



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE KOMPOZİT
PLAKALARIN TİTREŞİM ANALİZİ**

Mak.Müh. Valeh ALIZADEH MOGHADAM GHARAGONI

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı
Makina Mühendisliği Programı**

**Danışman
Yrd.Doç.Dr. Erol UZAL**

Temmuz, 2005

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erol UZAL'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Değerli hocam Sayın Dr. Erol UZAL başta olmak üzere, Sayın Doç. Dr. Ata MUĞAN (İTÜ) ve araştırma görevlisi Yusuf CUNEDİOĞLU (İTÜ), doktora tezinden yararlandığım Sayın Dr. Banu KÖRBAHTI ve sınıf arkadaşım araştırma görevlisi Sayın Yunus Ziya'ya ve İstanbul üniversitesi Makina Mühendisliği Anabilim Dalı'nın değerli hocaları ve araştırma görevlilerine içten şükranlarımı sunarım. Matematik hocası değerli Abim Sayın Badrikhan ALIZADEH'ye bilim kazanma yolunda sürekli yardımcım ve rehberim olduğu için de en samimi şükranlarımı sunmayı sonsuza dek ödenemiycek burcum sayıyor kendisine teşekkür ederim. Sevgili Ana Alizadeh'ye de tüm çalışmam boyunca gösterdiği yardımından dolayı teşekkür ederim. Tabi ki onların yardımları ve gösterişleri ile bu çalışmayı gerçekleştirebildiğim için samimi minnettarlığımı taraflarına sunmayı insani borcum sayıyorum.

İki sömester boyunca İTÜ Katı Cisimler Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Ata MUĞAN'ın "Sonlu Elemanlar Yöntemi" dersinden yararlandığım için hem öğretmenlik hakkını hem de derin insani yönünden büyük insani borcumun bir parçası olarak bu çalışmayı Sayın Doç. Dr. Ata MUĞAN'a ithaf ediyorum.

Valeh ALIZADEH MOGHADAM GHARAGONI

İstanbul, 2005

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	5
3. MALZEME VE YÖNTEM	7
3.1. TANIM	7
3.2. ANİZOTROPİK MALZEMEDE GERİLME-GERİNME İLİŞKİSİ.....	9
3.3. ORTOTROPİK MALZEMEDE GERİLME-GERİNME İLİŞKİSİ	11
3.4. KLASİK KATMANLAR TEORİSİ	15
3.5. KATMANLI PLAKANIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLENMESİ.....	24
4. BULGULAR	31
4.1.KATMANLI PLAKANIN DOĞAL FREKANSLARININ YAKINSAMASI.....	31
4.2.BASİT MESNETLİ PLAKANIN DOĞAL FREKANSLARI.....	33
4.3. BASİT MESNETLİ PLAKANIN İLK ALTI MOD ŞEKLİ.....	37
4.4. ANKASTRE MESNETLİ PLAKANIN DOĞAL FREKANSLARI.....	41
4.5. ANKASTRE MESNETLİ PLAKANIN İLK ALTI MOD ŞEKLİ.....	45

5. TARTIŞMA VE SONUÇ	52
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	: Kompozit plakanın yapısı	7
Şekil 3.2	: Tek yönlü liflerle güçlendirilmiş lamina	11
Şekil 3.3	: Açılı laminanın yerel ve global eksenleri	12
Şekil 3.4	: Gerilme bileşenlerinin tanımlanması	18
Şekil 3.5	: Kuvvet ve moment bileşenleri	19
Şekil 3.6	: Klasik katmanlama teorisyle n adet katmandan oluşan plaka	21
Şekil 3.7	: Shell 99 kabuk elemanı	29
Şekil 3.8	: Kabuk elemanın eğrisel koordinattaki değerleri	30
Şekil 4.1	: Ağ oluşumunun yakınsama üzerindeki etkisi	32
Şekil 4.2	: [0/45] 'Dereceli onbir katmanlı plakanın katmanlama sırası ve şekli	33
Şekil 4.3	: [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi	34
Şekil 4.4	: [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	35
Şekil 4.5	: [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	36
Şekil 4.6	: [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	37
Şekil 4.7	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 1.modu	38
Şekil 4.8	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 2.modu	38
Şekil 4.9	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 3.modu	39
Şekil 4.10	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 4.modu	39
Şekil 4.11	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 5.modu	40
Şekil 4.12	: [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 6.modu	40
Şekil 4.13	: [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	41
Şekil 4.14	: [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	42
Şekil 4.15	: [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	43
Şekil 4.16	: [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi.....	44
Şekil 4.17	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 1.modu	45
Şekil 4.18	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 2.modu	45
Şekil 4.19	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 3.modu	46
Şekil 4.20	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 4.modu	46
Şekil 4.21	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 5.modu	47
Şekil 4.22	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 6.modu	47
Şekil 4.23	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 1.modunun vektörel şekli.....	48
Şekil 4.24	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 2.modunun vektörel şekli.....	48
Şekil 4.25	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 3.modunun vektörel şekli.....	49
Şekil 4.26	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 4.modunun vektörel şekli.....	49
Şekil 4.27	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 5.modunun vektörel şekli.....	50
Şekil 4.28	: [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 6.modunun vektörel şekli.....	50

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1	: Farklı ağ boyutları ile yakınsama değerleri	31
Tablo 4.2	: Grafit/epoksi malzemenin özellikleri	32
Tablo 4.3	: [0/90] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları	34
Tablo 4.4	: [0/90] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları	35
Tablo 4.5	: [0/45] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları	36
Tablo 4.6	: [0/45] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları	37
Tablo 4.7	: [0/90] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları	41
Tablo 4.8	: [0/90] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları	42
Tablo 4.9	: [0/45] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları	43
Tablo 4.10	: [0/45] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları	44

SEMBOL LİSTESİ

x, y, z	: Dik koordinatlar(karteziyen koordinatları)
$[A]$: Gerinme rijitlik matrisi
$[B]$: Bağlama rijitlik matrisi
$[C]$: Eğilme rijitlik matrisi
D	: İzotropik plakanın eğilme rijitliği
D_{11}	: Ortotropik plakanın x yönünde eğilme rijitliği
D_{22}	: Ortotropik plakanın y yönünde eğilme rijitliği
$2(D_{12}+2D_{66})$: Ortotropik plakanın etkin burulma rijitliği
ν_{12}	: Kompozit malzemenin 1-2 düzlemindeki Poisson oranı
E_1	: Kompozit malzemenin lif yönündeki elastisite modülü
E_2	: Kompozit malzemenin life dik yönündeki elastisite modülü
G_{12}	: Kompozit malzemenin 1-2 düzlemindeki kayma modülü
ρ_P	: Kompozit plakanın yoğunluğu
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: x, y ve z eksenlerine paralel gerilmelerin normal bileşenleri
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: x_1, x_2 ve x_3 eksenlerine paralel gerilmelerin normal bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$: x, y ve z koordinat sisteminde kesme gerilmesi bileşenleri
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$: x_1, x_2 ve x_3 koordinat sisteminde kesme gerilmesi bileşenleri
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$: x, y ve z koordinat sisteminde kesme gerinmesi bileşenleri
$\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$: x_1, x_2 ve x_3 koordinat sisteminde kesme gerinmesi bileşenleri
u_0, v_0, w_0	: Plakanın orta düzleminin yerdeğiştirme bileşenleri
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: x, y ve z yönlerinde birim uzamalar
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$: x_1, x_2 ve x_3 yönlerinde birim uzamalar
E_x	: Ortotropik malzemenin x yönünde elastisite (Young) modülü
E_y	: Ortotropik malzemenin y yönünde elastisite (Young) modülü
G_{xy}	: Ortotropik malzemenin kayma modülü
ν_{xy}	: Ortotropik malzemenin Poisson oranı
θ	: Malzeme ekseni ile global eksen arasındaki açı
$[Q]$: Katılık matrisi
$[S]$: Sertlik matrisi
$[T]$: Dönüşüm matrisi
M_x	: Plakanın x eksenine dik eğilme momenti
M_y	: Plakanın y eksenine dik eğilme momenti
M_{xy}	: Plakanın x eksenine dik burulma momenti

N_x	: x yönünde düzlem içi normal kuvvet
N_y	: y yönünde düzlem içi normal kuvvet
N_{xy}	: x yönünde x eksenine dik düzlem içi kesme kuvveti
P	: Atalet terimi
ω	: frekans
h_k	: Plakanın kalınlığı
A_r	: Orta düzlemin alanı
$[K]$: Katılık matrisi
$[K^e]$: Eleman katılık matrisi
$[M]$: Kütle matrisi
$[M^e]$: Eleman kütle matrisi
A^e	: Eleman alanı
λ	: Özdeğer
$[\psi]$: Özvektör matrisi

ÖZET

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ (SEY) ile KOMPOZİT PLAKALARIN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu çalışmada katmanlı laminalardan oluşan kompozit plakaların sonlu elemanlar yöntemi ile serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Çalışmayı genel bir bakışta beş bölüme ayırmak mümkündür.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmıştır. Bu bölümde kompozit plakalar üzerinde serbest titreşim analizlerinin yapılmasına neden ihtiyaç duyulduğu izah edilmiştir. Ardından ise ikinci bölümde, bu konu üzerinde literatürdeki yapılan araştırmalara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde lifler ile güçlendirilmiş plakalar hakkında bilgiler verildikten sonra, plakanın titreşim denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler bulunurken, klasik katmanlar teorisi kullanılmıştır. Daha sonra plakanın sonlu elemanlar modeli oluşturulmuş doğal frekanslarının elde edilmesi ile ilgili ilişkiler ifade edilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, ANSYS paket programı kullanılarak, plakanın basit mesnetli ve ankastre mesnetli sınır koşulları altında modal analizleri yapılmıştır. Sonuçlar ise tablolar ve graflar şeklinde verilmiştir. Daha sonra bulunan sonuçlar üzerinde beşinci bölümde yorumlar yapılmış, ilerideki çalışmalara ilişkin öneriler verilmiştir.

SUMMARY

VIBRATION ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES BY FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

In this thesis, the free vibration analysis of laminate composite plates by using the finite element method (FEM) have been studied. In a general view, the study includes five sections.

In the first section, an introduction relevant with topic have been given. In this section a vast general information about the necessity of free vibration analysis of composite plates have been explained. Then, in the second section literature studies have been reviewed in this field.

In the third section, after giving a brief information about fiber reinforced composites, vibration equations of plate have been deduced. During the finding of mentioned equations classical laminate theory have been used. Then, finite element model of plate have been assembled and in order to finding the natural frequencies, the relevant equations have been expressed.

In the fourth section of study, modal analysis of clamped and simple supported plates, have been done by ANSYS program. The results of analysis have been given in tables and illustrated in graphics. Then, interpretations about the results and suggestions about the future studies have been presented.

1. GİRİŞ

Mühendislikte kullanılan yapılar aslında üç boyutlu yapılardır. Ancak üç boyutlu yapıların matematiksel olarak modellenmesi oldukça karmaşıktır. Dolayısıyla bu yapılar bir takım kabuller yapılarak iki ve bir boyutlu hale dönüştürülür. Sözkonusu yapılara örnek olarak köprüler, kuleler, demiryolları, petrol boru hatları, barajlar, uzay istasyonları ve makinaların yapısal parçaları sayılabilir .

Sözkonusu yapıların statik ve dinamik kuvvetler etkisi altında davranışı bu yapıların tasarımı aşamasında oldukça önemlidir. Yapıların dinamik kuvvetler etkisi altında davranışlarının incelenmesi gerekmektedir. Serbest titreşim karakteristikleri yapının mod şekilleri ve titreşim frekanslarıdır. Yapıya etkiyen kuvvetlerin frekansları ile serbest titreşim frekanslarının karşılaştırılması rezonans olayı açısından oldukça önemlidir. Ayrıca yapıların dinamik kuvvetlere cevabının araştırılması da kuvvetlerin etkisi altındaki yapının nasıl davranacağını belirlemek bakımından önemlidir. Bu amaçla dinamik yükler etkisi altında yapıların zorlanmış titreşimlerinin araştırılması gerekmektedir.

Mühendislikte yapıların analitik olarak incelenmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Bunun da başlıca nedenleri yapının karmaşıklığı, karmaşık sınır koşullarının olması ve kullanılan malzemelerin karma yapıya sahip olmasıdır. Bu gibi durumlarda sistemlerin sayısal yöntemler ile incelenmesine ihtiyaç duyulur. Bu nedenle de hemen hemen her alanda sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi (SEY) de bu yöntemlerden biridir.

SEY karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir yaklaşık çözüm şeklidir. Yöntemin üç temel niteliği vardır; İlk olarak , geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olarak daha basit altbölgelere ayılır. İkinci aşamada, her elemandaki sürekli fonksiyonların cebirsel

polinomların lineer kombinasyonu olarak tanımlanabileceği kabul edilir. Üçüncü kabulde ise, düğüm noktalarındaki değerler sürekli farz edilir ve süreklilik derecesine bağlı olarak problem çözümlenir. Kullanılan yaklaşım fonksiyonları interpolasyon teorisinin genel kavramları kullanılarak polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek tanım denklemlerinin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki düğüm sayısına bağlıdır.

Günümüzde analiz yöntemlerinin gelişmesinin yanısıra, yapılarda kullanılan malzemeler de gelişmektedir. Daha önceleri çelik, metal esaslı malzemeler, ve alüminyum gibi malzemeler yapılarda daha fazla kullanılmaktaydı, fakat son zamanlarda malzeme özelliklerinin geliştirilmesi açısından kompozit malzemelerin üretimine eğilim artmıştır. Kompozitlerin, çelikten hafif olması, alüminyumdan sağlam olması ve korozyona daha fazla dayanıklı olması bir taraftan, dayanım/hafiflik oranının yüksek olması da diğer taraftan bu malzemenin kullanım alanlarını gittikçe artırmaktadır.

Kompozit malzemeler karma yapılarından dolayı iyi dayanım özelliklerine sahiptir. O yüzden de kullanılacak yapıda, hem kullanılacağı konum açısından hem de taşıyacağı yük açısından dikkatli analizin yapılmasını gerektirir. Özellikle uzay gibi hassas sanayide daha geniş kullanılması, bu malzemelerden yapılan yapıların kritik karakteristiklerinin yüksek bir dikkatle belirtilmesini talep etmektedir. O yüzden de son zamanlarda bir çok araştırmacılar tarafından bu malzemeler üzerinde gerilme-gerinme, titreşim gibi analizler yapılmıştır. Bu analizlerin yapılması sırasında hem analitik yöntemler hem de sayısal yöntemler kullanılarak problemler ele alınıp gereken incelemeler yapılmıştır. Fakat, sayısal yöntemlerin daha karmaşık problemlere uygulanabileceği avantajından dolayı bu yöntemler daha sık şekilde kullanılmıştır.

Yukarıda bahsedilen amaçlar doğrultusunda bu tez çalışmasında, özel ortotropik katmanlı dikdörtgen plakanın serbest titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde konuya ilişkin günümüzdeki yapılan analizlere değinilmiştir. Titreşim analize neden ihtiyaç duyulduğu hakkında bahs edilmiştir. Aynı zamanda yapının titreşim karakteristiklerinin bir parçası olan doğal frekansların belirtilmesinin rezonans gibi arzu edilmeyen durumların öüne geçilmesi için gerekli olduğu zikr edilmiştir.

Tezin 3.bölümünde kompozit malzemelerin tanımlanması yapılmıştır. Lifler ile güçlendirilmiş kompozitler hakkından bilgi verilmiştir. Daha sonra anizotropik hal için genelleştirilmiş Hook kanununun verilmiştir. Gerilme-gerinme ilişkileri özel ortotropik malzeme için genel hal üzerinde yapılan basitleştirmeler sonucunda bulunmuştur. Gerilme-gerinme ilişkilerinden de katmanlı plakanın serbest titreşim denklemi bulunmuştur. Tüm bu ilişkiler bulunurken klasik katmanlı teorisi kabulleri kullanılmıştır.

Dikdörgen plağın titreşim karakteristiklerinin bulunması için sonlu elemanlar yöntemi ile plaka modellenmiştir. Bu modelleme sırasında sonlu elemanlar hiyerarşisi aşağıdaki şekilde gerçekleşmiştir;

1. Eleman seçimi ve elemanlara ayırma
2. Eleman fonksiyonunun belirtilmesi
3. Kayma kısıtlamalarının uygulanması ve sistemin serbestlik derecesinin düşürülmesi
4. Özdeğer probleminin ele alınması ve çözümlenmesi

Kompozit malzemelerin tasarım ve analiz aşamalarında kullanılan yazılımlar iki ana grupta yer almaktadır;

- a) klasik katmanlı plaklar teorisini kullanarak, sırf kompozit malzemelerden yapılmış katmanlı plakaların makro/mikro şeklinde analizini yapmaya yönelik hazırlanan yazılımlar.
- b) ANSYS, NASTRAN gibi genel sonlu elemanlar yöntemini esas alarak kullanılan analiz yazılımları.

