



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ERNST ALANINDA HAREKET PROBLEMİ**

**Diyadin CAN  
Fizik Anabilim Dalı  
Matematiksel Fizik Programı**

**Danışman  
Prof.Dr. Şehsuvar ZEBİTAY**

**Haziran, 2005**

**İSTANBUL**

## **ÖNSÖZ**

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca gösterdiği bütün desteklerinden dolayı hocam Prof. Dr. Şehsuvar Zebitay'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca Matematiksel Fizik Anabilim Dalı öğretim üyeleri Doç. Dr. Haşım Mutuş, Yard. Doç. Dr. Göksel Daylan Esmer ve bölüm başkanımız Prof. Dr. Gediz Akdeniz'e de teşekkür ederim.

**Haziran, 2005**

**Diyadin Can**

# İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ÖZET .....	iii
SUMMARY .....	iv
<b>I. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>II. GENEL KISIMLAR .....</b>	<b>6</b>
II.1 Hamilton-Jacobi yönteminin tanıtılması .....	6
II.2 Metrik uzayın simetrisi ve Killing vektörleri .....	9
II.3 Hareket sabitleri .....	13
<b>III. MALZEME VE YÖNTEM .....</b>	<b>16</b>
III.1 Schwarzschild karadeliğinin alanında hareket problemi .....	16
III.2 Kerr karadeliğinin alanında taneciğin hareket denklemleri .....	32
III.3 Kerr karadeliğinin ekseninden geçen dairesel yörüngeler .....	43
III.4 Kerr karadeliğinin ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeler .....	46
III.5 Kerr-Newman karadeliğinin alanında yüklü bir test taneciğinin hareket denklemleri .....	57
III.6 Kerr-Newman karadeliğinin ekvator düzlemindeki yüklü taneciklerin dairesel yörüngeleri .....	73
<b>IV. BULGULAR .....</b>	<b>77</b>
IV.1 Ernst uzayzamanı .....	77
IV.2 Ernst karadeliğinin alanında yüksüz bir test taneciğinin mümkün dairesel yörüngeleri .....	79
IV.3 Hareket denklemlerinin farklı bir yoldan, Lagrange yöntemiyle elde edilmesi .....	92
IV.4 Ernst karadeliğinin alanında yüklü bir test taneciğinin mümkün dairesel yörüngeleri .....	98
<b>V. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>108</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>111</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>115</b>

## **ÖZET**

### **ERNST ALANINDA HAREKET PROBLEMİ**

Bu tezde, Einstein-Maxwell denklemlerinin tek kesin çözümü olan Ernst karadeliğinin, yığılma diskini temsil eden ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeler ve özellikleri saptanmış bulunmaktadır. Bunun için önce, Schwarzschild, Kerr ve Kerr-Newman modelleri için benzer hesaplar belirli bir program dahilinde yapılmış, ardından da Ernst karadeliği için önce yüksüz bir tanecik için, daha önce çok farklı bir yoldan bulunmuş olanlarla tamamen aynı sonuçlar tekrar elde edilmiş, daha sonra yüklü tanecik için dairesel yörüngelerin benzer özelliklerine ilişkin özgün sonuçlar elde edilmiştir.

## **SUMMARY**

### **MOTION PROBLEM IN THE ERNST FIELD**

In this thesis, the circular orbits and its features in the equatorial plane which represents the accretion disk of black hole for the Ernst black hole which is only exact solution of the combined Einstein-Maxwell equations have been studied. First, similar calculations in an appropriate program has made for the Schwarzschild, the Kerr, the Kerr-Newman models. Afterwards, first entirely same results has found with different methods for the chargeless particles in the field of the Ernst black hole. Second, some original results has obtained concerned similar peculiarities of the circular orbits for the charged particles.

## I. GİRİŞ

Geçen yüzyılın başında (1916'da) iyice şekillenmiş bulunan Einstein'ın Genel Rölâtivite Teorisi (EGRT)'nin en önemli uygulamalarından biri de karadelik fiziğidir. Bir karadelik, ışığın bile kendisinden kaçamayacağı kadar güçlü bir gravitasyon alanına sahip bir bölge olarak tanımlanır. Karadelik (black-hole) deyiimi ilk kez 1968'de J.A.Wheeler tarafından kullanılmış olmakla beraber, Newton'un tanecik teorisi çerçevesi içinde, ışığın yeterince büyük kütleli bir cisimden kaçamayacağı, dolayısıyla bu tür nesnelere mümkün olabileceği ilk kez 1795'de Laplace tarafından ortaya konmuştur.

Einstein'ın Gravitasyon Alan Denklemleri (EGAD)'nin fiziksel anlama sahip ilk çözümü, K. Schwarzschild tarafından 1916'da bulunmuş olup bu çözümü göz önünde bulundurarak 1939-1959 yılları arasında karadelik problemi etraflı bir şekilde incelenmiştir. Ardından 1963'te EGAD'nin, spine sahip bir cismin, aksenal simetrik gravitasyon alanını tasvir eden ve R.P. Kerr tarafından bulunmuş çözümünün ardından bu kez spine sahip bir karadeliğin gravitasyon alanını incelemeye yönelik yoğun teorik çalışmaların yer aldığı yeni bir dönem başlamış olup, bu çalışmalar bugün de teorik fiziğin en aktif alanlarından birini oluşturmaktadır.

Kökenleri farklı da olsa bütün karadeliklerin, gerek bir yıldızın son evresine karşıdüşenlerin, gerekse mini karadelikler (primordial black-holes)'in oluşumu, aslında bir gravitasyonel çökme olayı olup evrimleri ve çevrelerinde gelişen olaylar bakımından farklılık göstermezler. Ancak boyutlarının çok küçük olması yüzünden mini karadelikler için yığılma (accretion), buharlaşma (evaporation) gibi olaylar çok farklı sonuçlara yol açabilmektedirler. Bu bakımdan karadelikler, boyutlarına göre

- (i) mini karadelikler (primordial black-holes);
  - (ii) bir yıldızın son evresini oluşturan karadelikler ve
  - (iii) bir galaksi çekirdeğini oluşturan, çok büyük kütleli dev karadelikler
- şeklinde sınıflandırılırlar.

Öte yandan, oluşumlarına ilişkin başlangıç koşulları bakımından da karadelikler,

- (i) M kütlelerine bağlı tek parametrelili Schwarzschild;
- (ii) M kütlelerine ve Q yüküne bağlı, iki parametrelili Reisner-Nordsrom;

- (iii) M kütlesine ve J açısal momentumuna bağlı, iki parametrelili Kerr;
- (iv) M kütlesi, J açısal momentumu ve Q yüküne bağlı üç parametrelili Kerr-Newman;
- (v) M kütlesi ve B magnetik alanına bağlı iki parametrelili Ernst karadelikleri olmak üzere sınıflandırılırlar.

Hangi sınıftan olursa olsun, bir kütle dağılımı özgravitasyon alanının etkisi altında kritik bir yarıçap içine (Örneğin Schwarzschild karadelikleri için  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ ), sonsuza dek sürecekle büzülmesiyle başlayan evresinde karadelik olur. Bu andan sonra ışık bile kendisinden kaçamayacağı için artık optik yolla görülemez. Bir yıldızın termonükleer evriminin sonunda her zaman bir karadeliğe dönüşmesi mümkün olmaz. Kütlesi  $1,4M_{\odot}$  (Chandrasekhar alt limiti) 'den daha küçük bir yıldız, termonükleer evriminin sonunda, yani bütün nükleer yakıtının (H, He) tükenmesinden sonra artık özgravitasyonunu dengeleyecek enerjisi ve basıncı kalmayacağından, kendi gravitasyon alanı altında büzülmeye başlar. Sonunda aşırı sıkışmış maddenin içerdiği elektronlar, kuvantum mekaniksel olarak dejenere olurlar. Bu durumda oluşan dejenere elektron basıncı, özgravitasyonu dengeleyerek yıldızın hidrostatik denge haline gelmesini sağlar ve yıldız kararlı bir hâl alır. Bu türlü gök cisimlerine "beyaz cüce" denilmektedir. Buna karşılık kütleleri  $1,4M_{\odot}$  'den büyük fakat  $3,2M_{\odot}$  (Chandrasekhar üst limiti) 'den küçük olan yıldızlar, nükleer yakıtları tükendiğinde özgravitasyon alanları altında büzülürler. Bu haldeki daha güçlü gravitasyon alanı, dejenere elektron basıncı ile dengelenemez ve bu büzülme dejenere nötron basıncı ile dengeleneceği, beyaz cücelerden çok daha yoğun, kararlı bir hâle kadar sürer. Bu gök cisimlerine "nötron yıldızları" denilmektedir.

Termonükleer evriminin sonunda, termonükleer reaksiyonun doğurduğu basıncın ortadan kalkmasından sonra özgravitasyon alanının etkisi altında büzülmeye başlayan yıldızın kütlesi  $3,2M_{\odot}$  'den daha büyükse [1], bu halde kütlesinin dolayısıyla gravitasyon alanının çok büyük olması yüzünden dejenere nötron basıncı bu büzülmeyi durduramaz ve yıldız, ne bir taneciğin ne de ışığın dışına kaçamayacağı kritik bir yarıçapı aşarak büzülmesini sürdürür ve bir karadelik olur.

Karadelikler gözlemsel olarak,

- (i) üzerlerine madde yığılması ve yığılan maddenin sıkışıp ısınması sonucu ya da sinkrotron ışınması sonucu X-ışınları ve radyo dalgaları yayınlamaları ile,

- (ii) eşlerinden birinin karadeliğe dönüştüğü çift yıldız sistemlerinde, gözlenen eşin hareketindeki anomalinin belirlenmesi ile,
- (iii) ışığın karadeliğin alanında sapması (lens etkisi) ile saptanmaktadır.

EGRT çerçevesi içinde, bir karadeliğin için farklı anlama sahip iki yüzey tanımlanır. Bunlardan biri “sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi” ya da “durağanlık sınırı” olup kütle dağılımının bu yüzeyin içine büzülmesi halinde yayınlanabilecek ışık, gravitasyon alanında sonsuz kırmızıya kayma göstereceğinden, artık görünmez olur. Diğer yüzey ise, “karadeliğin ufku” ya da “tek yönlü zar yüzeyi” diye adlandırılan ve ancak karadeliğin içine doğru olan yönde kat edilebilen, ne bir taneciğin ne de fotonların dışına çıkamayacağı bir yüzeydir.

Küresel simetrik ve statik bir gök cisminin çökmesi sonucu oluşan Schwarzschild karadeliklerinde bu iki yüzey çakışır ( $r_s = \frac{2GM}{c^2}$  yüzeyi). Fakat dönen, eksenel simetrik bir gök cisminin çökmesiyle oluşan Kerr karadeliklerinde bu iki yüzey farklı olup, tek yönlü zar yüzeyi yine küresel bir yüzey olmakla birlikte, sonsuz kırmızıya kayma yüzeyi, kutuplarında bu yüzeye teğet olan elipsoidal bir dış yüzeydir. Bu iki yüzey arasında kalan bölgeye “dinamik kuşak” ya da “ergosfer” adı verilmekte olup bu bölge, klasik benzeri olmayan, ilgi çekici olaylara yataklık eder.

Dinamik kuşağa giren bir tanecik herhangi bir etkileşimle iki taneciğe ayrışacak olursa, bunlardan negatif enerjili olabilenin karadeliğin ufku içine doğru, pozitif enerjili olan diğerinin ise ergosferin dışına doğru, giren tanecikten daha büyük bir enerjiyle hareket edeceği ve bu yolla, karadeliğinden enerji sağlanabileceği gösterilmiş bulunmaktadır [2]. Bu olaya Penrose süreci denilir.

Öte yandan dönen bir karadeliğin çok güçlü gravitasyon alanında, kendiliğinden, tanecik-karşıtanecik çiftleri oluştuğu, Kuantum Alanlar Teorisi çerçevesi içinde gösterilmiş bulunmaktadır [3]. Bu çiftler Penrose sürecine uygun olarak karadeliğin sürekli olarak enerji kaybetmesine yol açarlar. Dönen bir karadeliğin spininin azalmasına ve sonunda bir Schwarzschild karadeliğine evrimleşmesine yol açan bu tanecik yayılımının, mini karadeliklerin kütlelerinin mertebelerinden ( $10^{16}$  gr) daha büyük olan karadelikler için önemsenmeyecek kadar küçük olduğu hesaplanır.



Ayrıca Schwarzschild karadeliğine evrimleşmiş olsa bile, karadeliğin kütesinin azalmasına ve giderek sıcaklığının artmasına yol açan bir başka tanecik emisyonunun varlığı yine Kuantum Alanlar Teorisi çerçevesi içinde gösterilmiş olup bu küçülme de bir yıldızın son evresini oluşturan karadelikler için önemli olmaz. Ancak, her iki şekilde enerji kaybı ve küçülme mini karadelikler için önemli olup, gitgide artan bir hızla küçülen mini karadeliğin evrimi bir patlamayla son bulur. Bu olaya karadeliğin buharlaşması (evaporation) denir.

Evrenin ilk çağlarında büyük patlamadan sonra oluşan mini karadeliklerin oluşumuna ilişkin Hawking'in önerdiği modelde [4], mini karadeliklerin bu güne kadar kalabilmeleri ve detekte edilebilmeleri mümkün olmamakla birlikte, mini karadelikler için daha geniş bir kütle spektrumu öngören farklı bir modelde [5] nisbeten büyük kütleli, buharlaşmaları gecikmiş, bugüne kadar kalabilen mini karadeliklerin varlığı ve gözlenebilecekleri öngörülmektedir.

Karadeliklere ilişkin yeni gözlemsel veriler, karadelik civarındaki elektromagnetik alanların ve genel rölâtivite teorisi çerçevesi içinde taneciklerin hareketlerinin daha ayrıntılı bir biçimde ele alınmalarını kuvvetle telkin etmektedirler. Bu bağlamda Einstein-Maxwell denklemleri ve bunların kesin çözümleri büyük bir önem arz etmektedir. Son yıllardaki astronomik gözlemler, hem kütleleri bir yıldızın kütesi mertebesinde olup çift yıldız sistemleri içinde gözlenen, hem de galaksilerin merkezinde bulunan çok büyük kütleli dev karadeliklerin varlığını pekiştirmektedir.

Örneğin Sygnus çift yıldız sistemi içindeki 1971'de saptanmış bulunan Cyg X-1 olarak adlandırılan ve optik yolla görünmeyen üyenin kütesinin  $9M_{\odot}$  mertebesinde olduğu belirlenmiş olduğundan, bir karadelik olduğu kesindir. Bunun gibi çift yıldız sistemleri içinde yer alan ve 1975'de saptanmış bulunan LMC X-1, A0620-00, SS433 de birer karadelik oldukları kesinleşmiş gök cisimlerine örnek oluştururlar. Son zamanlarda bulunmuş olan V404 Cyg, GS 2000+25, GRO J0422+32 gibileriyle birlikte bu liste uzatılabilir [6]. Öte yandan yeni gözlem verileri, galaksi merkezlerinde bulunan ve MCG 6-30-15 ve NGC 4258 olarak adlandırılmış bulunan, çok büyük kütleli örneklerdeki gibi M87, M31 Andromeda ve Samanyolu'nun merkezinde de dev karadeliklerin bulunduğuna inanmamızı haklı kılacak güçlü kanıtlar ortaya koymaktadırlar [7,8,9].

Öte yandan, gerek karadeliklerin teşhisi gerekse bunlardan enerji salınımını, özellikle de galaksilerin merkezinde bulunan dev karadeliklerin yayınladıkları çok büyük miktardaki enerji salınımı iki süreçle açıklanmaktadır. Bunlardan biri, ergosferde oluşan ve kuvantum buharlaşmasına yol açan tanecik-karşıt tanecik çiftlerinin Penrose sürecine uygun davranışları sonucu, karadeliğin dönme enerjisinin azalması pahasına enerji salınımı, diğeri de; karadeliğin güçlü gravitasyon alanı nedeniyle birikip sıkışan gaz içindeki, çok yüksek hızlara sahip yüklü taneciklerin (genellikle elektronlar) ivmeli hareketlerinden doğan sinkrotron ışınması. Her iki süreçte de karadeliğin çevresinde, özellikle de ergosferdeki taneciklerin hareketlerinin ayrıntılarının bilinmesi büyük bir önem taşımaktadır. Gözlemsel veriler hareketin genel olarak, üniform bir magnetik alanda bulunan statik ya da dönen karadelik modeli çerçevesi içinde ele alınmasının uygun olacağını telkin etmektedirler.

Bu tezde Schwarzschild, Kerr, Kerr-Newman ve Ernst-Schwarzschild karadeliklerinin alanlarında hareket problemi ayrıntılı bir biçimde ele alınmış ve her seferinde Hamilton-Jacobi yöntemiyle hareket denklemleri belirlenmiştir. Daha sonra, göz önüne alınan bütün karadelik modelleri için yüklü ya da yüksüz bir test taneciğinin, özel bir yörünge sınıfı olan; ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeler için bu hareket denklemleri çözülerek hareketin özellikleri incelenmiştir.

---

## II. GENEL KISIMLAR

### (II.1) HAMILTON-JACOBI YÖNTEMİNİN TANITILMASI

Hamilton varyasyon ilkesinin temelini oluşturan  $S$  eylem fonksiyonu

$$S = \int_0^t L dt' = \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt' \quad (\text{II.1.1})$$

den hareketle,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (\text{II.1.2})$$

olmak üzere, Hamilton-Jacobi kısmî türevli diferansiyel denklemi

$$H \left( \frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

şeklinde düzenleneceği kolayca görülür [10]. Öte yandan  $P_i$  ve  $Q_i$  'lerle dönüşmüş, eşlenik kanonik momentum ve kanonik koordinatlar gösterilmek üzere,  $S = S(P_i, q_i, t)$  eylem fonksiyonu, dönüşmüş Hamilton fonksiyonunu sıfır yapan ve dolayısıyla, dönüşmüş kanonik momentum ve kanonik koordinatların çevrimsel koordinatlar olmalarını sağlayan bir kanonik dönüşümün doğurganı olmaktadır. Gerçekten de bu halde  $\bar{H}$  dönüşmüş Hamilton fonksiyonu sıfır olduğundan

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \equiv 0 \quad P_i = \beta_i = \text{sabit} \quad (\text{II.1.4})$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} \equiv 0 \quad Q_i = \gamma_i = \text{sabit} \quad (\text{II.1.5})$$

dır. Bu kanonik dönüşüm için

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \quad (\text{II.1.6})$$

olup dönüşümün doğurganı olan eylem fonksiyonu,

$$S = S(P_i, q_i, t) = S(\beta_i, q_i, t) \quad (\text{II.1.7})$$

(II.1.3) denkleminin çözümüdür.  $q_i$ 'ler ve  $t$  olmak üzere  $n+1$  tane değişkene bağlı birinci mertebeden kısmî türevli diferansiyel denklemin çözümü  $n+1$  tane  $(\alpha_i + 1)$  sabit içermektedir. Bununla birlikte denklem,  $S$ 'yi değil  $S$ 'nin birinci mertebeden türevlerini içermekte olduğundan  $S + \alpha$  şeklindeki toplamsal bir sabitin her değeri için denklem sağlanır. Çözüme etkisi olmayan bu sabit sıfır alınabileceğinden çözümün  $n$  tane  $\alpha_i$  keyfi sabiti içereceği görülür.

(II.1.4), (II.1.5) kanonik denklemlerinin integrasyonunun verdiği (II.1.7) 'de yer alan  $\beta_i$  sabitleri, (II.1.3) denkleminin çözümünün verdiği  $\alpha_i$  sabitleri olarak seçilebileceğinden bu yolla bulunan eylem fonksiyonunun  $\beta_i \equiv \alpha_i$  'lere göre türevleri (II.1.6) 'da yerine konarak,

$$p_i = \frac{\partial S(\alpha_i, q_i, t)}{\partial q_i} \quad (\text{II.1.8})$$

$$Q_i = \gamma_i = \frac{\partial S(\alpha_i, q_i, t)}{\partial \alpha_i} \quad (\text{II.1.9})$$

denklemleri elde edilir.  $\alpha_i$  ve  $\gamma_i$  sabitleri  $t=0$  için verilen  $q_i(0)$  ve  $p_i(0)$  başlangıç değerleri aracılığıyla belirlendikten sonra (II.1.9) denklemini  $q_i$  'lere göre çözülerek, bunlar, başlangıç değerleri ve  $t$  cinsinden

$$q_i = q_i(\alpha_i, \gamma_i, t) \tag{II.1.10}$$

şeklinde elde edilirler.

---

## (II.2) METRİK UZAYIN SİMETRİLERİ VE KİLLİNG VEKTÖRLERİ

Bir metrik uzayın herhangi bir noktası civarındaki geometriyi birbiriyle karşılaştırmak üzere göz önüne alınan

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta}) \quad (\text{II.2.1})$$

dönüşümü, metriği “form invariant” bırakıyorsa, yani dönüşmüş  $g'_{\alpha\beta}(x')$  'ler  $x'^{\alpha}$  'lara nasıl bağlıysa,  $g_{\alpha\beta}(x)$  'ler de  $x^{\alpha}$  'ların aynı şekilde fonksiyonu ise bu dönüşüme metriğin bir “izometri dönüşümü” denir. Buna göre böyle bir dönüşümde,

$$g'_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(y) \quad (\text{II.2.2})$$

olacaktır.  $\{x'^{\alpha}\}$  noktasındaki dönüşmüş metrik,

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x'^{\beta}} g_{\gamma\delta}(x)$$

ve ters dönüşümü de

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\beta}} g'_{\gamma\delta}(x') \quad (\text{II.2.3})$$

dür. (II.2.2) ifadesi (II.2.3) 'de göz önünde bulundurulacak olursa,

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\beta}} g'_{\gamma\delta}(x') \quad (\text{II.2.4})$$

yazılır. Dolayısıyla (II.1.1) dönüşümünün (II.2.4) 'ü temin ediyor olması onun bir izometri dönüşümü olduğunun göstergesi olacaktır. Şimdi

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \varepsilon \xi^{\alpha} \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (\text{II.2.5})$$

şeklinde sonsuz küçük bir izometri dönüşümünün özelliklerini göstermek istiyoruz. Sonlu bir dönüşüm ardışık sonsuz küçük dönüşümlerin bileşkesi olacağından bu dönüşümün önemi açıktır. (II.2.5) dönüşümü, (II.2.4) 'e taşınır ve  $\varepsilon$  'nun birinci mertebeden daha büyük kuvvetleri ihmal edilecek olursa,

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \xi^\lambda (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}) = 0 \quad (\text{II.2.6})$$

elde edilir.  $\xi^\lambda$  ile  $g^{\lambda\sigma} \xi_\sigma$  değiştirilir de ikinci cins Christoffel sembollerinin ifadesi hatırlanacak olursa denklem,

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - 2\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \xi_\sigma = 0$$

ya da kovaryant türevler cinsinden,

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (\text{II.2.7})$$

olur. Bu denkleme “Killing denklemi” denilmektedir. Bu denklemi sağlayan her  $\xi_\alpha(x)$  vektörüne de  $g_{\alpha\beta}(x)$  metriğinin bir Killing vektörü denilir. Böylece metriğin bir izometri dönüşümüne temel oluşturacak Killing vektörleri elde edilirler [11,12].

Bir metrik uzayın izometri dönüşümleri bazı hallerde kolaylıkla görülebilir.  $g_{\alpha\beta}$  'lar bir koordinat bazına göre koordinatlardan herhangi birine, örneğin  $x^k$  'ya bağlı değilse yani,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} = 0 \quad (\lambda = k \text{ için}) \quad (\text{II.2.8})$$

ise,  $x^k$  koordinat eğrisinin teğeti olan  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  'nın alanın bir Killing vektörü olacağını göstermek istiyoruz.

