmak üzere $a(x)=f(x,U)$ konveks küme olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&I(x(\cdot),t_1)\to \inf\\
&\dot{x}(t)=f(x(t),u(t)),\ u(t)\in U\subset \mathbb{R}^2, t\in[t_0,t_1]\\
&x(t)\in F(t)\\
&x(t_0)=x_0,\ x(t_1)\in M=\{x_1\}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

probleminin dual problemini oluşturalım.

Verilen problemi

$$\begin{aligned}
&I(x(\cdot),t_1)\to \inf\\
&\dot{x}(t)\in a(x(t))\\
&x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1
\end{aligned} \tag{3.19}$$

problemi ile değiştirelim. Dolayısıyla

$$W_a(x,y^*)=\inf_{y\in a(x)} < y,y^* >=\inf_{u\in U} < f(x,u),y^* > \tag{3.20}$$

bulunur. $\tilde{u}$, (3.20)'in bir çözümü ve $\tilde{x}$ Lemma 3.3'teki problemin bir çözümü ise $W_a(\tilde{x},y^*)=< f(\tilde{x},\tilde{u}),y^* >$ ve

$$\begin{aligned}
&\inf_x\{-< x,x^* > +W_a(x,y^*)\}=-<\tilde{x},x^* > +W_a(\tilde{x},y^*)\\
&=-<\tilde{x},x^* > + < f(\tilde{x},\tilde{u}),y^* >,\ \tilde{y}\in a(\tilde{x},y^*)
\end{aligned}$$

demektir. O halde Lemma 3.3'ten $x^* \in a^*(y^*;(\tilde{x},\tilde{u},f(\tilde{x},\tilde{u})))$'dir. a konveks değerli olduğundan

$$a^*(y^*;(\tilde{x},\tilde{u},f(\tilde{x},\tilde{u}))) = \{x^* : W_a(x,y^*) - W_a(\tilde{x},y^*) \geq < x-\tilde{x},x^* >\}$$

olarak alınmaktadır. Dolayısıyla $x \in F(x)$ olmak üzere

$$< y^*, f(x,\tilde{u}) > - < y^*, f(\tilde{x},\tilde{u}) > \geq < x-\tilde{x}, x^* >$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu ise f türevlenebilir olduğundan $x^* = < y^*, f'(\tilde{x},\tilde{u}) >$ demektir [17]. Diğer taraftan $f_x'^*(\tilde{x},\tilde{u})$, $f_x'\ (\tilde{x},\tilde{u})$'ın dual matrisi olmak üzere $< y^*, f_x'\ (\tilde{x},\tilde{u}) >= f_x'^*(\tilde{x},\tilde{u})y^*$ yazılabilir ve

$$x^* = f_x'^*(\tilde{x},\tilde{u})y^* \tag{3.21}$$

olur. Bu ise Teorem 3.6'daki a) içermesinin

$$-\dot{x}^*(t) = f_x'^*(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)).x^*(t)$$
$$W_a(\tilde{x}(t),x^*(t),t) = < x^*(t), f(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) >$$

olduğunu gösterir. Problemde $g(x,t) \equiv 0$'dir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} g^*(u^*,t) &= \sup_x \{< x,u^* > - g(x,t)\} \\ &= \sup_x \{< x,u^* >\}, \quad x \in F(t) \end{aligned}$$

yani

$$g^*(u^*,t) = \begin{cases} 0, & u^* = 0, \\ \infty, & u^* \neq 0, \end{cases} \tag{3.22}$$

bulunmaktadır. $F(t) \equiv \mathbb{R}^2$, $M = \mathbb{R}^2$ olduğu durumda

$$W_{F(t)}(\xi^*(t)) = \inf_{x(t)\in F(t)} < \xi^*(t), x(t) >, \ t\in[t_0,t_1]$$
$$= \begin{cases} 0, & \xi^*(t)=0, \\ -\infty, & \xi^*(t)\neq 0, \end{cases}$$

ve

$$W_M(v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1)) = \inf_{x(t_1)\in M} < v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1), x(t_1) >$$
$$= \begin{cases} 0, & v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1)=0 \\ -\infty, & v^*(t_1)-x^*(t_1)-\xi^*(t_1)\neq 0, \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\xi^*(t)=0,\ v^*(t_1)=x^*(t_1)$ olmaktadır. Bunu kullanarak ve (3.22) eşitliğinden problemin duali (3.14) yardımıyla

$$\sup_{x^*(t)}\{-\varphi^*(x^*(t_1),t_1)+ < x(t_0), x^*(t_0) > + \int_{t_0}^{t_1} \Omega_a(-\dot{x}^*(t), x^*(t), t)dt\}$$
$$-\dot{x}^*(t) = f_x'^*(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)).x^*(t),\ t\in[t_0,t_1]$$
$$W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) = < x^*(t), f(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)) >$$

bulunur.