Bu konu ise 4. bölümde ele alınmıştır. Bu bölümde katmanlı dikdörtgen kompozit plağın modal analizi klasik katmanlar teorisinden yola çıkılarak sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. Bu çalışmanın amacı katmanlamanın ve katman açısı değerinin plakaların doğal frekansları ve mod şekilleri üzerindeki etkisini incelemektir. Bu analizlerin gerçekleştirilmesi için de sayısal yöntem aracı olan ve sonlu elemanlar mantığı ile yazılan ANSYS paket yazılımı (İstanbul Teknik Üniversitesi) kullanılmıştır. Çeşitli katman sayısına sahip olan plaka üzerinde ANSYS ortamında modal analiz yapılmış ve sonuçlar tablolar ve garflar şeklinde sunulmuştur.

5.Bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve sonuçların teorilere ve deneysel sonuçlara uygun olup olmadığı tartışılmıştır.

2 GENEL KISIMLAR

Plakalar genelde bir çok yapının oluşturulmasında kullanılan malzemedir. Özellikle, uzay sanayinde, sualtı gemilerinde, otomotiv sanayinde, enerji santrallerinde kullanılır. Plakalar yapıdaki konumuna ve üsteleneceği fonksiyona bağlı olarak, burulma, eğilme, çekilme, salınım gibi bir çok zorlanmalara maruz kalabilir. Bu durumlar arasında titreşim çoğu zaman istenilmez bir olay olup yapıların bozulmasına neden olmaktadır. O yüzden de titreşimin belirli noktalar ile sınırlanmasına çaba gösterilir [1,2].

Serbest titreşim yapan her cisim veya yapı bir veya birkaç doğal frekans ile salınım yapar. Bu frekanslar sistemin dinamik özellikleri olup sistemdeki yayılı kütle ve katılığa bağlıdır. Sistem dış etkenlere maruz kalınca, doğal frekanslarının birinin, zorlanma sonucunda oluşan frekansların çakışmasından rezonans meydana gelir ki, bu da sistemin hasar görebileceğinin sinyalidir. Köprülerin, binların yıkılması, uçak kanatlarının kopması rezonans sonucunda meydana gelebilecek hasarların örneğidir. O yüzden sistemin titreşim karakteristiklerinin belirtilmesinde, doğal frekansların bulunması, dolayısıyla serbest titreşim analizlerinin yapılması kaçınılmazdır [3].

Serbest titreşim zaman içinde sürtünme gibi doğal engeller ve suspansyon gibi yapay engeller neticesinde sönümler. Fakat, sönümleme miktarı küçük olunca, doğal frekanslardaki tesiri küçü olup, o yüzden de serbest titreşim analizinde gözardı edilebilir [2].

Kompozit plakaların analizinde iki temel teori kullanılır [4];

- a) Kayma-Deformasyon Teorisi (Shear-Deformation Theory)
- b) Klasik Katmanlar Teorisi (Classical Laminat Theory)

Literatürde kompozit plakalar üzerinde yapılan statik ve dinamik analizlerin bir kısmında klasik katmanlar teorisi ile problemler ele alınıp, analizler yapılmıştır. Bu

analizler hem analitik hem de sayısal yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Fakat, mühendislikte yapıların analitik olarak incelenmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Bunun da başlıca nedenleri yapının karmaşıklığı, karmaşık sınır koşullarının olması ve kullanılan malzemelerin karma yapıya sahip olmasıdır. Bu gibi durumlarda sistemlerin sayısal yöntemler ile incelenmesine ihtiyaç duyulur.

L. Zietsman, ve diğ. [5] elastik mesnetli dikdörtgen plakaların sonlu elemanlar yöntemi ile titreşim analizlerini yapmışlardır. A. Houmat tarafından [6] ise ‘h-p sonlu elemanlar metodu ile membranlarda serbest titreşim analizi’ yapılmıştır. Young-Shin Lee ve diğ. [7] ise ‘ içinde dikdörtgen plaka bulunan katmanlı komozit silindirin serbest titreşim analizini yapmışlardır.

Nallim ve diğ. [8] tarafından ince liflerle güçlendirilmiş çeşitli katmanlı kompozitlerin statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. MAHERI ve diğ. [9] tarafından Rayleigh-Ritz enerji minimizasyonu kullanılarak FRP (liflerle güçlendirilmiş plakalar) tipli katmanlar üzerinde sönümleyen titreşim modları bulunmuştur.

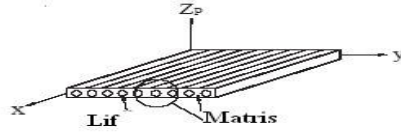
KYO [10] kompozit plakaların sönümleme ve titreşimlerinin düzlemsel yerdeğiştirmelerinin düzlemsel halini ele alarak sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Benzer bir çalışmada Simon Wang ve Yingshun Zhang [11] dikdörtgen kompozit laminaların titreşimini Layer Wise B-Spline Finite Strip yöntemi ile yapmışlardır. Diğer bir çalışmada ise A.R. Setoodeh ile G. Karami [12] tarafından anizotropik, kalın, katmanlı kompozit plakaların statik, titreşim ve burulma analizlerini 3-boyutlu Layer-Wise sonlu elemanlar yöntemini noktasal elastik mesnetli sınır koşulları altında ele almıştır.

Katmanlı kompozit plakaların dinamik davranışları da bir çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Y.M. Desai ve diğ. [13] tarafından Layer-Wise karma sonlu eleman modeli kullanılarak katmanlı komozit plakaların dinamik analizi yapılmıştır.

3 MALZEME VE YÖNTEM

3.1 TANIM

kompozit malzemeler, şekil ve/veya kimyasal olarak farklı, birbiri içerisinde pratik olarak çözünmeyen iki veya daha fazla sayıda makro bileşenin kombinasyonundan oluşan malzemeler şeklinde tanımlanır. kompozit malzemeler, genelde güçlendirici liflerin matrislerin içine uygun şekilde gömülmesiyle oluşur. Bu şekilde oluşan bir kompozit plaka, farklı lif yönelendirme açısına sahip diğer plakalarla birleştirilerek amaca uygun daha farklı özelliklere sahip yeni kompozit plakalar elde edilebilmektedir .



Şekil 3.1; Kompozit plakanın yapısı

Lifler kompozit malzemenin mukeyemet ve yük taşıma özelliğini sağlar. Matris ise, plastik deformasyona geçişte oluşabilecek çatlak ilerlemelerini önler ve kırılan liflerdeki gerilmeleri diğer sağlam liflere aktarır [1].

Kompozit malzemeler makro ölçüde heterojen karakterli bir yapıya sahiptir. İç yapıları çıplak gözle incelendiğinde yapı bileşenlerinin seçilip ayrırtdilmesi mümkündür. Yapılarında birden fazla fazın yer aldığı klasik alaşımlar ise makro ölçüde homojen olmalarına karşın mikro ölçüde heterojen malzemelerdir [4].

Kompozit malzemelerde güçlendirici lif olarak cam, aramid, karbon, boron lifleri ve diğer plastik lifler kullanılır. Bunlar amaca bağlı olarak çeşitli yapılarda ve sanayi alanlarında kullanılmaktadır; Metal takviyeli metal kompozitlerde boron lifleri kullanılır. Gaz türbini kanatları gibi yüksek ısıda üstün mukavemet gerektiren yerlerde alüminyum oksit matris içerisinde kullanılır.

Kompozit malzemelerin performansını etkileyen temel faktörler; lifler, matris ve katmanlama sırasından (stacking sequence) ibarettir. Liflerin kompozit malzeme üzerindeki etkileri, genel olarak yönlendirmelerine, uzunluklarına ve şekillerine bağlıdır. Liflerde üç çeşit yönlendirmeden bahs etmek mümkündür. Bunlar; tek boyutlu, düzlemsel (iki boyutlu) ve üç boyutlu yönlendirmelerdir. Bir boyutlu yönlendirmeli kompozit en yüksek mukavemete ve lifler doğrultusunda en fazla elastisite modülüne sahip olan düzenlemedir. İki boyutlu yönlendirmeli iki farklı mukavemet özellikleri ortaya çıkar. Üç boyutlu yönlendirmenin sahip olduğu güçlendirme değeri ise tek boyutlunun yaklaşık olarak $1/3'$ üne eşit olmaktadır. Herhangi bir yöndeki mekanik özellikler, o yöndeki liflerin sahip oldukları hacim ile orantılıdır [1,4].

Kompozit malzemelerin farklı performansları sağlaması için farklı lif yönlendirmelerle katmanlar biraraya getirilmektedir. Laminalı kompozit plakalar aslında katmanların sırasıyla birbirinin üzerine dizilmesinden orta çıkan yeni kompozit malzemedir. Elde edilen çok katmanlılığın mekanik özellikleri bazı durumlarda katmanın özelliğine benzerken bazı durumlarda ise tam farklı olabilir. Bu farklılık ve benzerlilikler ise diziliş ve katmanlama şekline bağlıdır [4].

Laminalar yukarıda zikredilen faktörlerden dolayı farklı türlerde bulunur;

- a) Tek yönlü ipli veya bez lamina
- b) Simetrik lamina
- c) Hibrid lamina

Bu tip katmanlama sonucunda oluşan malzemeler, genelde anizotropik özelliklere sahip olur. Fakat, katmanlama etkilerini belli amaçlara yönelik yönlendirip, ortotropik ve izotropik malzemelerin de elde edilmesi mümkündür [1].

3.2 ANİZOTROPİK MALZEMEDE GERİLME-GERİNME İLİŞKİSİ

Hook kanununa göre gerilme-gerinme ilişkisi

$$\sigma_{ij} = \sum C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad ; i, j = 1, \dots, 6 \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Kanunun matris hali ise

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde gösterilir. Gerinme-yer değiştirme arasındaki ilişkiler ise,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (3.3)$$

Şeklinde ifade edilir. Burda, u,v,w sırasıyla x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeleri gösterir. Q_{ij} Rijitlik matrisi (3.2) 'de görüldüğü gibi 36 adet sabitten oluşmaktadır. Eğer bir gerinme enerjisi varsa C matrisi simetriktir, Yani

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (3.4)$$

dir. Eğer $S = Q^{-1}$ olarak gösterilirse, benzer şekilde

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (3.5)$$

olup, gerilme-gerinme ilişkisi

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir [4]. Burada, S matrisi sertlik matrisi olarak adlandırılır [4].

3.3 ORTOROPİK MALZEMEDE GERİLME-GERİNME İLİŞKİSİ

Malzeme özellikleri iki düzleme göre simetrik olduğu durumda, simetrililik üçüncü düzleme de genişlediğinden dolayı (ortotropik hal) gerilme-gerinme ilişkisinin daha da basit hale (9 tane sabitin bulunduğu hal) gelmesine neden olur. Bu durumda ise,

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

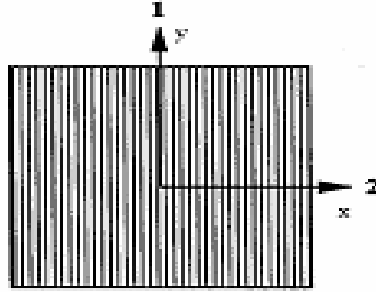
Şeklinde elde edilir. Ototropik durumda $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, asal gerilmeleri ile $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{12}$ kayma gerilmeleri birbirinden bağımsızdır. Halbuki anizotropik durumlarda birbirine bağlıdır.

Plakalarda üçüncü boyutun diğer iki boyuta nazeren çok küçük olduğundan dolayı (Kirchhoff plaka teorisi) üç boyutlu olan problemi iki boyutlu olarak incelemek mümkündür. Bu durumda 1-2 düzleminde bulunan ve liflerin 1-eksenine paralel olduğu ortotropik lamina için (Şekil 3.2) düzlemsel gerilme (Plane stres) koşullarından,

$$\begin{cases} \sigma_3 = 0 \\ \tau_{23} = 0 \\ \tau_{31} = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \\ \gamma_{23} = 0 \\ \gamma_{31} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Olduğu bilinmektedir [4].



Şekil 3.2; Tek yönlü liflerle güçlendirilmiş lamina [14]

Böylece gerilme-gerinme ilişkisi ortotropik lamina için,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{cases} S_{11} = \frac{1}{E_1} \\ S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{22} = \frac{1}{E_2} \\ S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{cases} \quad (3.11)$$

dır. Burada, E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , ν_{21} , sırasıyla boyuna elastisite modülü , enine elastisite modülü, kayma modülü, Poisson oranlarını simgelemektedir. Görüldüğü gibi bağımsız 4 tane eleman vardır. (3.10) tersine çevrilirse gerilme-gerinme ilişkisi,

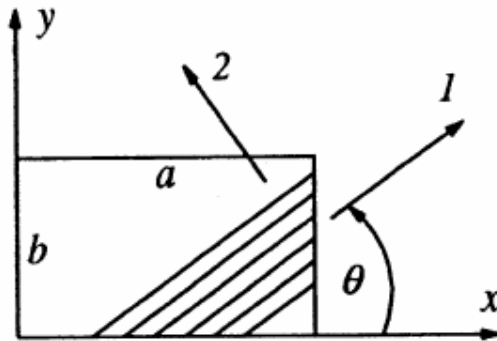
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

olur. Burada katılık matrisinin elemanları,

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \\ Q_{12} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \\ Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (3.13)$$

şeklindedir [14].

Genellikle kompozit plakaların sadece tek yönde yerleştirilmiş laminalardan meydana gelmediği bilinmektedir. Çünkü tek yönde yerleştirilmiş laminaların enine yönde dayanımları azdır. Çoğu zaman plakalar çeşitli yönelimlere sahip laminaların üstüste gelmesi ile oluşturulur. Bu nedenle şekil (3.3) ‘teki eksen takımları dikkate alınarak inceleme yapılır [15].



Şekil 3.3; Açılı laminanın yerel ve global eksenleri [9]

1-2 koordinat sistemindeki eksenler yerel eksen ya da malzeme eksenini olarak adlandırılır. 1-Yönü liflere paralel, 2-yönü ise liflere dik yönü göstermektedir. x-y Koordinat sistemi ise global eksen olup, iki eksen takımı arasındaki açı θ olarak gösterilmektedir. İki eksen takımındaki gerilmeler arasında,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

bağıntısı vardır. Burada $[T]$, dönüşüm matrisi,

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

şekindedir.(3.12) 'daki gerilme-gerinme ilişkisini kullanarak (3.15),

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

şekline gelir. Global ve lokal gerilmeler de aynı $[T]$ dönüşüm matrisi ile ilişkilidir, yani;

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

(3.17),(3.16) 'ye yerleştirilirse gerilme-gerinme ilişkisi

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklide olur. Denklemin sağ tarafındaki çarpımları yapılarak,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

şekline gelir. Eğer

$$\begin{cases} m = \cos \theta \\ n = \sin \theta \end{cases}$$

olarak gösterilirse, o zaman

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + Q_{22}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})n^2m^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + Q_{22}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})n^2m^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})n^3m \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})n^2m^2 + Q_{66}(n^4 + m^4) \end{aligned} \quad (3.20)$$

olur. Liflerin lamina içerisine x-y yönlerinde yerleştirildiği durumda laminalar özel ortotropik; liflerin lamina içerisine açılı yerleştirildiği durumda ise laminalar genel ortotropik olarak adlandırılır [15].

3.4 KLASİK KATMANLAR TEORİSİ

Laminalar, katmanların biribiri üzerine yapıştırılmasından ortaya çıkan malzemelerdir (Şekil 3.6). Bu incelemedeki kabuller Klasik Katmanlar Teorisi olarak ele alınmıştır [4].

Bu teoriye göre laminaların katmanlamasında aşağıdaki kabuller alınmıştır;

1. Laminalar mükemmel şekilde birbirleri ile yapıştırılmış o yüzden de laminalar arasında herhangi bir kayma bulunmamaktadır.
2. Laminanın herhangi bir noktasındaki oluşan gerilmeler orta düzlemin yerdeğiştirilmesi ve eğilmesine bağlıdır.
3. Laminalarda oluşan gerilmeler düzlemseldir.
4. x-y düzlemi laminalara paralel ve z-ekseni ise laminalara dik konumdadır.
5. Deformasyon sonrası ile deformasyon öncesi düzleme olan birim vektörü dik olma konumunu korumaktadır.

Bu varsayımları kabul ettiğimiz takdirde katmanlı plakayı kabuk şeklinde modellememiz mümkün olup, Kirchhoff kabulleri de analizde geçerli olmaktadır.