Herhangi bir  $x^\alpha = C^\alpha(\lambda)$  eğrisinin,  $x^k$  koordinatının değişimi yönünde  $\Delta x^k = \varepsilon$  kadar ötelenmesiyle elde edilen kongruent (eşdeğer) eğriyi göz önüne alalım. Ötelenmiş eğri için parametrik denklemler artık

$$\begin{aligned} x^\alpha &= C^\alpha(\lambda) & (\alpha \neq k \text{ için}) \\ x^k &= C^k(\lambda) + \varepsilon \end{aligned} \tag{II.2.9}$$

dır. Orijinal eğrinin,  $\lambda = \lambda_1$  ve  $\lambda = \lambda_2$  noktaları arasındaki uzunluğu

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ g_{\alpha\beta}(x(\lambda)) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

buna karşılık kongruent eğrinin uzunluğu ise

$$L(\varepsilon) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ g_{\alpha\beta} \left( x(\lambda) + \Delta x^k \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

dır. Oysa bu son hâlde  $\Delta x^k = \varepsilon$  'nin katsayısı sıfır olduğundan kongruent eğrinin boyu önceki eğrinin boyuna eşittir. Yani böyle bir ötelenme için  $\frac{dL}{d\varepsilon} = 0$  olacaktır. Metriğin bağlı olmadığı koordinatın değişimi yönündeki, bir eğrinin uzunluğunu değiştirmeyen ötelenmede

$$x^\alpha = C^\alpha(\lambda) = \text{sabit} \quad (\alpha \neq k \text{ için})$$

olup söz konusu koordinata karşıdüşen koordinat eğrisinin teğetine  $\vec{\xi}_k$  denecek olursa

$$\vec{\xi}_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{II.2.10}$$



vektörü aracılığıyla bu ötelenmenin tasvir olunabileceği kolayca görülür. (II.2.8) çerçevesi içinde (II.2.10) vektör alanı  $\xi^\alpha = \delta^\alpha_k$  olduğundan bunun temsil ettiği dönüşüm,

$$x'^\alpha = x^\alpha + \varepsilon \xi^\alpha$$

ve dolayısıyla da

$$x'^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha \neq k \text{ için})$$

$$x'^\alpha = x^k + \varepsilon$$

şeklindedir. Öte yandan  $\vec{\varepsilon} \xi$  ötelenmesine karşılık gelen bu dönüşümün, uzunlukların korunmasına yol açan bir dönüşüm olmasının gerek ve yeter koşulunun  $\vec{\xi}$  alanının (II.2.7) Killing denklemini sağlamasıdır. Gerçekten de (II.2.10) vektör alanının kovaryant türevi, Ricci teoremi [13] de göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha;\beta} &= g_{\lambda\alpha} \xi^\lambda_{;\beta} = g_{\lambda\alpha} [\xi^\lambda_{;\beta} + \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} \xi^\sigma] = g_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} \delta^\sigma_k \\ &= g_{\lambda\alpha} \Gamma^\lambda_{\beta k} = g_{\lambda\alpha} g^{\lambda\mu} [\beta k, \mu] = \delta^\mu_\alpha [\beta k, \mu] \\ &= [\beta k, \alpha] = \frac{1}{2} (g_{\beta\alpha,k} + g_{k\alpha,\beta} - g_{\beta k,\alpha}) = \frac{1}{2} (g_{k\alpha,\beta} - g_{\beta k,\alpha}) \end{aligned}$$

olur. Görüldüğü gibi  $\xi_{\alpha;\beta}$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  indislerine göre antisimetrik olup  $\xi_\alpha$ ,

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} \equiv \xi_{(\alpha;\beta)} = 0$$

şeklindeki Killing denklemini sağlar. Böylece  $\vec{\xi} = \frac{\partial}{\partial x^k}$ 'nin metriğin bir Killing vektörü olacağı görülür.

### II.3 HAREKET SABİTLERİ

Hareket sabitlerinin, hareketin belirlenmesinde ne büyük bir önem taşıdığı bilinmektedir. Bir gravitasyon alanındaki hareket problemi söz konusu olduğunda, bu gravitasyon alanına karşılıklı uzayzaman geometrisinin simetrilerini belirleyen Killing vektör alanlarının bilinmesi aynı zamanda hareket sabitlerinin de belirlenmesine hizmet etmektedir. Bu konuda, “herhangi bir jeodezik boyunca göz önüne alınan hareket, jeodeziğin teğeti ile Killing vektörünün çarpımını sabit bırakır” şeklindeki bir teorem geçerlidir. Yani  $\vec{p}$  ile, yörüngenin teğeti doğrultusunda bulunan momentum dörtlü vektörü gösterilmek üzere,

$$\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabittir} \quad (\text{II.3.1})$$

ifadesi bir hareket sabiti belirlemektedir. Gerçekten de böyle olduğunu göstermek istiyoruz.

Bir tansörün kovaryant türevi ile örneğin  $\vec{p}$  vektörünün skaler çarpımı, soyut notasyonla,

$$\vec{p} \cdot (\nabla \mathbf{T}) = \nabla_p \mathbf{T} \quad (\text{II.3.2})$$

şeklinde gösterilmekte olup, tansörün  $\vec{p}$  doğrultusundaki doğrultu türevini belirlemektedir.  $\mu$  ile taneciğin kütlesi ve  $\lambda$  ile de  $\tau = \mu\lambda$  şeklinde tanımlanmış bir parametre gösterilmek üzere  $\vec{p}$  momentum dörtlü vektörü

$$\vec{p} = \mu \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{d\lambda}$$

olup  $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ) parametrik denklemleriyle verilmiş jeodezik eğrisinin teğeti doğrultusunda bulunan bir vektördür. Buna göre (II.3.1) 'in jeodeziğin teğeti doğrultusundaki doğrultu türevinin

$$\vec{p} \cdot \nabla (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) = \nabla_p (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) = (\nabla_p \vec{p}) \cdot \vec{\xi} + \vec{p} \cdot \nabla_p \vec{\xi}$$

şeklindeki ifâdesi bileşenleri cinsinden açıkça yazılacak olursa

$$\vec{p} \cdot \nabla (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) = p^\beta (p^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} = p^\beta p^\alpha_{;\beta} \xi_\alpha + \xi_{\alpha;\beta} p^\alpha p^\beta \quad (\text{II.3.3})$$

olur. Oysa  $\vec{p}$  'nin jeodeziğin teğeti doğrultusundaki doğrultu türevi

$$p^\alpha p^\alpha_{;\beta} = p^\beta (p^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\gamma) = \frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma$$

olup sıfırdır. Ayrıca  $\vec{\xi}$  vektör alanı,

$$\xi_{(\alpha;\beta)} \equiv \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

Killing denklemini sağlamakta olduğundan (II.3.3) 'ün sağ yanındaki ikinci terim de sıfırdır. Dolayısıyla

$$\vec{p} \cdot \nabla (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) = \frac{d}{d\lambda} (\vec{p} \cdot \vec{\xi}) = 0$$

ve

$$\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$$

şeklindeki (II.3.1) 'in geçerli olacağı görülür.

Öte yandan, hareket sabitlerini farklı bir yaklaşımla, Hamilton formalizmi aracılığıyla da belirlemek mümkündür. Eğer sistemin Hamilton fonksiyonu ve dolayısıyla bağlı olduğu kanonik koordinatlar ve kanonik momentumlar biliniyorsa

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad , \quad \frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

şeklindeki Hamilton denklemleri hareket sabitlerini belirleme olanağı sağlar. Örneğin, Hamilton fonksiyonu  $x^k$  'ya bağlı değilse ( $x^k$  çevrimsel koordinat ise)  $x^k$  'ya karşılık gelen  $p_k$  kanonik momentumu (momentum dörtlü vektörünün kovaryant bileşeni) bir hareket sâbiti olur.

---

### III. MALZEME VE YÖNTEM

#### III.1 SCHWARZSCHILD KARADELİĞİNİN ALANINDA HAREKET PROBLEMİ

Bilindiği gibi, Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin küresel simetrik, statik bir kütle dağılımının dışındaki gravitasyon alanını tasvir eden tek parametrelili çözüm grubu,

$$ds^2 = -d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{III.1.1})$$

Schwarzschild metriği ile verilmekte olup  $G = c = 1$  alınmış bu ifâdede,  $m$  geometrik kütlesi, gravitasyon alanını doğuran  $M$  kütlesi cinsinden

$$m \equiv \frac{GM}{c^2} = M$$

dır.

Şimdi, küresel simetrik ve statik bir kütle dağılımının bir karadeliğe evrimleşmiş olması halinde böyle bir karadeliğin alanında bulunan  $\mu$  kütleli bir test taneciğinin hareket denklemlerini ve hareketinin özelliklerini incelemek istiyoruz.

$\tau$  özzamanı cinsinden  $\tau = \mu\lambda$  şeklinde tanımlanan yeni bir parametre  $\lambda$  olsun. Bu halde taneciğin momentum dördümlü vektörü,

$$p^\alpha = \mu u^\alpha = \mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \dot{x}^\alpha$$

dır. Öte yandan Genel Rölâtivite Teorisinin Jeodezik İlkesi çerçevesi içinde taneciğin,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (\text{III.1.2})$$

şeklindeki hareket denklemlerinin

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \quad (\text{III.1.3})$$

gibi, “süper Hamilton fonksiyonu” diye adlandırılan bir Hamilton fonksiyonu için Hamilton denklemlerine eşdeğer olduğu gösterilebilir. Bu hâlde

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha} \quad (\text{III.1.4})$$

şeklindeki Hamilton denklemlerinin ilki momentum dörtlü vektörünün tanımından başka bir şey değildir. Gerçekten de

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\mu p_\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\nu p_\mu = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} p_\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} p_\mu = g^{\alpha\nu} p_\nu = p^\alpha$$

olur. Burada dikkat edilmesi gereken nokta momentum dörtlü vektörünün kovaryant bileşenleri yani kanonik momentumların kanonik koordinatlardan bağımsız olduğu hususudur. Buna karşılık, kuşkusuz dörtlü momentum vektörünün kontravaryant bileşenleri yani  $p^\alpha$ ’lar,

$$p^\alpha = g^{\alpha\mu}(x^\gamma) p_\mu$$

olmaları dolayısıyla koordinatların fonksiyonudurlar. Öte yandan (III.1.4) denklemlerinin ikincisi

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

denkleminde  $p_\alpha$  yerine  $p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\beta$  alınarak

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\alpha\beta} p^\beta) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu, \alpha} p_\mu p_\nu$$

ve

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = p^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$$

olduğuna dikkat ederek,

$$p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu, \alpha} g_{\mu\gamma} p^\gamma g_{\beta\nu} p^\beta \quad (\text{III.1.5})$$

olur. Ayrıca

$$(g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma})_{, \alpha} = (\delta^\nu_\gamma)_{, \alpha} = 0$$

olduğundan,

$$g^{\mu\nu, \alpha} g_{\mu\gamma} = -g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma, \alpha} \quad (\text{III.1.6})$$

dır. (III.1.6), (III.1.5) 'de yerine konacak olursa,

$$p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} = \frac{1}{2} g_{\mu\gamma, \alpha} g^{\mu\nu} g_{\beta\nu} p^\gamma p^\beta = \frac{1}{2} g_{\beta\gamma, \alpha} p^\gamma p^\beta$$

ve düzenlenerek

$$\left( g_{\alpha\beta, \gamma} - \frac{1}{2} g_{\beta\gamma, \alpha} \right) p^\gamma p^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (\text{III.1.7})$$

bulunur. Sol yandaki ilk terimde

$$g_{\alpha\beta,\gamma} p^\gamma p^\beta = \left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma,\beta} \right) p^\gamma p^\beta$$

olduğundan (III.1.7) denklemi,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + \frac{1}{2} [\beta\gamma, \alpha] p^\gamma p^\beta = 0$$

ve bu denklem  $g^{\alpha\mu}$  ile çarpılarak,

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma = 0$$

şeklindeki jeodezik denklemleri elde edilmiş olur. Jeodezik denklemlerinin, ayrıca, (III.1.3)

Hamilton fonksiyonu ve

$$S = \int p_\alpha dx^\alpha - \mathcal{H} d\lambda$$

aksiyonu yardımıyla  $\delta S = 0$  aksiyon ilkesinden hareketle de elde edilebileceği bilinmektedir. [12]. Bu yüzden hareket denklemlerinin Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlenmesi sırasında, bu yönteme temel oluşturan Hamilton fonksiyonu (III.1.3) şeklinde olacaktır.

Küresel simetrik ve statik Schwarzschild alanı için  $g_{\alpha\beta}$  'lar  $t$  ve  $\varphi$  'ye bağlı olmadığından,

§(II.2) 'de göstermiş olduğumuz üzere, kovaryant baz vektörlerinden  $\vec{\mathcal{E}}_0$  ve  $\vec{\mathcal{E}}_\varphi$

$$\vec{\xi}_{(t)} = \vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\xi}_{(\varphi)} = \vec{\mathcal{E}}_\varphi = \vec{\mathcal{E}}_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

alanın birer Killing vektörüdürler. Bu yüzden  $\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$  şeklindeki genel teoremden hareketle



$$\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = p_\alpha \vec{\mathcal{E}}^\alpha \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 = p_\alpha \delta^\alpha_0 = p_0 \equiv p_t = \text{sabit}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}_3 = p_\alpha \vec{\mathcal{E}}^\alpha \cdot \vec{\mathcal{E}}_3 = p_\alpha \delta^\alpha_3 = p_3 \equiv p_\varphi = \text{sabit}$$

olacağından  $p_t$  ve  $p_\varphi$  bu alandaki test taneciğinin hareket sâbitleri olurlar.

Öte yandan, kütle dağılımından çok uzakta metrik,

$$ds^2 = -d\tau^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Minkowski metriğine indirgeneceğinden,  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  olduğuna dikkat ederek bu alanda,

$$p^t = \mu \frac{dt}{d\tau} = \gamma\mu = E$$

dolayısıyla

$$p_t = g_{tt} p^t = -p^t = -E \quad (\text{III.1.8})$$

ve

$$p^\varphi = \mu \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \dot{\varphi}$$

dolayısıyla

$$p_\varphi = g_{\varphi\varphi} p^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z \quad (\text{III.1.9})$$

olacağı anlaşılmaktadır. Yani hareket sabitlerinden  $p_t$  'nin taneciğin sonsuzdaki enerjisine ve  $p_\phi$  'nin de açısal momentumunun karadeliğin ekseni doğrultusundaki bileşenine karşılık geldiği görülmektedir. Ayrıca momentum dörtlü vektörünün normunun karesi

$$\left| \vec{p} \right|^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \mu^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\mu^2 \quad (\text{III.1.10})$$

olduğundan taneciğin kütlesi de üçüncü bir hareket sabitidir. Dört boyutlu uzayzamanda hareketin tek bir şekilde belirlenebilmesi için dördüncü bir hareket sabitine gereksinim vardır. İlerde Hamilton-Jacobi teorisi çerçevesi içinde bu dördüncü hareket sabitinin nasıl uygun bir biçimde seçilebileceğini göreceğiz.

Şimdi, kanonik momentumlar  $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$  olmak üzere,

$$\mathcal{H}\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\right) = -\frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

Hamilton-Jacobi denkleminde (III.1.3) süper Hamilton fonksiyonu yerine konacak olursa denklem,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{III.1.11})$$

olur. (III.1.1) ile verilmiş bulunan, metrik tansörün  $g_{\alpha\beta}$  kovaryant bileşenlerinden hareketle,  $g^{\alpha\beta}$  kontravaryant bileşenlerinin

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

olacağı görülmektedir. Buna göre (III.1.11) denklemini daha açık bir biçimde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \\ + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1.12})$$

olur. Birinci mertebeden, lineer olmayan bu denklemini ayrıştırabilmek üzere

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (\text{III.1.13})$$

olduğunu varsayalım. Öte yandan (III.1.10) dolayısıyla

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\mathcal{H} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} \mu^2$$

olduğundan,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = \frac{1}{2} \mu^2$$

ve

$$\bar{S}(\lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{III.1.14})$$

dır. Ayrıca (III.1.8) ve (III.1.9) hareket sâbitleri göz önünde bulundurularak,

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = -E$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = L_z$$

den

$$S_0(t) = -Et \quad (\text{III.1.15})$$

$$S_3(\varphi) = L_z \varphi \quad (\text{III.1.16})$$

olacağından, (III.1.14-16) ifâdeleri (III.1.13) 'e taşınarak  $S$  aksiyonu,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

olur. Bu ifâde (III.1.12) denkleminde yerine konarak

$$-\frac{1}{2} \mu^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} E^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} L_z^2$$

ve bu denklem  $2r^2$  ile çarpılarak düzenlenecek olursa,

$$-\mu^2 r^2 = -\frac{E^2 r^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cotg^2 \theta$$

koyarak yukarıdaki denklem ayrıştırılacak olursa,  $K$  ile ayrışım sâbiti gösterilmek üzere,

$$-\mu^2 r^2 + \frac{E^2 r^4}{(r^2 - 2mr)} - L_z^2 - (r^2 - 2mr) \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \cotg^2 \theta L_z^2 + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K$$

ve buradan da  $r$  ve  $\theta$  'ya bağılı denklemler düzenlenerek,

$$(r^2 - 2mr)^2 \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = E^2 r^4 - (r^2 - 2mr)(\mu^2 r^2 + L_z^2 + K) \equiv R(r) \quad (\text{III.1.17})$$

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K - \cotg^2 \theta L_z^2 = K + L_z^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \equiv \Theta(\theta) \quad (\text{III.1.18})$$

elde edilir. Buradan  $S_1(r)$  ve  $S_2(\theta)$ , kısaca,

$$S_1(r) = \int_r^r \frac{\sqrt{R}}{r^2 - 2mr} dr$$

$$S_2(\theta) = \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta$$

olacağından eylem fonksiyonu da,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + \int_r^r \frac{\sqrt{R}}{r^2 - 2mr} dr + \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta \quad (\text{III.1.19})$$

şeklinde elde edilmiş olur. Bu ifâdede yer alan iki karekökün işaretlerinin birbirinden bağımsız olduğuna ve yalnızca aksiyonun değişiminin önemli olması yüzünden integrallerin alt sınırlarının belirtilmesinin önemli olmadığına dikkat edilmelidir.

Şimdi (III.1.8-10) hareket sabitlerine ek olarak dördüncü bir hareket sabitini,  $K$  ayrışım sâbiti almak yerine, (III.1.17) ve (III.1.18) 'de simetrik bir biçimde yer alan,  $K + L_z^2$  olarak seçmenin uygun olacağı görülmektedir. Buna göre,

$$\alpha_0 \equiv K + L_z^2, \quad \alpha_1 \equiv \mu^2, \quad \alpha_2 \equiv E, \quad \alpha_3 \equiv L_z$$

sabitlerinin her birine göre (III.1.19) aksiyonunun kısmî türevlerini yeni sâbitlere (ya da integrallerin keyfî alt sınırları dolayısıyla sıfıra) eşitleyerek,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{2} \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mu^2} = \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int^r \frac{E r^4}{\sqrt{R} (r^2 - 2mr)} dr = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial L_z} = \varphi - \int^\theta \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = 0$$

ve buradan da sırasıyla,

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.1.20})$$

$$\lambda = \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} \quad (\text{III.1.21})$$

$$t = \int^r \frac{E r^4}{r^2 - 2mr} \frac{dr}{\sqrt{R}} \quad (\text{III.1.22})$$

$$\varphi = \int^\theta \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.1.23})$$

bulunur. Bu denklemlerdeki integrallerin alt sınırlarının bütünüyle keyfi olarak seçilebileceğini bir kez daha vurgulayalım.

Şimdi,  $\frac{d}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda} \frac{d}{dr}$  (ya da  $\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d}{d\theta}$ ) olduğuna dikkat ederek, (III.1.20-23)

denklemlerini  $\lambda$  'ya göre türetelim. (III.1.21) 'den bulunan

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

(III.1.20) 'nin  $\lambda$  'ya göre türevinde yerine konarak

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

bulunur. Benzer şekilde (III.1.22) ve (III.1.23) 'ün türevleri aracılığıyla bulunanlarla birlikte, hareket denklemlerinin ilk integralleri topluca,

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

(III.1.24)

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L_z}{\sin^2 \theta}$$

$$r^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E r^4}{r^2 - 2mr}$$

olurlar. Bu denklemlerin çoğunlukla yapılageldiği gibi, Lagrange yöntemiyle Schwarzschild alanı için bulunmuş Euler-Lagrange denklemlerine eşdeğer olduğu kolayca gösterilebilir. Bilindiği gibi, bu denklemlerin kesin çözümleri bulunabilmektedir. Bu halde taneciğin en genel hareketinin, klasik halde olduğu gibi, gene bir düzlem hareket olduğu ancak bağlı

yörüngelerin kapanmayan elipsler (perihelik hareket) biçiminde olacağı bilinmektedir. İlerde göz önüne alacağımız bazı karadelik modellerinde olduğu gibi, hareket denklemlerinin kesin çözümlerinin bulunamadığı hallerde özel bir yörünge sınıfını, ekvator düzlemindeki kararlı dairesel yörüngeleri ele alıp inceleyeceğiz. Bu bakımdan, bir hazırlık olmak üzere, Schwarzschild karadeligi için de yalnızca mümkün, kararlı dairesel yörüngeler ve bu yörüngelerde taneciğin sahip olacağı enerjisi ve momentumunun belirlenmesi problemiyle ilgileneceğiz. Kuşkusuz küresel simetrik Schwarzschild karadeligi için özel bir hareket düzlemi söz konusu olmayıp tanecik hangi düzlemde harekete başlarsa başlasın, hareket o düzlemde kalmaktadır. Bu halde hareketin bir düzlem hareket olacağı (III.1.24) denklemlerinin ikincisi yardımıyla kolayca görülür. Gerçekten de bu denklem  $\lambda$  'ya göre türetilecek olursa,

$$\frac{d}{d\lambda} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{L_z^2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta}$$

ve  $L_z$ , (III.1.24) denklemlerinin üçüncüsü yardımıyla elenerek

$$\frac{d}{d\lambda} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{\Theta}} r^4 \frac{d\theta}{d\lambda} \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{d\lambda}$$

ve sağ yandaki  $r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$  olduğundan

$$\frac{d}{d\lambda} \left( r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (\text{III.1.25})$$

bulunur. Bu denklem standart yoldan, Lagrange yöntemiyle belirlenmiş bulunan  $\theta$ 'ya ilişkin Euler-Lagrange denklemi olup bu denklem yardımıyla, örneğin,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzleminde harekete

başlayan bir tanecik için  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  başlangıç koşulları, hareketin (III.1.25) çerçevesi

içinde daima  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzleminde kalacağını göstermektedir.



