



**İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ**
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

L^3 DE MAKSİMAL RIEMANN YÜZEYLERİ

Jeta Rogova ALO
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Mehmet Erdoğan

Ocak, 2005

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Erdoğan'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Ocak, 2005

Jeta Rogova Alo

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET.....	vi
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	3
2.1. RIEMANN YÜZEYLER İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER	3
2.1.1. Kompleks Harita ve Kompleks Atlaslar	3
2.1.1.1. Kompleks Harita	3
2.1.1.2. Kompleks Atlas	5
2.1.1.3. Riemann Yüzeylerin Tanımı	6
2.1.2. Riemann Yüzeylerinin İlk Örnekleri.....	6
2.1.2.1. Riemann Yüzeylerin İnşası	6
2.1.2.2. Projektif Doğru	7
2.1.2.3. Kompleks Tor Yüzeyi	9
2.1.2.4. Holomorfik Fonksiyonların Grafiği	10
2.1.3. Fonksiyon ve Dönüşümler	11
2.1.3.1. Riemann Yüzeylerde Fonksiyonlar.....	11
2.1.3.2. Holomorfik Fonksiyonlar.....	11
2.1.3.3. Fonksiyonların Singüler Noktaları ve Meromorfik Fonksiyonlar	12
2.1.3.4. Laurent Serisi	13
2.1.3.5. Meromorfik Fonksiyonların Bir Noktasındaki Mertebesi	14
2.1.3.6. Harmonik Fonksiyonlar	14
2.1.4. Riemann Yüzeyleri Arasında Holomorfik Dönüşümler	15
2.1.4.1. Holomorfik Dönüşümün Tanımı.....	15
2.1.4.2. İzomorfizm ve Otomorfizm	15
2.1.5. Riemann Yüzeyleri Üstünde Hareket Grupları	16
2.1.5.1. Sonlu Grup Hareketi	16
2.1.5.2. Riemann Bölüm Uzayı.....	17
2.1.6. Riemann Yüzeyi Üstünde İntegral Alma	18
2.1.6.1. Holomorfik ve Meromorfik 1-Formlar	18

2.1.6.2. Formüllerle Verilen Meromorfik Fonksiyonlar ve Formların Tanımı ...	19
2.1.6.3. dz ve $d\bar{z}$ in Kullanılması.....	20
2.1.6.4. C^∞ 1-Formlar	20
2.1.6.5. (1,0) ve (0,1) Tipinden 1-Formlar	21
2.1.6.6. C^∞ 2-Formlar	21
2.1.6.7. 1-Formların Bir Fonksiyonla Çarpımı	22
2.1.6.8. Fonksiyonların Diferansiyeli.....	22
2.1.6.9. İki 1-Formun Dış Çarpımı.....	23
2.1.6.10. 1-Formların Diferansiyeli	23
2.1.6.11. Diferansiyel Formların Kotanjant Dönüşümü.....	24
2.1.6.12. İntegral Çizgileri (Paths).....	25
2.1.6.13. Yay Boyunca 1-Formların Entegrasyonu.....	25
2.1.6.14. Zincir ve Zincir Boyunca Entegrasyon	26
2.1.6.15. Meromorfik 1-Formlar İçin Rezidü (Residue).....	26
2.1.6.16. 2-Formların İntegrali.....	27
2.2. CEBİRSEL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA RIEMANN YÜZEY TANIMI	28
.....
2.3. L^3 DE ÇEMBERLER	36
2.4. L^3 DE GAUSS DÖNÜŞÜMÜ VE ORTALAMA EĞRİLİĞİ VERİLEN	
UZAYSAL YÜZEYLER.....	41
2.4.1. L^3 de Uzaysal Yüzeyle.....	41
2.4.2. Gauss Dönüşümü	45
2.4.3. Beltrami Denklemi	46
2.4.4. Weierstrass Gösterim Formülü	49
2.4.5. L^3 de Dönel ve Regle Maksimal Yüzeyle.....	59
2.5. L^3 DE MAKSİMAL RIEMANN YÜZEYLERİNİN VARLIĞI.....	61
2.5.1. Çember Parçalarından Oluşturulan Maksimal Uzaysal Yüzeyle.....	63
2.5.2. Hiperbol Parçalarından Oluşturulan Maksimal Uzaysal Yüzeyle.....	70
2.5.3. Parabol Parçalarından Oluşturulan Uzaysal Yüzeyle.....	77
2.5.4. L^3 de Maksimal Riemann Yüzeyi Üstünde Shiffman Tipindeki Fonksiyonlar	
.....	84
2.6. ÇEMBER PARÇALARINDAN OLUŞTURULAN MAKSİMAL YÜZEYLER	
.....	85
2.7. LORENTZ-MINKOVSKI UZAYINDA ÇEMBERLERDEN OLUŞTURULAN	
SABİT EĞRİLİKLİ RIEMANN YÜZEYLERİ	93
2.7.1. Sonuçların İspatı	94
2.8. L^{n+1} DE KÜRE PARÇALARINDAN OLUŞTURULAN SABİT EĞRİLİKLİ	
HİPERYÜZEYLER	99
3. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	104
KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ.....	107

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.2.1 : Kutup noktaları boyunca kürenin iki yarımküreye parçalanışı.....	32
Şekil 2.2.2: r_1 ile r_2 ve r_3 ile $+\infty$ kesimine sahip iki küre.....	33
Şekil 2.2.3: Kesikleri dairesel deliklere dönüşen iki küre.....	33
Şekil 2.2.4: Delikleri karşı karşıya getirilmiş iki küre	34
Şekil 2.2.5: İki küre ve iki tüpten oluşan yüzey	34
Şekil 2.2.6: Tor yüzeyi	34
Şekil 2.2.7: İki küre ve tüplerden oluşan yüzey	35
Şekil 2.2.8 : g kulplu küre	36
Şekil 2.4.1: Birinci türden Enneper yüzeyi	55
Şekil 2.4.2: İkinci türden Enneper yüzeyi.....	55
Şekil 2.4.3: İkinci türden Enneper yüzeyinin eşleniği	56
Şekil 2.4.4: Birinci türden katenoid	57
Şekil 2.4.5: İkinci türden katenoid	58
Şekil 2.4.6: İkinci türden helisoid	58
Şekil 2.5.1: Helisoid.....	69
Şekil 2.5.2: Katenoid.....	70
Şekil 2.5.3: Paralel zamansal düzlemler üstündeki hiperbol parçalarından oluşturulan bir maksimal yüzey parçası	75
Şekil 2.5.4: Paralel ışıksal düzlemler üstündeki parabol parçalarından oluşan bir maksimal uzaysal yüzey parçası	82

SEMBOL LİSTESİ

C	: kompleks sayılar kümesi
C^*	: sıfırdan farklı kompleks sayılar kümesi
R	: reel sayılar kümesi
Z	: tam sayılar kümesi
S^2	: R^3 de iki-boyutlu birim küre
CP^1	: projektif doğru
$[x:y]$: CP^1 de homojen koordinatlar
$O_X(W)$: $W \subseteq X$ açık kümesinde holomorfik fonksiyonların kümesi
$M_X(W)$: $W \subseteq X$ açık kümesinde meromorfik fonksiyonların kümesi
$ord_p(f)$: meromorfik f fonksiyonunun p noktasındaki mertebesi
$mult_p(f)$: holomorfik f dönüşümünün p noktasındaki katlanma sayısı
$G:X$: X üstünde G grubunun hareketi
$G \cdot p$: G hareketi altında p noktasının yörüngesi
G_p	: G hareketi altında p noktasının dengeleyeni
X/G	: G hareketi altında X in bölüm uzayı
$Rez_p(\omega)$: p noktasında ω meromorfik 1-formunun rezidüsü
L^3	: 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
R_θ	: θ açısı kadar dönme hareketi
X^*	: kotanjant dönüşümü
ω_α^β	: bağ formu
H	: yüzeyin ortalama eğriliği
K	: yüzeyin Gauss eğriliği
κ	: eğrinin eğriliği
G	: Gauss dönüşümü
Ψ	: Gauss dönüşümünün stereografik izdüşümü
Δ	: Gradient operatörü
(M, Ψ, η)	: X dönüşümünün Weierstrass gösterimi
∇	: Gradient operatörü
$Hess$: Hessian operatörü
Div	: Divergence operatörü
\times	: Minkowski vektörel dış çarpımı
\wedge	: 1-formların dış çarpımı

ÖZET

L^3 DE MAKSİMAL RIEMANN YÜZEYLERİ

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde L^3 deki maksimal Riemann yüzeyler hakkında literatürde yer alan çalışmaların genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

İkinci bölüm sekiz alt bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2.1. de Riemann yüzeyin tanımı için, kompleks analiz ve topolojiden gerekli olacak bilgiler verilmiştir. Ayrıca Riemann yüzeyi üstündeki fonksiyonlar, 1-formlar ve onların integralleri tanımlanmıştır. 2.2. de ise Riemann yüzeyleri cebirsel fonksiyonlar yardımıyla tanımlanmıştır. Bölüm 2.3. de L^3 ün tanımı verilmiş ve düzlemin uzaysal, ışıksal veya zamansal oluşuna göre L^3 de bir düzlemsel eğrinin sıfırdan farklı eğriliğe sahip olmasının ne anlama geldiği açıklanmıştır. Bölüm 2.4. de ise L^3 de ortalama eğriliği verilen uzaysal yüzeylerin Gauss dönüşümü ve Weierstrass gösterim formülü açıklanmıştır. Ayrıca bu kısımda L^3 de maksimal yüzey örnekleri ve maksimal dönel ve regle yüzeyler ile ilgili iki teorem verilmiştir.

Paralel düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulan maksimal uzaysal yüzeylerin ailesi Bölüm 2.5. de incelenerek bu kapsamda aşağıdaki teorem kanıtlanmıştır;

L^3 de maksimal uzaysal bir M yüzeyi paralel düzlemler üstündeki çember parçalarından oluşturulmuşsa, bu yüzeyin düzlemlerinin uzaysal, zamansal veya ışıksal olması halinde sırasıyla Teorem 2.5.1., Teorem 2.5.2. ve Teorem 2.5.3. de verilen yüzeylerden birisinin olacağı gösterilmiştir.

L^3 de maksimal uzaysal bir yüzey çember parçalarından oluşturulmuş ise o zaman oluşumun düzlemlerinin paralel olacağı Bölüm 2.6. da kanıtlanmıştır. L^3 de çember parçalarından oluşturulan sıfırdan farklı sabit eğrilikli yüzeyler 2.7. de çalışılmıştır. Burada oluşumun düzlemleri uzaysal ise bu düzlemlerin paralel ve o takdirde yüzeyin dönel bir yüzey olacağı kanıtlanmıştır. 2.8. de L^3 de sıfırdan farklı sabit eğrilikli yüzeyler için verilen teoremlerin benzeri L^{n+1} deki hiperyüzeyler için verilmiştir. Burada paralel uzaysal hiperdüzlemler üstündeki küre parçalarından oluşturulan M yüzeyi:

- a) $H \neq 0$ veya $H=0$ ve $n \geq 3$ ise o takdirde yüzeyin dönel bir yüzey,
- b) $H=0$ ve $n=2$ ise, o takdirde yüzeyin bir Lorentz katenoidi veya dönel olmayan bir parametrelili maksimal yüzey ailesine ait

olacağı kanıtlanmıştır.

Üçüncü bölümde ise tezle ilgili bir tartışma ile konunun genel bir değerlendirmesi verilmiştir.

SUMMARY

MAXIMAL RIEMANN SURFACES IN L^3

This study is consisted of three parts. In the first part a general evaluation of studies about Maximal Riemann Surfaces in L^3 is given.

The second part is consisted of eight sections. In Section 2.1. some informations that will be needed from topology and complex analysis are given. Moreover, in this section the functions, 1-forms and their integrals on Riemann surfaces are defined. In 2.2 is given the definition of the Riemann surface by means of the algebraic functions. In Section 2.3 the definition of L^3 and the meaning of the planar curve with nonzero mean curvature in cases the plane is spacelike, timelike or lightlike is explained. The Gauss map and the Weierstrass representation of spacelike surface with the given mean curvature is presented in Section 2.4. In this section are also given some examples of maximal surfaces and two theorems about surfaces of revolution and ruled surfaces.

The family of spacelike maximal surfaces foliated by circles in parallel planes is studied in section 2.5 and the following theorem is proved;

If M , a spacelike maximal surface in L^3 is foliated by pieces of circles in parallel planes then M is one of the surfaces described in Theorem 2.5.1, Theorem 2.5.2. and Theorem 2.5.3. according to the planes of foliation are spacelike, timelike or lightlike (respectively).

In section 2.6 is shown that if a maximal spacelike surface is foliated by pieces of circles then the planes of the foliation are actually parallel.

The surfaces with nonzero constant mean curvature foliated by pieces of circles are studied in section 2.7. It is proved that if the planes of foliation are spacelike then the planes are parallel and so the surface is a surface of revolution. The theorems similar with the ones given for the surfaces in L^3 with nonzero mean curvature, for the hypersurfaces in L^{n+1} are given in Section 2.8. If M is foliated by spheres in parallel spacelike hyperplanes then it is proved that

- a) M is a hypersurface of revolution if $H \neq 0$ or $H=0$ and $n \geq 3$
- b) If $H=0$ and $n=2$, M is the Lorentzian catenoid or M belongs to a non-rotational one-parametric family of maximal surfaces.

In the third part a general evaluation of this subject is given by a discussion about this study.

1. GİRİŞ

Riemann yüzeyi kavramı ilk kez 19. yüzyılda Bernhard Riemann tarafından tanımlanmış olup esas olarak yüzeylerin geometrisinde kompleks analizin argümanlarından daha etkin yararlanma düşüncesinden ortaya çıkmıştır. Bu durumu E^3 deki minimal yüzeyleri çalışırken açık şekilde görmekteyiz. E^3 deki minimal yüzeylere bir şekilde karşılık gelen L^3 deki maksimal yüzeyleri çalışmak için kompleks analizin holomorfik ve meromorfik fonksiyon, Cauchy-Riemann denklemleri ve kompleks çizgisel integral gibi temel kavramlarını biz de sık sık kullanacağız. E^3 de verilen bir yüzey elemanını konformal parametre ile parametrelendirirsek, eğer yüzey minimal ise ($K \neq 0$ koşulu ile) yüzeyin Gauss dönüşümü de konformal olacaktır. Üstelik konformal (izotermal) parametreler ile verilen bir yüzeyin minimal olması yüzeyi tanımlayan bileşen fonksiyonlarının harmonik olmasını gerektirir. Böylece E^3 de bir minimal yüzey, yerel olarak bir konformal parametrelendirmeye sahip olabilir ve kompleks-analitik bir dönüşümün reel kısmı olarak elde edilecek olan yüzey analitik olup Taylor serisine açılabilir. Böyle bir X yüzeyini holomorfik bir $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ve meromorfik bir $g: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu sayesinde Weierstrass gösterimi adını vereceğimiz

$$X_1(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta)(1 - g^2(\zeta)) d\zeta$$

$$X_2(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2} f(\zeta)(1 + g^2(\zeta)) d\zeta$$

$$X_3(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(\zeta)g(\zeta) d\zeta$$

şeklindeki bileşen fonksiyonlar yardımıyla yerel olarak bulabiliriz.

Karşıt olarak fg^2 holomorfik olacak şekilde verilen bir $(f(z), g(z))$ ikilisi konformal parametrelendirmiş minimal bir X yüzeyi tanımlar üstelik, eğer f sadece g 'nin kutup noktalarında sıfır oluyorsa f bir regüler yüzey olur.

1867 de Bernhard Riemann [1] yayınladığı bir makalesinde R^3 de paralel düzlemler üstünde bulunan çemberler ile tabakalanmış minimal yüzeylerin bir katenoid parçası veya literatürde Riemann merdiveni olarak adlandırılan bir tür yüzey olacağını kanıtlamıştır. 1869 da A. Enneper ise bu çemberlerin veya çember yaylarının üstünde bulunduğu düzlemlerin paralel olacaklarını göstermiştir [2]. Enneper`in kanıtında yer alan minimal yüzeyler aslında Riemann`ın verdiği örnek veya bir katenoid parçasından oluşmaktaydı. Daha sonra Riemann yüzeylerinin bazı karakterizasyonları çalışılmış ise de 1956 da M.Shiffmann`ın [3] yaptığı çalışma dikkate değerdir. Bu çalışmada Shiffmann paralel iki düzlemde bulunan iki çemberin gerdiği minimal bir döngel yüzeyin (annulus) ya bir Riemann yüzeyi parçası veya bir katenoid parçası olacağını göstermiştir. Bu konuyla ilgili tüm çalışmaların bir özeti 1990 yılında D.Hoffman`ın bir survey çalışmasında yer almıştır [4]. Riemann`dan daha önce 1785 yılında J.B.Meusnier ise E^3 de yer alan tek dönel minimal yüzeyin katenoid olduğunu kanıtlamıştı [5]. 1989 yılında J.C.C.Nitche [6] yayınladığı bir makalesinde minimal olma koşulu yerine sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip bir yüzeyin, çember yayları tarafından tabakalanmış (oluşturulmuş) ise bu çember yaylarını kapsayan düzlemlerin paralel olacağını kanıtlayarak Enneper`in sonucunu genişletmiştir. Bu sonuçlar 1991 de W.Jagy [7] tarafından keyfi boyutlara genelleştirilmiştir. Jagy, küreler tarafından tabakalanmış minimal Riemann hiperyüzeylerinin 3-boyutlu durumda olduğu gibi dönel hiperyüzeyler yani genelleştirilmiş katenoid`ler olduğunu kanıtlamıştır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. RIEMANN YÜZEYLER İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

2.1.1. Kompleks Harita ve Kompleks Atlaslar

Riemann yüzeyini tanımlarken esas düşünce onu yerel olarak kompleks düzlemde açık bir kümeye benzeyen bir uzay olarak tanımlamaktır. Bu bölümde bunu açıklayacağız.

2.1.1.1. Kompleks Harita

Verilen bir X topolojik uzayını kompleks düzlemde yerel olarak açık kümeye benzetmek için ilk önce uzayın her noktasındaki yerel koordinatları belirlememiz gerekir. Bu yerel koordinatlar ileride kompleks değişkenli fonksiyonların tanımında kullanılacaktır. Herhangi bir uzayda koordinat, o uzaydan standart uzaya (kompleks düzleme) bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.1. $U \subset X$, X topolojik uzayında ve $V \subset C$, C kompleks düzlemde açık küme olmak üzere, $\Phi : U \rightarrow V$ homeomorfizmasına bir kompleks harita (veya sadece harita) denir. U kümesine Φ 'nin tanım kümesi ve $\Phi(p) = 0$ ise Φ haritası, $p \in U$ noktasında merkezlenmiştir diyeceğiz.

Örnek 2.1.1. $X = \mathbb{R}^2$ ve U , X uzayında bir açık küme olsun

$$\Phi_U(x, y) = x + iy$$

şeklinde tanımlı $\Phi_U : U \rightarrow C^2$ dönüşümü U kümesi üstünde bir kompleks harita tanımlar.

Örnek 2.1.2. $\Phi : U \rightarrow V$, X topolojik uzayında bir kompleks harita ve $U_1 \subset U$ bir açık küme olsun $\Phi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \Phi(U_1)$, X uzayında bir kompleks harita tanımlar ve bu harita Φ haritasının bir altharitasıdır.

Örnek 2.1.3. $\Phi : U \rightarrow V$, X topolojik uzayında bir kompleks harita ve $\Psi : V \rightarrow W$ kompleks düzlemde iki açık küme arasındaki holomorfik birebir ve örten bir fonksiyon ise o takdirde $\Psi \circ \Phi : U \rightarrow W$, X uzayında bir kompleks haritadır. Φ fonksiyonu U 'ya kompleks koordinatı veren bir fonksiyon olarak düşünülürse o takdirde bu işlem bir koordinat değişimi olarak tanımlanabilir.

Tanım 2.1.2. $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ ve $\Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, X topolojik uzayında iki kompleks harita olmak üzere aşağıda verilen koşullardan biri sağlanıyorsa yani,

$$1. U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

veya

$$2. U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \quad \text{için} \quad \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_2(U_1 \cap U_2) \quad \text{dönüşümü}$$

holomorfik ise,

o takdirde Φ_1 ve Φ_2 haritaları birbiriyle uyumludur deriz. $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$, $\Phi_1(U_1 \cap U_2)$ kümesi üstünde holomorfik ise o takdirde $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$, $\Phi_2(U_1 \cap U_2)$ kümesinde holomorfik olduğu açıktır. $T = \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ fonksiyonu iki harita arasında geçiş fonksiyonudur ve birebir örtendir.

Lemma 2.1.1. İki harita arasındaki T geçiş fonksiyonunun türevi T' , T nin tanım kümesinde hiçbir zaman sıfır olamaz.

Kanıtlama: $S = T^{-1}$ olsun, $S \circ T = id \Rightarrow S(T(w)) = w$. Bu denklemden

$$S'(T(w))T'(w) = 1$$

bulunur ve buradan $T'(w) \neq 0$ dır.

T , Φ ve Ψ haritalarının ortak tanım kümesinde bir p noktasındaki geçiş fonksiyonu, $z = \Phi(x)$ ve $w = \Psi(x)$ yerel koordinatlar olsun. $z_0 = \Phi(p)$ ve $w_0 = \Psi(p)$ ise, o zaman $T = \Phi \circ \Psi^{-1}$ bir kuvvet serisi olarak yazılabilir, yani

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n, \quad a_1 \neq 0$$

Örnek 2.1.4. S^2 , R^3 de iki boyutlu birim küre olsun

$$S^2 = \{(x, y, w) \in R^3 : x^2 + y^2 + w^2 = 1\}.$$

$w=0$ düzlemini, $z=x+iy$ ile $(x,y,0) \in R^3$ noktasını eşleyen düzlem olarak düşünelim.

$\Phi_1 : S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow C$ dönüşümünü $(0,0,1)$ noktası için tanımlı izdüşüm fonksiyonu olarak tanımlayalım:

$$\Phi_1(x, y, w) = \frac{x}{1-w} + i \frac{y}{1-w}.$$

Φ_1 in tersi,

$$\Phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

şeklindedir. $\Phi_2 : S^2 - \{(0,0,-1)\} \rightarrow C$ dönüşümünü $(0,0,-1)$ noktası için tanımlı izdüşüm fonksiyonu olarak tanımlayalım:

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{x}{1+w} - i \frac{y}{1+w}.$$

Φ_2 'nin tersi ise

$$\Phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, -\frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} \right)$$

şeklindedir. Bu iki haritanın ortak tanım kümesi, $S^2 - \{(0,0,\pm 1)\}$ dir ve $\Phi_1, \Phi_2, C^* = C - \{0\}$ kümesi üstünde birebir ve örtendir, ayrıca

$$(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1})(z) = \frac{1}{z}$$

dönüşümü holomorftir, bu ise iki haritanın birbiriyle uyumlu olduğunu gösterir.

2.1.1.2. Kompleks Atlas

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere kürenin her noktası iki kompleks haritadan en az birinde yer alır. Böylece kürenin her noktasında tanımlı bir kompleks koordinat sistemi bulunabilir. X 'i yerel olarak bir kompleks düzlem olarak göstermek için birbiriyle

uyumlu olacak şekilde X 'in her noktasında kompleks bir haritaya sahip olması gerekir ki bu kompleks atlası tanımlar.

Tanım 2.1.3. Birbiriyle uyumlu ve tanım kümeleri X 'i örtecek şekilde ($X = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$) Φ_{α} kompleks haritalarının $\mathcal{A} = \{ \Phi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha} \}$ kümesine, kompleks atlas denir.

Tanım 2.1.4. \mathcal{A} ve \mathcal{B} atlaslarının haritaları birbiriyle karşılıklı olarak ikişer-ikişer uyumlu iseler o takdirde \mathcal{A} ve \mathcal{B} atlaslarına eşdeğerdir denir.

Tanım 2.1.5. X in kompleks atlaslarının eşdeğerlik sınıflarının her birine X de bir kompleks yapı denir.

2.1.1.3. Riemann Yüzeylerin Tanımı

Tanım 2.1.6. Hausdorff, ikinci sayılabilir X topolojik uzayı kompleks yapı ile birlikte bir Riemann yüzeyidir.

Bu tanımdan Riemann yüzeyin aslında kompleks boyutu bir olan kompleks bir manifold olduğu açıktır.

Örnek 2.1.5. X , topolojik olarak R^2 gibi görünen C kümesi olsun. Bu uzay, Örnek 2.1.1. deki atlasan indirgenmiş kompleks yapı ile birlikte bir Riemann yüzeyidir. Bu Riemann yüzeyine kompleks düzlem denir.

Örnek 2.1.6. 2-boyutlu X küresi, Örnek 2.1.2. deki iki haritadan oluşan atlasan indirgenmiş kompleks yapı ile birlikte bir Riemann yüzeyidir. Bu yüzeye Riemann küresi denir.

2.1.2. Riemann Yüzeylerinin İlk Örnekleri

2.1.2.1. Riemann Yüzeylerin İnşası

Riemann yüzeyi tanımlamak için ilk önce ikinci sayılabilir, bağlantılı bir Hausdorff uzayında bir kompleks atlas tanımlanır. Yani, önce topoloji ondan sonra kompleks yapı tanımlanır. Bazen de atlası tanımlayan verileri kullanarak topoloji de tanımlanabilir.

Bu tanımlama şuna dayanır: X topolojik uzayının bir açık örtülüğü $\{U_{\alpha}\}$ olsun, $U \subseteq X$ altkümesinin açık olması için gerek ve yeter koşul (gyk) $U \cap U_{\alpha}$ 'nin U_{α} 'da açık olmasıdır. Daha genel olarak, X 'in altkümelerinin herhangi bir $\{U_{\alpha}\}$ kümesindeki her U_{α} bir topolojiye sahip ise o takdirde X 'de bir topoloji şu şekilde tanımlanabilir: $U \subseteq X$ 'nin açık olması için gyk $U \cap U_{\alpha}$ 'nin U_{α} 'da açık olmasıdır.

$\{U_\alpha\}$, X 'i örten altkümelerin kümesi ve $\Phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, $V_\alpha \subseteq C$ açık küme olmak üzere, birebir ve örten fonksiyonların kümesi olsun. $V_\alpha \subseteq C$, C 'nin altkümesi olarak bir topolojiye sahiptir ve Φ_α 'yı kullanarak bu topolojiyi U_α 'lara şu şekilde taşıyabiliriz: $U \subseteq U_\alpha$ 'nın açık olması için gerek $\Phi_\alpha(U) \subseteq V_\alpha$ 'nın V_α 'da (veya C 'de) açık olmasıdır.

Şimdi de bu topolojiyi tüm X 'de şu şekilde tanımlayabiliriz: $U \subseteq X$ nun açık olması için gerek $U \cap U_\alpha$ 'nın, U_α 'da açık olmasıdır.

Yukarıda ki tanımlamaya göre, U_α 'nın X 'de açık olması için gerek her α ve β için $U_\alpha \cap U_\beta$ 'nin açık olmasıdır. U_α 'larda tanımlanan topolojiye göre bu koşul $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 'nin V_α 'da (veya C 'de) açık olması ile eşdeğerdir.

Böylece Riemann yüzeyleri tanımlamak için aşağıdaki sıra izlenir:

- X kümesi tanımlanır,
- X 'i örten $\{U_\alpha\}$ sayılabilir altkümelerin kümesi bulunur,
- Her α için V_α , C 'de açık olacak şekilde birebir örten $\Phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ fonksiyonları bulunur,
- Her α ve β için $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 'nin V_α 'da açık olup olmadığı kontrol edilir,

Bu noktada, daha önceki verilere göre U_α açık kümeleri ile bir topoloji tanımlanmıştır ve Φ_α da X üstünde bir kompleks haritadır.

- Φ_α , kompleks haritalarının birbiriyle uyumlu olup olmadığı kontrol edilir,
- X 'in bağlantılı ve Hausdorff olup olmadığı kontrol edilir.

2.1.2.2. Projektif Doğru

C^2 nin 1-boyutlu altuzaylarının kümesi, kompleks projektif doğru olarak tanımlanır ve CP^1 ile gösterilir. Sıfırdan farklı $(z,w) \in C^2$ vektörünün geldiği 1-boyutlu altuzay CP^1 de bir noktadır ve $[z:w]$ şeklinde gösterilir. Görüldüğü gibi CP^1 in her noktası ikisi aynı anda sıfır olmamak koşuluyla $[z:w]$ ile verilir. Üstelik

$$[z:w] = [\lambda z : \lambda w], \text{ her } \lambda \in \mathbb{C}^*, \lambda \neq 0, \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Böylece CP^1 kümesini tanımladık, şimdi de CP^1 i örten altkümelerin kümesini bulalım.

$$U_0 = \{[z:w] \mid z \neq 0\} \text{ ve } U_1 = \{[z:w] \mid w \neq 0\}$$

için $CP^1 = U_0 \cup U_1$ dir.

Birebir örten Φ_α fonksiyonlarını tanımlayalım;

$$\Phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi_0[z:w] = \frac{w}{z}, z \neq 0,$$

$$\Phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}, \Phi_1[z:w] = \frac{z}{w}, w \neq 0.$$

Böylece, $\Phi_i(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ ile X 'de bir topoloji tanımlanmış olur ve Φ_i 'ler kompleks haritadır. $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : s \rightarrow \frac{1}{s}$, $s \in U_0 \cap U_1$ olduğundan $s \neq 0$ dolayısıyla $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$ holomorftir, bu bize Φ_0 ve Φ_1 haritalarının birbiriyle uyumlu olduğunu gösterir ve bir kompleks yapı belirler.

U_0 ve U_1 bağlantılı ve $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ olduğundan $U_0 \cup U_1 = CP^1$ bağlantılıdır. Şimdi de CP^1 in Hausdorff olduğunu gösterelim: $p, q \in CP^1$ olsun. p ve q ikisi birden U_0 veya U_1 'de ise, U_0 ve U_1 Hausdorff olduğu için ayrık iki açık küme ile ayrılabilirler. Onun için $p \in U_0 \setminus U_1$ ve $q \in U_1 \setminus U_0$ alalım, $p = [1:0]$ ve $q = [0:1]$ olarak yazılabilir. $\Phi_0(p) = 0$, $\Phi_1(q) = 0$ ve $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$, \mathbb{C} 'de açık birim disk için, $\Phi_0^{-1}(D) \cap \Phi_1^{-1}(D) = \emptyset$ dir, eğer $x \in \Phi_0^{-1}(D) \cap \Phi_1^{-1}(D)$ olsaydı $\Phi_0(x) \in D$ ve $\Phi_1(x) \in D$ olması gerekirdi ki bu olamaz çünkü;

$$\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : \Phi_0(x) \rightarrow \Phi_1(x)$$

$$\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : \Phi_0(x) \rightarrow \frac{1}{\Phi_0(x)} \notin D.$$

2.1.2.3. Kompleks Tor Yüzeyi

ω_1 ve ω_2 , R üstünde lineer bağımsız iki kompleks sayı olsun. L kümesini

$$L = Z\omega_1 + Z\omega_2 = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in Z\}$$

olarak tanımlayalım. L kümesi toplamsal C grubunun alt grubudur.