Eğer orta düzlem üzerinde P_0 noktasının yer değiştirmeleri x,y,z eksenleri yönünde sırasıyla x_0, y_0, z_0 olursa, z mesafesinde bulunan P noktasının x yönündeki yer değiştirmeleri

$$u = u_0 - z\alpha \quad (3.21)$$

şeklindedir. Burda α orta düzlemin x- yönündeki eğimidir. Yani;

$$\alpha = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.22)$$

dir.(3.21) ve (3.22) 'den z uzaklığında bulunan herhangi bir nokta için x- yönündeki yer değiştirme

$$u = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde orta düzlemde z uzaklığında bulunan herhangi bir noktanın y- yönündeki yerdeğiştirmesi,

$$v = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilir. z- Ekseni yönündeki yer değıştirmelr ise Kirchoff kabulüne göre sıfırdır. Bu durumda katmanlı plakanın gerilmeleri,

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{E}_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

şeklinde hesaplanır. w_0 'in ikinci türevleri orta düzlemin eğriliklerini gösterdiği için, gerinmeler

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^0 \\ \mathcal{E}_y^0 \\ \mathcal{E}_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

şeklinde bulunur. Burada orta düzlemin gerinmeleri ve sapmaları ise,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^0 \\ \mathcal{E}_y^0 \\ \mathcal{E}_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

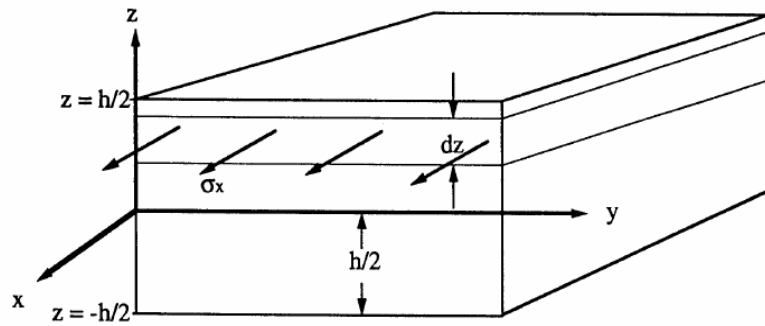
$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki ilişkilerden gerilmelere z - eksenini yönünde lineer olarak değiştiği gözlenmektedir. Bu durumda, katman içi gerilme-gerinme eşitliği (3.16) denkleminde,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

şeklide elde edilir. Katmanlı plakanın gerilmesindeki değişimi katmanlarda oluşan gerilmenin toplanması ile elde edilir [1].

Katmanlardaki katman içi gerilmelerin farklı olduğundan dolayı, kompozit plağı etkileyen kuvvetler ve momentlerin bulunması için, t kalınlıkta bir plakanın orta düzlemindeki kuvvetler ve momentlerin serbest diyagramından yola çıkılır. Bu yöntemde ilk önce tek katmanda oluşan kuvvetler ve momentler (genelde orta düzlemde) hesaplanır. Daha sonra katmalar boyunca (plağın kalınlığı boyunca) intergal alınır. Bu Durumlar şekil (3.5), (3.6)' de gösterilmiştir.



Şekil 3.4: Gerilme bileşenlerinin tanımlanması [14]

(3.4) şekline bakıldığında,

$$x\text{- yönünde kuvvetlerin toplamı} = \sum \sigma_x(dz)(y) \quad (3.31)$$

dir. z değişiminin çok küçük olduğu halde

$$dz \rightarrow 0 \text{ için, } \sum \sigma_x(dz)(y) = y \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (3.32)$$

olur. (3.32) Eşitliğinin iki tarafından y miktarı dışarı çekilirse, x - yönündeki kuvvet bileşeni

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde şekil (3.4) 'deki gerilme durumları göz önünde bulundurulursa, y - yönünde ve kayma gerilmesi yönünde (xy - yönü) kuvvetler

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad (3.34)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

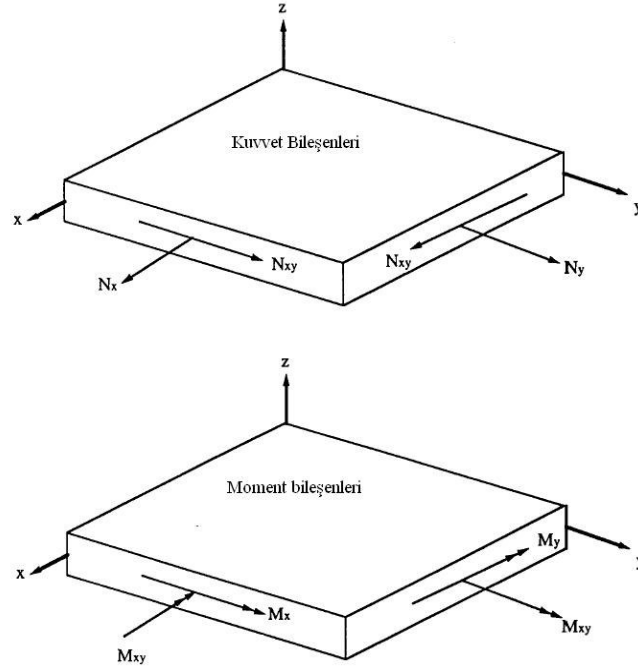
şeklinde bulunur. Şekil (3.4) 'e bakıldığında, plakanın kenarlarına etkiyen kuvvetler orta düzleme göre moment oluşturur. Orta düzlemden z mesafesinde olan $\sigma_x(dz)(y)$ kuvveti daikkate alınırsa, kuvvetler için yapılan hesaplamaların benzeri de momentler için uygulanabilir. Bu durumda, x , y ve xy -yönlerinde oluşan momentler

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (3.35)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

şekild elde edilir.



Şekil 3.5: Kuvvet ve moment bileşenleri [14]

(3.34) ve (3.35) eşitlikleri matris formunda yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (3.37)$$

şekline gelir. Plâğın n adet katmandan birbiri üzerine katmanlımsından ortaya çıktığına dikkat edilirse, (Şekli 3.6), plakaya etkiyen kuvvetler ve momentler tüm katmanların plaka kalınlığı boyunca integralinin alınmasından meydana gelir. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.38)$$

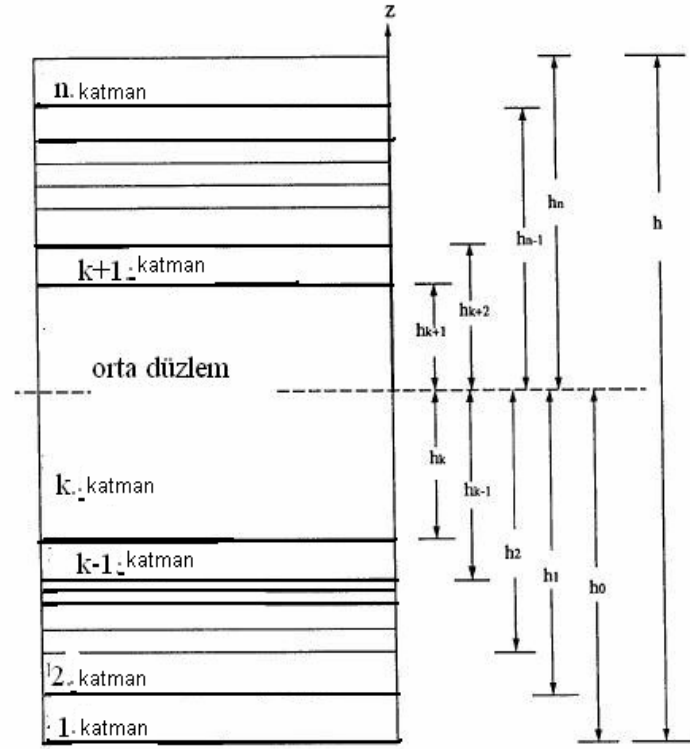
$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (3.39)$$

eşitlikleri elde edilir. n Adet ortotropik katmanlardan oluşan plaka için, (3.24), (3.25), (3.26) ve (3.39) eşitliklerini (3.28) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} dz + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} z dz \right\} \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} z dz + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} z^2 dz \right\} \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.6: Klasik katmanlar teorisyle n adet katmandan oluşan plaka [14]

Orta düzlemin gerilmeleri ile sapmalarının z 'den bağımsız olduğundan dolayı, katman içerisinde de $[Q]$ sabit olduğundan dolayı, bu değerler integral dışına çekilirse

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right\} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right\} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{pmatrix} + \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right\} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

şeklinde elde edilir. A,B,D matrisleri

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad i = 1,2,3, j = 1,2,3 \quad (3.44)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad i=1,2,3, j=1,2,3 \quad (3.45)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad i=1,2,3, j=1,2,3 \quad (3.46)$$

şeklinde tanımlanırsa, (3.42) ve (3.43) denlmeleri

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

şeklinde elde dilir. Bu eşitliklerin genel hali

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

dir. Bu eşitliğin daha basit hali ise

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

şeklindedir [1].Burada,

A; uzama rijitlik matrisi bileşenleri

B; eğilme-uzama çifti ritilik matrisi bileşenleri

D; eğilme rijitlik matrisi bileşenleridir.

Plakanın düzlem içi denge denklemleri

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -P \quad (3.53)$$

şeklinde elde edilir. Burada P, z- yönündeki atalet momentidir. Bu denklemler (3.47) ve (3.48) deklemlerine göre açılırsa, plakanın titreşim denklemleri

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + 2 A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + (A_{11} + A_{16}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ & A_{26} \frac{\partial v^2}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3 B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2 B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + 2 A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\ & B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2 B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3 B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} & - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2 B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - 3 B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - \\ & (B_{12} + 2 B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - 3 B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\ & + (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -P \end{aligned} \quad (3.56)$$

şeklinde bulunur. Plağın yoğunluğu ρ_p olduğu durumda P atalet kuvveti

$$P = \rho_p h_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.57)$$

dir. Özel ortotropik durumda sadece $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}, D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$ sabitleri mevcut olup, katmanlar arasında ise kayma gerilmesi, burulma çifti, eğilme çifti bulunmamaktadır. Aynı zamanda özel ortotropik durumda simetriden dolayı da $B_{ij}=0$ dir. Bu durumda, özel ortotropik plağın titreşim denklemi

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.58)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{Q_{11} h^3}{12} \\ D_{12} = \frac{Q_{12} h^3}{12} \\ D_{22} = \frac{Q_{22} h^3}{12} \\ D_{66} = \frac{Q_{66} h^3}{12} \end{cases} \quad (3.59)$$

dir [15].

Bu çalışmada özel ortotropik durum ele alınmıştır.

3.5 KATMANLI PLAKANIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLENMESİ

Sistemlerde aniden uygulanan yük durumlarında veya zamanla değişen yük durumlarında ivme kavramlarının göz önüne alınması zorunluğu ortaya çıkar. Bir katı cisim elastik olarak denge halinden uzaklaştırılarak serbest bırakılırsa, yeniden denge haline dönünceye kadar bir titreşim hareketi yapar. Cismin içinde hapsedilmiş olan şekil değiştirme enerjisi nedeniyle meydana gelen ve periyodik olarak cereyan eden bu hareket serbest titreşim olarak adlandırılır. Birim zamanda meydana gelen salınım hareketi de frekans olarak, salınım sırasında cismin yaptığı en büyük deplasman hareketi de genlik olarak adlandırılır. Gerçek hayatta sönümlenme etkisi gösteren bir çok nedenle salınım zamanla yavaşlar ve cisim denge halinde tekrar durur. Basit modellerde sönümlenme etkisi ihmal edilip, yapının dinamik davranışı sönümsüz serbest titreşim durumunda incelenir [16].

Hamilton prensibine göre hareket denklemi,

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - U)dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (3.60)$$

dir. Burada T ile U sırasıyla kinetik ve potansiyel enerjilerini, W dış kuvvetlerin yaptığı iş, t zaman ve δ de varyasyon işaretidir.

Kompozit plağın gerinme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_{Ar} (N_x \epsilon_x^0 + N_y \epsilon_y^0 + N_{xy} \epsilon_{xy}^0 + M_x k_x + M_y k_y + M_{xy} k_{xy}) \quad (3.61)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Ar plakanın orta düzlem alanını simgelemektedir.

Plağın kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_v \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right) \quad (3.62)$$

olarak yazılabilir.

Yukarıdaki elde edilen ifadeler, (3.60) 'nolu Hamilton prensibinde yerine konularak, fonksiyon minimize edilirse, her eleman için

$$[k^e] \{Q^e\} + [m^e] \{\ddot{Q}^e\} = 0 \quad (3.63)$$

matris eşitliği bulunur. Burada, $[k^e]$, $[m^e]$ sırasıyla eleman katılık ve eleman kütle matrisleridir ve

$$[k^e] = t_e \int_{A^e} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta \quad (3.64)$$

$$[m^e] = t_e \int_{A^e} \rho_p [N]^T [N \det[J]] d\xi d\eta \quad (3.65)$$

şeklinde ifade edilir. Burda A^e eleman alanıdır. Tüm, yapı için kendi sınır koşulları uygulanarak, sonlu elemanlar yöntemi standart birleştirme tekniği kullanılırsa,

$$[K][Q] + [M]\ddot{Q} = 0 \quad (3.66)$$

ifadesi elde edilir. Burada $[K]$, $[M]$ matrisleri sırasıyla plâğın katılık, kütle matrisleridir.

Denklem matematiksel olarak sabit katsayılı ve iki dereceli bir diferansiyel denklemden ibaret olup, çözüm kümesi kolay bir şekilde elde edilebilir. Fakat, katsayı matrisleri büyük oldukları durumlarda tanınmış çözüm yöntemleri hem problemin çözümündeki zaman açısından hem de çözüm aşamasındaki karşılanabilir yanlışlıkların tesbiti ve giderilmesi açısından zor olduğu için bu tip problemleri SEY ile çözmek daha kolay olur.

Serbest titreşim probleminde esas amaç titreşim özdeğerleri olan $\lambda (= \omega^2)$ 'yi elde etmektir. Bununla beraber λ 'nın elde edilmesiyle titreşim modunun bir göstergesi olan özvektörler de elde edilir. Bu halde (3.66) denkleminde

$$\{Q\} = \{\psi\} \sin \omega t \quad (3.67)$$

yerine konursa, (3.66) denklemi

$$[K]\{\psi\} = \omega^2 [M]\{\psi\} \quad (3.68)$$

şekline gelir. Bu durumda,

$$([K] - \omega^2 [M])\{\psi\} = 0 \quad (3.69)$$

şekline gelir. Bu bir özdeğer problemi olup, o yüzden de

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (3.70)$$

şeklinde yazılabilir [16]. Burada $\{\psi\}$ titreşim modunu temsil eden özvektör λ da buna karşılık gelen özdeğerdir. Bu denklemde hem katılık hem de kütle matrisi simetrik matrisler olup, uygun sınır koşulları altında denklem sistemi pozitif tanımlanır. Özvektörlerin bulunması ile plakanın modları ve özdeğerlerin bulunması ile plakanın doğal frekansları elde edilir. Bu değerler ANSYS ortamında modal analizlerin yapılması ile bulunur.

ANSYS programının özelliklerinden birisi serbest gerilme (stress free) ve başlangıç gerilmeli (Prestress) modal analizler yapma modullarına sahip olmasıdır. O yüzden diğer mevcut programlara göre tercih edilmiştir. Programda çeşitli özdeğer problemleri çözme amacıyla matematiksel yöntemlerden ve yaklaşımlardan yola çıkılarak geliştirilmiş özdeğer çözümleyicileri (Eigen Solver) mevcuttur. ANSYS 'da bulunan çözümleyiciler şöyledir [17]:

- a) Block Lanczos Yöntemi (Block Lanczos Method)
- b) Altuzay Yöntemi (Subspace Method)
- c) Güç Dinamik Yöntemi (Power Dynamics Method)
- d) Yavaşlatılmış Yöntemi (Reduced Method)
- e) Simetrik olmayan Yöntemi (Unsymmetric Method)
- f) QR Sönümlenmiş Yöntemi (QR Damped Method)
- g) Sönümlenmiş Yöntemi (Damped Method)

Bu çalışmada çözümleyici olarak altuzay yöntemi ve eleman olarak da kuantik olan kabuk (shell99) lineer elemanı seçilmiştir. Kabuk elemanının eğrilik yarıçapının çok büyük seçilmesi halinde plak şeklindeki yapıları modellemekte kullanılabilceği gayet mantıklıdır.