### Ekvator Düzlemindeki Kararlı Dairesel Yörüngeler

$\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemindeki harekette (III.1.24) 'ün ikincisi dolayısıyla  $\Theta = 0$  ve (III.1.18) ile verilen  $\Theta$  'nın tanım ifâdesi yardımıyla da K ayrışım sâbitinin sıfır olacağı görülmektedir. Buna göre (III.1.24) 'ün ilk denklemini kareye kaldırılıp sadeleştirilerek radyal hareketi tasvir etmek üzere göz önüne alacağımız denklem

$$r^3 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = E^2 r^3 - (r - 2m)(\mu^2 r^2 + L^2) \quad (\text{III.1.25})$$

olur.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemindeki hareketinde taneciğin açısal momentumunun sıfırdan farklı tek bileşeni  $L_z$  olduğundan  $L_z = L$  alınmış bulunmaktadır. (III.1.25) 'in sol yanının da telkin ettiği gibi sağ yanın hareketin  $V_r$  ile göstereceğimiz efektif potansiyelini temsil etmekte olduğu görülmektedir.  $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = 0$  olduğu dönüm noktaları için  $V_r = 0$  ve dairesel yörüngeler için de  $\frac{dV_r}{dr} = 0$  olacağından [10,12],

$$V_r = E^2 r^3 - (r - 2m)(\mu^2 r^2 + L^2) = 0 \quad (\text{III.1.26})$$

$$\frac{dV_r}{dr} = 3E^2 r^2 - 3\mu^2 r^2 + 4m\mu^2 r - L^2 = 0 \quad (\text{III.1.27})$$

elde edilir. (III.1.26) 'dan  $E^2 r^2$  ifâdesi

$$E^2 r^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) (\mu^2 r^2 + L^2)$$

şeklinde çekilir de (III.1.27) 'de yerine konursa basit hesaplardan sonra,

$$L^2 = \frac{\mu^2 m r^2}{r - 3m} \quad (\text{III.1.28})$$

ve  $L^2$  'nin bu ifâdesi (III.1.27) 'ye taşınarak

$$E^2 = \frac{\mu^2(r-2m)^2}{r(r-3m)} \quad (\text{III.1.29})$$

elde edilir. Çok büyük  $r$  değerleri için buradan

$$E \cong \mu \left( 1 - \frac{m}{2r} + \dots \right)$$

olur ki bu da dairesel yörüngeler için Newtonsal bağ enerjisinden başka bir şey değildir.

(III.1.28) ve (III.1.29) 'dan birim kütle başına taneciğin enerjisi ve açısal momentumunun,

$$\frac{E}{\mu} \equiv \tilde{E} = \pm \frac{r-2m}{\sqrt{r(r-3m)}} \quad (\text{III.1.30})$$

$$\frac{L}{\mu} \equiv \tilde{L} = \pm \left[ \frac{mr^2}{r-3m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.1.31})$$

olacağı görülür. Bu ifâdedeki (+) işareti taneciğin yörünge açısal momentumunun z-ekseninin pozitif yönünde, (-) işareti ise zıt yönünde olması hâline karşıdüşer.

Şimdi tekrar (III.1.29) 'a dönelim. Payı pozitif olan bu ifâdenin paydasının sıfır olması hâlinde maddesel taneciklerden söz etmek olanaksızdır. Gerçekten de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzleminde bir dairesel yörünge üzerindeki herhangi bir noktada göz önüne alınan yerel sistemde  $\gamma = \sqrt{1-v^2}$  olmak üzere taneciğin  $E = \gamma\mu$  şeklindeki enerjisinin ancak  $v \rightarrow 1$  (yani  $v, c$  'ye giderken) için sonsuza gideceği görülmektedir. Dolayısıyla (III.1.29)'un paydasını sıfır yapan  $r$  değeri maddesel tanecikler için mümkün olmayan foton yörüngesini belirleyecektir. Buna göre Schwarzschild alanındaki mümkün dairesel yörüngelerin alt sınırının  $r = 3m$  olacağı anlaşılmış olur.

Bilindiği gibi  $V_r$  efektif potansiyelinin ekstremumları, bir görel maksimum ise  $\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} < 0$ , bir görel minimum ise  $\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} > 0$  'dır. Öte yandan, efektif potansiyelin minimumuna karşılık gelen yörüngeler kararlı, maksimumuna karşılık gelenler ise kararsız dairesel yörüngeler olduğundan [10], (III.1.27) 'nin

$$\frac{d^2 V_r}{dr^2} = 6E^2 r - 6\mu^2 r + 4m\mu^2 = 0$$

şeklindeki ifâdesinde (III.1.29) yerine konacak olursa

$$6m - r = 0$$

bulunur ki, bu da  $r = 6m$  'nin kararlı ve kararsız yörüngelerin sınırını oluşturacağını gösterir.

Buna göre  $r > 6m$  için  $\frac{d^2 V_r}{dr^2} < 0$ , dolayısıyla, yörüngeler kararlı dairesel yörüngeler olacak,

buna karşılık  $r < 6m$  için de  $\frac{d^2 V_r}{dr^2} > 0$ , dolayısıyla, yörüngeler kararsız dairesel yörüngeler olacaktır. Böylece maddesel tanecikler için kararsız dairesel yörüngelerin yarıçaplarının limitleri,

$$3m < r \leq 6m$$

buna karşılık kararlı dairesel yörüngelerin yarıçaplarının limitleri;

$$6m < r < \infty$$

olacağı anlaşılmış olur. Bu halde (III.1.31) 'den de görüleceği üzere taneciğin birim kütle başına açıl momentumunun da  $r \rightarrow 3m$  için  $\tilde{L} \rightarrow \infty$  ve  $r = 6m$  için  $\tilde{L} = 2\sqrt{3}$  olacağı görülmektedir.

Karadeliğin alanında kapalı bir yörüngede bulunan bir taneciğin bağ enerjisi  $E_b = \mu - E$  olup bağ enerjisinin sıfır, dolayısıyla  $E = \mu$  olduğu hâl açık yörüngelere geçiş sınırını oluşturmaktadır. Buna göre (III.1.30) yardımıyla,

$$\tilde{E} = 1 = \frac{r - 2m}{\sqrt{r(r - 3m)}}$$

den bulunan  $r = 4m$ , uç (marjinal) bağlı yörüngelerin yarıçapını belirlemekte olup aslında bu değer aynı zamanda (III.1.24) denklemleriyle tasvir olunan bütün parabolik yörüngelerin perihellerinin minimumuna karşılık gelir. Öte yandan  $r = 6m$  yarıçaplı son kararlı yörüngede bulunan taneciğin birim kütle başına bağ enerjisinin de

$$\tilde{E}_b = \frac{\mu - E}{\mu} = 1 - \tilde{E} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \%5,72$$

olacağı görülmektedir. Sükûnet enerjisinin bu orandaki kısmı, kararsız dairesel yörüngelerin en büyük yarıçaplı olanından spiraller çizerek karadeliğe dalan taneciklerin serbest kalan enerjilerini temsil etmektedir.

---

### (III.2) KERR KARADELİĞİNİN ALANINDA TEST TANECİĞİNİN HAREKET DENKLEMLERİ

Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin, eksenel simetriye ve spine sahip küresel bir kütle dağılımının dışındaki gravitasyon alanını tasvir eden, iki parametrelili eksenel simetrik, stasyoner çözümü [14], Boyer-Lindquist koordinatlarında [15],

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr$$

olmak üzere,

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (\text{III.2.1})$$

şeklinde olup,  $G = c = 1$  alınmış bu ifade de  $M$ ,  $m \equiv \frac{GM}{c^2} = M$  ifadesinde yer alan karadeliğin kütlesi ve  $S$  karadeliğin spin açısai momentumunun büyüklüğü olmak üzere  $a$  da

$$a = -\frac{S}{Mc} = -\frac{S}{M}$$

şeklindeki karadeliğin birim kütle başına açısai momentumudur.

Bu paragrafta, karadeliğe evrimleşmiş, eksenel simetriye sahip, dönen, küresel bir kütle dağılımının dışında, (III.2.1) ile tasvir olunan alandaki,  $\mu$  kütleli bir test taneciğinin hareket denklemlerini, Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlemek istiyoruz. §(III.1) 'de,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (\text{III.2.2})$$

süper Hamilton fonksiyonu cinsinden Hamilton denklemlerinin, jeodezik ilkesi çerçevesi içinde gravitasyon alanındaki test taneciğinin yörüngesini belirleyen, jeodezik denklemlerinin eşdeğer oldukları gösterilmişti.  $g_{\alpha\beta}$  'lar, bu kez Kerr alanına ilişkin metrik tansörün bileşenleri

olmak üzere, Hamilton-Jacobi denklemi, (III.2.2) Hamilton fonksiyonundan hareketle elde edilecektir.

Öte yandan, aksenal simetrik, stasyoner Kerr alanı için  $g_{\alpha\beta}$  'lar,  $t$  'ye ve  $\varphi$  'ye bağlı olmadığından kovaryant baz vektörlerinden  $\vec{\epsilon}_0$  ve  $\vec{\epsilon}_\varphi$

$$\vec{\xi}_{(t)} = \vec{\epsilon}_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\xi}_{(\varphi)} = \vec{\epsilon}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

şeklinde alanın birer Killing vektörü olup  $\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$  teoremi dolayısıyla  $p_t$  ve  $p_\varphi$  birer hareket sabitidirler.  $p_t$  ve  $p_\varphi$  'nin birer hareket sabiti oldukları farklı bir yoldan da görülebilir.  $p_\alpha$  kanonik momentumlarının kanonik koordinatlardan bağımsız olduklarına dikkat ederek, (III.2.2) Hamilton fonksiyonunun  $t$  ve  $\varphi$  'den bağımsız olduğu görülmektedir. Buna göre

$$\dot{p}_t = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \dot{p}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0$$

Hamilton denklemleri dolayısıyla  $p_t$  ve  $p_\varphi$  birer hareket sabitidirler.

(III.2.1) metriği, Schwarzschild metriğinde olduğu gibi, karadeliğten çok uzakta gene

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Minkowski metriğine indirgenmekte olduğundan,  $p_t$  ve  $p_\varphi$  hareket sabitleri,  $E$  taneciğin sonsuzdaki enerjisi ve  $L_z$  de açılal momentumunun karadeliğin ekseni doğrultusundaki bileşeni olmak üzere §(III.1) 'de göstermiş olduğumuz gibi

$$p_t = -E$$

(III.2.3)

$$p_\varphi = L_z$$

dir. Ayrıca momentum dörtlü vektörünün normunun karesi

$$\left| \vec{p} \right|^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -\mu^2 \quad (\text{III.2.4})$$

olup bir hareket sabitidir.

(III.2.2) Hamilton fonksiyonu yardımıyla,  $p^\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$  olduğuna da dikkat ederek,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

şeklinde düzenlenen Hamilton-Jacobi denkleminde yer alan, metriğin  $g^{\alpha\beta}$  kontravaryant bileşenlerinin (III.2.1) 'den hareketle

$$g^{tt} = -\frac{1}{\Delta} \left[ (r^2 + a^2) + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right]$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2} \quad (\text{III.2.6})$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right)$$

$$g^{t\varphi} = g^{\varphi t} = -\frac{2Mr a}{\Delta \rho^2}$$

şeklinde olacakları kolayca hesaplanır.  $g^{\alpha\beta}$  'ların bu ifâdeleri (III.2.5) 'e taşınacak olursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{1}{2\Delta} \left[ (r^2 + a^2) + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{2Mra}{\Delta \rho^2} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \\ + \frac{1}{2\rho^2} \Delta \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2\Delta \sin^2 \theta} \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin daha tıktız bir biçimde,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\Delta \rho^2} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right]^2 + \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial S}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 \\ + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.2.7})$$

olarak düzenlenebileceği kolaylıkla doğrulanabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan bu denklem, Hamilton-Jacobi denklemine özgü, §(II.1) 'de göstermiş olduğumuz,

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (\text{III.2.8})$$

şeklindeki ayrışım göz önünde bulundurularak, değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözülebilecektir.

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\mathcal{H} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} \mu^2$$

olduğundan

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = \frac{1}{2} \mu^2$$

ve



$$\bar{S}(\lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda$$

dir. Öte yandan (III.2.3) göz önünde bulundurularak,

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = -E$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = L_z$$

ve

$$S_0(t) = -Et \quad (\text{III.2.10})$$

$$S_3(\varphi) = L_z \varphi \quad (\text{III.2.11})$$

olacağından, (III.2.9-11) ifâdeleri (III.2.8) 'de yerine konacak olursa eylem fonksiyonu,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (\text{III.2.12})$$

olarak bulunur. Bu ifâde (III.2.7) denklemine taşınacak olursa

$$-\mu^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Delta} [aL_z - E(r^2 + a^2)]^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 + \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

denklemini elde edilir. Bu denklem de

$$P \equiv E(r^2 + a^2) - aL_z \quad (\text{III.2.13})$$

koyarak ayrıştırılacak olursa

$$-\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} + 2aEL_z - \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \mu^2 a^2 \cos^2 \theta + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2 E^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

bulunur. Derli toplu bir biçimde yazabilmek üzere bu eşitliğin her iki yanına  $-L_z^2 - a^2 E^2$  ifadesi eklenerek ve  $K$  ile de ayrışım sâbiti gösterilmek üzere,

$$\begin{aligned} -\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} - L_z^2 - a^2 E^2 + 2aEL_z - \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 \\ = \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\Delta^2 \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = P^2 - \Delta \left[ \mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + K \right] \equiv R(r) \quad (\text{III.2.14})$$

ve

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K - \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \equiv \Theta(\theta) \quad (\text{III.2.15})$$

olarak

$$S_1(r) = \int^r \Delta^{-1} \sqrt{R} dr \quad (\text{III.2.16})$$

$$S_2(\theta) = \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta \quad (\text{III.2.17})$$

bulunur. Bu ifâdeler (III.2.12) 'de yerine konarak  $S$  eylem fonksiyonu,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + \int^r \Delta^{-1} \sqrt{R} dr + \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta \quad (\text{III.2.18})$$

olur.

Buna göre kanonik momentumların bir arada,

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = L_z$$

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\Theta}$$

olacağı anlaşılmaktadır. Şimdi, (III.2.3-4) hareket sâbitlerinin yanı sıra dördüncü hareket sâbitinin, (III.2.14) 'de yer alan,  $K + (L_z - aE)^2 \equiv \alpha_0$  olarak seçilmesinin, biraz ilerde göreceğimiz gibi  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_0} = 0$  hareket denklemini çok sade ve simetrik bir biçimde ifade etme

olanağı sağladığı için uygun olacağı görülmektedir [16]. Buna göre (III.2.18) 'in içerdiği hareket sâbitleri sırasıyla,

$$\alpha_0 \equiv K + (L_z - aE)^2, \quad \alpha_1 \equiv \mu^2, \quad \alpha_2 \equiv E, \quad \alpha_3 \equiv L_z$$

olup,  $\frac{\partial S}{\partial \alpha_0}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \mu^2}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial E}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial L_z}$  ifadelerini sıfıra eşitlemek suretiyle bunlara karşılık gelen

hareket denklemleri sırasıyla

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}$$

$$\lambda = \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} + \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta$$

$$t = \int^r \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta\sqrt{R}} dr + \int^\theta \frac{-a(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sqrt{\Theta}} d\theta$$

$$\varphi = \int^r \frac{aP}{\Delta\sqrt{R}} dr + \int^\theta \frac{-(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}} d\theta$$

olarak elde edilirler. Bu denklemlerin birincisi ve ikincisi  $\lambda$  'ya göre türetilirse,

$$\frac{dr}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.2.19})$$

$$1 = \frac{dr}{d\lambda} \frac{r^2}{\sqrt{R}} + \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.2.20})$$

olacağından, (III.2.19) ifâdesi (III.2.20) 'de yerine konarak,

$$1 = \frac{dr}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{R}} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \quad (\text{III.2.21})$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer hareket denklemlerinden elde edilenlerle birlikte, (III.2.21), bir arada,

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (\text{III.2.22})$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (\text{III.2.23})$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{aP}{\Delta} - \left( aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right) \quad (\text{III.2.24})$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} P - a(aE \sin^2 \theta - L_z) \quad (\text{III.2.25})$$

hareket denklemlerinin ilk integrallerini oluştururlar. (III.2.22-25) denklemlerinin kesin çözümleri bulunamamakla birlikte, bu denklemlerden hareketle bağlı yörüngeler ve bu yörüngelerin bütün özellikleri D.C.Wilkins tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir [17]. (III.2.23) kareye kaldırılır da (III.2.15) göz önünde tutulacak olursa

$$\rho^4 \dot{\theta}^2 = \Theta = K - \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (\text{III.2.26})$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanının telkin ettiği gibi  $\Theta$ ,  $\theta$ 'nın değişimi yönündeki hareketin efektif potansiyelini temsil etmektedir. Buna göre,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzleminde başlayan bir hareket için  $\dot{\theta} = 0$  ve (III.2.26) dolayısıyla  $\Theta = 0$  ve bunun sonucu olarak  $K = 0$ 'dır. Böylece hareketin daha sonraki evreleri için

$$\Theta = -\cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (\text{III.2.27})$$

olacağından ve bu bağıntı  $\theta = \frac{\pi}{2}$  dışında bir değer için sağlanmadığından  $\theta$  için tek bir dönüm noktası bulunacağı, yani hareketin ekvator düzlemi ile sınırlı kalacağı anlaşılır. Buna karşılık  $K > 0$  olduğu haller için (III.2.26) ifâdesi aracılığıyla  $\theta$ 'nın değişimi yönündeki hareketin dönüm noktaları belirlenebilir.

$$\sin \theta = x$$

koyarak düzenlenecek olursa,

$$\alpha^2 \equiv a^2(\mu^2 - E^2)$$

$$2\beta \equiv L_z^2 + K - \alpha^2$$

olmak üzere

$$\alpha^2 x^4 + 2\beta x^2 - L_z^2 = 0$$

ve bu eşitlikte de  $x^2 \equiv u$  alarak

$$\alpha^2 u^2 + 2\beta u - L_z^2 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin reel kökleri  $\gamma_{\pm}$  ile gösterilerek,

$$\sin \theta_{\pm} = \gamma_{\pm}$$

ve

$$\theta_{\pm} = \arcsin \gamma_{\pm}$$

bulunur ki bu da hareketin taneciğinin açıl momentumu ve enerjisine bağlı olarak, ekvator düzlemi dışında bir maksimum  $\theta$  değeriyle sınırlanmakta olduğunu gösterir. Newtonsal hâlde olduğu gibi, gerek Schwarzschild gerekse Reissner-Nordstrom hâlinde test taneciğinin hareketinin bir düzlem hareket olmasına karşılık, Kerr (ve Kerr-Newman) hâlinde taneciğinin yörünge düzleminin (III.2.26) 'yı sağlayan  $\theta_+$  ve  $\theta_-$  gibi iki dönüm noktası arasında fazladan bir salınım yapacağı yani hareketin artık bir düzlem hareket olmayacağı anlaşılır. Bu salınım hareketine Wilkins Olayı [17,18] denilmektedir. Öte yandan, biraz ilerde ele alacağımız gibi,  $K > 0$  halinde yörünge düzleminin karadeliğinin ekseninden geçtiği hale ulaşması ise ancak  $L_z = 0$  ve  $K \geq -a^2(\mu^2 - E^2)$  olması halinde mümkün olabilecektir.

Daha önce §(III.1) 'de belirtmiş olduğumuz gibi tezimizde taneciğin enerjisi ve açısal momentumunun kesin çözümlerinin bulunabildiği, ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeleri ele almakta olduğumuzdan, Kerr karadeliği için de bu durumu incelemek istiyoruz. Fakat önce taneciğin açısal momentumunun z-bileşeninin sıfır olduğu, karadeliğin ekseninden geçen dairesel yörüngelerin mümkün olduğunu gösterip, özelliklerini inceleyecek ardından da ekvator düzlemindeki hareketi ele alacağız.

---

### (III.3) KERR KARADELİĞİNİN EKSENİNDEN GEÇEN DAİRESEL YÖRÜNGELER

Bu halde (III.2.22) 'den, karadeliğin eksenini üzerinde, yani  $\theta = 0$  ve  $\theta = \pi$  'de  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\lambda}$  'nin reel olabilmesi için  $\Theta$  'nın bu eksen üzerinde pozitif olması gerektiği görülmektedir. Öte yandan, hareket düzlemine daima dik olan taneciğin açıl momentumunun z-bileşeni bu halde sıfır olacağından,  $\mu^2 - E^2$  'nin negatif olduğuna da dikkat ederek, (III.2.25) 'den  $K$  ayrışım sâbitinin,

$$K > -a^2(\mu^2 - E^2)$$

olması gerektiği görülür. Şimdi, (III.2.22) denklemini kareye kaldırılır da (III.2.13) ve (III.2.14) yardımıyla düzenlenecek olursa,  $T$  ile

$$T \equiv K - a^2(\mu^2 - E^2) > 0$$

şeklinde pozitif bir büyüklük gösterilmek üzere,

$$\rho^4 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 \equiv R = E^2(r^2 + a^2)^2 - \Delta[\mu^2(r^2 + a^2) + T] \quad (III.3.1)$$

olur. Bu ifâdenin sağ yanının telkin ettiği gibi,  $R = R(r, E)$  'nin hareketin efektif potansiyelini temsil etmekte olduğu anlaşılmaktadır. Buna göre  $\frac{dr}{d\lambda} = 0$  olduğu dönüm noktalarında  $R = 0$  ve dairesel yörüngeler için de  $\frac{dR}{dr} = 0$  olduğu [10,12,13] göz önünde bulundurularak (III.3.1)

$$R \equiv E^2(r^2 + a^2)^2 - \Delta[\mu^2(r^2 + a^2) + T] = 0 \quad (III.3.2)$$

$$\frac{dR}{dr} \equiv 4r(r^2 + a^2)E^2 - 2(r - m)[\mu^2(r^2 + a^2) + T] - 2\mu^2\Delta r = 0 \quad (III.3.3)$$



olur. (III.3.3) denklemini sadeleştirilerek,

$$2r(r^2 + a^2)E^2 - (r - m)[\mu^2(r^2 + a^2) + T] - \mu^2\Delta r = 0 \quad (\text{III.3.4})$$

şekline getirilir. (III.3.2) 'den  $E^2$ ,

$$E^2 = \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} [\mu^2(r^2 + a^2) + T] \quad (\text{III.3.5})$$

şeklinde çekilir de (III.3.4) 'de yerine konacak olursa  $T$ ,

$$T = \frac{\mu^2 [(r - m)(r^2 + a^2)^2 - r\Delta(r^2 + a^2)]}{2\Delta r - (r - m)(r^2 + a^2)} \quad (\text{III.3.6})$$

şeklinde bulunur.  $T$  'nin bu ifâdesi (III.3.5) 'e taşınırsa, basit düzenlemelerden sonra, taneciğin bu türlü yörüngelerde sahip olacağı enerjisi,

$$E^2 = \frac{\mu^2\Delta^2 r}{(r^2 + a^2) [2\Delta r - (r - m)(r^2 + a^2)]}$$

ve  $\Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr$  ifâdesi yerine konarak,

$$E^2 = \frac{\mu^2\Delta^2 r}{(r^2 + a^2) [r^3 - 3Mr^2 + a^2 r + a^2 M]} \quad (\text{III.3.7})$$

şeklinde elde edilir. Çok büyük  $r$  değerleri için  $E$  'nin ifâdesi seriye açılır da  $\frac{1}{r}$  'den daha

büyük terimler ihmal edilecek olursa dairesel yörüngeler için bağ enerjisine karşılık

$$E \cong \mu \left( 1 - \frac{M}{2r} + \dots \right)$$

ifâdesinin elde edileceği görülür. (III.3.7),  $\mu^2$  ile bölünecek olursa, birim kütle başına tanecik enerjisi de

$$\frac{E^2}{\mu^2} \equiv \tilde{E}^2 = \frac{\Delta^2 r}{(r^2 + a^2)(r^3 - 3Mr^2 + a^2 r + a^2 M)}$$

olur. (III.3.8) 'in payı pozitif olup paydasının sıfır olması halinde  $E$  'nin sonsuza gideceği yâni,  $v \rightarrow 1$  ( $v = c$ ) olacağı, dolayısıyla maddesel tanecikler için bir çözümden söz edilemeyeceği görülür. Buna göre (III.3.8) 'in paydasını sıfır yapan  $r$  değeri ancak dairesel foton yörüngelerine karşılık gelecek ve maddesel taneciklerin dairesel yörüngeleri için bir sınır oluşturacaktır. Yani maddesel tanecikler için (III.3.8) 'den çekilen

$$r^3 - 3Mr^2 + a^2 r + a^2 M = 0$$

denklemini ile belirlenen  $r$  yarıçapına kadar dairesel yörüngeler mümkün olabilecektir. Bu denklemin reel kökü, üçüncü dereceden denklemin köklerine ilişkin formül aracılığıyla, uzun fakat basit hesaplardan sonra

$$r = M \left[ 1 + \frac{2 \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{3^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{a^2}{M^2} \right)}{\left( 3 - \frac{a^2}{M^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \right] \quad (\text{III.3.9})$$

olarak elde edilir [19]. (III.3.9) 'dan,  $a = 0$  olduğu, Schwarzschild halinde  $r = 3M$  ve uç Kerr hâli diye adlandırılmakta olan  $a = M$  olduğu hâlde de  $r = (1 + \sqrt{2})M$  olacağı görülmektedir.