Örnek 3. Optimal zaman kontrol problemi [2] ele alınmaktadır

$$I = \int_0^{t_1} dt \to \inf$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u,$$
$$x(t)\in F(t),\ t\in[0,t_1],$$
$$|x_1|\leq 1,\ |u|\leq 1,\ x(0)=x_0,\ x(t_1)\in M=\{0\}.$$

Bu durumda $a(x,t)=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 : y_1=x_2, |y_2|\leq 1\}$ ve $F(t)=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : |x_1|\leq 1\}$ bulunmaktadır. Dolayısıyla

$$W_a(x,y^*) = \inf_{y\in a(x,t)} < y, y^* > = \inf_{(y_1,y_2)\in a(x,t)} \{y_1y_1^* + y_2y_2^*\}$$

$$= \inf\{y_1 y_1^* + y_2 y_2^* : y_1 = x_2, |y_2| \le 1\}$$

$$= \begin{cases} x_2 y_1^* - y_2^*, & y_2^* \ge 0 \\ x_2 y_1^* - (-y_2^*), & y_2^* < 0 \end{cases} = x_2 y_1^* - |y_2^*|$$

bulunur. $\tilde{x}(t) \in F(t)$ olmak üzere $\tilde{y} \in a(\tilde{x}, y^*)$ olsun, o halde $W_a(\tilde{x}, y^*) = <\tilde{y}, y^*> = \tilde{y}_1 y_1^* + \tilde{y}_2 y_2^* = \tilde{x}_2 y_1^* + \tilde{y}_2 y_2^*$ olmaktadır. Bu durumda $(\tilde{x}, \tilde{y})$ noktasındaki yerel dual fonksiyon

$$\begin{aligned} a^*(y^*;(\tilde{x},\tilde{y})) &= \{x^* : W_a(x, y^*) - W_a(\tilde{x}, y^*) \ge < x - \tilde{x}, x^* >\} \\ &= \{x^* : x_2 y_1^* - |y_2^*| - (\tilde{x}_2 y_1^* - |y_2^*|) \ge (x_1 - \tilde{x}_1) x_1^* + (x_2 - \tilde{x}_2) x_2^*\} \\ &= \{x^* : (x_2 - \tilde{x}_2)(y_1^* - x_2^*) \ge (x_1 - \tilde{x}_1) x_1^*\} \end{aligned}$$

şeklindedir, yani

$$a^*(y^*;(\tilde{x},\tilde{y})) = \{x^* : (x_2 - \tilde{x}_2)(y_1^* - x_2^*) - (x_1 - \tilde{x}_1) x_1^* \ge 0\}$$

kümesidir. Eşitsizlik $\tilde{x}(t) \in F(t)$ için sağlandığından $|\tilde{x}_1| \le 1$'dir, yani üç hal söz konusudur. Bu durumda

$$a^*(y^*;(\tilde{x},\tilde{y})) = \begin{cases} (x_1^*, x_2^*) : x_1^* = 0, y_1^* - x_2^* = 0, |\tilde{x}_1| < 1 \\ (x_1^*, x_2^*) : x_1^* \ge 0, y_1^* - x_2^* = 0, \tilde{x}_1 = 1 \\ (x_1^*, x_2^*) : x_1^* \le 0, y_1^* - x_2^* = 0, \tilde{x}_1 = -1\} \end{cases}$$

olmaktadır. Burada $y^* = x^*(t)$ ve $\tilde{y} = \dot{\tilde{x}}(t)$ alınırsa, $g(x,t) \equiv 1$
olduğundan Teorem 3.6'daki

$$-\dot{x}^*(t) = (-\dot{x}_1^*(t), -\dot{x}_2^*(t)) \in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)))$$