ANSYS' ta çeşitli problemlerin incelenmesinde çeşitli kabuk (Shell) elemanları kullanılmaktadır. Yapının özelliklerine göre yaklaşık cevapların daha artık hassasiyetle elde edilmesini sağlayan Shell99 elemanı mevcuttur. Diğer mevcut elemanlar ise Shell 91, Sell 191, Solid46 ve Solid181 lineer olmayan elemanlardır. Bu elemanlar yapısal analizlerde daha iyi sonuçlar doğurabilirler. Shell91 ise daha kalın plakalar ve sandviç plakalar için kullanışlıdır. O yüzden de ince ve çok katmanlı plakaların analizinde lineer analizler için shell 99 elemanı daha elverişli olup, hassas sonuçlar doğurur. Bu eleman 3 boyutlu ve 8 düğümlü her düğümde 6 serbestlik dercesine sahip, toplam 48 serbestlik derceli bir elemandır.

Plâğın katmanlarındaki özelliklerinin programa girişi iki şekilde yapılmaktadır;

- a) Her katmana ait özelliklerin belirtilmesi yöntemi
- b) Yapının kuvvetleri ve momentleri ile gerilmeler ve momentler arasındaki matrislerinin tanımlanması ve hesaplanması yöntemi

Birinci yöntemde katmanın yapısına özgü özellikler sırasıyla aşağıdan yukarıya doğru belirtilir. Alt katman birinci kat olarak alınır ve öteki katmanlar ise aşağıdan yukarıya doğru z- ekseninin pozitif yönünde sırasıyla eleman koordinatlarına göre dizilir (Şekil 3.6). Katmanların simetrik olduğu durumlarda ise, tüm katmanların hesaplanmasının yerine yarısının alınması yeterlidir. Her katman için belirtilmesi gereken miktarlar aşağıdakilerden ibarettir;

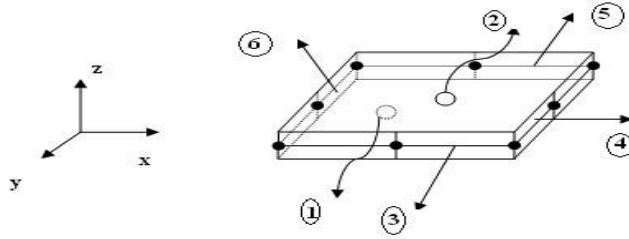
- a) Referans maddenin numarasının belirtilmesi
- b) θ Yönlenirme açısının girilmesi
- c) Her katmanın kalınlığı

Her katman izotropik ve ortotropik özelliğe sahip olabilir. Fakat, bu çalışmada ortotropik özellikler ele alınmıştır.

İkinci yöntemde ise matris değerleri program dışında diğer programlar ile hesaplanır ve daha sonra cevapları sayısal olarak programa girilir.

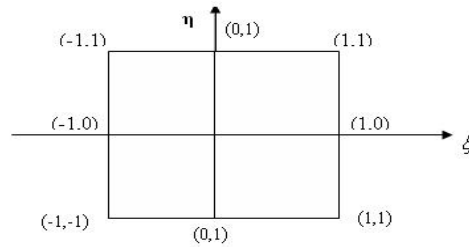
Alan kabuk elemanı 6 yüzeyden 8 düğümden oluşmaktadır (Şekil 3.7). Eleman karteziyen koordinatlarından eğrisel koordinatlara değiştirildiği durumda şekil fonksiyonları $[1,-1]$ aralığında değişir. Bu dönüşümün (mapping) iki avantaj vardır [17];

- Her eleman bir kare şekline dönüşür. Bu durumda kare elemanın formülasyonu bilindiği takdirde herhangi keyfi bir elemanın şekil fonksiyonlarını kolaylıkla bulmak mümkün olur.
- Eğrisel koordinatta Gauss-Quadrater kanunu kullanılarak basit bir şekilde inetgraller hesaplanabilir.



Şekil 3.7: Shell 99 kabuk elemanı [17]

Kabuk elemanı eğrisel koordinatlara dönüştürülürse, kabuk eleman 8 düğümlü kare elaman şekiline dönüşür (Şekil 3.8).



Şekil 3.8 : Kabuk elemanın eğrisel koordinattaki değerleri [18]

Shell 99 elemanı için her düğüm noktasına ait farklı şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{array}{l} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ 2(1-\xi^2)(1-\eta) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1+\eta) \\ 2(1-\xi)(1-\eta^2) \end{array} \right\} \quad (3.72)$$

Burada elemanın düğüm noktalarındaki ξ, η değerleri eğrisel koordinatlarda verilmiştir. Bu tip *Lagrange* elemanlarından olan elemana *Serendipity* tipi elemanlar denilir. Aslında kudratik lagrange elemanı 9 düğümlü olup bir markezi düğüme de sahiptir. Dolasıyla kudratik lagrange elemanının 9.düğümü de $N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$ şekil fonksiyonuna sahiptir [18].

4. BULGULAR

Katmanlı plağın doğal frekanslarını bulmak için ANSYS 8.0 sürümünde modal analizleri yapılması iki aşamadan oluşmaktadır;

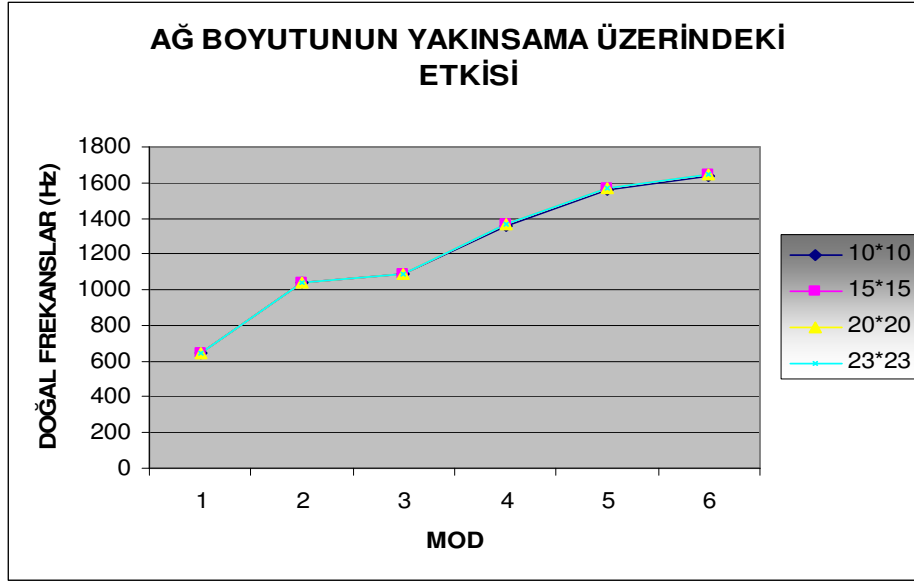
İlka aşamada, yakınsamanın sağlanması için üst sınır ağ sayısı belirlenir. İkinci aşamada ise üst sınır katman sayısının belirtilir. Doğal frekansların yakınsamasını sağlamak için, incelenen yapının ağ boyutu üzerinde değişiklik yaparak, daha narin ağlar oluşturulur. Ağların daha narin seçilmesi belli bir ağ boyutundan sonra, incelenen yapının doğal frekanslarında önemli bir dercede artış göstermiyor. Bu ağ boyutu ve ağ sayısını üst sınır ağ sayısı olarak alırız. Daha sonra bu ağ sayısını sabit tutularak, katman sayısı üzerinde değişiklik yapılır. Belli bir katman sayısından sonra plağın doğal frekansları üzerinde önemli dercede bir değişim göstermiyor. Bu katman sayısı da üst sınır katman sayısı olarak alınır.

4.1 KATMANLI PLAKANIN DOĞAL FREKANSLARININ YAKINSAMASI

Dokuz katmandan oluşan bir plaka ele alınıp, üzerinde modal analiz yapılmıştır. Plakanın her kenarı sırasıyla 10, 15, 20, 23 bölüme ayrılmış, ağ oluşturulmuştur. Yapılan analizlerde 20*20 ile 23*23 boyutlu ağda doğal frekansların yakınsadığı gözlenmiştir. Bu sonuçlar tablo (4.1) ve Şekil (4.1) Hz cinsinden olarak verilmiştir.

Tablo 4.1: Farklı ağ boyutları ile yakınsama değerleri

	AĞ BOYUTLARI			
	10*10	15*15	20*20	23*23
1.mod	644,67	645,1	645,25	645,29
2.mod	1040,1	1041,9	1042,5	1042,7
3.mod	1085,4	1087,4	1088,1	1088,3
4.mod	1360,7	1364,9	1366,3	1366,7
5.mod	1562,6	1568,2	1570,2	1570,8
6.mod	1635	1641,3	1643,6	1644,3



Şekil 4.1: Ağ oluşumunun yakınsama üzerindeki etkisi

Burada, seri 1, 2, 3 ve 4 sırasıyla 10*10, 15*15, 20*20 ve 23*23 ağ boyutlarını göstermektedir.

Bu bölümdeki yapılan tüm analizlerde kullanılan malzeme, grafit/epoksi olup ve malzeme özellikleri Tablo (4.2) 'de verilmiştir.

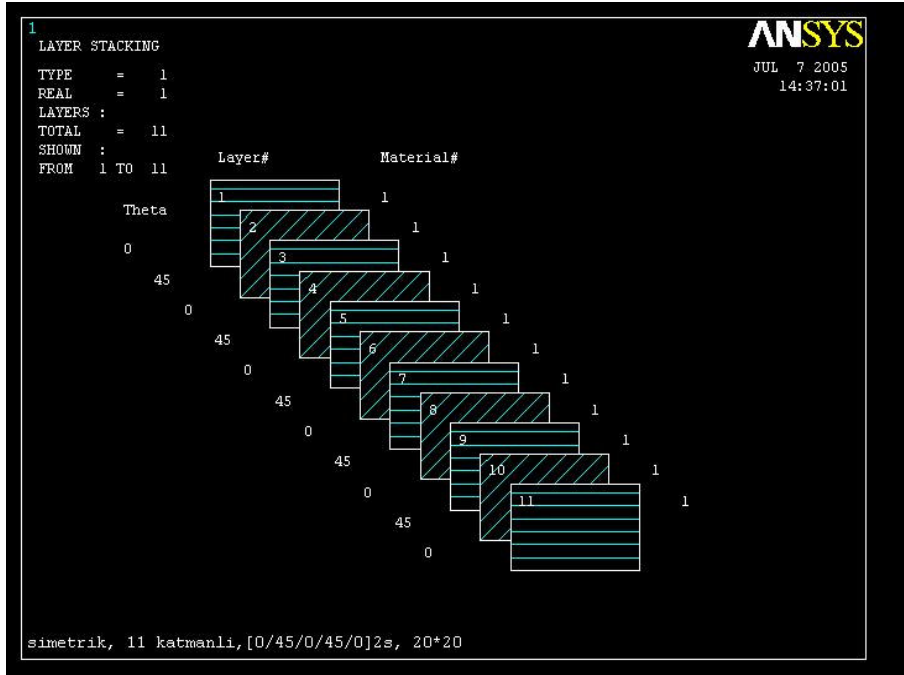
Tablo 4.2: Grafit/epoksi malzemenin özellikleri

E_{12}	$E_{13}=E_{23}$	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	ρ
206.85 GPA	5.172 GPA	3.1032 GPA	2.586 GPA	0.25	1605 kg/m ³

Tüm katmanların kalınlığı 0.01 m olup, katman kalınlığı boyunca sabit alınmıştır. Kare plakanın kenarı 1 metre olarak alınmıştır. Yapılan analizde katmanlama dik katmanlama ve açılı katmanlama şeklinde yapılmıştır.

4.2 BASİT MESNETLİ PALKANIN DOĞAL FREKANSLARI

Plaka kendi ağırlığı nedeniyle serbest titreşim yapmaktadır. Dört kenarından basit şekilde mesnetlenmiştir. Modal analiz 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ve 19 katmanadan oluşan plaka üzerinde yapılmıştır. Katmanlama açıları ise $[0/90]$ ve $[0/45]$ açılardan oluşmaktadır. Tüm analizlerde plakadaki katmanlama simetrik olmuştur. Şekil (4.2)'de 11 katmanlı plağın katmanlama sırası ve şekli verilmiştir. Katmandaki x-göre açı miktarı hem katman içerisinde hem de katmanlamadan sonraki plakanın göstereceği davranışı direk şekilde etkilmektedir. Bu etkiyi yapılan analizler sonucunda elde edilen doğal frekansların miktarındaki artışı, tablo ve şekillerden kolay şekilde görmek mümkündür. (Tablo (4.3)'den (4.10)'a ve Şekil (4.3)'den (4.28) 'e kadar).

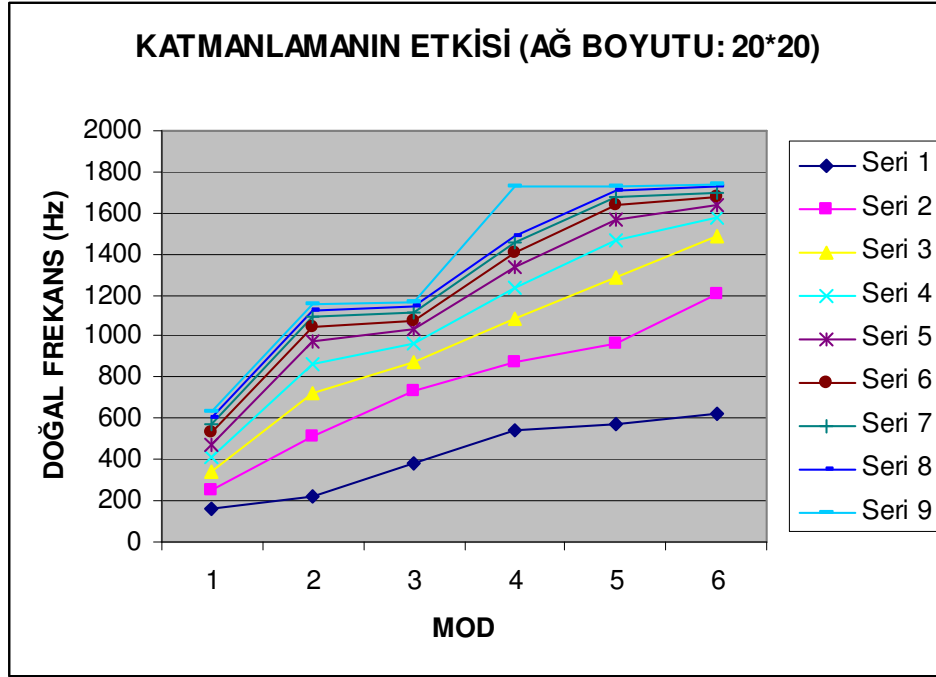


Şekil 4.2; $[0/45]$ 'Dereceli onbir katmanlı plakanın katmanlama sırası ve şekli

Graflardaki seri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9, sırasıyla 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ve 19 katmanlama sayılarını göstermektedir.