### (III.4) KERR KARADELİĞİ İÇİN EKVATOR DÜZLEMİNDEKİ DAİRESEL YÖRÜNGELER

Bu paragrafta (III.2.22-25) denklemlerinin mümkün kıldığı, ekvator düzlemindeki ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemi) dairesel yörüngeleri belirleyip [20] bu yörüngelerde taneciğin sahip olacağı enerjisi ve momentumunun ne olacağını saptamaya çalışacağız. Ekvator düzlemindeki harekette taneciğin açısal momentumu zaten z-ekseni doğrultusunda bulunduğundan bu hâlde  $L_z = L$  olduğuna dikkat edilmelidir. Öte yandan (III.2.26) 'dan görüldüğü gibi  $\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemindeki (ve hep bu düzlemde kalacak olan) harekette  $\dot{\theta} = 0$  ve  $\Theta = 0$  olup dolayısıyla  $K$  ayrışım sabiti sıfırdır. Buna göre hareket  $P$  ve  $R$  'nin sırasıyla (III.2.13) ve (III.2.14) ile verilen ifadeleri de göz önünde bulundurularak (III.2.22) ve (III.2.24) eşitliklerinden elde edilen

$$r^4 \dot{r}^2 \equiv R = E^2(r^4 + a^4 + 2a^2 r^2) + a^2 L^2 - 2aEL(r^2 + a^2) - \Delta \mu^2 r^2 - (r^2 + a^2 - 2Mr)(L - aE)^2 \quad (\text{III.4.1})$$

$$\dot{\phi} = \frac{(r - 2M)L + 2MaE}{r\Delta} \quad (\text{III.4.2})$$

denklemleriyle tasvir olunacaktır. (III.4.1) denklemi  $r^2$  ile bölünür de düzenlenecek olursa,

$$r^2 \dot{r}^2 = E^2 r^2 - \mu^2 \Delta + \frac{2M}{r} (L - aE)^2 - (L^2 - a^2 E^2) \quad (\text{III.4.3})$$

olur. Bu denklem  $u = \frac{1}{r}$  şeklindeki değişken dönüşümüyle, bu hâlde,

$$\dot{r} = -r^2 \dot{u} = -u^{-2} \dot{u}$$

olacağına da dikkat ederek,

$$u^{-6}\dot{u}^2 = -\mu^2\Delta + \frac{E^2}{u^2} + 2Mu(L - aE)^2 - (L^2 - a^2E^2)$$

şekline gelir. Bu denklem  $u^2$  ile çarpılır ve

$$u^2\Delta = a^2u^2 - 2Mu + 1$$

ifadesi de yerine konacak olursa buradan da

$$u^{-4}\dot{u}^2 = -\mu^2(a^2u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2M(L - aE)^2u^3 - (L^2 - a^2E^2)u^2$$

denklemini elde edilir. Şimdi,

$$x \equiv L - aE$$

koyup [21], radyal doğrultudaki hareketin efektif potansiyelini temsil eden, (III.4.4) denkleminin sol yanını ve bunun  $u$  'ya göre türevini sıfıra eşitlemek suretiyle dairesel yörüngelere karşılık gelen dönüm noktalarını belirlemek istiyoruz. Buna göre iki temel denkleminiz;

$$-\mu^2(a^2u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2Mx^2u^3 - (x^2 + 2aEx)u^2 = 0 \quad (\text{III.4.5})$$

$$-\mu^2(a^2u - M) + 3Mx^2u^2 - (x^2 + 2aEx)u = 0 \quad (\text{III.4.6})$$

olur. (III.4.6) 'dan,

$$(x^2 + 2aEx)u = -\mu^2(a^2u - M) + 3Mx^2u^2 \quad (\text{III.4.7})$$

çekilir de (III.4.5) 'de yerine konursa,

$$E^2 = \mu^2(1 - Mu) + Mx^2u^3 \quad (\text{III.4.8})$$

bulunur. Ayrıca (III.4.7) 'den

$$2aExu = x^2(3Mu-1)u - \mu^2(a^2u - M) \quad (\text{III.4.9})$$

olduğu görülmektedir. Şimdi, (III.4.8) ve (III.4.9) arasında  $E$  elenecek olursa,

$$\begin{aligned} x^4u^2[(3Mu-1)^2 - 4a^2Mu^3] - 2\mu^2x^2u[(3Mu-1)(a^2u - M) - 2a^2u(Mu-1)] \\ + \mu^4(a^2u - M)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4.10})$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$x^2u \equiv \xi$$

alacak olursak,

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv (3Mu-1)^2 - 4a^2Mu^3 \\ \beta &\equiv -2\mu^2[(3Mu-1)(a^2u - M) - 2a^2u(Mu-1)] \\ \gamma &\equiv \mu^4(a^2u - M)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.4.11})$$

olmak üzere denklem,

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0$$

şeklinde sadeleştirilmiş olur. Şimdi, bu denklemin, dolayısıyla (III.4.10) denklemin köklerini belirlemek istiyoruz. Bunun için (III.4.11) 'den elde edilen,

$$\beta^2 = 4\mu^4[(3Mu-1)^2(a^2u - M)^2 + 4a^4u^2(Mu-1)^2 - 4a^2u(Mu-1)(3Mu-1)(a^2u - M)]$$

ve

$$-4\alpha\gamma = -4\mu^4(a^2u - M)^2[(3Mu - 1)^2 - 4a^2Mu^3]$$

ifâdeleri, diskriminantla orantılı  $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4}$  ifâdesinde yerine konarak, oldukça uzun hesaplardan sonra,

$$\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4} = 4\mu^4 a^2 M u (a^2 u^2 - 2M u + 1)^2$$

bulunur. Burada sadeliği sağlamak üzere,

$$\Delta_u \equiv (a^2 u^2 - 2M u + 1) \quad (\text{III.4.12})$$

alırsak,

$$\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4} = 4\mu^4 a^2 M u \Delta_u^2 \quad (\text{III.4.13})$$

ifâdesi yardımıyla (III.4.10) denkleminin kökleri

$$x^2 u \equiv \xi = \frac{-\beta \pm 4\mu^2 a \Delta_u \sqrt{Mu}}{2\alpha}$$

olur. Bu ifâde  $u$  ile çarpılır ve  $\beta$ 'nin (III.4.11) ile verilen değeri de yerine konursa,  $T$  ile

$$T = Ma^2 u^3 + a^2 u^2 - 3M^2 u^2 + M u \pm 2a \Delta_u \sqrt{Mu^3} \quad (\text{III.4.14})$$

gösterilmek üzere,

$$x^2 u^2 = \frac{\mu^2 T}{\alpha} \quad (\text{III.4.15})$$

olur. Şimdi de  $Q_{\pm}$  ile

$$Q_{\pm} = (1 - 3Mu) \pm 2a\sqrt{Mu^3} \quad (\text{III.4.16})$$

gösterilerek, yâni

$$\pm 2a\sqrt{Mu^3} = Q_{\pm} - (1 - 3Mu)$$

olarak  $T$ 'nin (III.4.14) ile verilen ifâdesi,

$$T = 4Ma^2u^3 - 9M^2u^2 + 6Mu - 1 + \Delta_u Q_{\pm} = 4Ma^2u^3 - (3Mu - 1)^2 + \Delta_u Q_{\pm}$$

olur. (III.4.11) eşitliklerinin ilki dolayısıyla bu da

$$T = \Delta_u Q_{\pm} - \alpha$$

olup (III.4.16) 'dan da görüleceği üzere  $\alpha$  'nın,

$$\alpha = (3Mu - 1)^2 - 4a^2Mu^3 = Q_+Q_- \quad (\text{III.4.17})$$

şeklinde yazılabileceğine dikkat ederek,

$$T = \Delta_u Q_{\pm} - Q_+Q_- \quad (\text{III.4.18})$$

olarak düzenlenir. Dolayısıyla (III.4.18) ifadesi (III.4.15) 'e taşınmak suretiyle

$$x^2u^2 = \mu^2 \left[ \frac{\Delta_u Q_{\pm} - Q_+Q_-}{Q_+Q_-} \right]$$

ya da sonuç olarak

$$x^2 u^2 = \frac{\mu^2 (\Delta_u - Q_{\mp})}{Q_{\mp}} \quad (\text{III.4.19})$$

olacaktır. Şimdi, (III.4.12) ve (III.4.16) göz önünde bulundurularak (III.4.19) 'un payı

$$\Delta_u - Q_{\mp} = u (a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2$$

şeklinde açıkça yazılacak olursa (III.4.19) 'dan

$$x^2 = \frac{\mu^2 (a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2}{u Q_{\mp}} \quad (\text{III.4.20})$$

ve dolayısıyla  $x$ ,

$$x = -\frac{\mu (a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})}{\sqrt{u} Q_{\mp}} \quad (\text{III.4.21})$$

basit şekline gelir. (III.4.20) 'den  $x^2 u$  ifadesi çekilir de (III.4.8) 'e yerleştirildikten sonra bulunan eşitlik düzenlenecek olursa,

$$E^2 = \frac{\mu^2}{Q_{\mp}} \left( 1 + 4Mu^2 - 4Mu + Ma^2 u^3 \pm 4aMu\sqrt{Mu^3} \mp 2a\sqrt{Mu^3} \right)$$

bulunur. Ancak sağ yan düzenlenerek buradan da,

$$E^2 = \frac{\mu^2}{Q_{\mp}} \left[ (1 - 2Mu) \mp a\sqrt{Mu^3} \right]^2 \quad (\text{III.4.22})$$

olacağı kolaylıkla doğrulanabilir. Nihayet, (III.4.22) 'den,

$$E = \frac{\mu}{\sqrt{Q_{\mp}}} \left[ (1 - 2Mu) \mp a\sqrt{Mu^3} \right] \quad (\text{III.4.23})$$



elde edilir.  $x = L - aE$  almış olduğumuz anımsanarak (III.4.21) ve (III.4.23) yardımıyla

$$L = aE + x = \frac{\mu}{\sqrt{Q_{\mp}}} \left( a - 2M a u \mp a^2 \sqrt{Mu^3} \right) - \frac{\mu}{\sqrt{uQ_{\mp}}} \left( a\sqrt{u} \pm \sqrt{M} \right)$$

ve bu da düzenlenerek taneciğin açısal momentumu

$$L = \mp \mu \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{uQ_{\mp}}} \left( a^2 u^2 + 1 \pm 2a\sqrt{Mu^3} \right) \quad (\text{III.4.24})$$

şeklinde elde edilir. (III.4.23) ve (III.4.24) ifadeleri,  $u = \frac{1}{r}$  olduğu hatırlanarak ve  $Q_{\mp}$  'nın (III.4.16) ile verilen değeri yerine konur da  $\mu$  ile bölünecek olursa, taneciğin birim kütle başına enerjisi ve birim kütle başına açısal momentumu,

$$\frac{E}{\mu} \equiv \tilde{E} = \frac{r^2 - 2Mr \mp a\sqrt{Mr}}{r \left( r^2 - 3Mr \mp 2a\sqrt{Mr} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.4.25})$$

$$\frac{L}{\mu} \equiv \tilde{L} = \mp \frac{\sqrt{Mr} \left( r^2 \pm 2a\sqrt{Mr} + a^2 \right)}{r \left( r^2 - 3Mr \mp 2a\sqrt{Mr} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.4.26})$$

şeklinde elde edilirler. (III.4.25-26) 'daki alt işaret, taneciğin yörünge açısal momentumunun karadelğin spin açısal momentumuyla aynı yönde olduğu yani taneciğin ve karadelğin dönme yönlerinin aynı olduğu eşdönme yörüngelerine, üst işaret ise zıtdönme yörüngelerine karşılık düşmektedir.

(III.4.25) 'in paydasını sıfır yapan  $r$  değerinin maddesel tanecikler için mümkün olmayan foton yörüngesine karşı düşmekte olduğunu ve bu yarıçap değerine kadar olan dairesel yörüngelerin maddesel tanecikler için mümkün olduğunu görmüştük. Buna göre (III.4.25) 'in paydasını sıfıra eşitleyerek,

$$r^2 - 3Mr \mp 2a\sqrt{Mr} = 0$$

denklemini  $r^{1/2} \equiv u$  dönüşümüyle,

$$u^3 - 3Mu \mp 2a\sqrt{M} = 0$$

kübik denklemi elde edilir. Üçüncü dereceden cebirsel denklemin köklerine ilişkin formül göz önünde bulundurularak,  $r_f$  ile göstereceğimiz, foton yörüngesinin yarıçapının,

$$r_f = 2M \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2}{3} \arccos \left( \pm \frac{a}{M} \right) \right] \right\} \quad (\text{III.4.27})$$

ile verileceği [22] ve buradan da  $a=0$  olduğu, Schwarzschild karadeliği için  $r=3M$  ve  $a=M$  olduğu uç Kerr karadeliği için de,  $r_f=M$  (eşyönlü dönme halinde) ve  $r_f=4M$  (zıt yönlü dönme halinde) olacağı görülür.

Radyal hareketin efektif potansiyelinin  $R=R(r, E, L)$  ile temsil edilmekte olduğunu görmüştük. (III.4.5) ve (III.4.6) denklemleri aslında  $u$  cinsinden  $R=0$  ve  $\frac{dR}{dr}=0$

denklemlerine karşılık düşmektedir. Bilindiği gibi  $\frac{d^2R}{dr^2}$  'nin negatif ya da pozitif olması da sırasıyla kararlı ve kararsız yörüngeleri belirlemekte idi.  $u$  cinsinden yazdığımız (III.4.6) denklemi  $u$  'ya göre bir kez daha türetilir de  $x$  'in (III.4.21) ile verilen ifadesi yerine konarak düzenlenirse (ya da eşdeğer bir biçimde (III.4.1) 'in  $r$  'ye göre ikinci türevi (III.4.26) 'dan  $L$  yerine konacak olursa) kararlı dairesel yörüngeler için,

$$1 - \tilde{E}^2 \geq \frac{2}{3} \frac{M}{r} \quad (\text{III.4.28})$$

elde edilir. (III.4.25) ile verilen  $\tilde{E}$  yerine konacak olursa (III.4.28) 'deki eşitlik haline karşılık düşen,  $r^{1/2}$  'ye göre dördüncü dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünün,  $Z_1$  ve  $Z_2$

$$Z_1 \equiv 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right)^{1/3} \left[ \left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/3} \right]$$

$$Z_2 \equiv \left(3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2\right)^{1/2}$$

olmak üzere ve  $r_{uk}$  ile uç kararlı dairesel yörüngenin yarıçapı gösterilmek üzere,

$$r_{uk} = M \left\{ 3 + Z_2 \pm [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right\} \quad (\text{III.4.29})$$

şeklinde olduğu gösterilir [22]. (III.4.29) kararlı dairesel yörüngelerin alt sınırını oluşturmakta olup bu yarıçapın üzerindeki  $r$  değerleri kararlı yörüngelere karşılık düşerler. Dolayısıyla,

$$r_f < r \leq r_{ku} \quad (\text{III.4.31})$$

aralığındaki yarıçaplar kararsız dairesel yörüngelerin,

$$r_{uk} < r < \infty \quad (\text{III.4.31})$$

aralığındaki yarıçaplar kararlı dairesel yörüngelerin yarıçaplarını temsil ederler. (III.4.29) 'dan  $a = 0$  olduğu Schwarzschild halinde  $r_{uk} = 6M$  ve  $a = M$  olduğu uç Kerr halinde ise;  $r_{uk} = M$  (eşdönme halinde) ve  $r_{uk} = 9M$  (zıt dönme halinde) olacağı görülmektedir. (III.4.30) ile kararsız dairesel yörüngelerin yarıçaplarının  $r_f$  'den büyük olduğu ifade edilmektedir. Aslında kararsız dairesel yörüngelerin alt sınırının kesin değeri de belirlenebilecektir. (III.4.25) 'de,  $\tilde{E} = 1$  (yani  $E = \mu$  olduğu,  $\mu - E$  bağ enerjisinin sıfır olduğu hâl) konacak olursa, uç bağlı yörüngenin yarıçapı kolayca,

$$r_{ub} = 2M \mp a + 2M^{1/2}(M \mp a)^{1/2} \quad (\text{III.4.32})$$

şeklinde bulunur [23]. Bu değer, (III.2.22-25) denklemleriyle tasvir olunan mümkün yörüngelerden parabolik olanlarının perihellerinin minimumuna karşılık düşmektedir. Görüldüğü gibi  $a = 0$  halinde uç bağlı yörüngenin yarıçapı  $r_{ub} = 6M$ ,  $a = M$  halinde ise; eşyönlü dönmede  $r_{ub} = M$ , zıtyönlü dönmede  $r_{ub} = 9M$  olmaktadır. Dolayısıyla dönen, Kerr karadeligi için, eşyönlü dönmede kararlı dairesel yörüngelerin alt sınırı aynı zamanda, uç bağlı yörüngenin yarıçapı demek olduğundan tanecik bunlardan küçük bir yarıçapa sahip olamayacaktır. Zıt yönlü dönmede ise; kararsız yörüngelerin yarıçaplarının

$$5,83M < r < 9M$$

aralığında, kararlı dairesel yörüngelerin yarıçaplarının da

$$9M \leq r < \infty$$

aralığında olabileceği anlaşılır. Tablo (III.1) 'de bu değerler topluca verilmiş bulunmaktadır.

	$a = 0$	$a = M$	
		<i>eşyönlü dönme</i>	<i>zıt yönlü dönme</i>
$r_f$	$3M$	$M$	$4M$
$r_{uk}$	$6M$	$M$	$9M$
$r_{ub}$	$4M$	$M$	$(3 + 2\sqrt{2}) M$

**Tablo (III-1)**

Uç kararlı dairesel yörüngenin (III.4.29) ile verilen değeri, bir karadeligin yığılma diskinin enerji kaynağı olarak sahip olduğu potansiyel verimini belirlemesi açısından büyük bir önem taşımakta olup söz konusu enerji uç kararlı dairesel yörüngenin bağ enerjisi ile temsil olunur. Şimdi eğer (III.4.28) ifadesi (III.4.25) 'e taşınarak  $r$  elenecek olursa,

$$\frac{a}{M} = \mp \frac{4\sqrt{2}(1 - \tilde{E}^2)^{\frac{1}{2}} - 2\tilde{E}}{3\sqrt{3}(1 - \tilde{E}^2)} \quad (\text{III.4.33})$$

bulunur. Buna göre  $\tilde{E}$  'nın,  $a = 0$  için aldığı  $\sqrt{\frac{8}{9}}$  değerinden,  $a = M$  için eşyönlü dönme halinde aldığı  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  değerine kadar azaldığı, buna karşılık, zıt yönlü dönme halinde aldığı  $\sqrt{\frac{25}{27}}$  değerine kadar arttığı anlaşılmaktadır. Böylece dönen Kerr karadeliği için birim kütle başına maksimum bağ enerjisi (yani  $a = M$  uç Kerr karadeliği ve  $\tilde{E}$  'nın en küçük değeri için),

$$1 - \tilde{E} = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}} = \% 42,3$$

olarak bulunur. Bu miktardaki enerji, ekvator düzleminde, ardışık kararsız dairesel yörüngelerden spiraller çizerek karadeliğe düşen taneciklerin enerjilerinin serbest kalan kısmını oluşturmaktadır.

---

### (III.5) KERR-NEWMAN KARADELİĞİNİN ALANINDA YÜKLÜ BİR TEST TANECİĞİNİN HAREKET DENKLEMLERİ

Daha önce §(III.2) 'de Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin aksel simetrik, stasyoner hale karşılığın ve Kerr alanı diye bilinen çözümlünü ele almıştık. Bu kez yine bir karadeliğe evrimleşmiş, dönen, küresel fakat bir de sabit bir  $Q$  yüküne sahip bir kütle dağılımının dışındaki, aksel simetrik stasyoner alanda bulunan yüklü bir test taneciğinin hareketini ele alacağız. Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin bu hale karşılığın çözümlü, Kerr-Newman çözümlü [24] ve bu alanı yaratan karadeliklere de Kerr-Newman karadelikleri denilmekte olup  $M$  ile cismin kütlesi,  $a$  ile birim kütlesi başına açısal momentumu ve  $Q$  ile de karadeliğın yükü gösterilmek üzere,  $G = c = 1$  alındığında

$$m \equiv \frac{GM}{c^2} = M, \quad a = -\frac{S}{Mc} = -\frac{S}{M}$$

olduğunu da hatırlayarak, Boyer-Lindquist koordinatlarında [15] bu hâle karşılığın üç parametrelili metrik,  $\Delta$  ve  $\rho^2$  ile

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

gösterilerek,

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (\text{III.5.1})$$

şeklindedir [24]. Şimdi,  $\mu$  kütleli ve  $e$  yüküne sahip bir test taneciğinin (III.5.1) metriğiyle tasvir olunan bir karadeliğın alanındaki hareketini göz önüne alalım. Daha önce gördüğümüz gibi, karadeliğın yüksüz olması halinde tanecik, jeodezik ilkesi çerçevesi içinde, (dörtlü ivme vektörünün sıfır olduğu) bir jeodezik boyunca hareket etmektedir. Ancak dönen karadeliğın  $Q$  yükü bir elektromagnetik alan üretmekte olup bu alanda tanecik,  $F_{\mu\nu}$  ile  $A_\mu$  vektör potansiyeli cinsinden

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

ile verilen elektromagnetik alan tansörü gösterilmek üzere

$$\mu a^\nu = \mu \frac{du^\nu}{d\tau} = eF^{\nu\mu} u_\mu \quad (\text{III.5.2})$$

şeklindeki Lorentz kuvvetinin etkisinde bulunmaktadır [25].

$Q = 0$  olduğu Kerr halinde, (4-lü ivme vektörünün sıfır olduğu) jeodezik denklemlerinin,  $\mathcal{H}$  ile

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} p_\lambda p_\nu$$

şeklinde tanımlanmış süper Hamilton fonksiyonu gösterilerek

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp^\nu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\nu}$$

Hamilton denklemlerine eşdeğer olduğu, §(III.2) 'de gösterilmişti.