$X = C/L$ bölüm grubu ve $\pi: C \rightarrow X$ izdüşüm olsun. X 'de bölüm topolojisi π aracılığıyla şu şekilde oluşturulur: $U \subset X$ açık olması için gerek $\pi^{-1}(U)$ 'nin C 'de açık olmasıdır. Bu tanım π 'yi sürekli yapar ve C bağlantılı olduğundan X de bağlantılıdır.

X 'deki her açık küme C 'deki bir açık kümenin görüntüsüdür, çünkü $U = \pi(\pi^{-1}(U))$.

Üstelik, π dönüşümü açıktır. Gerçekten, $V \subset C$ açık kümesinin görüntüsü $\pi(V)$ 'nin açık olduğunu göstermek için $\pi^{-1}(\pi(V)) \subset C$ 'nin açık olduğunu göstermeliyiz. Fakat

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in L} (\omega + V),$$

V açık kümelerinin ötelemelerinin bileşimidir, dolayısıyla

açıktır.

$L \subset C$ diskret altküme olduğundan herhangi bir sıfırdan farklı $\omega \in L$ için $|\omega| > 2\xi$ olacak şekilde pozitif bir $\xi \in C$ bulunabilir. Bu ξ 'u sabitleyelim ve $z_0 \in C$ noktasını alalım.

$D = D(z_0, \xi)$, z_0 merkezli ve ξ yarıçaplı bir disk olsun. Bu şekilde seçtiğimiz ξ ,

$D = D(z_0, \xi)$ 'un herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın L 'nin herhangi bir elemanından küçük olmasını sağlar, yani $(z_1, z_2) \in D$ için $|z_1 - z_2| < 2\xi < |\omega|$.

Herhangi z_0 ve ξ için $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\pi|_D$ üzerine, sürekli ve açıktır, çünkü π öyledir. Birebir olduğu ise ξ 'un seçiminden açıktır. Bu da $\pi|_D$ 'nin bir homeomorfizma olduğunu gösterir.

Şimdi X 'de bir kompleks atlas tanımlamak durumundayız. ξ 'u yukarıda ki gibi seçelim.

Her $z_0 \in C$ için $D_{z_0} = D(z_0, \xi)$ alalım ve $\Phi_{z_0} : \pi(D_{z_0}) \rightarrow D_{z_0}$, $\pi|_{D_{z_0}}$ dönüşümünün tersi olsun. Bu şekilde tanımlanan Φ 'ler X 'de haritadır ve şimdi bu haritaların birbiriyle

uyumlu olduğunu gösterelim. z_1 ve z_2 iki nokta, $\Phi_1 = \Phi_{z_1} : \pi(D_{z_1}) \rightarrow D_{z_1}$, $\Phi_2 = \Phi_{z_2} : \pi(D_{z_2}) \rightarrow D_{z_2}$ ve $U = \pi(D_{z_1}) \cap \pi(D_{z_2})$ olsun. $U = \emptyset$ ise haritalar uyumludur. $U \neq \emptyset$ ve $z \in \Phi_1(U)$ için $T(z) = \Phi_2(\Phi_1^{-1}(z)) = \Phi_2(\pi(z))$ olsun. T dönüşümünün $\Phi_1(U)$ 'da holomorfik olduğunu göstereceğiz:

Her $z \in \Phi_1(U)$ için $\pi(T(z)) = \pi(z) \Rightarrow T(z) + L = z + L \Rightarrow T(z) - z = \omega(z) \in L$ dir. $\omega : \Phi_1(U) \rightarrow L$ fonksiyonu süreklidir ve L diskret olduğundan, ω , U 'nun bağlantılı parçaları üstünde sabittir, böylece sabit bir $\omega \in L$ için $T(z) = z + \omega$ dir ve bundan dolayı holomorfiktir. Bu ise Φ_1 ve Φ_2 haritalarının uyumlu olduğunu gösterir. Böylece $\{\Phi_z | z \in C\}$, X 'de bir kompleks atlas tanımlar.

Şimdi de X 'in Hausdorff olduğunu gösterelim. $\pi|_D$ dönüşümü homeomorfizma ve $D(z, \xi)$ Hausdorff olduğundan $\pi(D)$ de Hausdorffdur. $p, q \in X$ olsun, p ve q ikisi birden $\pi(D_{z_i})$ 'de ise $i=1,2$, $\pi(D_{z_i})$ Hausdorff olduğundan ayrık iki açık küme ile ayrılabilirler. Onun için $p \in \pi(D_{z_1}) \setminus \pi(D_{z_2})$, $q \in \pi(D_{z_2}) \setminus \pi(D_{z_1})$ ve $\Phi_1(p) = \Phi_2(q) = 0$ alalım. $0 \in D = D(0, \xi) \subset C$, C 'de açık birim disk için $\Phi_1^{-1}(D) \cap \Phi_2^{-1}(D) = \emptyset$ dir. Çünkü $x \in \Phi_1^{-1}(D) \cap \Phi_2^{-1}(D)$ olsaydı $\Phi_1(x) \in D$ ve $\Phi_2(x) \in D$ olması gerekirdi ki bu olamaz çünkü;

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : \Phi_1(x) \rightarrow \Phi_2(x)$$

$$\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} : \Phi_1(x) \rightarrow \Phi_1 + \omega \notin D$$

2.1.2.4. Holomorfik Fonksiyonların Grafiği

$V \subset C$, kompleks düzlemin bağlantılı açık altkümesinde tanımlı holomorfik bir g fonksiyonunun grafiği

$$X = \{(z, g(z)) : z \in V\} \subseteq C^2$$

ile verilir. X 'i altuzay topolojisi ile donatalım. $\pi : X \rightarrow V$ izdüşüm olsun. π homeomorfizmadır ve onun tersi $\pi^{-1} : z \rightarrow (z, g(z))$ dir. Böylece π , tanım kümesi X 'i

örten bir kompleks haritadır. Bu şekilde X 'de tek bir haritadan oluşan kompleks atlas bulunur ve bu X 'e Riemann yüzeyi yapısını verir.

Bu örnek, X , C^{n+1} 'de grafik olarak alınırsa, V 'de tanımlı sonlu sayıda g_1, g_2, \dots, g_n holomorfik fonksiyonlar ile

$$X = \{(z, g_1(z), g_2(z), \dots, g_n(z)) \mid z \in V\}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

2.1.3. Fonksiyon ve Dönüşümler

2.1.3.1. Riemann Yüzeylerde Fonksiyonlar

X Riemann yüzeyi için, $p \in X$ olmak üzere f , p 'nin bir komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. Kompleks haritalar yardımıyla bu fonksiyonun özelliklerini (örneğin holomorf oluşunu) C 'nin bir noktasının bir komşuluğunda tespit edebiliriz. Yalnız bunu yaparken, fonksiyonun özelliklerinin koordinat değişimine bağlı olmadığına dikkat etmemiz gerekir.

2.1.3.2. Holomorfik Fonksiyonlar

X Riemann yüzeyi, $p \in X$ ve f , $p \in W \subset X$ noktasının W komşuluğunda tanımlanan kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.1.7. $p \in U$ noktası civarında $f \circ \Phi^{-1}$, $\Phi(p)$ 'de holomorfik olacak şekilde, yerel olarak bir $\Phi: U \rightarrow V$ haritası bulunabiliyor ise o zaman f fonksiyonu p noktasında holomorfiktir denir. Eğer f fonksiyonu, W 'nin her noktasında holomorfik ise f , W üstünde holomorfiktir denir.

Lemma 2.1.2. X Riemann yüzeyi, $p \in X$ ve f , $p \in W \subset X$ noktasının W komşuluğunda tanımlanan, kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a) f fonksiyonunun p noktasında holomorfik olması için gerek her $\Phi: U \rightarrow V$, $p \in U$, kompleks haritası için $f \circ \Phi^{-1}$ fonksiyonunun $\Phi(p)$ noktasında holomorfik olmasıdır.

- b) f fonksiyonunun W 'de holomorfik olması için gerek $W \subseteq \cup_i U_i$ olmak üzere her i için $\Phi_i(W \cap U_i)$ 'de tanımlı $f \circ \Phi_i^{-1}$ 'ler holomorfik olacak şekilde bir $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ harita kümesinin bulunabilmesidir.
- c) f , p noktasında holomorfik ise f , p noktasının bir komşuluğunda da holomorftur.

Tanım 2.1.8. Riemann yüzeyin $W \subset X$ altkümesi için, holomorfik fonksiyonların kümesi $O_X(W)$ olarak yazılır, yani

$$O_X(W) = O(W) = \{f : W \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfik}\}$$

dır ve $O(W)$, \mathbb{C} üstünde bir cebirdir.

2.1.3.3. Fonksiyonların Singüler Noktaları ve Meromorfik Fonksiyonlar

X Riemann yüzeyi, $p \in X$ ve f , $p \in W \subset X$ noktasının delinmiş bir $(U \setminus \{p\})$ komşuluğu üstünde tanımlanan kompleks değerli holomorfik bir fonksiyon olsun. Tek değişkenli fonksiyonlar için singüler nokta (kaldırılabilir, kutup, asıl) kavramı Riemann yüzeyindeki fonksiyonlara da genişletilebilir.

Tanım 2.1.9. f , $p \in W \subset X$ noktasının delinmiş bir $(U \setminus \{p\})$ komşuluğu üstünde tanımlanan kompleks değerli holomorfik bir fonksiyon olsun.

- a) f 'nin p noktasında kaldırılabilir bir singüleritesi olması için gerek $p \in U$ için $f \circ \Phi^{-1}$ in $\Phi(p)$ noktasında bir singüler noktası olacak şekilde bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritasının bulunabilmesidir.
- b) f 'nin p noktasında bir kutup noktası olması için gerek $p \in U$ için $f \circ \Phi^{-1}$ in $\Phi(p)$ noktasında bir kutup noktası olacak şekilde bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritasının bulunabilmesidir.
- c) f 'nin p noktasında bir asıl singüler noktası olması için gerek $p \in U$ için $f \circ \Phi^{-1}$ in $\Phi(p)$ noktasında bir asıl singüler noktası olacak şekilde bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritasının bulunabilmesidir.

Lemma 2.1.3. Üstteki verilere göre f fonksiyonun kaldırılabilir, kutup veya asıl singüler noktası olması için gerek $p \in U$ olmak üzere, herhangi bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritası için $f \circ \Phi^{-1}$ in $\Phi(p)$ noktasında sırasıyla kaldırılabilir, kutup veya asıl singüler noktası olmasıdır.

$p \in W \subset X$ noktasının delinmiş bir $(U \setminus \{p\})$ komşuluğu üstünde tanımlanan kompleks değerli holomorfik bir f fonksiyonunun p 'de bir singüleriteye sahip olması için p 'nin bir komşuluğunda yer alan bir x noktası için $f(x)$ 'in davranışı araştırılır.

a) $|f(x)|$, p 'nin bir komşuluğunda sınırlı ise, f 'nin p noktasında kaldırılabilir singüleritesi vardır. Üstelik $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ mevcut ve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ ise f , p 'de holomorfik olur.

b) $x \rightarrow p, |f(x)| \rightarrow \infty$ ise p, f 'nin bir kutup noktasıdır.

c) $x \rightarrow p, |f(x)|$ limiti bulunamıyorsa p, f 'nin bir asıl singüler noktasıdır.

Tanım 2.1.10. f fonksiyonu bir $p \in X$ noktasında holomorfik ve p, f 'nin kaldırılabilir singüler noktası veya kutup noktası ise o takdirde f fonksiyonu p noktasının civarında bir meromorfik fonksiyondur denir.

Tanım 2.1.11. X Riemann yüzeyinin $W \subset X$ altkümesi için, meromorfik fonksiyonların kümesi $M_X(W)$ olarak yazılır, yani

$$M_X(W) = \{f : W \rightarrow C \mid f \text{ meromorfik}\}$$

dır ve $M_X(W), C$ üstünde bir cebirdir.

2.1.3.4. Laurent Serisi

$f, p \in X$ noktasının delinmiş bir komşuluğunda tanımlı bir holomorfik fonksiyon olsun. $\Phi : U \rightarrow V, X$ 'de p noktasının bir U komşuluğunda bir harita olsun. p noktası civarında bir x için, $z = \Phi(x)$ olmak üzere z 'yi X üstünde yerel bir koordinat olarak düşünebiliriz. Böylece, $z_0 = \Phi(p)$ noktasının bir komşuluğunda $f \circ \Phi^{-1}$ fonksiyonu holomorfiktir dolayısıyla z_0 'in civarında bir Laurent serisine açılabilir:

$$f(\Phi^{-1}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

Burada,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\Phi^{-1}(z))}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\Phi^{-1}(z))}{(z-z_0)^{-n+1}} dz$$

Buna da Φ 'ye göre (veya z yerel koordinatına göre) p 'nin bir komşuluğunda f fonksiyonunun Laurent serisi denilir. $\{a_n\}, \{b_n\}$ katsayılarına Laurent katsayıları denilir.

2.1.3.5. Meromorfik Fonksiyonların Bir Noktasındaki Mertebesi

Tanım 2.1.12. Laurent serisi $\sum_n c_n (z-z_0)^n$ şeklinde olan ve p noktasında meromorfik bir fonksiyon f olsun. p noktasında, $ord_p(f)$ ile gösterilen f 'nin mertebesi (order) Laurent serisinin en küçük üssü olarak tanımlanır, yani

$$ord_f = \min \{n | c_n \neq 0\}$$

Lemma 2.1.4. f , p noktasında meromorfik bir fonksiyon olsun. O takdirde f 'nin, p noktasında holomorfik olması için gerek $ord_p(f) \geq 0$ olmasıdır. Bu durumda $f(p) = 0$ olması için gerek $ord_p(f) > 0$ olmasıdır. p noktasının f 'nin bir kutup noktası olması için gerek $ord_p(f) < 0$ olmasıdır. f 'nin sıfır ve kutup noktası olmaması için gerek ise $ord_p(f) = 0$ olmasıdır.

2.1.3.6. Harmonik Fonksiyonlar

$z=x+iy$ kompleks değişkenli, reel değerli, z_0 noktasında x ve y değişkenlerine göre her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyona, z_0 noktasında C^∞ -sınıfından bir fonksiyon denir. Kompleks değerli, z değişkenli fonksiyonun reel ve sanal kısımları C^∞ ise o takdirde bu fonksiyon C^∞ dur deriz. Bu kavramı Riemann yüzeyine haritalar yardımıyla şu şekilde taşıyabiliriz: X Riemann yüzeyi üstünde tanımlı f fonksiyonu için, $p \in U$ olmak üzere $f \circ \Phi^{-1}$ fonksiyonu $\Phi(p)$ noktasında C^∞ olacak şekilde bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritası bulunabiliyorsa o takdirde, f fonksiyonu p noktasında C^∞ dur diyeceğiz.

Tanım 2.1.13. x, y reel değişkenli, reel değerli C^∞ $h(x,y)$ fonksiyonu, $V \subset R^2$ de

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

koşulunu sağlıyorsa $h(x,y)$ 'ye V üstünde harmoniktir denir. Kompleks değerli fonksiyonun reel ve sanal kısımları harmonik ise o fonksiyona harmoniktir denir. Holomorfik fonksiyonlar harmoniktir [8].

Fonksiyonların harmonik olma özelliği X Riemann yüzeyine harita aracılığı ile taşınabilir:

Tanım 2.1.14. Eğer $h \circ \Phi^{-1}$, $\Phi(p)$ noktasının bir komşuluğunda harmonik olacak şekilde, $p \in U$ olmak üzere bir $\Phi : U \rightarrow V$ haritası bulunuyorsa o takdirde C^∞ h fonksiyonuna $p \in X$ noktasında harmoniktir denir.

2.1.4. Riemann Yüzeyleri Arasında Holomorfik Dönüşümler

2.1.4.1. Holomorfik Dönüşümün Tanımı

X ve Y Riemann yüzeyleri olsun.

Tanım 2.1.15. $F : X \rightarrow Y$ dönüşümünün $p \in X$ noktasında holomorfik olması için gerek $\Phi_2 \circ F \circ \Phi_1^{-1}$ fonksiyonun $\Phi_1(p)$ 'de holomorfik olacak şekilde, $p \in U_1$ ve $F(p) \in U_2$ olmak üzere, X üstünde $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ ve Y üstünde $\Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ haritalarının bulunabilmesidir.

$W \subset X$ de tanımlı olan F fonksiyonu W 'nin her noktasında holomorfik ise o zaman F W 'de holomorfiktir diyeceğiz.

2.1.4.2. İzomorfizm ve Otomorfizm

Tanım 2.1.16. İki Riemann yüzeyi arasında birebir, örten ve holomorfik bir $F : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun tersi $F^{-1} : Y \rightarrow X$ holomorfik dönüşüm ise F 'ye bir izomorfizm denir. $F : X \rightarrow X$ izomorfizmasına bir otomorfizm denir. X ve Y yüzeyleri arasında bir izomorfizma bulunabiliyorsa X ve Y yüzeyleri izomorfiktir (veya biholomorfik) diyeceğiz.

Önerme 2.1.1. (Yerel normal form): $F : X \rightarrow Y$, $p \in X$ 'de tanımlanan ve sabit olmayan bir holomorfik dönüşüm olsun. $F(p)$ 'de merkezlenen, Y 'de her $\Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ haritası için $\Phi_2(F(\Phi_1^{-1}(z))) = z^m$ olacak şekilde $p \in X$ 'de merkezlenen bir $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ haritası bulunabilir. Üstelik bu özelliği sağlayan bir tek $m \geq 1$ tamsayısı vardır.

Tanım 2.1.17. p ve $F(p)$ etrafında, yerel koordinat üstünde F fonksiyonu $z \rightarrow z^m$ formunda olmak üzere, m sayısına F 'nin p noktasındaki katlanma sayısı (multiplicity) denir ve $mult_p(F)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.18. Sabit olmayan $F : X \rightarrow Y$ holomorfik dönüşümü için $p \in X$ noktasında $\text{mult}_p(F) \geq 2$ ise p noktasına F için dallanma (ramification) noktası ve onun görüntüsü olan $y = F(p) \in Y$ noktasına da branş (branch) noktası denir.

Böylece, holomorfik bir dönüşüm için dallanma ve branş noktaları sırasıyla tanım kümesi ve görüntü kümesinde diskret altküme oluştururlar.

2.1.5. Riemann Yüzeyleri Üstünde Hareket Grupları

Riemann yüzeylerin inşası için temel yöntem, bilinen Riemann yüzeyleri üstündeki hareket grubu aracılığıyla yeni Riemann yüzeylerinin tanımlanmasıdır.

2.1.5.1. Sonlu Grup Hareketi

G sonlu bir grup ve X bir Riemann yüzeyi olsun. X üstünde G 'nin hareketi aşağıdaki koşulları sağlayan:

$$a) g, h \in G \text{ ve } p \in X \text{ için } (gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p),$$

$$b) e = id, e \in G \text{ ve } p \in X \text{ için } e \cdot p = p$$

$G \times X \rightarrow X, (g, p) \rightarrow g \cdot p$ dönüşümüdür.

Buna X üstünde G 'nin sol hareketi denir ve G 'nin X üstündeki hareketi $G \cdot X$ ile gösterilir. $g \in G$ 'yi sabit tutarsak g 'yi $g \cdot p$ 'ye tekabül ettiren dönüşüm birebir ve örten olur ve tersi p 'yi, $g^{-1} \cdot p$ 'ye götürür. $p \in X$ 'in yörüngesi $G \cdot p = \{g \cdot p | g \in G\}$ kümesidir. Herhangi bir $A \subset X$ altkümesi için A daki noktaların yörüngesi $G \cdot A$ ile gösterilir, yani:

$$G \cdot A = \{g \cdot a | g \in G, a \in A\}$$

dır. $p \in X$ noktasının dengeleyeni $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$ altkümesidir. Dengeleyene çoğu zaman da p 'nin izotropi altkümesi denir. Aynı yörüngeye ait olan noktaların dengeleyenleri biri birinin eşleniğidir.

$$G_{g \cdot p} = g \cdot G_p \cdot g^{-1}.$$

X 'de G hareketinin çekirdeği $K = \{g \in G | g \cdot p = p, \forall p \in X\}$ ile verilir ve bu tüm dengeleyen altgrupların arakesitidir. G 'nin çekirdeği, G 'nin normal bir alt grubudur. G

hareketi ile özdeş yörüngesi olan ve trivial çekirdeğe sahip G/K bölüm grubu, X üstünde bir harekettir. Bunun için genellikle çekirdeğin trivial olduğunu düşünebiliriz; buna etkin (efektif) hareket denir. Her $g \in G$ için p 'yi $g \cdot p$ 'ye götüren X 'den X 'e birebir ve örten dönüşüm sürekli veya holomorfik ise hareket de sırasıyla sürekli veya holomorfiktir. Holomorfik ise o zaman bu, X 'in bir otomorfizması olacaktır.

X/G bölüm uzayı yörüngelerin kümesidir ve noktayı kendi yörüngesine götüren doğal bir $\pi: X \rightarrow X/G$ bölüm dönüşümü vardır. X/G 'yi aşağıdaki şekilde bir bölüm topolojisi ile donatabiliriz: $U \subset X/G$ 'nin açık olması için $g \in \pi^{-1}(U)$ 'nin X 'de açık olmasıdır. Açık küme tanımından π dönüşümünün sürekli olduğu açıktır, ayrıca hareket sürekli ve özellikle de holomorfik ise bölüm dönüşümü açıktır. Amacımız π bölüm dönüşümü holomorfik olacak şekilde X/G 'de bir kompleks yapı bulmaktır.

2.1.5.2. Riemann Bölüm Uzayı

X/G bölüm uzayının bir kompleks yapıya sahip olması için, bir kompleks haritaya sahip olması gerekir.

Önerme 2.1.2. X Riemann yüzeyi üstündeki hareketi etkin ve holomorfik olan bir grup G olsun. $p \in X$ 'i sabitleyelim. Aşağıdaki koşulları sağlayan p 'nin bir U komşuluğu bulunabilir :

- U , G_p dengeleyen grubu altında değişmezdir, yani $\forall g \in G_p$ ve $u \in U$ için $g \cdot u \in U$ dir.
- $\forall g \notin G_p$ için $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$.
- U 'nin her noktasını kendi yörüngesine götüren $\alpha: U/G_p \rightarrow X/G$ doğal dönüşümü, X/G açık kümesi üzerine bir homeomorfizmadır.
- G_p 'nin p dışında hiçbir elemanı U 'nin hiçbir noktasını sabitlemez.

Bu önerme X/G 'de kompleks haritaları bulmak için yol gösterir. Bunun için U/G_p 'de bir harita bulunur ve ondan sonra bu harita α aracılığıyla X/G 'ye transfer edilir.

$\bar{p} \in X/G$ alalım ve \bar{p} 'nin, $p \in X$ 'in yörüngesi olduğunu düşünelim. $|G_p|=1$ yani dengeleyenin trivial olduğunu düşünelim. Önerme 2.1.2 den $\pi|_U : U \rightarrow W \subset X/G$, \bar{p} 'nin W komşuluğu üstünde bir homeomorfizma tanımlı olacak şekilde p 'nin bir U komşuluğu bulunabilir. Gerekirse daraltılarak U, X 'de $\Phi : U \rightarrow V$ haritasının tanım kümesi olarak düşünülebilir. $\Psi = \Phi \circ (\pi|_U)^{-1} : W \rightarrow V$ dönüşümü, Φ ve $\pi|_U$ homeomorfizma olduğundan, X/G 'de bir haritadır.

Teorem 2.1.1. X Riemann yüzeyi üstündeki hareketi etkin ve holomorfik olan bir grup G olsun. Yukarıda verilen harita yardımıyla X/G nin bir Riemann yüzeyi olduğu görülür.

2.1.6. Riemann Yüzeyi Üstünde İntegral Alma

2.1.6.1. Holomorfik ve Meromorfik 1-Formlar

Tanım 2.1.19. $V \subset C$ üstünde, holomorfik (meromorfik) 1-form, f holomorfik (meromorfik) fonksiyon olmak üzere

$$\omega = f(z)dz$$

şeklinde verilir ve ω 'ya, z koordinatlı holomorfik (meromorfik) 1-form denilir.

Holomorfik (meromorfik) 1-formları kompleks harita aracılığıyla Riemann yüzeyine taşıyabiliriz.

Tanım 2.1.20. $\omega_1 = f(z)dz$, V_1 açık kümesi üstünde tanımlanan z koordinatlı holomorfik (meromorfik) 1-form, $\omega_2 = g(w)dw$, V_2 açık kümesi üstünde tanımlanan w koordinatlı holomorfik (meromorfik) 1-form ve $T : V_1 \rightarrow V_2$ $z=T(w)$ şeklinde bir holomorfik (meromorfik) dönüşüm olsun. $g(w) = f(T(w))T'(w)$ ise o zaman ω_1 , T altında ω_2 'ye resmedilir.

Bu tanım $dz = T'(w)dw$ olmak üzere $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ ye resmedilecek şekilde verilmiştir.

T terslenebilir ise ve S onun tersi ise, o zaman ω_1 in T altında ω_2 'ye dönüşmesi için ω_2 'nin S altında ω_1 'e dönüşmesidir.

Tanım 2.1.21. U_i, V_i ($i=1,2$) sırasıyla bir X Riemann yüzeyi üstünde ve \mathbb{C} 'de açık kümeler olsun. ω_{ϕ_i} 1-formu, $T=\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ koordinat değişimi altında ω_{ϕ_2} 'ye resmedilecek şekilde $\Phi_i : U_i \rightarrow V_i$ haritalarının tanım kümeleri ortak bir arakesite sahip iseler, o takdirde her $\Phi : U \rightarrow V$ haritası için, $\{\omega_\Phi\}$ holomorfik (meromorfik) 1-formların kümesi, X üstünde bir 1-formdur.

Lemma 2.1.5. [9] X bir Riemann yüzeyi ve \mathcal{A} X 'de bir kompleks atlas olsun. \mathcal{A} 'nın her haritasının ortak tanım kümelerinde birbirlerine dönüşen holomorfik (meromorfik) 1-formlar verilsin. Bu holomorfik (meromorfik) 1-formları, \mathcal{A} 'nın herhangi bir haritasına genişleten tek bir holomorfik (meromorfik) 1-form vardır.

Tanım 2.1.22. p noktasında, $\omega = f(z)dz$ şeklinde verilen 1-formun mertebesi (order) sıfır noktasındaki f fonksiyonunun mertebesidir ve $ord_p(\omega)$ şeklinde gösterilir.

Meromorfik ω 1-formunun, p noktasında holomorfik olması için gerek $ord_p(\omega) \geq 0$ olmasıdır.

2.1.6.2. Formüllerle Verilen Meromorfik Fonksiyonlar ve Formların Tanımı

X Riemann yüzeyi üstünde meromorfik ve holomorfik bir ω 1-formunu tanımlamak için X 'deki atlasın her haritasında ω 'ya yerel bir ifade karşılık getirilmesi gerekir ($f(z)dz$ şeklinde). Aslında ω , tek bir haritada tek bir formül ile de tanımlanabilir. Bunun için, meromorfik ve holomorfik fonksiyonlar için verilen Özdeşlik Teoreminden ω 'yı belirlemek yeterlidir. Tabii ki, formun bu tanımı tüm X 'de bu formun varlığını bize garanti edemez. Bir harita üstünde $f(z)dz$ meromorfik olsa da bu diğer bir haritaya taşındığında meromorfik olmayabilir. Örneğin sonlu \mathbb{C} haritası üstünde tanımlı meromorfik $e^z dz$ 1-formunu ∞ 'un bir komşuluğundaki meromorfik bir 1-forma genişletemeyiz.

İkinci problem, 1-formun yerel ifadesi X 'in diğer noktalarında tek bir şekilde dönüşmeyebilir. Örneğin, kompleks düzlemin negatif reel eksenin çıkarıldığı parçasında tanımlanan $\sqrt{z}dz$ meromorfik 1-formu alalım. Burada $\sqrt{1}=1$ olacak şekilde karekök dalı alınmıştır. Bu 1-form reel eksene genişletilebilir fakat tek olarak genişletilemez. Böylece, tüm \mathbb{C}^* da meromorfik 1-form elde edemeyiz.

2.1.6.3. dz ve $d\bar{z}$ in Kullanılması

Şimdi de 1-formların holomorfik veya meromorfik koşulları yerine C^∞ 1-formları tanımlayacağız. Yerel olarak, bir 1-form x ve y yerel reel değişkenler ($z=x+iy$) olmak üzere

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade x ve y reel ve sanal kısımları kullanılmadan z ve \bar{z} kullanılarak yazılabilir, çünkü $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ve $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Aynı şey diferansiyeller için de geçerlidir. Herhangi bir $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ ifadesi $r(z, \bar{z})dz + s(z, \bar{z})d\bar{z}$ şeklinde yazılabilir. Bu düşünce kısmi türevler için de kullanılabilir, şöyle ki

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

dır. Bu notasyona göre f 'nin C^∞ sınıfından holomorfik olması için $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ olmasıdır.

2.1.6.4. C^∞ 1-Formlar

dz ve $d\bar{z}$ kullanılarak C^∞ 1-formlar tanımlanabilir.

Tanım 2.1.23. $V \subset C$ açık kümesinde C^∞ 1-formu, f ve g , V 'de C^∞ fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.24. $\omega_1 = f_1(z, \bar{z})dz + g_1(z, \bar{z})d\bar{z}$, V_1 üstünde z koordinatlı C^∞ 1-form, $\omega_2 = f_2(w, \bar{w})dw + g_2(w, \bar{w})d\bar{w}$, V_2 üstünde w koordinatlı C^∞ 1-form ve $T: V_2 \rightarrow V_1$, $z=T(w)$ olacak şekilde holomorfik bir dönüşüm olsun.

$$f_2(w, \bar{w}) = f_1(T(w), \overline{T(w)})T'(w) \text{ ve}$$

$$g_2(w, \bar{w}) = g_1(T(w), \overline{T(w)})\overline{T'(w)}$$

ise ω_1, T altında ω_2 `ye dönüşür denir.