Tablo 4.3; [0/90] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları

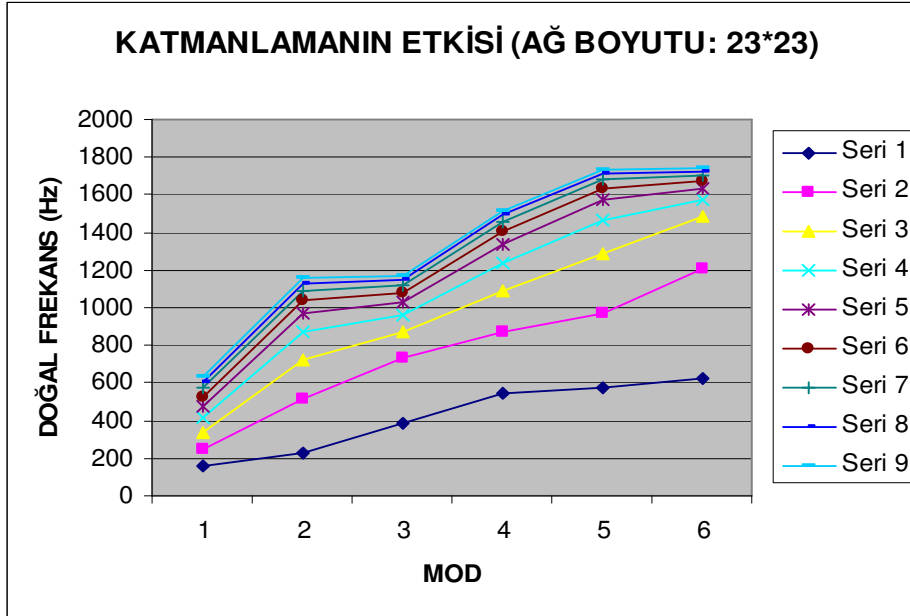
Katman Sa.	AĞ BOYUTU : 20*20					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	156,53	224,54	385,05	543,6	576,11	626,88
5 katmanlı	252,39	512,84	737,32	871,51	969,18	1206
7 katmanlı	338,16	722,59	870,1	1086,5	1287,7	1487,3
9 katmanlı	412,48	869,26	963,38	1234,7	1465,2	1575,9
11 katmanlı	475,4	970,65	1030,6	1335,6	1569,4	1633,8
13 katmanlı	527,85	1041,6	1080,4	1405,3	1634,6	1674
15 katmanlı	571,19	1092,5	1118	1454,4	1678	1703,1
17 katmanlı	606,89	1129,8	1147	1490	1708,2	1724,8
19 katmanlı	636,3	1157,9	1169,8	1730,1	1730,1	1741,5



Şekil 4.3; [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

Tablo 4.4; [0/90] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları

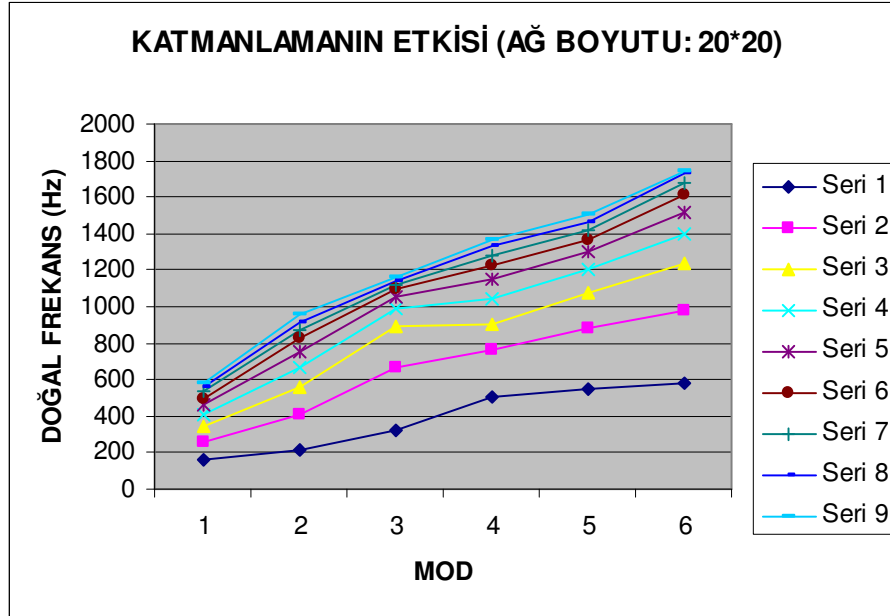
Katman Sa.	AG BOYUTU: 23*23					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	156,53	224,54	385,07	543,63	576,15	626,9
5 katmanlı	252,39	512,87	737,39	871,63	969,33	1206,4
7 katmanlı	338,17	722,65	870,21	1086,7	1288,1	1487,8
9 katmanlı	412,49	869,37	963,53	1235	1465,7	1576,5
11 katmanlı	475,42	970,81	1030,8	1336	1570	1634,5
13 katmanlı	527,87	1041,8	1080,6	1405,7	1635,3	1674,7
15 katmanlı	571,23	1092,7	1118,2	1454,9	1678,7	1703,9
17 katmanlı	606,93	1130,1	1147,3	1490,5	1709	1725,6
19 katmanlı	636,35	1158,2	1170,1	1516,9	1730,9	1742,3



Şekil 4.4; [0/90]' Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

Tablo 4.5; [0/45] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları

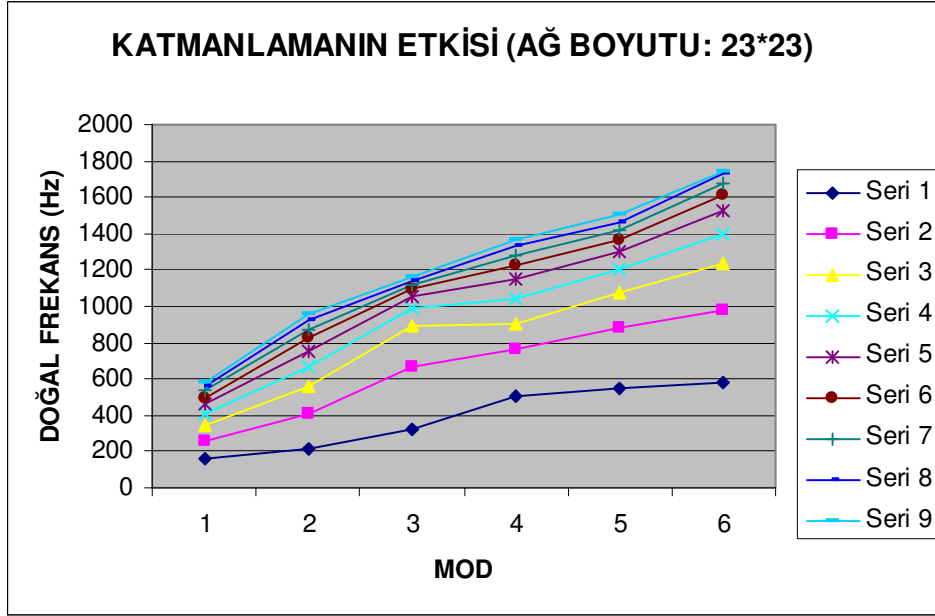
Katman Sa.	AG BOYUTU: 20*20					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	158,34	210,89	327,59	505,91	548,25	581
5 katmanlı	259,03	408,91	669,66	763,9	877,63	974
7 katmanlı	340,54	556,88	891,56	901,94	1073,5	1231,8
9 katmanlı	405,95	669,51	991,09	1042	1205,9	1401,5
11 katmanlı	458,13	755,83	1050,5	1147,7	1299,3	1521,4
13 katmanlı	499,83	822,94	1091,6	1225,1	1368,7	1610,3
15 katmanlı	533,39	876,15	1121,2	1283,9	1422,8	1678,9
17 katmanlı	560,68	919,26	1143,3	1330	1466,7	1728,9
19 katmanlı	583,16	954,96	1160,3	1366,9	1503,4	1742,5



Şekil 4.5; [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

Tablo 4.6; [0/45] 'Dereceli basit mesnetli plakanın doğal frekansları

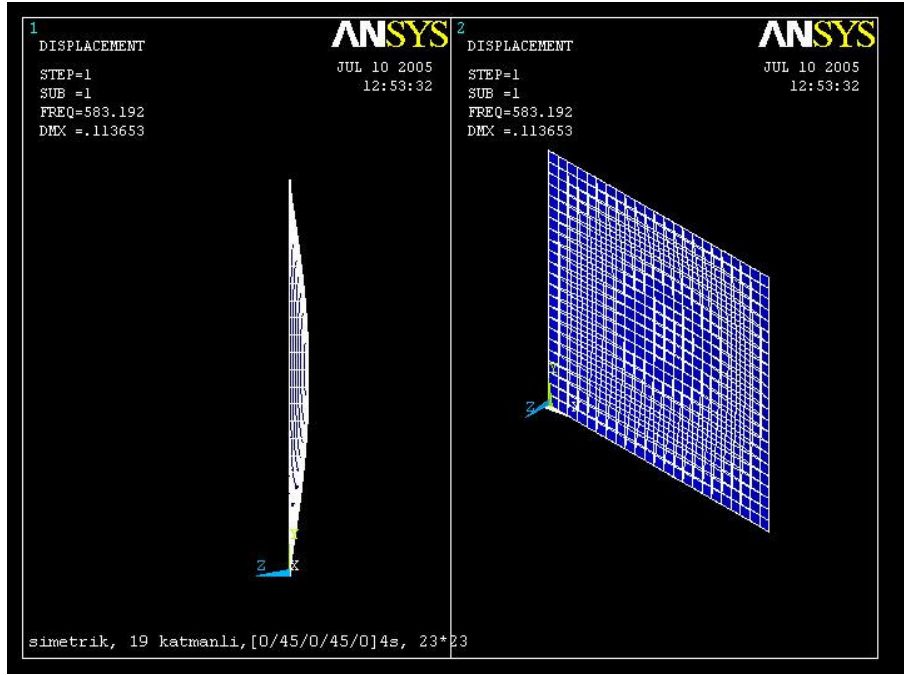
Katman Sa.	AĞ BOYUTU: 23*23					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	158,34	210,89	327,6	505,94	548,28	581,04
5 katmanlı	259,03	408,93	669,71	763,98	877,75	974,17
7 katmanlı	340,55	556,91	891,68	902,07	1073,7	1232,1
9 katmanlı	405,96	669,56	991,25	1042,2	1206,2	1402
11 katmanlı	458,15	755,9	1050,7	1148	1299,7	1522
13 katmanlı	499,85	823,03	1091,8	1225,4	1369,1	1611
15 katmanlı	533,42	876,26	1121,5	1284,3	1423,3	1679,7
17 katmanlı	560,71	919,39	1143,6	1330,4	1467,2	1729,7
19 katmanlı	583,19	955,11	1160,6	1367,3	1504	1743,3



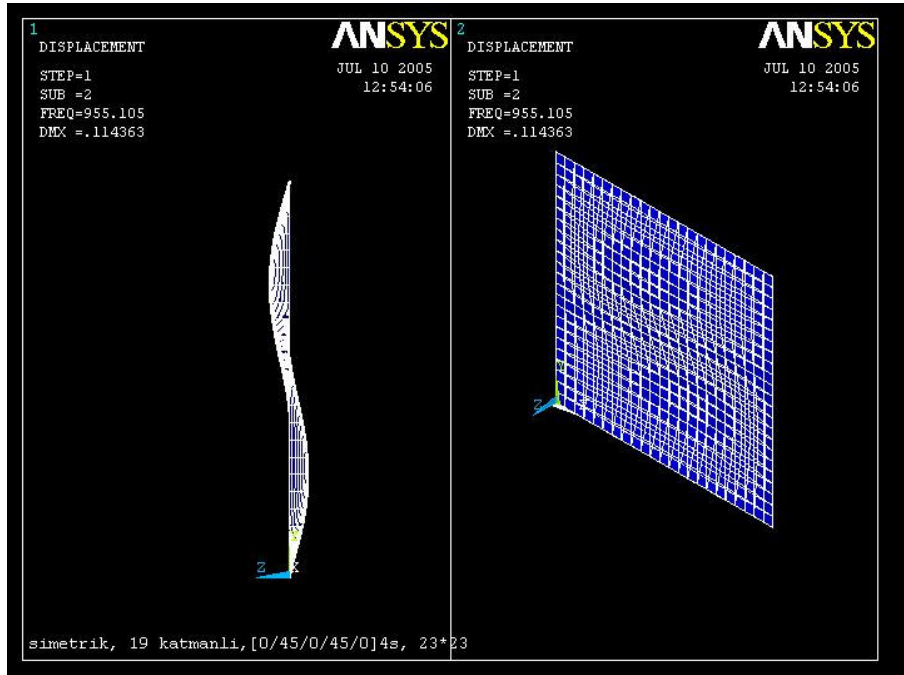
Şekil 4.6; [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

4.3 BASİT MESNETLİ PALKANIN İLK ALTI MOD ŞEKLİ

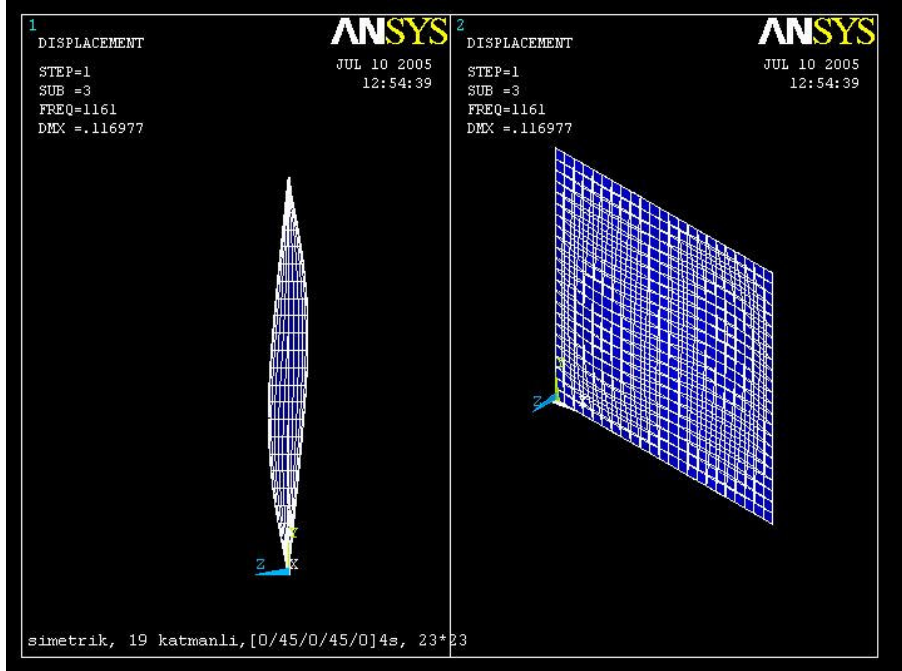
Simetrik, 19 katmandan oluşan açılı kare plakanın ilke 6 mod şekli sırasıyla aşağıda verilmiştir. Diğer katmanlamalarda aynı mod şekilleri bulunmaktadır. Fakat, doğal frekansların miktarlarında fark gözlenmektedir.



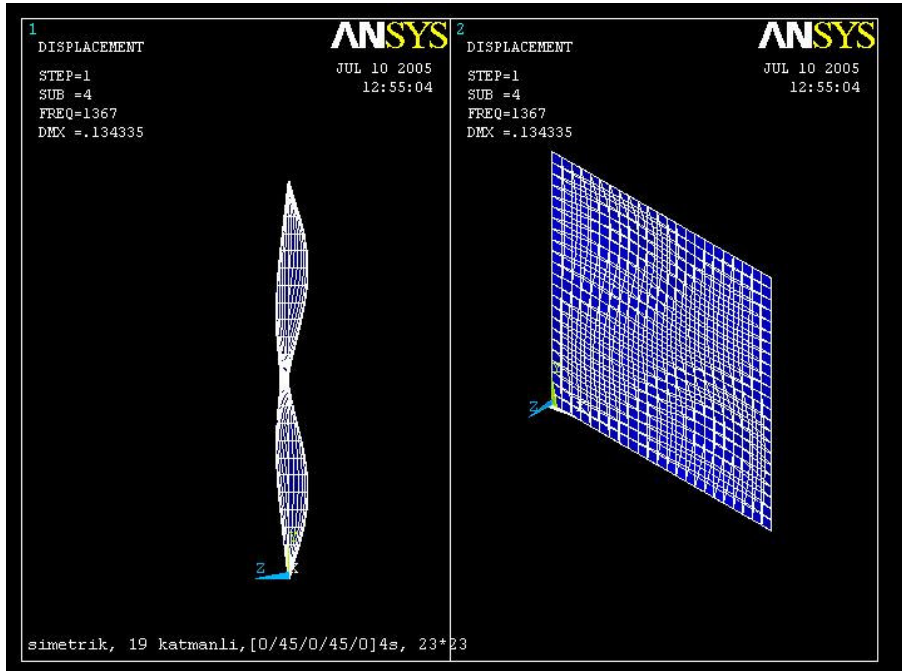
Şekil 4.7; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 1.modu



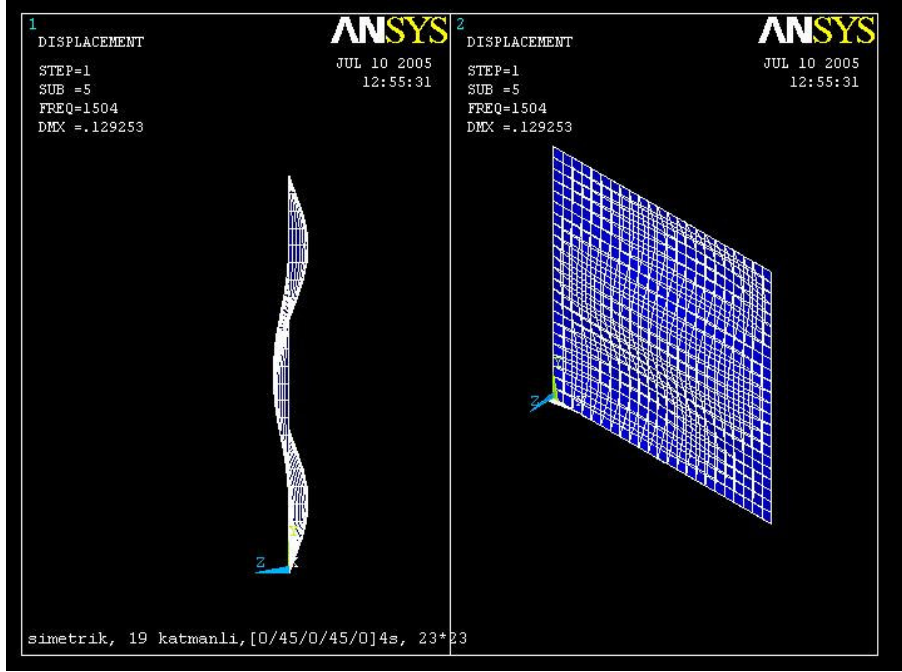
Şekil 4.8; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 2.modu