$Q \neq 0$  olduğu bu halde de, elektromagnetik alanda bulunan taneciğin genelleştirilmiş kanonik momentumu  $\pi_\mu$  ile gösterilmek üzere artık,

$$p_\mu = \pi_\mu - eA_\mu$$

olacağını göz önünde bulundurarak,

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu) \quad (\text{III.5.3})$$

genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonunun [10] temel oluşturduğu

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\alpha}, \quad \frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha} \quad (\text{III.5.4})$$

Hamilton denklemlerinin, (III.5.2) denklemlerine eşdeğer olduğu dolayısıyla, Kerr-Newman alanındaki yüklü bir test taneciğinin Hamilton fonksiyonunun gerçekten de (III.5.3) ile temsil edileceğini göstermek istiyoruz. (III.5.4) denklemlerinin ilkinin, (III.5.3) genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonu için

$$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \pi^\alpha - eA^\alpha$$

ya indirgenmekte olduğu kolayca görülür. Öte yandan bu halde

$$\pi_\alpha = p_\alpha + eA_\alpha$$

olduğundan (III.5.4) 'ün ikinci denkleminin sol yanını açılarak

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} + e \frac{dA_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

olur.  $p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\beta$  olduğundan, buradan,

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\beta} p^\beta) + e \frac{dA_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

dır.

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = p^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$$

olduğuna dikkat ederek,



$$p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + ep^\gamma A_{\alpha,\gamma} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

olur. Sağ yana gelince,  $\pi_\mu$  kanonik momentumlarının koordinatlardan bağımsız büyüklükler olmalarına karşılık artık  $p_\mu = \pi_\mu - eA_\mu$  'lerin  $A_\mu$  'ler dolayısıyla koordinatların fonksiyonu olduklarına da dikkat ederek eşitlik,

$$p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + ep^\gamma A_{\alpha,\gamma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} p_\mu p_\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} eA_{\mu,\alpha} p_\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} eA_{\nu,\alpha} p_\mu$$

olur. Sağ yandaki son iki terim birbirinin aynı olduğundan

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} + ep^\gamma A_{\alpha,\gamma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} g_{\mu\gamma} p^\gamma g_{\beta\nu} p^\beta + eg^{\mu\nu} A_{\mu,\alpha} p_\nu$$

ve ayrıca,

$$(g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma})_{,\alpha} = 0$$

dolayısıyla,

$$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} g_{\mu\gamma} = -g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma,\alpha}$$

olduğunu göz önünde bulundurarak, sağ yandaki ilk terimi yeniden yazarsak eşitlik,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} + ep^\gamma A_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\gamma,\alpha} g_{\beta\nu} p^\gamma p^\beta + eg^{\mu\nu} A_{\mu,\alpha} p_\nu$$

olur. Sağ yandaki ilk terimde  $g^{\mu\nu} g_{\beta\nu} = \delta^\mu_\beta$  ile değiştirilerek,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} + eA_{\alpha,\gamma} p^\gamma = \frac{1}{2} g_{\beta\gamma,\alpha} p^\gamma p^\beta + eg^{\mu\nu} A_{\mu,\alpha} p_\nu$$

olur. Sol yandaki ikinci terim

$$p^\gamma p^\beta g_{\alpha\beta,\gamma} = \left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma,\beta} \right) p^\gamma p^\beta$$

olduğundan, yerine yerleştirerek,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}) p^\gamma p^\beta = e [g^{\mu\nu} A_{\mu,\alpha} p_\nu - p^\gamma A_{\alpha,\gamma}]$$

dır. Bu da düzenlenerek,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dp^\beta}{d\lambda} + [\beta\gamma, \alpha] p^\gamma p^\beta = e (A_{\mu,\alpha} - A_{\alpha,\mu}) p^\mu$$

olur. Bu son eşitliğin her iki yanını  $g^{v\alpha}$  ile çarpılacak olursa,

$$\frac{dp^v}{d\lambda} + \Gamma^v_{\beta\gamma} p^\gamma p^\beta = e F^v_{\alpha\mu} g^{v\alpha} p^\mu = e F^v_{\mu} p^\mu = e F^v_{\mu} g^{\mu\alpha} p_\alpha = e F^{v\alpha} p_\alpha$$

ve sonuç olarak,

$$\frac{dp^v}{d\lambda} + \Gamma^v_{\beta\gamma} p^\gamma p^\beta = e F^{v\alpha} p_\alpha \quad (\text{III.5.5})$$

denklemini bulunmuş olur. Yukarıdaki denklem  $p^v \equiv \frac{dx^v}{d\lambda}$  yerine konarak,

$$\frac{d^2 x^v}{d\lambda^2} + \Gamma^v_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = e F^v_{\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (\text{III.5.6})$$

şeklinde de yazılabilir. Öte yandan Kerr-Newman karadeliğinin alanında bulunan bir taneciğin vektör potansiyelinin bileşenlerinin, Boyer-Lindquist koordinatlarında,

$$A_\alpha dx^\alpha = -\frac{Qr}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi) \quad (\text{III.5.7})$$

şeklinde olduğu gösterilir [16,20].  $a = 0$  olan, yani dönmeyen fakat küresel simetrik ve yüklü bir karadeliğin alanını tasvir eden Reissner-Nordstrom halinde de yüklü tanecik için (III.5.7),

$$A_\alpha dx^\alpha = -\frac{Q}{r} dt$$

ye indirgenir [26].  $a \neq 0$  halinde ise eylemsizlik sisteminin karadeliikle birlikte dönme hareketinden dolayı, elektrik alana ek olarak bir magnetik alan doğmaktadır. Her ne kadar (III.5.6) denklemleri hareketi tasvir etmekte iseler de, bu denklemler yardımıyla hareket sabitlerinin belirlenmesi olanaksız olup bunlar ancak (III.5.4) Hamilton denklemleri yardımıyla belirlenebilirler. Hamilton formalizminde, bilindiği gibi çevrimsel koordinatlara (Hamilton fonksiyonununun bağlı olmadığı değişkenler) karşılık gelen kanonik momentumlar birer hareket sabiti olmaktadır. Gerek uzayzaman geometrisinin gerekse elektromagnetik alanın aksenal simetrik ve stasyoner olması,  $A_\mu$  ve  $g^{\mu\nu}$  'lerin  $t$  ve  $\varphi$  'den bağımsız olmalarını sağlamaktadır. Dolayısıyla (III.5.3) genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonu  $t$  ve  $\varphi$  'den bağımsız olacağından (III.5.4) denklemlerinin ikincisi,

$$\frac{d\pi_t}{d\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{d\pi_\varphi}{d\lambda} = 0$$

yani  $\pi_t$  ve  $\pi_\varphi$  'nin birer hareket sabiti olmasını garanti eder.

Şimdi  $\pi_t = \text{sabit}$  ve  $\pi_\varphi = \text{sabit}$  olmasının ne anlama geldiğini göstermek istiyoruz. (III.5.1) metriği,

$$\mathcal{A} \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$$

olmak üzere kolayca,

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right] dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\rho^2} (2Mr - Q^2) dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi^2 \quad (\text{III.5.8})$$

şeklinde de düzenlenebilir. Karadelğin çok uzağında vektör potansiyeli de sıfıra gideceğinden (III.5.8) (ya da (III.5.1)) metriği,

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{III.5.9})$$

şeklindeki Minkowski metriğine indirgenir. Bu metriğin yazıldığı ortogonal sistemde taneciğin enerjisi, aynı sistemdeki momentum dörtlü vektörünün zaman bileşeni olduğundan  $\pi_t$  hareket sabiti de bu sistemde,

$$\pi_t = p_t = -p^t = -E$$

yani taneciğin sonsuzdaki enerjisi olacaktır. Öte yandan aynı sistemde,

$$\pi_\varphi = p_\varphi = g_{\varphi\varphi} p^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = L_z$$

olacağından  $\pi_\varphi$  hareket sabiti de taneciğin açısal momentumunun karadelğin eksenini doğrultusundaki bileşenine karşılıkacaktır. Dolayısıyla karadelik civarındaki bir harekette,

$$E = -\pi_t = -(p_t + eA_t) = \text{sabit} \quad (\text{III.5.10})$$

$$L_z = \pi_\varphi = (p_\varphi + eA_\varphi) = \text{sabit} \quad (\text{III.5.11})$$

birer hareket sabitidirler. Öte yandan,

$$\left| \vec{p} \right|^2 = p_\alpha p^\alpha = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{ds^2}{d\lambda^2} = \mu^2 \frac{ds^2}{d\tau^2} = -\mu^2 \quad (\text{III.5.12})$$

olduğundan, momentum dörtlü vektörünün normu da üçüncü bir hareket sabitidir. 4-boyutlu uzayzamanda taneciğin hareketinin tek bir biçimde belirlenebilmesi için dört hareket sabitine gereksinme olmasına karşılık açıkça görülen yalnızca üç hareket sabiti bulunmaktadır. Biraz ilerde, göz önüne alacağımız yöntemde, Hamilton-Jacobi denkleminin ayrıştırılması sırasında ortaya çıkan, ayrışım sabiti ile bağlantılı olarak dördüncü bir hareket sabitinin nasıl olması gerektiğini göreceğiz [16].

Taneciğin hareket denklemleri olan (III.5.6) Lorentz kuvveti denklemleri, Hamilton denklemlerinden hareketle elde edilebileceği gibi, (III.5.3) genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonu aracılığıyla düzenlenmiş

$$S = \int \left( \pi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} - \mathcal{H} \right) d\lambda \quad (\text{III.5.13})$$

şeklindeki eylem fonksiyonunun yer aldığı  $\delta S = 0$  Hamilton ilkesinden hareketle de kolayca elde edilirler [12]. Taneciğin hareketini Hamilton-Jacobi formalizmi [10] ile incelerken, (III.5.3) genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonunu göz önünde bulundurup taneciğin hareket denklemlerini belirleyeceğiz.

Şimdi, (III.5.13) 'ün  $\lambda$  'ya göre tam türevi

$$\frac{dS}{d\lambda} = \pi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} - \mathcal{H}$$

ve

$$dS = \pi_\alpha dx^\alpha - \mathcal{H} d\lambda = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda$$

olduğundan

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, \quad \mathcal{H} \left( x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \right) = - \frac{\partial S}{\partial \lambda} \quad (\text{III.5.14})$$

dır. Kanonik momentumların birinci denklemle verilen ifâdesi yardımıyla ikinci denklem, bu halde genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonunun da artık

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\pi_\alpha - eA_\alpha)(\pi_\beta - eA_\beta) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - eA_\alpha \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - eA_\beta \right) \quad (\text{III.5.15})$$

şeklinde olacağına dikkat ederek düzenlenecek olursa Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - eA_\alpha \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - eA_\beta \right) = 0 \quad (\text{III.5.16})$$

olur. Bu ifadede yer alan, metrik tansörün sıfırdan farklı  $g^{\alpha\beta}$  kontravaryant bileşenlerinin

$$g^{tt} = -\frac{1}{\rho^2 \Delta} \left[ (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] = -\frac{\mathcal{A}}{\rho^2 \Delta} \quad (\text{III.5.17a})$$

$$g^{t\varphi} = \frac{a}{\Delta \rho^2} \left[ \Delta - (r^2 + a^2) \right] \quad (\text{III.5.17b})$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} \quad (\text{III.5.17c})$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2} \quad (\text{III.5.17d})$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (\text{III.5.17e})$$

olacağı, (III.5.1) 'den (ya da (III.5.8) 'den) hareketle uzunca fakat kolay hesaplardan sonra görülür. (III.5.7) 'den  $A_r = A_\theta = 0$  olacağı görülmektedir. Buna göre (III.5.16) denklemi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eA_t \right)^2 + g^{t\varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eA_t \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right) \\ + \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

olur. (III.5.17) ile verilen  $g^{\alpha\beta}$  'lar yukarıdaki denklemde yerine konacak olursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{\mathcal{A}}{2\rho^2\Delta} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eA_t \right)^2 + \frac{a}{\rho^2\Delta} [\Delta - (r^2 + a^2)] \left( \frac{\partial S}{\partial t} - eA_t \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right) \\ + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, (III.5.7) 'den

$$A_t = -\frac{Qr}{\rho^2}, \quad A_\varphi = \frac{Qr}{\rho^2} a \sin^2 \theta$$

olduğu da göz önünde bulundurularak denklem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{\mathcal{A}}{2\rho^2\Delta} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{eQr}{\rho^2} \right)^2 + \frac{2eQr}{\rho^2} \frac{\partial S}{\partial t} \right] \\ + \frac{a}{\rho^2\Delta} [\Delta - (r^2 + a^2)] \left[ \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \left( \frac{eQr}{\rho^2} \right)^2 a \sin^2 \theta - \frac{eQr}{\rho^2} \left( a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{2\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{eQr}{\rho^2} \right)^2 a^2 \sin^4 \theta - 2 \frac{eQr}{\rho^2} a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right] + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \\ + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{III.5.18}$$

olur. Bu denklem daha tıkmaz bir biçimde

$$-\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2\rho^2 \Delta} \left[ (r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi} + eQr \right]^2 + \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial S}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial S}{\partial t} \right]^2 + \frac{\Delta}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \quad (\text{III.5.19})$$

şeklinde de kolayca düzenlenebilir. Lineer olmayan bu denklemi, değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözmek üzere, bu hâle özgü,

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (\text{III.5.20})$$

ayrışımını göz önüne alalım. (III.5.20) ve (III.5.10-12) 'den sırasıyla,

$$\pi_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = -E \quad \longrightarrow \quad S_0(t) = -Et \quad (\text{III.5.21})$$

$$\pi_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = L_z \quad \longrightarrow \quad S_3(\varphi) = L_z \varphi \quad (\text{III.5.22})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = -\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mu^2 \quad \longrightarrow \quad \bar{S}(\lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{III.5.23})$$

olacağından, (III.5.21-23) ifadeleri (III.5.20) 'ye taşınarak,

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (\text{III.5.24})$$

bulunur. Bu son ifade aracılığıyla (III.5.19) denklemi açıkça yazılacak olursa,



$$-\mu^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Delta} [aL_z - (r^2 + a^2)E + eQr]^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} [L_z - aE \sin^2 \theta]^2 + \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

elde edilir. Bu denklem

$$P \equiv E(r^2 + a^2) - aL_z - eQr \quad (\text{III.5.25})$$

koyarak ayrıştırılacak olursa,

$$-\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} + 2aEL_z - \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \mu^2 a^2 \cos^2 \theta + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2 E^2 \sin^2 \theta + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2$$

ve bu eşitliği de daha derli toplu yazabilmek üzere her iki yanına  $-L_z^2 - a^2 E^2$  ifadesi eklenecek olursa,  $K$  ile ayrışım sabiti gösterilmek üzere,

$$-\mu^2 r^2 + \frac{P^2}{\Delta} - L_z^2 - a^2 E^2 + 2aEL_z - \Delta \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \cos^2 \theta \left[ a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] + \left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K \quad (\text{III.5.26})$$

olur. Buradan,

$$\Delta^2 \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = P^2 - \Delta [\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + K] \equiv R(r) \quad (\text{III.5.27})$$

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 = K - \cos^2 \theta \left[ a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \equiv \Theta(\theta) \quad (\text{III.5.28})$$

koyarak

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\Theta} d\theta$$

$$S_1(r) = \int^r \Delta^{-1} \sqrt{R} dr$$

bulunur.  $S_1(r)$  ve  $S_2(\theta)$  'nin bu ifadeleri (III.5.24) 'de yerine konacak olursa

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + \int^r \Delta^{-1} \sqrt{R} dr + \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta \quad (\text{III.5.29})$$

olur. Bu ifadede yer alan iki kareköklü ifadenin işaretlerinin birbirinden bağımsız olduğuna ve yalnızca aksiyonun değişiminin önemli olması yüzünden, integrallerin alt sınırlarının belirtilmesinin ( $S$  'nin toplamsal bir sabit yaklaşıklığıyla belirlenmesinin) önemli olmadığına dikkat edilmelidir. Öte yandan,  $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{dS_2}{d\theta}$  olduğunu göz önünde bulundurarak, (III.5.28) den  $K$  ayrışım sabiti,

$$K = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[ a^2 (\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (\text{III.5.30})$$

şeklinde düzenlenebilir. Değişkenlere ayrışım yönteminin uygulanmış olmasının doğal sonucu olarak probleme giren (III.5.30) ayrışım sabiti dördüncü bir hareket sabiti olarak göz önüne alınabilirse de negatif de olabilecek  $K$  ayrışım sabiti yerine, dördüncü hareket sabiti olarak, daima pozitif olan

$$\alpha \equiv K + (L_z - aE)^2 \quad (\text{III.5.31})$$

şeklindeki bir sabitin alınmasının daha uygun olacağını, ilerde hareket denklemlerini çıkarırken göreceğiz. Gerçekten de bu halde, her yerde,

$$\alpha \equiv p_\theta^2 + a^2 \mu^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} (L_z - aE \sin^2 \theta)^2 \geq 0$$

dır  $\alpha$  'nın yalnızca karadeliğin dönme eksenini ( $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ) doğrultusunda hareket eden foton ( $\mu = 0$ ) için sıfır olacağı görülmektedir.

Şimdi (III.5.29) aksiyonunu  $\mu^2, E, L_z$  ve  $\alpha$  hareket sabitlerinin her birine göre türettikten sonra bulunan sonuçların her birini sıfıra eşitlemek suretiyle hareket denklemlerini belirleyelim.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$$

düzenlenerek,

$$\int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} , \quad (\text{III.5.32})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \mu^2} = 0$$

düzenlenerek,

$$\lambda = \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}} + \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta , \quad (\text{III.5.33})$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = 0$$

dan

$$t = \int^r \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta\sqrt{R}} dr + \int^\theta \frac{-a(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sqrt{\Theta}} d\theta \quad (\text{III.5.34})$$

ve

$$\frac{\partial S}{\partial L_z} = 0$$

düzenlenerek,

$$\varphi = \int^r \frac{aP}{\Delta\sqrt{R}} dr + \int^\theta \frac{-a(aE \sin^2 \theta - L_z)}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}} d\theta \quad (\text{III.5.35})$$

denklemleri elde edilir.  $S$  aksiyonunun,  $K$  ayırışım sabiti yerine, (III.5.31) ile tanımlanmış bulunan  $\alpha$  'ya göre türetilmesi halinde elde edilen (III.5.32) denkleminin simetrisine dikkat edilmelidir. (III.5.32-35) denklemleri, Kerr-Newman alanında bulunan  $\mu$  kütleli,  $e$  yüküne sahip ve vektör potansiyelinin bileşenleri (III.5.7) ile verilen bir taneciğin hareket denklemleridirler. Bu denklemler hareketi incelemek üzere çok daha kullanışlı bir biçimde düzenlenebilirler. (III.5.33) denklemi  $\lambda$  'ya göre türetilecek olursa

$$1 = \frac{dr}{d\lambda} \frac{r^2}{\sqrt{R}} + \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.5.36})$$

bulunur. Öte yandan (III.5.32)  $\lambda$  'ya göre türetilerek

$$\frac{dr}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \quad (\text{III.5.37})$$

bulunacağından (III.5.36) ifâdesi bu son eşitlikten yararlanarak,

$$1 = \frac{dr}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{R}} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)$$

ya da  $\rho^2$  'nin tanımını hatırlayarak,

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

ve bu da (III.5.37) 'de yerine konarak

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

bulunur. Benzer şekilde (III.5.34) ve (III.5.35) denklemleri  $\lambda$  'ya göre türetilip düzenlenecek olursa, son iki denklemle birlikte, hareket denklemlerinin ilk integralleri topluca,

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R}$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta}$$

(III.5.38)

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{aP}{\Delta} - \left( aE - \frac{L_z}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} P - a(aE \sin^2 \theta - L_z)$$

olarak bulunmuş olur. Burada  $P, R$  ve  $\Theta$  'nın sırasıyla (III.5.25), (III.5.27) ve (III.5.28) ile verildiğini bir kez daha belirtelim. Bu denklemler daha önce Kerr alanı için §(III.2) 'de bulduğumuz (III.2.22-25) denklemleriyle şekil bakımından aynı görünmekle birlikte, içerdikleri  $P$  ve  $\Delta$  fonksiyonlarının, §(III.2) 'de olduğundan farklı olarak

$$P \equiv E(r^2 + a^2) - aL_z - eQr$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$$

şeklindeki ifadeleri dolayısıyla taneciğin yükü  $e$  ve karadeliğin yükü  $Q$  'ya bağlıdır.

Kerr çözümünde olduğu gibi (III.5.38) denklemlerinin kesin çözümleri bulunamamış olmakla birlikte mümkün bağlı yörüngeler ve özellikleri incelenmiş bulunmaktadır [17].

### (III.6) KERR-NEWMAN KARADELİĞİNİN EKVATOR DÜZLEMİNDEKİ YÜKLÜ TANECİKLERİN DAİRESEL YÖRÜNGELERİ

Kerr-Newman alanının klasik analogu olmayan pek çok özelliği (III.5.38) denklemlerinin çözümlerinin belirlediği jeodezikler yardımıyla incelenmektedir. Kesin çözümleri bulunamamış olan bu denklemlerin genel çözümleri yerine, önceki paragraflarda yapmış olduğumuz gibi bu kez de özellikle, karadeliğin enerji emisyonunda en büyük paya sahip olan ve bugüne kadar kesin çözümlerin bulunamadığı, ekvator düzlemindeki ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) dairesel yörüngeleri göz önüne alıp, yüklü test taneciğinin hareketini incelemek istiyoruz.

$\theta = \frac{\pi}{2}$  düzlemi için,  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$  'nın  $\rho^2 = r^2$  ve (III.5.38) denklemlerinin ikincisinin, sol yanının sıfır olması dolayısıyla  $\Theta = 0$  olacağından (III.5.28) 'den  $K = 0$  olması gerektiği görülür. Bu halde  $L_z = L$  olacağına da dikkat ederek, (III.5.38) denklemleri düzenlenecek olursa,

$$r^2 \dot{r}^2 = E^2 r^2 - \Delta \mu^2 - \left( \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2M}{r} \right) (aE - L)^2 + (a^2 E^2 - L^2) + (eQ)^2 - 2 \frac{eQ}{r} [E(r^2 + a^2) + aL] \quad (\text{III.5.39})$$

$$r^2 \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} [aP - \Delta (aE - L)] \quad (\text{III.5.40})$$

$$r^2 \dot{t} = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)P - \Delta a (aE - L)] \quad (\text{III.5.41})$$

olurlar. Öte yandan

$$-\mu^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

şeklindeki (III.5.12) bağıntısı göz önünde bulundurularak  $\mu^2 = 0$  için  $ds^2 = 0$  ve  $\mu^2 > 0$  için de  $ds^2 < 0$  olacağını yani ışık cinsinden yörüngelerin  $\mu = 0$  'a karşılık gelen foton yörüngeleri ve  $\mu > 0$  değerlerine karşılık gelen yörüngelerin de zaman cinsinden yörüngeler olduğunu belirtelim.