Görülüyor ki ifadenin dz kısmı dw `ye ve $d\bar{z}$ kısmı $d\bar{w}$ `ye dönüşüyor. Böylece bu kısımlar birbiriyle karışmaz. Fakat x ve y `yi kullanırsak karışıklık olacaktı.

Lemma 2.1.6. X Riemann yüzeyi ve \mathcal{A} , X `de bir kompleks atlas olsun ve \mathcal{A} `nın her haritasının ortak olan tanım kümelerinde birbirlerine dönüşen C^∞ 1-formlar verilsin. Bu C^∞ 1-formları \mathcal{A} `nın her haritasına genişleten bir tek C^∞ 1-formu vardır.

2.1.6.5. (1,0) ve (0,1) Tipinden 1-Formlar

Holomorfik koordinat dönüşümü altında dz ve $d\bar{z}$ kısımları korunduğuna göre C^∞ 1-formları, sadece dz kısmını içeren C^∞ 1-formlar ve sadece $d\bar{z}$ kısmını içeren C^∞ 1-formlar şeklinde iki ayrı şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1.25. C^∞ bir 1-form yerel olarak $f(z, \bar{z})dz$ şeklinde ise ona (1,0) tipinde, eğer $g(z, \bar{z})d\bar{z}$ şeklinde ise ona (0,1) tipindedir denir.

C^∞ 1-formların bu transformasyonda dz ve $d\bar{z}$ kısımları korunduğuna göre bu tanım doğrudur ve herhangi bir form bir haritada (1,0) tipinde ise o zaman ortak tanım kümeleri olan tüm haritalarda da (1,0) tipinde olacaktır.

Herhangi holomorfik 1-form (1,0) tipindedir. Meromorfik 1-form C^∞ olsaydı (ki kutuplarda değildir) (1,0) tipinde olacaktı.

2.1.6.6. C^∞ 2-Formlar

1-formlar bir yaya göre bir “şeyleri” entegre etmek için verilir. Aynı şekilde Riemann yüzeyin 2-boyutlu uygun bir parçasında bir yüzey integrali tarif etmek istersek buna uygun olan integrand 2-formlardır.

Tanım 2.1.26. C^∞ bir η 2-formu, f , $V \subset C$ açık kümesi üstünde C^∞ sınıftan bir fonksiyon olmak üzere

$$\eta = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$$

şeklinde tanımlanır. $dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$, çünkü tek değişken kullanarak bir yüzey integrali tanımlayamayız.

Tanım 2.1.27. $\eta_1 = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$, V_1 açık kümesinde tanımlanan z koordinatlı C^∞ 2-form, $\eta_2 = g(w, \bar{w})dw \wedge d\bar{w}$, V_2 açık kümesinde tanımlanan w koordinatlı C^∞ 2-form ve $T: V_2 \rightarrow V_1$ $z=T(w)$ olacak şekilde holomorfik bir dönüşüm olsun. $g(w, \bar{w}) = f(T(w), \overline{T(w)})\|T(w)\|^2$ ise o takdirde η_1 , T altında η_2 'ye dönüşüyor denir.

Tanım 2.1.28. U_i, V_i ($i=1,2$) sırasıyla bir X Riemann yüzeyi üstünde ve C 'de açık kümeler olsun. C^∞ η_{Φ_i} 2-formu, $T=\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ koordinat değişimi altında η_{Φ_2} 'ye dönüşecek şekilde $\Phi_i: U_i \rightarrow V_i$ haritalarının tanım kümeleri ortak bir arakesite sahip iseler, o takdirde her $\Phi: U \rightarrow V$ haritası için, C^∞ $\{\eta_\Phi\}$ 2-formların kümesi, X üstünde C^∞ bir 2-formdur.

Lemma 2.1.7. X Riemann yüzeyi ve \mathcal{A} , X 'de bir kompleks atlas olsun. \mathcal{A} 'nın her haritasında, ortak olan tanım kümelerinde birbirlerine dönüşen C^∞ 2-formlar verilsin. Bu C^∞ 2-formları \mathcal{A} 'nın her haritasına genişletilebilen bir tek C^∞ 2-form vardır.

2.1.6.7. 1-Formların Bir Fonksiyonla Çarpımı

X Riemann yüzeyi üstünde h , C^∞ fonksiyon ve ω , C^∞ 1-form olsun. C^∞ bir 1-form yerel olarak $\omega = fdz + gd\bar{z}$ şeklinde yazılabilir ve 1-formun h fonksiyonu ile çarpımı $h\omega = hfdz + hgd\bar{z}$ şeklinde tanımlanır.

Bu da X 'de aşağıdaki özellikleri sağlayan yeni bir 1-form verir

- ω (1,0) tipinde ise $h\omega$ da (1,0) tipindedir,
- ω (0,1) tipinde ise $h\omega$ da (0,1) tipindedir,
- ω ve h holomorfik ise $h\omega$ da holomorfiktir,
- ω ve h meromorfik ise $h\omega$ da meromorfiktir,

Aynı şekilde η , 2-formunun bir fonksiyonla çarpımı C^∞ 2-formdur. $\eta = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ 2-formu için $h\eta = h(z, \bar{z})f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$ şeklinde tanımlanır.

2.1.6.8. Fonksiyonların Diferansiyeli

Riemann yüzeyi üstünde tanımlanan C^∞ f fonksiyonu için $df, \partial f$ ve $\bar{\partial} f$, C^∞ 1-formlarını aşağıdaki kurala göre tanımlayabiliriz:

$\Phi: U \rightarrow V$, X 'e z koordinatını veren harita olsun. U kümesinde f fonksiyonunu yerel olarak $f(z, \bar{z})$ ile yazalım. O zaman:

$$\begin{aligned}\partial f &= \frac{\partial f}{\partial z} dz, \\ \bar{\partial} f &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \\ df &= \partial f + \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\end{aligned}$$

dır.

Lemma 2.1.8. Üstteki kural X 'de iyi tanımlı C^∞ df , ∂f ve $\bar{\partial} f$ 1-formlarını tanımlar, ayrıca d , ∂ ve $\bar{\partial}$ operatörleri \mathbb{C} -lineerdir ve

$$\begin{aligned}d(fg) &= f dg + g df \\ \partial(fg) &= f \partial g + g \partial f \\ \bar{\partial}(fg) &= f \bar{\partial} g + g \bar{\partial} f\end{aligned}$$

özellikleri sağlar.

C^∞ f fonksiyonunun holomorfik olması için gerek $\bar{\partial} f=0$ olmasıdır. U kümesinde $df = \omega$ olacak şekilde C^∞ bir f fonksiyonu bulunabiliyorsa ω , C^∞ 1-formuna tamdır (exact) denir.

2.1.6.9. İki 1-Formun Dış Çarpımı

ω_1 ve ω_2 X üstünde iki 1-form olsun. Yerel değişkeni z seçerek $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ ve $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$ yazılabilir. Bu yerel değişkene göre C^∞ $\omega_1 \wedge \omega_2$, 2-formunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dz \wedge d\bar{z}$$

2.1.6.10. 1-Formların Diferansiyeli

ω 1-formu için, X Riemann yüzeyi üstünde C^∞ 2-formlar olan $d\omega$, $\partial\omega$ ve $\bar{\partial}\omega$ şu şekilde tanımlanır:

$\Phi: U \rightarrow V$, X 'e z koordinatını veren harita olsun. U kümesinde ω 1-formu yerel olarak, $\omega = f(z, \bar{z}) dz + g(z, \bar{z}) d\bar{z}$ şeklinde olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}\partial\omega &= \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}, \\ \bar{\partial}\omega &= -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \\ d\omega &= \partial\omega + \bar{\partial}\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}\end{aligned}$$

dir.

Lemma 2.1.9. Üstteki formüller X 'de iyi tanımlı $d\omega$, $\partial\omega$ ve $\bar{\partial}\omega$ 2-formlarını tanımlar. $(1,0)$ tipinden C^∞ ω 1-formunun holomorfik olması için gerek $\bar{\partial}\omega = 0$ olmasıdır. d , ∂ ve $\bar{\partial}$ operatörleri C -lineerdir ve f , C^∞ fonksiyon ve ω , C^∞ 1-form olmak üzere

$$\begin{aligned}d(f\omega) &= df \wedge \omega + f d\omega, \\ \partial(f\omega) &= \partial f \wedge \omega + f \partial\omega, \\ \bar{\partial}(f\omega) &= \bar{\partial} f \wedge \omega + f \bar{\partial}\omega\end{aligned}$$

dir.

Herhangi bir C^∞ , f fonksiyonu için $ddf = \partial\bar{\partial}f = \bar{\partial}\partial f = 0$ ve $\partial\bar{\partial}f = -\bar{\partial}\partial f$ dir.

U kümesinde C^∞ bir f fonksiyonu için $\partial\bar{\partial}f = 0$ ise f fonksiyonu harmoniktir ve bir ω 1-formu için, $d\omega = 0$, $\partial\omega = 0$ ve $\bar{\partial}\omega = 0$ ise o takdirde ω sırasıyla d -kapalı, ∂ -kapalı ve $\bar{\partial}$ -kapalıdır denir.

Lemma 2.1.10. Eğer ω holomorfik 1-form ise o takdirde ω d -kapalıdır. Tersine ω , $(1,0)$ tipinde ve d kapalı ise o zaman ω holomorftir.

2.1.6.11. Diferansiyel Formların Kotanjant Dönüşümü

$F: X \rightarrow Y$ iki Riemann yüzeyi arasında sabit olmayan holomorfik bir dönüşüm ve ω , Y üstünde C^∞ 1-form olsun. X 'de C^∞ , $F^*\omega$ 1-formu şu şekilde tanımlanır: Y 'de bir harita $\Psi: U' \rightarrow V'$ ve $F(U) \subset U'$ olacak şekilde X 'de bir harita $\Phi: U \rightarrow V$ olsun. Bu iki harita U kümesine z yerel koordinatı ve U' kümesine w koordinatını verir. Böylece $z=h(w)$ şeklinde holomorfik bir h fonksiyonu ise, $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$ z koordinatlı bir 1-form için, w koordinatlı $F^*\omega$ 1-formunu şu şekilde tanımlarız:

$$F^*\omega = f\left(h(w), \overline{h(w)}\right)h'(w)dw + g\left(h(w), \overline{h(w)}\right)\overline{h'(w)}d\bar{w}$$

Lemma 2.1.11. Üstteki formül X 'de iyi tanımlı C^∞ , $F^*\omega$ 1-formu verir.

$F^*\omega$, ω 'nın F 'ye göre kotanjant dönüşümüdür denir ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

- ω holomorfik ise $F^*\omega$ da holomorfiktir
- ω meromorfik ise $F^*\omega$ da meromorfiktir
- ω (1,0) tipinde ise $F^*\omega$ da (1,0) tipindedir
- ω (0,1) tipinde ise $F^*\omega$ da (0,1) tipindedir

Aynı zamanda fonksiyonların da kotanjant dönüşümü bulunabilir o da bir f fonksiyonu için $F^*f = f \circ F$ şeklinde gösterilir.

2.1.6.12. İntegral Çizgileri (Paths)

1-form kavramı özellikle Riemann yüzeyleri üstünde bir çizgisel integralin integrantını ifade etmek için tasarlanmıştır.

Tanım 2.1.29. X Riemann yüzeyi üstünde bir $\gamma: [a,b] \rightarrow X$ yayı (integral çizgisi), R 'nin $[a,b]$ kapalı aralığından X 'e sürekli bir C^∞ fonksiyondur. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ yayın uç noktalarıdır ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ yayına kapalıdır deriz.

Lemma 2.1.12. Riemann yüzeyi üstünde bir γ yayı, γ_i 'ler C^∞ ve görüntüleri X 'in tek bir haritasının tanım kümesinde olacak şekilde sonlu sayıda $\{\gamma_i\}$ yaylarına parçalanabilir.

2.1.6.13. Yay Boyunca 1-Formların Entegrasyonu

X Riemann yüzeyi üstünde ω C^∞ bir 1- form ve γ bir yay olsun. Her γ_i için, $[a_{i-1}, a_i]$ tanım kümesinde C^∞ ve görüntüsü Φ_i haritasının U_i tanım kümesinde olacak şekilde γ 'nin bir $\{\gamma_i\}$ parçalanışını seçelim. Φ_i haritasına göre, ω 1-formunu, $\omega = f_i(z, \bar{z})dz + g_i(z, \bar{z})d\bar{z}$ şeklinde yazalım. t, γ_i 'in tanım kümesinde olmak üzere $z=z(t)$ fonksiyonunu tanımlayacak şekilde $\Phi_i \circ \gamma_i$ bileşimini alalım.

Tanım 2.1.30. Üstteki verilere göre γ yayı boyunca ω 1-formunun integrali

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_i \int_{t=a_{i-1}}^{a_i} \left[f_i(z(t), \overline{z(t)})z'(t) + g_i(z(t), \overline{z(t)})\overline{z'(t)} \right] dt$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer γ 'nin görüntüsü tek bir $\Phi: U \rightarrow V$ haritasının tanım kümesinin içinde ve bu haritanın üstünde $\omega = fdz + g\bar{d}z$ ise, o takdirde

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\phi \circ \gamma} (fdz + g\bar{d}z)$$

integrali V üstünde $\Phi \circ \gamma$ yayı boyunca çizgisel integraldir.

Bu tanım harita seçimine bağlı değildir, üstelik farklı parçalanışın farklı seçiminde de değişmezdir. Böylece, bu integral sadece γ yayına ve ω 1-formuna bağlıdır, dolayısıyla iyi tanımlıdır.

2.1.6.14. Zincir ve Zincir Boyunca Entegrasyon

Tanım 2.1.31. X Riemann yüzeyi üstünde bir zincir, yayların katsayıları tam sayılar olan sonlu bir toplamıdır. X 'deki tüm zincirlerin kümesi, bazı X üstünde yay kümesi olan, değişimli bir gruptur. Herhangi bir zincir, n_j 'ler tam sayı ve γ_j 'ler yaylar olmak üzere $\gamma = \sum_j n_j \gamma_j$ şeklinde yazılabilir.

Verilen bir $\gamma = \sum_j n_j \gamma_j$ zinciri ve C^∞ ω 1-formu için γ üstünde ω 'nın integrali

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_j n_j \int_{\gamma_j} \omega$$

şeklinde verilir.

2.1.6.15. Meromorfik 1-Formlar İçin Rezidü (Residue)

ω , X Riemann yüzeyi üstünde, $p \in X$ noktasında meromorfik bir 1-form olsun. p noktasında merkezlenen z koordinatını seçerek ω 'yi, $ord_p \omega = -M$ ve $c_{-M} \neq 0$ olmak üzere

$$\omega = f(z) dz = \left(\sum_{n=-M}^{\infty} c_n z^n \right) dz$$

şeklinde bir Laurent serisine açabiliriz.

Tanım 2.1.32. ω 'nın p noktasındaki rezidüsü, p noktasında ω 'nın Laurent serisinin c_{-1} katsayısıdır ve $Rez_p(\omega)$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1.13. ω , $p \in X$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı meromorfik bir 1-form olsun. γ , X 'de p 'yi kapsayan fakat ω 'nın diğer kutuplarından hiçbirini kapsamayan bir yay olsun. O takdirde:

$$Rez_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \omega$$

dır.

2.1.6.16. 2-Formların İntegrali

S iki-boyutlu tıkız bir manifold olsun. Her biri bir üçgene homeomorf olan ve birbiriyle ayrık, tek bir köşe veya bir kenar boyunca kesişecek şekilde S 'nin kapalı kümelerine bir parçalanışı bulunabiliyorsa S 'ye üçgenleştirilebilir denilir.

X Riemann yüzeyinde bir üçgen C 'deki bir üçgenin homeomorfik görüntüsü olan bir $T \subset X$ altümesidir. Şimdi T , X 'de bir üçgen olsun ve T 'nin tamamının $\Phi: U \rightarrow V$ haritasının tanım kümesi içinde olduğunu varsayalım. Bu haritada C^∞ η 2- formu $\eta = f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}$ şeklinde yazılabilir. η 'nin integrali

$$\iint_T \eta = \iint_{\Phi(T)} f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z} = \iint_{\Phi(T)} (-2i) f(x+iy, x-iy) dx \wedge dy$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki son integral $C=R^2$ de yüzey integralidir.

Eğer η iki haritanın tanım kümeleri içinde yer alıyorsa bu integral de iyi tanımlı olur.

Genel olarak $D \subseteq X$ 'in üçgenleştirilebilir kapalı bir altküme olduğunu varsayacağız. O zaman D 'yi her bir üçgeni tek bir haritanın tanım kümesinde olacak biçimde üçgenleştirerek, sonra da bu üçgenlerin üstündeki integralleri ayrı ayrı toplayarak $\iint_D \eta$ 'yi tanımlayabiliriz. Bu integral üçgenleştirilmenin seçiminden bağımsızdır.

Böylece:

Lemma 2.1.14. Yukarıdaki verilere göre D , X üstünde üçgenleştirilebilir bir kapalı küme olmak üzere C^∞ η 2-formunun D üstündeki integrali iyi tanımlıdır.

X Riemann yüzeyi üstünde bir haritanın tanım kümesi içinde bir üçgen T olsun. T 'nin sınırını pozitif yönlendirerek ∂T yayını çizebiliriz. Başlangıç noktası herhangi bir nokta alınabilir. Bu bize X 'de kapalı bir ∂T yayını (çizgi) verir. Eğer D , X üstünde herhangi bir üçgenleştirilebilir kapalı küme ve $\{T_i\}$ onun parçalanışı ise, o takdirde $\partial D = \sum_i \partial T_i$ X 'de bir zincirdir ve buna D 'nin sınırı denir.

Teorem 2.1.2. (Stokes teoremi) D , X Riemann yüzeyi üstünde üçgenleştirilebilir kapalı bir küme ve ω , C^∞ bir 1-form olsun.

O zaman:

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

dır.

Kanıtlama: Her iki taraf D 'nin üçgenlerine göre toplamsal olduğundan D kümesini bir haritanın tanım kümesi içinde yer alan bir üçgen olarak düşünebiliriz. Bu iki integrali harita yardımıyla C kompleks düzlemine taşıyarak bu teoremin kompleks düzlemdeki Green teoremine dönüştüğünü görürüz.

Teorem 2.1.3. (Rezidü teoremi) ω , tıkHz X Riemann yüzeyi üstünde meromorfik 1-form olmak üzere

$$\sum_{p \in X} \text{Rez}_p(\omega) = 0$$

dır.

Kanıtlama: ω 'nın kutupları X 'de diskret küme oluşturduğundan ve X 'in tıkHz oluşundan bu toplamın sonlu olduğu açıktır. p_1, p_2, \dots, p_n , ω 'nın kutupları olsun. Her p_i için, X 'de p_i kutbunu kapsayan ve diğer kutupları kapsamayan küçük yaylar γ_i ve U_i 'ler, γ_i 'lerin içi olsun. Lemma 2.1.13. ve düzlemde bilinen rezidü teoreminden

$$\int_{\gamma_i} \omega = 2\pi i \text{Rez}_{p_i}(\omega)$$

yazabiliriz. Şimdi, $D = X - \bigcup_i U_i$ diyelim; o zaman D üçgenleşebilir ve $\partial D = -\sum_i \gamma_i$,

X 'de bir zincir olsun. Böylece D 'nin bir komşuluğunda ω holomorfik olduğundan

$$\sum_i \text{Rez}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{\gamma_i} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\sum_i \gamma_i} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

dır.

2.2. CEBİRSEL FONKSİYONLAR YARDIMIYLA RIEMANN YÜZEY TANIMI

$a_i(z)$, z değişkenli ve kompleks katsayılarla sahip polinomlar olmak üzere

$$a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

denklemini sağlayan analitik $w=w(z)$ fonksiyonuna bir cebirsel fonksiyon denir. Bu fonksiyonda, z 'nin her değeri için w birkaç değer alır, böylece w , z 'nin çok-değerli fonksiyonudur.

En basit cebirsel fonksiyon, a_0 ve a_1 , z 'ye göre polinomlar olmak üzere

$$a_0(z)w + a_1(z) = 0$$

denklemini ile verilir. Bu durumda $w = -\frac{a_1(z)}{a_0(z)}$, z 'ye göre tek değerli rasyonel bir fonksiyondur. Bu tipteki fonksiyonlar, genişletilmiş z kompleks düzlemde (z -kürede) sonlu sayıda kutup noktaları dışında regülerdir. w 'yi b_1, b_2, \dots, b_n kutup noktaları olmak üzere

$$w = p(z) + h_1(z) + \dots + h_n(z)$$

şeklinde basit kesirler cinsinden ifade edebiliriz. Burada,

$$h_k(z) = \frac{c_{1,k}}{z - b_k} + \frac{c_{2,k}}{(z - b_k)^2} + \dots + \frac{c_{m,k}}{(z - b_k)^m}$$

$w(z)$ 'nin b_k 'daki asli kısmıdır ve $p(z)$ ise $w(z)$ 'nin sonsuzdaki sabit bir terimle birlikte asli kısmıdır.

Sıradaki cebirsel fonksiyon w 'ye göre 2. dereceden olan aşağıdaki denklemlerle belirlenir;

$$a_0w^2 + a_1w + a_2 = 0,$$

burada $a_i = a_i(z)$, z 'ye göre polinom ve $a_0 \neq 0$. $\zeta = 2a_0w + a_1$ değişken değişikliğini yaparak

$$\zeta^2 - p(z) = 0$$

bulunur. $p(z) = a_1^2 - 4a_0a_2$, z 'ye göre bir polinomdur. Sabit bir z için ζ , w 'ye göre tek-değerli fonksiyondur. Şimdi de $w(z)$ yerine $\zeta(z)$ 'i araştıracağız. İlk önce z 'ye göre derecesi 1 olan $p(z)$ ile başlanılır ondan sonra derecesi yükseltilir.

1) $\deg p(z)=1$ için $w^2 - z = 0$ şeklinde tanımlı cebirsel fonksiyon genişletilmiş z -düzleminde tek-değerli değildir. Çünkü, eğer $z = re^{i\theta}$ şeklindeki kutupsal koordinatları kullanırsak $w = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ yazabiliriz. Bir $r_0 = e^{i\theta_0}$, $r_0 \neq 0$ noktasından başlayıp $w(z)$ 'nin kapalı bir yay boyunca analitik devamı ile orijin etrafında bir kez dönerek yani θ 'yı 2π kadar artırarak $\sqrt{r_0}e^{\frac{1}{2}i(\theta_0+2\pi)} = -\sqrt{r_0}e^{\frac{1}{2}i\theta_0}$ değerine ulaşırsınız ki bu orijinal değerinin negatif işaretlisidir. Bu yay boyunca analitik devamı ile bir kez daha dönerek yeniden $w(z)$ 'nin ilk değerine döneriz. Genişletilmiş z kompleks düzlemi pozitif reel eksen boyunca kesip ve bu kesit boyunca $w(z)$ 'yi analitik olarak devam ettirmeyecek bir kısıtlama yaparsak $w(z)$ 'in iki tek değerli biraşını elde ederiz ki bunlar

$$w = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{ve} \quad w = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}, \quad 2\pi \leq \theta < 4\pi$$

dir.

$w(z)$ için Riemann yüzeyini oluşturmak için pozitif reel eksen boyunca z -düzleminin iki kopyasını alalım ve bunlara I ve II tabakaları diyelim [10]. Böylece her bir tabaka üstünde bu arakesitler iki kenara sahiptir. Kompleks düzlemin birinci çeyreğinin kenarını $+$ ile ve dördüncü çeyreğinin kenarını $-$ ile gösterip I üstündeki kesimin $+$ kenarını II üstündeki kesimin $-$ kenarına bitiştirirsek bir kesimden diğerine her geçişde bir tabakadan diğerine geçmiş oluruz. Şimdi de z koordinatı ile I ve II de birer nokta belirleyelim ve Riemann yüzeyi üstünde bir tek noktayı nasıl belirleyeceğimize ilişkin bir düzenleme yapalım. I üstündeki z noktasına $0 \leq \theta < 2\pi$ için $\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ şeklinde verilen \sqrt{z} in sabit değerini karşılık getirelim. Böylece I üstünde elde ettiğimiz bu noktayı (z, \sqrt{z}) ikilisiyle gösterelim. Sonra $w = \sqrt{z}$ den başlayarak $w^2 - z = 0$ denklemiyle tanımlanan $w(z)$ fonksiyonunun orijin etrafındaki basit kapalı bir yay boyunca analitik devamını alırsak I kesimden diğerine yani II içine geçeriz. II üstünde ki z noktasını $(z, -\sqrt{z})$ şeklinde gösterirsek bunun I üstündeki (z, \sqrt{z}) den farklı olduğunu görürüz.

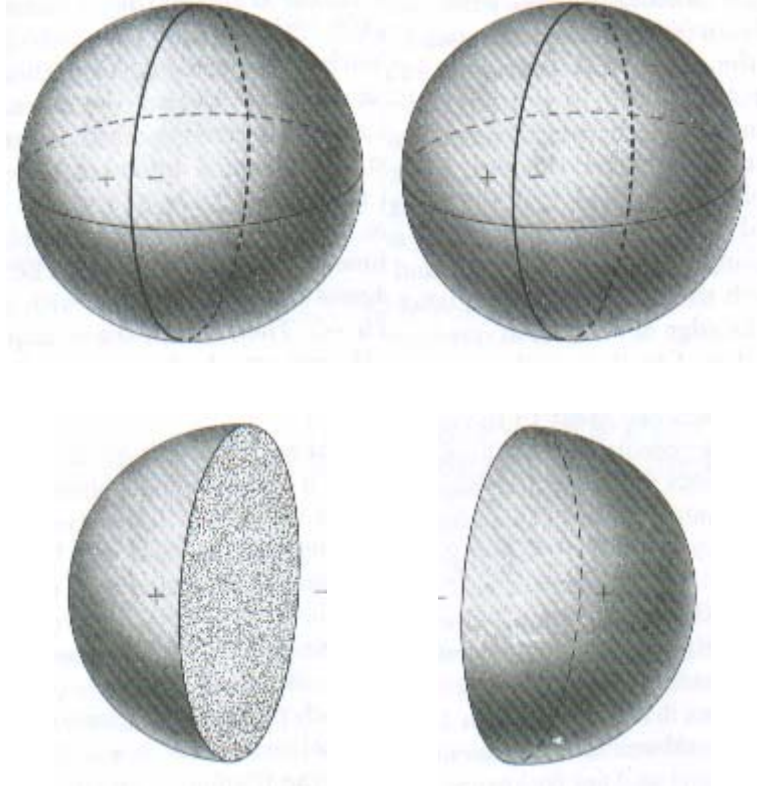
Böylece Riemann yüzeyi üstündeki her bir nokta (z,w) şeklinde bir sıralı ikili olarak düşünülebilir. Burada $w^2 - z = 0$ dır, ayrıca Riemann yüzeyi üstündeki (z_1, w_1) ve (z_2, w_2) noktalarının özdeş olması için gerek $z_1=z_2$ ve $w_1=w_2$ noktası civarında $w_1(z)=w_2(z)$ olmasıdır. Üstelik $w^2 - z = 0$ denklemini sağlayan $w(z)$ 'nin, yüzey üstünde tek-değerli olduğu ve (z,w) noktasında w değerini aldığı varsayılmaktadır.

Bu 2-tabakalı yüzey topolojik olarak küreye dönüşebilir (veya küreye homeomorftur). Yine genişletilmiş z -düzleminde pozitif reel eksen boyunca kesilmiş tabakaları düşünelim. Stereografik izdüşümü kullanarak, bu iki tabakayı meridyen çemberi boyunca güney kutbundan kuzey kutbuna kesilen birinin $+$ ile diğerinin $-$ kenarı ile birleştirilmiş iki küre olarak düşünebiliriz. Şimdi bu kürelerin elastik olduğunu düşünelim ve onları yarım kürelere dönüştürelim. İki yarım kürenin açık tarafları birbirlerine dönük olacak şekilde tabakaları döndürüp yarım küreleri yapıştırırsak tek bir küre elde ederiz (şekil 2.2.1). Analitik olarak bu dönüşüm Riemann yüzeyindeki (z, \sqrt{z}) noktasını t -kürenin $t = \sqrt{z}$ noktasına götüren bir dönüşümdür.

$w^2 = a_0 z + a_1$ durumu, $w^2 - z = 0$ ile aynıdır. Burada kesimi 0 ' dan $+\infty$ ' a yapmak yerine

$z = -\frac{a_1}{a_0}$ noktasından $z=\infty$ ' a kadar yaparız.

2) $deg p(z)=2$ için $w^2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$, $a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ yine farklı bir şey ifade etmez çünkü onu çarpanlara ayırırsak $w^2 = a_0 (z-r)(z-s)$, $r \neq s$ bulunur. $z=r$ ve $z=s$ bu fonksiyonun branş noktalarıdır ve z -düzlemini r ve s 'yi birleştiren eğri boyunca keserek $w = \sqrt{a_0 (z-r)(z-s)}$ fonksiyonun tek-değerli iki dalını elde ederiz. z -düzleminin bu kesim boyunca iki kopyasını birleştirirsek iki tabakalı Riemann yüzeyini elde ederiz. Bu yüzey için $w(z)$ tek-değerlidir.