dual diferansiyel içermesinden

$$\begin{aligned} &|\tilde{x}_1(t)| < 1 \text{ ise } -\dot{x}_1^*(t) = 0, \ -\dot{x}_2^*(t) = x_1^*(t), \\ &\tilde{x}_1(t) = 1 \text{ ise } -\dot{x}_1^*(t) \ge 0, \ -\dot{x}_2^*(t) = x_1^*(t), \\ &\tilde{x}_1(t) = -1 \text{ ise } -\dot{x}_1^*(t) \le 0, \ -\dot{x}_2^*(t) = x_1^*(t), \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|\tilde{x}_1(t)| < 1 \text{ ise } \dot{x}_1^*(t) = 0 \Rightarrow C_1 \text{ sabit olmak üzere } x_1^*(t) = C_1$$

bulunur. Buradan $x_2^*(t) = -x_1^*(t)t + C_2 = -C_1 t + C_2$ olmaktadır.

Diğer taraftan $\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{u}(t)$ olduğundan

$$\tilde{u}(t) = \operatorname{sgn} x_2^*(t) = \operatorname{sgn}(C_2 - C_1 t)\,.$$

Dolayısıyla $\tilde{u}(t)$, ± 1 ve sıfır değerlerini almaktadır. $x_2^*(t)$ lineer fonksiyon olduğundan $[0,t_1]$ aralığında en fazla iki defa işaret değiştirir, o halde $\tilde{u}(t)$, $[0,t_1]$ aralığında en fazla iki defa farklı işaretlidir.

Eğer $\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1,\tau_2] \\ +1, & t \in (\tau_2,t_1] \end{cases}$ ise $x_2^*(t) = C_2 - C_1 t$ kullanarak $t \in [0,\tau_1)$ için $x_2^*(t) = t - \tau_1$ bulunur, $t \in (\tau_2,t_1]$ için $x_2^*(t) = t - \tau_2$ olmaktadır.

Sonuçta $|\tilde{x}_1(t)| < 1$, $\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,\tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1,\tau_2] \\ +1, & t \in (\tau_2,t_1] \end{cases}$ iken $x_1^*(t) = -1$ ve $x_2^*(t) = \begin{cases} t-\tau_1, & t \in [0,\tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1,\tau_2] \\ t-\tau_2, & t \in (\tau_2,t_1] \end{cases}$ olarak bulunur.

$\tilde{u}(t) = \begin{cases} +1, & t \in [0,\tau_1) \\ 0, & t \in [\tau_1,\tau_2] \\ -1, & t \in (\tau_2,t_1] \end{cases}$ olması durumunda da aynı şekilde $x_2^*(t)$ hesaplanır.

$\tilde{u}(t)$ kontrol vektörü verildiğinde ve $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ başlangıç noktası sayesinde τ_i, $i = 1,2$ sıçrama noktaları tek türlü belirlenir. (Bu hal için sıçrama değerleri sıfırdır.)

Örneğin $t \in [0, \tau_1)$ için $\tilde{u}(t) = -1$ iken $\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{u}$ olduğundan $x_2(t) = -t + x_2^0$ bulunur. Buradan da $\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2$ olduğundan kolayca $x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0$ elde edilir. Bu hal için τ_1 sıçrama anında $x_1(\tau_1) = 1$ olduğundan $\tau_1 = x_2^0 - 1$ şeklindedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 4.1. (1.1)-(1.4) probleminde g fonksiyonu konveks olmasın. $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $\tilde{x}(t)$, problemin herhangi bir mümkün yörüngesi olsun.

$$\begin{aligned} &-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)), t),\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.} \\ &\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t), x^*(t), t),\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

içermesini gerçekleyen mutlak sürekli $x^*(t)$ fonksiyonu var olsun. $I(x(\cdot), t)$ fonksiyonu (1.2) diferansiyel içermesinin herhangi $x(t),\ t \in [t_0, t_1]$, mümkün yörüngesi için t argümanına göre monoton artan olsun.

1) Hemen her $t \in [t_0, t_1]$ ve herhangi $x \in F(t)$ için

$g(x,t) - g(\tilde{x}(t), t) \geq < x^*(t), x - \tilde{x}(t) >$,

2) $x^*(t_1) \in \partial\varphi(\tilde{x}(t_1))$,

3) $< \tilde{x}(\tau_i), x_i^* > = W_{F(\tau_i)}(x_i^*)$ sıçramalar şartı,

4) Mutlak geçişen şartı

şartları gerçeklensin. Bu durumda $\tilde{x}(t)$ optimal yörüngedir.