Şimdi zaman cinsinden yörüngeleri ele almak istiyoruz. (III.5.39) denklemini,  $u = \frac{1}{r}$  dönüşümüyle, bu halde  $\dot{r} = -u^{-2}\dot{u}$  olduğuna da dikkat ederek sadeleştirelim.

$$u^{-6}\dot{u}^2 = -\Delta\mu^2 + E^2u^{-2} - (Q^2u^2 - 2Mu)(aE - L)^2 \\ + (a^2E^2 - L^2) + (eQ)^2 - 2(eQ)u[E(u^{-2} + a^2) + aL]$$

ve her iki yanını  $u^2$  ile çarparak,

$$u^{-4}\dot{u}^2 = -\Delta\mu^2u^2 + E^2 - (Q^2u - 2M)(L - aE)^2u^3 \\ - (L^2 - a^2E^2)u^2 + (eQu)^2 - 2eQ[E(1 + a^2u^2) + aLu^2]u$$

bulunur. Ayrıca,

$$u^2\Delta = a^2u^2 - 2Mu + 1 + Q^2u^2$$

olacağından yerine konarak denklem

$$u^{-4}\dot{u}^2 = -[a^2u^2 - 2Mu + 1 + Q^2u^2]\mu^2 + E^2 - (Q^2u - 2M)(L - aE)^2u^3 \\ - (L^2 - a^2E^2)u^2 + (eQu)^2 - 2eQ[(1 + a^2u^2)E + aLu^2]u \quad (\text{III.5.42})$$

olur.  $\dot{u}^2$  ile orantılı olan bu eşitliğin sağ yanının efektif potansiyeli temsil etmekte olduğunu göz önünde bulundurup (III.5.42) 'nin sağ yanını ve bunun türevini sıfıra eşitlemek suretiyle, ilke olarak, dairesel yörüngeleri belirlemek mümkündür. Önce (III.5.42) 'nin sağ yanında

$$x \equiv L - aE \quad (\text{III.5.43})$$

dolayısıyla

$$L^2 = x^2 + a^2 E^2 + 2aEx$$

koyacak olursak,

$$\begin{aligned} & -[(a^2 + Q^2)u^2 - 2Mu + 1]\mu^2 + E^2 - (Q^2u - 2M)x^2u^3 \\ & - (x^2 + 2aEx)u^2 + (eQ)^2 - 2eQ[Eu + (x + 2aE)au^3] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5.44})$$

olur. (III.5.44) 'ün  $u$  'ya göre türevi alınır da sıfıra eşitlenecek olursa, bu kez de,

$$\begin{aligned} & -[(a^2 + Q^2)u - M]\mu^2 - 2Q^2x^2u^3 + 3Mx^2u^2 - (x^2 + 2aEx)u \\ & + (eQ)^2u - eQ[E + 3(x + 2aE)au^2] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.5.45})$$

bulunur. Şimdi (III.5.45) 'den

$$\begin{aligned} (x^2 + 2aEx)u + 2eQ(x + 2aE)au^2 &= -[(a^2 + Q^2)u - M]\mu^2 \\ &+ 3Mx^2u^2 - 2Q^2x^2u^3 + (eQ)^2u - eQ[(x + 2aE)au^2 + E] \end{aligned}$$

ifâdesi çekilir de (III.5.44) 'e taşınacak olursa, gerekli kısaltmalardan sonra

$$(Mu - 1)\mu^2 + E^2 + Q^2x^2u^4 - Mx^2u^3 + eQ[(x + 2aE)au^2 + E(1 - 2u)] = 0 \quad (\text{III.5.46})$$

bulunur. Öte yandan (III.5.45) 'den  $E$ ,

$$[2axu + eQ(1 + 6a^2u^2)]E = -[(a^2 + Q^2)u - M]\mu^2 - 2Q^2x^2u^3 + 3Mx^2u^2 - x^2u + (eQ)^2u - 3(eQ)axu^2 \quad (\text{III.5.47})$$



şeklinde çekilir de (III.5.46) 'da yerine konacak olursa buraya almayı gereksiz gördüğümüz  $x$  'e göre 4. dereceden çok uzun ve karmaşık bir denklem elde edilmektedir. Bu denklemi çözmeyi başarabilmiş olsaydık, bu yolla belirlenen  $x$ , (III.5.47) 'de yerine konarak, dairesel yörüngelerin bütün özelliklerini inceleme olanağı sağlayacak olan,  $E$  ve (III.5.43) yardımıyla  $L$  açısal momentumu,  $u$  dolayısıyla  $r$  cinsinden belirlenmiş olacaktı. Bilgisayar yardımıyla bu denklemi çözmeye girişimlerimiz henüz sonuç vermemiş olmakla birlikte bu konudaki çalışmalarımızı sürdürmekteyiz.

---

## IV. BULGULAR

### (IV.1) ERNST UZAYZAMANI

Birleştirilmiş Einstein-Maxwell denklemlerinin tek kesin çözümü olan Ernst uzayzamanı, eksenel simetrik homojen bir magnetik alanda bulunan, küresel simetrik,  $M$  kütleli bir cismin ya da karadeliğin statik uzayzamanını temsil etmekte olup H. J. Ernst tarafından bulunmuştur [27]. Yani Ernst çözümü,  $B$  magnetik alan parametresi ile temsil olunan, eksenel simetrik bir dış magnetik alana daldırılmış, Schwarzschild karadeliğinin birleştirilmiş alanını belirlemektedir.

Standart Schwarzschild koordinatlarında ve  $c = G = 1$  geometrik birim sisteminde, dış magnetik alana karşıdüşen magnetik alan şiddeti  $B$  ve

$$\Lambda \equiv 1 + \frac{1}{4} B^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{IV.1.1})$$

olmak üzere,

$$ds^2 = \Lambda^2 \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right] + \Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{IV.1.2})$$

şeklindedir. Bu metriğin ifâdesinden de görüleceği üzere, eksenel simetrik üniform dış magnetik alanın varlığı, Schwarzschild alanının küresel simetrisini bozmakta olup Ernst uzayzamanı eksenel simetrik bir alana dönüşmektedir. Ernst uzayzamanının yapısı yalnızca,  $\Lambda = 1$  olduğu, simetri eksenini ( $\theta = 0, \pi$ ) boyunca Schwarzschild uzayzamanının yapısına uyar. Öte yandan, (IV.1.2) metriğinin  $B = 0$  için Schwarzschild metriğine gitmesinin yanı sıra  $M = 0$  için de

$$ds^2 = \Lambda^2 \left( - dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 \right) + \Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (\text{IV.1.3})$$

şeklindeki Melvin metriğine (Melvin magnetik evreni) [28,29] gitmektedir. Yapısı henüz bütünüyle anlaşılammış olan Ernst çözümünün en çarpıcı yanı, asimptotik olarak düz olmamasıdır. Bu pek de hoş olmayan bir özellik olmakla birlikte, metriği karadeliğin uzağında Mikowski metriğine gitmeyen bu uzayzamanın son derece ilgi çekici özellikleri bulunmaktadır [30]. Kuşkusuz yeteri kadar zayıf bir dış magnetik alan için merkezsel karadeliğin uzağında alanın, hemen hemen düz bir bölge ile çevrelenmiş olduğu varsayılabilir.

Son yıllardaki astrofiziksel gözlemler, aktif olsun ya da olmasın, M87, M31 Andromeda ve galaksimiz Samanyolu gibi galaksilerin merkezlerinde süper kütleli karadeliklerin varlığını telkin etmektedir. Bu galaksi çekirdeklerinden kaynaklanan güçlü sinkrotron ışınması, bunların çevresinde şiddetli bir magnetik alanın varlığını kabul etmek suretiyle, bu magnetik alanla, ultra rölâtivistik elektronların etkileşmesinin bir sonucu olarak açıklanabilmektedir [29]. Kuşkusuz bir yüke sahip olsa bile (Reissner-Nordstrom karadeliği) statik Schwarzschild karadeliğinin bir öz magnetik alan üretmesi söz konusu değildir. Schwarzschild karadeliğini çevreleyen söz konusu magnetik alan, yakın civarında bulunan nötron yıldızlarından kaynaklanabileceği gibi, çevresinde birikip sıkışan gaz bulutunun bir magnetosfer oluşturmasından kaynaklanan süper güçlü bir magnetik alan da olabilir [31]. Çok büyük kütleli bir karadeliğin çevresindeki böyle bir alanın, alan şiddetinin, magnetik basınç ve gravitasyon basınçlarının birbirine eşit olduğu halde  $B_m \cong 10^{10} G$  mertebesinde olacağı gösterilmiştir [32]. Kuşkusuz bu büyüklükte bir magnetik alan karadeliğin çevresindeki uzayzamanın geometrisini büyük ölçüde değişikliğe uğratacak ve karadeliğin uzağında uzayzaman düz olmayacaktır. Buna karşılık  $B \ll B_m$  için, değişiklik küçük bir pertürbasyon olarak düşünülebilecek ve uzayzamanın asimptotik olarak düz olacağı varsayılabilir.

Bu bölümde Ernst uzayzamanının simetri düzlemi demek olan ekvator düzlemindeki zaman cinsinden dairesel yörüngeleri, önce yüksüz, daha sonra da aynı alanda, yüklü bir tanecik için ele alıp bu taneciklerin enerjilerini ve açısal momentumlarını belirlemek istiyoruz.

## (IV.2) ERNST KARADELİĞİNİN ALANINDA YÜKSÜZ BİR TEST TANECİĞİNİN MÜMKÜN DAİRESEL YÖRÜNGELERİ

Bu paragrafta aksenal simetrik bir magnetik alana daldırılmış küresel simetrik, statik bir karadeliğin dışında (IV.1.2) ile tasvir olunan Ernst alanındaki yüksüz bir test taneciğinin hareket denklemlerini Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlemek istiyoruz. Bu konu çeşitli araştırmacılar tarafından, farklı yönleriyle ele alınmıştır [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]. Bu hâlde göz önüne alacağımız,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \quad (\text{IV.2.1})$$

süper Hamilton fonksiyonunun temelini oluşturduğu Hamilton denklemlerinin, jeodezik denklemlerine eşdeğer oldukları §(III.2) 'de gösterilmiştir.  $p_\alpha$  kanonik momentumlarının kanonik koordinatlardan bağımsız ve  $g_{\alpha\beta}$  'ların da (IV.1.2) 'den görüleceği üzere  $t$  ve  $\varphi$  'den bağımsız olmaları yüzünden  $\mathcal{H}$  Hamilton fonksiyonu  $t$  ve  $\varphi$  'ye bağlı olmayıp  $t$  ve  $\varphi$  çevrimsel koordinatlardır. Buna göre,

$$\dot{p}_t = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \dot{p}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0$$

denklemleri dolayısıyla  $p_t$  ve  $p_\varphi$  kanonik momentumları birer hareket sabitidirler. Ayrıca, §(II.3) 'de göstermiş olduğumuz gibi, hareket sabitleri farklı bir yoldan da saptanabilmektedir. Gerçekten de,  $g_{\alpha\beta}$  metrik katsayılarının  $t$  ve  $\varphi$  'ye bağlı olmaması yüzünden,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \vec{\xi}_t, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \vec{\xi}_\varphi$$

alanın birer Killing vektörü olup

$$\vec{p} \cdot \vec{\xi} = \text{sabit}$$

şeklindeki genel teorem dolayısıyla  $p_t$  ve  $p_\phi$  'nin birer hareket sabiti oldukları kolayca anlaşılır. Ayrıca ekvator düzlemindeki hareket için  $L_z = L$  olduğuna da dikkat ederek,  $E$  ve  $L$  taneciğin sonsuzdaki enerjisi ve açısal momentumu olmak üzere  $p_t$  ve  $p_\phi$  korunan büyüklükleri

$$p_t = -E, \quad p_\phi = L \quad (\text{IV.2.2})$$

idiler. Öte yandan

$$|\vec{p}|^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -\mu^2 \quad (\text{IV.2.3})$$

olduğundan momentum dörtlü vektörünün normu da bir hareket sabitidir. Şimdi kanonik momentumlar

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$$

olmak üzere

$$H\left(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\right) = -\frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denklemini açıkça yazmak istiyoruz.  $\lambda$  ile  $\tau = \mu\lambda$  şeklinde tanımladığımız bir parametre gösterilmekte olup bu halde momentum dörtlü vektörünün bileşenleri,

$$p^\alpha = \mu u^\alpha = \mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \equiv \dot{x}^\alpha$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu noktada, kanonik momentumların, momentum dörtlü vektörünün kovaryant bileşenlerine karşılık geldiğine dikkat edilmelidir. Böylece Hamilton-Jacobi denklemi,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\text{IV.2.4})$$

olur. (IV.1.2) 'den metrik tansörün sıfırdan farklı kontravaryant bileşenlerinin

$$g^{tt} = -\Lambda^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$g^{rr} = \Lambda^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{\Lambda^{-2}}{r^2}$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{\Lambda^2}{r^2 \sin^2 \theta}$$

(IV.2.5)

şeklinde oldukları kolayca görülmektedir. (IV.2.4) ve (IV.2.5) yardımıyla

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{rr} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^{-2}}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.6})$$

olur. Birinci mertebeden, lineer olmayan bir kısmî türevli diferansiyel denklem olan Hamilton-Jacobi denklemini değişkenlere ayrışım yöntemi ile çözebilmek üzere bu denkleme özgü bir biçimde  $S$ 'nin

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (\text{IV.2.7})$$

şeklinde olduğunu varsayıp (IV.2.6) denklemine taşımak istiyoruz. Bu halde (IV.2.2) dolayısıyla

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = -E \quad (\text{IV.2.8})$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = L_z \quad (\text{IV.2.9})$$

olup (IV.2.8) ve (IV.2.9) integre edilerek

$$S_0(t) = -E t \quad (\text{IV.2.10})$$

$$S_3(\varphi) = L_z \varphi \quad (\text{IV.2.11})$$

bulunur. Ayrıca (IV.2.3) göz önüne alınarak,

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\mathcal{H} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \frac{1}{2} \mu^2 = \frac{d\bar{S}}{d\lambda}$$

olacağından, buradan,

$$\bar{S}(\lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{IV.2.12})$$

dır. (IV.2.10-12) ifadeleri (IV.2.7)'ye taşınarak, aksiyon fonksiyonu,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (\text{IV.2.13})$$

olur.  $S$ 'nin bu ifadesi (IV.2.6) denkleminde taşınarak,

$$\frac{1}{2} \mu^2 - \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^{-2}}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} L_z^2 = 0$$

ve bu da  $2\Lambda^2 r^2$  ile çarpılarak düzenlenecek olursa,

$$\mu^2 \Lambda^2 r^2 - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r^2 \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = -\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{\Lambda^4}{\sin^2 \theta} L^2 \quad (\text{IV.2.14})$$

bulunur. Denklem her ne kadar ayrılmış gibi görünse de  $\Lambda = \Lambda(r, \theta)$  olduğundan ayrışım gerçekleşmiş değildir. Dolayısıyla Ernst alanı için Hamilton-Jacobi denkleminin ayrıştırılamayacağı anlaşılmış olur. Bu yüzden, Ernst alanındaki bir taneciğin hareket denklemlerini genel halde, tamamen analitik yoldan belirlemek mümkün olmaz. Ancak ekvator düzlemindeki hareketle ilgilendiğimiz bu halde, (IV.1.1) ile verilen  $\Lambda$ 'nın,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  için

$$\Lambda = 1 + \frac{B^2 r^2}{4} \quad (\text{IV.2.15})$$

ifadesine indirgeneceğini,  $L_z = L$  ve  $\frac{dS_2}{d\theta} = 0$  olacağını göz önüne alarak (IV.2.14) denklemini,

$$\mu^2 \Lambda^2 r^2 - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = -\Lambda^4 L^2$$

ve bu da  $(r - 2M)$  ile çarpılarak düzenlenecek olursa,



$$(r - 2M)^2 r \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (\mu^2 r^2 + \Lambda^2 L^2) \equiv R(r, E, L, B) \quad (\text{IV.2.16})$$

olur. (IV.2.16) 'dan  $S_1(r)$  çekilecek olursa,

$$S_1(r) = \int^r \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}(r - 2M)} dr \quad (\text{IV.2.17})$$

bulunacağından (IV.2.13) aksiyonu,

$$S(t, r, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L\varphi + \int^r \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}(r - 2M)} dr \quad (\text{IV.2.18})$$

şekline gelir. Şimdi, önceki paragraflarda olduğu gibi aksiyonun  $\mu^2, E$  ve  $L$  sâbitlerine göre türevleri sıfıra eşitlenecek olursa, test taneciğinin hareketini belirleyen denklemler, sırasıyla,

$$\lambda = \int^r \frac{\Lambda^2 r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{R}} dr$$

$$t = \int^r \frac{E r^{\frac{5}{2}}}{(r - 2M)\sqrt{R}} dr \quad (\text{IV.2.19})$$

$$\varphi = \int^r \frac{L \Lambda^4}{\sqrt{r}\sqrt{R}} dr$$

şeklinde elde edilir. (IV.2.19) 'un ilk denklemini  $\lambda$  'ya göre türetilecek olursa,

$$\Lambda^2 r^{\frac{3}{2}} \dot{r} = \sqrt{R} \quad (\text{IV.2.20})$$

olur. (IV.2.19) 'un ikinci ve üçüncü denklemleri  $\lambda$  'ya göre türetilip (IV.2.20) yardımıyla düzenlenmek ve (IV.2.16) göz önüne alınmak suretiyle, hareketi irdelemek bakımından daha uygun olan, hareket denklemlerinin ilk integralleri

$$\Lambda^4 r^3 \dot{r}^2 = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (\mu^2 r^2 + \Lambda^2 L^2) \quad (\text{IV.2.21})$$

$$\dot{t} = \frac{E r}{\Lambda^2 (r - 2M)} \quad (\text{IV.2.22})$$

$$\Lambda^{-2} r^2 \dot{\phi} = L \quad (\text{IV.2.23})$$

şeklinde bulunurlar.

Şimdi  $\mu\lambda = \tau$  olduğu hatırlanarak,  $\dot{r}$ ,  $\tau$  özzamanı cinsinden  $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \mu \frac{dr}{d\tau}$  ile değiştirilecek olursa (IV.2.21),

$$\Lambda^4 r^3 \mu^2 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (\mu^2 r^2 + \Lambda^2 L^2)$$

bu da  $\mu^2$  ile bölünerek  $\tilde{E} \equiv \frac{E}{\mu}$ ,  $\tilde{L} \equiv \frac{L}{\mu}$  şeklindeki, taneciğin birim kütlesi başına enerjisi ve açısal momentumu ve  $\frac{R}{\mu^2} \equiv \tilde{R}$  olmak üzere,

$$\Lambda^4 r^3 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) \equiv \tilde{R}(\tilde{E}, \tilde{L}, B, r) \quad (\text{IV.2.24})$$

olur. (IV.2.24) ifadesinin sol yanı  $\tilde{R}$  'nın, radyal hareketin efektif potansiyelini temsil etmekte olduğunu telkin etmektedir. Buna göre dairesel yörüngeler için  $\tilde{R} = 0$  ve  $\frac{d\tilde{R}}{dr} = 0$  olacağı hatırlanarak (IV.2.24) 'den

$$\tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) = 0 \quad (\text{IV.2.25})$$

$$3\tilde{E}^2 r^2 - \Lambda B^2 r (r - 2M)(r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) - \Lambda^2 (r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) - \Lambda^2 (r - 2M)(2r + \Lambda B^2 r \tilde{L}^2) = 0 \quad (\text{IV.2.26})$$

denklemleri elde edilir. (IV.2.25) 'den

$$\tilde{E}^2 = \frac{\Lambda^2}{r^3} (r - 2M)(r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) \quad (\text{IV.2.27})$$

şeklinde çekilen  $\tilde{E}$ , (IV.2.26) 'da yerine taşınarak, elde edilen denklem düzenlenecek olursa, uzunca hesaplardan sonra

$$2\Lambda^2 (\Lambda r - 3M\Lambda - B^2 r^3 + 2MB^2 r^2) \tilde{L}^2 = r^2 (2M\Lambda + B^2 r^3 - 2MB^2 r^2) \quad (\text{IV.2.28})$$

olur. (IV.2.15) 'den

$$\Lambda = \frac{4 + B^2 r^2}{4}$$

ifâdesi (IV.2.28) 'de yerine yazılır da  $\tilde{L}^2$  çekilecek olursa

$$\tilde{L}^2 = \frac{16r^2 (4M + 2B^2 r^3 - 3MB^2 r^2)}{(4 + B^2 r^2)^2 (-12M + 4r - 3B^2 r^3 + 5MB^2 r^2)} \quad (\text{IV.2.29})$$

elde edilir. Bu da (IV.2.27) 'de yerine taşınarak elde edilen ifâde düzenlenecek olursa sıkıcı hesaplardan sonra

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r - 2M)^2 (4 + B^2 r^2)^2 (4 - B^2 r^2)}{16r (-12M + 4r - 3B^2 r^3 + 5MB^2 r^2)} \quad (\text{IV.2.30})$$

bulunur. (IV.2.29) ve (IV.2.30) 'dan da,

$$\tilde{E} = \pm \frac{(r-2M)(4+B^2r^2)(4-B^2r^2)^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt{r}(-12M+4r-3B^2r^3+5MB^2r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.2.31})$$

ve

$$\tilde{L} = \pm \frac{4r(4M+2B^2r^3-3MB^2r^2)^{\frac{1}{2}}}{(4+B^2r^2)(-12M+4r-3B^2r^3+5MB^2r^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.2.32})$$

olur. Bu ifâdedeki (+) işareti taneciğin yörünge açışal momentumunun z-ekseninin pozitif yönünde, (-) işareti ise zıt yönünde olması hâline karşıdüşmektedir. (IV.2.30) 'un paydasını sıfır yapan  $r$  değerleri ışık cinsinden dairesel yörüngelere (foton yörüngeleri) karşıdüştüğünden, bu yörüngeler için,

$$3B^2r^3 - 5MB^2r^2 - 4r + 12M = 0 \quad (\text{IV.2.33})$$

olmalıdır. Çok farklı bir yoldan da olsa bu denklem E.P.Esteban tarafından da verilmiştir [36].