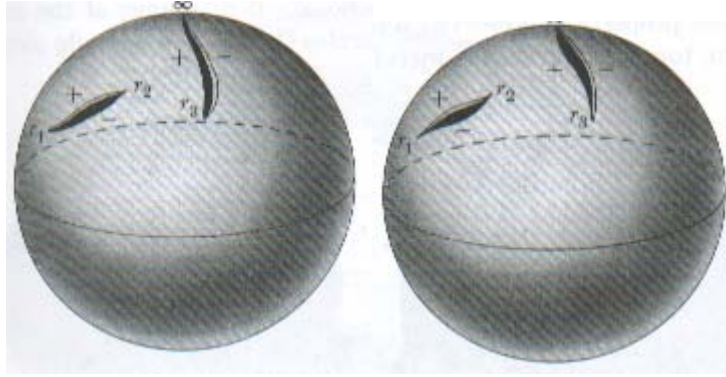


Şekil 2.2.1 : Kutup noktaları boyunca kürenin iki yarımküreye parçalanışı

3) $deg p(z)=3$ hali:

Birbirinden farklı r_1, r_2, r_3 için $w^2 = a(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)$ şeklinde tanımlanan cebirsel fonksiyon için resim oldukça farklıdır. Aynı şekilde her bir z 'ye w 'nin biri pozitif diğeri negatif iki değeri tekabül eder. Bunların birinden diğere r_1, r_2, r_3 köklerinden biri civarında $w(z)$ 'nin herhangi bir yay üstünde bir kez dönmek suretiyle bir analitik devamı ile geçiş yapabiliriz. Çünkü $w = \sqrt{a} \sqrt{z-r_1} \sqrt{z-r_2} \sqrt{z-r_3}$ şeklindedir ve buradaki her bir $\sqrt{z-r_i}$ çarpanı, $arg(z-r_i)$, 2π kadar değiştiğinde işaret değiştirecektir. z -düzlemini r_1 'den r_2 'ye keserek, bu kesimi kesmeden r_1 veya r_2 etrafında dönme yapamayız. Ancak r_1 ve r_2 'nin her ikisini çevreleyen kapalı bir yay bulabiliriz. $arg(z-r_1)$ ve $arg(z-r_2)$ 'nin her ikisi 2π kadar değişeceğinden $\sqrt{z-r_1}$ ile $\sqrt{z-r_2}$ 'nin her ikisi de işaret değiştirir ancak w 'in değeri değişmez. Sonra z -düzlemini r_3 'ten ∞ 'a kadar keselim. Bu bizim r_1, r_2 ve r_3 köklerinin her üçünü çevreleyen bir yay boyunca dönmemizi engelleyecektir. Böylece $w(z)$ 'nin her bir branşı kesim düzlemi içinde tek-değerlidir. Şimdi z -düzlem kesitinin iki kopyasını alıp onları önce yaptığımız

gibi kesim üzerinden birleştirecek bir iki-tabakalı Riemann yüzeyi elde ederiz ki bu yüzey üstünde $w^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$ fonksiyonu tek-değerlidir. Bu yüzey üstündeki noktaları tekrar $(z, w(z))$ ile gösterirsek, z her iki tabakada aynı bir noktayı belirtirken, $w(z)$ noktanın hangi tabaka üstünde olduğunu gösterecektir. Bu iki-tabakalı yüzey topolojik olarak bir küreye resmedilemez, ancak topolojik olarak bir tor yüzeyine resmedilebilir. Bunu r_1 ile r_2 arasında ve r_3 ile ∞ arasında bir kesime sahip iki küreyi yan yana getirerek yapabiliriz. Bunun için kürelerden birinin $+$ kenarını diğerkinin $-$ kenarına bitiştiririz. Kürelerin elastik olduğunu düşünersek kesikleri dairesel deliklere dönüştürebiliriz (bak şekil 2.2.2, şekil 2.2.3).

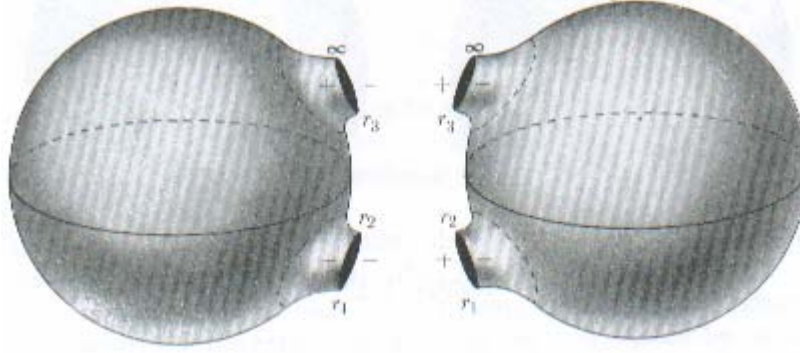


Şekil 2.2.2: r_1 ile r_2 ve r_3 ile $+\infty$ kesimine sahip iki küre

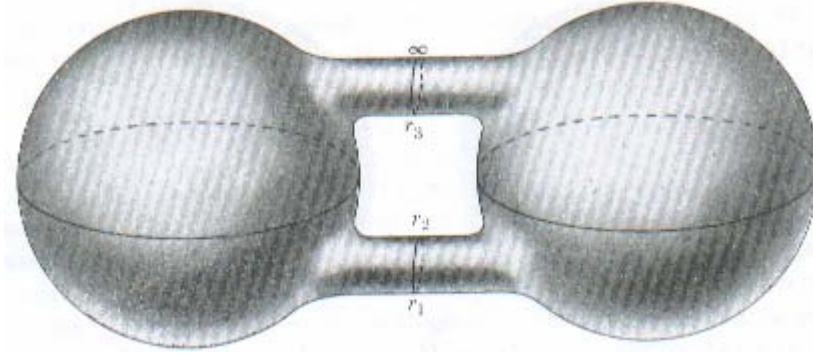


Şekil 2.2.3: Kesikleri dairesel deliklere dönüşen iki küre

Sonra bu delikleri karşılıklı getirecek şekilde küreler döndürülür ve kesimler küçük tüp oluşturacak şekilde dışarıya doğru çıkarılır (şekil 2.2.4). Bu şekilde bir kürenin tüpünün $+$ kenarı ile diğerk kürenin tüpünün $-$ kenarı karşı karşıya gelir. Karşı karşıya gelen tüpler birbiriyle yapışır (şekil 2.2.5) ve topolojik olarak tora dönüşebilen bir yüzey elde edilir (şekil 2.2.6).



Şekil 2.2.4: Delikleri karşı karşıya getirilmiş iki küre



Şekil 2.2.5: İki küre ve iki tüpten oluşan yüzey

Tor yüzeyinin bir küreye dönüşmediğini kolayca görürüz, çünkü kürede her kapalı eğri bir noktaya dönüşebilir ve bu özellik topolojik dönüşüm altında yüzeyde de korunur, fakat torda meridyen eğrisi ve enlem eğrisi sürekli olarak bir noktaya dönüşemez.

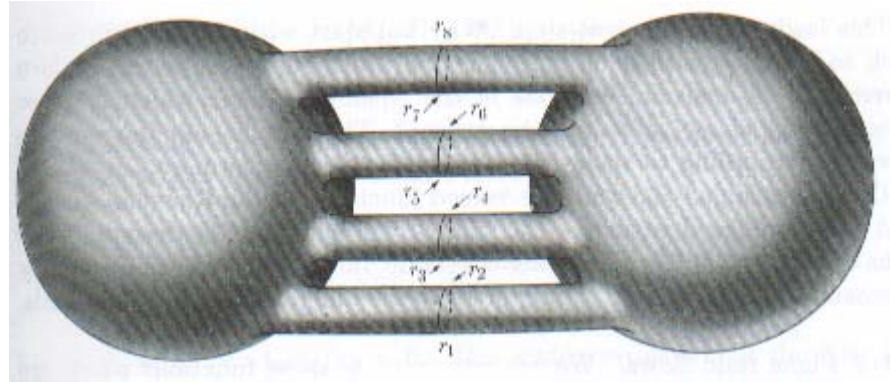


Şekil 2.2.6: Tor yüzeyi

4) $\text{deg}p(z)=4$ için $w^2 = a(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)$, r_1, r_2, r_3, r_4 birbirinden farklı, durum önceki durumla benzerdir. Burada kesimler r_1 ile r_2 ve r_3 ile r_4 arasında yapılır ve aynı şekilde açılır, yapıştırılır ve bir tora dönüşür.

5) $w^2 - p(z) = 0$ durumunu tamamlamak için $\text{deg}p(z)=n$ alalım. Bu durumda $w^2 = a(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$, r_1, r_2, \dots, r_n birbirinden farklıdır. Her z 'ye w 'nin iki değeri tekabül eder, böylece yine, branş noktaları r_1, r_2, \dots, r_n olan iki-tabakalı Riemann yüzeyini elde ederiz. Daha önce gördüğümüz gibi tek sayıda branş noktaları içeren yay boyunca w 'nin analitik devamı $-w$ 'ye gider ve çift sayıda branş noktaları içeren yay boyunca w 'nin analitik devamı yine w 'nin asıl değerine döner. Branş noktalarını ikili çiftlere ayırarak $(r_1, r_2), (r_3, r_4), \dots$ ve kesimleri r_1 ile r_2 , r_3 ile r_4 ... arasında yaparak, kesim düzleminin her birinde $w(z)$ 'nin tek değerli olduğu iki dal elde edilir. n tek ise r_n sonunda tek kalır ve kesim r_n ile ∞ arasında yapılır. Bu şekilde n çift ise $\frac{n}{2}$ ve n tek ise

$\frac{n+1}{2}$ tane kesim elde edilir. $n=3$ ve $n=4$ için yaptığımız gibi iki küreyi branş noktalarında yapıştırarak Şekil 2.2.7. de verilen yüzey bulunur. Bu yüzey iki küreden ve onları birleştiren, n -çift ise $\frac{n}{2}$ ve n -tek ise $\frac{n+1}{2}$ tane tüpten oluşan bir yüzeydir.

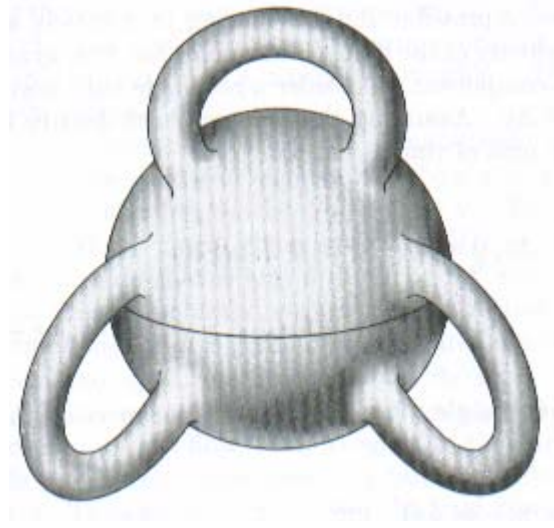


Şekil 2.2.7: İki küre ve tüplerden oluşan yüzey

Şimdi, sadece küreleri ve r_1 ile r_2 arasındaki kesimleri bağlayan tüpü göz önüne alalım. Bu yüzey topolojik olarak bir küredir ve kalan g tane tüp onun üzerine yerleştirilmiştir (Şekil 2.2.8.). Burada n -çift ise $g = \frac{n}{2} - 1$ ve n -tek ise, $g = \frac{n+1}{2} - 1$ dir. Her tüp kürenin

üstünde bir kulp (handle) olarak görülür, böylece g-kulplu küre, Riemann yüzeyin bir topolojik modeli olarak elde edilir.

g sayısına yüzeyin genusu denir. Böylece her $a_0(z)w^2 + a_1(z)w + a_2(z) = 0$, $a_0(z) \neq 0$ şeklindeki cebirsel fonksiyon topolojik olarak g-kulplu küreye eşdeğerdir.



Şekil 2.2.8 : g kulplu küre

2.3. L^3 DE ÇEMBERLER

Bu kısımda L^3 , $\overline{ds^2} = \langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ metriği ile birlikte $(R^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayını ve E^3 de, $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ metriği ile birlikte $(R^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ 3-boyutlu Öklid uzayını gösterecektir.

$v \in R^3 - \{0\}$ vektörünün uzaysal, zamansal veya ışıksal olması için $g(v, v)$ 'nin sırasıyla pozitif, negatif veya sıfır olmasıdır [11]. $\vec{0}$ vektörü uzaysal olarak tanımlanır. L^3 de bir düzlemin uzaysal, zamansal veya ışıksal olması için g onun Öklid normal vektörlerinin sırasıyla zamansal, uzaysal veya ışıksal olmasıdır. Bir eğrinin uzaysal, zamansal veya ışıksal olması için g herhangi bir noktasındaki tanjant vektörünün sırasıyla uzaysal, zamansal veya ışıksal olmasıdır. L^3 de bir yüzeyin uzaysal, zamansal veya ışıksal olması için g ise herhangi bir noktasındaki tanjant düzleminin sırasıyla uzaysal, zamansal veya ışıksal olmasıdır.

Tanım 2.3.1. [12] $u=(u_1,u_2,u_3)$ ve $v=(v_1,v_2,v_3)$ L^3 de iki vektör olsun. Bu vektörlerin dış çarpımı

$$u \times v = (u_3v_2 - u_2v_3, u_1v_3 - u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1) \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.1. u ve v L^3 de iki vektör olsun. O takdirde

- 1) u ve v uzaysal vektörler ise $u \times v$ zamansal bir vektördür.
- 2) u uzaysal, v zamansal vektör ise $u \times v$ uzaysal bir vektördür.
- 3) u uzaysal, v ışıksal vektör olsun. $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \times v$ uzaysaldır ve eğer $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \times v$ ışıksal bir vektördür.
- 4) u ve v ışıksal vektörler ise $u \times v$ vektörü uzaysaldır.
- 5) u zamansal, v ışıksal vektör ise $u \times v$ uzaysal bir vektördür.
- 6) u ve v zamansal vektör ise $u \times v$ uzaysal vektördür.

Önerme 2.3.2. u ve v L^3 de iki vektör olsun

- 1) $\langle u \times v, u \rangle = 0$ ve $\langle u \times v, v \rangle = 0$,
- 2) $\langle u \times v, u \times v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + (\langle u, v \rangle)^2$.

İlk önce L^3 de, E^3 deki çemberlere eşdeğer olan eğriler tanımlayacağız. Bunun için, L^3 de sıfırdan farklı sabit eğrilikli uzaysal düzlemsel eğrilerini ele alacağız. Şimdi L^3 de regüler düzlemsel bir eğrinin sıfırdan farklı bir eğriliğe sahip olmasının ne anlama geldiğini açıklayalım. Π , L^3 de bir düzlem ve s yay-uzunluğu parametresi olmak üzere $\alpha = \alpha(s)$ Π üstünde uzaysal bir eğri olsun. $t(s) = \alpha'(s)$ α 'ya birim teğet vektörü gösterebilir. Bu durumda t uzaysaldır. Eğriliği sıfırdan farklı istediğimiz için $t'(s)$ sıfırdan farklı olmalıdır. Π 'nin karakteri, yani uzaysal, zamansal veya ışıksal olması üç seçeneğe yol açar. Şimdi bu halleri inceleyelim:

Π uzaysaldır. Bu durumda $(\Pi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Riemann düzlemidir ve eğriliğin tanımı Riemann eğriliğidir. Böylece verilen bir ortonormal $\{e_1, e_2\}$ bazı için sabit pozitif eğriliği $\kappa = \sqrt{\langle t', t' \rangle}$ olan eğriler aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha(s) = c + \frac{1}{\kappa} (\cos(\kappa s)e_1 + \sin(\kappa s)e_2), \quad c \in \Pi \quad (2.3.2)$$

Π zamansaldır. $\langle t, t' \rangle = 0$ ve t uzaysal olduğundan t' $(\Pi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 'de zamansaldır.

Tanımdan α 'nın eğriliği $\kappa = \sqrt{-\langle t', t' \rangle}$ ile verilir. Böylece $\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle = -1$ olmak üzere bir ortonormal $\{e_1, e_2\}$ bazı için, Π 'de $\kappa > 0$ sabit eğrilikli uzaysal eğri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha(s) = c + \frac{1}{\kappa} (\cosh(\kappa s) e_1 + \sinh(\kappa s) e_2), c \in \Pi \quad (2.3.3)$$

Π ışıksaldır. $t' \neq 0$ ve t uzaysal olduğundan $\langle t, t' \rangle = 0$ dan t' 'nin $(\Pi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 'de ışıksal olduğu bulunur. α üstünde ışıksal n vektör alanını sabitleyelim. O zaman $t' = \kappa n$ dır ve κ fonksiyonu n 'ye bağlıdır fakat $\kappa \neq 0$ olması n 'ye bağlı değildir. Yani κ 'nin sabit olması için t' nin α üstünde bir sabit vektör alanı olmasıdır. Sabit birim uzaysal e_1 vektör alanı ve $e_2 = n$ sabit ışıksal vektör alanı olmak üzere ortonormal $\{e_1, e_2\}$ bazı cinsinden sıfırdan farklı, sabit eğrilikli uzaysal eğri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha(s) = c + s e_1 + \frac{\kappa}{2} s^2 e_2 \quad (2.3.4)$$

Öklid halde bu düzlemsel eğriler aşağıdaki şekilde yorumlanabilir. L^3 deki bir lineer izometriye kadar $v=(0,0,1)$, $v=(1,0,0)$ veya $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ olmak üzere Π düzlemini

$\Pi_v = \{x \in R^3 : \langle x, v \rangle_0 = 0\}$ olarak düşünelim.

1. $v=(0,0,1)$ olsun. $e_1=(1,0,0)$ ve $e_2=(0,1,0)$ alalım. Π_v 'de $\kappa > 0$ sabit eğrilikli uzaysal eğriler

$$\alpha(s) = c + \frac{1}{\kappa} (\cos(\kappa s), \sin(\kappa s), 0), c \in \Pi_v$$

ile verilir ve bu eğriler yatay düzlemler üstünde Öklid çemberleridir.

2. $v=(1,0,0)$ olsun. $e_1=(0,0,1)$ ve $e_2=(0,1,0)$ alalım. $\kappa > 0$ ise (2.3.3) deki uzaysal eğriler

$$\alpha(s) = c + \frac{1}{\kappa} (0, \sinh(\kappa s), \cosh(\kappa s)), c \in \Pi_v$$

ile verilir ve bu eğriler dikey düzlemler üstünde öklid hiperbolleridir.

3. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ olsun. $e_1=(0,1,0)$ ve $e_2=(1,0,1)$ alalım. (2.3.4) ile verilen uzaysal eğriler

$$\alpha(s) = c + \left(\frac{\kappa}{2}s^2, s, \frac{\kappa}{2}s^2 \right), c \in \Pi_v \text{ ve } \kappa \neq 0$$

ile verilir ve bu eğriler Π_v düzleminde $(x-c_1) = \frac{\kappa}{2}(y-c_2)^2, c_1, c_2 \in R$ Öklid parabolleridir.

Tanım 2.3.2. L^3 içinde bir çember, sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir düzlemsel eğridir.

Çember tanımını bir başka yaklaşımla da verebiliriz. l, L^3 üstünde bir doğru olsun ve l doğrusunu sabit bırakan L^3 de 1-parametrelili lineer izometrilere $G = \{R_\theta : \theta \in R\}$ grubunu göz önüne alalım. Bu gruba l eksenine göre dönme hareketlerinin grubu denir. $p \in L^3 - l$ olsun ve G hareketi altında p 'nin yörüngesi olan eğriyi düşünelim. Bu düzlemsel eğrisinin eğriliği sıfırdan farklı bir sabittir ve eğri l 'ye dik olan bir düzlemedir. Böylece çember tanımına eşdeğer bir tanımla şöyle verebiliriz:

Tanım 2.3.3. L^3 de l 'yi sabit bırakan 1-parametrelili hareket grubu altında $p \in L^3 - l$ noktasının α yörüngesini tanımlayacak şekilde bir l doğrusu bulunabiliyorsa, o takdirde α eğrisi L^3 içinde bir çemberdir.

l doğrusunun karakterine göre L^3 deki çemberleri aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

1) l zamansal bir doğru olsun. L^3 de l 'yi sabit bırakan $\{R_\theta : \theta \in R\}$ dönme hareketi, e_3 l 'yi gelecek şekilde alınan $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir ve L^3 de bu duruma tekabül eden çemberler

$$\alpha(s) = c + r(\cos \theta \cdot e_1 + \sin \theta \cdot e_2), \alpha \neq 0, c \in l$$

şeklindedir.

2) l uzaysal bir doğru olsun. L^3 de l 'yi sabit bırakan $\{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ dönme hareketi, e_1 l 'yi gelecek şekilde ve $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$, $\langle e_3, e_3 \rangle = -1$ olacak şekilde, alınan $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir ve L^3 de bu duruma tekabül eden çemberler

$$\alpha(s) = c + r(\sinh \theta \cdot e_2 + \cosh \theta \cdot e_3), \quad r \neq 0, c \in l$$

şeklinde verilir.

3) l ışıksal bir doğru olsun. L^3 de l 'yi sabit bırakan $\{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ dönme hareketi $e_2 + e_3$ l 'yi gelecek ve e_3 zamansal olacak şekilde alınan $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta & -\theta \\ -\theta & 1 - \frac{1}{2}\theta^2 & \frac{1}{2}\theta^2 \\ -\theta & -\frac{1}{2}\theta^2 & 1 + \frac{1}{2}\theta^2 \end{pmatrix}$$

matrisi ile verilir ve L^3 de bu duruma tekabül eden çemberler

$$\alpha(s) = c + se_1 + \frac{1}{2}rs^2(e_2 + e_3), \quad r \neq 0, c \in l$$

şeklindedir.

2.4. L^3 DE GAUSS DÖNÜŞÜMÜ VE ORTALAMA EĞRİLİĞİ VERİLEN UZAYSAL YÜZEYLER

2.4.1. L^3 de Uzaysal Yüzeyle

Önce kullanılacak bazı tanımları verelim

Tanım 2.4.1. Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üstünde bir bağ (koneksiyon), $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$, M 'nin p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ ve diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $D : T(M) \times \Gamma(M) \rightarrow T(M)$ şeklinde bir dönüşümdür:

- $X \in T_p(M)$ ise $D_X Y$ ile gösterilen $D(X, Y)$, $T_p(M)$ 'dedir.
- $p \in M$ için $D|_{T_p(M) \times \Gamma(M)}$ bilineerdir,
- f diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise,

$$D_X (f \cdot Y) = X(f) \cdot Y + f \cdot D_X Y$$

dir.

M^2 , 2-boyutlu diferansiyellenebilir bağlantılı bir manifold ve $X : M^2 \rightarrow L^3$ diferansiyellenebilir dahil etme dönüşümü olsun. Burada X 'in uzaysal olduğunu düşüneceğiz yani M^2 , L^3 içinde uzaysal bir yüzey veya diğer bir deyişle $ds^2 = X^* \overline{ds^2}$ nin pozitif tanımlı Riemann metriği olduğunu düşüneceğiz. Burada M^2 nin yönlendirilebilir olduğunu varsayacağız.

$M = (M^2, ds^2)$, $ds^2 = X^* \overline{ds^2}$ indirgenmiş metriği ile $X : M^2 \rightarrow L^3$ izometrik dahil etme dönüşümü olmak üzere 2-boyutlu Riemann manifold olsun. M 'nin yönü ile uyumlu $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ izotermal koordinatlar olmak üzere ds^2 , yerel olarak

$$ds^2 = \lambda^2 \left((d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 \right), \lambda > 0 \quad (2.4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece izotermal koordinatlara göre

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = \lambda^2 \text{ ve } \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi^1}, \frac{\partial X}{\partial \xi^2} \right\rangle = 0$$

yazabiliriz üstelik $\xi=(\xi^1, \xi^2)$ izotermal koordinatlar M 'nin her noktasında tanımlanabilir [13] ve $z = \xi_1 + i\xi_2$ şeklinde kompleks koordinatlar tanımlayarak M 'yi bir Riemann yüzeyi olarak düşünebiliriz.

L^3 de M 'ye uyarlanan bir $\{e_1, e_2, e_3\}$ Lorentz çatısını belirleyelim. (ξ^1, ξ^2) koordinatlarına göre X dahil etme dönüşümünün yerel ifadesi $X(\xi) = (X^1(\xi^1, \xi^2), X^2(\xi^1, \xi^2), X^3(\xi^1, \xi^2))$ olsun. $i=1,2$ için

$$e_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \xi^i} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial X^1}{\partial \xi^i}, \frac{\partial X^2}{\partial \xi^i}, \frac{\partial X^3}{\partial \xi^i} \right) \quad (2.4.2)$$

tanımlayalım. $\{e_1, e_2\}$ M 'nin yönü ile uyumlu bir ortonormal çatısını belirler. Şimdi $e_3=e_1 \times e_2$ tanımlayalım. Buradaki vektörel çarpım Tanım 2.3.1 de verdiğimiz Lorentz çarpımıdır, $\langle e_3, e_i \rangle = 0$ $i=1,2$ ve Önerme 2.3.2 den $\langle e_3, e_3 \rangle = -1$ olduğundan e_3 vektörü zamansaldır. Yerel koordinatlara göre e_3 vektörü:

$$e_3 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial X^3}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial X^1}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^1} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^2} \right) \quad (2.4.3)$$

Şimdi $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal çatı ve $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ dual çatı olsun, $\omega^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha$. D, R^3 de bir bağ olsun ve $\{\omega_\beta^\alpha\}$ bağ formları şu şekilde tanımlayalım:

$$dX = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$$

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ ve } \omega_i^3 = \omega_3^i \quad i = 1, 2$$

1. Cartan yapı denkleminde

$$d\omega^\alpha = \sum_\beta \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ ve}$$

2. Cartan yapı denkleminde

$$d\omega_\alpha^\beta = \sum_\gamma \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

yazarız.

M^2 üstünde $\omega^3=0$ olduğundan $\omega^i \wedge \omega^3 = 0$ dır. Şimdi de Cartan Lemma'sından

$$\omega_i^3 = \sum_j h_{ij} \omega^j \quad \text{ve} \quad h_{ij} = h_{ji} \quad (2.4.4)$$

olacak şekilde h_{ij} 'leri tanımlayabiliriz. Bu h_{ij} 'ler ikinci temel formunun bileşenleridir. Ortalama eğriliğini ise

$$H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$$

şeklinde tanımlarız.

$$\omega^i = \lambda d\xi^i \quad (2.4.5)$$

şeklindedir. Gerçekten,

$$\omega^i(e_j) = \lambda d\xi^i \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial X}{\partial \xi^j} \right) = \delta_j^i$$

ve $de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2$ den (2.4.2), (2.4.4) ve (2.4.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_3}{\partial \xi^1} &= h_{11} \frac{\partial X}{\partial \xi^1} + h_{12} \frac{\partial X}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial e_3}{\partial \xi^2} &= h_{21} \frac{\partial X}{\partial \xi^1} + h_{22} \frac{\partial X}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^2 \wedge \omega_2^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2$ den $\omega^3=0$ ve $\omega_2^2=0$ olduğundan (2.4.2) kullanılarak

$d(\lambda d\xi^2) = \lambda d\xi^1 \wedge \omega_1^2$ bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} d\xi^1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} d\xi^2 \\ \omega_2^1 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} d\xi^1 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} d\xi^2\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

elde ederiz. $dX = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$ den

$$d^2 X = e_1 d\omega^1 + \omega^1 de_1 + e_2 d\omega^2 + \omega^2 de_2\tag{2.4.8}$$

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= \lambda d^2 \xi_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} d\xi^1 d\xi^1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} d\xi^1 d\xi^2 \\ d\omega^2 &= \lambda d^2 \xi_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} d\xi^1 d\xi^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} d\xi^2 d\xi^2 \\ de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

(2.4.9) denklemlerini (2.4.8) de kullanırsak

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^1 \partial \xi^1} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} \frac{\partial X}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} \frac{\partial X}{\partial \xi^2} + \lambda^2 h_{11} e_3 \\ \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} \frac{\partial X}{\partial \xi^1} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} \frac{\partial X}{\partial \xi^2} + \lambda^2 h_{21} e_3 \\ \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^2} \frac{\partial X}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi^1} \frac{\partial X}{\partial \xi^1} + \lambda^2 h_{22} e_3\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

yazarız. M 'nin ortalama eğriliği $H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}$ ile verilir ve $H = 0$ ise M maksimaldır

denir. (2.4.10) dan M yüzeyinin L^3 de maksimal olması için gerek ve yeter koşul X dahil etme dönüşümünün M 'de harmonik olmasıdır.

$\phi = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) - ih_{12}$ olsun. Bölüm 2.1. de görüldüğü gibi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} - i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} + i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right)\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

dir. (2.4.11) denklemleri (2.4.6) da kullanılarak

$$\frac{\partial e}{\partial z} = H \frac{\partial X}{\partial z} + \phi \frac{\partial X}{\partial z} \quad (2.3.12)$$

yazarız. M 'nin K Gauss eğriliği Gauss denkleminde $K = -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)$ şeklinde olduğundan

$$K = -H^2 + |\phi|,$$

elde ederiz.

2.4.2. Gauss Dönüşümü

M yüzeyinin 3-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayında uzaysal maksimal dahil etme dönüşümü $X : M \rightarrow L^3$ olsun. X 'in G Gauss dönüşümü [12] M 'nin her noktasını, indirgenmiş metriğe göre eğriliği -1 olan $H^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$ uzaysal yüzeyin bir noktasına tekabül ettiren bir dönüşümdür. H^2 iki parçalı hiperboloid dir.

Şimdi H^2 de bir kompleks yapı tanımlayacağız. $U_1 = H^2 - \{(0, 0, 1)\}$ ve $U_2 = H^2 - \{(0, 0, -1)\}$ olsun. $\psi_1 : U_1 \rightarrow C$ ve $\psi_2 : U_2 \rightarrow C$

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3} \\ \psi_2(x) &= \frac{x^1 - ix^2}{1 + x^3} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

şeklinde tanımlanan stereografik izdüşüm dönüşümleri ile kompleks koordinatları tanımlarız. Aslında $\psi_1(x)$, $(0, 0, 1) \in H^2$ kuzey kutbunu $x \in U_1$ noktasına birleştiren doğrunun (x^1, x^2) düzlemi ile arakesitidir. $\zeta = x^1 + ix^2$ olarak (x^1, x^2) düzlemini C ile özdeş yapabiliriz. Aynı şekilde ψ_2 de $(0, 0, -1)$ güney kutbundan stereografik izdüşüm dönüşümüdür. ψ_1 ve ψ_2 'nin görüntüleri $C - \{|\zeta| = 1\}$ içindedir ve ters dönüşümleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}\psi_1^{-1}(\zeta) &= \left(\frac{2\operatorname{Re}\zeta}{1-|\zeta|^2}, \frac{2\operatorname{Im}\zeta}{1-|\zeta|^2}, -\frac{1+|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} \right), \zeta \in C - \{|\zeta|=1\} \\ \psi_2^{-1}(\zeta) &= \left(\frac{2\operatorname{Re}\zeta}{1-|\zeta|^2}, -\frac{2\operatorname{Im}\zeta}{1-|\zeta|^2}, \frac{1+|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} \right), \zeta \in C - \{|\zeta|=1\}\end{aligned}\tag{2.4.14}$$

$x \in U_1 \cap U_2$ için $\psi_1(x) \cdot \psi_2(x) = -1$ olduğu açıktır. $\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = -\frac{1}{\zeta}$, $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = -\frac{1}{\zeta}$ ve

$\zeta \neq 0$ olduğundan $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ dönüşümü holomorftir böylece bir kompleks yapı belirler.