İspat. (4.1) içermesi ve YDF tanımından

$$\begin{aligned} &W_a(x(t), x^*(t), t) - W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) \geq < -\dot{x}^*(t), x(t) - \tilde{x}(t) >, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [t_0, t_1],\ \text{h.h.}, \\ &W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t) = < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) >,\ t \in [t_0, t_1],\ \text{h.h.}, \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $W_a(x(t), x^*(t), t) \leq < \dot{x}(t), x^*(t) >$ olduğundan

$$< \dot{x}(t), x^*(t) > - < \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) > \geq < -\dot{x}^*(t), x(t) - \tilde{x}(t) >$$

yazılabilir. Yani

$$< \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t), x^*(t) > + < x(t) - \tilde{x}(t), \dot{x}^*(t) > \geq 0 ,$$

bulunmaktadır. $< x(t) - \tilde{x}(t), x^*(t) > = \psi(t)$ diyelim,o halde $\dfrac{d\psi(t)}{dt} \geq 0$ elde edilir. $[t_0, t_1]$ aralığında integre edilirse

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}(t)dt = < x(t_1) - \tilde{x}(t_1), x^*(t_1) > \geq 0 \qquad (4.2)$$

bulunur. Teorem 3.6'ın ispatında olduğu gibi $\psi(\theta)$ fonksiyonu (3.10) eşitliği ile verilebilir. Ayrıca $\dfrac{d\psi(t)}{dt} \geq 0$ ifadesini herhangi $[t_0, \theta]$ aralığında integre edersek, (4.2) eşitsizliği herhangi $t_1 = \theta$ için gerçeklenir ve

$$\int_{t_0}^{\theta} \dot{\psi}(t)dt \geq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.10) eşitliğinden Teorem 3.6'ın ispatındaki gibi $\psi(\theta) \geq \psi(t_0)$ sağlanmaktadır. Son eşitsizlikten ve Teoremin 4) koşulundan (3.11) eşitsizliği elde edilir. ΔI artımı ele alınırsa teoremin 1) ve 2) koşullarından (3.12) eşitsizliği bulunur. Teoremin ispatı, Teorem 3.6'ın ispatına benzer şekilde sürdürülmektedir ve $\tilde{x}(t)$ yörüngesinin optimal olduğu sonucuna kolayca varılmaktadır.

Sonuç 4.2. *a* herhangi bir konveks, kapalı çok değerli fonksiyon olsun.

$$\inf I(x(\cdot), t_1)$$
$$\dot{x} \in a(x)$$

probleminin dual problemi

$$\sup I_*(x^*(\cdot),\xi^*(\cdot),u^*(\cdot),v^*(t_1),t_1)$$
$$-\dot{x}^* \in a^*(x^*)$$

problemidir. Burada $y \in a(x,y^*)$ için $a^*(y^*) = \overline{\bigcup_{z\in gfa} a^*(y^*;z)}$'dir.

İspat. Teorem 3.5 kullanılarak ve Lemma 3.2'den yararlanarak bulunur.

Sonuç 4.3. a konveks, kapalı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)),t) + \partial g(\tilde{x},t),\ t\in[t_0,t_1] \text{ h.h.;}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t),x^*(t)),\ t\in[t_0,t_1] \text{ h.h.;}$$

ifadeleri sırasıyla

$$-\dot{x}^*(t) \in \partial_x W_a(\tilde{x}(t),x^*(t)) + \partial g(\tilde{x},t),\ t\in[t_0,t_1] \text{ h.h.;}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in \partial_{y^*} W_a(\tilde{x}(t),x^*(t)),\ t\in[t_0,t_1] \text{ h.h.;}$$

ifadelerine denktir.