Bu denklemi  $3B^2M^3$  ile bölüp,

$$\xi \equiv \frac{r}{M}, \quad \alpha^2 \equiv M^2B^2 \quad (\text{IV.2.34})$$

koyduktan sonra düzenleyecek olursak,

$$\xi^3 - \frac{5}{3}\xi^2 - \frac{4}{3\alpha^2}\xi + \frac{4}{\alpha^2} = 0 \quad (\text{IV.2.35})$$

olur. Bu denklemin reel kökleriyle ilgilenmekte olduğumuzdan  $D$  diskriminantı [43] sıfır ya da negatif olmalıdır.  $D$  hesaplanacak olursa,

$$D = -\frac{4}{2187\alpha^6}(375\alpha^4 - 1352\alpha^2 + 48) \leq 0 \quad (\text{IV.2.36})$$

olması gerektiği görülür. Buna göre  $\alpha$  için mümkün iki hâl;

$$\alpha_1 \leq 0,18936 \quad (\text{IV.2.37})$$

$$\alpha_2 \geq 1,88930 \quad (\text{IV.2.38})$$

olacaktır. Öte yandan (IV.2.35) denklemi

$$\alpha^2 = \frac{4(\xi - 3)}{\xi^2(3\xi - 5)}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklem, (IV.2.38) ile verilen ikinci halin fiziksel olarak mümkün olmayacağı ve dışlanması gerektiğini görme olanağı sağlayacaktır. Gerçekten de,  $\xi = \frac{5}{3}$  için  $\alpha = \infty$  olduğuna dikkat ederek,  $\alpha > 1,88930$  için  $\xi < \frac{5}{3}$  olacağı görülmektedir. ( $\xi = 1$  için  $\alpha = 2$  olduğuna dikkat edilmeli). Bu ise

$$\xi \equiv \frac{r}{M} < \frac{5}{3} = 1,6667 \quad (\text{IV.2.39})$$

yani  $r < 1,6667M$  olacağı anlamına gelir ki, (IV.1.2) metriğinden görüleceği üzere Ernst karadeliğinin olay ufku  $r = 2M$  olup bu  $r$  değeri iyice karadelik ufku içinde bulunmaktadır. Öte yandan yine (IV.2.38) 'den  $\xi = 3$  için  $\alpha = 0$  ve  $\alpha < 0,18936$  için  $\xi > 3$  olmakta, yani  $\xi = \frac{r}{M} > 3$ , dolayısıyla  $r > 3M$  olmaktadır. Buna göre, (IV.2.37) ile verilen hale karşılık, (IV. 2.35) denkleminin iki pozitif kökü, kübik denkleme ilişkin standart yöntemle kolayca elde edilir. Böylece,

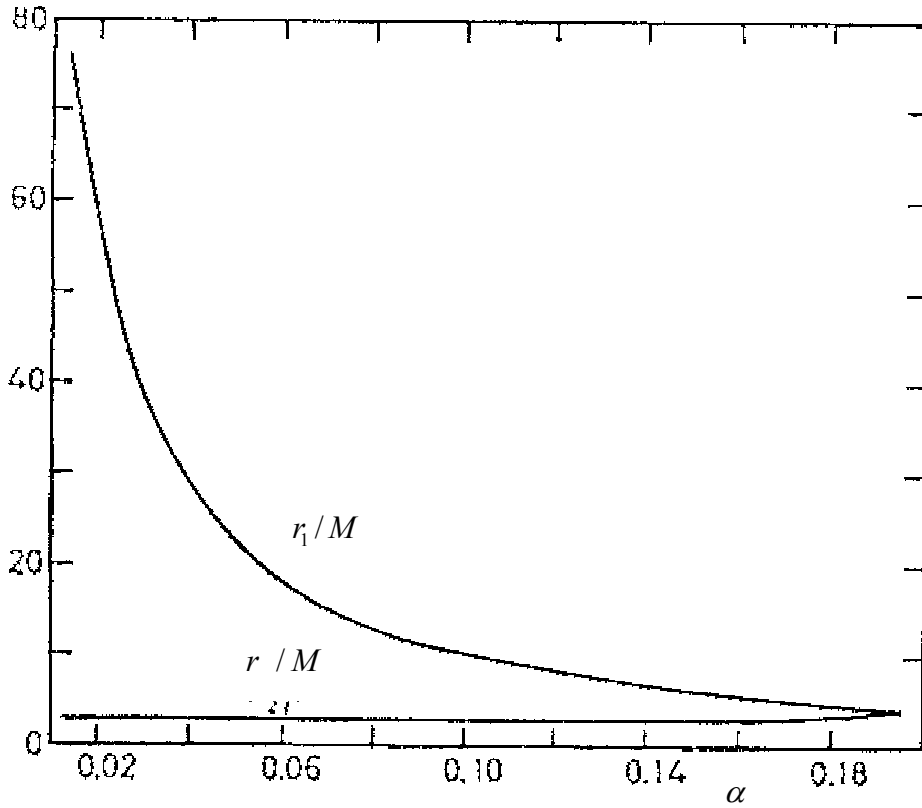
$$\cos \beta = \frac{\alpha(125\alpha^2 - 1188)}{(36 + 25\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \right) \quad (\text{IV.2.40})$$

olmak üzere mümkün iki çözüm,

$$r_1 = \frac{2M}{3} \left( \frac{4}{\alpha^2} + \frac{25}{9} \right) \cos \frac{\beta}{3} + \frac{5M}{9} \quad (\text{IV.2.41})$$

$$r_2 = \frac{2M}{3} \left( \frac{4}{\alpha^2} + \frac{25}{9} \right) \cos \left( \frac{\beta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{5M}{9} \quad (\text{IV.2.42})$$

dır. Işık cinsinden dairesel yörüngelere karşılık gelen bu  $r$  değerlerinden hareketle  $\frac{r_1}{M}$  ve  $\frac{r_2}{M}$  nin  $\alpha = MB$  'ye göre değişimi çizilecek olursa, her iki yarıçapın da



Şekil (IV.1)

$\alpha = 0,18936$  ve  $\beta = \pi$  için  $r = 4,12M$  'ye büzüldüğü görülmektedir. Bu halde iki mümkün foton yörüngesinin çakışmakta olduğuna dikkat edilmelidir.

Öte yandan, zaman cinsinden yörüngeler için yine (IV.2.30) 'dan,  $E$  'nin reel ve sonlu olabilmesi için,

$$3B^2r^3 - 5MB^2r^2 - 4r + 12M = M(3\alpha^2\xi^3 - 5\alpha^2\xi^2 - 4\xi + 12) < 0 \quad (\text{IV.2.43})$$

ve

$$4 - B^2 r^2 = 4 - \alpha^2 \xi^2 < 0 \quad (\text{IV.2.44})$$

koşullarının birlikte sağlanması gerektiği görülmektedir.

Şimdi, (IV.2.41-42) 'den kolayca görüleceği üzere,  $\alpha < 0,18936$  için,

$$\frac{r_2}{M} < \frac{r_1}{M} < \frac{2}{\alpha}$$

dır. Dolayısıyla (IV.2.43), (IV.2.44) eşitsizliklerini sağlayan, zaman cinsinden dairesel yörüngeler için  $r$  yarıçapı,

$$\frac{r_2}{M} < \xi < \frac{r_1}{M} \quad (r_2 < r < r_1) \quad (\text{IV.2.45})$$

değerlerine sahip olacak, yani bu yörüngeler  $r_1$  ve  $r_2$  yarıçaplı çemberlerle sınırlanmış olacaktır.  $\alpha = 0,18936$  için bu iki foton yörüngesinin çakışması halinde de, zaman cinsinden yörüngelerin alt sınırı bu foton yörüngesi ile belirlenmiş olacaktır.

Mümkün iki dairesel foton yörüngesinin çakışık olduğu ve bunun da maddesel tanecikler için dairesel yörüngelerin alt sınırını oluşturduğu  $\alpha = 0,18936$  halinde, karadeliği kuşatan üniform magnetik alanın mertebesi irdelenebilir.  $m = \frac{GM}{c^2}$  geometrik kütesinin  $c = G = 1$  birim sisteminde  $m = M$  olması dolayısıyla  $[m] = [M] = L$  olup  $B$  magnetik alan parametresi için de  $[B] = L^{-1}$  olduğundan  $\alpha$  boyutsuz bir parametredir. Öte yandan  $M$  ile karadeliğin kütlesi ve  $B_0$  ile de Gauss cinsinden magnetik alan şiddeti gösterilmek üzere,

$$\alpha = M B = 8,5 \cdot 10^{-21} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) B_0 \quad (\text{IV.2.46})$$

şeklinde de yazılabilir [44]. (IV.2.46) ifâdesi,  $\alpha < 0,18936$  için örneğin  $M = 10^8 M_{\odot}$  mertebesinde bir kütleyle sahip, süper kütleli bir karadeliği kuşatan magnetik alanın şiddetinin  $B_0 < 2,2278 \cdot 10^{11}$  Gauss olması gerektiğini göstermektedir. Sonuç olarak, ışık cinsinden dairesel yörüngelerin yalnızca  $\alpha < 0,18936$  için mümkün olduğu ve azalan  $\alpha$  değerleri için dış yarıçapın arttığı, iç yarıçapın azaldığı, öte yandan zaman cinsinden dairesel fönüngelerin gene  $\alpha < 0,18936$  için mümkün olduğu ve bu yörüngelerin sınırlarının, karşüdüşen ışık cinsinden dairesel jeodeziklerle belirlendiğı görölmüş olur.

$B = 0$  olduğu Schwarzschild geometrisinde (IV.2.33) 'ün, §(III.1) 'de göstermiş olduğumuz gibi, dairesel foton yörüngelerinin yarıçapı için  $r = 3M$  ve  $M = 0$  olduğu Melvin geometrisinde ise  $r = \frac{2}{\sqrt{3}B}$  vermekte olduğu görölmektedir. Bu da Melvin ve Wallingford'un bulduğu değerle aynıdır [45].

---



### (IV.3) HAREKET DENKLEMLERİNİN FARKLI BİR YOLDAN, LAGRANGE YÖNTEMİYLE ELDE EDİLMESİ

Hareket denklemlerini belirlerken, sağlayabileceği bazı kolaylıklar yüzünden farklı yöntemler seçilebilir. Buraya kadar  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$  gibi bir Hamilton fonksiyonu için, Hamilton denklemlerinin jeodezik denklemlerine eşdeğer olduğunu gösterdikten sonra, farklı geometriler için hareket denklemlerini elde etmek üzere, çok güçlü ve zarif bir yöntem olan, Hamilton-Jacobi yöntemini kullanmıştık. Analitik mekanikten bilindiği gibi bu yönteme eşdeğer bir yöntem de Lagrange yöntemidir.

Gerek jeodezik denklemleri gerekse Euler-Lagrange denklemleri

$$\delta \int ds = 0$$

şeklindeki, Hamilton varyasyon ilkesi diye de bilinen, metriğin integralinin varyasyonunu sıfır yapan denkleme eşdeğerdir. Bu ifade daha açık olarak

$$\delta \int \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds = 0$$

dır.  $\mu\lambda = \tau$  olduğu hatırlanarak,

$$\delta \int \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0$$

şeklinde, ya da varyasyonlar hesabından bilindiği gibi sonucu değiştirmeyen

$$\delta \int (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) d\lambda = 0 \tag{IV.3.1}$$

şeklinde yazılabilecek bu denklem,  $\mathcal{L}$ , Lagrange fonksiyonu [21,23],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \quad (\text{IV.3.2})$$

olmak üzere

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (\text{IV.3.3})$$

Euler-Lagrange denklemlerine eşdeğerdir. Buna göre, örneğin (IV.1.2) metriği için, (IV.3.2) den

$$2\mathcal{L} = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \Lambda^2 \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] + \Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (\text{IV.3.4})$$

olur. Kanonik momentumların

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}$$

şeklinde tanımlanan büyüklükler olduğunu ve (IV.3.4) ile (IV.3.3) 'ü göz önünde bulundurarak  $\theta, \phi, t$  ve  $r$  için hareket denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta = \frac{d}{d\lambda} (\Lambda^2 r^2 \dot{\theta}) = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{\Lambda} \left\{ \frac{\Lambda^2 B^2}{2} \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] - \frac{\Lambda^{-2} B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2} \dot{\phi}^2 + \Lambda^{-1} \dot{\phi}^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{d}{d\lambda} (\Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (\text{IV.3.6})$$

$$\dot{p}_t = \frac{d}{d\lambda} \left( - \Lambda^2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right) = 0 \quad (\text{IV.3.7})$$

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = -\frac{d\tau^2}{d\lambda^2} = -\mu^2 = \Lambda^2 \left[ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] + \Lambda^{-2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (\text{IV.3.8})$$

şeklinde kolayca elde edilirler. (IV.3.6) ve (IV.3.7),  $p_t$  ve  $p_\phi$  kanonik momentumlarının birer hareket sabiti olduklarını göstermektedir. Ernst alanı için, Hamilton-Jacobi denklemi, genel halde ayrıştırılamamış ve  $\theta$  'ya bağlı denklem elde edilememiştir. Bu kez  $\theta$  'ya karşılık gelen bir denklem elde etmiş isek de bu lineer olmayan, son derece karmaşık denklemin kesin çözümlerinin bulunamamakta ancak nümerik integrasyonla çözülebilmekte olduğuna işaret edelim.

Ekvator düzlemi için (IV.3.5-8) denklemleri, bu halde

$$\Lambda = 1 + \frac{B^2 r^2}{4}$$

olmak üzere

$$p_\phi = \Lambda^{-2} r^2 \dot{\phi} = L = \text{sabit} \quad (\text{IV.3.9})$$

$$p_t = -\Lambda^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = -E = \text{sabit} \quad (\text{IV.3.10})$$

ve

$$-\mu^2 = \Lambda^2 \left[ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \right] + \Lambda^{-2} r^2 \dot{\phi}^2 \quad (\text{IV.3.11})$$

denklemlerine indirgenirler. (IV.3.9) ve (IV.3.10) ifadeleri (IV.3.11) 'e taşındıktan sonra denklem  $\mu^2$  ile bölünerek,

$$\frac{E}{\mu} \equiv \tilde{E}, \quad \frac{L}{\mu} \equiv \tilde{L}$$

konacak olursa, radyal denklem,

$$-1 = -\Lambda^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E}^2 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{\Lambda^2}{r^2} \tilde{L}^2$$

şeklinde düzenlenebilecektir. Bu denklem de  $-\Lambda^2 r^3 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$  ile çarpıldıktan sonra

$\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \mu \frac{dr}{d\tau}$  olduğunu da göz önünde bulundurarak  $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$  çekilecek olursa,

$$\Lambda^4 r^3 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) \quad (\text{IV.3.12})$$

bu da Hamilton-Jacobi yöntemiyle, ekvator düzlemi için bulunmuş (IV.2.24) radyal denklemiyle tamamen aynı olup hareketin efektif potansiyeli, daha önce olduğu gibi, (IV.3.12) 'nin sağ yanı aracılığıyla belirlenen

$$\tilde{R}(\tilde{E}, \tilde{L}, B, r) \equiv \tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) (r^2 + \Lambda^2 \tilde{L}^2) \quad (\text{IV.2.24})$$

den başka bir şey değildir.

Öte yandan hareketi belirlemek için bazen, doğrudan jeodezik denklemlerinden hareket etmek de uygun olabilir.

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (\text{IV.3.13})$$

jeodezik denklemleri

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta$$

olmak üzere

$$\frac{du^\lambda}{d\tau} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \quad (\text{IV.3.14})$$

olarak da yazılabilir. Şimdi (IV.3.14)  $g_{\lambda\sigma}$  ile çarpılır ve

$$g_{\lambda\sigma} \frac{du^\lambda}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (g_{\lambda\sigma} u^\lambda) - \frac{dg_{\lambda\sigma}}{d\tau} u^\lambda = \frac{du_\sigma}{d\tau} - g_{\lambda\sigma,\mu} u^\mu u^\lambda$$

şeklinde düzenlenebilen ilk terim yerine konacak olursa

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = g^{\lambda\gamma} [\alpha\beta, \gamma]$$

olduğunu da göz önünde bulundurarak

$$\frac{du_\sigma}{d\tau} - g_{\lambda\sigma,\mu} u^\mu u^\lambda + \delta_\sigma^\gamma [\alpha\beta, \gamma] u^\alpha u^\beta = 0$$

ya da ikinci terimde tekrarlanmış  $\lambda$  ve  $\mu$  indisleri sırasıyla  $\alpha$  ve  $\beta$  ile değiştirilerek,

$$\frac{du_\sigma}{d\tau} - g_{\alpha\sigma,\beta} u^\alpha u^\beta + [\alpha\beta, \sigma] u^\alpha u^\beta = 0$$

bulunur. Bu da,  $[\alpha\beta, \sigma]$  açılarak,

$$\frac{du_\sigma}{d\tau} + \left( -g_{\alpha\sigma,\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\sigma,\beta} + \frac{1}{2} g_{\beta\sigma,\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma} \right) u^\alpha u^\beta = 0$$

ve

$$\frac{du_\sigma}{d\tau} - \frac{1}{2} (g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\alpha\beta,\sigma} - g_{\beta\sigma,\alpha}) u^\alpha u^\beta = 0$$

olur. Sol yandaki ikinci terimde  $\alpha$  yerine  $\beta$ ,  $\beta$  yerine  $\alpha$  konarak ikinci ve üçüncü terimler kısalır ve jeodezik denklemi,

$$\frac{du_\sigma}{d\tau} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\sigma} u^\alpha u^\beta = 0 \quad (\text{IV.3.15})$$

şekline sokulmuş olur. Metrik katsayılarının verilmiş olması halinde hareket denklemlerinin, doğrudan (IV.3.15) aracılığıyla belirlenmesi bazı hallerde daha uygun olabilmektedir.

---

#### (IV.4) ERNST KARADELİĞİNİN ALANINDA YÜKLÜ BİR TEST TANECİĞİNİN MÜMKÜN DAİRESEL YÖRÜNGELERİ

Simetri eksenini karadeliğin eksenine çakışık, aksel simetrik bir magnetik alanda bulunan Schwarzschild karadeliğinin çevresindeki aksel simetrik, statik alan (IV.2.1) Ernst metriği ile tasvir olunmakta idi. Bu alanda bulunan taneciğin bir  $e$  yüküne sahip olması halinde hareket denklemleri de farklılıklar göstermektedir. Bu halde, önce, yine Hamilton-Jacobi yöntemiyle Ernst karadeliğinin alanda bulunan yüklü bir taneciğin hareket denklemlerini belirlemek istiyoruz.

Genelleştirilmiş kanonik momentumlar  $\pi_\mu$  ile gösterilerek genelleştirilmiş süper Hamilton fonksiyonunun

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\pi_\mu - eA_\mu)(\pi_\nu - eA_\nu) \quad (\text{IV.4.1})$$

şeklinde olması gerektiğini [10], (IV.4.1) için

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\alpha} \quad , \quad \frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

Hamilton denklemlerinin,

$$\frac{dp^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} p^\gamma p^\beta = eF^{\nu\alpha} p_\alpha$$

şeklindeki, bir magnetik alanın da varlığı halinde yüklü bir taneciğin izleyeceği jeodezikleri belirleyen denklemlere eşdeğer olduğunu göstermek suretiyle §(III.5) 'de belirtmiştik. Dolayısıyla hareket denklemlerini Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlerken hareket noktamız gene (IV.4.1) şeklindeki genelleştirilmiş Süper Hamiltonyen fonksiyonu olacaktır. Öte yandan Ernst alanında bulunan bir taneciğin vektör potansiyelinin sıfırdan farklı tek bileşeninin, standart Schwarzschild koordinatlarında,

$$A_\varphi = \frac{Br^2 \sin^2 \theta}{2\Lambda} \quad (\text{IV.4.2})$$

olduğu kolayca görülür [34,42]. §(IV.2) 'de görmüş olduğumuz gibi, Ernst alanının aksel simetrik ve statik bir alan olması dolayısıyla metrik katsayıları,  $t$  ve  $\varphi$  'ye bağlı olmayıp  $\pi_t$  ve  $\pi_\varphi$  kanonik momentumları,  $E$  ve  $L_z$  taneciğin sonsuzdaki enerjisi ve açısal momentumunun z-bileşeni olmak üzere

$$\pi_t = p_t = -E \quad (\text{IV.4.3})$$

$$\pi_\varphi = p_\varphi + eA_\varphi = L_z \quad (\text{IV.4.4})$$

şeklinde birer hareket sabiti idiler. Ayrıca

$$\left| \vec{p} \right|^2 = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -\mu^2 \quad (\text{IV.4.5})$$

üçüncü bir hareket sabitini temsil etmekte idi. Şimdi  $\pi_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$  olduğunu ve (IV.4.1) 'i göz önünde bulundurarak,

$$\mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial \lambda}$$

şeklindeki Hamilton-Jacobi denklemini açıkça yazacak olursak

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - eA_\alpha \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - eA_\beta \right) = 0 \quad (\text{IV.4.6})$$

olur. Denklemin içerdiği  $g^{\alpha\beta}$  kontravaryant metrik bileşenlerinin (IV.2.5) ile verildiğini göz önünde bulundurarak,



$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right)^2 = 0$$

denklemini,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} - \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \Lambda^{-2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^{-2}}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} - eA_\varphi \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.4.7})$$

olur. (IV.4.7) denklemini

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S_0(t) + S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\varphi) + \bar{S}(\lambda) \quad (\text{IV.4.8})$$

olduğunu varsayıp değişkenlere ayrışım yöntemiyle çözmek istiyoruz. (IV.4.3) ve (IV.4.4) den

$$\pi_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS_0}{dt} = -E$$

$$\pi_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{dS_3}{d\varphi} = L_z$$

olduğundan,

$$S_0(t) = -Et \quad (\text{IV.4.9})$$

$$S_3(\varphi) = L_z \varphi \quad (\text{IV.4.10})$$

dir. Ayrıca (IV.4.5) 'den

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{d\bar{S}}{d\lambda} = -\mathcal{H} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \frac{1}{2} \mu^2$$

nin bir hareket sabiti olduğu bilindiğinden,

$$\bar{S}(\lambda) = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{IV.4.11})$$

olur. (IV.4.9-11) ifadeleri (IV.4.8) 'e taşınarak

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L_z \varphi + S_1(r) + S_2(\theta) \quad (\text{IV.4.12})$$

olursa da  $S$  'yi, (IV.4.7) 'ye yerleştirerek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu^2 - \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \frac{\Lambda^{-2}}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 \\ + \frac{\Lambda^{-2}}{2r^2} \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{2r^2 \sin^2 \theta} (L_z - eA_\varphi)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.4.13})$$

şeklinde, §(IV.2) 'de de görmüş olduğumuz gibi, maalesef ayrıştırılamayan bir denklem elde edilir. Bu nedenle Jacobi aksiyonu aslında,

$$S(t, r, \theta, \varphi, \lambda) = S(r, \theta) - Et + L_z \varphi + \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{IV.4.14})$$

şeklindedir.