Sonuçta, bu dönüşümler şu şekilde gösterilebilir:

$$M \xrightarrow{G} H^2 \subset L^3 \xrightarrow{\psi_i} C - \{|\zeta|=1\}$$

Gauss dönüşümü çoğu zaman $\Psi_i = \psi_i \circ G$, $i=1,2$ olarak alınır. Bundan sonra biz de Gauss dönüşümünü Ψ olarak alacağız. Eğer bir ifade aynı zamanda Ψ_1 ve Ψ_2 için geçerli ise o zaman i indisini ihmal ederek sadece Ψ yazacağız.

2.4.3. Beltrami Denklemi

M, L^3 içinde $X: M \rightarrow L^3$ dönüşümü ile dahil edilmiş uzaysal yüzey ve Ψ , Bölüm 2.4.2. de tanımlanan Gauss dönüşümü olsun. Ψ dönüşümünün Beltrami denklemini sağladığını göstermek için aşağıdaki Lemma'yı kanıtlayalım.

Lemma 2.4.1. $X = (X^1, X^2, X^3): M \rightarrow L^3$ uzaysal dahil etme dönüşümü aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\frac{\partial(X^1 + iX^2)}{\partial z} = -\Psi_1 \frac{\partial X^3}{\partial z}\tag{2.4.15}$$

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} = -\Psi_1 \frac{\partial(X^1 - iX^2)}{\partial z}\tag{2.4.16}$$

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} \frac{\partial(X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda^2 \Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2}\tag{2.4.17}$$

Kanıtlama: İzotermal (ξ^1, ξ^2) koordinatlar ve $z = \xi^1 + i\xi^2$ için

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \frac{\lambda^2}{2} \text{ ve } \left\langle \frac{\partial X}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial X}{\partial \bar{z}} \right\rangle = 0. \quad (2.4.18)$$

Diğer taraftan M 'ye uyarlanan $\{e_1, e_2, e_3\}$ Lorentz çatısı için (2.4.3) den

$$e_3 = -\frac{2i}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{\partial X^3}{\partial z} \frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \frac{\partial X^3}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial X^1}{\partial z} \frac{\partial X^3}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial X^3}{\partial z} \frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial X^1}{\partial z} \frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}} \right). \quad (2.4.19)$$

ve (2.4.13) den $e_3 = (e_3^1, e_3^2, e_3^3)$ alırsak

$$\Psi_1 = \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3} \quad (2.4.20)$$

yazarız. Buradan $|\Psi_1|^2 = -\frac{1 + e_3^3}{1 - e_3^3}$ ve

$$(1 - |\Psi_1|^2)(1 - e_3^3) = 2. \quad (2.4.21)$$

(2.4.19) denklemini (2.4.20) de yerine yazıp (2.4.18) ve (2.4.21) i kullanarak

$$\frac{\partial X^1}{\partial z} + i \frac{\partial X^2}{\partial z} + \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3} \frac{\partial X^3}{\partial z} = 0$$

buluruz, bu da (2.4.15) denklemdir. Aynı şekilde

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} + \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3} \frac{\partial X^1}{\partial z} - i \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3} \frac{\partial X^2}{\partial z} = 0$$

denklemini (2.4.16) yı ve

$$\frac{\partial X^3}{\partial z} \frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial X^3}{\partial z} \frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} + \lambda^2 \frac{e_3^1 + ie_3^2}{1 - e_3^3} \frac{(1 - e_3^3)^2}{4} = 0$$

denklemini de (2.4.17) denklemini ispatlar.

Şimdi de Ψ Gauss dönüşümünün türevlerini bulacağız.

Önerme 2.4.1. Ψ_1 Gauss dönüşümünün türevleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{H}{2} (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}}, \quad (2.4.22)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\phi}{2} (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial z}. \quad (2.4.23)$$

Kanıtlama: (2.4.20) denklemini \bar{z} 'ye göre türetip ve (2.4.12) yi uygularsak

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{1 - e_3^3} \left[H \frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial X^1}{\partial \bar{z}} + iH \frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial X^2}{\partial \bar{z}} \right] + \frac{1}{1 - e_3^3} \Psi_1 \left[H \frac{\partial X^3}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial X^3}{\partial \bar{z}} \right]$$

buluruz. Sonra da (2.4.15), (2.4.16) ve (2.4.21) kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} &= \frac{1 - |\Psi_1|^2}{2} \left[H \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} \right] \\ &\quad - \frac{1 - |\Psi_1|^2}{2} \left[|\Psi_1|^2 H \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} + \bar{\phi} \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} \right] \\ &= \frac{H}{2} (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

buluruz ki bu (2.4.22) yi kanıtlar. (2.4.22) de benzer şekilde kanıtlanır.

Aynı şekilde aşağıdaki önermeyi de kanıtlayabiliriz.

Önerme 2.4.2. Ψ_2 Gauss dönüşümünün kompleks türevleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \bar{z}} = \frac{H}{2} (1 - |\Psi_2|^2)^2 \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial \bar{z}}, \quad (2.4.24)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = \frac{\phi}{2} (1 - |\Psi_2|^2)^2 \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z}. \quad (2.4.25)$$

Bu önermelerden sonra aşağıdaki teorem açıktır.

Teorem 2.4.1. L^3 de uzaysal M yüzeyinin Ψ Gauss dönüşümü aşağıdaki Beltrami denklemini sağlar:

$$H \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} \quad (2.4.26)$$

Önerme 2.4.3. M, L^3 de uzaysal bir yüzey olsun. $p \in M$ noktasında şu koşullar sağlanır:

$$H(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial z}(p) = 0 \quad (2.4.27)$$

$$\phi(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}(p) = 0 \quad (2.4.28)$$

Lemma 2.4.1. deki (2.4.16) denklemini (2.4.17) de kullanarak

$$\left| \frac{\partial(X^1 + iX^2)}{\partial \bar{z}} \right| = \frac{\lambda}{|1 - |\Psi_1|^2|} \quad (2.4.29)$$

Böylece Önerme 2.4.1. den $\alpha = \frac{\lambda |1 - |\Psi_1|^2|}{2}$ için

$$\left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right| = \alpha |H| \text{ ve } \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \bar{z}} \right| = \alpha |\phi| \quad (2.4.30)$$

elde ederiz. $\alpha \neq 0$ olduğundan önerme $p \in \Psi_1^{-1}(C)$ için kanıtlanmış oldu. Aynı şey $p \in \Psi_2^{-1}(C)$ için de geçerlidir.

2.4.4. Weierstrass Gösterim Formülü

L^3 de verilen bir M uzaysal yüzey için Ψ Gauss dönüşümü ve H ortalama eğriliği yardımıyla gösterim formülü verilecektir.

Teorem 2.4.2. $M, X = (X^1, X^2, X^3): M \rightarrow L^3$ dönüşümü ile L^3 içine dahil edilmiş uzaysal bir yüzey olsun. H, M 'nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve Bölüm 2.4.2. de tanımlanan Ψ_i ($i=1,2$) ler M 'nin Gauss dönüşümünü tanımlasın. O takdirde aşağıdaki denklemler sağlanır:

(1) $\Psi_1^{-1}(C)$ 'de

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1 + \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \\
H \frac{\partial X^2}{\partial z} &= i \frac{1 - \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \\
H \frac{\partial X^3}{\partial z} &= -2 \frac{\Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.4.31}$$

(2) $\Psi_2^{-1}(C)$ de

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1 + \Psi_2^2}{(1 - |\Psi_2|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial z}, \\
H \frac{\partial X^2}{\partial z} &= -i \frac{1 - \Psi_2^2}{(1 - |\Psi_2|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial z}, \\
H \frac{\partial X^3}{\partial z} &= 2 \frac{\Psi_2}{(1 - |\Psi_2|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Kanıtlama: (2.4.22) den

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} = \frac{H}{2} (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z} \tag{2.4.33}$$

ve (2.4.15) ve (2.4.16) yi kullanarak

$$\Psi_1^2 \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} = \frac{H}{2} (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial (X^1 + iX^2)}{\partial z} \tag{2.4.34}$$

buluruz. (2.4.33) ve (2.4.34) denklemlerini taraf tarafa toplayarak

$$(1 + \Psi_1^2) \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} = H (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial X^1}{\partial z}$$

ve (2.4.34) ü (2.4.33) den çıkartarak

$$(1 - \Psi_1^2) \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} = -iH (1 - |\Psi_1|^2)^2 \frac{\partial X^2}{\partial z}$$

buluruz. $1-|\Psi_1|^2 \neq 0$ olduğundan $\Psi_1^{-1}(C)$ 'de

$$H \frac{\partial X_1}{\partial z} = \frac{1 + \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \quad (2.4.35)$$

$$H \frac{\partial X^2}{\partial z} = i \frac{1 - \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \quad (2.4.36)$$

ve aynı şekilde (2.4.16) dan

$$H \frac{\partial X^3}{\partial z} = -\Psi_1 H \frac{\partial (X^1 - iX^2)}{\partial z} \quad (2.4.37)$$

yazarız. (2.4.33) ve (2.4.37) den $\Psi_1^{-1}(C)$ 'de, $1-|\Psi_1|^2 \neq 0$ için

$$H \frac{\partial X_3}{\partial z} = -2 \frac{\Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z} \quad (2.4.38)$$

buluruz.

(2) de yer alan denklemler aynı şekilde kanıtlanabilir. (2) yi kanıtlamak için $\Psi_1^{-1}(C) \cap \Psi_2^{-1}(C)$ 'de $\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x) = -1$ denklemini kullanabiliriz.

Yorum 2.4.1. 3-boyutlu Öklid uzayında Teorem 2.4.2. ye tekabül eden gösterim formülü Kenmotsu [14]'de kanıtlanmıştır.

Yorum 2.4.2 (2.4.22) ve (2.4.24) denklemleri yerine (2.4.23) ve (2.4.25) kullanılarak Ψ ve H aracılığı ile gösterim formülü şu şekilde verilir :

$\Psi_1^{-1}(C)$ 'de

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \frac{\partial X^1}{\partial z} &= \frac{1 + \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \\ \bar{\phi} \frac{\partial X^2}{\partial z} &= i \frac{1 - \Psi_1^2}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}, \\ \bar{\phi} \frac{\partial X^3}{\partial z} &= -2 \frac{\Psi_1}{(1 - |\Psi_1|^2)^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

$\Psi_2^{-1}(C)$ için de aynı ifadeler geçerlidir.

Şimdi M , $X = (X^1, X^2, X^3): M \rightarrow L^3$ ile L^3 içine dahil edilmiş uzaysal yüzey ve $\phi \neq 0$

olsun. $F = \frac{1}{\phi(1-|\Psi_1|^2)} \frac{\partial \overline{\Psi_1}}{\partial z}$ dersek, o zaman (2.4.39) dan

$$\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}, \frac{\partial X^2}{\partial z}, \frac{\partial X^3}{\partial z} \right) = \left(F(1 + \Psi_1^2), iF(1 - \Psi_1^2), -2F\Psi_1 \right) \quad (2.4.40)$$

yazabiliriz. Sonuçta,

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X^1}{\partial z} - i \frac{\partial X^2}{\partial z} \right) \quad (2.4.41)$$

bulunur.

M 'nin L^3 de maksimal olduğunu düşünürsek o zaman X dahil etme dönüşümünün her bileşeni M 'de harmoniktir . Böylece F fonksiyonu (2.4.41) den holomorfik olacaktır. (2.4.40) denklemi 3-boyutlu Öklid uzayında minimal yüzeyler için bilinen klasik Weierstrass-Enneper formülünün Lorentz karşılığıdır. Üstelik, aşağıdaki önerme ispatlanabilir.

Önerme 2.4.4. (Kobayashi [15]) L^3 de herhangi bir bağlantılı maksimal uzaysal M yüzeyi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$X(z) = 2 \operatorname{Re} \int^z \left(F(1 + \Psi_1^2), iF(1 - \Psi_1^2), -2F\Psi_1 \right) dz + c \quad (2.4.42)$$

Burada $z \in M$ ve $c \in L^3$ dir ve integral sabit bir noktadan bir z noktasına kadar olan herhangi bir yay boyunca alınmıştır.

Bu önermeyi ispatlamak için ilk önce Kobayashi [15] `de yer alan teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.4.3. (Birinci türden Weierstrass-Enneper formülü). D , C `de herhangi bir tanım kümesi, fg^2 , D `de holomorfik ve $z \in D$ için $|g(z)| \neq 1$ olmak üzere sırasıyla holomorfik ve meromorfik f ve g fonksiyonları için, L^3 de herhangi bir maksimal uzaysal yüzey:

$$X(z) = 2 \operatorname{Re} \int^z \left(\frac{1}{2} f(1 + g^2), \frac{1}{2} if(1 - g^2), -fg \right) dz \quad z \in M \quad (2.4.43)$$

şeklinde verilir.

Kanıtlama: $X : D \rightarrow L^3$ maksimal uzaysal bir yüzey olsun. O zaman Bölüm 2.4.1 den, Δ, D 'de indirgenmiş metriği (Riemann metriği) ile tanımlanan Laplace operatörü olmak üzere $\Delta X = 0$ bulunur. İzotermal koordinatlar için $z = \xi^1 + i\xi^2$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} - i \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right)$

ve $2 \frac{\partial X}{\partial z} = (P_1, P_2, P_3)$ alalım. İzotermal koordinatları kullanarak M doğal bir konformal yapıya sahip olur. X in konformalliğinden

$$P_1^2 + P_2^2 - P_3^2 = \left\langle 2 \frac{\partial X}{\partial z}, 2 \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle = 0,$$

ve $\Delta X = 0 \Rightarrow \overline{\frac{\partial}{\partial z}} \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial z}$ holomorftir $\Rightarrow P_i$ holomorftir. $f = P_1 - iP_2$ ve

$g = -\frac{P_3}{f}$ alalım. Buradan f 'nin holomorftir ve g 'nin meromorftir olduğu görülür.

Ayrıca $f \cdot g^2, f=0$ hali dışında holomorftir. $f=0$ hali L^3 de (x^1, x^2) -düzlemine tekabül eder ve bu düzlem (2.4.43) de $f=1$ ve $g=0$ almak suretiyle elde edilir. Böylece,

$$P_1 = \frac{1}{2} f (1 + g^2), P_2 = \frac{i}{2} (1 - g^2) \text{ ve } P_3 = -fg$$

elde ederiz. Bu da teoremi ispatlar.

Önerme 2.4.4. ün kanıtı. Burada F (2.4.41) de tanımladığımız holomorftir fonksiyondur. Ψ_1 , (2.4.40) da $\Psi_1 = -\frac{1}{2F} \frac{\partial X^3}{\partial z}$ şeklinde tanımlanmıştır ve meromorftir bir fonksiyondur. $F \cdot \Psi_1^2, F=0$ durumu hariç M 'de holomorftir. $F=0$ durumu teoremden gösterdiğimiz gibi L^3 de (x^1, x^2) -düzlemine tekabül eder.

Sonuç 2.4.1. (İkinci türden Weierstrass-Enneper formülü) D, C 'de herhangi bir tanım kümesi, fg^2, D 'de holomorftir ve $z \in D$ için $|g(z)| \neq 1$ olmak üzere sırasıyla holomorftir ve meromorftir f ve g fonksiyonları için, L^3 de herhangi bir maksimal uzaysal yüzey:

$$X(z) = \text{Re} \left(\int \left(\frac{1}{2} f (g^2 + 1), ifg, \frac{1}{2} f (g^2 - 1) \right) dz \right), \text{Re } g \neq 0 \quad (2.4.44)$$

şeklinde yazılabilir.

Kanıtlama: (2.4.43) de f ve g yerine sırasıyla $\frac{f(1+g)^2}{2}$ ve $\frac{1-g}{1+g}$ alırsak (2.4.44) elde

edilir.

Örnek 2.4.1. L^3 deki maksimal yüzeyin en basit örneği uzaysal düzlemdir, o da (2.4.43) de $g=sabit$ aldığımızda bulunur. Bu düzlem L^3 de tam maksimal tek yüzeydir. Bunun ispatı S.Y.Cheng ve S.T.Yau [16] da verilmiştir.

Örnek 2.4.2. (Birinci türden Enneper yüzeyi) (Şekil 2.4.1): (2.4.43) de $f = 2$, $g = z$ ve $D = C - \{|z|=1\}$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int \left((1+z^2), i(1-z^2), -2z \right) dz \right)$$

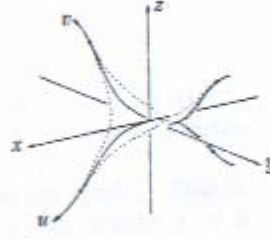
Örnek 2.4.3. (İkinci türden Enneper yüzeyi) (Şekil 2.4.2): (2.4.44) de $f = 2a$, $g = z$, $a \neq 0$, $a \in R$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int a \left(z^2 + 1, 2iz, z^2 - 1 \right) dz \right)$$

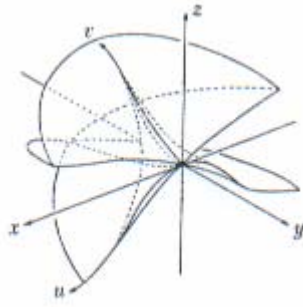
$$X(z) = a \left(\frac{1}{3}u^3 - uv^2 + u, 2uv, \frac{1}{3}u^3 - uv^2 - u \right), z = u + iv .$$

Bu yüzey aşağıda verilen ifadeden görüleceği gibi $(1,0,1)$ ışıksal eksenine göre dönel bir yüzeydir.

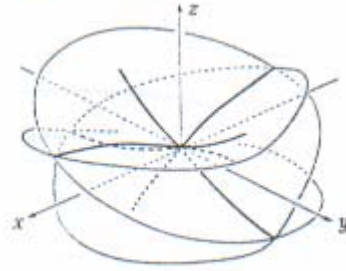
$$X(z) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}v^2 & v & \frac{1}{2}v^2 \\ -v & 1 & v \\ -\frac{1}{2}v^2 & v & 1 + \frac{1}{2}v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} au + \frac{a}{3}u^3 \\ 0 \\ -au + \frac{a}{3}u^3 \end{pmatrix} \quad u \neq 0$$



$$\{u^2+v^2 \leq 1\}$$

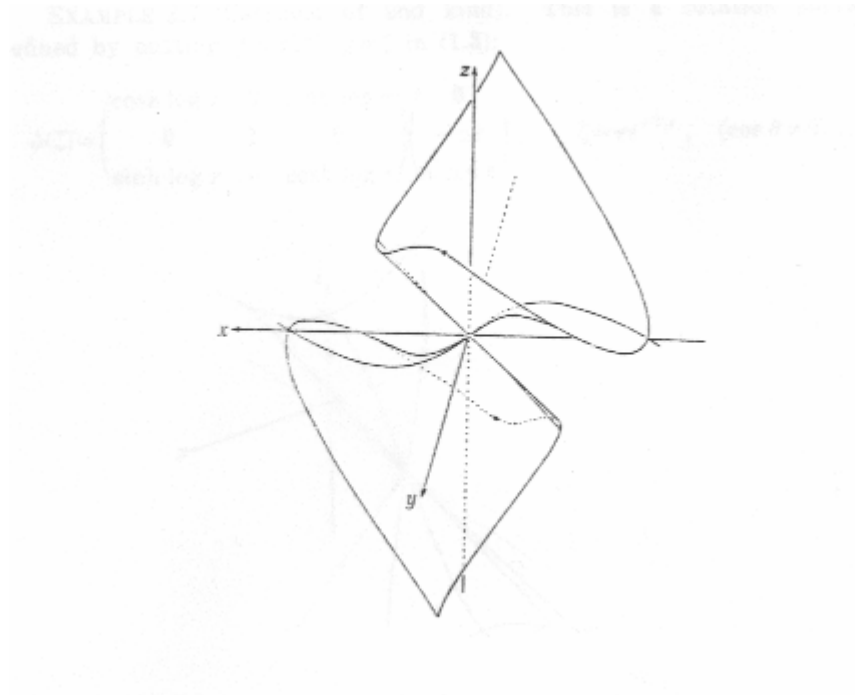


$$\{y \leq 0\}$$



$$\{u^2-1/3v^2 \geq 1\} \cup \{v^2-1/3u^2 \geq 1\}$$

Şekil 2.4.1: Birinci türden Enneper yüzeyi



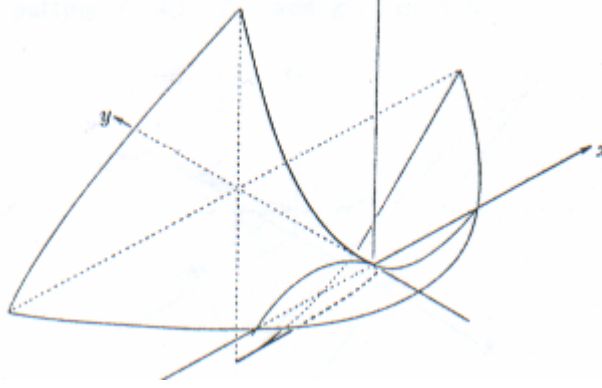
Şekil 2.4.2: İkinci türden Enneper yüzeyi

Örnek 2.4.4 (İkinci türden Enneper yüzeyinin eşleniği) (Şekil 2.4.3): (2.4.44) de $f = 2ia$, $g = z$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int a \left(i(z^2 + 1), -2z, i(z^2 - 1) \right) dz \right)$$

$$X(z) = a \left(-v + \frac{1}{3}v^3, v^2, v + \frac{1}{3}v^3 \right) - au^2 (v, 1, v)$$

bulunur. Sonuçta bu yüzeyin bir regle yüzey olduğu görülür.



$$\{y \leq 3a\} \cap \{u^2 - 1 \leq v^2 \leq 1\}$$

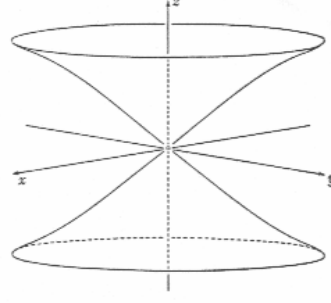
Şekil 2.4.3: İkinci türden Enneper yüzeyinin eşleniği

Örnek 2.4.5 (Birinci türden katenoid) (Şekil 2.4.4): (2.4.43) den $f = \frac{a}{z^2}$, $g = z$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(a \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right), -\frac{1}{z} \right) dz \right),$$

$$X(z) = a (\sinh \ln r \cdot \cos \theta, \sinh \ln r \cdot \sin \theta, -\ln r), z = re^{i\theta}, a \neq 0$$

dönel yüzeyi bulunur.



Şekil 2.4.4: Birinci türden katenoid

Örnek 2.4.6 (Helisoid): Bu yüzey birinci tür katenoidin eşleniğidir ve (2.4.43) de

$f = i\frac{a}{z^2}$, $g = z$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int a \left(\frac{i}{2} \left(\frac{1}{z^2} + 1 \right), -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right), -\frac{i}{z} \right) dz \right),$$

$$X(z) = (0, 0, a\theta) + a \cosh \log r (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad z = re^{i\theta}$$

şeklinde bulunur.

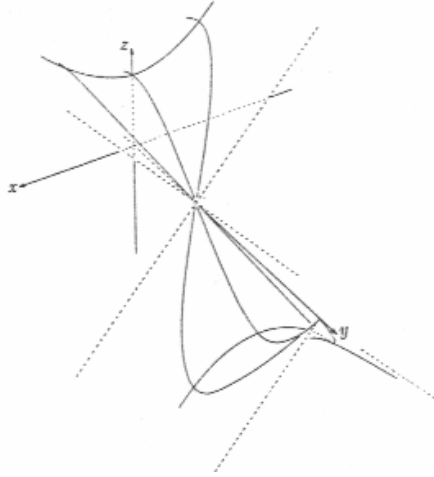
Örnek 2.4.7 (İkinci türden katenoid) (Şekil 2.4.5): (2.4.44) de $f = \frac{a}{z^2}$, $g = z$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int a \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right), \frac{i}{z}, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \right) dz \right)$$

$$X(z) = a (\sinh \ln r \cdot \cos \theta, -\theta, \cosh \ln r \cdot \cos \theta), \quad z = re^{i\theta}$$

bulunur ve bu yine bir dönel yüzeydir, çünkü

$$X(z) = \begin{pmatrix} \cosh \ln r & 0 & \sinh \ln r \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \ln r & 0 & \cosh \ln r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a\theta \\ a \cos \theta \end{pmatrix}, \cos \theta \neq 0.$$



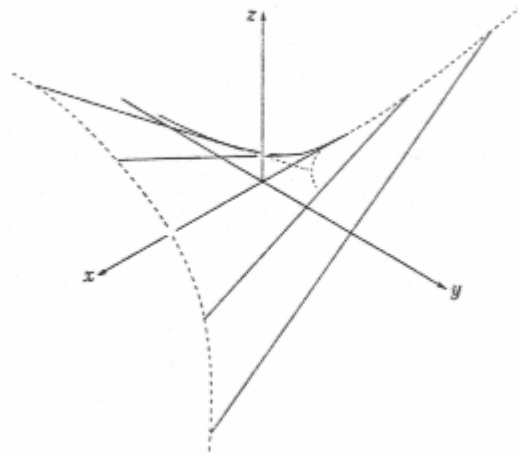
Şekil 2.4.5: İkinci türden katenoid

Örnek 2.4.8 (İkinci türden helisoid) (2.4.44) de $f = i\frac{a}{z^2}$, $g = z$ alırsak

$$X(z) = \operatorname{Re} \left(\int a \left(\frac{i}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right), -\frac{1}{z}, \frac{i}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \right) dz \right)$$

$$X(z) = a(0, -\ln r, 0) + a \sin \theta (-\cosh \ln r, 0, -\sinh \ln r), z = re^{i\theta}$$

buluruz ki bu yine bir regle yüzeydir.



Şekil 2.4.6: İkinci türden helisoid

2.4.5. L^3 de Dönel ve Regle Maksimal Yüzeyler

Bir yüzey, bir l doğrusunu sabit bırakan L^3 deki bir grup hareketi altında değişmez ise bu yüzeye l eksenli bir dönel yüzey adı verilir. Maksimal dönel ve regle yüzeyleri Kobayashi[15] 'de çalışmış ve aşağıdaki iki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.4.4. L^3 deki herhangi bir maksimal dönel yüzey aşağıda verilen yüzeylerden birisinin bir parçasına eşdeğerdir:

- 1) (x,y) -düzlemi;
- 2) Birinci türden katenoid;
- 3) İkinci türden katenoid;
- 4) İkinci türden Enneper yüzeyi.

Kanıtlama: Zamansal eksenyle (x,y) düzlemi dönel bir yüzeydir ve her bir uzaysal düzlem bu düzleme eşdeğerdir. Bu nedenle de alacağımız dönel yüzeylerin düzlem olmadığını kabul edeceğiz. Dönel yüzeyin eksenini zamansal veya uzaysal ise, her bir zamansal veya uzaysal birim vektör bir Lorentz dönüşümü ile sırasıyla $(0,0,1)$ veya $(0,1,0)$ vektörüne dönüştürülebilir, bu nedenle yüzeyin eksenini sırasıyla z -ekseni veya y -ekseni olarak alabiliriz. Bu yüzeyler şu şekilde verilir:

Eksen zamansal ise:

$$X(s,t) = (f(t)\cos s, f(t)\sin s, t), \quad (2.4.45)$$

eksen uzaysal ise:

$$X(s,t) = (g(t)\sinh s, g(t)\cosh s, t). \quad (2.4.46)$$

(2.4.45) den X_s, X_t, X_{ss}, X_{st} ve X_{tt} yi hesaplayıp kullanırsak $E = f^2$, $F = 0$, $G = f'^2 - 1$ ve $W^2 = f^2(f'^2 - 1)$ buluruz.

$$X_s \wedge X_t = (-f \cos s, -f \sin s, -ff'),$$

$$[X_s, X_t, X_{ss}] = f^2, [X_s, X_t, X_{st}] = 0, [X_s, X_t, X_{tt}] = -ff''$$

ve böylece maksimal yüzeyin denklemi

$$ff'' = f'^2 - 1, f'^2 - 1 > 0 \quad (2.4.47)$$

şeklinde bulunur.

Aynı şekilde (2.4.46) için $E = g^2$, $F = 0$, $G = -g'^2 + 1$ ve $W^2 = g^2(-g'^2 + 1)$,

$$X_s \times X_t = (g \sinh s, gg', g \cosh s)$$

ve

$$[X_s, X_t, X_{ss}] = -g^2, [X_s, X_t, X_{st}] = 0, [X_s, X_t, X_{tt}] = -gg'$$

buluruz, böylece maksimal yüzeyin denklemi

$$gg'' = g'^2 - 1, g'^2 - 1 < 0 \quad (2.4.48)$$

şeklinde bulunur. Böylece (2.4.47) ve (2.4.48) den $f(t) = a^{-1} \sinh(at + b)$ ve $g(t) = a^{-1} \cosh(at + b)$, a , b sabit, elde ederiz. Böylece yüzeyin ekseninin zamansal veya uzaysal olması halinde yüzeyin yerel olarak sırasıyla birinci türden katenoide veya ikinci türden katenoide eşdeğer olduğunu elde ederiz.

Eksen ışıkasal ise onu $R \cdot (1,0,1)$ şeklinde alabiliriz. $(1,0,1)$ vektörünü sabit bırakan Lorentz grubun altgrubu

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & s & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix}, s \in R \right\}$$

dır. Böylece yüzey

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & s & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) + t \\ 0 \\ h(t) - t \end{pmatrix} \text{ veya}$$

$$X(s, t) = (h(t) + t - s^2 t, -2st, h(t) - t - s^2 t) \quad (2.4.49)$$

şeklinde verilir.

Burada $E = 4t^2$, $F = 0$, $G = 4h'$, $W^2 = 16t^2h'$, $e = 8t^2$, $f = 0$, $g = -4h''t$ dır ve maksimal yüzeyin denklemi $Eg - 2fF + Ge = 0$ ifadesinden

$$2h' - h''t = 0, h' > 0, t \neq 0 \quad (2.5.50)$$

olarak bulunur. Bunun çözümü $h(t) = at^3 + b, a > 0$ olduğundan ikinci türden bir Enneper yüzeyi gösterir.

Maksimal regle yüzeyler için aşağıdaki teorem yine Kobayashi [15] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.4.5. L^3 deki her regle yüzey aşağıda verilen yüzeylerden birisinin bir parçasına eşdeğerdir:

- 1) (x,y) -düzlemi,
- 2) helisoid,
- 3) ikinci türden helisoid,
- 4) ikinci türden Enneper yüzeyinin eşleniği.