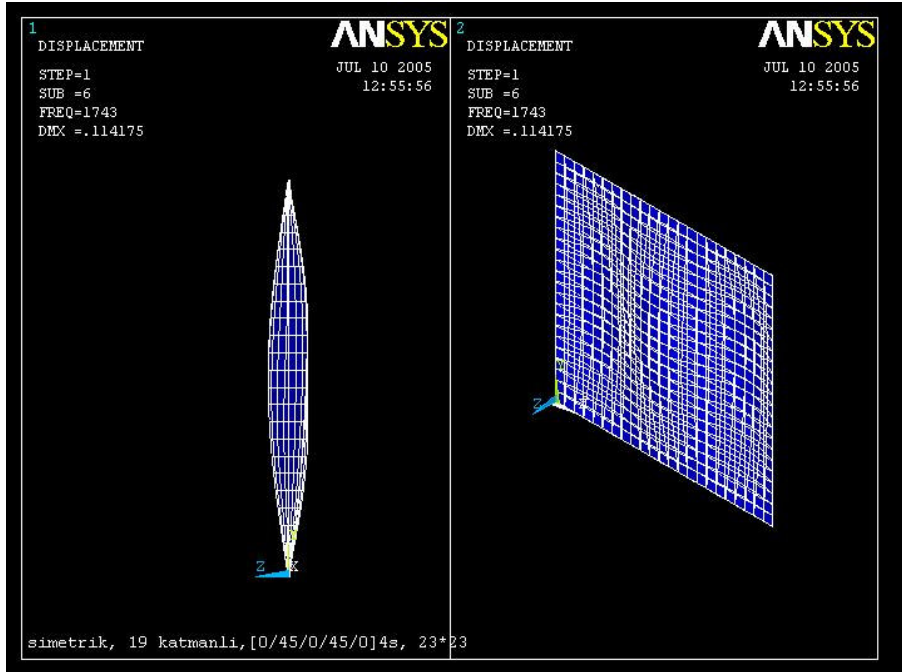
Şekil 4.9; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 3.modü



Şekil 4.10; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 4.modü



Şekil 4.11; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 5.modü

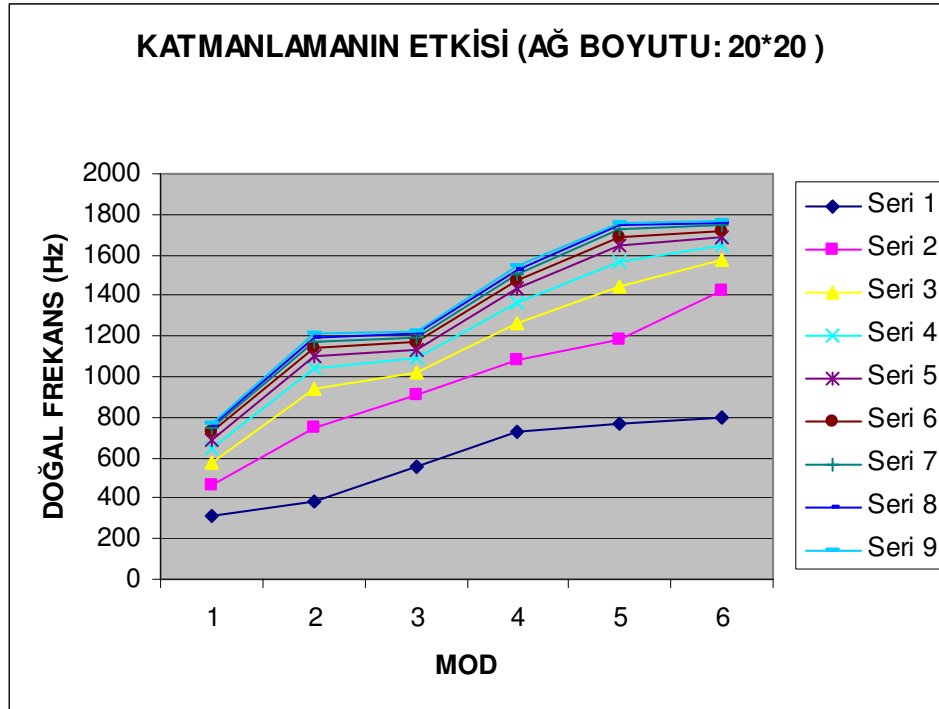


Şekil 4.12; [0/45] 'Dereceli katmanlı plakanın 6.modü

4.4 ANKASTRE MESNETLİ PALKANIN DOĞAL FREKANSLARI

Tablo 4.7; [0/90] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları

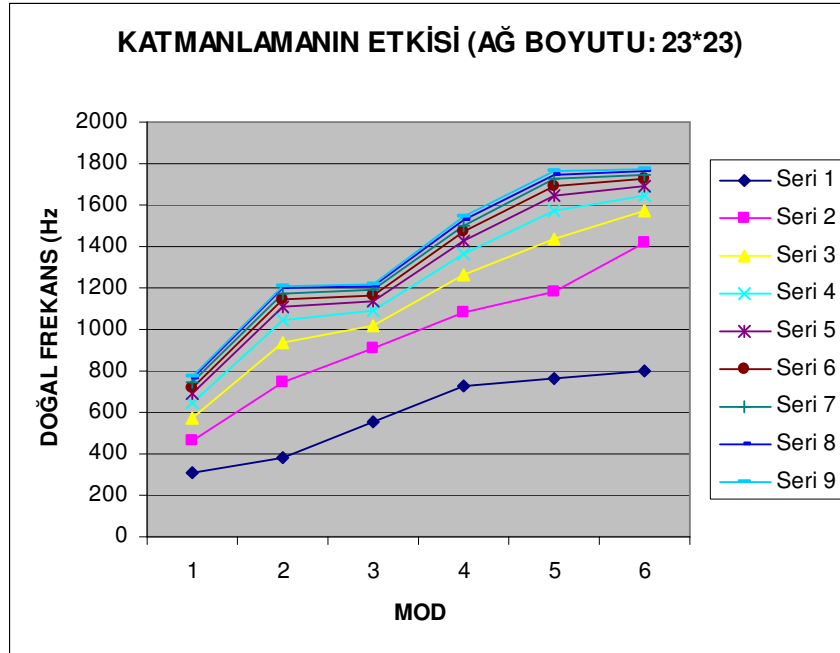
Katman Sa.	20*20					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	311,57	385,96	551,3	723,04	764,86	801,1
5 katmanlı	466,27	744,01	907,72	1082,9	1179,2	1422
7 katmanlı	574,26	937,14	1018	1263,7	1440,4	1571,1
9 katmanlı	645,25	1042,5	1088,1	1366,3	1570,2	1643,6
11 katmanlı	691,66	1105,4	1134,8	1429,6	1644,8	1690,5
13 katmanlı	722,66	1146,4	1167,3	1472,2	1691,7	1722,2
15 katmanlı	744,01	1175	1190,8	1502,6	1723,1	1744,4
17 katmanlı	759,18	1196	1208,4	1525,2	1745	1760,4
19 katmanlı	770,28	1212	1221,9	1542,7	1760,9	1772,3



Şekil 4.13; [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

Tablo 4.8; [0/90] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları

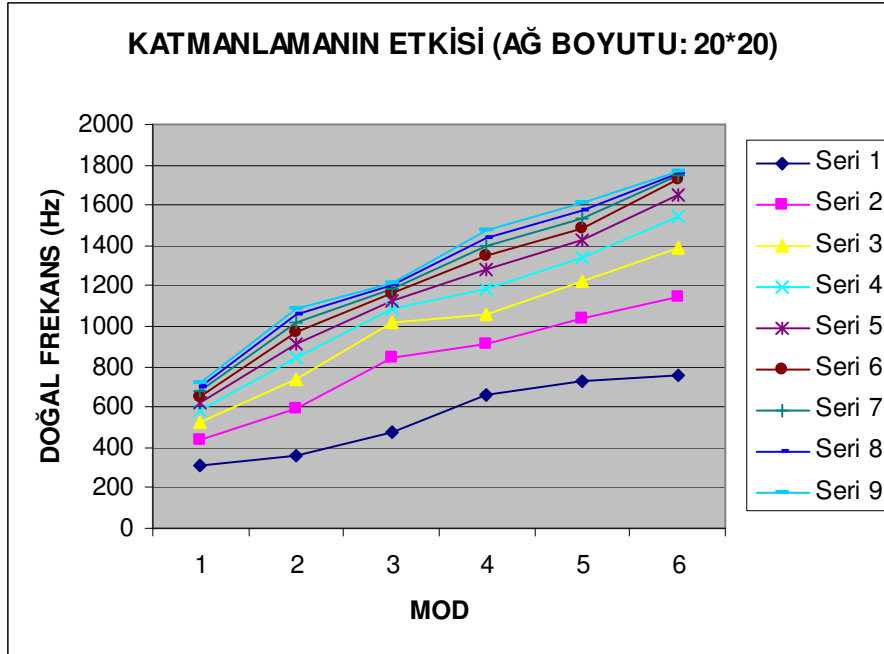
Katman Sa.	23*23					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	311,58	385,97	551,34	723,1	764,95	801,24
5 katmanlı	466,29	744,08	907,85	1083,2	1179,4	1422,6
7 katmanlı	574,29	937,28	1018,1	1264	1440,9	1571,7
9 katmanlı	645,29	1042,7	1088,3	1366,7	1570,8	1644,3
11 katmanlı	691,71	1105,6	1135	1430,1	1645,5	1691,3
13 katmanlı	722,72	1146,6	1167,6	1472,7	1692,5	1723
15 katmanlı	744,08	1175,3	1191,1	1503,1	1724	1745,2
17 katmanlı	759,26	1196,3	1208,7	1525,8	1745,9	1761,3
19 katmanlı	770,36	1212,2	1222,2	1543,3	1761,8	1773,2



Şekil 4.14; [0/90] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

Tablo 4.9; [0/45] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları

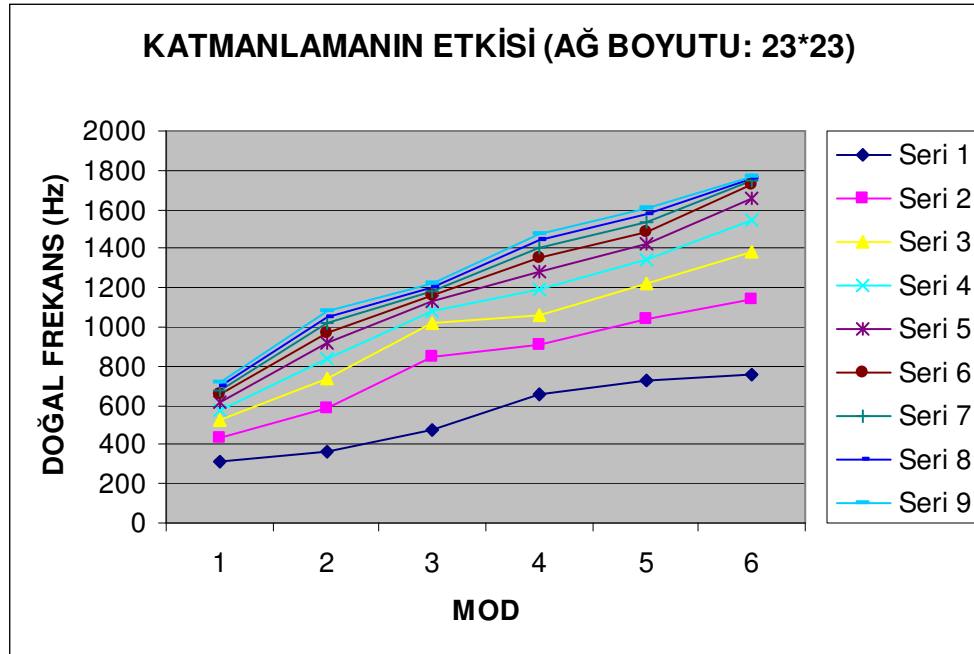
Katman Sa.	20*20					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	309.44	361.46	476.85	658.04	725.4	760.86
5 katmanlı	438.29	590.19	847.08	912.8	1042.1	1144.5
7 katmanlı	522.03	738.73	1017.1	1055.8	1220.1	1386.1
9 katmanlı	579.44	841.14	1083	1189.2	1339.9	1542.4
11 katmanlı	621.13	915.85	1128.1	1282.4	1424.9	1651.8
13 katmanlı	652.83	972.83	1160.7	1350.7	1488.3	1724.7
15 katmanlı	677.7	1017.7	1184.9	1402.1	1537.6	1745.2
17 katmanlı	697.66	1053.8	1203.3	1441.6	1577.1	1760.2
19 katmanlı	713.92	1083.5	1217.6	1472.3	1609.3	1771.4



Şekil 4.15; [0/45] 'Dereceli katmanlamannın doğal frekans üzerindeki etkisi

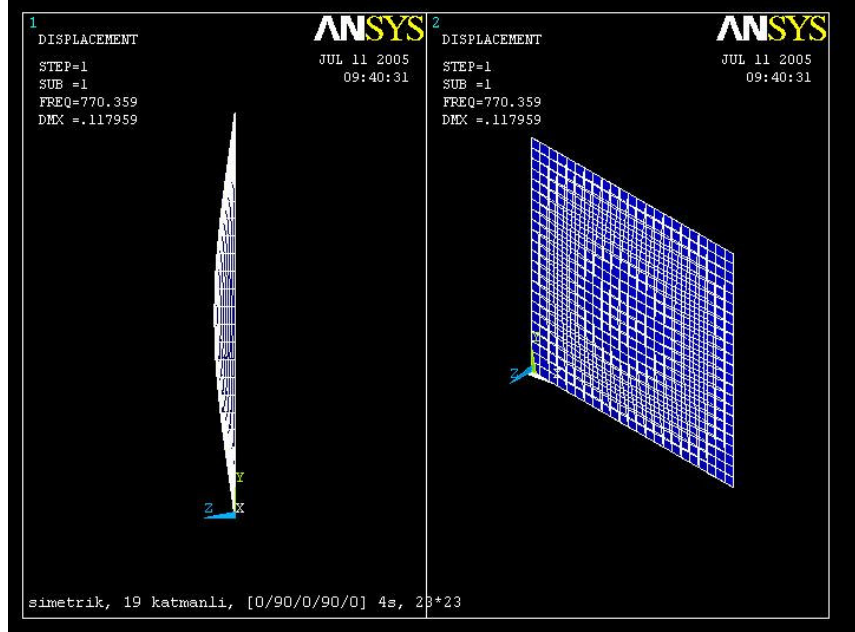
Tablo 4.10; [0/45] 'Dereceli ankastre mesnetli plakanın doğal frekansları

Katman Sa.	23*23					
	1.mod	2.mod	3.mod	4.mod	5.mod	6.mod
3 katmanlı	309,44	361,47	476,89	658,11	725,46	760,96
5 katmanlı	438,31	590,23	847,2	912,92	1042,3	1144,7
7 katmanlı	522,06	738,8	1017,2	1056	1220,4	1386,6
9 katmanlı	579,47	841,24	1083,2	1189,5	1340,3	1543
11 katmanlı	621,17	915,98	1128,4	1282,8	1425,3	1652,6
13 katmanlı	652,87	972,99	1160,9	1351,1	1488,9	1725,5
15 katmanlı	677,75	1017,9	1185,1	1402,6	1538,2	1746,1
17 katmanlı	697,71	1054	1203,6	1442,1	1577,7	1761
19 katmanlı	713,98	1083,7	1217,9	1472,9	1610	1772,3