Ekvator düzlemindeki bir harekette  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi_\theta = p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ ,  $L_z = L$  olduğundan, aksiyon fonksiyonu,

$$S(t, r, \varphi, \lambda) = S_1(r) - Et + L_z \varphi + \frac{1}{2} \mu^2 \lambda \quad (\text{IV.4.15})$$

ve bu halde,

$$\Lambda = 1 + \frac{B^2 r^2}{4} \quad (\text{IV.2.15})$$

$$A_\varphi = \frac{Br^2}{2\Lambda} \quad (\text{IV.4.16})$$

olmak üzere, (IV.4.13) denklemi

$$\mu^2 - \Lambda^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \Lambda^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{\Lambda^2}{r^2} (L - eA_\varphi)^2 = 0$$

şekline gelir. Bu denklem  $\Lambda^2 r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$  ile çarpılarak düzenlenecek olursa

$$(r - 2M)^2 r \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) [\mu^2 r^2 + \Lambda^2 (L - eA_\varphi)^2] \equiv R(r, E, L, B) \quad (\text{IV.4.17})$$

bulunur. (IV.4.17) 'den  $S_1(r)$ ,

$$S_1(r) = \int \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}(r - 2M)} dr \quad (\text{IV.4.18})$$

şeklinde çekilerek (IV.4.15) 'e yerleştirilecek olursa,

$$S = \frac{1}{2} \mu^2 \lambda - Et + L\varphi + \int \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}(r - 2M)} dr \quad (\text{IV.4.19})$$

olarak bulunur. Aksiyonun, sırasıyla  $\mu^2, E$  ve  $L$  sabitlerine göre türevlerini sıfıra eşitleyerek, hareketi belirleyen denklemler

$$\lambda = \int^r \frac{\Lambda^2 r^{3/2}}{\sqrt{R}} dr \quad (\text{IV.4.20})$$

$$t = \int^r \frac{Er^{5/2}}{(r-2M)\sqrt{R}} dr \quad (\text{IV.4.21})$$

$$\varphi = \int^r \frac{\Lambda^4 (L - eA_\varphi)}{\sqrt{r}\sqrt{R}} dr \quad (\text{IV.4.22})$$

şeklinde elde edilir. (IV.4.20) 'nin  $\lambda$  'ya göre türevi,

$$\Lambda^2 r^{3/2} \dot{r} = \sqrt{R}$$

aracılığıyla (IV.4.21) ve (IV.4.22) 'nin  $\lambda$  'ya göre türevleri düzenlenerek hareket denklemlerinin ilk integralleri de,

$$\Lambda^4 r^3 \dot{r}^2 = R = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r-2M) \left[ \mu^2 r^2 + \Lambda^2 \left( L - \frac{eBr^2}{2\Lambda} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.4.23})$$

$$\dot{t} = \frac{Er}{\Lambda^2 (r-2M)} \quad (\text{IV.4.24})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\Lambda^2}{r^2} \left( L - \frac{eBr^2}{2\Lambda} \right) \quad (\text{IV.4.25})$$

olurlar. (IV.4.23),  $\dot{r} = \frac{dr}{d\lambda} = \mu \frac{dr}{d\tau}$  olduğuna dikkat ederek

$$\Lambda^4 r^3 \mu^2 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) \left[ \mu^2 r^2 + \Lambda^2 \left( L^2 + \frac{e^2 B^4 r^4}{4\Lambda^2} - \frac{eBL}{\Lambda} r^2 \right) \right]$$

ve  $\mu^2$  ile bölüp  $\frac{E}{\mu} \equiv \tilde{E}$ ,  $\frac{L}{\mu} \equiv \tilde{L}$ ,  $\frac{R}{\mu^2} \equiv \tilde{R}$  ve  $\varepsilon \equiv \frac{eB}{\mu}$  koyarak

$$\Lambda^4 r^3 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \tilde{R} = \tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) \left[ r^2 + \Lambda^2 \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.4.26})$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklemin sol yanından esinlenerek,  $\tilde{R}$  hareketin efektif potansiyeli olarak alınabilecektir. Buna göre, dairesel yörüngeler için  $\tilde{R} = 0$  ve  $\frac{d\tilde{R}}{dr} = 0$  olacağı hatırlanarak (IV.4.25) 'den

$$\tilde{E}^2 r^3 - \Lambda^2 (r - 2M) \left[ r^2 + \Lambda^2 \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{IV.4.27})$$

$$\begin{aligned} & 3\tilde{E}^2 r^2 - \Lambda B^2 r (r - 2M) \left[ r^2 + \Lambda^2 \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^2 \right] - \Lambda^2 \left[ r^2 + \Lambda^2 \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^2 \right] \\ & - \Lambda^2 (r - 2M) \left[ 2r + \Lambda B^2 r \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^2 - 2\varepsilon r \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.4.28})$$

olur. (IV.4.27) 'den  $\tilde{E}^2$  çekilir de

$$\ell \equiv \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \quad (\text{IV.4.29})$$

konursa,

$$\tilde{E}^2 = \frac{\Lambda^2}{r^3} (r - 2M) (r^2 + \Lambda^2 \ell^2) \quad (\text{IV.4.30})$$

olur. Bu da (IV.4.28) 'de yerine konarak elde edilen denklem düzenlenecek olursa,

$$\left[ \frac{3\Lambda^4}{r}(r-2M) - 2\Lambda^3 B^2(r-2M)r - \Lambda^4 \right] \ell^2 + 2\varepsilon \Lambda^2(r-2M)r \ell + \Lambda^2(r-2M)r - \Lambda^2 r^2 - \Lambda B^2(r-2M)r^3 = 0 \quad (\text{IV.4.31})$$

şeklinde  $\ell$  'ye göre ikinci dereceden bir denklem elde edilir. (IV.4.31),

$$\alpha \equiv \Lambda^3 \left[ \frac{3\Lambda(r-2M)}{r} - 2B^2(r-2M)r - \Lambda \right]$$

$$\beta \equiv \varepsilon \Lambda^2(r-2M)r$$

$$\gamma \equiv \Lambda \left[ \Lambda(r-2M)r - \Lambda r^2 - B^2(r-2M)r^3 \right]$$

koyarak

$$\alpha \ell^2 + 2\beta \ell + \gamma = 0$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Bu denklemin diskriminantı, uzunca bir düzenlemeden sonra,

$$D = \beta^2 - \alpha \gamma = \Lambda^2 \left\{ \varepsilon^2 r^2 (r-2M)^2 - \Lambda^3 (r-2M) \left[ 3\Lambda(r-2M) - 4\Lambda r - 5B^2(r-2M)r^2 + \Lambda r^2 + 3B^2 r^3 + \frac{2B^4}{\Lambda}(r-2M)r^4 \right] \right\} \equiv \Lambda^2 d \quad (\text{IV.4.34})$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (IV.4.33) 'ün iki bağımsız çözümü,

$$\ell^\pm = \left( \tilde{L} - \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \right)^\pm = \frac{-\varepsilon \Lambda (r-2M)r \pm \sqrt{d}}{\Lambda^2 \left[ \frac{3\Lambda(r-2M)}{r} - 2B^2(r-2M)r - \Lambda \right]} \quad (\text{IV.4.35})$$

ve taneciğin birim kütle başına açısal momentumu,

$$\tilde{L}^\pm = \frac{-\varepsilon \Lambda (r-2M)r \pm \sqrt{d}}{\Lambda^2 \left[ \frac{3\Lambda(r-2M)}{r} - 2B^2(r-2M)r - \Lambda \right]} + \frac{\varepsilon r^2}{2\Lambda} \quad (\text{IV.4.36})$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadedeki (+) işaretinin yörünge açısal momentumunun z-ekseninin pozitif yönüne, (-) işaretinin ise negatif yönüne karşılık geldiğini hatırlatalım.

Şimdi, (IV.4.35) 'in karesi alınır da (IV.4.30) 'da yerine konacak olursa, gerekli düzenleme ve sadeleştirmelerden sonra  $\tilde{E}^2$ ,

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r-2M)}{r \left[ 3\Lambda(r-2M) - 2B^2(r-2M)r^2 - \Lambda r \right]^2} \left\{ \Lambda^2 \left[ 3\Lambda(r-2M) - 2B^2(r-2M)r^2 - \Lambda r \right]^2 + \varepsilon^2 \Lambda^2 (r-2M)r^2 \pm 2\varepsilon \Lambda (r-2M)\sqrt{d} + d \right\}$$

ve

$$\mathcal{A}^\pm \equiv \Lambda^2 \left[ 3\Lambda(r-2M) - 2B^2(r-2M)r^2 - \Lambda r \right]^2 + \varepsilon^2 \Lambda^2 (r-2M)r^2 \pm 2\varepsilon \Lambda (r-2M)\sqrt{d} + d$$

koyarak kısaca,

$$\tilde{E}^2 = \frac{4\mathcal{A}^\pm(r-2M)}{r[3\Lambda(r-2M) - 2B^2(r-2M)r^2 - \Lambda r]^2}$$

ve  $\Lambda = \frac{4+B^2r^2}{4}$  'de yerine konarak,

$$\tilde{E}^2 = \frac{4(r-2M)\mathcal{A}^\pm}{r(-12M + 4r - 2B^2r^3 + 5MB^2r^2)^2} \quad (\text{IV.4.38})$$

bulunur.  $\Lambda, d$  ve  $\mathcal{A}^\pm$  'da yerine konduğunda (IV.4.36) ve (IV.4.38) 'in  $r$  'ye bağlı oldukça uzun ifâdeleri, dairesel yörüngelere karşılık, taneciğin birim kütle başına açıl momentumu ve enerjisini belirlemektedirler.

Işık cinsinden, mümkün dairesel yörüngeleri belirlemek bakımından  $\tilde{E}^2$  'nin (IV.4.38) ile verilen ifâdesi yeterli olup bunun paydasını sıfır yapan

$$-12M + 4r - 3B^2r^3 + 5MB^2r^2 = 0$$

denkleminin reel kökleri dairesel foton yörüngelerine karşılık düşerler. Bu denklem ise (IV.2.43) denkleminde başka bir şey olmayıp bu hâlde de ışık cinsinden yörüngeler §(IV.2) 'de bulduğumuz yörüngelerden farklı olmazlar. Her ne kadar taneciğin, (IV.4.36) ve (IV.4.38) şeklinde belirlemiş olduğumuz, açıl momentumu ve enerjisi, yüksüz olması halinden çok farklı olsa da zaman cinsinden mümkün dairesel yörüngeler yine, §(IV.2) 'de irdelemiş olduğumuz, (IV.2.41) ve (IV.2.42) ile belirlenen mümkün iki dairesel foton yörüngesinin sınırladığı yörüngeler olmaktadır. Bu sonuç tezimizin özgün kısmını oluşturmaktadır.



## V. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Einstein'ın gravitasyon alan denklemlerinin fiziksel anlama sahip çözümleri aracılığıyla tasvir olunan Schwarzschild, Kerr, Kerr-Newman ve birleştirilmiş Einstein-Maxwell denklemlerinin tek kesin çözümünün belirlediği Ernst karadelikleri ve bunların alanında bir test taneciğinin hareketi ele alınıp incelenmiştir. Bütün bu hallerden yalnızca Schwarzschild karadelikleri için genel halde hareket denklemlerinin, analitik olarak, kesin çözümleri bulunabilmekte; diğerleri için genel halde hareket ancak nümerik integrasyonla incelenebilmektedir. Bununla beraber bazı özel hallerde kesin çözümlere ulaşmak mümkün olabilmektedir. Bunların en önemlisi de karadeliğin yığılma diskini temsil eden ekvator düzlemindeki dairesel yörüngelerin belirlenmesi halidir. Enerji yayınımlı karadeliğin yığılma diskindeki olayların bir sonucudur. Karadeliğin çevresine toplayıp emmekte olduğu gaz, karadelik ufkuna ulaşmadan önce adyabatik sıkışma, şok dalgaları, türbülans, viskozite gibi nedenlerle aşırı derecede ısınır ve X-ışınları ile gamma ışınları yayımlar. Ayrıca, yığılma diskindeki gazın içerdiği yüklü taneciklerin (genellikle elektronlar) ivmeli hareketlerinin yol açtığı synkrotron ışınması, bu enerji emisyonuna katkıda bulunur. Öte yandan karadeliğin çevresinde, kararsız kapalı yörüngelerde bulunan taneciklerin, spiraller çizerek karadeliğe düşmeleri sonucu serbest kalan bağ enerjileri, bu enerji yayınımlının en önemli kısmını oluşturmaktadır. Bu bakımdan özellikle kararsız dairesel yörüngelerin ve özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu yüzden tezimizde ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeler ve özelliklerinin belirlenmesi problemi ele alınmış bulunmaktadır.

Çalışmamızda göz önüne alınan bütün karadelik modellerinde hareket denklemleri genel halde, Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlendikten sonra ekvator düzlemindeki dairesel yörüngeleri elde etmek üzere radyal hareketin etkin (efektif) potansiyelini uygun bir biçimde tanımlayıp, dönüm noktaları için efektif potansiyelin; dairesel yörüngeler için de efektif potansiyelin türevinin sıfır olduğu göz önüne alınarak bu yörüngelerdeki taneciğin enerjisi ve açısal momentumu belirlenmektedir. Taneciğin enerjisinin ifadesinden hareketle, paydasını sıfır yapan  $r$  değerleri aracılığıyla foton yörüngeleri, ayrıca bağ enerjisinin sıfır olduğu; bağlı yörüngelerin sınırına karşılık gelen yörünge de enerjisini sükunet enerjisi ile değiştirmek suretiyle belirlenmektedir. Öte yandan, bilindiği gibi efektif potansiyelin ikinci türevinin

işareti de kararlı ve kararsız yörüngeleri belirlemek açısından önem taşımaktadır. Bu husus göz önünde bulundurularak kararsız yörüngelerin üst sınırı belirlenebilmektedir.

Yukarıda ana hatlarıyla belirtmiş olduğumuz program çerçevesinde, önce Schwarzschild karadeliğinin ekvator düzlemindeki bir test taneciğinin dairesel yörüngelerde sahip olacağı enerjisi ve momentumu belirlendikten sonra  $r_f$  foton yörüngesinin yarıçapı ve maddesel tanecikler için de bağlı yörüngelerin sınırını belirleyen ve aynı zamanda mümkün bütün parabolik yörüngelerin perihellerinin minimumuna karşılık gelen  $r_{ub}$  uç bağlı yörüngesinin yarıçapı bulunduğundan sonra kararlı ve kararsız yörüngeleri ayıran  $r_{uk}$  uç kararlı dairesel yörüngesinin yarıçapı elde edilmiştir. Bu şekilde, kararsız yörüngelerin üst sınırındaki yörüngede bulunan taneciğin bağ enerjisi hesaplanabilmiştir. §(III.2) 'de spine de sahip Kerr karadeliğinin alanında bulunan test taneciğinin hareket denklemleri, Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlendikten sonra genel halde kesin analitik çözümleri bulunamayan, ancak nümerik integrasyonla incelenebilen bu denklemlerden hareketle, §(III.3) ve §(III.4) 'de, yukarıda ayrıntılarını verdiğimiz programa uygun olarak ekvator düzlemindeki hareketin bütün ayrıntıları, çok daha uzun hesaplardan sonra elde edilmiş ve  $r_f$  foton yörüngesi,  $r_{ub}$  uç bağlı yörüngesinin yarıçapı,  $r_{uk}$  uç kararlı dairesel yörüngesinin yarıçapı ve bu yörüngede bulunan taneciğin karadeliğe düşmesiyle serbest kalacak bağ enerjisi hesaplanabilmiştir. §(III.5) 'de, spine aynı zamanda sabit bir  $Q$  yüküne sahip Kerr-Newman karadeliğinin alanında bulunan test taneciğinin hareket denklemleri genel halde, Hamilton-Jacobi yöntemiyle elde edilmiştir. Bu denklemlerin de kesin çözümleri bulunamamakta fakat nümerik integrasyonla hareketin özellikleri incelenebilmektedir. §(III.6) 'da Kerr-Newman karadeliğinin ekvator düzlemindeki yüklü bir test taneciğinin dairesel yörüngelerini belirleme problemi ele alınmış, ancak bu yörüngelerde bulunan taneciklerin  $E$  enerjilerini ve dolayısıyla açısal momentumlarını belirleme olanağı sağlayacak denklemler aşırı derecede uzun ve karmaşık olduklarından kesin çözüme ulaşılamamıştır. Bu konudaki çalışmalarımız devam etmektedir.

Tezimizin 'Bulgular' başlığını taşıyan IV. ve en önemli bölümünde, birleştirilmiş Einstein-Maxwell denklemlerinin tek kesin çözümü olan Ernst karadeliğinin alanında bulunan taneciğin hareketi ele alınmış ve önce §(IV.2) 'de yüksüz bir test taneciğinin hareket denklemleri Hamilton-Jacobi yöntemiyle ele alınmış bulunmaktadır. Son yıllardaki astrofiziksel gözlemler galaksi çekirdeklerinde yer alan süper kütleli dev karadeliklerden

gelen çok güçlü ışımayı tasvir etmek bakımından, Ernst modelinin diğerlerine göre çok daha uygun olduğunu kuvvetle telkin etmektedir. Dolayısıyla bu halde elde edilen sonuçlar büyük bir önem taşımaktadır. Ancak bu halde hareket denklemlerini belirleyecek Hamilton-Jacobi denklemleri genel halde ayrıştırılamamakta ve genel halde hareket denklemleri elde edilememektedir. Bununla beraber, özellikle ilgilendiğimiz ekvator düzlemindeki hareket için belirlenebilen hareket denklemleri yardımıyla son derece ilgi çekici sonuçlara ulaşılabilmektedir. Bu halde, kesin ifâdeleri bulunabilmiş olan taneciğin enerjisi ve açısal momentumundan hareketle, ekvator düzleminde maddesel taneciklere karşıdüşen dairesel yörüngelerin, yarıçapları kesin olarak belirlenmiş iki foton yörüngesiyle sınırlanmış bulunduğunu ve karadeligi çevreleyen magnetik alanın büyüklüğünün belirlediği özel bir halde de bu iki yörüngenin çakıştığı ve maddesel taneciklerin yörüngelerinin alt sınırını oluşturduğu saptanmıştır. Bu halde bulunan sonuçlar, tamamen farklı bir yoldan, E. P. Esteban'ın bulduğu sonuçlarla [36] tam olarak uyuşmaktadır. §(IV.4) 'de, Ernst karadeliginin alanında, bu kez yüklü bir test taneciğinin ekvator düzlemindeki hareketine karşıdüşen denklemler ve hareketin efektif potansiyeli Hamilton-Jacobi yöntemiyle belirlenmiş ve dairesel yörüngelerde bulunan yüklü taneciğin enerjisi ve açısal momentumu, yüksüz taneciğinkilerle kıyaslandığında çok farklı, daha uzun ve karmaşık ifadelerle, fakat kesin olarak saptanabilmiştir. Bununla beraber bu halde  $E$  ve  $L$  'nin ifadelerinden hareketle, taneciğin dairesel yörüngeleri, yüksüz tanecik için olduğu gibi, yine aynı iki foton yörüngesiyle sınırlanmış yörüngeler olarak elde edilebilmekte ve yörüngelerin bu özelliği değişmemektedir. Bu sonuç tezimizin özgün kısmını oluşturmaktadır.

Kerr-Newman karadelikleri için ekvator düzlemindeki dairesel yörüngelere ilişkin  $E$  ve  $L$  'yi veren denklemin kesin çözümleri bugüne kadar bulunamamış olmakla birlikte göz önüne aldığımız yaklaşımla sonuç almayı ummaktayız. Kesin çözümlere ulaşamadığımız çalışmalarımız sürmektedir. Öte yandan Ernst alanında gerek yüksüz, gerekse yüklü taneciklerin dairesel yörüngelerinin sınırları belirlenmiş olmakla birlikte,  $\frac{d^2V_r}{dr^2} = 0$  koşulunu sağlayan uç kararlı yörüngenin yarıçapı her iki halde de belirlenememiştir. Enerji emisyonu açısından programın en önemli adımını oluşturan bu husus ilerde yapacağımız bir çalışmanın konusuna temel oluşturacaktır.

**KAYNAKLAR**

- [1] RHOADES, C., RUFFINI, R. (1974): Maximum Mass of a Newton Star, *Phys. Rev. Lett.*, 32,324.
- [2] PENROSE, R. (1969): Gravitational Collapse: the Role of General Relativity, *Riv. Nuovo Cimento*, 1, 252.
- [3] HAWKING, S.W. (1975): Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.*, 43, 199.
- [4] HAWKING, S.W. (1971): Gravitationally Collapsed Object of Very Low Mass, *MNRAS*, 152, 75.
- [5] DAYLAN, G., ZEBİTAY, Ş. (2000): A New Model for the Formation of Mini Black Holes, *GRG*, 32, 1241.
- [6] CHARLES, P.A. (1999): *Theory of Black Hole Accretion Disks*, Cambridge Univ. Press, Ed., Abramovicz, M. A., Björnsson, G., Pringle, J. E.
- [7] MERRIT, D., OH, S.P. (1997): *AJ*, 113, 1279.
- [8] REES, M.J. (1998): *Black Holes and Relativistic Stars*, Chicago Univ. Pres, Ed., Wald, R. M.
- [9] CIACCONI, R., RUFFINI, R. (Ed.) (1980): *Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes*, North Holland.
- [10] GOLDSTEIN, H. (1980): *Classical Mechanics*, Addison Wesley.
- [11] WEINBERG, S. (1972): *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons.

- [12] MISNER, C.W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. (1973): Gravitation, W. H. Freeman and Company.
- [13] ADLER, R., BAZIN, M., SCHIFFER, M. (1975): Introduction to General Relativity, McGraw Hill.
- [14] KERR, R. P. (1963): Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics, Phys. Rev. Lett., 11, 237.
- [15] BOYER, R. H., LINDQUIST, R. W. (1967): Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric, J. Math. Phys., 8, 265.
- [16] CARTER, B. (1968): Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields, Phys. Rev., 174, 1559.
- [17] WILKINS, D. (1972): Bound Geodesics in the Kerr Metric, Phys. Rev. D, 5, 814.
- [18] JOHNSTON, M., RUFFINI, R. (1974): Generalized Wilkins Effect and Selected Orbits in a Kerr-Newman Geometry, Phys. Rev. D, 10, 2324.
- [19] LIGHTMAN, A. P., PRESS, W. H., PRICE, R. H, TEUKOLSKY, S. A. (1975): Problem Book in Relativity and Gravitation, Princeton Univ. Press.
- [20] NOVIKOV, I. D., FROLOV, V. P. (1998): Physics of Black Holes, Kluwer Academic Publishers.
- [21] CHANDRASEKHAR, S. (1992): The Mathematical Theory of Black Holes, Oxford Univ. Press.
- [22] BARDEEN, J.M., PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A. (1972): Rotating Black Holes: Locally Nonrotating Frames, Energy Extraction and Scalar Synchrotron Radiation, Astrophys. J., 178, 347.

- [23] SHAPIRO, S. L., TEUKOLSKY, S. A. (1983): Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars, John Wiley and Sons.
- [24] NEWMAN, E. T., COUCH, E., CHINNAPARED, K., EXTON, A., PRAKASH, A., TORRENCE, R. (1965): Metric of a Rotating, Charged Mass, *J. Math. Phys.*, 6, 918.
- [25] JACKSON, J. D. (1975): *Classical Electrodynamics*, John Wiley.
- [26] NORDSTROM, G. (1918): On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20, 1238.
- [27] ERNST, F. J. (1976): Black Holes in a Magnetic Universe, *J. Math. Phys.*, 17, 54.
- [28] MELVIN, M. A. (1964): Pure Magnetic and Electric Geons, *Phys. Lett.*, 8, 65.
- [29] MELVIN, M. A. (1965): Dynamics of Cylindrical Electromagnetic Universes, *Phys. Rev. B*, 139, 225
- [30] HISCOCK, W. A. (1981): On Black Holes in Magnetic Universes, *J. Math. Phys.*, 22, 1828
- [31] REES, M. J. (1998): *Black Holes and Relativistic Stars*, Ed. Wald, R. M., Chicago Univ. Pres.
- [32] KARDASHEV, N. S. (1995): Magnetic Fields in AGNs and Microquasars, *MNRAS*, 276, 515
- [33] PRASANNA, A. R., VISHVESHWARA, C. V. (1978): Charged Particle Motion in an Electromagnetic Field on Kerr Background Geometry, *Pramana*, 11, 359.
- [34] DADHICH, N., HOENSELARS, C., VISHVESHWARA, C. V. (1979): Trajectories of Charged Particles in the Static Ernst Space-Time, *J. Phys. A*, 12, 215.

- [35] PRASANNA, A. R., CHAKRABORTY, D. K. (1980): Charged Particle Orbits in Kerr Geometry With Electromagnetic Fields as Viewed From Locally Non-Rotating Frames, *Pramana*, 14, 113.
- [36] ESTEBAN, E. P. (1984): Geodesics in the Ernst Metric, *Nuovo Cimento B*, 79, 76.
- [37] ESTEBAN, E. P. (1985): Apsidal Motion in the Ernst Space-Time, *Nuovo Cimento B*, 87, 35.
- [38] ALIEV, A. N., GALTISOV, D. V. (1989): Magnetized Black Holes, *Sov. Phys. Usp*, 32, 75.
- [39] ALIEV, A. N., GALTISOV, D. V. (1989): Exact Solutions for Magnetized Black Holes, *Astrophysics and Space Science*, 155, 181.
- [40] KARAS, V., VOKROUHLICKY, D. (1990): Test Particle Motion Around a Magnetized Schwarzschild Black Hole, *Class. Quantum Gravity*, 7, 391.
- [41] ALIEV, A. N., ÖZDEMİR, N. (2002): Motion of Charged Particles Around a Rotating Black Hole in a Magnetic Field, *MNRAS*, 336, 241.
- [42] FELICE, F., SORGE, F. (2003): Magnetized Orbits Around a Schwarzschild Black Hole, *Class. Quantum Grav.*, 20, 469.
- [43] SPIEGEL, M. R. (1968): *Mathematical Handbook*, McGraw Hill.
- [44] WALD, R. (1974): Black Hole in a Uniform Magnetic Field, *Phys. Rev. D*, 10, 1680
- [45] MELVIN, M., WALLINGFORD, J. S. (1966): Orbits in a Magnetic Universe, *J. Math. Phys.*, 7, 333.

**ÖZGEÇMİŞ:**

Adı-Soyadı : Diyadin Can  
Doğum tarihi ve yeri : 01.04.1978 / DİYARBAKIR  
Eğitim : İstanbul Üniversitesi, Fen Fak., Fizik Bölümü, Lisans, İSTANBUL  
Orhan Cemal Fersoy Lisesi, Süper Bölümü, İSTANBUL  
Kâzım Karabekir Ortaokulu, VAN  
Fatih İlkokulu, SİVAS  
Yabancı dil : İngilizce  
Elektronik posta : diyadincan@yahoo.com  
diyadin@physicist.net