2.5. L^3 DE MAKSİMAL RIEMAN YÜZEYLERİNİN VARLIĞI

$X: M \rightarrow L^3$ maksimal uzaysal dahil etme dönüşümü ve $\Psi = \psi \circ G$ Bölüm 2.4.2 de tanımlanan Gauss dönüşümünün stereografik izdüşümü ise o zaman M üstünde

$$\Phi_1 = \frac{i}{2}\eta(1 - \Psi^2), \Phi_2 = -\frac{1}{2}\eta(1 + \Psi^2), \Phi_3 = \eta\Psi \quad (2.5.1)$$

1-formları ortak sıfırları olmaksızın holomorfik olmak üzere holomorfik η 1-formu bulunabilir. Üstelik bu 1-formların reel periyotları yoktur ve X , bir ötelemeye kadar

$$X = \text{Re} \int (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \quad (2.5.2)$$

ile belirlenir. M 'de ds^2 indirgenmiş Riemann metriği

$$ds^2 = \langle dX, dX \rangle = \left(\frac{|\eta|}{2} (1 - |\Psi|^2) \right)^2 \quad (2.5.3)$$

şeklindedir.

Tersine, M Riemann yüzeyi üstündeki her $p \in M$ için $|\Psi(p)| \neq 1$ olmak üzere (2.5.1) de tanımlanan holomorfik Φ_i -formlarının ortak sıfırları ve reel periyotları olmayacak şekilde bir meromorfik dönüşüm Ψ ve bir holomorfik 1-form η olsun. O zaman, (2.5.2) denklemi M den L^3 e konformal uzaysal maksimal bir dahil etme dönüşümü belirler. $\{|\Psi|=1\} \neq \emptyset$ ise o takdirde $X: M \rightarrow L^3$ e singüler noktaları olan maksimal uzaysal dahil etme dönüşümü ve $X(M)$ 'ye de L^3 de singüler noktaları olan maksimal uzaysal bir yüzeydir deriz. $(M, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ 'e veya (M, Ψ, η) üçlüsüne ise, X in Weierstrass gösterimi adı verilir.

Yorum 2.5.1. $(M, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \rightarrow (M, i\Phi_1, i\Phi_2, \Phi_3)$ dönüşümü L^3 de maksimal yüzeylerin Weierstrass gösterimini R^3 deki minimal yüzeylerin Weierstrass gösterimine dönüştürür.

R^3 de sıfırdan farklı bir vektör v ve $\Pi_v = \{x \in R^3 : \langle x, v \rangle_0 = 0\}$ düzlemi verilsin. v vektörü uzaysal, zamansal veya ışıksal olabilir. Böylece, L^3 de bir lineer izometriye kadar, $v=(0,0,1)$, $v=(1,0,0)$ ve $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ alabiliriz.

Bu bölümde $X(M)$ 'nin E^3 de normal vektörleri v olan paralel düzlemler üstünde sıfırdan farklı sabit eğrilikli eğrilerden (yani L^3 deki çemberlerden) oluşturulduğunu düşüneceğiz. $v=(0,0,1)$ durumunda, $X(M)$, Bölüm 2.3 de görüldüğü gibi paralel yatay düzlemler üstündeki Öklid çember parçalarından oluşturulmuştur. $v=(1,0,0)$ ve $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ durumunda ise $X(M)$, sırasıyla Öklid hiperbol ve parabol parçalarından oluşturulur.

Aşağıdaki üç teoremdede [17], L^3 de bir izometriye kadar X dahil etme dönüşümünün Weierstrass gösterimi açıklanacaktır. Sonuçlar yerel olduğundan M 'nin bağlantılı ve $\forall P \in M$ için $\langle \text{Re}(\Phi(P), v) \rangle_0 + i \langle \text{Im}(\Phi(P), v) \rangle_0 \neq 0$ olduğunu düşüneceğiz. Üstelik, $\langle x, v \rangle_0^*$, $\langle x, v \rangle_0$ in harmonik eşleniği olmak üzere $z = \langle X, v \rangle_0 + i \langle X, v \rangle_0^*$ holomorfik fonksiyonunun M 'deki konformal parametre olduğunu varsayacağız.

2.5.1. Çember Parçalarından Oluşturulan Maksimal Uzaysal Yüzeyle

Bu kısımda aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 2.5.1. $X(M)$, normal vektörü $v=(0,0,1)$ olan paralel uzaysal düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulmuşsa, L^3 de bir lineer izometriye ve bir skaler çarpana kadar, X in Gauss dönüşümünün stereografik izdüşümü Ψ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1. \frac{d\Psi}{dz} = \Psi ;$$

$$2. \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 = \Psi (\Psi^2 + 2r\Psi + 1), r \in R .$$

Kanıtlama: $X = (X^1, X^2, X^3)$ ve $v=(0,0,1)$ için $z = \langle X, v \rangle_0 + i \langle X, v \rangle_0^* = X^3 + iX^{3*}$ şeklindeki konformal parametreyi göz önüne alalım. (2.5.1), (2.5.2) ve (2.5.3) den

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{i}{2} \eta (1 - \Psi^2), -\frac{1}{2} \eta (1 + \Psi^2), \eta \Psi \right) \right)$$

yazabiliriz. $\text{Re}(z) = X^3$ olduğundan $\text{Re}(dz) = dX^3 = \eta \Psi$ dir. Böylece,

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi} - \Psi \right) dz, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi} + \Psi \right) dz, dz \right) \right) \quad (2.5.4)$$

$$ds^2 = \left(\frac{1 - |\Psi|^2}{2|\Psi|} \right)^2 |dz|^2$$

buluruz. (M, ds^2) üstünde yay uzunluğu cinsinden parametrelendirilmiş ve bir c sabiti için $X^3(\alpha(t)) = c$ (yani $\text{Re}(z(t)) = c$) olacak şekilde, bir $\alpha(t)$ eğrisini göz önüne alalım.

$$z(\alpha(t)) = \langle X(\alpha(t)), v \rangle_0 + i \langle X(\alpha(t)), v \rangle_0^* = X^3(\alpha(t)) + iX^{3*}(\alpha(t)).$$

Kolaylık için, $z(\alpha(t)) = z(t)$, $X(\alpha(t)) = X(t)$ ve $\Psi(\alpha(t)) = \Psi(t)$ yazalım. s yay

uzunluğunun doğal parametre olması için $\frac{ds}{dt} = 1$ olmalı, böylece $\frac{|1 - |\Psi|^2|}{2|\Psi|} \left| \frac{dz}{dt} \right| = 1$

buluruz. $\text{Re}\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0$ olduğundan $\frac{dz}{dt} = \pm \frac{2i|\Psi|}{1 - |\Psi|^2}$ dir. $\Psi \rightarrow \frac{1}{\Psi}$ değişimine kadar (bu ise

L^3 de $x_1=0$ düzlemine göre simetriyi tanımlayan lineer izometriye tekabül eder), Φ_3 değişmez ve

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2i|\Psi|}{|\Psi|^2 - 1} \quad (2.5.5)$$

yazabiliriz. X uzaysal ve $v=(0,0,1)$ zamansal olduğundan $\frac{dX}{dt}$ ve $\frac{d^2X}{dt^2}$ uzaysaldır,

böylece $X(t)$ eğrisinin $\kappa(t)$ düzlemsel eğriliği aşağıdaki şekilde verilir:

$$\kappa(t) = \sqrt{\left\langle \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2X}{dt^2} \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2X}{dt^2} \right\rangle_0}.$$

$\Psi = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi$ için

$$\frac{dX^1}{dt} = \frac{\text{Re } \Psi}{|\Psi|} \Rightarrow \frac{d^2X^1}{dt^2} = \frac{(\text{Im } \Psi)^2}{|\Psi|^3} \frac{d(\text{Re } \Psi)}{dt} - \frac{\text{Re } \Psi \cdot \text{Im } \Psi}{|\Psi|^3} \frac{d(\text{Im } \Psi)}{dt},$$

$$\frac{dX^2}{dt} = \frac{\text{Im } \Psi}{|\Psi|} \Rightarrow \frac{d^2X^2}{dt^2} = -\frac{\text{Re } \Psi \cdot \text{Im } \Psi}{|\Psi|^3} \frac{d(\text{Re } \Psi)}{dt} + \frac{(\text{Re } \Psi)^2}{|\Psi|^3} \frac{d(\text{Im } \Psi)}{dt},$$

$$\left\langle \frac{d^2 X}{dt^2}, \frac{d^2 X}{dt^2} \right\rangle_0 = \left(\frac{d^2 X^1}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 X^2}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 X^3}{dt^2} \right)^2 = \frac{1}{|\Psi|^4} \left(\operatorname{Im} \Psi \frac{d(\operatorname{Re} \Psi)}{dt} - \operatorname{Re} \Psi \frac{d(\operatorname{Im} \Psi)}{dt} \right)^2$$

$$\kappa(t) = \operatorname{Im} \left(\frac{d \log(\Psi)}{dt} \right)$$

buluruz. $\Phi_3=dz$ olduğundan bu form M 'nin hiçbir noktasında sıfır olamaz, aynı durum Ψ için de geçerlidir. Böylece $\log(\Psi)$ dönüşümü M 'de iyi-tanımlı ve holomorftir. Yine kolaylık için $u = \operatorname{Re}(\log(\Psi))$ ve $v = \operatorname{Im}(\log(\Psi))$ alalım.

Bu noktada,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sinh(u(\alpha(t)))}$$

ile tanımlanan yeni $s(t)$ parametresini tanımlayalım. (2.5.5) denkleminde, $\sinh(u) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$, $\overline{\log(\Psi)} = \log(\overline{\Psi})$ ve $\operatorname{Re}(\log(\Psi)) = \log|\Psi|$ olduğunu kullanarak,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{2i|\Psi|}{|\Psi|^2 - 1} \sinh u(t) = i$$

buluruz, böylece herhangi bir c sabiti için $s(t) = \operatorname{Im}(z(t))$ seçebiliriz. Diğer taraftan,

$$\kappa(s) = \kappa(t(s)) = \operatorname{Im} \left(\frac{d \log(\Psi)}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{\sinh u}$$

dir ve $\kappa(s)$ sabit olduğundan,

$$\frac{d\kappa(s)}{dt} = \sinh u \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{dv}{ds} \cosh u \frac{du}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \coth(u) = 0$$

bulunur.

$$S_1 = \operatorname{Im} \left(\left(\frac{d \log(\Psi)}{dz} \right)^2 \frac{3|\Psi|^2 - 1}{2(|\Psi|^2 - 1)} - \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right) \frac{1}{\Psi} \right) \quad (2.5.6)$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{d \log(\Psi)}{dz} \right)^2 \frac{3|\Psi|^2 - 1}{2(|\Psi|^2 - 1)} - \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right) \frac{1}{\Psi} \right) &= \operatorname{Im} \left(\left(\frac{du + idv}{dz} \right)^2 \left(1 + \frac{|\Psi|^2 + 1}{2(|\Psi|^2 - 1)} \right) \right) \\ - \operatorname{Im} \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{d(e^u e^{iv})}{dz} \right) \frac{1}{\Psi} \right) &= (2 + \coth u) \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} - 2 \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \end{aligned}$$

yani

$$S_1 = 0 \quad (2.5.7)$$

bulunur.

$$h_1 = \left(2 \left(\frac{d^2 \Psi}{dz^2} \right) \frac{1}{\Psi} - 3 \left(\frac{d(\log(\Psi))}{dz} \right)^2 \right) |\Psi|^2$$

olsun. Holomorfik $\operatorname{Im}(h_1)$ fonksiyonunun sanal kısmı harmonik bir fonksiyondur.

$$\operatorname{Im}(h_1) = e^{2u} \left(2 \frac{d^2 v}{dz^2} - 2 \frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} \right)$$

ve $\operatorname{Im}(h_1)$ harmonik olduğundan $\frac{1}{|\Psi|^2} \operatorname{Im}(h_1)$ de harmoniktir. Böylece,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\operatorname{Im} \frac{h_1}{|\Psi|^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\operatorname{Im} \frac{h_1}{|\Psi|^2} \right) = 0 \text{ dan}$$

$$2 \frac{d^4 v}{dz^4} - 2 \frac{d^3 u}{dz^3} - 4 \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{d^2 v}{dz^2} - 2 \frac{du}{dz} \frac{d^3 v}{dz^3} = 0$$

buluruz.

$$\lambda_1 = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - 2\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 - 4\frac{d^2u}{dz^2} \frac{1}{1-|\Psi|^2} + 2\frac{d^4v}{dz^4} - 2\frac{d^3u}{dz^3} - 4\frac{d^2u}{dz^2} \frac{d^2v}{dz^2} - 2\frac{du}{dz} \frac{d^3v}{dz^3}$$

$$\frac{\mu}{g} = 4\frac{d^2u}{dz^2} \frac{1}{1-|\Psi|^2} - 2i\left(\frac{du}{dz} \frac{dv}{dz} - \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

alalım. Böylece $\lambda_1 \in R$ ve $\mu \in C$ için

$$\frac{h_1}{|\Psi|^2} - \lambda_1 - \frac{\mu}{\Psi} = 0 \quad (2.5.8)$$

Özellikle de, $\text{Im}(h_1) = -\text{Im}(\bar{\mu}\Psi)$. Diğer taraftan,

$$h_2 = 2\left(\frac{d^2\Psi}{dz^2}\right) \frac{1}{\Psi} - \left(\frac{d \log(\Psi)}{dz}\right)^2$$

alırsak ve (2.5.7) yi kullanırsak $\text{Im}(h_1) = \text{Im}(h_2)$ buluruz. Böylece, (2.5.8) den

$$0 = \text{Im}\left(\frac{h_1}{|\Psi|^2}\right) - \text{Im}\left(\frac{\mu}{\Psi}\right) = \text{Im}(h_1) - \text{Im}(\mu\bar{\Psi}) = \text{Im}(h_2) + \text{Im}(\bar{\mu}\Psi),$$

$$h_2 + \bar{\mu}\Psi + \lambda_2 = 0, \lambda_2 \in R \quad (2.5.9)$$

buluruz. (2.5.8) ve (2.5.9) denklemlerinin toplamını alarak $\lambda_1 = \lambda_2$ buluruz ve (2.5.9) u (2.5.8) den çıkartarak:

$$\bar{\mu}\Psi^2 + 2\lambda_1\Psi + \mu = \Psi\left(\frac{h_1}{|\Psi|^2} - h_2\right) = -\Psi\left(\frac{2}{\Psi^2}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right),$$

$$\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 + \frac{\Psi}{2}(\bar{\mu}\Psi^2 + 2\lambda_1\Psi + \mu) = 0$$

bulunur.

x_3 -eksenine göre bir dönme hareketine kadar $\mu \in R$ ve $\mu \leq 0$ olduğunu düşünebiliriz. Ayrıca, L^3 de bir homotetiye kadar $\mu \neq 0$ için, $\mu = -2$ alabiliriz. Bu da teoremin ikinci kısmını ispatlar.

$\mu = 0$ durumunda $\lambda_1 \neq 0$ olmalı çünkü X düzlemsel değildir. Böylece $\lambda = \pm 1$ olduğunu düşünebiliriz. $s(t) = \text{Im}(z(t))$, $\kappa(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan ve $\kappa(t(s))$ ifadesinden $\lambda_1 = 1$ buluruz. Gerekirse, tekrar $\Psi \rightarrow \frac{1}{\Psi}$ değişimini yaparak teoremin birinci kısmını elde ederiz. Bu ise kanıtlamayı tamamlar.

Yorum 2.5.2. Teorem 2.5.1 in ispatından $\mu = 0$ ve $\lambda = 1$ $\left(\frac{d\Psi}{dz} = i\Psi\right)$ için $X(M)$, normal vektörü $v=(0,0,1)$ olan paralel düzlemler üstündeki doğru parçalarından oluşturulmuştur. $\frac{d\Psi}{dz} = i\Psi$ yi (2.5.4) denkleminde uygularsak

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} - 1 \right) d\Psi, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} + 1 \right) d\Psi, -i \frac{d\Psi}{\Psi} \right) \right)$$

buluruz. Bu yüzey, Yorum 2.5.1 den Öklid uzayında

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} - 1 \right) d\Psi, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} + 1 \right) d\Psi, -i \frac{d\Psi}{\Psi} \right) \right)$$

yüzeyine tekabül eder. Böylece bu yüzey

$$X(P) = \text{Re} \left(\frac{i}{2} \left(-\frac{1}{\Psi} - \Psi \right), -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\Psi} + \Psi \right), -i \ln(\Psi) \right)$$

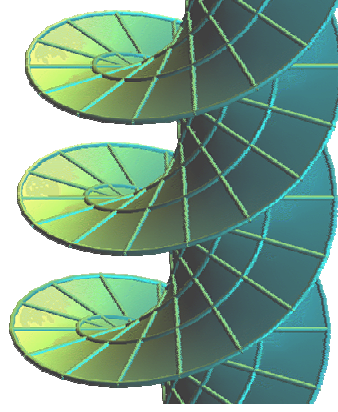
ve $\Psi = re^{iu}$ alırsak

$$X(P) = \text{Re} \left(\frac{i}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} - r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin u \right), \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} + r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin u \right), -u \right)$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$X(P) = (-\sinh \ln r \cdot \sin u, -\sinh \ln r \cdot \cos u, u)$$

doğru parçalarından oluşturulmuş helisoidtir (şekil 2.5.1).



Şekil 2.5.1: Helisoid

Şimdi de birinci ve ikinci halde oluşturulan yüzeyleri belirleyelim.

Birinci halde $\frac{d\Psi}{dz} = \Psi$ yi (2.5.4) denkleminde uygulayarak

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} - 1 \right) d\Psi, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} + 1 \right) d\Psi, \frac{d\Psi}{\Psi} \right) \right)$$

yazarız. Bu yüzey, Yorum 2.5.1 den Öklid uzayında

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} - 1 \right) d\Psi, -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi^2} + 1 \right) d\Psi, \frac{d\Psi}{\Psi} \right) \right),$$

$$X(P) = \text{Re} \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\Psi} - \Psi \right), -i \left(-\frac{1}{\Psi} + \Psi \right), \ln(\Psi) \right)$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi bu yüzey helisoidin eşleniği olan katenoidtir. Gerçekten,

$\Psi = re^{iu}$ alırsak

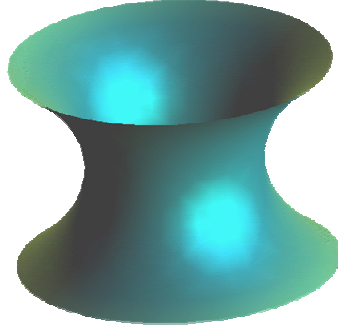
$$X(P) = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} - r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin u \right), -\frac{i}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} + r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin u \right), \ln r + iu \right)$$

$$X(P) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \cos u, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin u, \ln r \right)$$

$$X(P) = (\cosh \ln r \cdot \cos u, \cosh \ln r \cdot \sin u, \ln r)$$

şeklinde katenoid yüzeyi bulunur (Şekil 2.5.2).

İkinci halde $\left(\frac{d\Psi}{dz} \right)^2 = \Psi(\Psi^2 + 2r\Psi + 1)$, $r \in R$ olmak üzere, oluşan yüzeyi belirleyelim. $N_r = \{(u, w); w^2 = u(u^2 + 2ru + 1)\}$ Riemann yüzeyini araştıralım. Bu yüzey Bölüm 2.2 de görüldüğü gibi $r^2 = 1$ için küreye ve $r^2 \neq 1$ için ise bir tor yüzeyine homeomorfdur.



Şekil 2.5.2: Katenoid

2.5.2. Hiperbol Parçalarından Oluşturulan Maksimal Uzaysal Yüzeyler

$v=(1,0,0)$ durumunu inceleyelim. Bu durumda Π_v de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ metriği $\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_2^2 - dx_3^2$ ile verilir. Bu yeni çatıya X in (Ψ, η) Weierstrass gösterimi şu şekilde uyarlanır:

$$\Psi_h = -i \frac{\Psi + 1}{\Psi - 1} \quad \text{ve} \quad \eta_h = \frac{2}{(-i\Psi_h + 1)^2} \eta \quad (2.5.10)$$

tanımlayalım, buradan

$$\Phi_1 = \Psi_h \eta_h, \quad \Phi_2 = \frac{1}{2}(1 - \Psi_h^2) \eta_h, \quad \Phi_3 = -\frac{1}{2}(1 + \Psi_h^2) \eta_h \quad (2.5.11)$$

bulunur ve $dz = \Phi_1$ olduğu görülür.

Teorem 2.5.2. $X(M)$, normal vektörü $v=(1,0,0)$ olan paralel zamansal düzlemler üstünde hiperbol parçalarından oluşturuluyorsa, L^3 de bir izometriye ve bir skaler çarpıma kadar X in (2.5.10) da tanımlanan meromorfik Ψ_h dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\left(\frac{d\Psi_h}{dz}\right)^2 = \Psi_h$;
2. $\left(\frac{d\Psi_h}{dz}\right)^2 = \pm \Psi_h (\Psi_h - 1)$;
3. $\frac{d\Psi_h}{dz} = i\Psi_h$; veya
4. $\left(\frac{d\Psi_h}{dz}\right)^2 = \Psi_h (\Psi_h^2 + 2r\Psi_h + r_0)$, $r \in \mathbb{R}, r_0 \in \{-1, 1\}$.

Kanıtlama: $\langle X, v \rangle_0 = X_1$ olduğundan, (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.11) den

$$X(P) = \operatorname{Re} \left(\int^P \left(dz, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h} - \Psi_h \right) dz, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h} + \Psi_h \right) dz \right) \right) \quad (5.12)$$

$$ds^2 = \left(\frac{\operatorname{Im}(\Psi_h)}{|\Psi_h|} \right)^2 |dz|^2$$

yazabiliriz. $\alpha(t)$, (M, ds^2) üstünde yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş ve $X_1(\alpha(t)) = c$ (yani $\operatorname{Re}(z(t)) = c$) olacak şekilde bir eğri olsun. Kolaylık için $z(\alpha(t)) = z(t)$, $X(\alpha(t)) = X(t)$ ve $\Psi_h(\alpha(t)) = \Psi_h(t)$ yazalım. s yay-uzunluğunun

doğal parametre olması için $\frac{dz}{ds} = 1$ olmalı, böylece $\frac{|\operatorname{Im}(\Psi_h)|}{|\Psi_h|} \left| \frac{dz}{dt} \right| = 1$ ve $\operatorname{Re} \left(\frac{dz}{dt} \right) = 0$

olduğundan $\frac{dz}{dt} = \pm i \frac{|\Psi_h|}{\operatorname{Im}(\Psi_h)}$. $\Psi_h \rightarrow -\Psi_h$ değişimine kadar Φ_1 değişmez ve

$$\frac{dz}{dt} = i \frac{|\Psi_h|}{\text{Im}(\Psi_h)} \quad (2.5.13)$$

olduğunu düşünebiliriz. X ve $v=(1,0,0)$ uzaysal olduğundan $\frac{dX}{dt}$ ve $\frac{d^2X}{dt^2}$ sırasıyla uzaysal ve zamansaldır. Böylece $X(t)$ eğrisinin $\kappa(t)$ eğriliği $\kappa(t) = \sqrt{-\left\langle \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2X}{dt^2} \right\rangle}$

ile verilir. $\Psi_h = \text{Re} \Psi_h + i \text{Im} \Psi_h$ için

$$\frac{dX^1}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2X^1}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dX^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1 + |\Psi_h|^2}{|\Psi_h|} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2X^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{Re} \Psi_h (|\Psi_h|^2 - 1)}{|\Psi_h|^3} \frac{d(\text{Re} \Psi_h)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\text{Im} \Psi_h (|\Psi_h|^2 - 1)}{|\Psi_h|^3} \frac{d(\text{Im} \Psi_h)}{dt}$$

$$\frac{dX^3}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{1 - |\Psi_h|^2}{|\Psi_h|} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2X^3}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{Re} \Psi_h (|\Psi_h|^2 + 1)}{|\Psi_h|^3} \frac{d(\text{Re} \Psi_h)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\text{Im} \Psi_h (|\Psi_h|^2 + 1)}{|\Psi_h|^3} \frac{d(\text{Im} \Psi_h)}{dt}$$

ve

$$\sqrt{-\left\langle \frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2X}{dt^2} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{|\Psi_h|^4} \left(\text{Re} \Psi_h \frac{d(\text{Re} \Psi_h)}{dt} + \text{Im} \Psi_h \frac{d(\text{Im} \Psi_h)}{dt} \right)^2} = \text{Re} \left(\frac{d \log(\Psi_h)}{dt} \right).$$

$\Phi_1=dz$ olduğuna göre Ψ_h dönüşümü M 'de sıfır olamaz. Böylece, branşın bir seçimine kadar, $\log(\Psi_h)$ dönüşümü M 'de iyi tanımlı ve holomorftir. Yine $\log(g_h) = u + iv$ yazalım.

Bu noktada $\frac{ds}{dt} = \frac{|\Psi_h|}{\text{Im}(\Psi_h)}$ ile verilen yeni $s(t)$ parametresini tanımlayalım;

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = i \frac{|\Psi_h|}{\text{Im}(\Psi_h)} \frac{\text{Im}(\Psi_h)}{|\Psi_h|} = i$$

yazabiliriz. Böylece herhangi bir c sabiti için $s(t) = \text{Im}(z(t))$ seçebiliriz. Diğer taraftan

$$\kappa(s) = \kappa(t(s)) = \text{Re}\left(\frac{d \log(\Psi_h)}{dt}\right) = \frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{1}{\sin v}$$

ve $\kappa(t)$ sabit olduğundan

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \cot v = 0$$

buluruz.

$$S_2 = \text{Re}\left(\left(\frac{d(\log(\Psi_h))}{dz}\right)^2 \left(1 - \frac{i \text{Re}(\Psi_h)}{2 \text{Im}(\Psi_h)}\right) - \left(\frac{d^2 \Psi_h}{dz^2}\right) \frac{1}{\Psi_h}\right) \quad (2.5.14)$$

tanımlayalım, böylece $s(t) = \text{Im}(z(t))$ olduğunu düşünerek

$$S_2 = 0 \quad (2.5.15)$$

bulunur.

$$h_1 = \left(\left(\frac{d^2 \Psi_h}{dz^2}\right) \frac{1}{\Psi_h} - \frac{1}{2} \left(\frac{d(\log(\Psi_h))}{dz}\right)^2\right) \overline{\Psi_h}$$

holomorfik fonksiyonu için $\text{Im}(h_1)$ harmoniktir. Böylece $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\frac{h_1}{\Psi_h} + \lambda_1 \Psi_h - \mu = 0 \quad (2.5.16)$$

özellikle de $\text{Im}(h_1) = -\text{Im}(\overline{\mu} \Psi_h)$. Diğer taraftan

$$h_2 = -\frac{d^2 \Psi_h}{dz^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{d \log(\Psi_h)}{dz}\right)^2 \Psi_h$$

alırsak, (2.5.15) den $\text{Im}(h_2) = -\text{Im}(h_1)$ olduğundan

$$h_2 - \bar{\mu}\Psi_h + \lambda_2 = 0, \lambda_2 \in R \quad (2.5.17)$$

ve böylece (2.5.16) ve (2.5.17) den

$$\frac{h_1\Psi_h^2}{g_h} + h_2\Psi_h = \Psi_h \left(-\lambda_1\Psi_h^2 + 2\mu\Psi_h - \lambda_2 \right), \mu \in R$$

veya

$$\left(\frac{d\Psi_h}{dz} \right)^2 = \Psi_h \left(-\lambda_1\Psi_h^2 + 2\mu\Psi_h - \lambda_2 \right), \mu \in R$$

buluruz. X düzlemsel olmadığına göre, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ için $\mu \neq 0$ dır. Bu durumda ve L^3 de bir skaler çarpana kadar $\mu = \pm \frac{1}{2}$ alabiliriz. $s(t) = \text{Im}(z(t))$ ve $\kappa(s)$ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $\mu = -\frac{1}{2}$ bulunur. Gerekirse $\Psi_h \rightarrow \frac{1}{\Psi_h}$ değişimini yaparak teoremin üçüncü durumunu elde ederiz. Şimdi, $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$ olduğunu düşünelim, $\Psi_h \rightarrow \frac{1}{\Psi_h}$ değişimine kadar $\lambda_2 \neq 0$ farklı olduğunu düşünebiliriz. $\Psi_h \rightarrow \pm e^l \frac{1}{\Psi_h}$ ($l \in R$), L^3 de bir lineer izometriye ve bir homotetiye kadar $\lambda_1 \neq 0$ olacak şekilde $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = \pm 1$ olarak dördüncü durumu elde ederiz. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\mu = 0$ için birinci durumu ve $\mu \neq 0$ için ikinci durumu elde ederiz. Bu da teoremin kanıtını tamamlar.

Yorum 2.5.3. Teorem 2.5.2 nin kanıtında $X(M)$, $\mu = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\left(\frac{d\Psi_h}{dz} = \Psi_h \right)$ için normali $v=(1,0,0)$ vektörü olan paralel zamansal düzlemler üstünde doğru parçalarından oluşturulmuştur. Bu durumda, $X(M)$, aşağıdaki şekilde verilen singüler noktalara sahip maksimal uzaysal bir yüzey parçasıdır.

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{1}{\Psi_h} d\Psi_h, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} - 1 \right) d\Psi_h, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} + 1 \right) d\Psi_h \right) \right)$$

Bu yüzey Yorum 2.5.1 den Öklid uzayında

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(i \frac{d\Psi_h}{\Psi_h}, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} - 1 \right) d\Psi_h, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} + 1 \right) d\Psi_h \right) \right)$$

yüzeyine tekabül eder.

$$X(P) = \text{Re} \left(i \ln(\Psi_h), \frac{i}{2} \left(-\frac{1}{\Psi_h} - \Psi_h \right), -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\Psi_h} + \Psi_h \right) \right)$$

ifadesinde $\Psi = re^{iu}$ alırsak

$$X(P) = \text{Re} \left(u, \frac{i}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} - r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} - r \right) \sin u \right), -\frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} + r \right) \cos u + i \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin u \right) \right)$$

veya

$$X(P) = (u, -\sinh \ln r \cdot \sin u, -\sinh \ln r \cdot \cos u)$$

elde ederiz ki böylece bu yüzey E^3 de bir helisoidtir (şekil 2.5.3).