İspat. $a(x,t)$ konveks, kapalı bir küme ve $-W_a(x,y^*) = \sup_y\{-<y,y^*>: y\in a(x)\}$ olduğundan $-W_a(x,y^*), y^*$'in konveks fonksiyonudur[1]. Dolayısıyla Teorem II.3.11[1] kullanılarak

$$\partial_{y^*}(-W_a(x,y^*)) = \{y\in a(x,t) :< y,y^* >= -W_a(x,y^*)\} = -a(x,y^*)$$

bulunur. $-W_a(x,y^*)$, y^*'a göre konveks olduğundan $W_a(x,y^*)$, y^*'a göre konkavdır ve konkav kümeler için subdiferansiyel

$$\partial_{y^*} W_a(x,y^*) = -\partial_{y^*}(-W_a(x,y^*))$$

formülü ile verilmektedir. Dolayısıyla

$\partial_{y^*} W_a(x, y^*) = a(x, y^*)$ dir.

$y \in a(x, y^*)$ olmak üzere $y = \dot{\tilde{x}}(t)$, $y^* = x^*(t)$ ve $x = \tilde{x}(t)$ alırsak Bulgular kısmındaki a) ifadesini

$$-\dot{x}^*(t) \in \partial_x W_a(\tilde{x}(t), x^*(t)) + \partial g(\tilde{x}, t),\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.;}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in \partial_{y^*} W_a(\tilde{x}(t), x^*(t)),\ t \in [t_0, t_1] \text{ h.h.}$$

şeklinde yazabiliriz.

Sonuç 4.4 a, konveks-değerli, kapalı, sınırlı, sürekli bir fonksiyon ve $W_a(x, y^*)$, x' in sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olsun. Teorem 3.1'deki $\overline{z}_1$ vektörü varolsun. Bu durumda $x^*(t)$ fonksiyonu ve $\tilde{x}(t)$ yörüngesi

$$\begin{aligned} -\dot{x}^*(t) &\in \frac{\partial W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)}{\partial x} + \partial g(\tilde{x}(t), t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &\in a(\tilde{x}(t), x^*(t), t),\ t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \qquad (4.3)$$

ifadesini gerçeklemektedir.

İspat. Teorem 3.1 'in koşulları sağlandığından

$$a^*(x^*(t); (\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)), t) = \frac{\partial W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)}{\partial x}$$

eşitliği doğrudur. Dolayısıyla (4.3) ifadesi Teorem 3.6'in a) koşulu ile çakışmaktadır.

Uyarı 1. Sonuç 4.4'teki $g(x, t)$ fonksiyonu türevlenebilir ise (4.3) içermesi

$$\begin{aligned} -\dot{x}^*(t) &= \frac{\partial W_a(\tilde{x}(t), x^*(t), t)}{\partial x} + g'_x\ (\tilde{x}(t), t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &\in a(\tilde{x}(t), x^*(t), t),\ t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

ifadesine dönüşmektedir.

Uyarı 2. Esas problemimizde t_1 sabit olduğu durumda Teorem 3.6'daki $\theta = t_1$'dir ve (3.12)'den $\Delta I \geq 0$ gerçeklenir, yani $\tilde{x}(t)$ optimaldir. Dahası bu halde $I(x(\cdot),t)$'nin t 'ye göre monoton artan olması şartı aranmaz.

Uyarı 3. Herhangi mümkün $x(t)$ yörüngesi için Teorem 3.6'da $I(x(\cdot),t)$'in t'ye göre monoton artanlığı pek kısıtlayıcı değildir, ve gerçeklendiği birçok problem vardır. Örneğin, yüksek hız problemleri, kalitenin kuadratik formlu problemlerinde ve $\varphi(x,t) \equiv 0,\ g(x,t) \geq 0$ hallerinde monotonluk sağlanmaktadır.

Uyarı 4. Bulgular kısmındaki Teorem 3.3 'ün şartlarından M'in kapalı olması şartı önemlidir. Çünkü örneğin, $M = \{(x,y): x > 0,\ y > 0\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Açıktır ki $O^+ M = M$'dir. Belirli $x_0 > 0,\ y_0 > 0$ noktaları için $(x_0, y_0) + \lambda(0, y_0) \in M$'dir. Yani teğet yönler konisi tanımından $(0, y_0) \in K_M(x_0, y_0)$, fakat $(0, y_0) \notin O^+ M$.

Sonuç 4.5. (1.1)-(1.4) problemini Mayer problemi olarak düşünelim. $t \in [t_0, t_1]$ olmak üzere $\tilde{x}(t)$ fonksiyonu problemin herhangi bir mümkün yörüngesi olsun. $\phi(x,y)$ bir konveks fonksiyon olmak üzere a sınırlı konveks çok değerli fonksiyonu

$$a(x) = \{y : \phi(x,y) \leq 0\}$$

şeklinde verilsin. $\phi(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) = 0$ olsun ve $\phi(x_1, y_1) < 0$ gerçekleyen $z_1 = (x_1, y_1)$ noktası varolsun. $x^*(t)$ mutlak sürekli fonksiyonu ve $\lambda(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} &(-\dot{x}^*(t), -x^*(t)) \in \lambda(t)\partial\phi(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) \\ &\lambda(t)\phi(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)) = 0, \quad \lambda(t) \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.4)$$

şartını sağlasın ve Teorem 3.6'nın 1)-3) koşulları ile $I(x(\cdot),t)$ fonksiyonunun t'ye göre monoton artanlığı gerçeklensin. Bu durumda $\tilde{x}(t)$ optimal yörüngedir.

İspat. Teorem III.3.2 [1] kullanılırsa $\phi(z_1) < 0$ gerçekleyen z_1 noktası varolduğundan

$$a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t))) = \{\lambda(t)x_0^*(t) : x^*(t) = -\lambda(t)y_0^*(t),$$
$$(x_0^*(t), y_0^*(t) \in \partial\phi(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)),\ \lambda(t) \geq 0,\ \lambda(t)\phi(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)) = 0\}$$

kolayca bulunur. Teoremin (4.4) ifadesi $-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t);(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t)))$ ve $\dot{\tilde{x}}(t) \in a(\tilde{x}(t), x^*(t))$ olduğunu göstermektedir ki bu da Teorem 3.6'daki $x^*(t)$'in sağladığı koşuldur. Teorem 3.6'nın tüm koşulları gerçeklendiğine göre $\tilde{x}(t)$ optimal yörüngedir.

Sonuç 4.6. (1.1)-(1.4) problemi Mayer problemi olarak, yani $g(x(t),t) \equiv 0$ halinde ele alınmaktadır. Bu durumda

$$\sup_{x^*(t),\xi^*(t),v^*(t_1)} \{-\varphi^*(v^*(t_1) - \xi^*(t_1), t_1) - < x(t_0), x^*(t_0) > +$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \Omega_a(-\xi^*(t) - \dot{x}^*(t), x^*(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_1} W_{F(t)}(\xi^*(t))dt -$$
$$W_M(v^*(t_1) - x^*(t_1) - \xi^*(t_1))\}$$

problemi Mayer problemi için dualdir.

İspat. (3.14) ifadesinde $g^*(u^*(t),t)$ fonksiyonu, dual fonksiyon tanımından ve Örnek 2'de yapılan (3.21) ifadesinden

$$u^*(t) = 0 \text{ ve } g^*(u^*(t),t) = 0$$

olmaktadır. (3.14) ifadesinde yerine konulursa aranan bulunmaktadır.

Bulgular kısmında ispatlanan duallik teoremleri şu sonucu vermektedir:

a) yeterli koşulu dual ve direkt problemleri için çok önemli bir bağıntıdır. Herhangi bir mümkün çözümler ikilisi bu bağıntıyı gerçekliyorsa bunların her biri dual ve direkt problemin sırsıyla çözümleri olmaktadır.

Bu tezdeki bulgular ve sonuçlar a çok değerli fonksiyonun konveks olmadığı haller için geliştirilebilir. Bulgular kısmındaki teoremlerin kısmi türevli içermelere[11], [12] uygulanabilirliği araştırılabilir. Dağılım parametreli diferansiyel içermeleri içeren optimal problemler için araştırmalar genişletilebilir. Bundan sonraki amacım çalışmalarımı bu yönde sürdürmektir.

KAYNAKLAR

1. PSHENICHNYI, B., 1980, *Convex Analysis and Extremal Problems,* Nauka, Moscow.

2. PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII,V.G., GAMKRELIDZE, R.V.,MISHCHENKO, E.F., 1964, *The Mathematical Theory of Optimal Processes,* The MacMillan Company, New York, 63-15354.

3. MAHMUDOV, E.N., 1987, Duality in Problems of Theory of Convex Difference Inclusions with Persistence, *Diferanc. Uravnenia,* 23(8), 1315-1324.

4. IOFFE, A.D., TIKHOMIROV, V.M.,1974, *The theory of Extremal Problems,* Nauka, Moskow.

5. VINTER, R.B., 2000, *Optimal Control*, Birkhauser, Boston, 0-8176-4075-4.

6. AZIMOV, A., 2000, Vector Optimization in Ordered Banach Spaces*, İnternational J. of Applied Math.,* 2(11), 1349-1362.

7. CLARKE, F.H., 1976, The Generalized Problem of Bolza, *SİAM J. Control Optimizization,* 14, 682-699.

8. ROCKAFELLAR, R.T., 1970, Conjugate Convex Functions in Optimal Control and the Calculus of Variations, *J. Math. Anal. Appl.,* 32,174-222.

9. LOEWEN, P.D., ROCKAFELLAR, R.T., 1991, The Adjoint Arc in Nonsmooth Optimization, *Trans. Amer. Math. Soc.,*Vol. 325,39-72.

10. LOEWEN, P.D., ROCKAFELLAR, R.T., 1994, Optimal Control of Unbounded Differential Inclusions, *SIAM J. Control Optimization,* 34, 442-470.

11. MAHMUDOV, E.N., 2005, On Duality in Problems of Optimal Control Described by Convex Differential Inclusions of Goursat-Darboux Type, *J. Math. Anal. Appl.,* 307, 628-640.

12. MAHMUDOV, E.N., 2005, The Optimality Principle for Discrete and First Order Partial Differential Inclusions, *J. Math. Anal. Appl.,* 308, 605-619.

13. ROCKAFELLAR, R.T., 1998, *Convexity and Duality in Hamilton-Jacobi Theory*[online], IIASA, A-2361 Laxenburg, http://www.iiasa.ac.at. [Ziyaret Tarihi: 5Mayıs 2004].

14. MAHMUDOV, E.N., 1990, Optimization of Discrete Inclusions with Distributed Parameters, *Optimization*, 2, 197-207.

15. ROCKAFELLAR, R.T., 1974, *Conjugate Duality and Optimization,* SIAM, Philadelphia, 0-89871-013-8.

16. MAHMUDOV, E.N., 1987, Duality in the Problems of Optimal Control for Systems Described by Convex Differential Inclusions with Delay, *Problems of Control and Information Theory,* Vol. 16(6), 411-422.

17. ROCKAFELLAR, R.T., 1972, *Convex Analysis,* Princeton University Pres, New Jersey, 0-691-08069-0.

18. RUBINOV, A.M.,1980, *Superlinear Multivalued Mappings and Their Applications to Problems in Mathematical Economics,* Nauka, Moscow.

19. MAHMUDOV, E.N., 1988, Çok Değerli Diskret ve Diferansiyel Dahil Etmeler için Polihedral Optimizasyon Problemi ve Duallik, *Kibernetica*, 3, 45-53.

20. ALEKSEEV, V.M., TIKHOMIROV, V.M., FOMIN, S.V., 1979, *Optimal Control,* Nauka, Moscow.

21. CLARKE, F.H., 1983, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley&Sons Inc., New York, 0-89871-256-4.

22. CLARKE, F.H., 1987, Hamiltonian analysis of the Generalized Problem of Bolza, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 301, 386-400.

23. MORDUKHOVICH, B.S., 1995, Discrete Approximations and Refined Euler-Lagrange Conditions for Nonconvex Differential Inclusions, *SIAM J. Control Optimization*, 33(3), 882-915.

24. KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V., 1970, *Introductory Real Analysis,* Rover Publications, New York, 0-486-61226-0.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Bulgaristan'ın Silistre kentinde doğdum. İlkokulu Varna'da ve Ortaokulu Varna Matematik Lisesi'nde bitirdim, 1989'da ailemle Türkiye'ye göç etmemiz nedeniyle, Lise 2'de aynı okuldan ayrıldım. Lise 2 ve lise 3'ü İstanbul Çemberlitaş Kız Lisesi'nde okudum ve mezun olduğum 1991 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi matematik bölümünü kazandım. 1995 yılında bölüm birincisi olarak mezun oldum ve aynı yıl İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü matematik dalında yüksek lisans programına kayıt oldum. 1999 yılında Yüksek Matematikçi unvanı ile Fen Bilimleri Enstitüsü'nden mezun oldum ve aynı dalda doktora programına devam ettim. Aralık 1995'te İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak işe başladım ve halen aynı bölümde görevimi sürdürmekteyim.