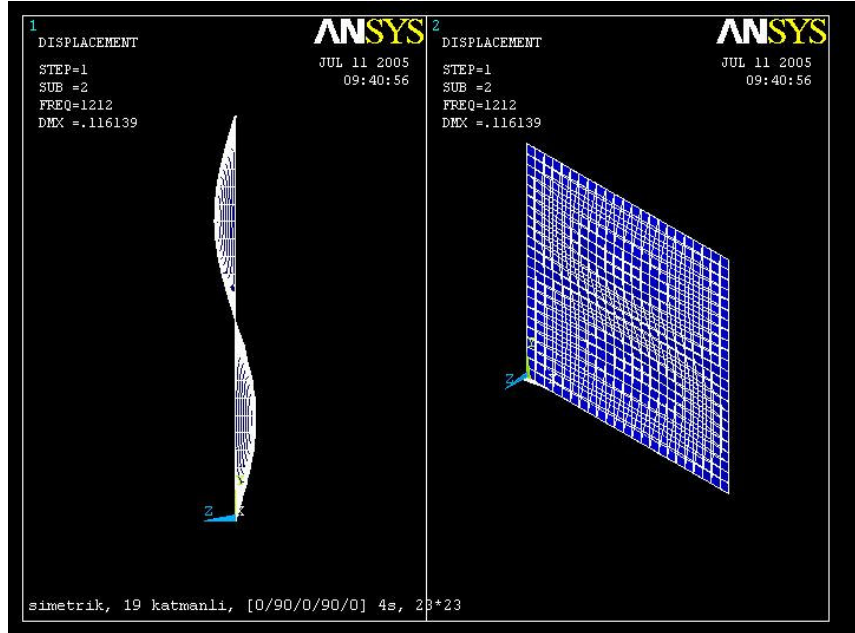


Şekil 4.16 [0/45] 'Dereceli katmanlamanın doğal frekans üzerindeki etkisi

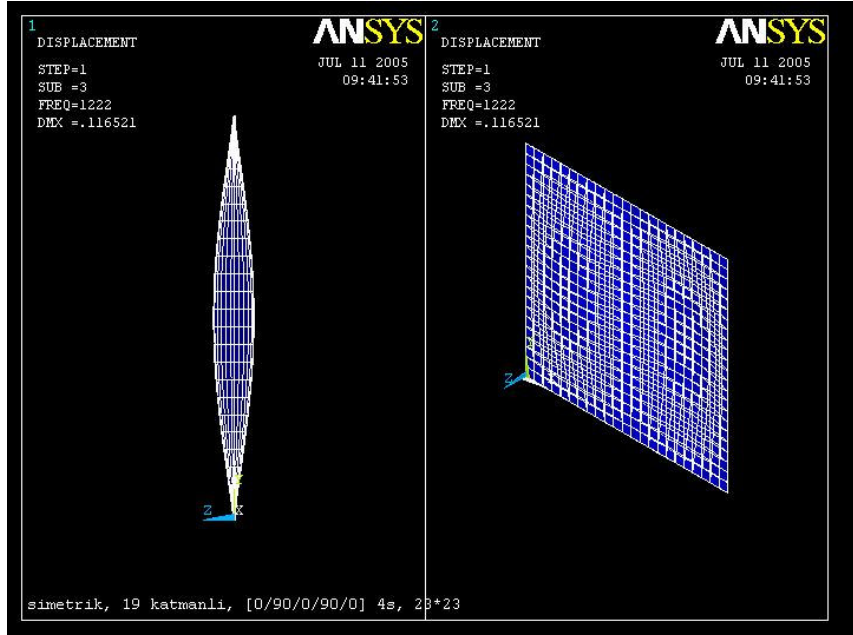
4.5 ANKASTRE MESNETLİ PALKANIN İLK ALTI MOD ŞEKLİ



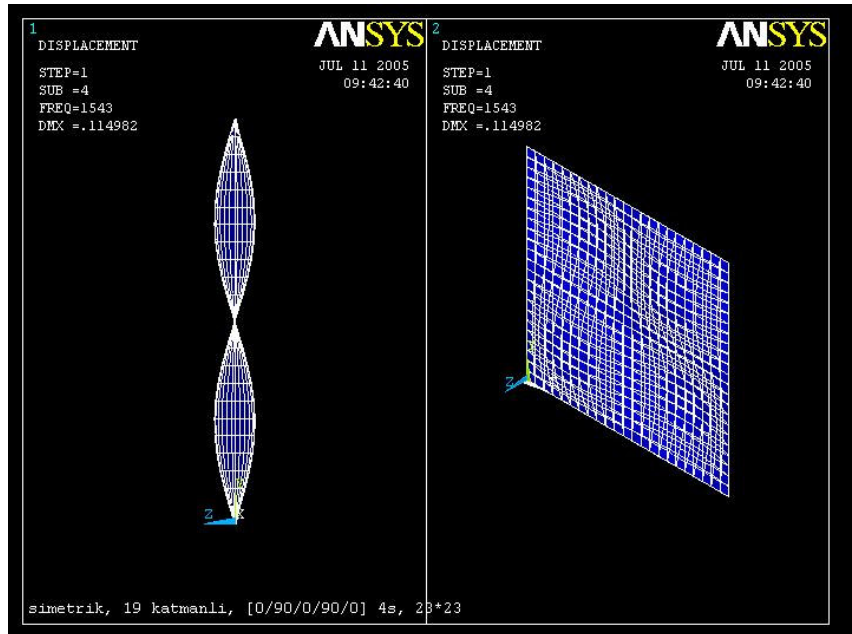
Şekil 4.17; [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 1.modü



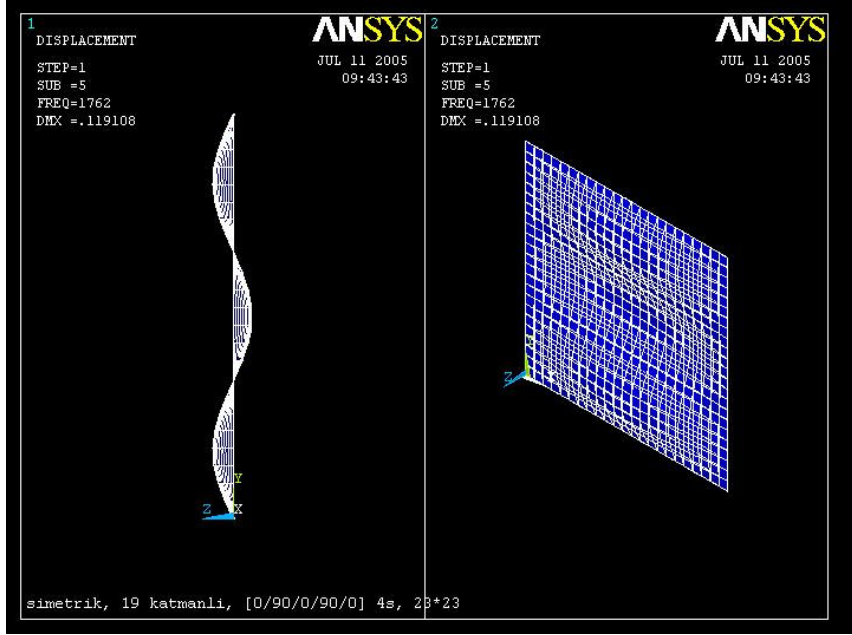
Şekil 4.18; [0/90] 'Dereceli katmanlı plakanın 2.modü



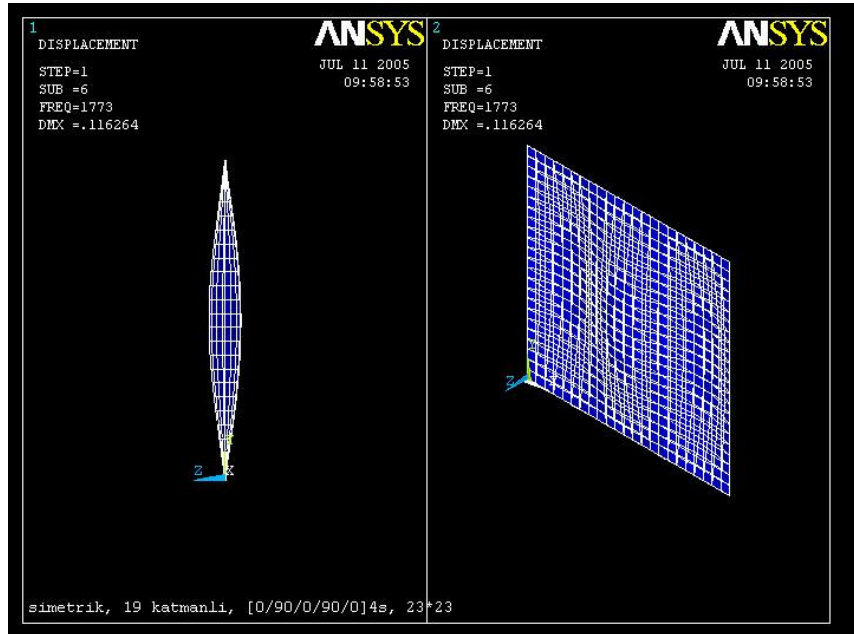
Şekil 4.19; [0/90]’ Dereceli katmanlı plakanın 3.modü



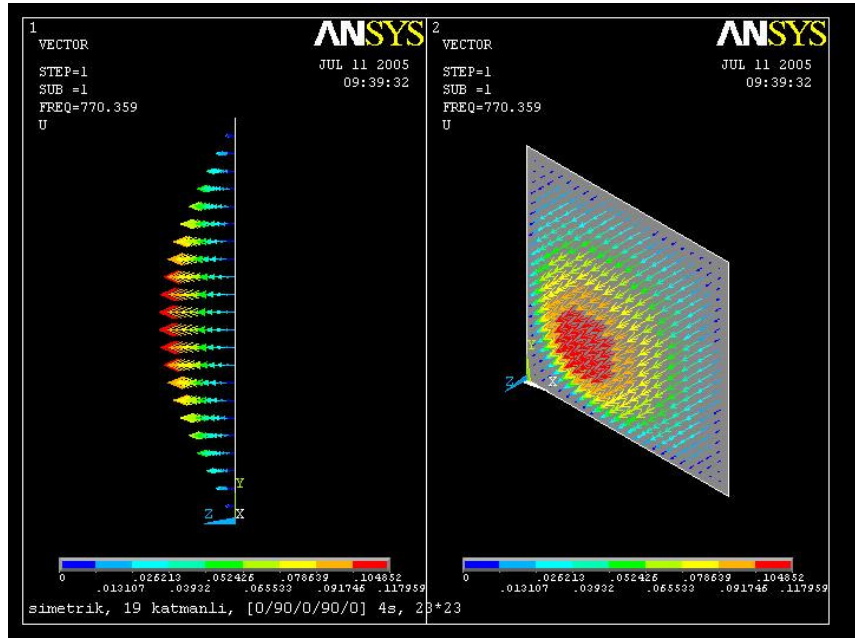
Şekil 4.20; [0/90]’ Dereceli katmanlı plakanın 4.modü



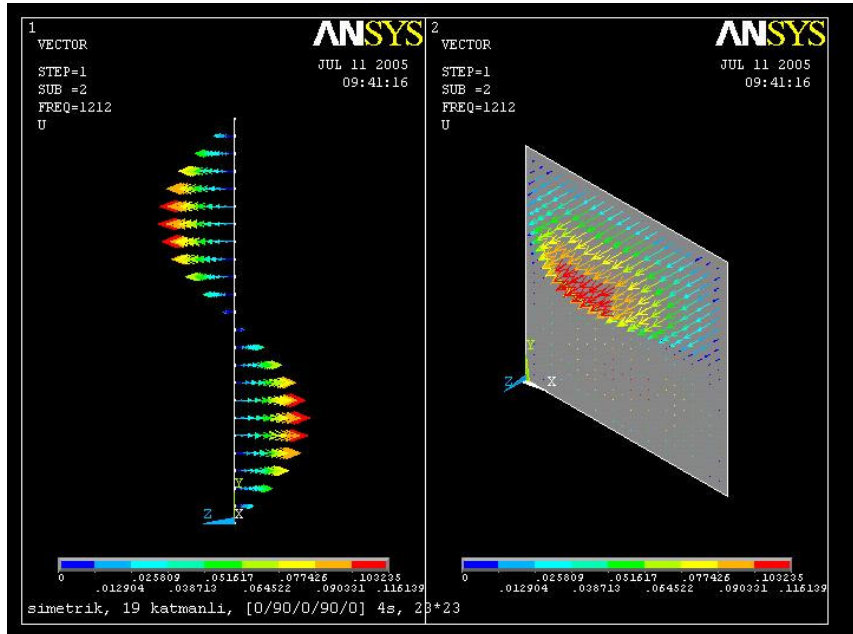
Şekil 4.21; [0/90]° Dereceli katmanlı plakannın 5.modu



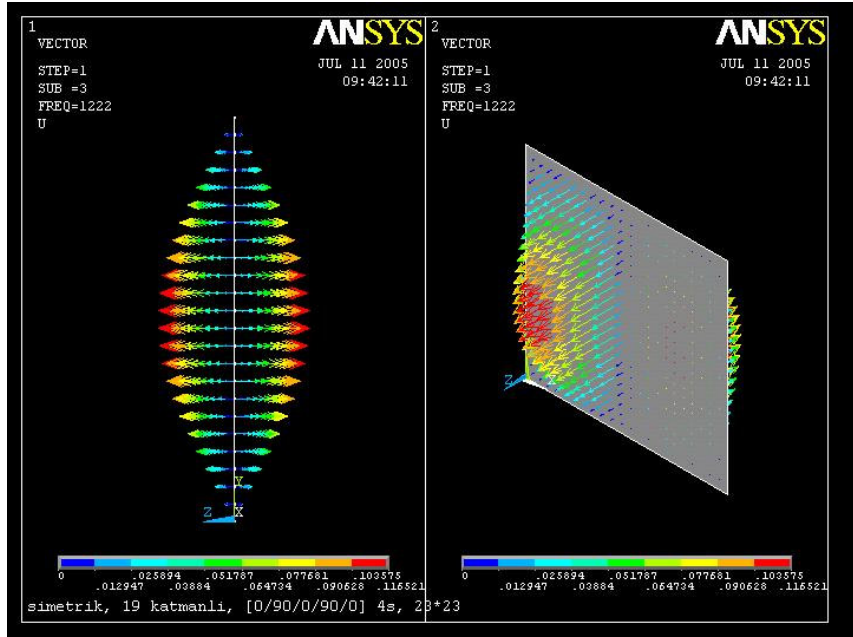
Şekil 4.22; [0/90]° Dereceli katmanlı plakannın 6.modu



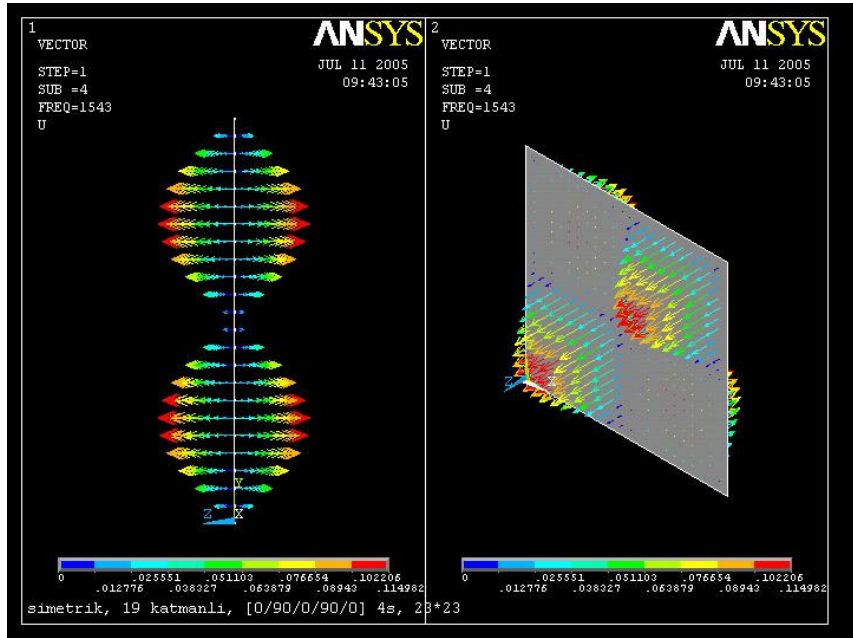
Şekil 4.23; [0/90]^o Dereceli katmanlı plakanın 1.modunun vektörel şekli



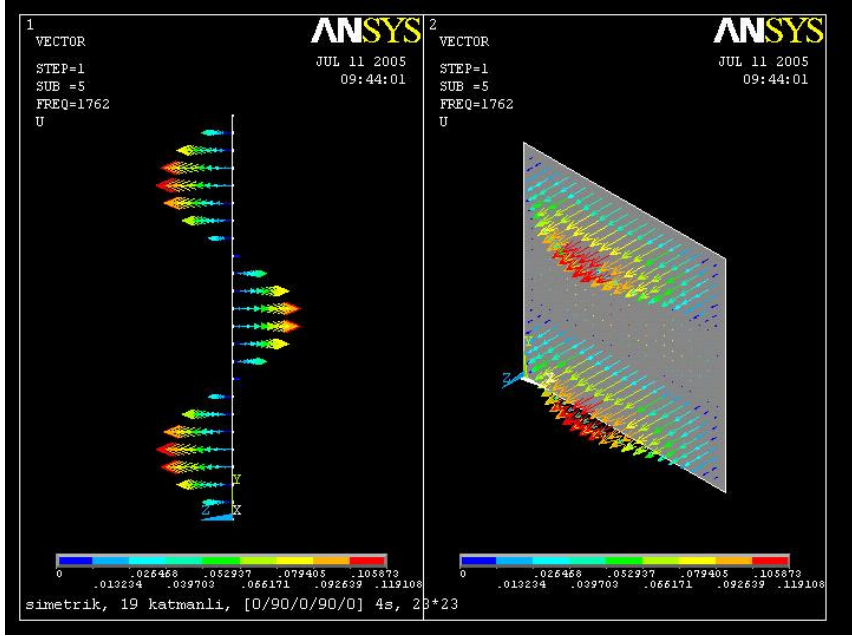
Şekil 4.24; [0/90]^o Dereceli katmanlı plakanın 2.modunun vektörel şekli



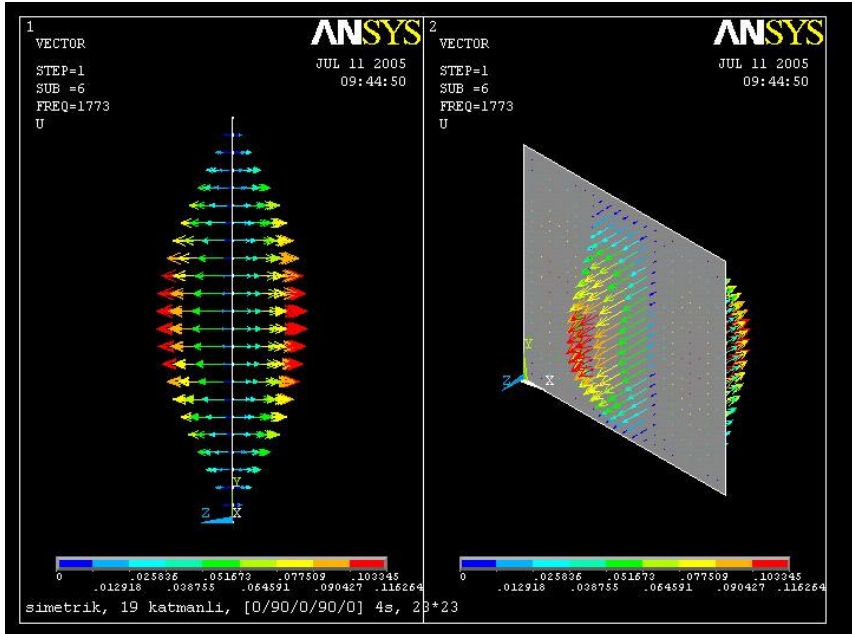
Şekil 4.25; [0/90]° Dereceli katmanlı plakannın 3.modunun vektörel şekli



Şekil 4.26; [0/90]° Dereceli katmanlı plakannın 4.modunun vektörel şekli



Şekil 4.27; [0/90]° Dereceli katmanlı plakanın 5.modunun vektörel şekli



Şekil 4.28; [0/90]° Dereceli katmanlı plakanın 6.modunun vektörel şekli

Tüm analitik yöntemlerde olduğu gibi, sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen çözüm sonuçları yaklaşık cevaplar olup, kimi zaman analitik yöntemiyle elde edilen cevapların bulunamadığı durumlarda, kimi zamanlar ise deneysel yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda veyahut deneysel yöntemlerin yüksek maliyetli olduğu hallerde kabul görünmektedir. Fakat, sayısal yöntemler ile elde edilen sonuçlar, referans bir cevapla kıyaslanıp, ne kadar doğru sonucun elde edildiği kontrol edilmesi zaruretli bir husustur.

Bu çalışmada grafit/epoksi malzemden yapılan üç katmanlı ve katmanlama açısı miktarları (0,45,0) derceli olan dikdörtgen plakanın basit bir örneği iki tarafından ankastre halinde mesnetlendiği bir durumun ilk iki modunun analitik çözümü ile ANSYS programı yardımı ve sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlenen örnek arasında önemli dercede farkın olmadığı gözlenmiştir. Analitik yöntemle bulunan ilk iki doğal frekans değerleri sırasıyla, 86.33 Hz ve 98.23 Hz iken aynı değerler sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlenirken 89.68 Hz ve 105.59 Hz olarak bulunmuştur. Burada gözlenen sonuçlara istinaden sonlu elemanlar yöntemiyle yapılan çözümdeki miktarlar yaklaşık olarak, analitik yöntemle elde edilen sonuçların %4 üzerinde. Bu fark kabul edilebilir bir değer olup, şu şekilde izah edilmektedir: Sonlu elemanlar yöntemi daha az deplasman, daha stiff (sert) bir sistem varmış gibi çözüm bulur. Bu da doğal frekansların gerçek değerlerden daha büyük olması demektir [19].

Elde edilen tablolar ve şekillerden görüldüğü gibi, katmanlı plakanın modal analizinden aşağıdaki sonuçlara varılır;

- a) Katman sayısı arttıkça, plakanın katılık miktarı artmaktadır. Bu da plakanın doğal frekansının artmasına neden olmaktadır.
- b) Katmandaki açı miktarı arttıkça, doğal frekans miktarı da artmaktadır. Dolayısıyla katman açısındaki artış, katmanlardan oluşan plakanın doğal frekanslarının artmasına neden olmaktadır.
- c) Katmanlamanın belli bir katman sayısına kadar, plakanın doğal frekansları üzerindeki artışına neden olmaktadır. Bu üst sınır katman sayısı malzemeden malzemeye farklılık göstermektedir. Grafit/epoksi malzeme için üst sınır katman sayısı 19 katman olarak bulunmuştur.
- d) Dört tarafından ankastre edilmiş plakada rijit bir mesnetlemeye tabii tutulduğundan dolayı, basit mesnetli duruma kıyasen plaka yüksek frekanslarda titreşim yapmaktadır.

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

Önceki bölümlerde izah edildiği gibi yapısal olarak karmaşık sistemlerin statik ve dinamik davranışlarının önceden tahmin edilmesi mühendislikte büyük önem taşır. Bilindiği gibi malzeme ve yapının titreşimleri bir çok zaman istenilmez sonuçlar doğurabilir. Bu yüzden de makina parçalarının, malzemelerin ve yapıların titreşim karakteristiklerinin önceden saptanması ve bilinmesi önem kazanır.

Bu nedenlerden dolayı bu çalışmada, çeşitli mühendislik alanlarında son zamanlarda kullanılması yaygınlaşan kompozit plakaların titreşim analizlerinin yapılması ele alınmıştır. Bu çalışmanın diğer bir nedeni de, literatürdeki yapılan analizlerin sırf özel bir konuyu ve malzemeyi ele almalarıdır. Bu yüzden de yapılan analizler analitik yöntemler ile yetinmiştir. Bu analizlerin yanısıra yapılan sayısal analizler ise, analitik çözüme destek amaçlı yapılmıştır. O yüzden de kompozit plakanın titreşim davranışını inceleyen ve sayısal verilerin elde edilmesi için bu çalışmaya ihtiyaç duyulmuştur.

Yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar, tablolar ve graflar halinde 4.bölümde verilmiştir. Bu sayısal değerler, daha sonraki optimizasyon çalışmalarına bir veritabanı oluşturmaktadır. Bununla birlikte sonuçlar, mühendislerin bilgisayarını daha etkin şekilde kullanılarak istenilen dinamik analizlerin yapılmasına kolaylık sağlamaktadır.

Çalışmada, ele alınan kompozit plaka kalsik katmanlar teorisine dayanarak modellenmiştir. Model daha sonra sonlu elemanlara ayrılmıştır. Modellenen plakanın doğal frekansları ANSYS paket programı ile elde edilmiştir. Plakanın doğal frekanslarını bulmak için, iki önemli aşama gerçekleştirilmiştir; İlk olarak, oluşturulan ağ da doğal frekansların bulunması için yakınsama sağlanmıştır. Yakınsamanın sağlanması için de plakada ağ boyutunu küçülterek, elde edilen sonuç tabloları birbiriyle kıyaslanmıştır. 10*10 Boyutlu ağdan daha narin ağ boyutları analiz edilmiştir. En iyi

yakınsama 20*20 boyutlu ağ ile 23*23 boyutlu ağ arasında gözlenmiştir. Daha sonra bu ağ sınırı esas alınarak analizler gerçekleştirilmiştir.

İkinci olarak, katmanlama sayısı üzerinde durulmuştur. Simetrik plakalar oluşturulması esas alınarak, sırasıyla 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ve 19 katmanlı plakaların titreşimleri incelenmiştir. Katman sayısı arttıkça elde edilen doğal frekansların miktarı da artmaya başlamıştır. Fakat, bu değişim 17 ve 19 katmanlarında daha küçük değişim aralığında seyretmektedir. Bu yüzden de üst katman sınırı olarak 19 katman alınmıştır. Bu sınır tesbiti 19 katman üzerindeki katmanlamada herhangi bir frekans değerinde artma olmayacağı anlamına gelmez. Fakat, bu katmanlamadan sonra, plakanın doğal frekanslarında önemli bir artış gözlenmemektedir anlamındadır. Dolayısıyla, tüm katmanların kalınlığı 0.01 m olan ve aynı malzeme özelliklerine sahip olan grafit/epoksi plakada, belli bir katman sayısından sonra (19 katman) plaka yeterli kadar rijit olup, o yüzden de çok dar bir aralıkta doğal frekansları değişmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar analitik yöntemle elde edilen sonuçlar ile kıyaslanarak, yaklaşık çözümün ne derece doğru sonuçlar doğurduğu ise incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda Tablo 4.2 de verilmiş olan malzeme için iki ucundan ankastre şeklinde mesnetlenmiş üç katmanlı ve katmanlama açısı (0,45,0) dercelerden oluşan dikdörtgen plağın doğal frekansları bulunmuştur. Plağın ilk iki frekansları analitik yöntemle çözümlenirken 86.33 Hz ve 98.23 Hz ve sonlu elemanlar yöntemiyle çözümlenirken 89.68 Hz ve 105.59 Hz olarak bulunmuştur. Sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar analitik yöntemle elde edilen sonuçlara nazeren yaklaşık olarak 4% miktarında fazladır. Bu fark ise şu şekilde yorumlanabilmektedir: Sonlu elemanlar yöntemi daha az deplasman, daha stiff (sert) bir sistem varmış gibi çözüm bulur. Bu da doğal frekansların gerçek değerlerden daha büyük olması demektir.

Bu aşamaların ardından, sözkonusu olan plaka sırasıyla dört taraftan basit ve dört tarafından ankastre mesnetli sınır koşullarına tabii tutulmuştur. Her iki sınır koşullarında plakanın ilk altı mod ve doğal frekans değerlerinden aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur:

- a) Katman sayısı arttıkça, plakanın rijitliği artmaktadır. Bu da plakanın doğal frekansının artmasına neden olmaktadır.

- b) Katmandaki yönlendirme açısı arttıkça, doğal frekans miktarı da artmaktadır. Dolayısıyla katman açısındaki artış, katmanlardan oluşan plakanın doğal frekanslarının artmasına neden olmaktadır.
- c) Katmanlamanın belli bir katman sayısına kadar, plakanın doğal frekansları üzerindeki artışına neden olması gözlenmiştir. Bu üst sınır katman sayısı malzemedan malzemeye farklılık göstermektedir. Grafit/epoksi malzeme için üst sınır katman sayısı 19 katman olarak bulunmuştur.
- d) Dört tarafından ankastre edilmiş plakada rijit bir mesnetlemeye tabii tutulduğundan dolayı, basit mesnetli duruma kıyasen plaka yüksek frekanslarda titreşim yapmaktadır.

Benzer çalışmalar diğer malzemelerden yapılan plakalar üzerinde de sayısal değerlerden veritabanı oluşturmak için yapılabilir. Diğer bir çalışma ile grafit/epoksi plakanın zorlanmış ve harmonik titreşim analizi yapılarak plakanın stabilliği ve çarpınma sınırlarının belirlenmesi sağlanabilir.

Bu çalışmanın devamı olarak ta katmandaki açı miktarını 0 derece ile 45 derece aralığında değiştirerek, malzemedan ağırlık optimizasyonu konusu üzerinde çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. SEYYED MOHSEN MOHSENI SHAKIB, 1994, Analysis & Design of Laminated Composite Structures. Publishing of Emama Huseyin University. Tahran,I.R.Iran.
2. WILLIAM T. THOMSON, MARIE DILLON DAHLEH, TRANSLATED BY BAHRAM POOSTI, 2001, Theory of Vibration with Applications, Fifth edition. Tahran,I.R.Iran, 964-6132-63-4.
3. WEAVER JR., WILLIAM, TRANSLATED BY ALIMOHAMMAD MEMARI, MOHSEN GAFOORI ASHTIYANI , 1996, Structural Dynamics by Finite Elements, Tahran,I.R.Iran, 964-6490-00-x.
4. JEAN-MARIE,TRANSLATED BY J.MICHAEL COLE, 1999, Composite Materials. Mechanical Engineering Series. Leyburn, North Yorkshire DL8 5JB,UK, 0-387-98426-7.
5. L. ZIETSMAN, A. J. VAN DER MERWE, J.J. GELDENHUYS & N.F.J. VAN RENSBURG, 2003 Elsevier, Application of Finite Element Method to the Vibration of Rectangular Plate with Elastic Support at the Boundry, Matematical & computer Modeling.
6. HOUMAT, 2005 Elsevier, Free vibration analysis of membranes using the h-p version of the finite element method , Journal of Sound and Vibration. 282 (2005) 401–410.
7. YOUNG-SHIN LEE, MYUNG-HWAN CHOI, JAE-HOON KIM, 2003 Elsevier, Free vibrations of laminated composite cylindrical shells with an interior rectangular plate , Journal of Sound and Vibration. 265 (2003) 795–817.
8. LIZ GRACIELA NALLIM, SERGIO OLLER MARTINEZ , RICARDO OSCAR GROSSI, 2005 Elsevier, Statical And Dynamical Behaviour Of Thin Fibre Reinforced Composite Laminates With Different Shapes, Computer Methods in Applied and Engineering. 194 (2005) 1797–1822.
9. M.R.MAHERI & R.D.ADAMS, 2003 Ideallibraray, Modal Vibration Damping of Anisotropic FRP Laminates Using the Rayleigh-Ritz Energy Minimization Scheme, Journal of Sound and Vibration. (2003) 259(1), 17–29.

10. KYO-NAM KOO, 2002 Pergamon, Vibration And Damping Analysis Of Composite Plates Using Finite Elements With Layer Wise In-Plane Displacements, Computers & Structures. 80 (2002) 1393–1398.
11. SIMON WANG , YINGSHUN ZHANG, 2004 Elsevier, Vibration Analysis Of Rectangular Composite Laminated Plates Using Layer Wise B- Spline Finite Strip Method, Computers & Structures. 68 (2005) 349–358
12. A.R. SETOODEH , G. KARAMI, 2004 Elsevier, Static, Free Vibration And Buckling Analysis Of Anisotropic Thick Laminated Composite Plates On Distributed And Point Elastic Supports Using Using A 3-D Layer- Wise Finite Element Method, Engineering Structures. 26 (2004) 211–220.
13. Y.M. DESAI , G.S. RAMTEKKAR , A.H. SHAH, 2003 Elsevier, Dynamic Analysis Of Laminated Composite Plates Using A Layer-Wise Mixed Finite Element Model, Composite Structures. 59 (2003) 237–249.
14. NASA REFERENCE PUBLICATION, 1994, Basic Mechanics of Laminated Composite Plates,National Aeronautics & Space Administration. Marshal Space Flight Center.MSFC, Albama 35812.
15. KÖRBAHTI BANU, 2005, Kompozit Düzlemsel Panellerde Çırpınma Kontrolü, Doktora Tezi.İstanbul Üniveristesi,Fen Bilimleri Enstitüsü, Avcılar, İstanbul.
16. MUZAFFER TOPCU, SÜLEYMAN TAŞGETİREN, 1998, Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Ders Kitapları, Denizli, Yayın No:007.
17. H. JAHED, M.R.NOBAN, M.A. ESHRAGHI ALIMOHAMMAD MEMARI, 2003, University of Tehran Pres, ANSYS Finite Element, Tahran,I.R.Iran, 964-03-9929-9.
18. J.N.REDDY, Mechanics Of Aminated Composite Plates And Analysis. CRC Presss. USA, TA660.P6R42 2003.
19. T.J.R. Hughes, The Finite Element Method--Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. New York. USA, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında İranın kuzey batısında bulunan Tebriz kentinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Tebrizde tamamladı. 1994 yılında Urumiye Devlet üniversitesi Tarım Makinaları bölümüne girdi. 1999 yılında mezun oldu. Eğitiminin devamına 2002 yılında İstanbul Üniveristesesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Makina Mühendisliği Programında başladı. 2005 yılında İlkbahar döneminde bu bölümden mezun oldu.