Şekil 2.5.3: Paralel zamansal düzlemler üstündeki hiperbol parçalarından oluşturulan bir maksimal yüzey parçası

Şimdi Teorem 2.5.2 deki her dört durumda meydana gelecek yüzeyleri belirleyelim:

1. durumda $\Psi_h \rightarrow u^2$ değişimi yapılırsa $X(M)$,

$$\left(C^*, \Phi_1 = 2du, \Phi_2 = \frac{1-u^4}{u^2} du, \Phi_3 = -\frac{1+u^4}{u^2} \right)$$

şeklindeki Weierstrass gösterimi ile verilen bir maksimal yüzey parçasıdır. Bu üç form tam olduğundan (2.5.2) ile verilen maksimal dahil etme dönüşümü iyi tanımlıdır.

2. durumda L^3 de bir izometriye kadar iki seçeneğimiz vardır

$$\frac{d\Psi_h}{dz} = \sqrt{\Psi_h(\Psi_h - 1)} \quad \text{veya} \quad \frac{d\Psi_h}{dz} = i\sqrt{\Psi_h(\Psi_h - 1)}.$$

$$\frac{d\Psi_h}{dz} = \sqrt{\Psi_h(\Psi_h - 1)} \quad \text{alalım. } \Psi_h \rightarrow \frac{1}{1-u^2} \text{ dönüşümü yapılırsa,}$$

$$\frac{d\Psi_h}{dz} = \frac{2u}{(1-u^2)^2} \frac{du}{dz} \quad \text{ve} \quad dz = \frac{2}{1-u^2} du$$

buluruz. Şimdi dz 'yi (2.5.12) de uygularsak

$$\left(C - \{-1, 1\}, \Phi_1 = \frac{2}{1-u^2} du, \Phi_2 = \frac{(u^2 - 2)u^2}{(1-u^2)^2}, \Phi_3 = \frac{u^4 - 2u^2 + 2}{(u^2 - 1)^2} du \right)$$

şeklindeki Weierstrass gösterimi ile verilen maksimal uzaysal bir yüzey parçasını buluruz. Bu üç 1-formun reel periyotları yoktur, böylece (2.5.2) ile verilen X dahil etme dönüşümü iyi-tanımlıdır.

$\frac{d\Psi_h}{dz} = i\sqrt{\Psi_h(\Psi_h - 1)}$ durumunda bu Weierstrass gösteriminin eşleniği olarak bulunur

ve bu dönüşüm $C - \{-1, 1\}$ 'de iyi tanımlı olur.

3. durumda (2.5.12) de $\frac{d\Psi_h}{dz} = i\Psi$ olduğundan

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{d\Psi_h}{i\Psi_h}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h} - \Psi_h \right) \frac{d\Psi_h}{i\Psi_h}, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h} + \Psi_h \right) \frac{d\Psi_h}{i\Psi_h} \right) \right)$$

yazarız. L^3 deki bu yüzey Öklid uzayında

$$X(P) = \text{Re} \left(\int^P \left(\frac{d\Psi_h}{\Psi_h}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} - 1 \right) d\Psi_h, \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\Psi_h^2} + 1 \right) d\Psi_h \right) \right)$$

yüzeyine tekabül eder. Böylece,

$$X(P) = \operatorname{Re} \left(\int^P \left(\ln(\Psi_h), \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\Psi_h} - \Psi_h \right), -\frac{i}{2} \left(-\frac{1}{\Psi_h} + \Psi_h \right) \right) \right)$$

veya

$$X(P) = (\ln r, \cosh \ln r \cdot \cos u, -\cosh \ln r \cdot \sin u)$$

buluruz. Bu yüzey uç noktalarında yatay normal vektöre sahip olan katenoidtir.

4.durumda $M_0 = \{(u, w) : w^2 = u(u^2 + 2ru + r_0)\}$ şeklinde verilen Riemann yüzeyini düşünelim. $r^2 = r_0 = 1$ durumu dışında bu tor yüzeyine homeomorfik olan bir yüzeydir. $r^2 = r_0 = 1$ için M_0 bir Riemann küresidir.

2.5.3. Parabol Parçalarından Oluşturulan Uzaysal Yüzeyler

$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ durumunu ele alacağız. Kolaylık için E^3 de yeni bir çatı belirleyelim:

$$e_1 = (0, 1, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad e_3 = v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1).$$

$y_j = \langle e_j, \cdot \rangle_0$, $j=1,2,3$ bu çatının tanımladığı üç koordinat fonksiyonu olsun.

$Y_j = \langle e_j, X \rangle_0$, $j=1,2,3$ dersek;

$$Y_1 = \langle e_1, X \rangle_0 = X^2,$$

$$Y_2 = \langle e_2, X \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} X^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X^3,$$

$$Y_3 = \langle e_3, X \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} X^1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X^3$$

buluruz. Burada $X = \sum_{j=1}^3 Y_j e_j$ olduğundan $X = (Y_1, Y_2, Y_3)$ yazabiliriz.

X 'in bu çatıya uyarlanmış Weierstrass gösterimi, ξ M üstünde konformal bir parametre

olmak üzere $\Omega_j(\xi) = \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} d\xi$, $j = 1, 2, 3$ 1-formları ile verilir

$$\Omega_1(\xi) = \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial X^2}{\partial \xi} d\xi = \Phi_2$$

$$\Omega_2(\xi) = \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial X^1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial X^3}{\partial \xi} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + \Phi_3),$$

$$\Omega_3(\xi) = \frac{\partial Y_3}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial X^1}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial X^3}{\partial \xi} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - \Phi_3)$$

yazabiliriz. ξ izotermal parametre olduğundan $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - \Phi_3^2 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \xi} \right\rangle = 0$ dan

$$\Omega_1^2 + 2\Omega_2\Omega_3 = 0$$

olduğu kolayca görülür. $z = \langle X, \nu \rangle_0 + i \langle X, \nu \rangle_0^*$ dan $\text{Re}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^1 - X^3) = Y_3$,

$\text{Re}(dz) = \Psi_3$ ve $\Psi_p = \frac{\Omega_1}{dz}$ tanımlarsak

$$\Omega_1 = \Psi_p dz, \quad \Omega_2 = -\frac{1}{2} \Psi_p^2 dz, \quad \Omega_3 = dz \quad (2.5.18)$$

buluruz. Böylece,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_2 + \Omega_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} \Psi_p^2 + 1 \right) dz \\ \Phi_2 &= \Omega_1 = \Psi_p dz \\ \Phi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_2 - \Omega_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} \Psi_p^2 - 1 \right) dz \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

elde ederiz.

Teorem 2.5.3. $X(M)$, normal vektörü $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ olan ışıksal paralel düzlemler üstündeki parabol parçalarından oluşturulmuşsa, L^3 de bir lineer izometriye ve bir skaler çarpana kadar X 'in (2.5.18) de tanımlanan meromorfik Ψ_p dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. $\left(\frac{d\Psi_p}{dz}\right)^2 = \Psi_p$;
2. $\left(\frac{d\Psi_p}{dz}\right)^2 = \pm\Psi_p(\Psi_p - r), r \in R$;
3. $\frac{d\Psi_p}{dz} = i$.

Kanıtlama: (2.5.2), (2.5.3), (2.5.18) ve (2.5.19) dan

$$X(P) = \operatorname{Re}\left(\int^P (\Psi_p dz, -\Psi_p^2 dz, dz)\right), \quad (2.5.20)$$

$$ds^2 = (\operatorname{Im}(\Psi_p))^2 |dz|^2$$

yazarız. $\alpha(t)$, (M, ds^2) üstünde yay-uzunluğu ile parametrelendirilmiş $Y_3(\alpha(t)) = c$ (yani $\operatorname{Re}(z(t)) = c$) olacak şekilde bir eğri olsun. Kolaylık için $z(\alpha(t)) = z(t)$, $X(\alpha(t)) = X(t)$ ve $\Psi_p(\alpha(t)) = \Psi_p(t)$ diyelim. s yay-uzunluğunun doğal parametre olması için $\frac{dz}{ds} = 1$ olmalı, böylece $|\operatorname{Im}(\Psi_p)| \left| \frac{dz}{dt} \right| = 1$ ve $\operatorname{Re}\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0$ olduğundan

$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{i}{\operatorname{Im}(\Psi_p)}$ dır. $\Psi_p \rightarrow -\Psi_p$ dönüşümü ile

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{i}{\operatorname{Im}(\Psi_h)} \quad (2.5.21)$$

olduğunu düşünebiliriz. X uzaysal ve $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ ışıksal olduğundan $\frac{dX}{dt}$ ve $\frac{d^2 X}{dt^2}$

sırasıyla uzaysal ve ışıksaldır. Böylece $X(t)$ eğrisinin $\kappa(t)$ düzlemsel eğriliği

$$\kappa(t) = \sqrt{\left\langle \frac{d^2 X}{dt^2}, \frac{d^2 X}{dt^2} \right\rangle_0} \text{ ile verilir. } \Psi_p = \text{Re } \Psi_p + i \text{Im } \Psi_p \text{ için}$$

$$\frac{dX^1}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{d^2 X^1}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{dX^2}{dt} = -\text{Re } \Psi_p \Rightarrow \frac{d^2 X^2}{dt^2} = -\frac{d(\text{Re } \Psi_p)}{dt},$$

$$\frac{dX^3}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X^3}{dt^2} = 0.$$

Böylece, $\kappa(t) = -\text{Re}\left(\frac{d\Psi_p}{dt}\right)$. $X(t)$ eğrisinin düzlemsel eğriliğinin sabit olması için

gök $\kappa(t)$ fonksiyonunun sabit olmasıdır. Kolaylık için $u = \text{Re}(\Psi_p)$ ve $v = \text{Im}(\Psi_p)$ yazılabilir.

$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\text{Im}(\Psi_p)}$ ile belirlenen yeni $s(t)$ parametresini tanımlayalım. (2.5.21) den

$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds} = i$ olduğundan $s(t) = \text{Im}(z(t))$ seçebiliriz. Diğer taraftan

$$\kappa(s) = \kappa(t(s)) = -\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds} \frac{1}{v}$$

ve κ sabit olduğundan

$$\frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \frac{1}{v} = 0$$

bulunur.

$$S_3 = \text{Re} \left(\frac{d^2 \Psi_p}{dz^2} + \left(\frac{d\Psi_p}{dz} \right)^2 \frac{1}{\overline{\Psi_p} - \Psi_p} \right) \quad (2.5.22)$$

tanımlayalım, $s(t) = \text{Im}(z(t))$ olduğunu dikkate alarak

$$S_3=0 \quad (2.5.23)$$

bulunur. Ayrıca $h_1 = \overline{\Psi}_p \frac{d^2\Psi_p}{dz^2}$ fonksiyonun sanal kısmı $\text{Im}(h_1)$ harmoniktir, böylece

$$\frac{h_1}{\overline{\Psi}_p} - \lambda_1 \Psi_p - \mu = 0, \quad \lambda_1 \in R, \quad \mu \in C \quad (2.5.24)$$

dır. Buradan $\text{Im}(h_1) = -\text{Im}(\overline{\mu\Psi})$ bulunur. Diğer taraftan

$$h_2 = \Psi_p \frac{d^2\Psi_p}{dz^2} - \left(\frac{d\Psi_p}{dz} \right)^2$$

alırsak (2.5.23) den $\text{Im}(h_2) = \text{Im}(h_1)$ buluruz ve böylece

$$h_2 + \overline{\mu\Psi}_p + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 \in R \quad (2.5.25)$$

ve (2.5.24) ile (2.5.25) den

$$\left(\frac{d\Psi_p}{dz} \right)^2 = \lambda_1 \Psi_p^2 + 2\mu\Psi_p + \lambda_2, \quad \mu \in R$$

elde ederiz. X düzlemsel olmadığına göre $\lambda_1 = \mu = 0$ için $\lambda_2 \neq 0$ olmalıdır. Bu durumda L^3 de bir skaler çarpana kadar $\lambda_2 = \pm 1$ olduğunu düşünebiliriz. $s(t) = \text{Im}(z(t))$, $\kappa(t)$ 'nin sıfırdan farklı bir sabit oluşu ve $\kappa(t)$ 'nin ifadesinden $\lambda_2 = -1$ bulunur. Gerekirse $\Psi_p \rightarrow -\Psi_p$ değişimi yapılarak 3.durum elde edilir. L^3 de $\Psi_p \rightarrow \Psi_p + l$, $l \in R$, $\lambda_1 \neq 0$ durumunda $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_1 = \pm 1$ alabiliriz ki bu 2. durumu verir. $\lambda_1 = 0$, $\mu \neq 0$ ve $\Psi_p \rightarrow -\Psi_p$ değişimini yaparak 1.durum elde edilir. Bu da teoremin kanıtını tamamlar.

Yorum 2.5.4. Teorem 2.5.3 ün kanıtında $X(M)$, $\lambda_1 = \mu = 0$ ve $\lambda_2 = 1$ $\left(\frac{d\Psi_p}{dz} = \Psi_p \right)$

için normal vektörü $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ olan paralel ışıksal düzlemler üstündeki doğru parçalarından oluşturulmuştur. Bu durumda, $X(M)$, singüler noktaları olan, aşağıdaki

gibi verilen maksimal uzaysal bir yüzey parçasıdır. (2.5.2), (2.5.19) dan, $\frac{d\Psi_p}{dz} = \Psi_p$

olduğunu dikkate alıp $\Psi \rightarrow -\sqrt{2}u$ dönüşümünü yaparsak

$$X(M) = \int^p \left((u^2 - 1)du, 2udu, (u^2 + 1)du \right)$$

veya

$$X(M) = \left(\frac{u^3}{3} - u, u^2, \frac{u^3}{3} + u \right)$$

buluruz ki bu ikinci türden bir Enneper yüzeyinin eşleniğidir (Şekil 2.5.4).



Şekil 2.5.4: Paralel ışıksal düzlemler üstündeki parabol parçalarından oluşan bir maksimal uzaysal yüzey parçası

Şimdi de Teorem 2.5.3 deki her üç durumda oluşan yüzeyleri belirleyelim;

1. durumda $\left(\frac{d\Psi_p}{dz} \right)^2 = \Psi_p$ den $dz = \frac{d\Psi_p}{\sqrt{\Psi_p}}$ ve $\Psi_p \rightarrow \sqrt{2}u^2$ değişimini yaparak $X(M)$,

$$(C, \Phi_1 = (1 - u^4)du, \Phi_2 = 2u^2du, \Phi_3 = -(1 + u^4)du)$$

Weierstrass gösterimi ile belirlenen singüler noktaları olan maksimal uzaysal bir yüzeydir. Bu üç form tamdır, böylece (2.5.2) ile verilen dahil etme dönüşümü iyi tanımlıdır.

2. durumda L^3 de bir lineer izometriye kadar iki seçeneğimiz var:

$$\frac{d\Psi_p}{dz} = \sqrt{\Psi_p(\Psi_p - r)} \quad \text{veya} \quad \frac{d\Psi_p}{dz} = i\sqrt{\Psi_p(\Psi_p - r)}.$$

$\frac{d\Psi_p}{dz} = \sqrt{\Psi_p(\Psi_p - r)}$ olduğunu düşünelim, yine karşımıza iki durum çıkar: $r \neq 0$ ve $r = 0$.

$r \neq 0$ olsun; $\Psi \rightarrow \frac{ru^2}{u^2 - 1}$ değişimine kadar, Ω_j lerin ($j=1,2,3$) tanımından ve (2.5.20)

den $X(M)$ 'nin aşağıdaki Weierstrass gösterimi ile verilen singüler noktalara sahip olan maksimal uzaysal bir yüzey parçası olduğunu elde ederiz:

$$\left(C - \{-1,1\}, \Phi_1 = \frac{-2 + 4u^2 - 2u^4 + r^2u^4}{\sqrt{2}(u^2 - 1)^3}, \Phi_2 = -\frac{2ru^2}{(u^2 - 1)^2} du, \Phi_3 = \frac{-2 + 4u^2 - 2u^4 + r^2u^4}{\sqrt{2}(u^2 - 1)^3} \right)$$

$r = 0$ için, $g \rightarrow \sqrt{2}u$ için bir skaler çarpana kadar meromorfik gösterimi ise

$$\left(C - \{0\}, \Phi_1 = \frac{1 - u^2}{u} du, \Phi_2 = 2du, \Phi_3 = -\frac{1 + u^2}{u} du \right)$$

ile verilir. Her iki durumda formların reel periyotları yoktur ve (2.5.2) ile verilen dahil etme dönüşümü iyi tanımlıdır.

$\frac{d\Psi_p}{dz} = i\sqrt{\Psi_p(\Psi_p - r)}$ için yine önceki yüzeylerin eşleniğine ulaşırız, ancak bu durumda (2.5.2) ile verilen dahil etme dönüşümünün reel periyotları vardır ve bu nedenle $C - \{-1,1\}$ ($r \neq 0$ için) ve $C - \{0\}$ in ($r = 0$ için) uygun bir örtülüşünde iyi tanımlıdır.

3. durumda $\Psi_p \rightarrow i\sqrt{2}u$ değişimini yaparak Weierstrass gösterimini buluruz:

$$(C, \Phi_1 = (1+u^2)du, \Phi_2 = -2iudu, \Phi_3 = (u^2-1)du)$$

Bu yüzey L^3 de maksimal bir dönel yüzeydir ve E^3 de Enneper yüzeyine tekabül eder.

2.5.4. L^3 de Maksimal Riemann Yüzeyi Üstünde Shiffman Tipindeki Fonksiyonlar

$X: M \rightarrow L^3$, maksimal uzaysal dahil etme dönüşümü ve Ψ , Gauss dönüşümünün stereografik izdüşüm dönüşümü olmak üzere (η, Ψ) , X dönüşümünün Weierstrass gösterimi olsun.

M üstünde konformal parametre $\zeta = x+iy$ ve $\Delta_{\xi\bar{\xi}}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

şeklinde verilen Laplacian operatörü olsun. O takdirde (2.5.6), (2.5.14) ve (2.5.22) ile verilen S_j ($j=1, 2, 3$) fonksiyonları

$$\Delta_{\xi\bar{\xi}} S_j - \frac{2}{(1-|\Psi|^2)^2} \left| \frac{d\Psi}{d\xi} \right|^2 S_j = 0$$

denklemini sağlar. Diğer bir deyişle, bu fonksiyonlar M üstünde, $\Delta - |\sigma|^2$ Jacobi operatörün çekirdeğinde yer alırlar. Burada $|\sigma|$, L^3 üstünde X dönüşümünün ikinci temel formunun normu ve Δ , M üstündeki Laplacian operatörüdür.

Üstelik, Teorem 2.5.1, Teorem 2.5.2 ve Teorem 2.5.3 den L^3 de regle olmayan maksimal uzaysal yüzeylerin paralel düzlemler üstündeki çember, parabol veya hiperbol parçalarından oluşturulmuş olması için gyk sırasıyla S_1 , S_2 veya S_3 'ün bu yüzey üstünde sıfır olmasıdır. Dolayısıyla bu faonksiyonları E^3 deki Shiffman tipindeki fonksiyonlarının L^3 deki karşılığı olduğunu diyebiliriz.

2.6. ÇEMBER PARÇALARINDAN OLUŞTURULAN MAKSİMAL YÜZEYLER

Burada, E^3 deki minimal yüzeyler için geçerli olan teoremlerin L^3 de maksimal yüzeyler için de geçerli olacağını göstereceğiz. L^3 de en büyük problem oluşumun düzlemlerinin değişik karakterde oluşudur. Bunlar uzaysal, zamansal veya ışıksal olabilir. Bunun için her üç durum ayrı ayrı incelenecektir .

M, L^3 de yönlendirilebilir maksimal uzaysal bir yüzey olsun ve $X = X(u, v)$ M 'de bir yerel koordinat sistemi olsun.

$X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$, $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ ve $X = (X_1, X_2, X_3)$ diyelim. Birinci temel form

$$I = \langle dX, dX \rangle = X_u^2 du^2 + 2X_u X_v dudv + X_v^2 dv^2,$$

$$I = \langle dX, dX \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.6.1)$$

şeklindedir. u_1, u_2, u_3 vektörleri için, $[u_1, u_2, u_3] = \langle u_1 \times u_2, u_3 \rangle$, L^3 de bu vektörlerin determinantını, \times , Minkowski dış çarpımını, v de yüzeyin birim normal vektörünü göstermek üzere ikinci temel form

$$II = -\langle dv, dX \rangle = \frac{1}{W} [X_u, X_v, X_{uu}] du^2 + \frac{2}{W} [X_u, X_v, X_{uv}] dudv + \frac{1}{W} [X_u, X_v, X_{vv}] dv^2,$$

$$II = -\langle dv, dX \rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \quad (2.6.2)$$

şeklinde verilir.

$W^2 = EG - F^2$ olmak üzere yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} Iz(II) = \frac{eG - 2fF + gE}{2W^2}$$

ile verilir. X uzaysal olduğundan $W^2 > 0$ ve ayrıca yüzey maksimal olduğu için $H = 0$ dır, böylece

$$E[X_u, X_v, X_w] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + G[X_u, X_v, X_{uu}] = 0 \quad (2.6.3)$$

elde ederiz.

M 'nin L^3 de çember parçalarından oluşturulduğunu düşünelim; yani M 'nin, her biri L^3 deki düzlemler üstünde bulunan çember parçalarının 1-parametrelili ailesi tarafından doğrulduğunu kabul edelim. u bu ailenin parametresi olsun. Üç durum söz konusudur:

1. durum: *düzlemler uzaysaldır*. Her u -düzleminde ortogonal $\{e_1(u), e_2(u)\}$ bazını seçelim. Yüzey Bölüm 2.3 de gördüğümüz gibi aşağıdaki şekilde parametrelendirilebilir

$$X(u, v) = c + r(\cos ve_1 + \sin ve_2), u \in I, v \in J \quad (2.6.4)$$

Burada I ve J , R 'de açık aralıklar, $c = c(u)$ u -düzlemi içinde ve $r = r(u) > 0$ olacak şekilde bir düzgün fonksiyondur.

2. durum: *düzlemler zamansaldır*. Her u -düzleminde $-\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$ olacak şekilde ortogonal $\{e_1(u), e_2(u)\}$ bazını seçelim, o takdirde

$$X(u, v) = c + r(\cosh ve_1 + \sinh ve_2), u \in I, v \in J \quad (2.6.5)$$

yazabiliriz.

3. durum: *düzlemler ışıksaldır*. Her u -düzleminde $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 0$ olacak şekilde ortogonal $\{e_1(u), e_2(u)\}$ bazını seçelim, o takdirde

$$X(u, v) = c + ve_1 + rv^2e_2, u \in I, v \in J \quad (2.6.6)$$

yazabiliriz.

1. ve 2. durumda $N(u)$, R^3 de u -düzleminin birim normal vektörünü gösterebilir. $N(u)$ vektörünün ışıksal olmadığı ve u -düzleminde olmadığı açıktır. Genel olarak şunu göstereceğiz: çelişki mantığını kullanarak bu çemberleri içeren düzlemlerin paralel olmadığını varsayalım. Bu ise bir reel aralıktaki bir u için $N'(u) \neq 0$ olması demektir ki bu, birim tanjant vektörü $N(u)$ olan C eğrisinin bir doğru olamayacağını ifade eder.

Şimdi bu oluşuma uyarlanmış ve C eğrisinin Frenet çatısından oluşan bir çatı belirleyelim ve (2.6.4), (2.6.5) denklemlerini bu çatıya göre ifade edip sonrada (2.6.3) denklemini hesaplayalım. Böylece R de bir aralıkta sifira özdeş olan tek değişkenli trigonometrik polinomlar elde ederiz. Bu polinomların bileşenlerinin sıfır olması çelişki oluşturacaktır.

Teorem 2.6.1. L^3 Lorentz-Minkowski uzayında çember parçalarından oluşan maksimal uzaysal bir yüzey M olsun. O takdirde bu çember parçalarını içeren düzlemler paraleldir.

Kanıtlama: Dediğimiz gibi bunu çelişkiye ulaşarak göstereceğiz. Bir $I \subset R$ kümesinin uzaysal, zamansal veya ışıksal olması için g her $u \in I$ için, oluşumda u ya tekabül eden düzlemlerin sırasıyla uzaysal, zamansal veya ışıksal olmasıdır. Bu üç durumda oluşumun düzlemlerinin uzaysal, zamansal veya ışıksal aralıklarda paralel olduğunu göstereceğiz. Böylece kanıtlamayı üç bölüme ayıralım:

I: Yüzey uzaysal düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulmuştur.

Bu durumda, $N(u)$ zamansal vektördür ve $\langle N(u), N(u) \rangle = -1$. C ($t = N$) eğrisinin $\{t, n, b\}$ Frenet çatısını göz önüne alalım. O takdirde c' hız vektörünü

$$c' = \alpha t + \beta n + \gamma b \quad (2.6.7)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada α , β ve γ u 'nun düzgün fonksiyonlarıdır. (2.6.4) de bir koordinat değişimine kadar n ve b 'nin uzaysal olduğunu düşünerek

$$X(u, v) = c + r \cos vn + r \sin vb.$$

yazabiliriz. κ ve τ , C eğrisinin sırasıyla eğriliği ve burulması olsun. $N' \neq 0$ olduğundan $\kappa \neq 0$ dır. Üstelik, t' uzaysal bir vektördür. Ayrıca C 'nin Frenet denklemleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \kappa t + \sigma b \\ b' &= -\sigma n \end{aligned}$$

(2.6.3) den basit bir hesaplama ile

$$0 = a \cos 3v + b \sin 3v + c \cos 2v + d \sin 2v + 3 \cos v + f \sin v + g \quad (2.6.8)$$

yazarız. Burada

$$a = -\frac{1}{2}r^3\kappa(r^2\kappa^2 - \beta^2 + \gamma^2)$$

$$b = r^3\kappa\beta\gamma$$

$$c = \frac{1}{2}r^3(-5r\kappa^2\alpha + 6r'\kappa\beta + r\kappa'\beta - r\kappa\beta')$$

dir. $a=b=0$ dan $\gamma = 0$ ve $\beta = \pm r\kappa$. Ayrıca $c=0$ dan $\alpha = \pm r'$ bulunur. Diğer taraftan

$$W^2 = A \cos 2v + B \sin 2v + C \cos v + D \sin v + E$$

buluruz. Burada

$$A = \frac{1}{2}r^2(\beta^2 - \gamma^2 - \kappa^2r^2),$$

$$B = \gamma\beta r^2,$$

$$C = 2r^2\left(-\alpha^2 + r'^2 + \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2 - \kappa^2r^2)\right).$$

Bulduklarımızı W^2 de yerine yazarsak $W=0$ buluruz. Bu ise $W>0$ oluşu ile çelişir. Böylece $\kappa = 0$ bulunur, yani C bir doğru olmalıdır.

2: *Yüzey zamansal düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulmuştur*

Bu durumda, N uzaysal bir birim vektördür ve $\langle N(u), N(u) \rangle = 1$ dir. $t = N$, C eğrisinin birim tanjant vektörü olsun. Düzlemlerin paralel olmadığını düşündüğümüzden $N' = t' \neq 0$ ve $\langle t, t \rangle = 1$ den $\langle t', t \rangle = 0$ olduğu açıktır. Şimdi yine üç durum ele alacağız:

Birinci durum: $\langle t', t' \rangle > 0$ olsun. Bir $\kappa \neq 0$ düzgün fonksiyonu için $t' = \kappa n$ olacak şekilde C boyunca uzaysal bir birim vektör alanı n olsun. \times, L^3 de dış çarpım olmak üzere $b = t \times n$ diyelim. Buradan, Bölüm 2.3 deki Önerme 2.3.2 den

$\langle b, b \rangle = \langle t \times n, t \times n \rangle = -\langle t, t \rangle \langle n, n \rangle + (\langle t, n \rangle)^2 = -1$ buluruz. v üstünde ötemeler ile verilen bir koordinat değişimine kadar (2.6.5) şu şekilde yazılabilir:

$$X(u, v) = c + r \sinh vn + r \cosh vb$$

Burada Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n, \\ n' &= -\kappa t + \sigma b, \\ b' &= \sigma n \end{aligned}$$

dir. Şimdi (2.6.3) denklemi

$$0 = a \cosh 3v + b \sinh 3v + c \cosh 2v + d \sinh 2v + e \cosh v + f \sinh v + g$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{aligned} a &= -r^3 \kappa \beta \gamma, \\ b &= \frac{1}{2} r^3 \kappa (-r^2 \kappa^2 + \beta^2 + \gamma^2), \\ c &= \frac{1}{2} r^3 (5r \kappa^2 \alpha - 6r' \kappa \beta - r \kappa' \beta + r \kappa \beta'), \\ d &= \frac{1}{2} r^3 (r \kappa' \gamma - r \kappa \gamma' - 6r' \kappa \gamma). \end{aligned}$$

dır. Bu polinomun sıfır olması için tüm katsayıları sıfır olmalıdır. Böylece:

$a = 0 \Rightarrow \beta \gamma = 0$. Burada yine iki durum söz konusudur:

i) $\beta = 0$ olsun

$$b = 0 \Rightarrow \gamma^2 = r^2 \kappa^2$$

$$c = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{ve}$$

$$d = 0 \Rightarrow r' = 0$$

W 'yi hesapladıktan sonra

$$\begin{aligned} W^2 &= r^2 (-\alpha^2 - 2\alpha r \kappa \cosh v - r^2 \kappa^2 \cosh^2 v + \beta^2 \cosh^2 v + r'^2 + 2\beta r' \cosh v + \\ &2\gamma r' \cosh v + \gamma^2 \sinh^2 v - 2\beta \gamma \sinh 2v) \end{aligned}$$

bulunur ve buradan $W^2 = -r^4 \kappa^2 < 0$, bu da $W^2 > 0$ oluşu ile çelişkilidir.

ii) $\gamma = 0$ olsun

$$b = 0 \Rightarrow \beta = \pm r\kappa \text{ ve}$$

$$c = 0 \Rightarrow \alpha = \pm r'$$

bulunur ve buradan $W=0$ olduğu görülür, bu da $W^2 > 0$ oluşu ile çelişkilidir.

İkinci durum: $\langle t', t' \rangle < 0$ olsun. n , C boyunca $t' = \kappa n$ olacak şekilde zamansal birim vektör alanı olsun. O zaman, $b = t \times n$ olmak üzere

$$X(u, v) = c + r \cosh vn + r \sinh vb$$

yazarız. Buna tekabül eden Frenet denklemleri ise

$$t' = \kappa n$$

$$n' = \kappa t + \sigma b$$

$$b' = \sigma n$$

şeklinindedir. (2.6.3) denklemini şu şekilde yazabiliriz

$$0 = a \cosh 3v + b \sinh 3v + c \cosh 2v + d \sinh 2v + e \cosh v + f \sinh v + g$$

Burada,

$$a = -\frac{1}{2}r^3\kappa(r^2\kappa^2 - \beta^2 - \gamma^2)$$

$$b = -r^3\kappa\beta\gamma$$

$$c = \frac{1}{2}r^3(-5r\kappa^2\alpha + 6r'\kappa\beta + r\kappa'\beta - r\kappa\beta')$$

$$d = \frac{1}{2}r^3(-r\kappa'\gamma + r\kappa\gamma' - 6r'\kappa\gamma)$$

dır ve

$$b = 0 \Rightarrow \beta\gamma = 0$$

i) $\beta = 0$ olsun. $a = 0 \Rightarrow \gamma^2 r^2$ ve $c = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Buradan $d = 0 \Rightarrow r' = 0$. Böylece $e = -3r^5 k^3 = 0$ bulunur ki bu $k, r \neq 0$ oluşu ile çelişkilidir.

ii) $\gamma = 0$ olsun. $a = 0 \Rightarrow \beta = \pm rk$ ve $c = 0 \Rightarrow \alpha = \pm r'$. Bu verilerle $W = 0$ bulunur ki bu yine $W > 0$ oluşu ile çelişkilidir.

Üçüncü durum: $\langle t', t' \rangle = 0$ olsun. Oluşumun düzlemlerinin paralel olmadığını düşündüğümüze göre, $t' \neq 0$ dır. Böylece t' , u -düzleminde yatan ışksal bir vektördür. $n = t'$ olsun. Her u için, b vektörü $\langle b, b \rangle = 0$ ve $\langle b, n \rangle = 1$ olacak şekilde t' 'ye dik birim vektör olsun. (2.6.5) den $n = \lambda(u)(-e_1 + e_2)$ ve $b = \frac{1}{\lambda(u)}(e_1 + e_2)$, λ , u değişkenine göre diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. v yerine yeni $-\frac{e^v}{2\lambda(u)}$ parametresini seçip ve onu yine v ile gösterelim. O zaman (2.6.5) şu şekilde verilir:

$$X(u, v) = c + rvn - \frac{r}{2v}b, \quad r, v \neq 0.$$

Böylece Frenet denklemleri

$$t' = n$$

$$n' = \sigma b$$

$$b' = -t - \sigma b$$

şeklindedir ve (2.6.3) denklemi

$$0 = a \frac{1}{v^6} + b \frac{1}{v^5} + c \frac{1}{v^4} + d \frac{1}{v^3} + e \frac{1}{v^2}$$

şeklinde elde edilir, burada

$$a = -\frac{r^5}{4} + \frac{r^3 \beta^2}{4}$$

$$b = \frac{r^3}{4}(-5r\alpha + 6r'\beta - r\beta')$$

$$c = -2r^3\alpha - \frac{r^3\alpha\beta'}{2} - \frac{r^3\sigma\alpha\beta}{2} + \frac{r^3\alpha'\beta}{2} + \frac{3r^3r'^2}{2} + \frac{r^4r'\sigma}{2} - \frac{r^4r''}{2} - \frac{3r^3\beta\gamma}{2} + r^2r'\alpha\beta$$

dır. $a = 0 \Rightarrow \beta = \pm r$, $b = 0 \Rightarrow \alpha = \pm r'$ ve $c = 0 \Rightarrow \gamma = 0$. Gerekli hesaplama yapıldıktan sonra $W = 0$ bulunur ki bu yine $W > 0$ oluşu ile çelişkilidir.

3: Işıksal düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulan yüzey

(2.6.6) denklemi notasyon değişimi ile

$$X(u, v) = c + vn + rv^2t$$

şeklinde yazılır. Burada c , t ve n u -düzleminde, $r > 0$, $v \in I$, $\langle t, t \rangle = \langle n, t \rangle = 0$ ve $\langle n, n \rangle = 1$ dir. Her u için $b(u)$, $\langle t, b \rangle = 1$ ve $[t, n, b] = 1$ olacak şekilde n 'ye dik olan ışıksal vektör olsun. Işıksal düzlem, onun içinde olan herhangi bir ışıksal vektöre dik olduğundan oluşumun düzlemlerinin paralel olması için γ t 'nin sabit olmasıdır (yani u ya bağlı değildir). Şimdi $t' = \kappa n$ olduğunu düşünebiliriz. Oluşumun düzlemlerinin paralel olmadığını varsaydığımızdan $\kappa \neq 0$ dir. Böylece Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n \\ n' &= \sigma t - \kappa b \\ b' &= -\sigma n \end{aligned}$$

şeklindedir. $H=0$ hipotezi

$$0 = av^4 + bv^3 + cv^2 + dv + e$$

olması demektir, burada

$$\begin{aligned} a &= 7rk^2(2r^2\gamma - r') \\ b &= 16r^2\kappa^2\beta + 4rr'\kappa\gamma - 2r^2\kappa\gamma' - r'\kappa' + 2r^2\kappa'\gamma - 8r\kappa^2\sigma + r''\kappa - 16r^3\kappa\gamma^2 \\ c &= -2r\kappa\beta' - 9r\kappa^2\alpha + 2r\kappa'\beta - 20r^2\kappa\beta\gamma + r'\gamma' - \\ & 3r'\kappa\beta + 4rr'\gamma^2 - r''\gamma - \kappa'\sigma + 11r\kappa\sigma\gamma + \kappa\sigma' \end{aligned}$$

şeklindedir.

$a = 0 \Rightarrow r' = 2r^2\gamma$, $b = 0 \Rightarrow \sigma = 2r\beta$ ve bunları c ifadesinde kullanırsak $\alpha = 0$ elde ederiz. Böylece, $W=0$ bulunur, bu ise $W > 0$ oluşu ile çelişir.

2.7. LORENTZ-MINKOVSKI UZAYINDA ÇEMBERLERDEN OLUŞTURULAN SABİT EĞRİLİKLİ RIEMANN YÜZEYLERİ

R.Lopezin çalışmasında [18], çemberlerden oluşturulan sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ile ilgili iki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 2.7.1. M, L^3 de çember parçalarından oluşturulan sabit eğrilikli bir uzaysal yüzey olsun. Oluşumun düzlemleri uzaysal ise o takdirde bu düzlemler paraleldir.

Teorem 2.7.2. M, L^3 de paralel düzlemler üstündeki çember parçalarından oluşturulan, sabit eğrilikli bir uzaysal yüzey olsun. O takdirde, M bir dönel yüzeydir.

Bu iki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.7.1. M, L^3 de sabit ortalama eğrilikli, uzaysal düzlemler üstündeki çember parçalarından oluşan bir uzaysal yüzey ise, o takdirde M bir dönel yüzeydir.

Eğer oluşumun düzlemleri zamansal veya ışıksal ise Teorem 2.7.1 geçerli değildir. Bu durumda paralel olmayan, zamansal veya ışıksal düzlemler üstünde, çember parçalarından oluşturulan uzaysal yüzey örnekleri söz konusudur.

Bu kısımda önceki bölümlerde verdiğimiz Lorentz-Minkowski uzayının tanımını, Minkowski dış çarpımını ve L^3 de çemberlerin tanımını kullanacağız.

M, L^3 içine dahil edilmiş uzaysal bir yüzey olsun. M 'nin birim normal vektör alanı ν olsun, yani $\langle \nu, \nu \rangle = -1$. $X = X(u, \nu)$, M 'nin yerel parametrelendirilmesi olsun. Birinci temel form

$$I = \langle dX, dX \rangle = Edu^2 + 2Fdud\nu + Gd\nu^2$$

şeklinde verilir, ikinci temel form ise

$$II = -\langle dV, dX \rangle = edu^2 + 2fdud\nu + gd\nu^2$$

şeklinindedir. E, F, G, e, f, g bileşenleri Bölüm 2.6 da verilmiştir, H sabit eğriliği ise

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2W^2} \quad (2.7.1)$$

şeklinde verilir.

Minkowski vektörel çarpımını kullanarak (2.7.1) formülü, H sabit ortalama eğriliği için

$$2HW^3 = E[X_u, X_v, X_{vv}] - 2F[X_u, X_v, X_{uv}] + G[X_u, X_v, X_{uu}] \stackrel{\text{tanım}}{=} P \quad (2.7.2)$$

şeklinde verilir.

2.7.1. Sonuçların İspatı

Genelliği kaybetmeksizin $H = \frac{1}{2}$ alalım. M yüzeyini oluşturan çember parçaları ailesinin parametresi u olsun. Düzlemlerin değişik karakterlerine göre Teorem 2.7.1 ve Teorem 2.7.2 yi üç bölüme ayıracağız. Oluşumun düzlemleri uzaysal iken her iki teoremi de ispatlayacağız. Diğer iki durumda, paralel olmayan düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulan yüzey örnekleri vereceğiz. Sonunda her üç durum için Teorem 2.7.2 yi ispatlayacağız.

1. *Oluşumun düzlemleri uzaysaldır*; $\Gamma = \Gamma(u)$, oluşumun her u -düzlemine dik olan bir eğri olsun. İlk önce bu düzlemlerin paralel olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için, Γ 'nin bir doğru olduğunu göstermek yeterlidir ki bunu çelişkiye ulaşılarak gösterebiliriz. t vektörü, Γ eğrisinin tanjant vektörü olsun, yani $t' \neq 0$ dır. Düzlemler uzaysal olduğundan t zamansaldır. Γ 'nin $\{t, n, b\}$ Frenet çatısını alalım, n ve b uzaysaldır. O zaman bu yüzey, $r = r(u) > 0$ ve $c = c(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u, v) = c + r(\cos vn + \sin vb)$$

şeklinde verilir. $\alpha(u), \beta(u), \gamma(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$c' = \alpha t + \beta n + \gamma b$$

yazılabilir ve bu çatıya uygun Frenet denklemleri, κ ve σ sırasıyla Γ 'nin eğriliği ve burulması olmak üzere

$$t' = \kappa n$$

$$n' = \kappa t + \sigma b$$

$$b' = -\sigma n$$

şeklinde olur.

W^2 yi ve (2.7.2) yi kullanarak P 'yi hesapladıktan sonra, bunların $\sin(nv)$ ve $\cos(nv)$ 'nin trigonometrik polinomları olduğunu görürüz ve $A_{-n} = \overline{A_n}$, $B_{-n} = \overline{B_n}$ olmak üzere

$$W^2 = \sum_{n=-2}^2 A_n (\cos nv + i \sin nv)$$

ve

$$P = \sum_{n=-3}^3 B_n (\cos nv + i \sin nv)$$

şeklinde bulunur. $A_i, i=1,2$ ve $B_j, j=1,2,3$ bileşenleri [18] de verilmiştir.

(2.7.2) den, $H = \frac{1}{2}$ için

$$(W^2)^3 = P^2$$

bulunur ve buradan

$$A_2^3 = B_3^2$$

$$3A_1 A_2^2 = 2B_2 B_3$$

$$3A_0 A_2^2 + 3A_1^2 A_2 = B_2^2 + 2B_1 B_3$$

$$A_0^2 A_2 + 3A_0 A_1^2 + 6|A_1|^2 A_2 + 3A_2 |A_2|^2 = B_1^2 + 2B_0 B_2 + 2B_3 \overline{B_1}.$$

Bunları hesapladıktan sonra $W=0$ ve $\kappa=0$ bulunur bu $W>0$ ve $\kappa \neq 0$ oluşu ile çelişkilidir.

Şimdi de Teorem 2.7.2 yi kanıtlayalım. Yani, paralel uzaysal düzlemler üstündeki çember parçalarından oluşturulan sabit eğrilikli M yüzeyinin bir döneel yüzey olduğunu gösterelim. L^3 de bir dönüşüm ile, oluşumun düzlemlerini $x_1 x_2$ -düzlemine paralel yapabiliriz. M yüzeyini şu şekilde parametrelendirelim: $a = a(u)$, $b = b(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u, v) = (a + r \cos v, b + r \sin v, u).$$

Bu yüzeyin, dönel yüzey olduğunu göstermek için, a ve b 'nin sabit olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $(W^2)^3 = P^2$ denkleminde, $a' = b' = 0$ bulunur ki bu ise a ve b 'nin sabit olduğunu gösterir.

2. Oluşumun düzlemleri zamansaldır; Daha önce dediğimiz gibi, zamansal düzlemler için Teorem 2.7.1 geçerli değildir. Fakat eğriliği $H = \frac{1}{2}$ olan, paralel olmayan zamansal düzlemler üstündeki çember parçalarından oluşturulan uzaysal M yüzeyi örneği verebiliriz. Bu örnekte oluşumun düzlemleri Lorentz anlamında $t=(1, u, u)$ vektörüne dik olacaktır. O halde $n = t'$ alalım. Bu durumda n ışıksaldır. b vektörü $\langle b, n \rangle = 1, \langle b, t \rangle = 0$ ve $[t, n, b] = 1$ olacak şekilde bir vektör olsun. Burada n ve b vektörleri oluşumun düzlemlerine aittir ve

$$e_2 = \lambda n + \frac{1}{2\lambda} b \quad \text{ve} \quad e_3 = \lambda n - \frac{1}{2\lambda} b$$

olacak şekilde bir $\lambda = \lambda(u) \neq 0$ bulunabilir. O zaman, $r > 0$ ve c diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$X(u, v) = c + r \left(\lambda e^v n - \frac{1}{2\lambda} e^{-v} b \right)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi de, $v \rightarrow \lambda(u) e^v, u \rightarrow u$ koordinat değişimini yaparsak

$$X(u, v) = c + r v n - \frac{r}{2v} b$$

buluruz. $n=(0, 1, 1)$ için $b = \left(-u, \frac{1-u^2}{2}, -\frac{1+u^2}{2} \right)$ dir. $c=(1, u, u)$ ve $r = \sqrt{5}$ olsun. O takdirde,

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u \end{pmatrix} + \sqrt{5}v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{5}}{2v} \begin{pmatrix} -u \\ \frac{1-u^2}{2} \\ -\frac{1+u^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$X(u, v) = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2v}u, u + \sqrt{5}v - \frac{\sqrt{5}}{4v}(1-u^2), u + \sqrt{5}v + \frac{\sqrt{5}}{4v}(1+u^2) \right)$$

buluruz. Bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = \frac{1}{2}$ dir ve oluşumun düzlemleri paralel değildir.

Şimdi de zamansal durum için Teorem 2.7.2 yi ispatlayalım. L^3 deki bir dönüşümden sonra bu yüzeyi x_2x_3 -düzlemine paralel alabiliriz. Bu yüzey $a(u)$, $b(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u, v) = (u, a + r \sinh v, b + r \cosh v)$$

şeklinde verilir. Yüzeyin dönele olduğunu göstermek için, a ve b 'nin sabit olduğunu göstermek yeterlidir. P ve W 'yi bulduktan sonra, $(W^2)^3 = P^2$ den $a' = b' = 0$ bulunur, bu ise a ve b 'nin sabit olduğunu gösterir.

3. Oluşumun düzlemleri ışıksaldır; Burada $H = \frac{1}{2}$ ortalama eğrilikli, paralel olmayan ışıksal düzlemler üstünde çember parçalarından oluşturulan uzaysal bir yüzey örneği vereceğiz. Bu durumda $\lambda = \lambda(u) \neq 0$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\lambda}t \\ e_2 &= \lambda n + \frac{1}{2\lambda}b \\ e_3 &= \lambda n - \frac{1}{2\lambda}b \end{aligned}$$

alırsak yüzeyi şu şekilde parametrelendirebiliriz :

$$X(u, v) = c + rv^2t + vn .$$

$v \rightarrow rv^2\lambda$, $u \rightarrow u$ şeklinde bir koordinat değişimi yaparsak

$$X(u, v) = c + rv^2t + vn$$

buluruz. Burada, $\langle n, n \rangle = 1$ ve $\langle t, t \rangle = \langle t, b \rangle = 0$ dır. b vektörü $\langle n, b \rangle = 1$ ve $[t, n, b] = 1$

olacak şekilde bir ışıksal vektör olsun. $t = \left(u, \frac{1-u^2}{2}, -\frac{1+u^2}{2} \right)$ ve $n = (1, -u, -u)$ için

$b = (0, 1, 1)$ dır. $c = \left(u, -\frac{1}{2}u^2, -\frac{1}{2}u^2 \right)$ ve $r = \frac{1}{4}$ olsun. O takdirde,

$$X(u, v) = \left(u + v + \frac{uv^2}{2}, -\frac{u^2}{2} - uv + \frac{v^2 - u^2v^2}{8}, -\frac{u^2}{2} - uv - \frac{v^2 + v^2u^2}{8} \right)$$

dır. Bu yüzeyin eğriliği $H = \frac{1}{2}$ dir ve oluşumun düzlemleri paralel değildir.

Şimdi de bu yüzeyler için Teorem 2.7.2. yi ispatlayacağız, yani düzlemlerin paralel olduğunu düşünerek, yüzeyin dönел olduğunu göstereceğiz.

$H = \frac{1}{2}$ olsun ve oluşumun düzlemleri paralel olsun. L^3 de bir dönüşümle bu düzlemler

$x_2 - x_3 = 0$ düzlemine paralel yapılabilir. Bu yüzey $a(u)$, $b(u)$, $r(u)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$X(u, v) = \left(a + v, b + u + r \frac{v^2}{2}, b - u + r \frac{v^2}{2} \right)$$

şeklinde verilir. Burada, önceki durumlarda yaptığımız gibi, a ve b 'nin sabit olduğunu gösterebiliriz. Bu ise yüzeyin dönел olduğunu gösterir.

2.8. L^{n+1} DE KÜRE PARÇALARINDAN OLUŞTURULAN SABİT EĞRİLİKLİ HİPERYÜZEYLER

L^{n+1} , $(n+1)$ -boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olsun, yani

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2 - (dx_{n+1})^2$$

şeklindeki Lorentz metriği ile donatılmış R^{n+1} uzayını gösterebiliriz. M , L^{n+1} içine dahil edilmiş n -boyutlu uzaysal hiperyüzey olsun. Bu hiperyüzey yerel olarak $f=0$ in seviye kümesi olarak gösterildiğinde M uzaysal olduğundan ∇f , M 'ye dik olan zamansal bir vektör olur, yani

$$\langle \nabla f, \nabla f \rangle < 0.$$

M 'yi $N = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ birim normal vektör alanı ile yönlendirelim. $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$

için

$$|\nabla f| = \sqrt{-\langle \nabla f, \nabla f \rangle} = \sqrt{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right)^2}$$

şeklinde verilir. Bu yön ile hesaplanmış H ortalama eğriliği ise

$$nH = -\text{Div} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

ile verilir. Diğer taraftan

$$\text{Div} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{-\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right)^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}}{\sqrt{-\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right)^2}} \right)$$

buluruz. Gereken hesaplamalardan sonra $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right)$,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n+1}^2}, \quad Hessf(\nabla f, \nabla f) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{ve herhangi bir}$$

$$v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \text{ vektörü için } div(v) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \text{ olmak üzere}$$

$$nH|\nabla f|^3 = |\nabla f|^2 \Delta f - Hessf(\nabla f, \nabla f) \quad (2.8.1)$$

buluruz.

Bu kısımda L^{n+1} de paralel uzaysal hiperdüzlemler üstünde küre parçalarından oluşturulan, sabit ortalama eğrilikli uzaysal hiperyüzeyleri çalışacağız. Bir Lorentz dönüşümü yaparak bu hiperdüzlemler $x_{n+1}=0$ hiperdüzlemine paralel yapılabilir [19].

Teorem 2.8.1. M^n, L^{n+1} de paralel uzaysal hiperdüzlemler üstünde küre parçalarından oluşturulan n-boyutlu yüzey olsun.

1. $H \neq 0$ ise M dönel hiperyüzeydir
2. $H = 0$ ve
 - a) $n \geq 3$ ise M , dönel hiperyüzeydir
 - b) $n = 2$ ise M , bir dönel yüzey veya dönel olmayan maksimal hiperyüzeylerin tek-parametrelili ailesine ait bir hiperyüzeydir.

Kanıtlama: Genelliği kaybetmeksizin oluşumun hiperdüzlemlerinin $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemine paralel olduğunu düşünelim. $t_1 < t_2$ olmak üzere, $P_1 = \{x_{n+1} = t_1\}$ ve $P_2 = \{x_{n+1} = t_2\}$ bu oluşumun iki hiperdüzlemi olsun. M yüzeyinin P_1 ile P_2 hiperdüzlemleri arasındaki parçası M^* olsun. Bu hiperdüzlemlere dik olan hiperdüzlemler üstünde Aleksandrov metodunu [20] uygulayarak, $t_1 \leq t \leq t_2$ için, $M \cap \{x_{n+1} = t\}$ seviyelerinin merkezlerinin hepsinin aynı düzlem içinde olduğunu buluruz. Bir dönüşümden sonra bu düzlemi $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ şeklinde yazabiliriz. O takdirde, kürelerin merkezlerini $t \rightarrow (c(t), 0, \dots, t)$, $t \in [t_1, t_2]$ şeklinde parametrelendirebiliriz. M 'nin bir dönel yüzey olduğunu göstermek için c fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$[t_1, t_2]$ aralığında $c' \neq 0$ olduğunu varsayalım. Oluşumun küreleri Öklid küreleri olduğundan, f fonksiyonu

$$f = (x_1 - c(t))^2 + \sum_{i=2}^n x_i^2 - r(t)^2$$

şeklinde verilir. Buradan

$$\nabla f = 2(x_1 - c, x_2, \dots, x_n, -(x_1 - c)c' - rr'),$$

$$|\nabla f|^2 = 4\left(r^2 - [(x_1 - c)c' - rr']^2\right),$$

$$\Delta f = 2\left(n - c'^2 + (x_1 - c)c'' + r'^2 + rr''\right),$$

$$\text{Hess}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & -c' \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -c' & 0 & \dots & c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c'' \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \text{Hess}f(\nabla f, \nabla f) &= 8(r^2 - 2c'(x_1 - c)[(x_1 - c)c' + rr'] + \\ &+ [(x_1 - c)c' + rr'] [c'^2 - r'^2 - rr'' - (x_1 - c)c'']. \end{aligned}$$

Diğer taraftan (2.8.1) in sol tarafı

$$8nH\left(r^2 + [(x_1 - c)c' + rr']^2\right)^{3/2}$$

dır. Şimdi t 'yi sabit tutalım ve λ değişkenini

$$\lambda = \frac{(x_1 - c)c' + rr'}{r}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman (2.8.1) denklemini, g_i katsayıları t değişkenli fonksiyonlar olmak üzere

$$nrH(-1+\lambda^2)^{3/2} = g_0 + g_1\lambda + g_2\lambda^2$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $n^2H^2r^2 = 0$ ve $H=0$ bulunur, ki bu $H \neq 0$ oluşu ile çelişkilidir. Böylece, c 'nin sabit bir fonksiyon olduğunu buluruz, dolayısıyla M dönele bir yüzeydir. Böylece teoremin birinci kısmı kanıtlanmış olur.

Şimdi de $H=0$ durumunu inceleyelim. (2.8.1) denkleminin sağ tarafını hesaplayarak

$$\left(n-1+r'^2-c'^2+rr''-\frac{rr'c''}{c'}\right) + \left(\frac{rc''}{c'}-2r'\right)\lambda + (2-n)\lambda^2 = 0 \quad (2.8.2)$$

bulunur. Buradan $g_2 = n-2 = 0$ bulunur, ki bu $n \geq 3$ ile çelişkilidir. Böylece $c' = 0$ olmalıdır bu da yüzeyin dönele olduğunu gösterir.

$n=2$ için (2.8.2) de λ^1 ve λ^0 in katsayıları

$$g_1 = \frac{rc''}{c'} - 2r' = 0 \text{ ve}$$

$$g_0 = 1 + r'^2 - c'^2 + rr'' - \frac{rr'c''}{c'} = 0$$

dır. Bu iki denklemden

$$rc'' - 2r'c' = 0 \text{ ve} \quad (2.8.3)$$

$$1 - r'^2 + rr'' - c'^2 = 0 \quad (2.8.4)$$

buluruz. Birinci denklemden, $a \in R$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$c' = ar^2 \quad (2.8.5)$$

ve ikinci denklemden

$$1 - r'^2 + rr'' - a^2r^4 = 0 \quad (2.8.6)$$

buluruz. $x = r^2$ ve $y = (r^2)'$ yeni değişkenler olarak alırsak

$$(r^2)' = 2r\sqrt{a^2r^4 + 2br^2 + 1}, b \in R$$

dır. Böylece,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{a^2r^4 + 2br^2 + 1}}$$

dır ve (2.8.5) denklemi

$$c(u) = a \int^u \frac{u^2}{\sqrt{a^2u^4 + 2bu^2 + 1}} du$$

şeklini alır.

Bu şekilde elde ettiğimiz parametrelendirme

$$x(u, \theta) = a \int^u \frac{u^2}{\sqrt{a^2u^4 + 2bu^2 + 1}} du + u \cos \theta,$$

$$y(u, \theta) = u \sin \theta,$$

$$z(u, \theta) = \int^u \frac{du}{\sqrt{a^2u^4 + 2bu^2 + 1}}.$$

şeklinde verilir.

3. TARTIŞMA VE SONUÇ

Üç-boyutlu Lorentz uzayında uzaysal yani pozitif tanımlı metriğe sahip yüzeyler fiziksel yönden oldukça önemlidir. Bu tip yüzeyler Lorentz uzayında bulunduğundan genel relativite teorisinde önemli bir yer tutarlar. E^3 deki minimal yüzeyler, L^3 deki uzaysal maksimal ($H=0$) yüzeylerin bir çeşit karşılığıdır. Örneğin L^3 deki bu yüzeyler E^3 deki minimal yüzeyler gibi bir Weierstrass gösterimine sahiptirler. Ortalama eğriliği verilen yüzeyler için Weierstrass gösterimi K.Kenmotsu tarafından incelenmiştir [14]. L^3 deki maksimal dönel yüzeyler O.Kobayshi [15] tarafından 1983 yılında çalışılmıştır. L^3 deki Riemann tipinden maksimal uzaysal yüzeyler ise 2000 yılında F.J.Lopez, R.Lopez ve R.Souam tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. L^3 deki uzaysal maksimal yüzeyler alan integralinin bir maksimumuna sahiptirler. Böylece, E^3 deki minimal yüzeylere benzer şekilde L^3 de uzaysal bir maksimal yüzeyin paralel düzlemlerdeki çemberler tarafından tabakalanabilmesi için gerek ve yeter koşul yüzeyin herhangi bir noktasında Shiffmann tipinden bir fonksiyonun sıfır değeri almasıdır. Bu fonksiyonun yüzeyin Lorentzian Jacobi operatörünün çekirdeğinde tanımlanabileceği bilinmektedir [17].

Bu tez çalışmasında, L^3 deki maksimal uzaysal bir yüzey paralel düzlemde kapsanan çember yayları tarafından tabakalanmış ise bu yüzeyin Riemann tipinden bir yüzey olacağı sonucuna ulaşılmış ve bu yüzeyler paralel düzlemlerin sırasıyla uzaysal, zamansal ve ışıksal olmaları halinde ayrı ayrı ele alınarak incelenmiştir. Bu çalışmamızın keyfi boyutlara genelleştirilmesi yani küreler tarafından tabakalanmış Riemann yüzeyleri R.Lopez tarafından 1999 yılında kısmen çalışılmış ise de bu çalışmanın konveks ovaloid'lere genelleştirilmesi halen açık bir problem olarak gözükmektedir [19].

KAYNAKLAR

- [1] Riemann, B., 1868, Über die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung, *Abh.Königl.Ges. Wiss. Göttingen*, Math. Kl. 13, 329-333
- [2] Enneper, A., 1869, Die cyclischen Flächen, *Z. Math.Phys*, 393-421
- [3] Shiffman, M., 1956, On Surfaces of Stationary Area Bounded by Two Circles, or Convex Curves, in parallel planes, *Ann. Math.*, 63, 77-90.
- [4] Hoffman, D., Meeks W.H., 1990, Minimal Surfaces Based on the Catenoid, *Amer. Math. Monthly*, 97, 702-730.
- [5] Meusnier, J.B., 1785, Mèmoire sur la courbure des surfaces, *Mèm. des Savants étrangers*, 10, 504.
- [6] Nitché, J.C.C., 1991, Cyclic Surfaces of Constant Mean Curvature, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1, 1-5.
- [7] Jagy W., 1991, Minimal Hypersurfaces Foliated by Spheres, *Michigan math.*, 3 (38), 255-270.
- [8] Brown, J.W., Churchill, 1996, R.V., *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, Inc., Singapore, 0-07-912146-2.
- [9] Miranda, Rick, 1997, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, USA, 0-8218-0268-2.
- [10] Springer, G., 1981, *Introduction to Riemann Surfaces*, Chelsea Publishing Company, New York, 0-8284-0313-9.
- [11] O'Niell, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, California, 0-12-526740-1.
- [12] Akutagava, K., Nishikawa, S., 1990, The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space, *Tôhoku Math. J.*, 42, 67-82
- [13] Osserman, R., *A survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, Inc., New York, 0-48664998-9
- [14] Kenmotsu K., 1979, Weierstrass Formula for Surfaces of Prescribed Mean Curvature, *Math. Ann.*, 245, 89-99.

- [15] Kobayashi O, 1983, Maximal Surfaces in the 3-dimensional Minkowski Space L^3 , *Tokyo J. Math*, 6,297-309.
- [16] Cheng, S.J., Yau, S.T, 1976, Maximal Spacelike Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, *Ann.of Math.*, 104, 407-418.
- [17] Lòpez F.J, Lòpez R.ve Souam R., 2000, Maximal Surfaces of Riemann Type in Lorentz-Minkowski Space L^3 , *Michigan math*, 47, 469-497.
- [18] Lòpez R., 1999, Constant Mean Curvature Hypersurfaces Foliated by Circles in Lorentz-Minkovski Space, *Geometriae Dedicata*, 76, 81-95.
- [19] Lòpez R., 1999, Constant Mean Curvature Hypersurfaces Foliated by Spheres,. *Diff. Geo and its App.*, 11, 245-256.
- [20] Treibergs, A., 1982, Entire Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski Space, *Invent. Math.*,66, 39-52

ÖZGEÇMİŞ

31.08.1975 tarihinde Kosova'nın Prizren kentinde doğdum. İlk ve Orta okul tahsilimi Prizren'in "Emin Duraku" okulunda tamamladım. "Gymnasiyum Gjon Buzuku" Lisesini aynı kentte bitirdim ve 1993 yılında Priştine Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 1998 yılında Bölüm Birincisi olarak mezun oldum ve aynı yılda Priştine Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak atandım. 1999 tarihinde evlilik nedeniyle İstanbul'a yerleştim ve 2001 de İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım.