İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CHEN EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UZAY FORMLARINA UYGULAMALARI

Handan YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Bedriye M. ZEREN

Haziran, 2006

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Chen eşitsizlikleri ve bazı uzay formlarına uygulamalarının ele alınmış olduğu bu yüksek lisans tezi çalışması için danışmanım Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN'e ve tez konusunu belirleyip tezin hazırlanması süreci içerisindeki yardımlarından dolayı değerli hocam Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Haziran, 2006 **Handan YILDIRIM**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

M^n	: n-boyutlu manifold
$\Im\left(M^n\right)$	: M^n üzerinde tanımlı C^∞ -sınıfından fonksiyonların kümesi
$T_p\left(M^n\right)$	: $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzay
$T_p^\perp\left(M^n\right)$	: $p \in M^n$ noktasındaki normal uzay
$\mathcal{X}\left(M^n\right)$	: M^n üzerinde tanımlı C^∞ -sınıfından tanjant vektör alanlarının kümesi
$\mathcal{X}^\perp\left(M^n\right)$	: M^n üzerinde tanımlı C^∞ -sınıfından normal vektör alanlarının kümesi
g	: metrik tensör alanı
∇	: afin koneksiyon
R	: Riemann eğrilik tensör alanı
τ	: skaler eğrilik fonksiyonu
$\bar{K}$	: Gauss eğriliği
K	: kesit eğriliği
A	: ikinci temel tensör alanı
$\nabla^\perp$	: normal koneksiyon
h	: ikinci temel form
$\langle \, , \rangle$	: iç çarpım operatörü
C	: Weyl'in konformal eğrilik tensör alanı
K	: konharmonik eğrilik tensör alanı
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
E^m	: m -boyutlu Öklid uzayı
$R^m\left(c\right)$	: sabit c kesit eğrilikli m -boyutlu Riemann uzay formu
H	: ortalama eğrilik vektörü
$\left\|h\right\|$	: h ikinci temel formunun normu
$\left\|h\right\|^2$	: h ikinci temel formunun normunun karesi
$\left\|H\right\|$	: H ortalama eğrilik vektörünün uzunluğu
H^2	: H ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi
ρ	: normalize edilmiş skaler eğrilik
$\rho^\perp$	: normal skaler eğrilik
$\left(M, g\right)$	: g metriğine sahip M manifoldu
$\left(\tilde{\nabla}_X \xi\right)^{\tan}$	: $\tilde{\nabla}_X \xi$ in tanjant bileşeni
$BoyL_j$	: L_j nin boyutu
$Ger\left\{e_{i_1}, ..., e_{i_j}\right\}$	: küme içindeki vektörlerin gerdiği uzay

ÖZET

CHEN EŞİTSİZLİKLERİ VE BAZI UZAY FORMLARINA UYGULAMALARI

Bu tezin temel amacı, Chen eşitsizlikleri ve bazı uzay formlarına uygulamalarını incelemektir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölüm, eğrilikler hakkındaki bazı tarihi bilgiler yanında B.Y. Chen tarafından tanımlanan ve Riemann değişmezleri olarak adlandırılan kavramların genel bir değerlendirmesine ayrılmıştır.

İkinci bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2.1. de, tez kapsamında gerekli olacak tanımlar ve temel teoremler verilmiştir. Bölüm 2.2. de, yeni tip Riemann eğrilik değişmezleri sunulmuştur. Bölüm 2.3. te, Riemann uzay formları, Einstein uzayları ve konformal düz uzaylar karakterize edilmiştir. Bölüm 2.4. ün ilk kısmında, Riemann uzay formları için Chen eşitsizlikleri ve onların eşitlik halleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Burada, ilk olarak $\delta(n_1,...,n_k)$ yı içeren kuvvetli eşitsizlikler ve sonra keyfi dik boyutlu altmanifoldlar için Ricci eğriliği ve şekil operatörü arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca Chen eşitliğini sağlayan bazı özel altmanifoldlar çalışılmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında ise keyfi Riemann altmanifoldları için genel bir optimal eşitsizlik ele alınmıştır. Bölüm 2.5. te, altmanifold teorisinde özel bir noktasal eşitsizlik çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde, bir Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş tümel jeodezik Riemann uzay formlarının bazı karakterizasyonları ve bununla birlikte her bir karakterizasyon için keyfi dik boyutlu bir Riemann manifoldunun Öklid uzayına bir Riemann uzay formu olarak minimal izometrik şekilde dahil edilebilmesi için gerekli olan bir koşul elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise yapılan çalışma ile ilgili bir değerlendirme yer almaktadır.

SUMMARY

CHEN'S INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS TO SOME SPACE FORMS

The main purpose of this thesis is to investigate Chen's inequalities and their applications to some space forms.

The study consists of four parts. In the first part, a general evaluation of some historical facts about curvatures and further improvements of them called Riemannian invariants which have been defined by B.Y. Chen are presented.

The second part includes five sections. In section 2.1. some definitions and fundamental theorems that will be needed in the content of the thesis are given. In section 2.2. some new types of Riemannian curvature invariants are presented. In section 2.3. Riemannian space forms, Einstein spaces and conformally flat spaces are characterized. In the first part of section 2.4. Chen's inequalities and the equality cases of them for Riemannian space forms are examined. In this part, firstly sharp inequalities involving $\delta\left(n_1,...,n_k\right)$ and then relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions are investigated. Moreover some special submanifolds which satisfy Chen's equality are studied. In the second part of this section, a general optimal inequality for arbitrary Riemannian submanifolds is looked over. In section 2.5. a special pointwise inequality in submanifold theory is studied.

In the third part, some characterizations of totally geodesic Riemannian space forms isometrically immersed in a Riemannian space form are obtained and also for each characterization a necessary condition for a Riemannian manifold to be a Riemannian space form and minimal in any Euclidean space regardless of codimension is obtained.

An evaluation of this study is placed in the fourth part.

1. GİRİŞ

Altmanifoldlar, matematik analizin keşfinden itibaren çalışılmaya başlanmış; önce düzlem eğrilerinin eğrilikleri hesaplanmış ve sonra E^3 teki yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri tanımlanmıştır. Ortalama eğrilik, yüzeyin kapsanıldığı üst uzaydan kaynaklanan ve yüzeyin direncine karşılık gelen yüzey gerilimidir. Yüzeyin Gauss eğriliği, üst uzaydan bağımsız içsel bir değişmez olmasına karşın; ortalama eğrilik, yukarıdaki nedenden dolayı dışsal bir değişmezdir. Gauss eğriliğinin izometrik deformasyonlar altında korunmasına karşın, ortalama eğrilik gibi dışsal çoklukların bu özellikte olmaması Riemann manifoldlarının varlığını ortaya koymuştur. Bu gerçek, Einstein'ın relativite teorisinin matematik temelini oluşturmuştur. 1970 yılında, S.S. Chern tarafından Riemann manifoldlarının içsel karakteristikleri Riemann değişmezleri olarak tanımlanmış ve bu değişmezlerin bir Riemann manifoldunun genel yapısını etkilediği öne sürülmüştür. Eğrilik invaryantları da denilen bu değişmezler fizikte de önemli bir rol oynar. Örneğin; bir cismi büyüklüğü sabit bir hızla hareket ettirmek için gereken kuvvetin büyüklüğü, cismin hareket yörüngesinin eğriliğinin sabit bir katı olmalıdır. Aynı şekilde yerçekimine maruz kalan bir cismin hareketi, Einstein'a göre içinde bulunduğu uzay zamanın eğriliği tarafından belirlenir [1]. Sabun köpüğünün baloncuklarından kırmızı kan hücrelerinin şekline kadar E^3 teki yüzeylerin belirlediği bütün şekiller çeşitli eğrilikler tarafından belirlenir [2]. Bu eğriliklerin başlıcaları Riemann manifoldları için tanımlayacağımız ve içsel olan kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skaler eğriliktir; dışsal olan ise ortalama eğriliktir. Bu doğrultuda sabun köpüğü baloncuklarının veya uzaydaki yıldız ve gezegenlerin en ideal şekillerinin yaklaşık olarak küresel olma nedeni, Alexandrov'un kanıtladığı, E^3 te sabit ortalama eğriliğe sahip kompakt yüzeylerin küreler olduğu gerçeğidir. Bu gerçek, sonra S.-Y. Cheng ve S.-T. Yau tarafından yazılan "Hypersurfaces with constant scalar curvature" başlıklı makalede genelleştirilmiş [3] ve daha sonra A. Ros tarafından 1988 yılında en güzel biçimiyle yeniden kanıtlanmıştır [4].

$\mathbb{R}^3$ te bir S yüzeyinin k_1, k_2 asal eğrilikleri ile $\overline{K}$ Gauss eğriliğinin önemli bir karakterizasyonu, Σ birim küresi için

$$\begin{aligned} \overline{g} &: S \to \Sigma \\ p &\mapsto N(p) \end{aligned}$$

şeklinde, N birim normal vektör alanı tarafından tanımlanan Gauss dönüşümü sayesinde şöyle verilir:

$$\left|\overline{K}\right| = \left|\det\left(d\overline{g}_p\right)\right| = \lim_{U \downarrow \{p\}} \frac{\overline{g}(U) \text{ nun alanı}}{U \text{ nun alanı}},$$

burada limit p nin U komşuluklarının p noktasına büzülmesi olarak alınmaktadır [2].

Eğer S, $\mathbb{R}^n$ de bir hiperyüzey; N, $p \in S$ de tanımlı birim normal ve S üzerinde bir $\alpha(s)$ eğrisi, s yay uzunluğu ve $\alpha(0) = 0$ olacak biçimde verilmiş ise $\alpha''(0)$ eğrilik vektörü, N doğrultusunda sadece $\alpha'(0) = t$ birim tanjant vektörüne bağlı bir bileşene sahiptir ve eğri, p noktasındaki $N(p)$ ve $t(p)$ tarafından gerilen düzlemin S ile arakesiti olan eğri ise, yani normal kesit eğrisi ise bu eğrilik eğrinin birinci eğriliğine eşit olur ve $\left\langle \alpha''(s), N \right\rangle = k\left(t(s)\right)$, α eğrisinin normal eğriliği olarak adlandırılır. Eğer $\left\{e_1, ..., e_{n-1}\right\}$, $p \in S$ de tanjant uzayın ortonormal bir bazı ise normal eğriliğin bu tanımından,

$$k_1 = k\left(e_1\right), ..., k_{n-1} = k\left(e_{n-1}\right)$$

çoklukları S nin p noktasındaki asal eğrilikleri olarak tanımlanır. Buna göre S nin bir p noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla

$$\overline{K} = k_1 ... k_{n-1} = (-1)^{n-1} \det\left(d\overline{g}_p\right)$$

ve

$$\overline{H} = \frac{1}{n-1}\left(k_1 + ... + k_{n-1}\right) = -\frac{1}{n-1}\dot{I}z\left(d\overline{g}_p\right)$$

şeklinde tanımlanır. Asal eğriliklerin simetrik fonksiyonlarına yüksek mertebeden ortalama eğrilikler denir ve

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+tk_j\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}H_j t^j$$

bağıntısıyla verilen H_j ler, j. mertebeden ortalama eğrilikler olarak adlandırılır. Kolayca görüleceği üzere, $H_1 = \overline{H}$ ve $H_{n-1} = \overline{K}$ iken, H_2 skaler eğriliği tanımlamaktadır. $\mathbb{R}^3$ teki yüzeyler için k_1, k_2 ve $\overline{H}$ içsel çokluklar olmamasına karşın; $k_1 k_2$ Gauss eğriliğinin içsel olduğu, yani yüzeyin birinci temel formu ile onun türevinden elde edilebileceği gerçeği, Gauss tarafından kanıtlanmış olan ünlü "Gauss' Theorema Egregium" dan başka bir şey değildir [2].

m-boyutlu bir M Riemann manifoldunun, Nash'in embedding teoremine [5] uygun olarak bulunacak bir n için $\mathbb{R}^n$ de bulunduğunu göz önüne alabiliriz ve $p \in M$ deki tanjant uzayda bulunan lineer bağımsız v ve w vektörleri tarafından gerilen π düzleminin kesit eğriliğini,

$$K_\pi = K\left(v, w\right)$$

şeklinde p deki Gauss eğriliği olarak tanımlarız. $p \in M$ deki tanjant uzayın ortonormal bir bazı $\left\{e_1, ..., e_m\right\}$ ise M nin p deki skaler eğriliğini de seçilen bu bazdan bağımsız olarak,

$$\tau = 2\sum_{1 \le i < j \le m} K\left(e_i, e_j\right)$$

şeklinde tanımlarız. Özel olarak $\mathbb{R}^n$ de bir M hiperyüzeyi için $e_1,...,e_{n-1}$ $p \in M$ nin asal eğrilik doğrultuları olarak seçilirse, $K\left(e_i, e_j\right) = k_i k_j$ olacağından, $\tau = 2 \sum\limits_{1 \le i < j \le n-1} k_i k_j$ veya $\tau = (n-1)(n-2)H_2$ buluruz. Bir birim tanjant x vektörü için M nin p noktasında x doğrultusundaki Ricci eğriliği, $Ric(x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} K\left(x, e_i\right)$ bağıntısıyla ve bir Einstein manifoldu da sabit Ricci eğriliğine sahip bir Riemann manifoldu olarak tanımlanır.

S.-T. Yau, [6] da Nash'in ünlü embedding teoremine işaret ederek, "Soyut bir manifoldu izometrik olarak uygun bir şekilde Öklid uzaylarına dahil etmede sorunumuz var, Nash'in teoreminin eksik yönü nedir ki, dışsal çoklukları içsel çokluklar bakımından kontrol edemiyoruz?..." derken; S.S. Chern, 1968'de [7], pozitif Ricci eğriliğe sahip olma dışında, bir Riemann manifoldunun bir Öklid uzayına minimal şekilde dahil edilmesini engelleyen başka içsel çoklukların olup olmadığını sorguluyor. Bu soruların kısmi yanıtları ve uygulamaları B.Y. Chen tarafından yazılan bir seri makalede detaylı biçimde verilmiştir [1,8-14]. Ayrıca keyfi bir Riemann manifoldunun keyfi bir Riemann manifolduna minimal şekilde dahil edilmesini engelleyen içsel çoklukların olup olmadığı da yine, B.Y. Chen [15] tarafından araştırılmış ve ilgili sonuçları ortaya koyulmuştur.

Tezin içeriğinde, [10] da detaylı olarak tanımlanan şu değişmezi ifade edebiliriz: Her $\left(n_1,...,n_k\right)$ k-lısı için $L_1,...,L_k$ lar, $T_p\left(M^n\right)$ nin ikişer ikişer ortogonal ve $boy\, L_i = n_i$, $i = 1,...,k$ olacak şekildeki alt uzayları olmak üzere,

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right)(p) = \tau(p) - \inf\left\{\tau\left(L_1\right) + ... + \tau\left(L_k\right)\right\}$$

tanımlansın. Burada $n \ge 2$ ve $k \ge 0$ için $S(n,k)$ lar, $n_1 < n$, $n_i \ge 2$, $i = 1,...,k$ ve $n_1 + ... + n_k \le n$ koşulu altında seçilecek $\left(n_1,...,n_k\right)$ k-lılarının kümesi ve $S(n)$ de $k \ge 0$ olmak üzere, bütün $S(n,k)$ ların birleşimidir. $S(n)$ de bir $\left(n_1,...,n_k\right)$ k-lısı için

$$c\left(n_1,\ldots,n_k\right)=\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)}$$

ve

$$b\left(n_1,\ldots,n_k\right)=\frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right)-\sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)$$

pozitif sayıları tanımlansın. B.Y. Chen [10], S.T. Yau' nun yukarıdaki sorusuna, keyfi dik boyutlu altmanifoldlar için H^2 dışsal çokluğu ile içsel çokluklar arasında bir ilişki kurarak, sabit c kesit eğrilikli m-boyutlu bir Riemann uzay formunun n-boyutlu bir altmanifoldu için, $m>n$ olmak üzere,

$$\delta\left(n_1,\ldots,n_k\right)\leq c\left(n_1,\ldots,n_k\right)H^2+b\left(n_1,\ldots,n_k\right)c$$

olduğunu kanıtlamak suretiyle ve S.S. Chern'in sorusuna ise, eğer bir $p\in M^n$ noktasında, $S(n)$ de bir $\left(n_1,\ldots,n_k\right)$ k-lısı $\delta\left(n_1,\ldots,n_k\right)(p)>0$ olacak şekilde bulunabiliyor ise keyfi dik boyutlu M^n altmanifoldunu Öklid uzayına minimal izometrik şekilde dahil edemeyeceğimizi kanıtlamak suretiyle çözüm getirmiştir. $\mathrm{x}: M^n\rightarrow\mathbb{R}^m(c)$ şeklinde bir izometrik dahil etme, $S(n)$ de bir $\left(n_1,\ldots,n_k\right)$ k-lısı için

$$\delta\left(n_1,\ldots,n_k\right)=c\left(n_1,\ldots,n_k\right)H^2+b\left(n_1,\ldots,n_k\right)c$$

eşitliğini özdeş olarak gerçeklerse böyle bir dahil etme B.Y. Chen [1] tarafından "ideal immersion" olarak adlandırılmıştır. Bu tez kapsamında, bu tür dahil etmeler ile ilgili olarak ve bunlardan yararlanarak, son 20 yıl içinde gerek B.Y. Chen ve gerekse diğer yazarlar tarafından yapılmış çalışmaların çoğu incelenerek önemli sonuçları bir düzen içinde verilmiştir [1,8-11,13,14,16-18].

2. GENEL KISIMLAR

2.1. RIEMANN MANİFOLDLARI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmamız için temel oluşturan bazı tanımları ve teoremleri ele alacağız [12,18-29].

2.1.1. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. Bir $M \neq \varnothing$ ve M nin alt kümelerinin bir Ω ailesi verilsin;

(i) $\varnothing$ ve M , Ω ya aittir,

(ii) Ω nın herhangi sayıdaki elemanının birleşimi Ω ya aittir,

(iii) Ω nın herhangi sonlu sayıdaki elemanının kesişimi Ω nın elemanıdır

özelikleri sağlanırsa, (M,Ω) ikilisi bir topolojik uzay ve M üzerinde bir topoloji oluşturan Ω ailesinin elemanları da M nin açık kümeleri adını alır.

Tanım 2.1.2. M nin bir p noktasının bir komşuluğu, p noktasının ait olduğu bir açık kümeyi kapsayan bir $U(p)$ kümesidir.

Tanım 2.1.3. Bir M topolojik uzayı, $A,B \in \Omega$ ve $A \cap B = \varnothing$ olmak üzere, $M = A \cup B$ şeklinde ifade edilemiyorsa M ye bağlantılı uzay denir.

Tanım 2.1.4. Bağlantılı topolojik bir uzayın herhangi farklı iki noktasının ayrık komşulukları bulunabiliyor ise bu topolojik uzaya bir Hausdorff uzayı denir.

Tanım 2.1.5. n-boyutlu bir M^n Hausdorff uzayının her p noktasının herhangi bir U komşuluğu bir ψ eşyapı dönüşümü (homeomorphism) sayesinde $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesine homeomorf yapılabiliyor ise M^n uzayına n-boyutlu bir topolojik manifold (çokkatlı) ve (U,ψ) ikilisine de M^n üzerinde bir yerel koordinat sistemi (veya yerel harita) denir. $\bigcup_{i\in I} U_i = M^n$ olacak şekildeki $(U_i,\psi_i)_{i\in I}$ ailesine de bir koordinat sistemi (veya atlas) adı verilir. Bir $p \in U_i$ noktası için $\psi_i(p) = \left(x_i^1(p),...,x_i^n(p)\right) \in \mathbb{R}^n$

olduğundan, $x_i(p)$ sayılarına p noktasının koordinatları ve U_i kümesine de p noktasının bir koordinat komşuluğu adı verilir.

Tanım 2.1.6. $(U_i,\psi_i)_{i\in I}$ ve $(U_j,\psi_j)_{j\in I}$, $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ olacak şekilde, M^n topolojik manifoldunun iki koordinat sistemi olmak üzere, $\forall i, j$ için $\psi_j(U_i \cap U_j)$ kümesini $\psi_i(U_i \cap U_j)$ kümesi üzerine resmeden $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ dönüşümlerinin k. mertebeden sürekli türevleri mevcut ise o takdirde $(U_i,\psi_i)_{i\in I}$ koordinat sistemine M^n topolojik manifoldunun C^k-sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi adı verilir.

Tanım 2.1.7. Üzerinde C^k-sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi tanımlanabilen n-boyutlu bir M^n topolojik manifolduna C^k-sınıfından diferansiyellenebilir bir manifold veya kısaca C^k-manifold denir. Eğer her $k \in N$ için M^n topolojik manifoldu bir C^k-manifold ise M^n ye C^∞-sınıfından diferansiyellenebilir bir manifold veya kısaca C^∞-manifold adı verilir. Ancak bu manifoldlar için bundan böyle sadece manifold sözcüğünü kullanacağız.

Tanım 2.1.8. M^n manifoldu üzerinde C^k-sınıfından diferansiyellenebilir bir koordinat sistemi $(U_i,\psi_i)_{i\in I}$ olsun. U, M^n de bir açık küme ve f, U üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. $p \in U$ noktasının, bir $\alpha \in I$ indisi için $V \subset U_\alpha \cap U$ olacak şekilde yeterince küçük bir V komşuluğu bulunabilir. Eğer $\psi_i(V) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı $f \circ \psi_i^{-1}$ fonksiyonu, $\psi_i(p)$ nin bir komşuluğunda C^r-sınıfından $(r \le k)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında C^r-sınıfından diferansiyellenebilir denir. M^n C^∞-manifoldunun $p \in M^n$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı reel değerli C^∞-sınıfından tüm fonksiyonlarının kümesi $\Im(p)$ ve M^n manifoldunun tamamı üzerinde tanımlı reel değerli C^∞-sınıfından tüm fonksiyonların kümesi de $\Im(M^n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. $\alpha(t)$, $a \le t \le b$, M^n manifoldu üzerinde $\alpha(t_0) = p$ olacak şekilde bir eğri ve $f \in \Im(p)$ olsun.

$$X_p f = \left(df\left(\alpha(t)\right)/dt\right)_{t_0}$$

olacak şekilde, $X_p : \Im(p) \to \mathbb{R}$ dönüşümüne $\alpha(t)$ eğrisinin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir . Tanjant vektörler, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \Im(p)$ olmak üzere, aşağıdaki özellikleri sağlar:

(a) $X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g)$,

(b) $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + X_p(g)f(p)$.

Bir $p \in M^n$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesi,

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f),\ (\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup, $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzay olarak adlandırılır ve $T_p(M^n)$ ile gösterilir. Şimdi $x^1, ..., x^n$, p noktasının bir U koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar olup, $1 \le i \le n$ olmak üzere, $\forall i$ için $(\partial / \partial x^i)_p$, $\Im(p)$ den $\mathbb{R}$ içine bir dönüşümdür ve Tanım 2.1.9 daki koşulları sağlar. O halde $\alpha(t_0) = p$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\alpha(t)$ eğrisi için $x^i = \alpha^i(t)$, $1 \le i \le n$, yazarsak her X_p tanjant vektörü için zincir kuralı yardımıyla

$$X_p(f) = \left(df(\alpha(t))/dt\right)_{t_0} = \sum_i \left(\partial f / \partial x^i\right)_p \left(d\alpha^i(t)/dt\right)_{t_0}$$

yazılabilir. Böylece her tanjant vektör, $\left\{\left(\partial / \partial x^i\right)_p\right\}_{1 \le i \le n}$ kümesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi şeklinde yazılır. Buna göre $\left\{\left(\partial / \partial x^i\right)_p\right\}_{1 \le i \le n}$ vektör kümesi lineer bağımsız olup, $\left(\text{gerçekten, } \sum_i \xi^i \left(\partial / \partial x^i\right)_p = 0 \Rightarrow 0 = \sum_i \xi^i \left(\partial x^j / \partial x^i\right)_p = \xi^j \ \ (1 \le j \le n)\right)$ $T_p(M^n)$ nin bir bazını teşkil eder. Böylece aşağıdaki teoremi ifade ederiz:

Teorem 2.1.10.[20] n-boyutlu bir M^n manifoldunun bir p noktasındaki $T_p\left(M^n\right)$ tanjant uzayı da n-boyutludur.

Tanım 2.1.11. Her $p \in M^n$ noktasına bir $X_p \in T_p\left(M^n\right)$ karşılık getiren $X : p \to X_p$ dönüşümüne M^n üzerinde bir tanjant vektör alanı denir. M^n üzerindeki tüm C^∞-sınıfından tanjant vektör alanlarının kümesini $\mathcal{X}\left(M^n\right)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.12. $X, Y \in \mathcal{X}\left(M^n\right)$ için

$$\left[X, Y\right] f = X\left(Yf\right) - Y\left(Xf\right)$$

şeklinde tanımlı $\left[X, Y\right] : \Im\left(M^n\right) \to \Im\left(M^n\right)$ dönüşümüne X, Y vektör alanlarının braketi adı verilir.

Teorem 2.1.13.[21] $X, Y, Z \in \mathcal{X}\left(M^n\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in \Im\left(M^n\right)$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) $\left[X, Y\right] = -\left[Y, X\right]$ (antikomutatiflik),

(b) $\left[aX + bY, Z\right] = a\left[X, Z\right] + b\left[Y, Z\right]$ (lineerlik),

(c) $\left[\left[X, Y\right], Z\right] + \left[\left[Y, Z\right], X\right] + \left[\left[Z, X\right], Y\right] = 0$ (Jacobi özdeşliği),

(d) $\left[fX, gY\right] = fg\left[X, Y\right] + fX\left(g\right)Y - gY\left(f\right)X$.

Tanım 2.1.14. $T_p\left(M^n\right)$ den $\mathbb{R}$ içine bütün lineer dönüşümlerin kümesi $T_p^*\left(M^n\right)$ şeklinde gösterilir ve $\omega_p, v_p \in T_p^*\left(M^n\right)$, $X_p \in T_p\left(M^n\right)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left(\omega_p + v_p\right)\left(X_p\right) = \omega_p\left(X_p\right) + v_p\left(X_p\right), \ \left(\lambda\omega_p\right)\left(X_p\right) = \lambda\left(\omega_p\left(X_p\right)\right)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bir vektör uzayı teşkil eder. $p \in M^n$ noktasındaki tanjant uzaya eşlenik (dual) olan bu uzaya $p \in M^n$ noktasındaki kotanjant uzay ve bu uzayın bir elemanına da kotanjant vektör (kovektör) denir. Kotanjant vektörler, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $X_p, Y_p \in T_p\left(M^n\right)$ olmak üzere, aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\omega_p\left(\lambda X_p+\mu Y_p\right)=\lambda\omega_p\left(X_p\right)+\mu\omega_p\left(Y_p\right).$$

2.1.2. Tensör Alanları

Tanım 2.1.15. V, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, bir $T:V^k\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her i $\left(1\le i\le k\right)$ için

$$T\left(v_1,...,v_i+v_i',...,v_k\right)=T\left(v_1,...,v_i,...,v_k\right)+T\left(v_1,...,v_i',...,v_k\right),$$
$$T\left(v_1,...,av_i,...,v_k\right)=aT\left(v_1,...,v_i,...,v_k\right)$$

koşullarını sağlıyor ise çok lineer olarak adlandırılır. Bir $T:V^k\to\mathbb{R}$ çok lineer fonksiyonuna V üzerinde bir k-tensör denir ve $J^k\left(V\right)$ ile gösterilen bütün k-tensörlerin kümesi, S, $T\in J^k\left(V\right)$ ve $a\in\mathbb{R}$ için

$$\left(S+T\right)\left(v_1,...,v_k\right)=S\left(v_1,...,v_k\right)+T\left(v_1,...,v_k\right),$$
$$\left(aS\right)\left(v_1,...,v_k\right)=a.S\left(v_1,...,v_k\right)$$

şeklinde tanımlı işlemlerle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.1.16. $S\in J^k\left(V\right)$ ve $T\in J^\ell\left(V\right)$ ise $S\otimes T\in J^{k+\ell}\left(V\right)$ tensör çarpımı,

$$S\otimes T\left(v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_{k+\ell}\right)=S\left(v_1,...,v_k\right).T\left(v_{k+1},...,v_{k+\ell}\right)$$

şeklinde tanımlanır. S ve T çarpanlarının sırası önemli olup, $\otimes$ tensör çarpımı işleminin aşağıdaki özellikleri vardır:

$$\left(S_1+S_2\right)\otimes T=S_1\otimes T+S_2\otimes T,$$
$$S\otimes\left(T_1+T_2\right)=S\otimes T_1+S\otimes T_2,$$
$$\left(aS\right)\otimes T=S\otimes\left(aT\right)=a\left(S\otimes T\right),$$
$$\left(S\otimes T\right)\otimes U=S\otimes\left(T\otimes U\right).$$

$(S\otimes T)\otimes U$ ve $S\otimes(T\otimes U)$ nun ikisi de genellikle basit olması için $S\otimes T\otimes U$ şeklinde gösterilir ve daha yüksek mertebeden $T_1\otimes...\otimes T_r$ çarpımları da benzer şekilde tanımlanır. Burada $J^1(V)$, V^* eşlenik uzayıdır.

Tanım 2.1.17. $\sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ ifadesindeki gibi bir indis (bir kez üstte bir kez altta olmak üzere) iki kez tekrarlanırsa $\sum$ işaretini kaldırıp sadece $a_j x^j$ yazarak, indise alması mümkün bütün değerleri vermek suretiyle elde edilen, bütün terimlerin toplanması kabulüne Einstein toplam kuralı denir.

Tanım 2.1.18. E, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve E^* ise E nin eşlenik uzayı olmak üzere, $\underbrace{E\otimes...\otimes E}_{r}\otimes\underbrace{E^*\otimes...\otimes E^*}_{s}$ üzerindeki bir tensöre bir (r,s)-tensör veya r. mertebeden kontravaryant ve s. mertebeden kovaryant tensör denir.

Tanım 2.1.19. Diferansiyellenebilir bir M^n manifoldunun bir p noktasında s.mertebeden kovaryant bir tensör $\left(\text{kısacası bir } (0,\text{s})\text{-tensör}\right)$

$$D_p : \underbrace{T_p\left(M^n\right)\times...\times T_p\left(M^n\right)}_{s} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşüm ve benzer şekilde 1.mertebeden kontravaryant ve s.mertebeden kovaryant bir tensör $\left(\text{kısacası bir } (1,\text{s})\text{-tensör}\right)$ de

$$D_p : \underbrace{T_p\left(M^n\right)\times...\times T_p\left(M^n\right)}_{s} \rightarrow T_p\left(M^n\right)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

Diferansiyellenebilir bir M^n manifoldu için s.mertebeden kovaryant bir tensör alanı $\left(\text{kısacası bir } (0,\text{s})\text{-tensör alanı}\right)$

$$D : \underbrace{\mathcal{X}\left(M^n\right)\times...\times \mathcal{X}\left(M^n\right)}_{s} \rightarrow \Im\left(M^n\right)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşüm ve benzer şekilde 1.mertebeden kontravaryant ve s .mertebeden kovaryant bir tensör alanı $\big($kısacası bir $(1,s)$-tensör alanı$\big)$ da

$$D:\underbrace{\mathcal{X}\left(M^n\right)\times\ldots\times\mathcal{X}\left(M^n\right)}_{s}\to\mathcal{X}\left(M^n\right)$$

şeklinde tanımlanan çok lineer bir dönüşümdür.

Tanım 2.1.20. $D:\underbrace{\mathcal{X}\left(M^n\right)\times\ldots\times\mathcal{X}\left(M^n\right)}_{s}\to\mathcal{X}\left(M^n\right)$ şeklinde tanımlanan $(1,s)$-tensör alanından, her $i\in\{1,\ldots,s\}$ ve belirli X_j, $j\neq i$ vektör alanları için elde edilen $D\left(X_1,\ldots,X_{i-1},-,X_{i+1},\ldots,X_s\right)$ tensör alanı bir $(1,1)$-tensör alanıdır ve C_i, i. büzülmeyi göstermek üzere, $\mathcal{X}\left(M^n\right)$ nin ortonormal bir $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bazı için

$$C_iD\left(X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_s\right)=\sum_{j=1}^{n}g\left(D\left(X_1,\ldots,X_{i-1},e_j,X_{i+1},\ldots,X_s\right),e_j\right)$$

şeklinde tanımlanan C_iD tensör alanına D tensör alanından büzülme (contraction) ile elde edilen tensör alanı denir. Bu durumda C_iD, bir $(0,s-1)$- tensör alanıdır.

Tanım 2.1.21. Her $p\in M^n$ noktasına bir $\omega_p\in T_p^*\left(M^n\right)$ karşılık getiren $\omega:p\to\omega_p$ dönüşümüne M^n üzerinde bir 1-form denir. Her ω 1-formu; $x^1,\ldots,x^n$, p noktasının bir U koordinat komşuluğunda yerel koordinatlar ve f_j ler de $x^1,\ldots,x^n$ e göre ω nın bileşenleri olarak adlandırılan fonksiyonlar olmak üzere, $\omega=\sum_j f_j dx^j$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

2.1.3. Riemann Manifoldları

h,i,j,k,ℓ indisleri $1,2,\ldots,n$ dizisinde değerler alacak şekilde U, M^n de bir noktanın bir komşuluğunu ve x^h, U üzerindeki yerel koordinatları göstermek üzere, $\{U,x^h\}$ koordinat komşuluklarının bir sistemiyle örtülen C^∞ sınıfından n-boyutlu bir M^n

manifoldunu göz önüne alalım. Bundan böyle aksi söylenmedikçe, yalnızca 1 den büyük boyutlu bağlantılı manifoldları göz önüne alacağız.

Tanım 2.1.22. M^n manifoldunu örten koordinat komşuluklarının herhangi bir sistemi verildiğinde, bunlardan sonlu sayıda ve manifoldun tamamını örtecek şekilde koordinat komşulukları seçilebiliyor ise M^n manifolduna kompakt (tıkız) bir manifold denir.

Tanım 2.1.23. M^n manifoldunun tamamının koordinat komşuluklarının bir sistemiyle örtüldüğünü varsayalım. Eğer bu sistemin herhangi iki $\{U, x^h\}$ ve $\{U', x^{h'}\}$ koordinat komşuluklarının boştan farklı kesişimleri üzerinde,

$$x^{h'} = x^{h'}\left(x^1, \ldots, x^n\right)$$

ile verilen koordinat dönüşümlerinin

$$\left|\partial x^{h'} / \partial x^h\right|$$

şeklindeki Jakobi determinantları daima pozitif ise M^n manifolduna yönlendirilebilir bir manifold denir.

Tanım 2.1.24. Bir M^n manifoldunun $\forall p$ noktasına, bilineer, $T_p\left(M^n\right) \times T_p\left(M^n\right) \to \mathbb{R}$ şeklinde ve aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir g_p karşılık getiren bir g eşlemesine M^n üzerinde bir Riemann metriği ve üzerinde böyle bir Riemann metriği tanımlanmış M^n manifolduna da bir Riemann manifoldu denir:

(a) $\forall X, Y \in T_p\left(M^n\right)$ için $g_p\left(X, Y\right) = g_p\left(Y, X\right)$,

(b) $X \neq 0$ olacak şekildeki $\forall X \in T_p\left(M^n\right)$ için $g_p\left(X, X\right) > 0$ ve $g_p\left(X, X\right) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

(c) $p \in M^n$ nin bir komşuluğunda tanımlı her yerel koordinat sistemine göre,

$$g_p = \sum_{i,j} g_{ij}\left(p\right).dx^i\big|_p \otimes dx^j\big|_p$$

yazılışında yer alacak g_{ij} katsayı fonksiyonları her zaman diferansiyellenebilirdir.

Bu tez kapsamında çalışmış olduğumuz manifoldlar Riemann manifoldları olduğundan, bir M^n manifoldu bir Riemann manifoldu şeklinde anlaşılmalıdır.

$\{U, x^h\}$ koordinat komşuluğu üzerindeki $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ile gösterilen baz vektör alanları için M^n üzerindeki X ve Y vektör alanlarının yerel bileşenleri, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ yerel çatısına göre, sırasıyla X^h ve Y^h olmak üzere, bu vektör alanları

$$X = X^h \partial_h, \; Y = Y^h \partial_h$$

şeklinde yazılır. Buna göre, g metrik tensör alanının yerel bileşenleri

$$g_{ji} = g\left(\partial_j, \partial_i\right)$$

ler olmak üzere,

$$g\left(X, Y\right) = g\left(X^j \partial_j, Y^i \partial_i\right) = g_{ji} X^j Y^i$$

yazabiliriz.

Tanım 2.1.25. g, M^n üzerinde bir metrik tensör olmak üzere, bir X vektörünün uzunluğu,

$$\|X\| = \sqrt{g\left(X, X\right)}$$

şeklinde ve aynı noktada tanımlı sıfırdan farklı iki X ve Y vektörü arasındaki θ açısı da

$$\cos\theta = \frac{g\left(X, Y\right)}{\|X\| \|Y\|}$$

şeklinde tanımlanır. $g(X,X)$ karesel formu pozitif tanımlı olduğundan, g nin g_{ji} yerel bileşenleriyle oluşturulan

$$g = |g_{ji}|$$

determinantı daima pozitiftir ve $\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, Kronecker sembolünü göstermek üzere;

$$g_{ji} g^{ih} = \delta_j^h$$

olacak şekilde metrik tensörün ters (invers) bileşenleri olan g^{ih} lar bulunabilir. g^{ih} lar, g metrik tensörünün kontravaryant bileşenleri ve g_{ji} ler de kovaryant bileşenleri olarak adlandırılır. Bir tensörün bileşenlerinin indislerini indirmek veya kaldırmak (transvecting) için g_{ji} kovaryant bileşenleri ve g^{ih} kontravaryant bileşenleri kullanılır, örneğin;

$$T_{jih} = T_{ji}{}^{t} g_{th} \text{ ve } T_{ji}{}^{h} = T_{jit} g^{th}.$$

$\|T\|^2 = T_{jih} T^{jih}$ olmak üzere $\|T\|$, T tensörünün normu olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.26. $f, g \in \Im(M^n)$ ve $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

(a) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,

(b) $\nabla_X (fY) = (Xf) Y + f \nabla_X Y$

koşullarını sağlayan

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M^n) \times \mathcal{X}(M^n) &\to \mathcal{X}(M^n) \\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer bir dönüşüme M^n manifoldu üzerinde bir afin koneksiyon ve ∇_X operatörüne de X vektör alanına göre kovaryant türev operatörü denir. Genel olarak, bir D $(0,s)$-tensör alanı $\big($sırasıyla $(1,\mathrm{s})$-tensör alanı$\big)$ nın $\nabla_X D$ kovaryant türevi,

$$(\nabla_X D)(X_1,...,X_s)=\nabla_X\left(D(X_1,...,X_s)\right)-\sum_{i=1}^{s}D(X_1,...,X_{i-1},\nabla_X X_i,X_{i+1}...,X_s)$$

şeklinde tanımlanır. O takdirde $\nabla_X D$ bir $(0,s)$-tensör alanı $\big($sırasıyla $(1,\mathrm{s})$-tensör alanı$\big)$ dır ve ∇D,

$$(\nabla D)(X,X_1,...,X_s)=(\nabla_X D)(X_1,...,X_s)$$

şeklinde tanımlanan bir $(0,s+1)$-tensör alanı $\big($sırasıyla $(1,\mathrm{s}+1)$-tensör alanı$\big)$ dır.

Tanım 2.1.27. Bir afin koneksiyona sahip M^n manifoldu üzerinde, $X,Y\in\mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

şeklinde tanımlı $(1,2)$-tipinden T tensör alanına burulma tensör alanı denir.

Teorem 2.1.28.[20] Bir M^n manifoldu üzerinde

(a) $T(X,Y)=0$,

(b) $\nabla_X g=0$

koşullarını sağlayan bir ve ancak bir afin koneksiyon vardır ve bu koneksiyona Riemann koneksiyonu adı verilir. Bu tez çalışmasında bir ∇ koneksiyonu bir Riemann koneksiyonu şeklinde ele alınmıştır.

Tanım 2.1.29. $U,X,Y\in\mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$R(U,X)Y=\nabla_U\nabla_X Y-\nabla_X\nabla_U Y-\nabla_{[U,X]}Y$$

şeklinde tanımlı $(1,3)$-tipinden R tensör alanına eğrilik tensör alanı denir.

$R(U,X)$, U ve X e göre lineer ve $R(U,X)=-R(X,U)$ eşitliğini sağlayan $(1,1)$-tipinden bir tensör alanıdır. R eğrilik tensör alanının tanımından,

$$R(U,X)Y+R(X,Y)U+R(Y,U)X=0,$$

$$(\nabla_U R)(X,Y)+(\nabla_X R)(Y,U)+(\nabla_Y R)(U,X)=0$$

özdeşlikleri geçerlidir ve bunlara, sırasıyla 1.Bianchi özdeşliği ve 2.Bianchi özdeşliği adı verilir. $U,X,Y,Z\in\mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere, 4. mertebeden kovaryant tensör alanı R, $R(U,X;Y,Z)=g(R(U,X)Y,Z)$ şeklinde tanımlanırsa $\{e_1,...,e_n\}$, $\mathcal{X}(M^n)$ uzayının bir bazı olmak üzere; $R(U,X)Y$ ve $R(U,X;Y,Z)$ bileşenler cinsinden, sırasıyla $R(e_i,e_j)e_k=R_{ijk}{}^{\ell}e_{\ell}$ ve $R(e_i,e_j;e_k,e_h)=R_{ijkh}=R_{ijk}{}^{\ell}g_{\ell h}$ şeklinde ifade edilir. O halde eğrilik tensör alanının tanımından,

$$\begin{aligned}
R(U,X;Y,Z)&=-R(X,U;Y,Z)\leftrightarrow R_{ijkh}=-R_{jikh}\\
R(U,X;Y,Z)&=-R(U,X;Z,Y)\leftrightarrow R_{ijkh}=-R_{ijhk}\\
R(U,X;Y,Z)&=R(Y,Z;U,X)\leftrightarrow R_{ijkh}=R_{khij}
\end{aligned}\qquad(2.1.1)$$

yazarız. 1. ve 2. Bianchi özdeşlikleri bileşenler cinsinden, sırasıyla

$$R_{ijk}{}^{\ell}+R_{jki}{}^{\ell}+R_{kij}{}^{\ell}=0,$$

$$\nabla_h R_{ijk}{}^{\ell}+\nabla_i R_{jhk}{}^{\ell}+\nabla_j R_{hik}{}^{\ell}=0$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.30. M^n manifoldu üzerindeki $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ ortonormal bazı için $Y,Z\in\mathcal{X}(M^n)$ olmak üzere,

$$Ric(Y,Z)=\sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(e_i,Y\right)Z,e_i\right) \text{ ve } \tau=\sum_{i=1}^{n} Ric\left(e_i,e_i\right) \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipinden Ric tensör alanına Ricci tensör alanı ve τ skaler fonksiyonuna da M^n nin skaler eğrilik fonksiyonu adı verilir ve bileşenler cinsinden, sırasıyla

$$R_{ji}=R_{tji}{}^{t}=g^{ts}R_{tjis} \text{ ve } \tau=g^{ji}R_{ji}$$

yazılır. (2.1.1) den Ricci tensör alanının simetrik bir tensör alanı, yani $R_{ij}=R_{ji}$ olduğu açıktır. $Ric(e_i,e_i)$ için çoğu kez $Ric(e_i)$ gösterimini kullanacağız. $n=2$ ise $\overline{K}=\frac{1}{2}\tau$ Gauss eğriliğidir.

Tanım 2.1.31. X ve Y, bir $p\in M^n$ noktasında $T_p\left(M^n\right)$ de lineer bağımsız iki vektör ve $\pi(X,Y)$, X ve Y ile gerilen bir düzlem kesit olsun.

$$K(\pi)=-\frac{R(X,Y;X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanan $K(\pi)$, π düzleminin kesit eğriliği olarak adlandırılır. $K(\pi)$, π düzlem kesiti için tek olarak belirli olup, π yi geren X ve Y vektörlerinin seçiminden bağımsızdır. Eğer $\{X,Y\}$, π düzlemi için ortonormal bir baz ise $K(\pi)=-R(X,Y;X,Y)$ şeklindedir. X ve Y ile gerilen bir π düzleminin kesit eğriliği $K(X,Y)$ veya $K(X\wedge Y)$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 2.1.32. M^n nin her p noktasındaki $T_p\left(M^n\right)$ tanjant uzayının bütün π düzlemleri için $K(\pi)$ sabit ise M^n manifolduna sabit eğrilikli bir uzay veya kısaca bir uzay form denir. Bir uzay form, kesit eğriliğinin pozitif, negatif veya sıfır olmasına göre, sırasıyla eliptik, hiperbolik veya öklidsel olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.36 yı kanıtlayabilmek için aşağıdaki ön bilgileri ifade edeceğiz [27]:

V , n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $B : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ aşağıdaki üç özelliğe sahip dört-lineer bir dönüşüm olsun:

(a) $B(v_1, v_2; v_3, v_4) = -B(v_2, v_1; v_3, v_4)$,

(b) $B(v_1, v_2; v_3, v_4) = -B(v_1, v_2; v_4, v_3)$,

(c) $B(v_1, v_2; v_3, v_4) + B(v_1, v_3; v_4, v_2) + B(v_1, v_4; v_2, v_3) = 0$.

Teorem 2.1.33.[27] Eğer B yukarıdaki üç özelliğe sahip ise aşağıdaki dördüncü özelliğe de sahip olur:

(d) $B(v_1, v_2; v_3, v_4) = B(v_3, v_4; v_1, v_2)$.

Kanıtlama: (c) nin sol tarafını $S(v_1, v_2; v_3, v_4)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &= S(v_1, v_2; v_3, v_4) - S(v_2, v_3; v_4, v_1) - S(v_3, v_4; v_1, v_2) + S(v_4, v_1; v_2, v_3) \\ &= B(v_1, v_2; v_3, v_4) - B(v_2, v_1; v_3, v_4) - B(v_3, v_4; v_1, v_2) + B(v_4, v_3; v_1, v_2) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece **(a)** ve **(b)** den,

$$2B(v_1, v_2; v_3, v_4) - 2B(v_3, v_4; v_1, v_2) = 0$$

elde ederiz. □

Teorem 2.1.34.[27] B ve T ; **(a)**, **(b)** ve **(c)** özelliklerine sahip iki dört-lineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall v_1, v_2 \in V$ için

$$B(v_1, v_2; v_1, v_2) = T(v_1, v_2; v_1, v_2)$$

ise $B = T$ dir.

Kanıtlama: $T = 0$ olduğunu varsayalım. B ve T yerine, sırasıyla $B - T$ ve 0 düşünelim. Dolayısıyla $\forall v_1, v_2 \in V$ için $B(v_1, v_2; v_1, v_2) = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$0 = B(v_1, v_2 + v_4; v_1, v_2 + v_4) = B(v_1, v_2; v_1, v_4) + B(v_1, v_4; v_1, v_2) = 2B(v_1, v_2; v_1, v_4)$$

yazılarak, $\forall v_1, v_2, v_4 \in V$ için

$$B\left(v_1, v_2; v_1, v_4\right) = 0 \tag{2.1.4}$$

bulunur. (2.1.4) ten,

$$0 = B\left(v_1 + v_3, v_2; v_1 + v_3, v_4\right) = B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) + B\left(v_3, v_2; v_1, v_4\right)$$

elde edilir. Önce **(d)** yi ve sonra **(b)** yi uygulamakla,

$$0 = B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) + B\left(v_1, v_4; v_3, v_2\right) = B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) - B\left(v_1, v_4; v_2, v_3\right)$$

çıkar. Dolayısıyla $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ için

$$B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) = B\left(v_1, v_4; v_2, v_3\right) \tag{2.1.5}$$

bulunur. v_2, v_3, v_4, sırasıyla v_3, v_4, v_2 ile yer değiştirilerek $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ için

$$B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) = B\left(v_1, v_3; v_4, v_2\right) \tag{2.1.6}$$

çıkar. (2.1.5) ve (2.1.6) dan,

$$3B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) = B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) + B\left(v_1, v_3; v_4, v_2\right) + B\left(v_1, v_4; v_2, v_3\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı **(c)** den sıfır olduğundan, $\forall v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ için

$$B\left(v_1, v_2; v_3, v_4\right) = 0$$

çıkar ki, böylece kanıt tamamlanır. □

R_1; $W, Z, X, Y \in T_p(M^n)$ olmak üzere,

$$R_1(W,Z;X,Y) = g(Z,X)g(W,Y) - g(W,X)g(Z,Y)$$

şeklinde tanımlanan ve **(a)**, **(b)**, **(c)** özelliklerini sağlayan 4.mertebeden kovaryant bir tensör olsun.

Teorem 2.1.35.[27] Bütün π düzlemleri için $K(\pi) = c$ ise $R = cR_1$ dir.

Kanıtlama: (2.1.3) ten, $\forall W, Z \in T_p(M^n)$ için

$$R(W,Z;W,Z) = cR_1(W,Z;W,Z)$$

eşitliği sağlanır. Buna göre Teorem 2.1.34, R ve cR_1 e uygulanarak $R = cR_1$ bulunur. □

Teorem 2.1.36.[27] M^n, $n \geq 3$, bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. π, $T_p(M^n)$ de bir düzlem olmak üzere, $K(\pi)$ kesit eğriliği yalnızca p noktasına bağlı ise M^n sabit eğrilikli bir uzaydır.

Kanıtlama: k, M^n üzerinde bir fonksiyon olmak üzere, Teorem 2.1.34 ten

$$R = kR_1$$

yazılabilir. g paralel $(\nabla g = 0)$ olduğundan, R_1 in de paralel olduğu dikkate alınarak, $\forall U, W, Z, X, Y \in T_p(M^n)$ için

$$(\nabla_U R)(W,Z;X,Y) = (\nabla_U k) R_1(W,Z;X,Y)$$

elde edilir. Bu, $\forall X, Y, Z, U \in T_p(M^n)$ için

$$\left[(\nabla_U R)(X,Y)\right]Z = (Uk)\left(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\right)$$

anlamına gelir. Yukarıdaki özdeşliğin (U,X,Y) ye göre döngüsel toplamını alırsak, sol taraf 2. Bianchi özdeşliğinden dolayı sıfır olur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= (Uk)\big(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\big) \\ &+ (Xk)\big(g(Z,U)Y - g(Z,Y)U\big) \\ &+ (Yk)\big(g(Z,X)U - g(Z,U)X\big) \end{aligned}$$

çıkar. Keyfi bir X için Y, Z ve U yu X, Y ve Z ikişer ikişer ortogonal ve $g(Z,Z)=1$ olmak üzere, $U=Z$ olacak şekilde seçelim. Bu, $boy\, M^n \geq 3$ olduğundan mümkündür. O halde

$$(Xk)Y - (Yk)X = 0$$

bulunur. X ve Y lineer bağımsız olduğundan, $Xk = Yk = 0$ ve böylece k nın bir sabit olduğu çıkar. □

Tanım 2.1.37. Bir $p \in M^n$ noktasında bir X vektörüne ortogonal olan ve ikişer ikişer birbirine de ortogonal olan $X_2,...,X_n$ vektörlerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\lambda = \frac{Ric(X,X)}{g(X,X)} \ ,$$

$(X,X_2),...,(X,X_n)$ şeklinde verilen düzlem kesitlerine göre, p deki kesit eğriliklerinin toplamıdır. $X_2,...,X_n$ vektörlerinin seçiminden bağımsız olan bu λ sayısına, X vektörüne göre p deki Ricci eğriliği denir. p de Ricci eğriliği X vektöründen bağımsız ise Ricci tensörü,

$$Ric = \lambda g \tag{2.1.7}$$

şeklinde olmalıdır. Bu, M^n manifoldunun her noktasında gerçeklenirse Ricci tensörü her yerde (2.1.7) deki gibi olur. $n > 2$ ise 2. Bianchi özdeşliğinden λ nın bir sabit olduğu görülür. $n=2$ ise Ricci tensörü daima (2.1.7) deki gibidir ve λ nın bir sabit olması gerekli değildir.

Tanım 2.1.38. Bir Riemann manifoldunun Ricci tensörü $Ric=\lambda g$ şeklinde ise bu manifolda bir Einstein uzayı denir.

Tanım 2.1.39. M, g Riemann metriğine sahip bir Riemann manifoldu ve M', g' Riemann metriğine sahip bir diğer Riemann manifoldu olsun. M de g ile ölçülen herhangi bir yayın uzunluğu, daima M' de ona karşılık gelen yayın g' ile ölçülen uzunluğuna eşit olacak şekilde, M den M' üzerine bire-bir diferansiyellenebilir bir dönüşüm varsa (M,g) ve (M',g') Riemann manifoldlarına izometrik manifoldlar denir. Eğer M nin bir noktasında herhangi iki vektörün tanımladığı açı, daima M' nün karşılık gelen noktasında bu vektörlere karşılık gelen iki vektörünün tanımladığı açıya eşit olacak şekilde, M den M' içine bire-bir diferansiyellenebilir bir dönüşüm varsa (M,g) ve (M',g') Riemann manifoldlarına konformal manifoldlar denir.

Tanım 2.1.40. (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) manifoldları, sırasıyla m_1 ve m_2 boyutlu iki manifold olsun. $A=1,2,3,...,m_1$ ve $a=1,2,3,...,m_2$ olmak üzere, x^A ve x^a, sırasıyla M_1 ve M_2 üzerindeki yerel koordinat fonksiyonları göstermek üzere, $(x^A;x^a)$ şeklinde yerel koordinat fonksiyonlarına sahip olan $\tilde{M}=M_1\times M_2$ manifolduna $\tilde{g}=g_1\oplus g_2$ metriği ile birlikte M_1 ve M_2 manifoldlarının çarpım manifoldu adı verilir. Eğer M_1 ve M_2 manifoldları birer Riemann manifoldu ise o takdirde $\tilde{M}=M_1\times M_2$ çarpımı bir Riemann çarpım manifoldu adını alır. Daha fazla sayıda manifoldun çarpım manifoldu da benzer şekilde tanımlanabilir.

2.1.4. Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Tanım 2.1.41. Bir M manifoldundan bir diğer N manifoldu içine bir x dönüşümü verildiğinde, x in bir $p\in M$ noktasındaki diferansiyeli; $T_p(M)$ tanjant uzayından $T_{\mathrm{x}(p)}(N)$ tanjant uzayı içine aşağıdaki gibi tanımlanan lineer bir x_* dönüşümüdür. Her bir $X\in T_p(M)$ tanjant vektörü için $\mathrm{x}_*(X)$, N üzerindeki diferansiyellenebilir bir f fonksiyonu için $\mathrm{x}(p)$ de,

$$\left(\mathrm{x}_*(X)\right)(f) = X(f \circ \mathrm{x})$$

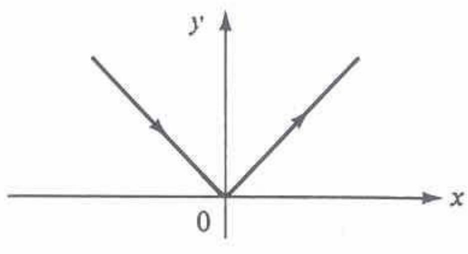
şeklinde verilen bir tanjant vektördür. p noktasını özelleştirmek gerekirse, $\left(\mathrm{x}_*\right)_p$ gösterimini kullanırız.

Tanım 2.1.42. $T_p(M)$ nin x_* altındaki $\mathrm{x}_*\left(T_p(M)\right)$ görüntüsünün boyutu q ise M nin N içine bir x dönüşümünün rankı q dur, denir. Eğer p noktasında x in rankı M nin boyutuna eşit ise $\mathrm{x}_*(p)$ bire-birdir.

Tanım 2.1.43. $\mathrm{x}_*(p)$, M nin her p noktası için bire-bir ise $\mathrm{x}{:}M \to N$ dönüşümüne bir dahil etme (immersion) adı verilir ve M manifolduna da N manifoldunun dahil edilmiş bir altmanifoldu (immersed submanifold) denir.

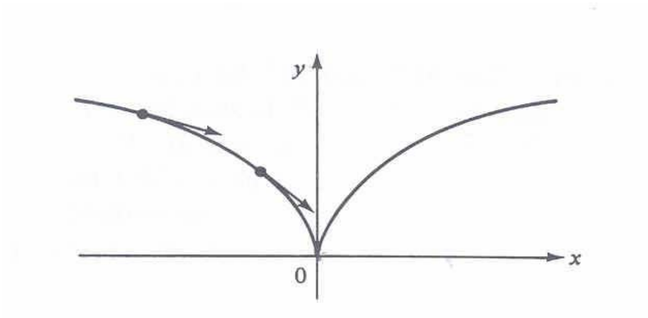
Örnek 2.1.44. $\mathbb{R}^{n+1}$ manifoldu üzerinde $\mathrm{x}(p) = \sum_{i=1}^{n+1}\left(x^i\right)^2 - 1 = 0$ eşitliğini sağlayan tüm $p = \left(x^1, \ldots, x^{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktalarından oluşan $S^n(1)$ küresi $\mathbb{R}^{n+1}$ manifoldunun dahil edilmiş bir altmanifoldudur. Gerçekten, $\dfrac{\partial \mathrm{x}}{\partial x^i} = 2x^i$ olduğundan, $\forall p \in S^n(1)$ noktası için $\left(\mathrm{x}_*\right)_p$ dönüşümü bire-birdir.

Örnek 2.1.45. $\alpha(t) = (t, |t|)$ ile verilen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eğrisi $t = 0$ da diferansiyellenebilir değildir. Dolayısıyla bir dahil etme olamaz.



Şekil 2.1: $t = 0$ da diferansiyellenebilir olmayan bir eğri.

Örnek 2.1.46. $\alpha(t) = \left(t^3, t^2\right)$ ile verilen $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eğrisi diferansiyellenebilir bir dönüşümdür; fakat $t = 0$ da $\alpha'(t) \neq 0$ koşulu sağlanmadığından bir dahil etme değildir.

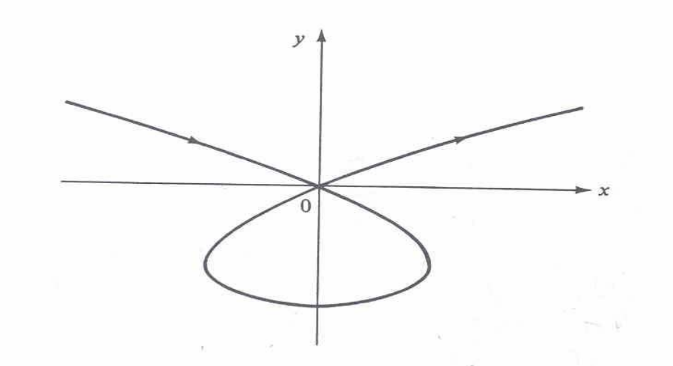


Şekil 2.2: $t = 0$ da regüler olmayan bir eğri.

Bir önceki ve bu örnekteki dönüşümlerden, dahil etme koşulunun $\alpha'(t)$ nin mevcut ve $\alpha'(t) \neq 0$ olmasına eşdeğer olduğu görülür.

Tanım 2.1.47. Bire-bir olan bir x dahil etmesi bir gömme (embedding) olarak adlandırılır ve M manifolduna da N ye gömülmüş bir altmanifold (embedded submanifold) denir.

Örnek 2.1.48. $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t = 2$, $t = -2$ için kendini kesen bir $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dahil etmesidir. Dolayısıyla α bir dahil etme olmasına karşın, bir gömme değildir.



Şekil 2.3: $t = 2$ ve $t = -2$ de kendini kesen bir dahil etme.

Tanım 2.1.49. M manifoldu N manifoldunun bir altmanifoldu ve $p \in M$ olmak üzere, $\forall X, Y \in T_p(M)$ için $[X, Y] \in T_p(M)$ koşulu gerçekleniyor ise M altmanifolduna integrallenebilir veya involutive'dir, denir.

M^n, $m > n$ olmak üzere, m-boyutlu bir N^m manifoldu içine dahil edilmiş n-boyutlu bir manifold olsun. Yerel olarak düşünürsek, M^n nin N^m ye gömülmüş olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle aksi söylenmedikçe, A, B indisleri, $1, 2, ..., m$ dizisi üzerinden ve $i, j, h, ...$ indisleri, $1, 2, ..., n$ dizisi üzerinden değişmek üzere, N^m, $\{V, u^A\}$ koordinat komşuluklarının bir sistemiyle ve M^n de $\{U, x^h\}$ koordinat komşuluklarının bir sistemiyle örtülüyorsa, M^n altmanifoldu yerel olarak,

$$u^A = u^A\left(x^h\right)$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece M^n deki bir X vektör alanı, $\partial_h = \partial / \partial x^h$ olmak üzere, $X = X^h \partial_h$ yerel ifadesine sahip olur. Bu durumda $\partial_A = \partial / \partial u^A$ olmak üzere,

$$B_h^A = \partial u^A / \partial x^h$$

olup X, N^m de $X = B_h^A X^h \partial_A$ şeklinde bir yerel ifadeye sahip olur.

Tanım 2.1.50. X, M^n üzerinde bir vektör alanı olmak üzere, M^n altmanifolduna kısıtlanmışı X olan N^m üzerindeki bir $\tilde{X}$ vektör alanına X in bir genişlemesi denir.

Tanım 2.1.51. $\tilde{g}$ Riemann metriğine sahip bir N^m Riemann manifoldunun bir M^n altmanifoldu, M^n deki herhangi X, Y vektör alanları için

$$g(X, Y) = \tilde{g}(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine sahip bir Riemann manifoldudur ve M^n üzerindeki bu g Riemann metriği M^n üzerinde indirgenmiş metrik adını alır. Bu metrikler, birçok literatürde $\langle\ ,\ \rangle$ şeklinde de gösterilmektedir. Yerel bileşenlerle, $g = g_{ji} dx^j dx^i$ ve $\tilde{g} = g_{BA} du^B du^A$ olmak üzere, $g_{ji} = g_{BA} B_j^B B_i^A$ yazılır.

Aşağıdaki tanım ve teoremlerde de N^m, $\tilde{g}$ Riemann metriğine sahip bir Riemann manifoldu ve N^m nin M^n altmanifoldu da g Riemann metriğine sahip bir Riemann manifoldudur.

Tanım 2.1.52. M^n, N^m manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer bir $p \in M^n$ noktasında N^m nin bir ξ_p vektörü, p de M^n nin herhangi bir X_p vektörü için

$$\tilde{g}\left(X_p,\xi_p\right)=0$$

eşitliğini sağlarsa ξ_p vektörüne p noktasında M^n nin bir normal vektörü denir. $p\in M^n$ noktasındaki tüm normal vektörlerin kümesi, M^n nin bu noktadaki normal uzayı olarak adlandırılır ve $T_p^{\perp}\left(M^n\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.53. Bir M^n manifoldunun her p noktasına bir ξ_p normal vektörünü karşılık getiren bir $\xi : p\to\xi_p$ dönüşümüne M^n üzerinde bir normal vektör alanı denir. N^m de M^n nin bir birim normal vektör alanı, bazen M^n üzerinde bir normal kesit veya bir normal doğrultu olarak da adlandırılır.

Tanım 2.1.54. $\mathcal{X}^{\perp}\left(M^n\right)$, N^m de M^n nin bütün normal vektör alanlarının kümesini göstersin. O takdirde N^m nin M^n ye kısıtlanan tanjant vektör alanlarının kümesi, M^n nin $\mathcal{X}\left(M^n\right)$ tanjant vektör alanlarının kümesi ile N^m de M^n nin $\mathcal{X}^{\perp}\left(M^n\right)$ normal vektör alanlarının kümesinin direkt toplamıdır; yani

$$\mathcal{X}\left(N^m\right)\Big|_{M^n}=\mathcal{X}\left(M^n\right)\oplus\mathcal{X}^{\perp}\left(M^n\right)$$

dir.

Teorem 2.1.28 de bir manifold üzerinde bir ve ancak bir Riemann koneksiyonunun var olduğunu ifade etmiştik. Bir manifoldun altmanifoldu sözkonusu olduğunda yine, Teorem 2.1.28 den bu altmanifold üzerinde de bir başka Riemann koneksiyonu bulunabileceğinden, manifoldlar üzerinde bu koneksiyonlar sayesinde kovaryant türev hesaplanırken, koneksiyonlar arasındaki ilişkileri ifade eden denklemlere ihtiyacımız olacaktır; bunları aşağıda verelim:

$\tilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla N^m ve M^n manifoldları üzerinde tanımlı koneksiyonlar olmak üzere, $\forall\, X,Y\in\mathcal{X}\left(M^n\right)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h\left(X,Y\right) \tag{2.1.8}$$

dir. $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$, sırasıyla $\tilde{\nabla}_X Y$ in tanjant ve normal bileşenleridir. ∇ Riemann koneksiyonu, $\tilde{\nabla}$ dan indirgenmiş koneksiyon olarak ve h da M^n altmanifoldunun ikinci temel formu olarak adlandırılır. h ikinci temel formu simetriktir, yani

$$h(X,Y)=h(Y,X) \tag{2.1.9}$$

tir. $X \in \mathcal{X}(M^n)$ ve $\xi \in \mathcal{X}^{\perp}(M^n)$ için $-A_{\xi}(X)$ ve $\nabla^{\perp}_X \xi$, sırasıyla $\tilde{\nabla}_X \xi$ in tanjant ve normal bileşenleri olmak üzere, $\tilde{\nabla}_X \xi$,

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_{\xi}(X) + \nabla^{\perp}_X \xi \tag{2.1.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A ya M^n manifoldunun ikinci temel tensör alanı adı verilir. (2.1.8) formülüne Gauss formülü ve (2.1.10) formülüne de Weingarten formülü denir.

Teorem 2.1.55.[26] (a) $A_{\xi}(X)$, ξ ve X e göre bilineerdir ve dolayısıyla $p \in M^n$ noktasında $A_{\xi}(X)$, yalnızca ξ_p ve X_p ye bağlıdır.

(b) M^n üzerindeki her bir ξ normal vektör alanı ve M^n üzerindeki herhangi X ve Y vektör alanları için

$$g(A_{\xi}(X),Y)=\tilde{g}(h(X,Y),\xi) \tag{2.1.11}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıtlama:(a) M^n üzerindeki herhangi α ve β fonksiyonları için

$$\tilde{\nabla}_{\alpha X}(\beta\xi) = \alpha\tilde{\nabla}_X(\beta\xi) = \alpha\left[(X\beta)\xi + \beta\tilde{\nabla}_X \xi\right] = \alpha(X\beta)\xi - \alpha\beta A_{\xi}(X) + \alpha\beta\nabla^{\perp}_X \xi$$

olup, bu

$$A_{\beta\xi}(\alpha X) = \alpha\beta A_{\xi}(X)$$

ve

$$\nabla^{\perp}_{\alpha X}\left(\beta\xi\right)=\alpha X\left(\beta\right)\xi+\alpha\beta\nabla^{\perp}_{X}\xi$$

olduğunu gerçekler. Toplamsallık aşikar olduğundan, $A_{\xi}\left(X\right)$, ξ ve X e göre bilineerdir.

(b) Y, M^{n} üzerinde keyfi bir vektör alanı olsun. $\tilde{g}\left(\nabla_{X}Y,\xi\right)=\tilde{g}\left(Y,\nabla^{\perp}_{X}\xi\right)=0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}0&=\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{X}Y,\xi\right)+\tilde{g}\left(Y,\tilde{\nabla}_{X}\xi\right)\\&=\tilde{g}\left(\nabla_{X}Y,\xi\right)+\tilde{g}\left(h\left(X,Y\right),\xi\right)-g\left(Y,A_{\xi}\left(X\right)\right)+\tilde{g}\left(Y,\nabla^{\perp}_{X}\xi\right)\\&=\tilde{g}\left(h\left(X,Y\right),\xi\right)-g\left(Y,A_{\xi}\left(X\right)\right)\end{aligned}$$

çıkar ki bu, teoremi kanıtlar. □

Bir p noktasında, M^{n} nin bir ξ birim normal vektörü için ξ ye göre ikinci temel tensör A_{ξ} simetriktir.

Tanım 2.1.56. $A_{\xi}:\mathcal{X}\left(M^{n}\right)\to\mathcal{X}\left(M^{n}\right)$, $A_{\xi}\left(X\right)=-\left(\tilde{\nabla}_{X}\xi\right)^{\tan}$ şeklinde verilen ve $\forall X,Y\in\mathcal{X}\left(M^{n}\right)$ için ikinci temel form ile $\tilde{g}\left(h\left(X,Y\right),\xi\right)=g\left(A_{\xi}\left(X\right),Y\right)$ şeklinde bağıntılı olan A_{ξ} operatörüne M^{n} altmanifoldunun şekil (Weingarten) operatörü adı verilir. Bazı literatürlerde, $A_{\xi}\left(X\right)$ yerine $A_{\xi}X$ gösterimi de kullanılmaktadır.

Bu çalışmada $\left\{e_{1},...,e_{n}\right\}$, $\mathcal{X}\left(M^{n}\right)$ nin ortonormal bir bazı ve $\left\{e_{n+1},...,e_{m}\right\}$ de $\mathcal{X}^{\perp}\left(M^{n}\right)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere, M^{n} nin e_{r}, $r=n+1,...,m$, birim normal vektör alanına göre şekil operatörünün matrisini,

$$A_{e_r} = A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & \cdots & h_{1n}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}^r & \cdots & h_{nn}^r \end{pmatrix}$$

şeklinde ele aldık.

Tanım 2.1.57. M^n, N^m manifoldunun bir altmanifoldu ve h da M^n manifoldunun ikinci temel formu olsun. Eğer h ikinci temel formu özdeş olarak sıfır ise M^n manifolduna tümel jeodezik bir manifold denir.

Tanım 2.1.58. M^n üzerindeki bir ξ normal kesiti için A_ξ her yerde I birim dönüşümü ile orantılı ise, yani bir λ fonksiyonu için

$$A_\xi = \lambda I$$

ise ξ, M^n üzerinde umbilik (eşbükey) kesit adını alır veya M^n ξ ye göre umbiliktir, denir. M^n deki her yerel normal kesite göre umbilik olan M^n altmanifolduna da tümel umbilik bir manifold denir.

Tanım 2.1.59. $\{\xi_1,...,\xi_{m-n}\}$, bir $p \in M^n$ noktasında $T_p^\perp(M^n)$ normal uzayının ortonormal bir bazı ve $A^r = A_{\xi_r}$ olsun. Bu durumda r indisi $1,...,m-n$ dizisi üzerinden değişmek üzere, ξ_r, p de ortonormal bazın seçiminden bağımsız olan bir normal vektör olup,

$$H = \frac{1}{n}\left(\dot{I}z\, A^r\right)\xi_r \tag{2.1.12}$$

şeklinde tanımlanan H vektörüne p noktasındaki ortalama eğrilik vektörü denir. p noktasını özelleştirmek gerekirse, H yerine $H(p)$ gösterimi de kullanılabilir.

Tanım 2.1.60. Ortalama eğrilik vektörü özdeş olarak sıfır olan M^n altmanifolduna bir minimal altmanifold denir.

Tanım 2.1.61. $p \in M^n$ de, M^n nin bu noktadaki bir ξ birim normal vektörü için A_ξ nin öz vektörleri olan $e_1,...,e_n$ ortonormal vektörleri vardır, yani h_i reel sayıları için

$$A_{\xi}\left(e_i\right)=h_i e_i$$

dir. h_i öz değerleri asal eğrilikler ve e_i öz vektörleri de ξ normal doğrultusunun asal vektörleri olarak adlandırılır. Bu vektörlerin tanımladığı doğrultular, yani üzerinde bulunduğu doğrular ise asal doğrultular adını alır.

N^m deki $\tilde{X}, \tilde{Y}$ ve $\tilde{Z}$ vektör alanları için N^m Riemann manifoldunun eğrilik tensör alanı,

$$\tilde{R}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\tilde{Z}=\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}-\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}-\tilde{\nabla}_{\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]}\tilde{Z} \tag{2.1.13}$$

şeklinde verilir. X,Y ve Z, M^n altmanifoldu üzerinde vektör alanları olsun. O takdirde

$$\tilde{R}\left(X,Y\right)Z=\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$$

şeklinde olur ki, bu denklem; R, M^n altmanifoldunun eğrilik tensör alanını göstermek üzere (2.1.8) Gauss formülünden,

$$\begin{aligned}\tilde{R}\left(X,Y\right)Z=R\left(X,Y\right)Z+h\left(X,\nabla_Y Z\right)-h\left(Y,\nabla_X Z\right)-h\left(\left[X,Y\right],Z\right)\\ +\tilde{\nabla}_X h\left(Y,Z\right)-\tilde{\nabla}_Y h\left(X,Z\right)\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. $\xi_1,...,\xi_{m-n}$, M^n nin ortonormal normal vektör alanları ve h^r ler de karşılık gelen ikinci temel formlar olsun. Yani h, M^n altmanifoldunun ikinci temel formu olmak üzere,

$$h\left(X,Y\right)=h^r\left(X,Y\right)\xi_r$$

olsun. Bu durumda $A_{\xi_r}=A_r=A^r$, $1\leq r\leq m-n$ olmak üzere,

$$Xh^r\left(Y,Z\right)=\left(\nabla_X h^r\right)\left(Y,Z\right)+h^r\left(\nabla_X Y,Z\right)+h^r\left(Y,\nabla_X Z\right)$$

eşitliği ve (2.1.10) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\tilde{R}\left(X,Y\right)Z=R\left(X,Y\right)Z&-\left\{\left(\nabla_Y h^r\right)\left(X,Z\right)-\left(\nabla_X h^r\right)\left(Y,Z\right)\right\}\xi_r\\ &-h^r\left(Y,Z\right)A_r\left(X\right)+h^r\left(X,Z\right)A_r\left(Y\right)\\ &+h^r\left(Y,Z\right)\nabla_X^{\perp}\xi_r-h^r\left(X,Z\right)\nabla_Y^{\perp}\xi_r\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

elde edilir. Böylece M^n üzerindeki herhangi bir W vektör alanı için (2.1.14) ve (2.1.11) den,

$$\begin{aligned}\tilde{R}\left(X,Y;Z,W\right)=R\left(X,Y;Z,W\right)&+\tilde{g}\left(h\left(X,Z\right),h\left(Y,W\right)\right)\\ &-\tilde{g}\left(h\left(X,W\right),h\left(Y,Z\right)\right)\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

bulunur. Ayrıca (2.1.14) ten, $\tilde{R}\left(X,Y\right)Z$ nin normal bileşeninin

$$\begin{aligned}\left(\tilde{R}\left(X,Y\right)Z\right)^N&=\left\{\left(\nabla_X h^r\right)\left(Y,Z\right)-\left(\nabla_Y h^r\right)\left(X,Z\right)\right\}\xi_r\\ &+h^r\left(Y,Z\right)\nabla_X^{\perp}\xi_r-h^r\left(X,Z\right)\nabla_Y^{\perp}\xi_r\end{aligned}\tag{2.1.16}$$

şeklinde olduğu görülür. (2.1.15) denklemine Gauss denklemi ve (2.1.16) denklemine de Codazzi denklemi denir.

h ikinci temel formu için $\overline{\nabla}_X h$ ile gösterilen kovaryant türev,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X h\right)\left(Y,Z\right)&=\nabla_X^{\perp}\left(h^r\left(Y,Z\right)\xi_r\right)\\ &\quad-\left\{h^r\left(\nabla_X Y,Z\right)+h^r\left(Y,\nabla_X Z\right)\right\}\xi_r\\ &=\left(\nabla_X h^r\right)\left(Y,Z\right)\xi_r+h^r\left(Y,Z\right)\nabla_X^{\perp}\xi_r\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

olacak şekilde tanımlanırsa, (2.1.16) ve (2.1.17) den, Codazzi denkleminin

$$\left(\tilde{R}(X,Y)Z\right)^{N}=\left(\overline{\nabla}_{X}h\right)(Y,Z)-\left(\overline{\nabla}_{Y}h\right)(X,Z) \tag{2.1.18}$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Ayrıca ξ ve η, M^{n} nin iki normal vektör alanı ise o takdirde, sırasıyla (2.1.13), (2.1.10) ve (2.1.8) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y;\xi,\eta)=&-\tilde{g}\left(h\left(X,A_{\xi}(Y)\right),\eta\right)+\tilde{g}\left(h\left(Y,A_{\xi}(X)\right),\eta\right)\\&+\tilde{g}\left(\nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi,\eta\right)-\tilde{g}\left(\nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi,\eta\right)-\tilde{g}\left(\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta\right)\end{aligned}$$

çıkar. Böylece $R^{\perp}$, $\mathcal{X}^{\perp}\left(M^{n}\right)$ normal vektör alanlarının kümesi üzerindeki $\nabla^{\perp}$ normal koneksiyonunun eğrilik tensör alanını göstermek üzere,

$$R^{\perp}(X,Y)\xi=\nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi-\nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi-\nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$$

ise bu durumda

$$R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta)=\tilde{g}\left(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\right)$$

ve

$$\left[A_{\xi},A_{\eta}\right]=A_{\xi}A_{\eta}-A_{\eta}A_{\xi}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y;\xi,\eta)&=R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta)-\tilde{g}\left(h\left(X,A_{\xi}(Y)\right),\eta\right)+\tilde{g}\left(h\left(Y,A_{\xi}(X)\right),\eta\right)\\&=R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta)-g\left(A_{\eta}(X),A_{\xi}(Y)\right)+g\left(A_{\eta}\left(A_{\xi}(X)\right),Y\right)\\&=R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta)-g\left(A_{\xi}\left(A_{\eta}(X)\right),Y\right)+g\left(A_{\eta}\left(A_{\xi}(X)\right),Y\right)\\&=R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta)-g\left(A_{\xi}\left(A_{\eta}(X)\right)-A_{\eta}\left(A_{\xi}(X)\right),Y\right)\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\tilde{R}(X,Y;\xi,\eta) = R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta) - g\left(\left[A_\xi, A_\eta\right](X), Y\right) \tag{2.1.19}$$

bulunur. (2.1.19) denklemi Ricci denklemi olarak adlandırılır.

N^m üst uzayı, sabit c kesit eğrilikli bir uzay ise N^m üzerindeki herhangi $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$ vektör alanları için

$$\tilde{R}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\tilde{Z} = c\left(\tilde{g}\left(\tilde{Z},\tilde{Y}\right)\tilde{X} - \tilde{g}\left(\tilde{Z},\tilde{X}\right)\tilde{Y}\right) \tag{2.1.20}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla M^n deki herhangi X,Y ve Z vektör alanları için (2.1.20) den, $\tilde{R}(X,Y)Z = c\left(\tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y\right) = c\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)$ olup, bu vektör alanı M^n ye tanjanttır. Böylece (2.1.15) Gauss denklemi,

$$\begin{aligned} R(X,Y;Z,W) = c\{&g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \\ &+ \tilde{g}\left(h(X,W),h(Y,Z)\right) - \tilde{g}\left(h(X,Z),h(Y,W)\right) \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

şekline ve (2.1.19) Ricci denklemi de

$$R^{\perp}(X,Y;\xi,\eta) = g\left(\left[A_\xi, A_\eta\right](X), Y\right) \tag{2.1.22}$$

veya

$$\tilde{g}\left(\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi, \eta\right) = g\left(\left[A_\xi, A_\eta\right](X), Y\right) \tag{2.1.23}$$

şekline indirgenir. (2.1.18) den, Codazzi denkleminin

$$0 = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z) - \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z) \tag{2.1.24}$$

olduğu görülür.

N^m, sabit c kesit eğrilikli bir manifold ve $\{e_1,...,e_n\}$, $\mathcal{X}(M^n)$ nin ortonormal bir bazı olsun. Ayrıca $\{\xi_1,...,\xi_{m-n}\}$ de normaller kümesi üzerinde ortonormal bir baz olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M^n)$ için

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}\left(h(Y,Z),h(X,W)\right)-\tilde{g}\left(h(X,Z),h(Y,W)\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\left[\tilde{g}\left(h(Y,Z),\xi_r\right)\tilde{g}\left(\xi_r,h(X,W)\right)-\tilde{g}\left(h(X,Z),\xi_r\right)\tilde{g}\left(\xi_r,h(Y,W)\right)\right]\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\left[g\left(A_r(Y),Z\right)g\left(A_r(X),W\right)-g\left(A_r(X),Z\right)g\left(A_r(Y),W\right)\right]
\end{aligned}$$

olup, (2.1.21) Gauss denklemi

$$\begin{aligned}
g\left(R(X,Y)Z,W\right)=c\left[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right]+&\\
\sum_{r=1}^{m-n}\left(g\left(A_r(Y),Z\right)g\left(A_r(X),W\right)\right)-&\\
\sum_{r=1}^{m-n}\left(g\left(A_r(X),Z\right)g\left(A_r(Y),W\right)\right)&
\end{aligned}\tag{2.1.25}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca (2.1.2) ve (2.1.25) ten, M^n nin Ricci tensör alanı

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y)=c\sum_{i=1}^{n}\left(g(X,Y)g(e_i,e_i)\right)-c\sum_{i=1}^{n}\left(g(e_i,Y)g(X,e_i)\right)+&\\
\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(A_r(X),Y\right)g\left(A_r(e_i),e_i\right)\right)-&\\
\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(A_r(e_i),Y\right)g\left(A_r(X),e_i\right)\right)&
\end{aligned}$$

veya

$$Ric(X,Y)=(n-1)cg(X,Y)+\sum_{r=1}^{m-n}\left(\dot{I}zA_r g\left(A_r(X),Y\right)\right)-\sum_{r=1}^{m-n} g\left(A_r(X),A_r(Y)\right) \tag{2.1.26}$$

şeklinde, (2.1.2) ve (2.1.26) dan, M^n nin τ skaler eğriliği de

$$\tau = n(n-1)c+\sum_{r=1}^{m-n}\left(\dot{I}zA_r\right)^2-\sum_{r=1}^{m-n}\dot{I}zA_r^{\,2} \tag{2.1.27}$$

şeklinde ifade edilir. $\|A\|^2$ ile gösterilecek olan $\sum_{r=1}^{m-n}\dot{I}zA_r^{\,2}$, M^n nin ikinci temel formunun normunun karesidir. Çünkü

$$\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),\xi_r\right)\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),\xi_r\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i,j=1}^{n}g\left(A_r(e_i),e_j\right)g\left(A_r(e_i),e_j\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i=1}^{n}g\left(A_r(e_i),A_r(e_i)\right)\\
&=\sum_{r=1}^{m-n}\sum_{i=1}^{n}g\left(A_r^{\,2}(e_i),e_i\right)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h\left(e_i,e_j\right)\right)=\|A\|^2$$

bulunur. Buna göre (2.1.27) de (2.1.12) ve $\|h\|^2=\|A\|^2$ kullanılacak olursa; H^2, H ortalama eğrilik vektör alanının uzunluğunun karesini göstermek üzere,

$$\tau = n(n-1)c + n^2H^2 - \|h\|^2 \tag{2.1.28}$$

çıkar.

Şimdi üst uzayın E^m Öklid uzayı olduğunu kabul edelim. O takdirde $h_{jir} = h_{ji}{}^r$ $(1 \le r \le m-n)$ olmak üzere, Gauss denklemi

$$R(X,Y;Z,W) = \tilde{g}\big(h(X,W),h(Y,Z)\big) - \tilde{g}\big(h(X,Z),h(Y,W)\big)$$

veya yerel bileşenlerle

$$R_{kjih} = h_{kh}{}^r h_{jir} - h_{ki}{}^r h_{jhr}$$

şeklinde verilir. Son eşitliğin her iki tarafı g^{kh} ile çarpılarak,

$$R_{ji} = -g^{kh} h_{ki}{}^r h_{jhr} + h_t{}^t{}_r h_{ji}{}^r$$

elde edilir. Böylece M^n, E^m nin minimal bir altmanifoldu ise

$$R_{ji} = -h_{ti}{}^r h_j{}^t{}_r$$

bulunur. Denklemin sağ tarafı, $T_p(M^n) \times T_p(M^n) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı simetrik bir bilineer form olarak görülebilir ve her tanjant vektör çifti için ≤ 0 değerine sahip olduğundan negatif yarı-tanımlıdır. Bu denklemden, $h_i{}^{jr} = h_i{}^j{}_r$ olmak üzere, skaler eğrilik

$$\tau = -h_j{}^i{}_r h_i{}^j{}_r$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2.1.62.[26]. M^n, E^m Öklid uzayının minimal bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M^n nin Ricci tensörü negatif yarı-tanımlıdır ve M^n nin tümel jeodezik olması için gerek ve yeter koşul onun skaler eğriliğinin sıfır olmasıdır.

2.1.5. Bazı Özel Eğrilikler

Bu kısımda, bazı özel eğrilik tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.1.63. $n>3$ boyutlu bir M^n Riemann manifoldu için g, Riemann metriği ; R, Riemann eğrilik tensör alanı ; Ric, Ricci tensör alanı ; τ, skaler eğrilik ve X,Y,Z,W, M^n nin keyfi tanjant vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} C(X,Y;Z,W) &= R(X,Y;Z,W) \\ &-\frac{1}{n-2}\begin{Bmatrix} g(X,W)Ric(Y,Z)+g(Y,Z)Ric(X,W) \\ -g(X,Z)Ric(Y,W)-g(Y,W)Ric(X,Z) \end{Bmatrix} \\ &+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)\} \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

şeklinde tanımlanan C tensör alanına Weyl'in konformal eğrilik tensör alanı denir.

Tanım 2.1.64. $n>3$ boyutlu bir M^n Riemann manifoldu için g, Riemann metriği; R, Riemann eğrilik tensör alanı ; Ric, Ricci tensör alanı ve X,Y,Z,W, M^n nin keyfi tanjant vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(X,Y;Z,W) &= R(X,Y;Z,W) \\ &-\frac{1}{n-2}\begin{Bmatrix} g(X,W)Ric(Y,Z)+g(Y,Z)Ric(X,W) \\ -g(X,Z)Ric(Y,W)-g(Y,W)Ric(X,Z) \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

şeklinde tanımlanan K tensör alanına konharmonik eğrilik tensör alanı denir.

$\mathrm{x}:M^n \to R^m(c)$, g Riemann metriğine sahip bir M^n, $n \geq 2$, Riemann manifoldunun $\tilde{g}$ Riemann metriğine sahip sabit c kesit eğrilikli bir Riemann uzay formu içine izometrik bir dahil edilmesi olsun. Bu dahil edilme için aşağıdaki tanımları verebiliriz:

Tanım 2.1.65. Bir M^n Riemann manifoldu için $\{e_1,...,e_n\}$, $T_p\left(M^n\right)$ tanjant uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere,

$$\rho = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j=1}^{n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right) \tag{2.1.31}$$

şeklinde tanımlanan eğriliğe M^n nin normalize edilmiş skaler eğriliği denir.

Tanım 2.1.66. $\forall p \in M^n$ ve $m-n \geq 2$ için $\{e_1,...,e_n\}$ ve $\{\xi_1,...,\xi_{m-n}\}$, sırasıyla p noktasındaki tanjant uzay ve normal uzayın ortonormal birer bazı olmak üzere,

$$\rho^{\perp}(p) = \frac{2}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{i<j=1}^{n} \sum_{r<s=1}^{m-n} \tilde{g}\left(R^{\perp}\left(e_i,e_j\right)\xi_r,\xi_s\right)^2} \tag{2.1.32}$$

şeklinde tanımlanan eğriliğe normal skaler eğrilik denir.

Tanım 2.1.67. Bir M^n Riemann manifoldu için L^k nın $T_p\left(M^n\right)$ de bir k-düzlem kesiti ve X in L^k da bir birim vektör olduğunu kabul edelim. $e_1 = X$ olacak şekilde, L^k nın bir $\{e_1,.....,e_k\}$ ortonormal bazını seçelim. K_{ij}, $\{e_i,e_j\}$ tarafından gerilen 2-düzlem kesitinin kesit eğriliğini göstermek üzere,

$$Ric_{L^k}(X) = K_{12} + ... + K_{1k} \tag{2.1.33}$$

şeklinde tanımlanan L^k nın X teki Ricci eğriliği, basitçe k-Ricci eğriliği olarak adlandırılır.

2.2. RIEMANN EĞRİLİK DEĞİŞMEZLERİ

Bu kısımda, Riemann eğrilik değişmezleri ile ilgili temel kavramları ele alacağız [1,8-12].

Riemann değişmezleri (invaryantları), Riemann manifoldlarının içsel karakteristikleridir. Klasik olarak, Riemann eğrilik değişmezleri arasında kesit, skaler ve Ricci eğrilikleri muhtelif yazarlar tarafından çalışılmıştır. Bu bölümde, B.Y. Chen [10] tarafından, $M^n \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanmış olan yeni tip eğrilik değişmezlerini ele alacağız.

Bir M^n Riemann manifoldunun bir $\pi \subset T_p(M^n)$, $p \in M^n$, düzlem kesitiyle eşleşen kesit eğriliğini $K(\pi)$ ile göstereceğiz. Ayrıca tezin belli bir kısmından itibaren, $T_p(M^n)$ tanjant uzayının herhangi bir $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazı için, p deki τ skaler eğriliğini [10] daki gibi

$$\tau(p) = \sum_{i<j} K(e_i \wedge e_j) \tag{2.2.1}$$

şeklinde ve L, $T_p(M^n)$ de $r \geq 2$ boyutlu bir altuzay ise $\{e_1,...,e_r\}$, L nin ortonormal bir bazı olmak üzere, L nin $\tau(L)$ skaler eğriliğini de yine, [10] daki gibi

$$\tau(L) = \sum_{\alpha<\beta} K(e_\alpha \wedge e_\beta), \ 1 \leq \alpha, \beta \leq r \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlayacağız. p de M^n nin $\tau(p)$ skaler eğriliği, p de M^n nin tanjant uzayının skaler eğriliğinden başka bir şey değildir ve eğer L bir 2-düzlem kesiti ise $\tau(L)$, L nin $K(L)$ kesit eğriliğidir.

[10,11] de olduğu gibi, verilen $n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tamsayıları için $S(n,k)$ ile $n_1 < n$, $n_j \geq 2$, $j = 1,...,k$ ve $n_1 + ... + n_k \leq n$ koşulunu sağlayan bütün $(n_1,...,n_k)$ k-lılarından oluşan sonlu kümeyi ve $S(n)$ ile de $k \geq 0$ olmak üzere, bütün $S(n,k)$ ların birleşimini gösterelim. Her $(n_1,...,n_k) \in S(n,k)$ k-lısı için $S(n_1,...,n_k)(p)$ ve $\hat{S}(n_1,...,n_k)(p)$ Riemann değişmezleri, $L_1,...,L_k$, $boyL_j = n_j$, $j = 1,...,k$ olacak şekilde $T_p(M^n)$ nin birbirine ikişer ikişer ortogonal bütün k altuzayları üzerinden değişmek üzere, (2.2.2) kullanılarak, sırasıyla

$$S(n_1,...,n_k)(p)=\inf\{\tau(L_1)+...+\tau(L_k)\},$$
$$\hat{S}(n_1,...,n_k)(p)=\sup\{\tau(L_1)+...+\tau(L_k)\} \qquad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanır ($boyL_j=n_j$, L_j nin boyutunun n_j olduğunu ifade etmektedir.). Yine, $\delta(n_1,...,n_k)(p)$ ve $\hat{\delta}(n_1,...,n_k)(p)$ Riemann değişmezleri, (2.2.1) ve (2.2.3) kullanılarak, sırasıyla

$$\delta(n_1,...,n_k)(p)=\tau(p)-S(n_1,...,n_k)(p),$$
$$\hat{\delta}(n_1,...,n_k)(p)=\tau(p)-\hat{S}(n_1,...,n_k)(p) \qquad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu değişmezlere göre τ skaler eğriliği, $\delta(\emptyset)=\hat{\delta}(\emptyset)$ ($k=0$ olmak üzere) den başka bir şey değildir. Ayrıca herhangi bir $(n_1,...,n_k)\in S(n)$ k-lısı için $\delta(n_1,...,n_k)$ ve $\hat{\delta}(n_1,...,n_k)$ Riemann değişmezlerinin bu iki dizisi, daima

$$\delta(n_1,...,n_k)\geq\hat{\delta}(n_1,...,n_k) \qquad (2.2.5)$$

eşitsizliğini sağlar. Bu çalışmada, $\delta(n_1,...,n_k)=\hat{\delta}(n_1,...,n_k)$ koşulunu sağlayan Riemann manifoldlarını sınıflandıracağız.

Tanım 2.2.1. $\delta(n_1,...,n_k)=\hat{\delta}(n_1,...,n_k)$ eşitliğini özdeş olarak sağlayan bir M^n Riemann manifoldu bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olarak adlandırılır. (2.2.3) ve (2.2.4) ten bir M^n Riemann manifoldunun bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\tau(L_1)+...+\tau(L_k)$ nın $boyL_j=n_j$, $j=1,...,k$ olmak üzere, karşılıklı ortogonal k altuzay $L_1,...,L_k$ nın seçiminden bağımsız olmasıdır.

B.Y. Chen, [10] da sabit c kesit eğrilikli bir Riemann uzay formu olan $R^m(c)$ deki bir M^n Riemann manifoldunun herhangi bir izometrik dahil edilmesi için $\delta(n_1,...,n_k)$ nın aşağıdaki kuvvetli eşitsizliği sağladığını göstermiştir:

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right) \le \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)c. \qquad (2.2.6)$$

Ayrıca (2.2.5) ve (2.2.6) yı birleştirerek aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir:

$$\hat{\delta}\left(n_1,...,n_k\right) \le \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)c. \qquad (2.2.7)$$

Verilen bir M^n Riemann manifoldu yeteri kadar geniş bir Öklid üst uzayında bir altmanifold olarak düşünülebilir. Bu durumda (2.2.6) ve (2.2.7) eşitsizlikleri (herhangi bir koşul olmaksızın eşitsizlikler gerçeklenir) skaler değerli önemli içsel ve dışsal eğrilik değişmezleri arasında optimal bağıntılar verir.

Tanım 2.2.2. $S(n)$ de bir $\left(n_1,...,n_k\right)$ k-lısı için

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right) = \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)c$$

eşitliğini özdeş olarak gerçekleyen bir M^n Riemann manifoldunun sabit c kesit eğrilikli bir Riemann uzay formu içine bir $\mathrm{x}: M^n \to R^m\left(c\right)$ izometrik dahil edilmesi bir ideal dahil edilme adını alır.

Özellikler 2.2.3.[8] (i) δ, "çok zayıf" bir Riemann değişmezidir. Özel olarak $n=2$ ise o, Riemann manifoldu hakkında hiçbir bilgi vermez.

(ii) $n=3$ ise her bir $p \in M^n$ için δ değişmezi, $\max Ric = \max\left\{Ric\left(X\right) \middle| X \in T_p\left(M^n\right), \|X\|=1\right\}$ şeklinde tanımlanan, p deki bütün birim tanjant X vektörleri için $Ric\left(X\right)$ Ricci eğriliklerinin maksimumuna eşittir.

(iii) Skaler eğrilik ve δ değişmezi, M^n nin kesit eğriliklerini kullanarak tanımlanmasına rağmen, genelde farklıdırlar. τ ve δ arasındaki aşağıdaki ilişkiyi verebiliriz:

Teorem 2.2.4.[8] M^n, $n \ge 3$ olmak üzere, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer bir $p \in M^n$ noktasında skaler eğrilik $\tau > 0$ $\left(\text{sırasıyla } \tau \ge 0\right)$ ise o takdirde p de

$\delta > 0$ $(\text{sırasıyla } \delta \geq 0)$ dır.

Kanıtlama: $\inf K(p) > 0$ ise p deki her kesit eğriliği pozitiftir. Dolayısıyla özdeş olarak $\delta > 0$ dır. $\inf K(p) < 0$ ise $\delta \geq \tau$ dur. □

R. Osserman, 28 Nisan 1997'de, $n > 2$ olmak üzere, n-boyutlu bir Riemann manifoldu için $\tau = \delta(\varnothing)$ ve $\delta(2)$ nin

$$\frac{\delta(2)}{N-1} \geq \frac{\tau}{N}, \; N = \binom{n}{2}$$

eşitsizliğini sağladığını ve eşitliğin yalnızca Riemann uzay formları için gerçeklendiğini göstermiştir [10].

Teorem 2.3.7 den, 2ℓ-boyutlu bir Einstein manifoldu için

$$\delta(\varnothing) + \delta(\ell,\ell) = 2\delta(\ell), \; \hat{\delta}(\varnothing) + \hat{\delta}(\ell,\ell) = 2\hat{\delta}(\ell).$$

bağıntıları geçerlidir [9].

Bu çalışmada, bir M^n Riemann manifoldu üzerinde her bir k, $2 \leq k \leq n$, tamsayısı için L^k, $T_p(M^n)$ deki bütün k-düzlem kesitleri üzerinden ve X, L^k daki bütün birim vektörler üzerinden değişmek üzere, θ_k ile gösterilen ve

$$\theta_k(p) = \left(\frac{1}{k-1}\right) \inf_{L^k, X} Ric_{L^k}(X), \; p \in M^n \tag{2.2.8}$$

şeklinde tanımlanan bir Riemann değişmezine de yer verilecektir [12].

2.3. RIEMANN UZAY FORMLARI, EINSTEIN UZAYLARI VE KONFORMAL DÜZ UZAYLARIN KARAKTERİZASYONLARI

H. Weyl'in bir teoreminden [26], $n > 3$ boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun konformal Öklid veya konformal düz olması için gerek ve yeter koşul Weyl konformal eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır. Aşağıdaki teoremde de görüleceği üzere R. Kulkarni, [30] da kesit eğriliği vasıtasıyla bu uzayların bir karakterizasyonunu oluşturmuştur:
Teorem 2.3.1.[29,30] Bir M^n, $n > 3$, Riemann manifoldunun konformal düz olması için gerek ve yeter koşul M^n nin herhangi bir noktasındaki X, Y, Z, W ortonormal tanjant vektörleri için

$$K(X \wedge Y) + K(Z \wedge W) = K(X \wedge Z) + K(Y \wedge W)$$

olmasıdır.

Kanıtlama: $\{e_i, e_j\}$ tarafından gerilen düzlemin kesit eğriliği K_{ij} olmak üzere, M^n nin herhangi bir noktasındaki ortonormal bir $\{e_1, ..., e_n\}$ bazını göz önüne alalım. O takdirde örneğin; e_i ve e_j için, (2.1.29) ve H. Weyl'in teoreminden,

$$\begin{aligned} 0 &= C(e_i, e_j; e_j, e_i) \\ &= R(e_i, e_j; e_j, e_i) - \frac{1}{n-2} \left\{ \begin{array}{l} g(e_i, e_i) Ric(e_j, e_j) + g(e_j, e_j) Ric(e_i, e_i) \\ -g(e_i, e_j) Ric(e_j, e_i) - g(e_j, e_i) Ric(e_i, e_j) \end{array} \right\} \\ &\quad + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \left\{ g(e_i, e_i) g(e_j, e_j) - g(e_i, e_j) g(e_j, e_i) \right\} \end{aligned}$$

veya

$$K_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(Ric(e_i) + Ric(e_j)\right) - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}, \ i \neq j \tag{2.3.1}$$

bulunur ki, böylece

$$K_{ij} + K_{k\ell} = K_{ik} + K_{j\ell}\,,\ i \neq j \neq k \neq \ell \tag{2.3.2}$$

çıkar. Tersine, $i \neq j \neq k \neq \ell$ ler için (2.3.2) de $k \to i$, $\ell \to j$ yazalım. Bu durumda $2K_{ij} = K_{ii} + K_{jj}$ elde edilir. Yine, (2.3.2) de i, j, k yı sabit tutup ℓ ler üzerinden toplam alırsak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{n} K_{ij} + \sum_{\ell=1}^{n} K_{k\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} K_{ik} + \sum_{\ell=1}^{n} K_{j\ell} \\
&\Rightarrow nK_{ij} + \left(K_{kk} + Ric\left(e_k\right)\right) = nK_{ik} + \left(K_{jj} + Ric\left(e_j\right)\right) \\
&\Rightarrow nK_{ij} - K_{jj} + Ric\left(e_k\right) = nK_{ik} - K_{kk} + Ric\left(e_j\right) \\
&\Rightarrow nK_{ij} + K_{ii} - 2K_{ij} + Ric\left(e_k\right) = nK_{ik} - K_{kk} + Ric\left(e_j\right)
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\left(n-2\right)K_{ij} + Ric\left(e_k\right) = \left(n-2\right)K_{ik} + Ric\left(e_j\right) \tag{2.3.3}$$

bulunur. (2.3.3) te $k \to i$ yazacak olursak,

$$\left(n-2\right)K_{ij} + Ric\left(e_i\right) = \left(n-2\right)K_{ii} + Ric\left(e_j\right)$$

çıkar. Şimdi de (2.3.3) te i ve j yi sabit tutup k üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(n-2\right)K_{ij} + \sum_{k=1}^{n} Ric\left(e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(n-2\right)K_{ik} + \sum_{k=1}^{n} Ric\left(e_j\right)$$

eşitliğinden,

$$n\left(n-2\right)K_{ij} + \tau = \left(n-2\right)\left(K_{ii} + Ric\left(e_i\right)\right) + nRic\left(e_j\right)$$

$$= (n-2)K_{ij} + Ric(e_i) - Ric(e_j) + (n-2)Ric(e_i) + nRic(e_j)$$

$$= (n-2)K_{ij} + (n-1)Ric(e_i) + (n-1)Ric(e_j)$$

ve buradan (2.3.1) elde edilir. Bu, her $i \neq j$ için $C(e_i, e_j; e_j, e_i) = 0$ olması demektir. Böylece $C = 0$ olup, M^n konformal düzdür. □

Teorem 2.3.2.[31] $\mathrm{K} = 0 \Leftrightarrow C = 0$ ve $\tau = 0$, yani M^n nin konharmonik düz olması için gerek ve yeter koşul M^n nin konformal düz ve sıfır skaler eğrilikli olmasıdır.

Kanıtlama:(2.1.29) ve (2.1.30) dan, M^n ye tanjant keyfi X, Y, Z, W vektör alanları için

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(X,Y;Z,W) &= C(X,Y;Z,W) \\ &\quad - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

olduğu çıkar. Dolayısıyla yeterlik açıktır. Tersine, $\mathrm{K} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.1.30) dan,

$$R(X,Y;Z,W) = \frac{1}{n-2}\begin{Bmatrix} g(X,W)Ric(Y,Z) + g(Y,Z)Ric(X,W) \\ -g(X,Z)Ric(Y,W) - g(Y,W)Ric(X,Z) \end{Bmatrix} \tag{2.3.5}$$

bağıntısı elde edilir. $(1,3)$-tipinden R eğrilik tensör alanının 1. büzülmesi, (2.3.5) ten

$$Ric(Y,Z) = \frac{1}{n-2}\{nRic(Y,Z) + \tau g(Y,Z) - Ric(Y,Z) - Ric(Y,Z)\}$$

şeklinde bulunur. Böylece her Y ve Z için $\tau g(Y,Z) = 0$ ve dolayısıyla da $\tau = 0$ çıkar ki bu, (2.3.4) ile birlikte kanıtı tamamlar. □

Tezin geri kalan kısmında kolaylık olsun diye, $T_p(M^n)$ tanjant uzayının herhangi bir $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal bazı için p deki τ skaler eğriliği (2.2.1) deki gibi ve L , $T_p(M^n)$

de $r \geq 2$ boyutlu bir altuzaysa $\{e_1,...,e_r\}$, L nin ortonormal bir bazı olmak üzere, L nin $\tau(L)$ skaler eğriliği de (2.2.2) deki gibi tanımlanacaktır. Bu kısımda genel bir r-düzlem kesiti için skaler eğrilik kavramını esas alacağız ve $T_p(M^n)$ nin $\{e_{i_1},...,e_{i_j}\}$ ile gerilen j-uzayının skaler eğriliğini ise $\tau_{i_1...i_j}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.3.3.[29] M, 4-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O takdirde aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(1) $\mathrm{K} \equiv 0$ (K, M nin konharmonik eğrilik tensörüdür.),

(2) $C \equiv 0$ ve $\tau \equiv 0$ (C ve τ, sırasıyla M nin konformal eğrilik tensörü ve skaler eğriliğidir.),

(3) $K(\pi) = -K(\pi^{\perp})$ (Burada K, kesit eğriliğini; π, herhangi bir düzlem kesiti ve $\pi^{\perp}$, ortogonal düzlem kesiti göstermektedir.).

Kanıtlama: **(1)** ve **(2)** nin eşdeğer olduğunu Teorem 2.3.2 de gösterdiğimizden, yalnızca **(2)** ve **(3)** ün eşdeğer olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için ilk olarak **(2)** nin gerçeklendiğini kabul edelim. π, M nin bir p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M) \simeq \mathbb{R}^4$ ün herhangi 2-boyutlu bir altuzayı olsun. $\pi = e_1 \wedge e_2$ ve dolayısıyla $\pi^{\perp} = e_3 \wedge e_4$ olacak şekilde, $T_p(M)$ nin ortonormal bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ çatısını daima seçebiliriz. $C \equiv 0$ olduğundan,

$$K(e_1 \wedge e_2) + K(e_3 \wedge e_4) = K(e_1 \wedge e_3) + K(e_2 \wedge e_4) = K(e_1 \wedge e_4) + K(e_2 \wedge e_3)$$

çıkar ve $i, j \in \{1,2,3,4\}$ olmak üzere, (2.2.1) den

$$\tau = 3\left\{K(\pi) + K(\pi^{\perp})\right\}$$

bulunur. Dolayısıyla $\tau = 0$ olduğundan **(3)** elde edilir. Tersine, **(3)** ün gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda M nin herhangi bir noktasındaki $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatısı için, $\{1,2,3,4\}$ kümesinden seçeceğimiz herhangi sıradaki dört farklı i, j, k, ℓ için

$$K\left(e_i \wedge e_j\right) + K\left(e_k \wedge e_\ell\right) = 0$$

buluruz. Böylece (2.3.2) den, M konformal düzdür ve üstelik $\tau \equiv 0$ olduğu açıktır. □

Teorem 2.3.4.[25] Yönlendirilmiş 4-boyutlu bir M Riemann manifoldunun bir Einstein uzayı olması için gerek ve yeter koşul birbirine ortogonal herhangi iki düzlem tarafından tanımlanan kesit eğriliklerinin eşit, yani $K(\pi) = K(\pi^{\perp})$ olmasıdır.

Kanıtlama: M, bir Einstein uzayı olsun. $\{e_i, e_j\}$ tarafından gerilen düzlemin kesit eğriliği K_{ij} olmak üzere, ortonormal bir $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bazı için (2.1.2) ve (2.1.3) ten,

$$Ric(e_1) = K_{12} + K_{13} + K_{14},$$
$$Ric(e_2) = K_{21} + K_{23} + K_{24},$$
$$Ric(e_3) = K_{31} + K_{32} + K_{34},$$
$$Ric(e_4) = K_{41} + K_{42} + K_{43}$$

yazabiliriz. Hipotezden $Ric(e_1) = Ric(e_2) = Ric(e_3) = Ric(e_4)$ olduğundan, ilk iki eşitlikten $K_{13} + K_{14} = K_{23} + K_{24}$ ve son iki eşitlikten $K_{13} + K_{23} = K_{14} + K_{24}$ bulunur.

$$K_{14} - K_{23} = K_{24} - K_{13},$$
$$K_{14} - K_{23} = K_{13} - K_{24}$$

olduğundan, eşitliklerin her iki tarafının sıfıra eşit olması gerekir. Buradan $K_{14} = K_{23}$ ve $K_{13} = K_{24}$ çıkar. Benzer bir düşünceyle, $K_{12} = K_{34}$ tür. Dolayısıyla herhangi ortonormal baz vektörlerinin gerdiği birbirine ortogonal olan iki düzlemin tanımlayacağı kesit eğrilikleri eşit olur. Tersine, $K_{12} = K_{34}$, $K_{13} = K_{24}$, $K_{14} = K_{23}$ olsun. Buna göre

$$Ric(e_1) = K_{12} + K_{13} + K_{14} = K_{12} + K_{24} + K_{23} = Ric(e_2),$$
$$Ric(e_1) = K_{12} + K_{13} + K_{14} = K_{34} + K_{13} + K_{23} = Ric(e_3),$$
$$Ric(e_1) = K_{12} + K_{13} + K_{14} = K_{34} + K_{24} + K_{14} = Ric(e_4)$$

olup, $Ric(e_1)=Ric(e_2)=Ric(e_3)=Ric(e_4)$ Einstein uzayı olma koşulu elde edilir. $i\neq j$ için $Ric(e_i+e_j,e_i+e_j)=Ric(e_i-e_j,e_i-e_j)$ dir ve buradan $Ric(e_i,e_i)+$ $Ric(e_j,e_j)+2Ric(e_i,e_j)=Ric(e_i,e_i)+Ric(e_j,e_j)-2Ric(e_i,e_j)$ olup, $Ric(e_i,e_j)=0$ bulunur. □

Şimdi Teorem 2.3.1 i genelleştiren aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 2.3.5.[11] M^n $(n\geq 4)$ bir Riemann manifoldu ve s, $2<2s\leq n$ eşitsizliğini sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda M^n nin konformal düz olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $\{e_1,...,e_{2s}\}$ ortonormal vektör kümesi için

$$\tau_{1...s}+\tau_{s+1...2s}=\tau_{1...s-1\;s+1}+\tau_{s\;s+2...2s} \tag{2.3.6}$$

olmasıdır.

Kanıtlama: $s=2$ için bu, Teorem 2.3.1 de ifade ettiğimiz sonuçtur. Şimdi $s>2$ için teoremi kanıtlayalım. İlk olarak konformal düz bir uzayın (2.3.6) yı sağladığını kanıtlayalım. Bunun için M^n nin konformal düz olduğunu varsayalım ve s, $2<2s\leq n$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Teorem 2.3.1 den, herhangi bir $i<s$ için (2.2.1), (2.1.2) de dikkate alınarak (2.3.1) eşitliği,

$$K_{is}=\frac{1}{(n-2)}\big(Ric(e_i)+Ric(e_s)\big)-\frac{2\tau}{(n-1)(n-2)} \tag{2.3.7}$$

şekline gelir. O halde $k>s+1$ için

$$K_{i\,s}+K_{k\,s+1}=K_{i\,s+1}+K_{ks}$$

çıkar. (2.2.2) kullanılarak bulunan

$$\tau_{1...s-1}=K_{12}+K_{13}+...+K_{1\,s-2}+K_{1\,s-1}+K_{23}+...+K_{2\,s-2}+K_{2\,s-1}+...+K_{s-2\,s-1}$$

ve

$$\tau_{1\ldots s}=K_{12}+K_{13}+\ldots+K_{1\,s-1}+K_{1\,s}+K_{23}+\ldots+K_{2\;s-1}+K_{2s}+\ldots+K_{s-2\,s-1}+K_{s-2\;s}$$
$$+K_{s-1\,s}$$

eşitliklerinden,

$$\tau_{1\ldots s}=\tau_{1\ldots s-1}+K_{1s}+K_{2s}+\ldots+K_{s-2\;s}+K_{s-1\,s}$$

elde edilir. Ayrıca yine, (2.2.2) kullanılarak bulunan

$$\tau_{s+2\ldots 2s}=K_{s+2\;s+3}+K_{s+2\;s+4}+\ldots+K_{s+2\;2s-1}+K_{s+2\;2s}+K_{s+3\;s+4}+\ldots+K_{s+3\;2s-1}+K_{s+3\;2s}$$
$$+\ldots+K_{2s-2\;2s-1}+K_{2s-2\;2s}+K_{2s-1\;2s}$$

ve

$$\tau_{s+1\ldots 2s}=K_{s+1\;s+2}+K_{s+1\;s+3}+\ldots+K_{s+1\;2s-1}+K_{s+1\;2s}+K_{s+2\;s+3}+\ldots+K_{s+2\;2s-1}+K_{s+2\;2s}$$
$$+\ldots+K_{2s-2\;2s-1}+K_{2s-2\;2s}+K_{2s-1\;2s}$$

eşitliklerinden de

$$\tau_{s+1\ldots 2s}=K_{s+1\;s+2}+K_{s+1\;s+3}+\ldots+K_{s+1\;2s-1}+K_{s+1\;2s}+\tau_{s+2\ldots 2s}$$

çıkar. Böylece

$$\begin{aligned}\tau_{1\ldots s}+\tau_{s+1\ldots 2s}&=\tau_{1\ldots s-1}+K_{1s}+K_{2s}+\ldots+K_{s-2\;s}+K_{s-1\;s}\\&\quad+K_{s+1\;s+2}+K_{s+1\;s+3}+\ldots+K_{s+1\;2s-1}+K_{s+1\;2s}+\tau_{s+2\ldots 2s}\\&=\tau_{1\ldots s-1}+\sum_{i=1}^{s-1}\left(K_{is}+K_{s+1\;s+1+i}\right)+\tau_{s+2\ldots 2s}\end{aligned}$$

yazılabilir. M^n nin konformal düz olmasından,

$$\begin{aligned}\tau_{1\ldots s}+\tau_{s+1\ldots 2s} &= \tau_{1\ldots s-1}+\sum_{i=1}^{s-1}\left(K_{i\ s+1}+K_{s\ s+1+i}\right)+\tau_{s+2\ldots 2s}\\ &= \tau_{1\ldots s-1\ s+1}+\tau_{s\ s+2\ldots 2s}\end{aligned}$$

yazılarak (2.3.6) elde edilir. Tersine, (2.3.6) iki kez kullanılarak, $\tau_{1\ldots s}+\tau_{s+1\ldots 2s}$ $-\tau_{1\ldots s-1\ s+1}-\tau_{s\ s+2\ldots 2s}=0$ ve $\tau_{1\ldots s-2\ s+2\ s}+\tau_{s+1\ s-1\ s+3\ldots 2s}-\tau_{1\ldots s-2\ s+2\ s+1}-\tau_{s\ s-1\ s+3\ldots 2s}=0$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}0 &= \tau_{1\ldots s}+\tau_{s+1\ldots 2s}-\left(\tau_{1\ldots s-1\ s+1}+\tau_{s\ s+2\ldots 2s}\right)\\ &\quad-\left(\left(\tau_{1\ldots s-2\ s+2\ s}+\tau_{s+1\ s-1\ s+3\ldots 2s}\right)-\left(\tau_{1\ldots s-2\ s+2\ s+1}+\tau_{s\ s-1\ s+3\ldots 2s}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

çıkar. (2.3.8) eşitliğinin sağ tarafı,

$$\begin{bmatrix} K_{1s}+K_{2s}+\ldots+K_{s-2\ s}+K_{s-1\ s}+K_{s+1\ s+2}+K_{s+1\ s+3}+\ldots+K_{s+1\ 2s-1}+K_{s+1\ 2s}\\ -\left(K_{1\ s+1}+K_{2\ s+1}+\ldots+K_{s-2\ s+1}+K_{s-1\ s+1}+K_{s\ s+2}+K_{s\ s+3}+\ldots+K_{s\ 2s-1}+K_{s\ 2s}\right)\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} K_{1s}+K_{2s}+\ldots+K_{s-3\ s}+K_{s-2\ s}+K_{s+2\ s}+K_{s+1\ s-1}+K_{s+1\ s+3}+\ldots+K_{s+1\ 2s-1}+K_{s+1\ 2s}\\ -\left(K_{1\ s+1}+K_{2\ s+1}+\ldots+K_{s-3\ s+1}+K_{s-2\ s+1}+K_{s+2\ s+1}+K_{s\ s-1}+K_{s\ s+3}+\ldots+K_{s\ 2s-1}+K_{s\ 2s}\right)\end{bmatrix}$$

ifadesine eşittir. Böylece

$$0=2\left(\left(K_{s-1\ s}+K_{s+1\ s+2}\right)-\left(K_{s-1\ s+1}+K_{s\ s+2}\right)\right)$$

elde edilir. Bu ise Teorem 2.3.1 ile birlikte M^n nin konformal düz olduğunu gösterir. i ve k indislerinin her ikisi de $\{s-1,\ s,\ s+1,\ s+2\}$ kümesine ait değil ise K_{ik} nın (2.3.8) de bulunmayacağı açıktır. □

(2.3.6) dan Teorem 2.3.3 ün bir genelleştirilmesi olan aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

Sonuç 2.3.6.[11] M^n, $\ell > 1$ olmak üzere, 2ℓ-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O takdirde $L^{\perp}$, L nin $T_p\left(M^n\right)$ deki ortogonal tümleyenini göstermek üzere, M^n nin sıfır skaler eğrilikli konformal düz bir manifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir ℓ-düzlem kesiti $L \subset T_p\left(M^n\right)$ $\left(p \in M^n\right)$ için $\tau\left(L\right) = -\tau\left(L^{\perp}\right)$ olmasıdır.

Kanıtlama: 2ℓ-boyutlu M^n Riemann manifoldu sıfır skaler eğrilikli konformal düz bir manifold olsun. Ortonormal bir $\left\{e_1,...,e_{2\ell}\right\}$ bazı tarafından gerilen $T_p\left(M^n\right)$ nin $\left\{e_1,...,e_{\ell}\right\}$ ortonormal bazı tarafından gerilen bir ℓ-düzlem kesiti L için $\tau\left(L\right)$ skaler eğriliği, (2.2.2) den

$$\tau\left(L\right) = K_{12} + K_{13} + ... + K_{1\ell-1} + K_{1\ell} + K_{23} + ... + K_{2\ \ell-1} + K_{2\ell} + ... + K_{\ell-1\ \ell} \qquad (2.3.9)$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde, L nin $T_p\left(M^n\right)$ deki ortogonal tümleyeni olan $L^{\perp}$, $\left\{e_{\ell+1},...,e_{2\ell}\right\}$ ortonormal bazı tarafından gerilen bir ℓ-düzlem kesiti olup, $\tau\left(L^{\perp}\right)$ skaler eğriliği, (2.2.2) den

$$\begin{aligned}\tau\left(L^{\perp}\right) = {} & K_{\ell+1\ \ell+2} + K_{\ell+1\ \ell+3} + ... + K_{\ell+1\ 2\ell-1} + K_{\ell+1\ 2\ell} + K_{\ell+2\ \ell+3} + ... + K_{\ell+2\ 2\ell-1} \\ & + K_{\ell+2\ 2\ell} + ... + K_{2\ell-1\ 2\ell}\end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

şeklinde ifade edilir. M^n, sıfır skaler eğrilikli konformal düz bir manifold olduğundan, (2.3.7) den

$$\begin{aligned}& K_{12} + ... + K_{1\ell} + K_{23} + ... + K_{2\ell} + K_{34} + ... + K_{3\ell} + ... + K_{\ell-1\ell} \\ & = \frac{1}{2\left(\ell-1\right)}\left\{\left(\ell-1\right)\left(Ric\left(e_1\right) + Ric\left(e_2\right) + Ric\left(e_3\right) + ... + Ric\left(e_{\ell-1}\right) + Ric\left(e_{\ell}\right)\right)\right\} \\ & = \frac{1}{2\left(\ell-1\right)}\left\{\begin{array}{l} 2\left(\ell-1\right)\left(K_{12} + ... + K_{1\ell} + K_{23} + ... + K_{2\ell} + K_{34} + ... + K_{3\ell} + ... + K_{\ell-1\ \ell}\right) \\ + \left(\ell-1\right)\left(K_{1\ \ell+1} + ... + K_{1\ 2\ell} + K_{2\ \ell+1} + ... + K_{2\ 2\ell} + ... + K_{\ell\ \ell+1} + ... + K_{\ell\ 2\ell}\right) \end{array}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir ki, böylece

$$K_{1\,\ell+1} + \ldots + K_{1\,2\ell} + K_{2\,\ell+1} + \ldots + K_{2\,2\ell} + \ldots + K_{\ell\,\ell+1} + \ldots + K_{\ell\,2\ell} = 0$$

bulunur. Bu eşitliği, (2.2.1) den yazacağımız

$$\begin{aligned}
0 = \tau = K_{12} &+ \ldots + K_{1\,\ell-1} + K_{1\,\ell} + K_{1\,\ell+1} + \ldots + K_{1\,2\ell-1} + K_{1\,2\ell} \\
&+ K_{23} + \ldots + K_{2\,\ell-1} + K_{2\ell} + K_{2\,\ell+1} + \ldots + K_{2\,2\ell-1} + K_{2\,2\ell} \\
&+ K_{34} + \ldots + K_{3\,\ell-1} + K_{3\ell} + K_{3\,\ell+1} + \ldots + K_{3\,2\ell-1} + K_{3\,2\ell} \\
&+ \ldots + K_{\ell-1\,\ell} + K_{\ell-1\,\ell+1} + \ldots + K_{\ell-1\,2\ell-1} + K_{\ell-1\,2\ell} \\
&+ K_{\ell\,\ell+1} + K_{\ell\,\ell+2} + \ldots + K_{\ell\,2\ell-1} + K_{\ell\,2\ell} \\
&+ K_{\ell+1\,\ell+2} + \ldots + K_{\ell+1\,2\ell-1} + K_{\ell+1\,2\ell} \\
&+ \ldots + K_{2\ell-2\;2\ell-1} + K_{2\ell-2\;2\ell} \\
&+ K_{2\ell-1\;2\ell}
\end{aligned}$$

bağıntısında kullanırsak,

$$\tau(L) = -\tau(L^{\perp})$$

olduğu elde edilir. Tersine, L_1 ve L_2, sırasıyla $\{e_1, \ldots, e_\ell\}$ ve $\{e_1, \ldots, e_{\ell-1}, e_{\ell+1}\}$ ortonormal bazları tarafından gerilen ℓ-düzlem kesitleri olmak üzere, $\tau(L_1) = -\tau(L_1^{\perp})$ eşitliğinden $\tau_{1\ldots\ell} + \tau_{\ell+1\ldots2\ell} = 0$, $\tau(L_2) = -\tau(L_2^{\perp})$ eşitliğinden de $\tau_{1\ldots\ell-1\,\ell+1} + \tau_{\ell\,\ell+2\ldots2\ell} = 0$ çıkar. O halde $\tau_{1\ldots\ell} + \tau_{\ell+1\ldots2\ell} = \tau_{1\ldots\ell-1\,\ell+1} + \tau_{\ell\,\ell+2\ldots2\ell}$, yani M^n konformal düzdür. Konformal düz olarak bulduğumuz M^n manifoldu için $\tau_{1\ldots\ell} + \tau_{\ell+1\ldots2\ell} = 0$ eşitliğini, (2.2.1) den yazdığımız

$$\begin{aligned}
\tau = \tau_{1\ldots\ell} &+ K_{1\,\ell+1} + K_{1\,\ell+2} + \ldots + K_{1\,2\ell} + \tau_{\ell+1\ldots2\ell} \\
&+ K_{2\,\ell+1} + K_{2\,\ell+2} + \ldots + K_{2\,2\ell} \\
&+ K_{3\,\ell+1} + K_{3\,\ell+2} + \ldots + K_{3\,2\ell} \\
&+ \ldots \\
&+ K_{\ell-1\,\ell+1} + K_{\ell-1\,\ell+2} + \ldots + K_{\ell-1\,2\ell} \\
&+ K_{\ell\,\ell+1} + K_{\ell\,\ell+2} + \ldots + K_{\ell\,2\ell}
\end{aligned}$$

bağıntısında değerlendirip (2.3.7) yi kullanacak olursak,

$$
\begin{aligned}
\tau = & \frac{1}{2\ell-2}\left(\ell Ric\left(e_1\right)+Ric\left(e_{\ell+1}\right)+Ric\left(e_{\ell+2}\right)+\ldots+Ric\left(e_{2\ell}\right)\right)-\frac{2\ell\tau}{\left(2\ell-1\right)\left(2\ell-2\right)}+ \\
& \frac{1}{2\ell-2}\left(\ell Ric\left(e_2\right)+Ric\left(e_{\ell+1}\right)+Ric\left(e_{\ell+2}\right)+\ldots+Ric\left(e_{2\ell}\right)\right)-\frac{2\ell\tau}{\left(2\ell-1\right)\left(2\ell-2\right)}+ \\
& \ldots+ \\
& \frac{1}{2\ell-2}\left(\ell Ric\left(e_{\ell-1}\right)+Ric\left(e_{\ell+1}\right)+Ric\left(e_{\ell+2}\right)+\ldots+Ric\left(e_{2\ell}\right)\right)-\frac{2\ell\tau}{\left(2\ell-1\right)\left(2\ell-2\right)}+ \\
& \frac{1}{2\ell-2}\left(\ell Ric\left(e_{\ell}\right)+Ric\left(e_{\ell+1}\right)+Ric\left(e_{\ell+2}\right)+\ldots+Ric\left(e_{2\ell}\right)\right)-\frac{2\ell\tau}{\left(2\ell-1\right)\left(2\ell-2\right)} \\
= & \frac{1}{2\ell-2}\left\{\ell\left(Ric\left(e_1\right)+\ldots+Ric\left(e_{\ell}\right)+Ric\left(e_{\ell+1}\right)+\ldots+Ric\left(e_{2\ell}\right)\right)\right\}-\frac{2\ell^2\tau}{\left(2\ell-1\right)\left(2\ell-2\right)} \\
= & \frac{\ell}{2\ell-1}\tau
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece $\ell>1$ olduğundan, bu bağıntıdan $\tau=0$ bulunur; yani M^n sıfır skaler eğrilikli konformal düz bir manifolddur. □

Aşağıdaki teorem, 4-boyutlu Einstein uzaylarının bir karakterizasyonu olan Teorem 2.3.4 ün bir genelleştirilmesidir:

Teorem 2.3.7.[11] M^n, 2ℓ-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $L^{\perp}$, $T_p\left(M^n\right)$ de L nin ortogonal tümleyenini göstermek üzere, M^n nin bir Einstein uzayı olması için gerek ve yeter koşul her ℓ-düzlem kesiti $L\subset T_p\left(M^n\right)$ için $\tau\left(L\right)=\tau\left(L^{\perp}\right)$ olmasıdır.

Kanıtlama: M^n, bir Einstein uzayı olsun. L yi, $\left\{e_1,\ldots,e_{2\ell}\right\}$ ortonormal bazı tarafından gerilen $T_p\left(M^n\right)$ nin $\left\{e_1,\ldots,e_{\ell}\right\}$ tarafından gerilen bir ℓ-düzlem kesiti olacak şekilde seçelim. Buna göre (2.1.2) ve (2.3.9) dan,

$$Ric(e_1)+Ric(e_2)+\ldots+Ric(e_\ell)=$$
$$2\tau(L)+K_{1\ \ell+1}+\ldots+K_{1\ 2\ell}+K_{2\ \ell+1}+\ldots+K_{2\ 2\ell}+ \tag{2.3.11}$$
$$\ldots+K_{\ell-1\ \ell+1}+\ldots+K_{\ell-1\ 2\ell}+K_{\ell\ \ell+1}+\ldots+K_{\ell\ 2\ell}$$

ve tamamen benzer şekilde (2.1.2) ve (2.3.10) dan da

$$Ric(e_{\ell+1})+Ric(e_{\ell+2})+\ldots+Ric(e_{2\ell})=$$
$$2\tau(L^\perp)+K_{\ell+1\ 1}+K_{\ell+1\ 2}+\ldots+K_{\ell+1\ \ell}+ \tag{2.3.12}$$
$$K_{\ell+2\ 1}+K_{\ell+2\ 2}+\ldots+K_{\ell+2\ \ell}+\ldots+K_{2\ell\ 1}+K_{2\ell\ 2}+\ldots+K_{2\ell\ \ell}$$

yazılabilir. (2.1.7) den, M^n nin Ricci eğrilikleri,

$$Ric(e_1)+Ric(e_2)+\ldots+Ric(e_\ell)=Ric(e_{\ell+1})+Ric(e_{\ell+2})+\ldots+Ric(e_{2\ell}) \tag{2.3.13}$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla (2.3.13), (2.3.11) ve (2.3.12) den, $\tau(L)=\tau(L^\perp)$ elde edilir. Tersine, herhangi bir ℓ-düzlem kesiti $L\subset T_p(M^n)$ için $\tau(L)=\tau(L^\perp)$ olduğunu kabul edelim. L_1 ve L_2, $T_p(M^n)$ nin, sırasıyla $\{e_1,\ldots,e_\ell\}$ ve $\{e_2,\ldots,e_{\ell+1}\}$ tarafından gerilen birer ℓ-düzlem kesiti olsun. O takdirde $\tau(L_1)=\tau(L_1^\perp)$ ve $\tau(L_2)=\tau(L_2^\perp)$ eşitliklerinden, $\tau_{1\ldots\ell}=\tau_{\ell+1\ldots2\ell}$ ve $\tau_{2\ldots\ell+1}=\tau_{1\ \ell+2\ldots2\ell}$ bulunur ki, bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarmak suretiyle,

$$\tau_{1\ldots\ell}-\tau_{2\ldots\ell+1}=\tau_{\ell+1\ldots2\ell}-\tau_{1\ \ell+2\ldots2\ell} \tag{2.3.14}$$

elde edilir. (2.3.14) ten,

$$\left(K_{12}+K_{13}+\ldots+K_{1\ \ell-1}+K_{1\ \ell}\right)-\left(K_{2\ \ell+1}+K_{3\ \ell+1}+\ldots+K_{\ell-1\ \ell+1}+K_{\ell\ \ell+1}\right)$$
$$=\left(K_{\ell+1\ \ell+2}+K_{\ell+1\ \ell+3}+\ldots+K_{\ell+1\ 2\ell-1}+K_{\ell+1\ 2\ell}\right)-\left(K_{1\ \ell+2}+K_{1\ \ell+3}+\ldots+K_{1\ 2\ell-1}+K_{1\ 2\ell}\right)$$
$$\Rightarrow K_{12}+K_{13}+\ldots+K_{1\ \ell-1}+K_{1\ \ell}+K_{1\ \ell+2}+K_{1\ \ell+3}+\ldots+K_{1\ 2\ell-1}+K_{1\ 2\ell}+K_{1\ \ell+1}=$$

$$K_{2\,\ell+1}+K_{3\,\ell+1}+\ldots+K_{\ell-1\,\ell+1}+K_{\ell\,\ell+1}+K_{\ell+2\,\ell+1}+K_{\ell+3\,\ell+1}+\ldots+K_{2\ell\,\ell+1}+K_{1\,\ell+1}$$

veya $Ric(e_1)=Ric(e_{\ell+1})$ çıkar. Şimdi yine, L_1 in $\{e_1,...,e_\ell\}$ tarafından, L_2 nin de L_1 i geren ortonormal vektörlerden birini çıkarıp, onun yerine $e_{\ell+1}$ almakla oluşturulan vektör kümesi tarafından gerilen bir düzlem kesit olduğunu düşünelim. Bu şekilde oluşturduğumuz L_2 düzlem kesitleri için $Ric(e_1)=Ric(e_{\ell+1})$, $Ric(e_2)=Ric(e_{\ell+1})$, $Ric(e_3)=Ric(e_{\ell+1}),\ldots,Ric(e_{\ell-1})=Ric(e_{\ell+1})$, $Ric(e_\ell)=Ric(e_{\ell+1})$ ve böylece $Ric(e_1)$ $=Ric(e_2)=Ric(e_3)=...=Ric(e_\ell)=Ric(e_{\ell+1})$ bulunur. Şimdi de L_1 ve L_2 nin, sırasıyla $\{e_2,...,e_{\ell+1}\}$ ve $\{e_3,...,e_{\ell+2}\}$ tarafından gerildiğini varsayalım. Benzer hesaplama ile $Ric(e_2)=Ric(e_{\ell+2})$ elde edilir. Tamamen benzer düşünce ile

$$\begin{aligned}
&Ric(e_3)=Ric(e_{\ell+3}),\\
&\vdots\\
&Ric(e_{\ell-1})=Ric(e_{2\ell-1}),\\
&Ric(e_\ell)=Ric(e_{2\ell})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu sonuçları birleştirmek suretiyle,

$$\begin{aligned}
&Ric(e_1)=Ric(e_2)=Ric(e_3)=...=Ric(e_\ell)=Ric(e_{\ell+1})=Ric(e_{\ell+2})=Ric(e_{\ell+3})=\\
&...=Ric(e_{2\ell-1})=Ric(e_{2\ell})
\end{aligned}$$

çıkar. Böylece M^n, bir Einstein uzayıdır. □

Aşağıda, $S(n_1,...,n_k)$-uzaylarının bazı sınıflandırılmalarını ele alacağız. Eğer $k=0$ ise gösterecek bir şey yoktur. Dolayısıyla manifoldun boyutunun 2 olması hali açıktır. Önce $S(j)$-uzaylarını göz önüne alalım ve $\{e_1,...,e_n\}$, $T_p(M^n)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere, aşağıdaki yardımcı teoremleri kanıtlayalım:

Yardımcı Teorem 2.3.8.[11] $2 \le j \le n-2$ olmak üzere, verilen bir j tamsayısı için, M^n bir $S(j)$-uzayı ise o takdirde o, bir $S(j+1)$-uzayıdır.

Kanıtlama: $j=3$ özel haliyle başlayalım. M^n bir $S(3)$-uzayı ise τ_{123}, 3-düzlemin seçiminden bağımsız olan bir sayıdır; bu sayıya c diyelim. Bu özel hal için j-düzlemin skaler eğriliğinin tanımından K_{ij}, $\{e_i, e_j\}$ tarafından gerilen 2-düzlemin kesit eğriliğini göstermek üzere, (2.2.2) den,

$$\tau_{234} = \tau_{1234} - K_{12} - K_{13} - K_{14} = c \tag{2.3.15}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, M^n bir $S(3)$-uzayı olduğundan, (2.2.2) den,

$$K_{12} + K_{13} + K_{23} = c \tag{2.3.16}$$

$$K_{13} + K_{14} + K_{34} = c \tag{2.3.17}$$

$$K_{12} + K_{14} + K_{24} = c \tag{2.3.18}$$

olduğu açıktır. (2.3.16)-(2.3.18) taraf tarafa toplanarak, (2.2.2) den,

$$\tau_{1234} + K_{12} + K_{13} + K_{14} = 3c \tag{2.3.19}$$

elde edilir. Böylece (2.3.15) ve (2.3.19) dan, $\tau_{1234} = 2c$ buluruz. Ortonormal baz keyfi olarak seçilebildiğinden bu, M^n nin bir $S(4)$-uzayı olduğunu gösterir.

Genel olarak, M^n bir $S(j)$-uzayı ise (2.2.2) den,

$$\tau_{2\ldots j+1} = \tau_{1\ldots j+1} - K_{12} - \ldots - K_{1j+1} = c \tag{2.3.20}$$

ve (2.3.19) a benzer şekilde (2.2.2) den,

$$\left(j-2\right)\tau_{1\ldots j+1}+K_{12}+\ldots+K_{1\ j+1}=jc \tag{2.3.21}$$

yazılabilir. (2.3.20) ve (2.3.21) i birleştirerek $\left(j-1\right)\tau_{1\ldots j+1}=\left(j+1\right)c$ elde ederiz. Bu, M^n nin bir $S\left(j+1\right)$-uzayı olduğunu gösterir. □

Yardımcı Teorem 2.3.9.[11] M^n nin bir $S\left(n-1\right)$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Einstein uzayı olmasıdır.

Kanıtlama: $L^{n-1}\subset T_p\left(M^n\right)$, $p\in M^n$, $1\leq i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},i_n\leq n$ ve $i_1,i_2,\ldots,i_n$ ler birbirinden farklı olmak üzere, $\left\{e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}}\right\}$ ortonormal bazı tarafından gerilen bir hiperdüzlem ve e_{i_n} de bu düzleme ortogonal olan bir birim vektör olsun. M^n bir $S\left(n-1\right)$-uzayı olduğundan, $\left\{e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}}\right\}$ ortonormal bazını nasıl seçersek seçelim, $\tau\left(L^{n-1}\right)$ sabit ve $\tau\left(L^{n-1}\right)=\tau-Ric\left(e_{i_n}\right)=c$ olacaktır. O halde $\tau-Ric\left(e_1\right)=\tau-Ric\left(e_2\right)=\ldots=\tau-Ric\left(e_n\right)$ ve buradan $Ric\left(e_1\right)=Ric\left(e_2\right)=\ldots=Ric\left(e_n\right)$, yani M^n nin Einstein uzayı olduğu çıkar. Tersi açıktır. □

Yardımcı Teorem 2.3.10.[11] Bir $S\left(n-2\right)$-uzayı bir Riemann uzay formudur.

Kanıtlama: M^n, bir $S\left(n-2\right)$-uzayı olsun. Bu durumda M^n, Yardımcı Teorem 2.3.8 ve 2.3.9 a göre bir Einstein uzayıdır. Diğer taraftan e_{n-1}, e_n bir p noktasında herhangi iki ortonormal vektör ve L^{n-2}, $T_p\left(M^n\right)$ tanjant uzayının e_{n-1} ve e_n e dik olan $\left(n-2\right)$-boyutlu altuzayı olsun. c, L^{n-2} nin seçiminden bağımsız olmak üzere, (2.2.1), (2.2.2) ve (2.1.2) den,

$$\tau=\tau\left(L^{n-2}\right)+Ric\left(e_{n-1}\right)-K_{n-1n}+Ric\left(e_n\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$\tau-Ric\left(e_{n-1}\right)-Ric\left(e_n\right)+K_{n-1\ n}=c \tag{2.3.22}$$

bulunur. M^n Einstein uzayı olduğundan, (2.3.22); $K_{n-1\ n}$ nin $e_{n-1}\wedge e_n$ düzleminin seçimine bağlı olmadığını gösterir. Dolayısıyla M^n, bir Riemann uzay formudur. □

Teorem 2.3.11.[11] M^n, $n>2$ olmak üzere, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O takdirde

(1) $2 \le j \le n-2$ olmak üzere, herhangi bir j tamsayısı için M^n nin bir $S(j)$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Riemann uzay formu olmasıdır.

(2) M^n nin bir $S(n-1)$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Einstein uzayı olmasıdır.

Kanıtlama: **(1)** Yardımcı Teorem 2.3.8 ve Yardımcı Teorem 2.3.10 dan M^n, bir Riemann uzay formudur. Tersine, M^n bir Riemann uzay formu olsun. Bu durumda $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazı tarafından gerilen $T_p(M^n)$ nin herhangi $\{e_i,e_j\}$, $1 \le i \ne j \le n$ tarafından gerilen düzlemlerinin K_{ij} kesit eğrilikleri hep aynıdır; $K_{ij}=K$ diyelim. O halde mümkün olan bütün j-düzlem kesitleri için $\tau(L)=\dfrac{j(j-1)}{2}K$ elde edilir. Dolayısıyla M^n, bir $S(j)$-uzayıdır.

(2) Yardımcı Teorem 2.3.9 dan açıktır. □

Şimdi de $k>1$ için $S(n_1,...,n_k)$-uzaylarını göz önüne alarak aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 2.3.12.[11] M^n, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve k, 2 ya da 2 den daha büyük bir tamsayı olsun.

(1) M^n, bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı ise o takdirde **(i)** $n_1=...=n_k$ ve **(ii)** $n_1+...+n_k=n$ olmadıkça, M^n bir Riemann uzay formudur.

(2) $n_1=...=n_k$ ve $n_1+...+n_k=n$ olmak üzere, M^n nin bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olması için gerek ve yeter koşul M^n nin konformal düz bir uzay olmasıdır.

Kanıtlama: Genelliği kaybetmeksizin, $n_1 \le n_2 \le ... \le n_k$ olduğunu kabul edebiliriz. $\{e_1,...,e_n\}$, $T_p(M^n)$ nin ortonormal bir bazı olsun. Eğer M^n bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı ise o takdirde c, ortonormal bazın seçiminden bağımsız olmak üzere,

$$\tau_{12...n_1}+...+\tau_{n_1+...+n_{k-1}+1...n_1+...+n_k}=c \tag{2.3.23}$$

yazılabilir. $\{1,...,n_1+...+n_k\}$ nın bir σ permütasyonunu düşünelim. Böyle her bir permütasyon için (2.3.23) gibi,

$$\tau_{\sigma(1)\sigma(2)...\sigma(n_1)}+...+\tau_{\sigma(n_1+...+n_{k-1}+1)...\sigma(n_1+...+n_k)}=c$$

şeklinde karşılık gelen bir denklem vardır. Kümenin bütün permütasyonlarına karşılık gelen denklemlerin tamamını taraf tarafa toplayarak, c_1, c_2 pozitif sabitler olmak üzere,

$$c_1\tau_{12...n_1+...+n_k}=c_2c$$

elde edilir. Bu, M^n nin bir $S(n_1+...+n_k)$-uzayı olduğunu ifade eder. Böylece Teorem 2.3.11 e göre, $n_1+...+n_k\leq n-2$ ise M^n bir Riemann uzay formudur, $n_1+...+n_k=n-1$ ise M^n bir Einstein uzayıdır. Diğer taraftan, $n_1+...+n_k=n$ ise bu durumda hiçbir bilgiye sahip değiliz. İlk durumu yaptık; dolayısıyla yalnızca son iki durumu düşünmek zorundayız. İlk olarak, M^n nin Einstein uzayı olmadığını kabul edeceğiz ve M^n nin konformal düz olmak zorunda olduğunu kanıtlayacağız. Sonra M^n, Einstein uzayı ise M^n nin sabit kesit eğriliğine sahip olduğunu göstereceğiz.

Durum 1. M^n, Einstein uzayı olmasın. Açık olarak, bu durumda $n_1+...+n_k=n$ olmalıdır. Böylece (2.3.23),

$$\tau_{12...n_1}+...+\tau_{n_1+...+n_{k-1}+1...n}=c \tag{2.3.24}$$

şeklinde yazılır. $\{2,...,n\}$ nin bir σ permütasyonunu düşünelim. Böyle her bir permütasyon için (2.3.24) gibi,

$$\tau_{1\sigma(2)...\sigma(n_1)}+...+\tau_{\sigma(n_1+...+n_{k-1}+1)...\sigma(n)}=c \tag{2.3.25}$$

şeklinde σ ya karşılık gelen bir denklem vardır. $\{2,...,n\}$ kümesinin bütün permütasyonları için yazılan bu denklemlerin tamamını taraf tarafa toplamakla, $n_1 = 2$ ise $\binom{n-3}{n_1-3}$ lüsü sıfır olarak tanımlanacak şekilde,

$$c_3 = \binom{n-2}{n_1-2}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k},$$

$$\begin{aligned} c_4 = & \binom{n-3}{n_1-3}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} \\ & +\binom{n-3}{n_2-2}\binom{n-n_2-1}{n_1-1}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} \\ & +\ldots \\ & +\binom{n-3}{n_k-2}\binom{n-n_k-1}{n_1-1}\binom{n-n_1-n_k}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-2}-n_k}{n_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$c_5 = \binom{n-1}{n_1-1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$

olmak üzere,

$$c_3 Ric(e_1) + c_4 \tau_{2\ldots n} = c_5 c \tag{2.3.26}$$

buluruz. Gerçekten, n_1-boyutlu düzlem kesiti geren vektörlerden e_1 belliyse $boyL_j = n_j$, $j = 1,\ldots,k$ olacak şekildeki mümkün olan bütün L_j düzlem kesitlerini c_5 farklı şekilde seçebileceğimizden, yazılabilecek toplam denklem sayısı c_5 tir. Bu c_5 denklemin toplamında, $K_{12}, K_{13}, \ldots, K_{1n}$ lerin her birinden c_3 tane ve $K_{23}, K_{24}, \ldots, K_{2n}, K_{34}, \ldots, K_{3n}$, $\ldots, K_{n-2\,n-1}, K_{n-2\,n}$, $K_{n-1\,n}$ lerin her birinden de c_4 tane bulunur. Böylece (2.3.25) şeklinde yazılabilecek bütün denklemleri topladığımızda (2.3.26) eşitliği elde edilir. c_3 ve c_4,

$$\begin{aligned} &(n_1-2)!n_2!n_3!\ldots n_k!c_3 = (n-2)!, \\ &(n_1-1)!n_2!n_3!\ldots n_k!c_4 = (n-3)!\left(\sum_{j=2}^{k} n_j(n_j-1) + (n_1-1)(n_1-2)\right) \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

bağıntılarını gerçekler. (2.3.26) nın

$$\left(c_3-c_4\right)Ric\left(e_1\right)+c_4\tau=c_5c$$

bağıntısına eşdeğer olduğu açıktır. M^n, Einstein uzayı olmadığından $c_3=c_4$ olmalıdır. (2.3.27) den $c_3-c_4=0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(n_2+...+n_k\right)\left(n_1-1\right)=\sum_{j=2}^{k}n_j\left(n_j-1\right) \tag{2.3.28}$$

olmasıdır. O halde (2.3.28), $n_1\leq n_j$ kabulümüzden $n_1=...=n_k$ olduğunu ifade eder. Dolayısıyla M^n, $n_1=...=n_k$ ve $n_1+...+n_k=n$ olmak üzere bir $S\left(n_1,...,n_k\right)$-uzayıdır. $n_1=j$ alalım. $\left\{e_1,...,e_{2j}\right\}$ ortonormal bir vektör kümesi ve $L_3,...,L_k$, ayrıca $\left\{e_1,...,e_{2j}\right\}$ ye de ortogonal olan ikişer ikişer ortogonal j-boyutlu uzaylar olsun. Bu durumda

$$\tau_{1...j}+\tau_{j+1...2j}+\tau\left(L_3\right)+...+\tau\left(L_k\right)=\tau_{1...j-1\ j+1}+\tau_{j\ j+2...2j}+\tau\left(L_3\right)+...+\tau\left(L_k\right)$$

açık bir şekilde (2.3.6) yı gerçekler ve böylece M^n nin konformal düz olduğu çıkar. Tersine, M^n nin konformal düz olduğunu ve $k>1$ ve $j>1$ doğal sayıları için $n=kj$ olduğunu kabul edelim. $\left\{e_1,...,e_{kj}\right\}$, M^n nin herhangi bir ortonormal bazı olsun. O takdirde (2.3.6) dan,

$$\tau_{1...j}+\tau_{j+1....2j}+...+\tau_{(k-1)j+1...kj} \tag{2.3.29}$$

toplamının indislerin sırasına bağlı olmadığı görülür. Bundan başka $\left(e_1,e_2\right)$-düzleminde 90° lik bir dönme yaparsak (2.3.29) un değerinin değişmeyeceği açıktır. Bu nedenle indisleri sıralama önemli olmadığından, herhangi bir $\left(e_i,e_m\right)$-düzleminde böyle bir dönme yapılırsa (2.3.29) un değerinin aynı kalacağı açıktır. Koordinat düzlemlerinde ardarda dönmeler yaparak herhangi iki ortogonal bazı birbirine dönüştürebileceğimizden, (2.3.29) un ortonormal baz seçiminden bağımsız olduğu görülür. Dolayısıyla M^n, bir $S(j,...,j)$-uzayıdır.

Durum 2. M^n, Einstein uzayı olsun. M^n, bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olduğundan (2.3.23) sağlanır. $\{3,...,n\}$ nin herhangi bir σ permütasyonu için (2.3.23) teki gibi σ ya karşılık gelen bir denklem vardır. Böylesi denklemlerin tamamını toplamakla $d_1 = c_3$ ve d_2, d_3

$$d_2 = \binom{n-3}{n_1-3}\binom{n-n_1}{n_2}...\binom{n-n_1-...-n_{k-1}}{n_k},$$

$$\begin{aligned} d_3 &= \binom{n-4}{n_1-4}\binom{n-n_1}{n_2}...\binom{n-n_1-...-n_{k-1}}{n_k} \\ &+\binom{n-4}{n_2-2}\binom{n-n_2-2}{n_1-2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}...\binom{n-n_1-...-n_{k-1}}{n_k} \\ &+... \\ &+\binom{n-4}{n_k-2}\binom{n-n_k-2}{n_1-2}\binom{n-n_1-n_k}{n_2}...\binom{n-n_1-...-n_{k-2}-n_k}{n_{k-1}} \end{aligned}$$

olacak şekilde sabitler olmak üzere,

$$(d_1-2d_2+d_3)K_{12}+(d_2-d_3)\big(Ric(e_1)+Ric(e_2)\big)+d_3\tau=d_1c \tag{2.3.30}$$

elde ederiz. Gerçekten, n_1-boyutlu düzlem kesiti geren iki vektör e_1, e_2 belliyse, $boyL_j = n_j$, $j=1,...,k$ olacak şekildeki mümkün olan bütün L_j düzlem kesitlerini $d_1 = c_3$ farklı şekilde seçebileceğimizden, yazılabilecek toplam denklem sayısı $d_1 = c_3$ tür. Bu d_1 denklemin toplamında bulunan K_{12} lerin sayısı d_1 dir. Ayrıca bu toplamda K_{13}, $K_{14},...,K_{1n}$, K_{23}, $K_{24},...,K_{2n}$ lerin her birinden d_2 tane ve K_{34}, $K_{35},...,K_{3n},K_{45},...,$ $K_{4n},...,K_{n-1\,n}$ lerin her birinden de d_3 tane bulunur. O halde

$$d_2\left(K_{13}+K_{14}+...+K_{1n}\right)=d_2\left(K_{13}+K_{14}+...+K_{1n}\right)+d_2K_{12}-d_2K_{12}$$
$$=d_2Ric\left(e_1\right)-d_2K_{12},$$

$$d_2\left(K_{23}+K_{24}+...+K_{2n}\right)=d_2\left(K_{23}+K_{24}+...+K_{2n}\right)+d_2K_{12}-d_2K_{12}$$
$$=d_2Ric\left(e_2\right)-d_2K_{12},$$

$$\begin{aligned}d_3\tau_{345...n} &= d_3\tau_{345...n}+d_3\left(K_{12}+K_{13}+...+K_{1n}\right)-d_3\left(K_{12}+K_{13}+...+K_{1n}\right)\\ &\quad +d_3\left(K_{23}+K_{24}+...+K_{2n}\right)-d_3\left(K_{23}+K_{24}+...+K_{2n}\right)\\ &= d_3\tau-d_3Ric\left(e_1\right)-d_3\left(K_{23}+K_{24}+...+K_{2n}\right)+d_3K_{12}-d_3K_{12}\\ &= d_3\tau-d_3\left(Ric\left(e_1\right)+Ric\left(e_2\right)\right)+d_3K_{12}\end{aligned}$$

bağıntılarından yararlanarak, bu d_1 denklemi topladığımızda (2.3.30) eşitliği bulunur. d_2 ve d_3,

$$n_1=2 \text{ ise } d_2=0 \text{ olmak üzere, } \left(n_1-3\right)!n_2!n_3!...n_k!d_2=\left(n-3\right)!,$$
$$\left(n_1-2\right)!n_2!n_3!...n_k!d_3=\left(n-4\right)!\left(\sum_{j=2}^{k}n_j\left(n_j-1\right)+\left(n_1-2\right)\left(n_1-3\right)\right) \tag{2.3.31}$$

eşitliklerini sağlar. (2.3.27) ve (2.3.31) den, $d_1-2d_2+d_3=0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(n-2\right)\left(n-3\right)+\left(n_1-2\right)\left(n_1-3\right)+\sum_{j=2}^{k}n_j\left(n_j-1\right)=2\left(n-3\right)\left(n_1-2\right) \tag{2.3.32}$$

olmasıdır. (2.3.32) eşitliği,

$$0=\left(n-n_1\right)\left(n-n_1-1\right)+\sum_{j=2}^{k}n_j\left(n_j-1\right)$$

eşitliğine eşdeğerdir. Oysa bu eşitliğin gerçeklenmesi imkansızdır. Böylece (2.3.30) ve

M^n nin Einstein uzayı olduğu hipotezinden, M^n nin bir Riemann uzay formu olduğunu elde ederiz. □

2.4. CHEN EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda, Riemann uzay formlarının keyfi dik boyutlu altmanifoldları için ve keyfi bir Riemann manifoldunun keyfi Riemann altmanifoldları için Chen eşitsizliklerini ve bu eşitsizliklerin eşitlik özel hallerini inceleyeceğiz. Aşağıdaki yardımcı teorem, Chen eşitsizlikleri için oldukça büyük bir önem teşkil etmektedir:

Yardımcı Teorem 2.4.1.[13] $a_1,...,a_n,\eta$, $n+1$ $(n\geq 2)$ reel sayı olsun, öyle ki

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \eta\right) \qquad (2.4.1)$$

eşitliği sağlansın. O takdirde $2a_1a_2 \geq \eta$ dır ve eşitlik ancak ve ancak $a_1 + a_2 = a_3 = \ldots = a_n$ olması halinde gerçeklenir.

Kanıtlama: $n=2$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Dolayısıyla $n>2$ olduğunu varsayabiliriz. (2.4.1) den,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)a_n + a_n^2\\ &= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + a_n^2 + \eta\right)\end{aligned}$$

olup, buradan

$$(n-2)a_n^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)a_n + (n-1)\left(\eta + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = 0$$

elde edilir. a_n reel olduğundan, bu denklemin diskriminantı ≥ 0 dır. Dolayısıyla

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \geq (n-2)\left[(n-1)\left(\eta+\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2\right]$$

$$=(n-2)\left[(n-1)\left(\eta+\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2+\eta\right)\right]$$

olur ki, böylece $\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \geq (n-2)\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2+\eta\right]$ çıkar. Bir $e_{n-1} \geq 0$ reel sayısı için

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = (n-2)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2+\eta+e_{n-1}\right) \tag{2.4.2}$$

olup, $n=3$ ise bu, $2a_1a_2=\eta+e_2 \geq \eta$ olmasını gerektirir. (2.4.1) den $n=3$ olmak üzere, $2a_1a_2=\eta$ olması için gerek ve yeter koşul $a_3=a_1+a_2$ olmasıdır. Gerçekten, $n=3$ için (2.4.1) den, $2a_1a_2=\eta$ ise $a_3^2-2(a_1+a_2)a_3+(a_1+a_2)^2=0$ denkleminden $a_3=a_1+a_2$ elde edilir. Tersine, $a_3=a_1+a_2$ ise (2.4.1) den, $n=3$ için $2a_1a_2=\eta$ elde edileceği açıktır. $n>3$ ise aynı işleme bir kez daha devam edilerek, (2.4.2) den,

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i + a_{n-1}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)a_{n-1} + a_{n-1}^2$$

$$=(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + a_{n-1}^2 + \eta + e_{n-1}\right)$$

veya

$$(n-3)a_{n-1}^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)a_{n-1} + (n-2)\left(\eta+e_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2 = 0$$

bulunur. a_{n-1} reel olduğundan, bu denklemin de diskriminantı ≥ 0 dır. Buna göre

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2 \geq (n-3)\left[(n-2)\left(\eta + e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2\right]$$

$$= (n-3)\left[(n-2)\left(\eta + e_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_i^2\right) - (n-3)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + \eta + e_{n-1}\right)\right]$$

eşitsizliğinden, $\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2 \geq (n-3)\left[\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + \eta + e_{n-1}\right]$ çıkar. Bir $e_{n-2} \geq 0$ reel sayısı için

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)^2 = (n-3)\left[\sum_{i=1}^{n-2} a_i^2 + \eta + e_{n-1} + e_{n-2}\right]$$

olur ki, $n > 3$ ise aynı işlemi $(n-2)$-kez devam ettirmekle negatif olmayan $e_2, ..., e_{n-1}$ reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 = (k-1)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + \eta + e_{n-1} + ... + e_k\right),\ k = 2, ..., n-1 \tag{2.4.3}$$

elde ederiz. Böylece özel olarak, $2a_1a_2 = \eta + e_{n-1} + ... + e_2 \geq \eta$ elde ederiz. $2a_1a_2 = \eta$ ise o takdirde $e_{n-1} = ... = e_2 = 0$ ve dolayısıyla (2.4.3) ten,

$$\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} a_{\mathrm{i}}\right)^2 = (k-1)\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} a_{\mathrm{i}}^2 + \eta\right),\ k = 2, ..., n \tag{2.4.3-k}$$

bulunur.

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)a_k + a_k^2$$

$$= (k-1)\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + a_k^2 + \eta\right)$$

bağıntılarından $(k-2)a_k^2-2\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)a_k+(k-1)\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\eta\right)-\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)^2=0$ olup, (2.4.3-k) dan $(k-2)a_k^2-2\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)a_k+(k-1)\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\eta\right)-(k-2)\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\eta\right)=0$ veya $(k-2)a_k^2-2\left(\sum_{i=1}^{k-1}a_i\right)a_k+\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\eta=0$ yazılabilir. O halde $(k-2)a_k=a_1+...+a_{k-1}$ çıkar ve böylece $a_3=...=a_n=a_1+a_2$ elde edilir. Tersine, $a_1+a_2=a_3=...=a_n$ ise (2.4.1) den $2a_1a_2=\eta$ çıkar. Gerçekten, $\left(a_1+a_2+(n-2)a_3\right)^2=(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+(n-2)a_3^2+\eta\right)$ eşitliğinden, $(n-1)^2a_3^2=(n-1)\left((a_1+a_2)^2-2a_1a_2+(n-2)a_3^2+\eta\right)=(n-1)^2a_3^2-2(n-1)a_1a_2+(n-1)\eta$ ve buradan $2a_1a_2=\eta$ bulunur. □

2.4.1. Riemann Uzay Formları İçin Chen Eşitsizlikleri ve Eşitlik Özel Halleri

Bu bölümde, keyfi dik boyutlu Riemann manifoldlarının Riemann uzay formlarına izometrik dahil edilmelerini inceleyeceğiz.

Teorem 2.4.2.[32] M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer τ skaler eğriliği, bir $p\in M^n$ noktasında

$$\begin{gathered}2\tau\geq(n-2)\|h\|^2+(n-2)(n-1)c\\ \left(\text{sırasıyla } 2\tau>(n-2)\|h\|^2+(n-2)(n-1)c\right)\end{gathered}\tag{2.4.4}$$

eşitsizliğini sağlarsa o takdirde p de M^n nin kesit eğrilikleri negatif olmayan (sırasıyla pozitif) dır.

Kanıtlama: X ve Y, p de ortonormal vektörler olsun. $e_1=X$, $e_2=Y$ ve e_{n+1}, H ya paralel olacak şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\}$ bazını seçelim. (2.2.1), (2.1.2) de göz önünde bulundurularak (2.1.28),

$$2\tau=n^2H^2-\|h\|^2+n(n-1)c\tag{2.4.5}$$

şeklinde yazılabilir. O halde p de (2.4.4) ile (2.4.5) ten,

$$n^2H^2 \geq (n-1)\|h\|^2 - 2(n-1)c \quad (\text{sırasıyla} >) \tag{2.4.6}$$

bulunur. Buna göre (2.4.6) dan,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 \geq (n-1)\left\{\sum_{i}\left(h_{ii}^{n+1}\right)^2 + \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 - 2c\right\} \tag{2.4.7}$$
$$(\text{sırasıyla} >)$$

çıkar. (2.4.7) ye Yardımcı Teorem 2.4.1 uygulanarak,

$$\begin{aligned}
2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} &\geq \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 - 2c \\
&\geq 2\left(h_{12}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\left[\left(h_{11}^{r}\right)^2 + \left(h_{22}^{r}\right)^2 + 2\left(h_{12}^{r}\right)^2\right] - 2c \\
&= 2\left(h_{12}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\left[\left(h_{11}^{r} + h_{22}^{r}\right)^2 - 2h_{11}^{r}h_{22}^{r} + 2\left(h_{12}^{r}\right)^2\right] - 2c \\
&\geq 2\left\{\left(h_{12}^{n+1}\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} h_{11}^{r}h_{22}^{r} + \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2 - c\right\} \\
&\quad (\text{sırasıyla} >)
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

elde edilir. Böylece p de M^n nin X ve Y ile belirlenen kesit eğriliği

$$K(X,Y) = \sum_{r=n+1}^{m}\left\{h_{11}^{r}h_{22}^{r} - \left(h_{12}^{r}\right)^2\right\} + c$$

olup, (2.4.8) den bu kesit eğriliği negatif olmayan (sırasıyla pozitif) bulunur. □

2.4.1.1. $\delta(n_1,\ldots,n_k)$ yı İçeren Kuvvetli Eşitsizlikler

n-boyutlu birim küre $S^n(1)$ in E^{n+1} e izometrik dahil edilebilmesi için $H^2 = 1$ olması gerektiğini biliyoruz. Dolayısıyla şu soru akla gelir: $\mathrm{x} : S^n(1) \to E^m$, n-boyutlu $S^n(1)$

birim küresinin E^m ye izometrik bir dahil edilmesi olsun. Genel olarak, $H^2 \geq 1$ midir? Bu kısımda, B.Y. Chen'in [14] bu problemi doğru kılan çok genel bir sonucunu verebilmek için aşağıdaki yardımcı teoremi ifade edelim:

Yardımcı Teorem 2.4.3.[14] $\mathrm{x}: M^n \to R^m\left(\overline{c}\right)$, normalize edilmiş skaler eğriliği ρ olan bir M^n Riemann manifoldunun sabit $\overline{c}$ kesit eğrilikli bir $R^m\left(\overline{c}\right)$ reel uzay formu içine izometrik bir dahil edilmesi olsun. O takdirde

$$H^2 \geq \rho - \overline{c} \tag{2.4.9}$$

eşitsizliği sağlanır. Bir $p \in M^n$ noktasında eşitliğin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul p nin tümel umbilik bir nokta olmasıdır.

Kanıtlama: e_{n+1}, ortalama eğrilik vektörüne paralel olacak şekilde ve $e_1,.....,e_n$, A_{n+1} şekil operatörünün matrisini köşegenleştirecek şekilde, p de $R^m\left(\overline{c}\right)$ nin ortonormal bir $\left\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\right\}$ bazını seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \\ A_r &= \left(h_{ij}^r\right), \ \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^r = 0, \ r = n+2,...,m \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

dir. Herhangi bir i $(1 \leq i \leq n)$ için (2.1.2) ve (2.1.21) den,

$$\begin{aligned} Ric\left(e_i,e_i\right) &= \left(n-1\right)\overline{c} + \sum_{j \neq i} h_{ii}^{n+1} h_{jj}^{n+1} + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j \neq i} h_{ii}^r h_{jj}^r - \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j \neq i} \left(h_{ji}^r\right)^2 \\ &= \left(n-1\right)\overline{c} + a_i \sum_{j \neq i} a_j - \sum_{r=n+2}^{m} \left(h_{ii}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j \neq i} \left(h_{ji}^r\right)^2 \end{aligned}$$

ve böylece

$$Ric(e_i,e_i)=(n-1)\overline{c}+a_i\sum_{j\neq i}a_j-\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{ji}^r\right)^2$$

bulunur. Buna göre (2.2.1) göz önünde bulundurularak, (2.1.2) den

$$2\tau=n(n-1)\overline{c}+2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j-\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ji}^r\right)^2$$

yazılabilir. $2\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n^2H^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ dir. O halde

$$n^2H^2=2\tau+\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2-n(n-1)\overline{c} \qquad (2.4.11)$$

çıkar. Diğer taraftan,

$$\sum_{i<j}\left(a_i-a_j\right)^2=(n-1)\sum_{i}a_i^2-2\sum_{i<j}a_ia_j \qquad (2.4.12)$$

dir. Gerçekten, bu eşitlik $n=2$ için doğrudur. $(n-1)$ için doğru olsun. Bu durumda

$$\sum_{1\leq i<j\leq n-1}\left(a_i-a_j\right)^2=(n-2)\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n-1}a_ia_j$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(a_i-a_j\right)^2&=\sum_{1\leq i<j\leq n-1}\left(a_i-a_j\right)^2+\left(a_1-a_n\right)^2+\left(a_2-a_n\right)^2+\ldots+\left(a_{n-1}-a_n\right)^2\\&=(n-2)\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2-2\sum_{1\leq i<j\leq n-1}a_ia_j+a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2+\\&\quad(n-1)a_n^2-2\left(a_1a_n+a_2a_n+\ldots+a_{n-1}a_n\right)\end{aligned}$$

$$=\left(n-1\right)\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$$

elde edilir ki, böylece (2.4.12) eşitliğinin geçerli olduğu gösterilmiş olur. Bu sayede (2.4.12) den, $\sum_{i<j}\left(a_i-a_j\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2-2\sum_{i<j}a_ia_j=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ olup, $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i<j}\left(a_i-a_j\right)^2$ eşitliğinden, $n^2H^2=n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i<j}\left(a_i-a_j\right)^2\le n\sum_{i}a_i^2$ veya $nH^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ bulunur. Bu, (2.4.11) ile birleştirilirse

$$n\left(n-1\right)H^2\ge 2\tau-n\left(n-1\right)\overline{c}+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2 \qquad (2.4.13)$$

ve (2.2.1), (2.1.3) ve (2.1.31), (2.4.13) te kullanılarak, (2.4.9) eşitsizliği elde edilir. (2.4.9) un eşitlik hali bir $p\in M^n$ noktasında gerçeklensin. O takdirde bu eşitsizliği elde ettiğimiz (2.4.13) eşitsizliğinin eşitlik halinden, $i,j=1,...,n$ ve $r=n+2,...,m$ için $h_{ij}^r=0$ sonucu çıkar. Ayrıca $H^2=\rho-\overline{c}$ eşitliğinde bu sonucu kullanırsak, (2.1.31) ve (2.1.21) den,

$$H^2=\frac{1}{n\left(n-1\right)}\left[n\left(n-1\right)\overline{c}+2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j-\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2\right]-\overline{c}$$

olup, bu eşitlikten

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\frac{2}{n\left(n-1\right)}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$$

çıkar ki, buradan $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\frac{2}{n^2(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j$ bulunur. (2.4.12) son eşitlikte

kullanılırsa, $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{1}{n^2(n-1)}\left[(n-1)\sum_i a_i^2 - \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2\right]$ bağıntısından, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ elde edilir. Bulmuş olduğumuz $h_{ij}^r = 0$, $i, j = 1,\ldots,n$, $r = n+2,\ldots,m$ ile birlikte bu, p nin tümel umbilik bir nokta olduğunu ifade eder. Tersine, p tümel umbilik bir nokta olsun. O halde $a_i = \lambda$; $i = 1,\ldots,n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $h_{ij}^r = 0$; $i, j = 1,\ldots,n$, $r = n+2,\ldots,m$ ve h_{ij}^{n+1}=0, $1 \le i \ne j \le n$ olduğu göz önüne alınarak, $H^2 = \frac{1}{n^2}(n\lambda)^2 = \lambda^2$ bulunur. Diğer taraftan, (2.1.31) ve (2.1.21) den,

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{n(n-1)}\left[n(n-1)\overline{c} + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j\ne i} a_j - \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2\right] \\
&= \overline{c} + \frac{1}{n(n-1)}\left[n\lambda(n-1)\lambda\right] \\
&= \overline{c} + \lambda^2
\end{aligned}$$

ve buradan da $H^2 = \rho - \overline{c}$ bulunarak, (2.4.9) un eşitlik hali elde edilir. □

Yardımcı Teorem 2.4.3 ü uygulayarak, bir Riemann çarpım manifoldunun bir $R^m(\overline{c})$ reel uzay formuna izometrik bir dahil edilmesi için ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesine ilişkin aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 2.4.4.[14] $M^n = N_1^{n_1} \times \ldots \times N_\ell^{n_\ell}$ manifoldu, ℓ tane Riemann manifoldunun Riemann çarpımı olsun. O takdirde bir $m > n$ ve bir $\mathrm{x} : M^n \to R^m(\overline{c})$ izometrik dahil etmesi için $\rho_1,\ldots,\rho_\ell$, sırasıyla $N_1^{n_1},\ldots,N_\ell^{n_\ell}$ nin normalize edilmiş skaler eğriliği olmak üzere,

$$H^2 \ge \sum_{\alpha=1}^{\ell}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right)^2 \rho_\alpha - \overline{c} \tag{2.4.14}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıtlama: $\left\{e_1^{\alpha},...,e_{n_\alpha}^{\alpha}\right\}$, $N_\alpha^{n_\alpha}$ için ortonormal bir baz olsun. Bu durumda $\left\{e_1^1,...,e_{n_1}^1,...,e_1^{\ell},...,e_{n_\ell}^{\ell}\right\}$ yi M^n nin ortonormal bir bazı olarak alabiliriz. h, $R^m\left(\overline{c}\right)$ deki M^n nin ikinci temel formu olsun. Her $\alpha \in \{1,...,\ell\}$ için

$$\dot{I}zh^{\alpha} = \sum_{t=1}^{n_\alpha} h\left(e_t^{\alpha}, e_t^{\alpha}\right) \tag{2.4.15}$$

olmak üzere,

$$nH = \sum_{\alpha=1}^{\ell} \dot{I}zh^{\alpha} \tag{2.4.16}$$

yazılabilir.

$N_1^{n_1} \times ... \times N_\ell^{n_\ell}$ de bir $\left(p_1,...,p_\ell\right)$ noktası seçelim. Her $\alpha \in \{1,...,\ell\}$ için ι_α, $N_\alpha^{n_\alpha}$ dan $N_1^{n_1} \times ... \times N_\ell^{n_\ell}$ içine $\iota_\alpha(x) = (p_1,...,p_{\alpha-1},x,p_{\alpha+1},...,p_\ell)$, $x \in N_\alpha^{n_\alpha}$, şeklinde tanımlı kapsama (inclusion) dönüşümü olsun. $\mathrm{x}_\alpha = \mathrm{x} o \iota_\alpha$, $N_\alpha^{n_\alpha}$ dan $R^m\left(\overline{c}\right)$ içine izometrik bir dahil etme olsun. ι_α kapsama dönüşümü tümel jeodezik izometrik bir gömme olduğundan, $\mathrm{x}_\alpha : N_\alpha^{n_\alpha} \to R^m\left(\overline{c}\right)$ dahil etmesi için $N_\alpha^{n_\alpha}$ nın ortalama eğrilik vektörü $H_\alpha = \left(\dot{I}zh^{\alpha}\right)/n_\alpha$ şeklinde verilir. Böylece $nH = \sum_{\alpha=1}^{\ell} \dot{I}zh^{\alpha}$ dan $nH = \sum_{\alpha=1}^{\ell} n_\alpha H_\alpha$ olup,

$$H = \sum_{\alpha=1}^{\ell} \left(\frac{n_\alpha}{n}\right) H_\alpha \tag{2.4.17}$$

elde edilir.

(2.1.21) den, farklı α ve β için $N_\alpha^{n_\alpha}$ ve $N_\beta^{n_\beta}$ ya tanjant olan birim vektörler, sırasıyla e_i^{α} ve e_j^{β} olmak üzere,

$$\left\langle h\left(e_i^\alpha, e_i^\alpha\right), h\left(e_j^\beta, e_j^\beta\right)\right\rangle = \left\langle h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right), h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\rangle - \overline{c} \qquad (2.4.18)$$

yazabiliriz. O halde

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n_\alpha} h\left(e_i^\alpha, e_i^\alpha\right), \sum_{j=1}^{n_\beta} h\left(e_j^\beta, e_j^\beta\right)\right\rangle = \left\langle n_\alpha H_\alpha, n_\beta H_\beta\right\rangle = n_\alpha n_\beta \left\langle H_\alpha, H_\beta\right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\langle h\left(e_i^\alpha, e_i^\alpha\right), h\left(e_j^\beta, e_j^\beta\right)\right\rangle$$

eşitliklerinden ve (2.4.18) den,

$$n_\alpha n_\beta \left\langle H_\alpha, H_\beta\right\rangle = \sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\| h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2 - n_\alpha n_\beta \overline{c} \qquad (2.4.19)$$

elde edilir. (2.4.15)-(2.4.19) dan, $H^2 = \left\langle \sum_{\alpha=1}^{\ell}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right) H_\alpha, \sum_{\beta=1}^{\ell}\left(\frac{n_\beta}{n}\right) H_\beta \right\rangle$ olup,

$$n^2 H^2 = \sum_{\alpha=1}^{\ell} {n_\alpha}^2 {H_\alpha}^2 + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\| h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2 - \sum_{\alpha\neq\beta} n_\alpha n_\beta \overline{c} \qquad (2.4.20)$$

bulunur. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.4.3 ten,

$$ {H_\alpha}^2 \geq \rho_\alpha - \overline{c} \qquad (2.4.21)$$

olduğunu ve eşitliğin gerçeklenmesi halinde x_α nın tümel umbilik bir dahil etme olduğunu da biliyoruz. Böylece (2.4.20) ve (2.4.21) den,

$$n^2 H^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{\ell} {n_\alpha}^2 \rho_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{\ell} {n_\alpha}^2 \overline{c} + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\| h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2 - 2\sum_{\alpha<\beta} n_\alpha n_\beta \overline{c}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\ell} {n_\alpha}^2 \rho_\alpha - \left(\sum_{\alpha=1}^{\ell} n_\alpha\right)^2 \overline{c} + \sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\| h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2$$

çıkar. Bu durumda $H^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{\ell}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right)^2 \rho_\alpha - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{\alpha=1}^{\ell} n_\alpha\right)^2 \overline{c} + \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\|h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2$

eşitsizliğinden, (2.4.14) eşitsizliği elde edilir. □

Teorem 2.4.4, bazı basit karakterizasyon teoremlerini elde etmek için kullanılabilir. Örneğin; m-boyutlu Öklid uzayındaki Riemann çarpım manifoldları için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.4.5.[14] $M^n = N_1^{n_1} \times ... \times N_\ell^{n_\ell}$ manifoldu, ℓ tane Riemann manifoldunun Riemann çarpımı olsun. O takdirde herhangi bir $m > n$ ve herhangi bir $\mathrm{x} : M^n \to E^m$ izometrik dahil etmesi için

$$H^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{\ell}\left(\frac{n_\alpha}{n}\right)^2 \rho_\alpha \tag{2.4.22}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.4.22) nin eşitlik durumunun özdeş olarak gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul

(1) $\rho_1, ..., \rho_\ell$ negatif olmayan sabitlerdir,

(2) Her bir $N_\alpha^{n_\alpha}$ bileşeni bir n_α-boyutlu küre olan $S^{n_\alpha}\left(\rho_\alpha\right)$ nın bir açık parçasına veya bir n_α-boyutlu düzlem E^{n_α} nın bir açık parçasına izometriktir,

(3) Her bir x_α ya bir n_α-boyutlu kürenin tümel umbilik bir izometrik dahil edilmesi veya bir n_α-boyutlu düzlemin tümel jeodezik bir izometrik dahil edilmesi olmak üzere, x, ℓ tane izometrik dahil etme $\mathrm{x}_\alpha : N_\alpha^{n_\alpha} \to E^{m_\alpha}$ $\left(\alpha = 1, ..., \ell\right)$ nın bir çarpımıdır.

Kanıtlama: (2.4.22) eşitsizliği, $\overline{c} = 0$ olmak üzere, (2.4.14) eşitsizliğinin özel bir durumudur. Eğer (2.4.22) nin eşitlik durumu gerçeklenirse bu durumda (2.4.21) de eşitlik olup, her $\mathrm{x}_\alpha : N_\alpha^{n_\alpha} \to E^m$ dahil etmesi için ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi, $H_\alpha^{\ 2} = \rho_\alpha$ yı sağlayacaktır. Böylece Yardımcı Teorem 2.4.3 ün kanıtından, (2.4.22) nin eşitlik durumunun, her bir $\mathrm{x}_\alpha : N_\alpha^{n_\alpha} \to E^m$ nin tümel umbilik bir izometrik dahil etme olduğunu ifade ettiğini biliyoruz. Dolayısıyla her bir $N_\alpha^{n_\alpha}$, ya c_α gibi pozitif kesit eğrilikli bir n_α-boyutlu kürenin bir açık parçasına izometriktir ya da bir n_α-boyutlu düzlemin bir açık parçasına izometriktir [26]. Bu sayede $N_\alpha^{n_\alpha}$ nın normalize edilmiş ρ_α skaler eğriliği, birinci durum için c_α ya veya ikinci durum için sıfıra eşittir. Eğer ikinci durum oluşursa, x_α tümel jeodezik bir dahil etme olur. Ayrıca (2.4.22) nin eşitlik hali, X ve Y, $M^n = N_1^{n_1} \times ... \times N_\ell^{n_\ell}$ Riemann çarpımının farklı bileşenlerine ait tanjantlar olmak üzere, (2.4.20) den $h(X,Y)=0$ olmasını gerektirir. Gerçekten, (2.4.22) nin eşitlik halinden,

$$n^2 H^2 = \sum_{\alpha=1}^{\ell} n_\alpha{}^2 \rho_\alpha$$

dır. Diğer taraftan, (2.4.22) nin eşitlik olması durumunda, (2.4.21) eşitsizliğinin eşitlik halinden de $H_\alpha{}^2 = \rho_\alpha$ olacağından,

$$n^2 H^2 = \sum_{\alpha=1}^{\ell} n_\alpha{}^2 H_\alpha{}^2$$

bulunur. Bu durumda (2.4.20) eşitliğinden $\sum_{\alpha\neq\beta}\sum_{i=1}^{n_\alpha}\sum_{j=1}^{n_\beta}\left\| h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right)\right\|^2 = 0$ çıkar ki, buradan $h\left(e_i^\alpha, e_j^\beta\right) = 0$; $i = 1,...,n_\alpha$, $j = 1,...,n_\beta$, $\alpha \neq \beta$ elde edilir. Böylece çarpım manifoldları için Moore'un kanıtladığı bir teorem ile x dahil etmesinin, tümel umbilik ve tümel jeodezik dahil etmelerin bir çarpımının dahil etmesi olduğu çıkar. Tersi açıktır. □

Teorem 2.4.5 ten aşağıdaki sonuçlar çıkar:

Sonuç 2.4.6.[14] M^n, Ricci tensörü $Ric = (n-1)cg$ olan bir Einstein manifoldu olsun. O takdirde M^n nin E^m içine izometrik bir dahil edilmesi için

$$H^2 \geq c \tag{2.4.23}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıtlama: $\{e_1,...,e_n\}$, $T_p\left(M^n\right)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere, (2.4.13) ten

$$n(n-1)H^2 \geq 2\tau + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2 \geq 2\tau$$

yazılabilir. Diğer taraftan M^n, Ricci tensörü $Ric = (n-1)cg$ olan bir Einstein manifoldu olduğundan, (2.2.1), (2.1.2) de dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} 2\tau &= (n-1)cg(e_1, e_1) + (n-1)cg(e_2, e_2) + \ldots + (n-1)cg(e_n, e_n) \\ &= n(n-1)c \end{aligned}$$

bulunur ki, böylece $n(n-1)H^2 \geq n(n-1)c$ eşitsizliğinden (2.4.23) elde edilir. □

Sonuç 2.4.7.[14] $N^k(c)$, kesit eğriliği $c > 0$ sabiti olan k-boyutlu bir reel uzay form olsun. O takdirde $M^n = N^k(c) \times E^{n-k}$ Riemann çarpımından E^m içine bir $x : M^n = N^k(c) \times E^{n-k} \to E^m$ izometrik dahil edilmesi için

$$H^2 \geq \left(\frac{k}{n}\right)^2 c \tag{2.4.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıtlama: $\{e_1^1, \ldots, e_k^1, e_{k+1}^2, \ldots, e_n^2\}$, $T_p(M^n)$ nin ortonormal bir bazı olsun. O halde (2.4.14), (2.1.31) ve (2.1.3) ten

$$H^2 \geq \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{2}{k(k-1)} \frac{k(k-1)}{2} c$$

çıkar ki, böylece (2.4.24) elde edilir. □

Şimdi reel uzay formların altmanifoldlarının şekil operatörü ile K kesit eğrilik fonksiyonu arasındaki bir ilişkiyi ifade ederek, bir altmanifoldun başlıca dışsal değişmezleri ile başlıca içsel değişmezleri arasında bir ilişki kurma probleminin başka bir çözümünü inceleyeceğiz.

Teorem 2.4.8.[14] $\mathrm{x}: M^n \to R^m(\overline{c})$, bir M^n Riemann manifoldunun sabit $\overline{c}$ kesit eğrilikli bir reel uzay form $R^m(\overline{c})$ içine izometrik bir dahil edilmesi olsun. Eğer M^n nin $c \equiv \inf K \neq \overline{c}$ olacak şekilde bir $p \in M^n$ noktası varsa, o takdirde H ortalama eğrilik vektörünün tanımladığı şekil operatörü; I, birim dönüşüm olmak üzere, bu noktada

$$A_H > \frac{n-1}{n}(c-\overline{c})I \tag{2.4.25}$$

eşitsizliğini gerçekler.

Kanıtlama: M^n nin $R^m(\overline{c})$ nin bir altmanifoldu olduğunu kabul edelim. Eğer kesit eğrilikleri p noktasında $\inf K = c > \overline{c}$ ifadesini sağlarsa Yardımcı Teorem 2.4.3, H ortalama eğrilik vektörünün p de sıfırdan farklı olduğunu ifade eder. Çünkü Yardımcı Teorem 2.4.3 ten $H^2 \geq \rho - \overline{c}$ idi. $\inf K = c$ olduğundan M^n nin kesit eğrilikleri $\geq c$ dir. M^n nin sabit kesit eğrilikli olması durumunda bile, $H^2 \geq \dfrac{2\tau}{n(n-1)} - \overline{c} = c - \overline{c} > 0$ olduğu görülür. e_{n+1}, ortalama eğrilik vektörüne paralel olacak şekilde ve $e_1,...,e_n$, A_{n+1} şekil operatörünün matrisini (2.4.10) daki gibi köşegenleştirecek şekilde, p noktasında $R^m(\overline{c})$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\}$ bazını seçelim. $u_{ij} = u_{ji} = a_i a_j$ alalım. (2.1.3) ve (2.1.21) den,

$$u_{ij} \geq c - \overline{c} + \sum_{r=n+2}^{m} \left(h_{ij}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} h_{ii}^r h_{jj}^r \ , \ 1 \leq i \neq j \leq n \tag{2.4.26}$$

elde edilir.

Yukarıdaki teoremde verilen koşullar altındaki M^n ve $R^m(\overline{c})$ için aşağıdaki yardımcı teoremlere gerek duyacağız:

Yardımcı Teorem 2.4.9.[14] Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) Belirli bir $i \in \{1,...,n\}$ için $\sum_{j \neq i} u_{ij} \geq (n-1)(c-\overline{c})$,

(2) $i \neq j$ için $u_{ij} \neq 0$,

(3) Farklı i, j, k lar için $a_i^2 = u_{ij} u_{ik} u_{jk}^{-1}$.

Kanıtlama: (2.4.26) dan,

$$\sum_{j \neq i} u_{ij} \geq (n-1)(c-\overline{c}) + \sum_{r=n+2}^{m} \left(\sum_{j \neq i} \left(h_{ij}^r\right)^2 - h_{ii}^r \left(-h_{ii}^r\right) \right)$$

$$= (n-1)(c-\overline{c}) + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2$$

olup,

$$\sum_{j \neq i} u_{ij} \geq (n-1)(c-\overline{c})$$

elde edilir ki, bu **(1)** i kanıtlar. **(2)** durumu için, $u_{ij} = a_i a_j = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $a_i = 0$ ise o takdirde herhangi bir $t \neq i$ için $u_{it} = 0$ dır. Dolayısıyla $\sum_{t \neq i} u_{it} = 0$ bulunur ki, bu **(1)** ile çelişir. **(3)** durumu, $u_{ij} u_{ik} = a_i^2 a_j a_k = a_i^2 u_{jk}$ eşitliğinden çıkar. □

Şimdi $\{1,...,n\}$ nin her B altkümesi için $\overline{B}$ ile $\{1,...,n\}$ ye göre B nin tümleyenini gösterelim. S_k da $\{1,...,n\}$ nin k elemanlı altkümelerinin sınıfı olsun.

Yardımcı Teorem 2.4.10.[14] $1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ olacak şekildeki belirli bir k ve her $B \in S_k$ için

$$\sum_{j \in B} \sum_{t \in \overline{B}} u_{jt} \geq (n-k)k(c-\overline{c})$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıtlama: Genelliği kaybetmeksizin, $B=\{1,...,k\}$ olduğunu kabul edelim. (2.4.26) dan,

$$\sum_{j\in B}\sum_{t\in \overline{B}} u_{jt} \geq (n-k)k(c-\overline{c})+\sum_{r=n+2}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n}\left(\left(h_{jt}^{r}\right)^{2}-h_{jj}^{r}h_{tt}^{r}\right)\right]$$

çıkar. Buna göre (2.4.10) u kullanarak,

$$\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n} h_{jj}^{r}h_{tt}^{r} = \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}+h_{22}^{r}+...+h_{kk}^{r}\right)\left(h_{k+1\,k+1}^{r}+h_{k+2\,k+2}^{r}+...+h_{nn}^{r}\right)$$

$$=-\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}+h_{22}^{r}+...+h_{kk}^{r}\right)^{2}$$

bağıntılarından, $-\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n} h_{jj}^{r}h_{tt}^{r}=\sum_{r=n+2}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}h_{jj}^{r}\right)^{2}$ olup,

$$\sum_{j\in B}\sum_{t\in \overline{B}} u_{jt} \geq (n-k)k(c-\overline{c})+\sum_{r=n+2}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=k+1}^{n}\left(h_{jt}^{r}\right)^{2}+\left(\sum_{j=1}^{k}h_{jj}^{r}\right)^{2}\right]$$

$$\geq (n-k)k(c-\overline{c})$$

buluruz ki bu, iddiayı kanıtlar. □

Yardımcı Teorem 2.4.11.[14] Herhangi bir $1\leq i\neq j\leq n$ için $u_{ij}>0$ dır.

Kanıtlama: $u_{1n}<0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.4.9 **(3)** ten, $1<i<n$ için, $u_{1i}u_{in}<0$ elde edilir. Genelliği kaybetmeksizin, $\left[\frac{n+1}{2}\right]\leq \ell \leq n-1$ olacak şekildeki bir ℓ için

$$\begin{aligned} &u_{12},...,u_{1\ell},u_{\ell+1\,n},...,u_{n-1\,n}>0,\\ &u_{1\,\ell+1},...,u_{1n},u_{2n},...,u_{\ell \mathrm{n}}<0 \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

olduğunu varsayalım. Eğer $\ell=n-1$ ise Yardımcı Teorem 2.4.9 un **(1)** hali ile çelişen

$u_{1n}+u_{2n}+...+u_{n-1\,n}<0$ bulunur (Çünkü Yardımcı Teorem 2.4.9 **(1)** den $i=n$ için $\sum_{j=1}^{n-1} u_{ij} \geq (n-1)(c-\overline{c})>0$ dır.). Böylece $\ell<n-1$ dir. Yardımcı Teorem 2.4.9 un **(3)** halinden, $2\leq i\leq \ell$ ve $\ell+1\leq t\leq n-1$ olmak üzere,

$$a_n^{\ 2}=\frac{u_{in}u_{tn}}{u_{it}}>0 \tag{2.4.28}$$

elde edilir. (2.4.27) ve (2.4.28) den,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{t=\ell+1}^{n} u_{it} &= \sum_{i=2}^{\ell}\sum_{t=\ell+1}^{n-1} u_{it} + \sum_{i=1}^{\ell} u_{in} + \sum_{t=\ell+1}^{n} u_{1t} \\ &= \sum_{i=2}^{\ell}\sum_{t=\ell+1}^{n-1} \frac{u_{in}u_{tn}}{a_n^{\ 2}} + \underbrace{\left(u_{1n}+u_{2n}+...+u_{\ell \mathrm{n}}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(u_{1\,\ell+1}+u_{1\,\ell+2}+...+u_{1n}\right)}_{<0},\end{aligned}$$

$$\sum_{i=2}^{\ell}\sum_{t=\ell+1}^{n-1} \frac{u_{in}u_{tn}}{a_n^{\ 2}} = \frac{1}{a_n^{\ 2}} \underbrace{\left[u_{2n}+u_{3n}+...+u_{\ell \mathrm{n}}\right]}_{<0} \underbrace{\left[u_{\ell+1\,n}+...+u_{n-1\,n}\right]}_{>0}$$

olup, $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{t=\ell+1}^{n} u_{it}<0$ elde edilir ki bu, Yardımcı Teorem 2.4.10 ile çelişir. Dolayısıyla herhangi bir $1\leq i\neq j\leq n$ için $u_{ij}>0$ olduğu kanıtlanmış olur. □

Şimdi Teorem 2.4.8 in kanıtına dönelim. Yardımcı Teorem 2.4.11 den $a_1,...,a_n$ lerin aynı işaretli olduğu çıkar. Dolayısıyla A_H şekil operatörünün matrisi pozitif tanımlıdır.

$$na_i\left\|H\right\|-a_i^2=a_i\left(a_1+a_2+...+a_n\right)-a_i^2=a_i\sum_{j\neq i}a_j$$

olup, Yardımcı Teorem 2.4.9 un **(1)** halinden,

$$na_i\left\|H\right\|-a_i^2=a_i\sum_{j\neq i}a_j\geq(n-1)\left(c-\overline{c}\right)$$

elde edilir. Böylece A_H şekil operatörünün matrisi,

$$A_H = \begin{pmatrix} \|H\| a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|H\| a_n \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \frac{(n-1)}{n}(c-\overline{c}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{(n-1)}{n}(c-\overline{c}) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur ve (2.4.25) eşitsizliği elde edilir. Eğer p de $c<\overline{c}$ ise (2.4.25), benzer bir şekilde kanıtlanabilir. □

Uyarı 2.4.12.[14] Teorem 2.4.8 deki A_H kuvvetli bir tahmindir. Bunu aşağıdaki örnekten görebiliriz:

E^{n+1} de, $0<a<1$ olmak üzere,

$$a{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_{n+1}}^2 = 1$$

şeklinde tanımlanan bir hiper-elipsoid düşünelim. Hiper-elipsoidin $a_1,\ldots,a_n$ asal eğrilikleri,

$$a_1 = \frac{a}{\left(1+a(a-1){x_1}^2\right)^{\frac{3}{2}}},\ a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{\left(1+a(a-1){x_1}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklindedir, [33]. Dolayısıyla K kesit eğrilik fonksiyonu,

$$K \geq c := \frac{a}{\left(1+a(a-1){x_1}^2\right)^2} > 0 \tag{2.4.29}$$

eşitsizliğini sağlar. $r = 1+a(a-1){x_1}^2$ olmak üzere,

$$\|H\| = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{\sqrt{r^3}} + \frac{(n-1)}{\sqrt{r}}\right) = \frac{a+(n-1)r}{nr\sqrt{r}}$$

dir. Buna göre

$$A_H = \begin{pmatrix} \frac{a^2+(n-1)ar}{nr^3} & & & 0 \\ & \frac{a+(n-1)r}{nr^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{a+(n-1)r}{nr^2} \end{pmatrix}$$

olduğundan, A_H şekil operatörünün matrisinin öz değerleri,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{a\left(a+(n-1)\left(1+a(a-1)x_1^2\right)\right)}{n\left(1+a(a-1)x_1^2\right)^3}, \\ \kappa_2 = \ldots = \kappa_n &= \frac{a+(n-1)\left(1+a(a-1)x_1^2\right)}{n\left(1+a(a-1)x_1^2\right)^2} \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

şeklinde verilir. (2.4.29) ve (2.4.30) dan $A_H > \left(\frac{n-1}{n}\right)cI$ ve $a \to 0$ iken

$$\kappa_1 - \frac{n-1}{n}c = \frac{a^2}{n\left(1+a(a-1)x_1^2\right)^3} \to 0$$

olduğu çıkar.

Yardımcı Teorem 2.4.13.[13] M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann manifoldunun n-boyutlu $(n \geq 2)$ bir altmanifoldu olsun. O takdirde

$$\inf K \geq \frac{1}{2}\left\{2\tau - \frac{n^2(n-2)}{(n-1)}H^2 - (n+1)(n-2)c\right\} \tag{2.4.31}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $R^m(c)$ de uygun $e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m$ ortonormal baz vektör alanlarına göre M^n nin $A_r = A_{e_r}$, $r = n+1,...,m$, şekil operatörlerinin matrislerinin aşağıdaki gibi olmasıdır:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}, \ a+b=\mu; \tag{2.4.32}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \cdots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ r = n+2,...,m. \tag{2.4.33}$$

Kanıtlama: Öncelikle,

$$\delta = 2\tau - \frac{n^2(n-2)}{(n-1)}H^2 - (n+1)(n-2)c \tag{2.4.34}$$

alalım. O takdirde (2.4.5) ve (2.4.34) ten,

$$n^2H^2 = (n-1)\|h\|^2 + (n-1)(\delta - 2c) \tag{2.4.35}$$

bulunur. $\pi \subset T_p(M^n)$ bir düzlem kesit olsun. Eğer $\pi = Ger\{e_1,e_2\}$ $\big(\pi,\ \{e_1,e_2\}$ tarafından gerilen uzay$\big)$ ve e_{n+1}, H ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda olacak şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_m\}$ bazını seçersek, (2.4.35) ten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^{n+1}\right)^2 + \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 + \delta - 2c\right\} \tag{2.4.36}$$

elde edilir. (2.4.36) eşitliğine Yardımcı Teorem 2.4.1 i uygularsak, buradan

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 + \delta - 2c \tag{2.4.37}$$

çıkar. Buna göre

$$\begin{aligned} 2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq\ & 2\left(h_{12}^{n+1}\right)^2 + \sum_{i\neq j>2}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + 2\sum_{j>2}\left(\left(h_{1j}^{n+1}\right)^2 + \left(h_{2j}^{n+1}\right)^2\right) \\ & +2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j>2}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j>2}\left\{\left(h_{1j}^{r}\right)^2 + \left(h_{2j}^{r}\right)^2\right\} \\ & + \underbrace{\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^2 + \left(h_{22}^{r}\right)^2\right)}_{\sum_{r=n+2}^{m}\left[\left(h_{11}^{r}+h_{22}^{r}\right)^2 - 2h_{11}^{r}h_{22}^{r}\right]} + \delta - 2c \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} & 2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} - 2\left(h_{12}^{n+1}\right)^2 - 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}h_{11}^{r}h_{22}^{r} + 2c \geq \\ & \sum_{i\neq j>2}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + 2\sum_{j>2}\left(\left(h_{1j}^{n+1}\right)^2 + \left(h_{2j}^{n+1}\right)^2\right) + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j>2}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 \\ & +2\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j>2}\left\{\left(h_{1j}^{r}\right)^2 + \left(h_{2j}^{r}\right)^2\right\} + \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}+h_{22}^{r}\right)^2 + \delta \end{aligned}$$

olur ki, sonuçta $K(\pi) = \sum_{r=n+1}^{m}\left\{h_{11}^{r}h_{22}^{r} - \left(h_{12}^{r}\right)^2\right\} + c$ eşitliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
K(\pi) \geq & \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j>2} \left\{ \left(h_{1j}^{r}\right)^{2} + \left(h_{2j}^{r}\right)^{2} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j>2} \left(h_{ij}^{n+1}\right)^{2} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j>2} \left(h_{ij}^{r}\right)^{2} + \frac{1}{2} \sum_{r=n+2}^{m} \left(h_{11}^{r} + h_{22}^{r}\right)^{2} + \frac{\delta}{2} \\
& \geq \frac{\delta}{2}
\end{aligned}
\tag{2.4.38}
$$

elde edilir. (2.4.34) ve (2.4.38) den,

$$
K(\pi) \geq \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 2\tau - \frac{n^{2}(n-2)}{(n-1)} H^{2} - (n+1)(n-2)c \right\}
$$

ve bu eşitsizlikten de (2.4.31) bulunur. Eğer (2.4.31), eşitlik olarak gerçeklenirse o takdirde (2.4.37) ve (2.4.38) deki eşitsizlikler de eşitlik olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
& h_{1j}^{n+1} = 0;\ j>2,\ h_{2j}^{n+1} = 0;\ j>2,\ h_{ij}^{n+1} = 0;\ i \neq j > 2\,, \\
& h_{1j}^{r} = h_{2j}^{r} = h_{ij}^{r} = 0;\ i,j = 3,\dots,n,\ r = n+2,\dots,m\,, \\
& h_{11}^{n+2} + h_{22}^{n+2} = \dots = h_{11}^{m} + h_{22}^{m} = 0
\end{aligned}
$$

çıkar. Ayrıca e_1, e_2 yi $h_{12}^{n+1} = 0$ olacak şekilde seçebiliriz. Üstelik, (2.4.37) nin eşitlik olması halinde, Yardımcı Teorem 2.4.1 uygulanarak,

$$
h_{11}^{n+1} + h_{22}^{n+1} = h_{33}^{n+1} = \dots = h_{nn}^{n+1}
$$

elde edilir. Dolayısıyla uygun bir baz için M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.32) ve (2.4.33) teki gibi olur. Tersine, M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.32) ve (2.4.33) teki gibi olsun. Her $p \in M^n$ için

$$
(\inf K)(p) = \inf \left\{ K(\pi) \,\middle|\, \pi \subset T_p\left(M^n\right) \right\}
$$

dir. Bu durumda

$$\left(\inf K\right)(p) = \inf\left\{c + h_{ii}^{n+1}h_{jj}^{n+1} + \sum_{r=n+2}^{m} h_{ii}^{r}h_{jj}^{r} - \left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{ij}^{r}\right)^2 \,\middle|\, 1 \le i < j \le n\right\}$$

$$= \inf\left\{c + ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2,\ c + a\mu,\ c + b\mu,\ c + \mu^2\right\}$$

$$= c + ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2 = K_{12}$$

çıkar. Diğer taraftan, (2.4.5) ten (2.4.31) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\frac{1}{2}\left\{n^2H^2 - \|h\|^2 + n(n-1)c - \frac{n^2(n-2)}{(n-1)}H^2 - (n+1)(n-2)c\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{2c + \left(\frac{1}{n-1}\right)(n-1)^2\mu^2 - \left[a^2 + b^2 + (n-2)\mu^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{2c + (n-1)\mu^2 - \left[(a+b)^2 - 2ab + (n-2)\mu^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 + 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{2c + 2ab - 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 - 2\sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2\right\} =$$

$$c + ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{11}^{r}\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^2$$

bulunur ki, bu sayede (2.4.31) in eşitlik hali gösterilmiş olur. □

M^n, E^m Öklid uzayının n-boyutlu minimal bir altmanifoldu ise o takdirde Yardımcı Teorem 2.4.13, M^n nin kesit eğrilikleri ve skaler eğriliğinin

$$\inf K \ge \tau$$

eşitsizliğini sağladığını ifade eder. Aşağıdaki yardımcı teorem, $\inf K \equiv \tau$ koşulunu sağlayan minimal bir altmanifold örneğidir:

Yardımcı Teorem 2.4.14.[13] N^2, E^{m-n+2} Öklid uzayının 2-boyutlu minimal bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $M^n = N^2 \times E^{n-2}$ çarpım altmanifoldu, E^m nin $\inf K \equiv \tau$ koşulunu sağlayan minimal bir altmanifoldudur.

Bu yardımcı teorem açıktır.

Her $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ için

$$c(n_1,...,n_k) = \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)},$$

$$b(n_1,...,n_k) = \frac{1}{2}\left(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1)\right)$$

şeklindeki pozitif sabitleri göz önüne alalım.

Teorem 2.4.15.[10] Sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann uzay formunun bir M^n altmanifoldu verildiğinde, herhangi bir $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ k-lısı için

$$\delta(n_1,...,n_k) \leq c(n_1,...,n_k)H^2 + b(n_1,...,n_k)c \tag{2.4.39}$$

eşitsizliği sağlanır. Bir $p \in M^n$ noktasında (2.4.39) un eşitlik olması için gerek ve yeter koşul p de M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri aşağıdaki şekilleri alacak şekilde, $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_m\}$ bazının var olmasıdır:

I, bir birim matris ve her bir A_j^r,

$$\dot{I}z\left(A_1^r\right) = ... = \dot{I}z\left(A_k^r\right) = \mu_r \tag{2.4.40}$$

olacak şekilde, simetrik $n_j \times n_j$ tipinde bir altmatris olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} A_1^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k^r \end{matrix} & 0 \\ 0 & \mu_r I \end{pmatrix}, \quad r = n+1,...,m. \tag{2.4.41}$$

Kanıtlama: Eğer $k=0$ ise bu, Yardımcı Teorem 2.4.3 te yapıldı. Dolayısıyla $k \geq 1$ olduğunu kabul edelim. M^n, $R^m(c)$ Riemann uzay formunun bir altmanifoldu ve $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ olsun.

$$\eta = 2\tau - n(n-1)c - \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{n+k-\sum n_j} H^2 \tag{2.4.42}$$

alalım. Bu durumda (2.4.5), (2.4.42) de yazılırsa, $\gamma = n+k-\sum n_j$ olmak üzere,

$$n^2 H^2 = \gamma\left(\eta + \|h\|^2\right),\ \gamma = n+k-\sum n_j \tag{2.4.43}$$

bulunur. $L_1,...,L_k$, $T_p(M^n)$ nin $j=1,...,k$ için $boy\, L_j = n_j$ olacak şekilde ikişer ikişer ortogonal alt uzayları olsun. p de $L_j = Ger\left\{e_{n_1+...+n_{j-1}+1},...,e_{n_1+...+n_j}\right\}$, $j=1,...,k$ ve e_{n+1} de ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda olacak şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_m\}$ bazı seçilerek, (2.4.43) ten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \gamma\left[\eta + \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2\right] \tag{2.4.44}$$

elde edilir. Burada $a_i = h_{ii}^{n+1}$, $i=1,...,n$ şeklinde alınmaktadır. $\Delta_1 = \{1,...,n_1\}$,…, $\Delta_k = \{n_1+...+n_{k-1}+1,...,n_1+...+n_k\}$ diyelim.

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1 = a_1,\ \bar{a}_2 = a_2 + ... + a_{n_1},\\
&\bar{a}_3 = a_{n_1+1} + ... + a_{n_1+n_2},...,\bar{a}_{k+1} = a_{n_1+...+n_{k-1}+1} + ... + a_{n_1+...+n_k},\\
&\bar{a}_{k+2} = a_{n_1+...+n_k+1},...,\bar{a}_{\gamma+1} = a_n
\end{aligned} \tag{2.4.45}$$

olmak üzere, $\left(\sum_{i=1}^{\gamma+1}\bar{a}_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ dir. O halde

$$\sum_{i=1}^{\gamma+1}(\overline{a}_i)^2 = a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2} + 2\sum_{2\leq\alpha_1<\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} + 2\sum_{\alpha_2<\beta_2} a_{\alpha_2}a_{\beta_2} + ... + 2\sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}$$

olup, (2.4.44) bağıntısının

$$\left(\sum_{i=1}^{\gamma+1}\overline{a}_i\right)^2 = \gamma\left[\begin{array}{l}\eta + \sum_{i=1}^{\gamma+1}(\overline{a}_i)^2 + \sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2 \\ -\sum_{2\leq\alpha_1\neq\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} - \sum_{\alpha_2\neq\beta_2} a_{\alpha_2}a_{\beta_2} - ... - \sum_{\alpha_k\neq\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}\end{array}\right], \tag{2.4.46}$$
$$\alpha_1, \beta_1 \in \Delta_1, ..., \alpha_k, \beta_k \in \Delta_k$$

bağıntısına eşdeğer olduğu çıkar. Yardımcı teorem 2.4.1 i (2.4.46) ya uygulamakla,

$$2\overline{a}_1\overline{a}_2 \geq \eta - 2\sum_{2\leq\alpha_1<\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} - 2\sum_{\alpha_2<\beta_2} a_{\alpha_2}a_{\beta_2} - ... - 2\sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}$$
$$+\sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2$$

bulunur. $2\overline{a}_1\overline{a}_2 = 2a_1\left(a_2 + ... + a_{n_1}\right)$ eşitliği bu eşitsizlikte kullanılacak olursa,

$$\sum_{\alpha_1<\beta_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} + \sum_{\alpha_2<\beta_2} a_{\alpha_2}a_{\beta_2} + ... + \sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}$$
$$\geq \frac{\eta}{2} + \sum_{i<j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2 \tag{2.4.47}$$
$$\alpha_j,\ \beta_j \in \Delta_j,\ j = 1,...,k$$

elde edilir. Diğer taraftan, $boyL_j = n_j$, $j = 1,...,k$ olmak üzere, (2.2.2) den $\tau\left(L_j\right) = \sum_{\alpha_j<\beta_j} K\left(e_{\alpha_j}\wedge e_{\beta_j}\right)$, $n_1 + ... + n_{j-1} + 1 \leq \alpha_j < \beta_j \leq n_1 + ... + n_j$ olup, (2.1.3) ve (2.1.21) den,

$$\tau\left(L_j\right) = \frac{n_j\left(n_j - 1\right)}{2}c + \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^r h_{\beta_j\beta_j}^r - \left(h_{\alpha_j\beta_j}^r\right)^2\right), \tag{2.4.48}$$
$$\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j,\ j = 1,...,k$$

çıkar. (2.4.47) ve (2.4.48) den,

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h^{n+1}_{\alpha_j\alpha_j}h^{n+1}_{\beta_j\beta_j}$$
$$+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h^{r}_{\alpha_j\alpha_j}h^{r}_{\beta_j\beta_j}-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^{r}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$
$$\geq\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\frac{\eta}{2}+\sum_{i<j}\left(h^{n+1}_{ij}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h^{r}_{ij}\right)^2$$
$$+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h^{r}_{\alpha_j\alpha_j}h^{r}_{\beta_j\beta_j}-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^{r}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$

bulunur. Bu eşitsizlik, $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2\cup...\cup\Delta_k$ ve $\Delta^2=\left(\Delta_1\times\Delta_1\right)\cup...\cup\left(\Delta_k\times\Delta_k\right)$ olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)\geq\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\frac{\eta}{2}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^{n+1}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h^{n+1}_{\alpha\beta}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}\left(h^{r}_{\alpha_j\alpha_j}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha\notin\Delta}\left(h^{r}_{\alpha\alpha}\right)^2+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^{r}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h^{r}_{\alpha\beta}\right)^2+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h^{r}_{\alpha_j\alpha_j}h^{r}_{\beta_j\beta_j}-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^{r}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)\geq\frac{\eta}{2}+\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h^{r}_{\alpha\beta}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}h^{r}_{\alpha_j\alpha_j}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha\notin\Delta}\left(h^{r}_{\alpha\alpha}\right)^2 \tag{2.4.49}$$
$$\geq\frac{\eta}{2}+\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c$$

elde edilir. (2.4.49) ve (2.4.42) den,

$$\tau(L_1)+...+\tau(L_k)\geq \tau-\frac{n(n-1)}{2}c-\frac{1}{2}\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{n+k-\sum n_j}H^2+\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j(n_j-1)}{2}c$$

ve dolayısıyla

$$\inf\left\{\tau(L_1)+...+\tau(L_k)\right\}\geq \tau-\frac{n(n-1)}{2}c-\frac{1}{2}\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{n+k-\sum n_j}H^2+\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j(n_j-1)}{2}c$$

çıkar. (2.2.4) ve (2.2.3) eşitliklerinden de (2.4.39) elde edilir. Eğer bir p noktasında (2.4.39) daki eşitlik gerçeklenir ise o takdirde (2.4.47) ve (2.4.49) daki eşitsizlikler de p de eşitlik olur. (2.4.47), (2.4.46) dan bulunmuş olan $2\bar{a}_1\bar{a}_2 \geq \eta-2\sum_{2\leq\alpha_1<\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1}-$ $2\sum_{\alpha_2<\beta_2} a_{\alpha_2}a_{\beta_2}-...-2\sum_{\alpha_k<\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}+\sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{r}\right)^2$ eşitsizliğinden elde edilmiştir. Bu nedenle (2.4.47) eşitsizliğinin eşitlik olması halinde, bu eşitsizlik de eşitlik olmalı ve dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.4.1 den $\bar{a}_1+\bar{a}_2=\bar{a}_3=...=\bar{a}_{\gamma+1}$ olmalıdır. O halde (2.4.45) ten, $a_1+a_2+...+a_{n_1}=a_{n_1+1}+...+a_{n_1+n_2}=a_{n_1+n_2+1}+...+a_{n_1+n_2+n_3}=...=a_{n_1+...+n_{k-1}+1}+$ $...+a_{n_1+...+n_k}=a_{n_1+...+n_k+1}=...=a_n$ olup, $\dot{I}z\left(A_1^{n+1}\right)=\dot{I}z\left(A_2^{n+1}\right)=...=\dot{I}z\left(A_k^{n+1}\right)=\mu_{n+1}$ ve $a_{n_1+...+n_k+1}=...=a_n=\mu_{n+1}$ bulunur. (2.4.49) un eşitlik halinden de $\sum_{j=1}^{k}\tau(L_j)=\frac{\eta}{2}+$ $\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j(n_j-1)}{2}c$ olup,

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha\beta}^{r}=0;\ (\alpha,\beta)\notin\Delta^2,\ \alpha\neq\beta,\ r=n+1,...,m,\\
&\dot{I}z\left(A_1^{r}\right)=\dot{I}z\left(A_2^{r}\right)=...=\dot{I}z\left(A_k^{r}\right)=0;\ r=n+2,...,m,\\
&h_{\alpha\alpha}^{r}=0;\ \alpha\notin\Delta,\ r=n+2,...,m
\end{aligned}\tag{2.4.50}$$

çıkar. Dolayısıyla (2.4.40) ve (2.4.41) elde edilir. Tersi, direkt bir hesaplamayla gerçekleştirilebilir. □

Teorem 2.4.16.[10] M^n, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right)\left(p\right)>\frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right)-\sum n_j\left(n_j-1\right)\right)c \tag{2.4.51}$$

olacak şekilde bir $\left(n_1,...,n_k\right)\in S\left(n\right)$ k-lısı ve bir $p\in M^n$ noktası varsa o takdirde M^n, herhangi bir $R^m\left(c\right)$ Riemann uzay formuna minimal izometrik şekilde dahil edilemez. Özel olarak, bir $\left(n_1,...,n_k\right)\in S\left(n\right)$ k-lısı için bir noktada

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right)\left(p\right)>0 \tag{2.4.52}$$

ise bu durumda keyfi dik boyutlu M^n Riemann manifoldu Öklid uzayına minimal izometrik şekilde dahil edilemez.

Kanıtlama: (2.4.39) dan,

$$c\left(n_1,...,n_k\right)H^2+b\left(n_1,...,n_k\right)c\geq\delta\left(n_1,...,n_k\right)>\frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right)-\sum n_j\left(n_j-1\right)\right)c$$

yazılabilir. O halde $c\left(n_1,...,n_k\right)H^2>0$ bulunur ki, buradan M^n nin, herhangi bir $R^m\left(c\right)$ Riemann uzay formuna minimal izometrik şekilde dahil edilemeyeceği çıkar. Özel olarak, bir $\left(n_1,...,n_k\right)\in S\left(n\right)$ k-lısı için bir noktada $\delta\left(n_1,...,n_k\right)\left(p\right)>0$ ise o takdirde keyfi dik boyutlu M^n Riemann manifoldunun Öklid uzayına minimal izometrik şekilde dahil edilemeyeceği açıktır. □

Teorem 2.4.17.[11] $\left(n_1,...,n_k\right)\in S\left(n\right)$ ve M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m\left(c\right)$ Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M^n nin

$$\hat{\delta}\left(n_1,...,n_k\right)=\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)}H^2+\frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right)-\sum_{j=1}^{k}n_j\left(n_j-1\right)\right)c \tag{2.4.53}$$

eşitliğini özdeş olarak sağlaması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Riemann uzay formu ve dahil etmenin tümel umbilik olmasıdır.

Kanıtlama: M^n nin bir $R^m(c)$ Riemann uzay formunun (2.4.53) eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olduğunu kabul edelim. O takdirde (2.2.5) ve (2.2.6) dan,

$$\delta(n_1,...,n_k) = \hat{\delta}(n_1,...,n_k)$$

çıkar ki, buradan (2.4.53) özdeş olarak sağlandığı için M^n nin bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olduğu anlaşılır. Böylece $boy\, L_j = n_j$, $j = 1,...,k$ olmak üzere, herhangi ikişer ikişer ortogonal k düzlem kesit $L_1,...,L_k \subset T_p(M^n)$, $p \in M^n$ için

$$\begin{aligned}\tau - \{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\} = & \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 \\ & + \frac{1}{2}\left(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1)\right)c \end{aligned} \tag{2.4.54}$$

elde edilir. $\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\}$; bir p noktasında L_j, $j=1,...,k$, $\left\{e_{n_1+...+n_{j-1}+1},...,e_{n_1+...+n_j}\right\}$ tarafından gerilecek şekilde ve e_{n+1} de ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda olacak şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir bazı olsun. (2.4.54) ten ve dolayısıyla Teorem 2.4.15 ten, p de M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.40) ve (2.4.41) deki gibidir. $k=1$ ve $2 \le n_1 \le n-2$ alalım. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.3.8 ve Yardımcı Teorem 2.3.10 dan M^n nin bir Riemann uzay formu oluğu çıkar. O halde (2.4.54) ten,

$$K = \frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)\mu_{n+1}^{\;2}}{n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1)} + c$$

bulunur. Böylece bu eşitlikten yararlanılarak,

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}K$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}\frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)\mu_{n+1}{}^2}{n\left(n-1\right)-\sum_{j=1}^{k}n_j\left(n_j-1\right)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c$$

çıkar. Aynı ifade, (2.4.48) den de $a_i=h_{ii}^{n+1};\ i=1,\dots,n$ olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h_{\alpha_j\alpha_j}^{n+1}h_{\beta_j\beta_j}^{n+1}+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}h_{\beta_j\beta_j}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\left(n_j-1\right)\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}\left(a_{\alpha_j}\right)^2\right)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(a_{\alpha_j}-a_{\beta_j}\right)^2\right)+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\left(n_j-1\right)\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}\right)^2\right)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}-h_{\beta_j\beta_j}^{r}\right)^2\right)-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\left(n_j-1\right)\left[\frac{1}{n_j}\mu_{n+1}{}^2+\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(a_{\alpha_j}-a_{\beta_j}\right)^2\right]\right)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(a_{\alpha_j}-a_{\beta_j}\right)^2\right)+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\left(n_j-1\right)\left[\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}-h_{\beta_j\beta_j}^{r}\right)^2\right]\right)-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}-h_{\beta_j\beta_j}^{r}\right)^2\right)$$

$$-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}c+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j-1}{n_j}\mu_{n+1}{}^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(a_{\alpha_j}-a_{\beta_j}\right)^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}-h_{\beta_j\beta_j}^{r}\right)^2\right)-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2$$

şeklinde bulunur. Bu iki ifadenin eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
&\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-1)}{2}\left(n_j\frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)}{n(n-1)-\sum_{j=1}^{k}n_j(n_j-1)}-\frac{1}{n_j}\right)\right]{\mu_{n+1}}^2=\\
&-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(a_{\alpha_j}-a_{\beta_j}\right)^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n_j}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^r_{\alpha_j\alpha_j}-h^r_{\beta_j\beta_j}\right)^2\right) \qquad (2.4.55)\\
&-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h^r_{\alpha_j\beta_j}\right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

(1) $n_1=n_2=...=n_k=j$ ve $n=n_1+n_2+...+n_k=kj$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-1)}{2}\left(n_j\frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)}{n(n-1)-\sum_{j=1}^{k}n_j(n_j-1)}-\frac{1}{n_j}\right)\\
&=k\frac{(j-1)}{2}\left(j\frac{(kj+k-1-kj)(kj+k-kj)}{kj(kj-1)-kj(j-1)}-\frac{1}{j}\right)\\
&=0
\end{aligned}
$$

çıkar ki, bu sayede

$$
\begin{aligned}
&a_{\alpha_j}=a_{\beta_j};\ \alpha_j,\beta_j\in\Delta_j,\ j=1,...,k,\\
&h^r_{\alpha_j\alpha_j}=h^r_{\beta_j\beta_j};\ \alpha_j,\beta_j\in\Delta_j,\ j=1,...,k,\ r=n+2,...,m, \qquad (2.4.56)\\
&h^r_{\alpha_j\beta_j}=0;\ \alpha_j,\beta_j\in\Delta_j,\ j=1,...,k,\ r=n+1,...,m
\end{aligned}
$$

ve dolayısıyla Teorem 2.4.15 ten $a_{\alpha_j}=a_{\beta_j}=\dfrac{\mu_{n+1}}{n_j}$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $h^r_{\alpha_j\alpha_j}=h^r_{\beta_j\beta_j}=0$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $r=n+2,...,m$ elde edilir. Bununla birlikte (2.4.50) den $h^r_{\alpha\beta}=0$; $(\alpha,\beta)\notin\Delta^2$, $\alpha\neq\beta$, $r=n+1,...,m$ olduğunu biliyoruz. Böylece

M^n nin tümel umbilik olduğu gösterilmiş olur. Tersine, M^n nin bir Riemann uzay formu ve tümel umbilik olmasından elde edilen $K = K_{ij} = c + a_i a_j = c + \frac{\mu_{n+1}^{\;2}}{j^2}$ kullanılarak, $\hat{\delta}\left(n_1,...,n_k\right) = \frac{1}{2}k\left(k-1\right)j^2\left(c + \frac{\mu_{n+1}^{\;2}}{j^2}\right)$ bulunur. Diğer taraftan, (2.4.53) teki eşitliğin sağ tarafının da bu ifadeye eşit olduğu çıkar ki, böylece istenen elde edilir.

(2) (i) $n_1 = n_2 = ... = n_k$ ve **(ii)** $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ olmadıkça,

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(n_j-1\right)}{2}\left(n_j\frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)}{n\left(n-1\right)-\sum_{j=1}^{k}n_j\left(n_j-1\right)}-\frac{1}{n_j}\right)>0$$

olduğundan, (2.4.55) teki eşitliğin gerçeklenmesi için $\mu_{n+1} = 0$ ve (2.4.56) dan $a_{\alpha_j} = a_{\beta_j}$; $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$, $j = 1,...,k$, $h^r_{\alpha_j\alpha_j} = h^r_{\beta_j\beta_j}$; $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$, $j = 1,...,k$, $r = n+2,...,m$ ve $h^r_{\alpha_j\beta_j} = 0$; $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$, $j = 1,...,k$, $r = n+1,...,m$ olmalıdır. Buna göre Teorem 2.4.15 ten $\dot{I}z\left(A_1^{n+1}\right) = \dot{I}z\left(A_2^{n+1}\right) = ... = \dot{I}z\left(A_k^{n+1}\right) = 0$ olacağından, $a_{\alpha_j} = a_{\beta_j} = 0$; $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$, $j = 1,...,k$ ve (2.4.50) den $h^r_{\alpha_j\alpha_j} = h^r_{\beta_j\beta_j} = 0$; $\alpha_j, \beta_j \in \Delta_j$, $j = 1,...,k$, $r = n+2,...,m$ çıkar. Ayrıca Teorem 2.4.15 ten, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_k$ olmak üzere, $\alpha \notin \Delta$ için, $a_{\alpha\alpha} = \mu_{n+1} = 0$ bulunur. (2.4.50) den $h^r_{\alpha\alpha} = 0$; $\alpha \notin \Delta$, $r = n+2,...,m$ ve $\Delta^2 = \left(\Delta_1 \times \Delta_1\right) \cup ... \cup \left(\Delta_k \times \Delta_k\right)$ olmak üzere, $h^r_{\alpha\beta} = 0$; $\left(\alpha,\beta\right) \notin \Delta^2$, $\alpha \neq \beta$, $r = n+1,$ $...,m$ olduğunu biliyoruz. Böylece M^n nin tümel umbilik olduğu gösterilmiş olur. Tersine, M^n nin bir Riemann uzay formu ve tümel umbilik olmasından elde edilen $K = K_{ij} = c + a_i a_j = c$ kullanılarak, $\hat{\delta}\left(n_1,...,n_k\right) = \frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)c$ bulunur. Yine, (2.4.53) teki eşitliğin sağ tarafından da $\frac{1}{2}\left(n\left(n-1\right) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)c$ çıkar ki, bu sayede istenen elde edilir. □

2.4.1.2. Keyfi Dik Boyutlu Altmanifoldlar İçin Ricci Eğriliği ve Şekil Operatörü Arasındaki Eşitsizlikler

Bu kısımda ilk olarak, bir M^n Riemann manifoldu için $T_p\left(M^n\right)$ nin bir V^ℓ ℓ- düzlem kesitinin k-Einstein olması tanımını ve bir M^n Riemann manifoldunun bağıl sıfır uzayı olması tanımını vereceğiz [12]. Sonra, bir Riemann uzay formunun keyfi dik boyutlu bir altmanifoldunun şekil operatörü ve k-Ricci eğriliği arasında kurulmuş olan kuvvetli bir ilişki sayesinde, bir altmanifoldun başlıca dışsal değişmezleri ve başlıca içsel değişmezleri arasında ilişki kurma probleminin bir çözümünü inceleyeceğiz. Ayrıca bir Riemann uzay formunun keyfi dik boyutlu bir altmanifoldunun Ricci eğriliği ve ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi arasında kurulmuş olan kuvvetli bir ilişkiyle de bu problemin başka bir çözümünü göz önüne alacağız.

Tanım 2.4.18. V^ℓ, bir M^n Riemann manifoldunun $T_p\left(M^n\right)$ tanjant uzayının bir ℓ-düzlem kesiti olsun. Eğer V^ℓ deki bütün k-düzlem kesitlerinin k-Ricci eğrilikleri eşit ise o takdirde V^ℓ ye k-Einstein'dır, denir.

V^ℓ ℓ- düzlem kesiti 2-Einstein ise o, sabit kesit eğriliğine sahiptir. Bu durumda V^ℓ deki bütün 2-düzlem kesitlerinin kesit eğrilikleri eşittir. (2.1.33) ten, bir ℓ-düzlem kesitinin 2-Einstein olması için gerek ve yeter koşul onun bir $k<\ell$ için k-Einstein olmasıdır, gösterelim:

Bir ℓ-düzlem kesitinin 2-Einstein olduğunu kabul edelim. O takdirde bütün 2-düzlem kesitlerinin kesit eğrilikleri eşittir. Buna göre her L^k için k-Ricci eğrilikleri birbirine eşit olup, ℓ-düzlem kesiti $k<\ell$ için k-Einstein çıkar. Tersine, ℓ-düzlem kesiti $k<\ell$ için k-Einstein olsun. Buna göre her $1\le i_1,...,i_{k-1},i_k,i_j\le\ell$ için $i_1,...,i_{k-1},i_k,i_j$ ler birbirinden farklı olmak üzere, $L^k=Ger\left\{e_{i_1},...,e_{i_k}\right\}$ ve $\overline{L}^k=Ger\left\{e_{i_1},...,e_{i_{k-1}},e_{i_j}\right\}$ olsun. $e_{i_1}=X\in L^k$ ve $e_{i_1}=X\in\overline{L}^k$ olduğundan,

$$Ric_{L^k}\left(e_{i_1}\right)=K_{i_1i_2}+K_{i_1i_3}+...+K_{i_1i_{k-1}}+K_{i_1i_k},$$

$$Ric_{\overline{L}^k}\left(e_{i_1}\right)=K_{i_1i_2}+K_{i_1i_3}+...+K_{i_1i_{k-1}}+K_{i_1i_j}$$

elde edilir ki, $Ric_{L^k}\left(e_{i_1}\right)=Ric_{\tilde{L}^k}\left(e_{i_1}\right)$ eşitliğinden, $K_{i_1 i_k}=K_{i_1 i_j}$ çıkar. Şimdi de her $1\leq i_1,...,i_{k-2},i_t,i_j,i_z\leq \ell$ için $i_1,...,i_{k-2},i_t,i_j,i_z$ ler birbirinden farklı olmak üzere, $L^{*k}=Ger\left\{e_{i_1},...,e_{i_{k-2}},e_{i_t},e_{i_j}\right\}$ ve $\tilde{L}^k=Ger\left\{e_{i_1},...,e_{i_{k-2}},e_{i_t},e_{i_z}\right\}$ iki k-düzlem kesiti olsun. O halde

$$Ric_{L^{*k}}\left(e_{i_t}\right)=K_{i_t i_1}+K_{i_t i_2}+...+K_{i_t i_{k-2}}+K_{i_t i_j},$$

$$Ric_{\tilde{L}^k}\left(e_{i_1}\right)=K_{i_1 i_2}+K_{i_1 i_3}+...+K_{i_1 i_{k-2}}+K_{i_1 i_t}+K_{i_1 i_z}$$

eşitliklerinden, $K_{i_1 i_2}=K_{i_1 i_3}=...=K_{i_1 i_{k-2}}=K_{i_1 i_t}=K_{i_1 i_z}=K_{i_t i_2}=...=K_{i_t i_{k-2}}=K_{i_t i_j}$ bulunur ki, böylece ℓ-düzlem kesiti 2-Einstein olur.

Tanım 2.4.19. Bir Riemann manifoldunun bir M^n altmanifoldu için bir $p\in M^n$ noktasında,

$$N_p=\left\{X\in T_p\left(M^n\right)\middle|\,\forall Y\in T_p\left(M^n\right)\text{ için } h\left(X,Y\right)=0\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya M^n nin bağıl sıfır uzayı denir.

Teorem 2.4.20.[12] $x:M^n\to R^m\left(c\right)$, bir M^n Riemann manifoldunun sabit c kesit eğrilikli bir $R^m\left(c\right)$ Riemann uzay formu içine izometrik bir dahil edilmesi olsun. O takdirde bir k, $2\leq k\leq n$ tamsayısı ve bir $p\in M^n$ için,

(1) $\theta_k\left(p\right)\neq c$ ise I, $T_p\left(M^n\right)$ nin birim dönüşümünü göstermek üzere, ortalama eğrilik vektöründeki A_H şekil operatörü, p noktasında

$$A_H>\frac{n-1}{n}\left(\theta_k\left(p\right)-c\right)I \tag{2.4.57}$$

eşitsizliğini sağlar.

(2) $\theta_k\left(p\right)=c$ ise p de $A_H\geq 0$ dır.

(3) Bir $X \in T_p\left(M^n\right)$ birim vektörünün $A_H X = \frac{n-1}{n}\left(\theta_k\left(p\right)-c\right)X$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul $\theta_k\left(p\right)=c$ ve $X \in N_p$ olmasıdır.

(4) p de $A_H \equiv \frac{n-1}{n}\left(\theta_k\left(p\right)-c\right)I$ olması için gerek ve yeter koşul p nin tümel jeodezik bir nokta, yani p de ikinci temel formun özdeş olarak sıfır olmasıdır.

Kanıtlama: $\left\{e_1,...,e_n\right\}$, $T_p\left(M^n\right)$ nin ortonormal bir bazı olsun. $\left\{e_{i_1},...,e_{i_k}\right\}$ tarafından gerilen k-düzlem kesitini $L_{i_1...i_k}$ ile gösterelim. (2.1.33) ten,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i\in\left\{i_1,...,i_k\right\}} Ric_{L_{i_1...i_k}}\left(e_i\right) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} K_{i_1i_2}+...+K_{i_1i_k}+ \\ K_{i_2i_1}+K_{i_2i_3}+...+K_{i_2i_k}+...+ \\ K_{i_ki_1}+...+K_{i_ki_{k-1}} \end{pmatrix} \\ &= K_{i_1i_2}+...+K_{i_1i_k}+K_{i_2i_3}+...+K_{i_2i_k}+...+K_{i_{k-1}i_k}\end{aligned}$$

olur ki, böylece (2.2.2) den

$$\tau\left(L_{i_1...i_k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i\in\left\{i_1,...,i_k\right\}} Ric_{L_{i_1...i_k}}\left(e_i\right) \tag{2.4.58}$$

elde edilir. $\binom{n-2}{k-2}\tau\left(p\right)=\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}\tau\left(L_{i_1...i_k}\right)$ olduğundan da

$$\tau\left(p\right)=\frac{\left(k-2\right)!\left(n-k\right)!}{\left(n-2\right)!}\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}\tau\left(L_{i_1...i_k}\right) \tag{2.4.59}$$

bulunur. O halde (2.4.59) da (2.4.58) ve (2.2.8) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tau\left(p\right) &= \frac{\left(k-2\right)!\left(n-k\right)!}{\left(n-2\right)!}\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}\tau\left(L_{i_1...i_k}\right) \\ &= \frac{\left(k-2\right)!\left(n-k\right)!}{\left(n-2\right)!}\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}\frac{1}{2}\sum_{i\in\left\{i_1,...,i_k\right\}} Ric_{L_{i_1...i_k}}\left(e_i\right)\end{aligned}$$

$$\geq \frac{(k-2)!(n-k)!}{(n-2)!} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \frac{1}{2} \sum_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}} \inf_{L^k, e_i} Ric_{L^k}(e_i)$$

$$= \frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-2)!} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \frac{1}{2} \sum_{i\in\{i_1,\ldots,i_k\}} \theta_k(p)$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{2(n-2)!} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \theta_k(p)$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{2(n-2)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \theta_k(p)$$

ve dolayısıyla

$$\tau(p) \geq \frac{n(n-1)}{2} \theta_k(p) \qquad (2.4.60)$$

çıkar. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.4.3 ten $H^2 \geq \rho - c$ olup, (2.1.31), (2.1.3), (2.2.1) ve (2.4.60) tan,

$$H^2(p) \geq \theta_k(p) - c$$

elde edilir. Bu, yalnızca $\theta_k(p) \leq c$ olduğunda $H(p)=0$ olabileceğini gösterir. $H(p)=0$ ise **(1)** ve **(2)** sağlanır. Dolayısıyla genelliği kaybetmeksizin, $H(p)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. p de e_{n+1}, $H(p)$ ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda olacak şekilde ve $e_1,\ldots,e_n$, A_H şekil operatörünün matrisini köşegenleştirecek şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_m\}$ bazını seçelim. M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.10) daki gibi olsun. Böylece (2.1.3) ve (2.1.21) den,

$$a_i a_j = K_{ij} - c + \sum_{r=n+2}^{m} \left(h_{ij}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} h_{ii}^r h_{jj}^r \,,\ 1 \leq i \neq j \leq n \qquad (2.4.61)$$

bulunur. (2.4.61) den $a_1 a_{i_j} = K_{1i_j} - c + \sum_{r=n+2}^{m} \left(h_{1i_j}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} h_{11}^r h_{i_j i_j}^r$, $1 \neq i_j$ olup,

$$\sum_{j=2}^{k} a_1 a_{i_j} = \sum_{j=2}^{k} K_{1i_j} - (k-1)c + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=2}^{k} \left(h_{1i_j}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=2}^{k} h_{11}^r h_{i_j i_j}^r$$

ve buradan

$$a_1\left(a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}\right) = Ric_{L_{1i_2\ldots i_k}}\left(e_1\right) - (k-1)c + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=2}^{k} \left(h_{1i_j}^r\right)^2 - \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=2}^{k} h_{11}^r h_{i_j i_j}^r, \quad 1 < i_2 < \ldots < i_k$$

elde edilir. Yine, (2.4.61) den

$$a_1\left(a_2 + \ldots + a_n\right) = Ric_{L_{12\ldots n}}\left(e_1\right) - (n-1)c + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(h_{1j}^r\right)^2$$

ve dolayısıyla

$$a_1\left(a_2 + \ldots + a_n\right) = \frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} \sum_{2 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} Ric_{L_{1i_2\ldots i_k}}\left(e_1\right) - (n-1)c + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(h_{1j}^r\right)^2 \tag{2.4.62}$$

bulunur. (2.2.8) den $(k-1)\theta_k(p) \le Ric_{L^k}(X)$ olup, $\frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} \sum_{2 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} (k-1)\theta_k(p) \le$ $\frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} \sum_{2 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} Ric_{L_{1i_2\ldots i_k}}\left(e_1\right)$ eşitsizliğinden $\frac{(n-k)!(k-2)!}{(n-2)!} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}(k-1)\theta_k(p)$ $\le \frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} \sum_{2 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} Ric_{L_{1i_2\ldots i_k}}\left(e_1\right)$ ve böylece $(n-1)\theta_k(p) \le \frac{1}{\binom{n-2}{k-2}} \sum_{2 \le i_2 < \ldots < i_k \le n} Ric_{L_{1i_2\ldots i_k}}\left(e_1\right)$

çıkar. Buna göre (2.4.62) den, $a_1\left(a_2 + \ldots + a_n\right) \ge (n-1)\theta_k(p) - (n-1)c + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(h_{1j}^r\right)^2$

veya

$$a_1\left(a_2+...+a_n\right)\geq(n-1)\left(\theta_k(p)-c\right) \tag{2.4.63}$$

elde edilir ki, eşitlik ancak ve ancak e_1 i içeren herhangi bir k-düzlem kesiti L^k için

$$Ric_{L^k}\left(e_1\right)=0 \text{ ve } h_{1j}^r=0,\ r=n+2,...,m,\ j=1,2,...,n \tag{2.4.64}$$

olması halinde gerçeklenir.

(2.4.63) eşitsizliğinden,

$$a_1\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\geq(n-1)\left(\theta_k(p)-c\right)+a_1^2\geq(n-1)\left(\theta_k(p)-c\right) \tag{2.4.65}$$

çıkar. Benzer eşitsizlikler, 1, $j\in\{2,...,n\}$ ile yer değiştirildiğinde de gerçeklenir. Böylece

$$a_j\left(a_1+...+a_n\right)\geq(n-1)\left(\theta_k(p)-c\right)+a_j^2,\ j=1,...,n \tag{2.4.66}$$

bulunur. O halde (2.4.66) dan,

$$A_H=\|H\|\begin{pmatrix} a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\frac{(n-1)}{n}\left(\theta_k(p)-c\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{(n-1)}{n}\left(\theta_k(p)-c\right)\end{pmatrix},$$

yani

$$A_H\geq\frac{(n-1)}{n}\left(\theta_k(p)-c\right)I \tag{2.4.67}$$

çıkar. Şimdi (2.4.67) nin eşitlik halinin bir $X \in T_p\left(M^n\right)$ birim vektörü için gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda A_H şekil operatörünün matrisinin n öz değerinden en az biri $\frac{(n-1)}{n}\left(\theta_k\left(p\right)-c\right)$ ye eşit olur. Genelliği kaybetmeksizin, a_1 in böyle bir öz değer olduğunu kabul edelim. Böylece

$$a_1\left(a_1+...+a_n\right)=\left(n-1\right)\left(\theta_k\left(p\right)-c\right) \tag{2.4.68}$$

olur. Diğer taraftan, (2.4.65) ve (2.4.68) den $a_1=0$ ve $\theta_k\left(p\right)=c$ elde edilir. Ayrıca (2.4.64) ile birlikte e_1 in N_p bağıl sıfır uzayında olması gerektiği çıkar. Böylece **(1)** ve **(2)** kanıtlanır. Üstelik bu, **(3)** ün bir kısmını da kanıtlar. **(3)** ün kalan kısmı açıktır. Şimdi p noktasında özdeş olarak $A_H=\frac{n-1}{n}\left(\theta_k-c\right)I$ ise o takdirde **(3)** ten dolayı, M^n nin p deki her tanjant vektörü N_p dedir. Dolayısıyla p, tümel jeodezik bir noktadır. Tersine, eğer p tümel jeodezik bir nokta ise p noktasında $\theta_k\left(p\right)=c$ ve $A_H=0$ olur ki bu, özdeş olarak $A_H=\frac{n-1}{n}\left(\theta_k-c\right)I$ olmasını gerektirir. Böylece **(4)** kanıtlanır. □

Uyarı 2.4.21.[12] Teorem 2.4.20 nin **(2)** ifadesindeki A_H için verilen eşitsizliğin kuvvetli olduğu açıktır.

Uyarı 2.4.12 de verilen hiper-elipsoidi göz önüne alalım. Herhangi bir k, $2 \le k \le n$, için herhangi bir k-düzlem kesiti L^k ve L^k daki herhangi bir X birim vektörü için p noktasındaki k-Ricci eğrilikleri,

$$Ric_{L^k}\left(X\right) \ge \left(k-1\right)\theta_k\left(p\right) := \frac{\left(k-1\right)a}{\left(1+a\left(a-1\right)x_1^2\right)^2} > 0 \tag{2.4.69}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca (2.4.69) dan ve A_H şekil operatörünün matrisinin (2.4.30) da verilen $\kappa_1,...,\kappa_n$ öz değerlerinden, $A_H > \left(\frac{n-1}{n}\right)\theta_k\left(p\right)I$ ve $a \to 0$ iken

$$\kappa_1 - \frac{n-1}{n}\theta_k(p) = \frac{a^2}{n\left(1+a(a-1)x_1^{\,2}\right)^3} \to 0$$

çıkar. Bu örnek, bize tekrar A_H nın **(1)** ifadesindeki yaklaşımının kuvvetli olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.20, keyfi dik boyutlu n-boyutlu bir Riemann manifoldunun bütün izometrik dahil edilmeleri için A_H şekil operatörünün matrisinin öz değerlerinin bir alt sınırını elde etmek için uygulanabilir. Örneğin; Teorem 2.4.20 den aşağıdaki sonuç çıkar:
Sonuç 2.4.22.[12] $\mathrm{x}: M^n \to E^m$, m-boyutlu Öklid uzayındaki keyfi dik boyuta sahip n-boyutlu birim kürenin açık bir parçasının herhangi bir izometrik dahil edilmesi olsun. O takdirde A_H şekil operatörünün matrisinin her öz değeri $\frac{n-1}{n}$ den daha büyüktür.

Teorem 2.4.23.[12] $\mathrm{x}: M^n \to R^m(c)$, M^n Riemann manifoldunun $R^m(c)$ Riemann uzay formu içine izometrik bir dahil edilmesi olsun. Bu durumda
(1) $H^2 = \langle H, H\rangle$, ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi ve $Ric(X)$, M^n nin X teki Ricci eğriliği olmak üzere,

$$H^2(p) \geq \frac{4}{n^2}\left\{Ric(X) - (n-1)c\right\} \tag{2.4.70}$$

eşitsizliği geçerlidir.
(2) $H(p)=0$ ise o takdirde p de bir X birim tanjant vektörünün (2.4.70) in eşitlik halini sağlaması için gerek ve yeter koşul X in N_p de bulunmasıdır.
(3) (2.4.70) teki eşitlik halinin p deki bütün birim tanjant vektörler için özdeş olarak sağlanması için gerek ve yeter koşul ya p nin tümel jeodezik bir nokta olması ya da $n=2$ ve p nin tümel umbilik bir nokta olmasıdır.
Kanıtlama: $X \in T_p\left(M^n\right)$, p de bir birim tanjant vektör olsun. $e_1,...,e_n$, p de M^n ye tanjant ve $e_1 = X$ olacak şekilde $R^m(c)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\}$ bazını seçelim. Bu durumda (2.4.5) ten,

$$
\begin{aligned}
n^2H^2 &= 2\tau + \sum_{r=n+1}^{m}\left\{\left(h_{11}^r\right)^2 + \left(h_{22}^r + \ldots + h_{nn}^r\right)^2 + 2\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2\right\} \\
&\quad -2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)c \\
&= 2\tau + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\left\{\left(h_{11}^r + \ldots + h_{nn}^r\right)^2 + \left(h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r\right)^2\right\} \\
&\quad + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)c
\end{aligned}
\tag{2.4.71}
$$

yazılabilir. Ayrıca (2.1.3) ve (2.1.21) den, $-2\sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2 - 2(n-1)c =$ $-(n-1)(n-2)c - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n}\left(h_{ij}^r\right)^2 + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2 - 2(n-1)c$ olup, $\frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r\right)^2 + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)c \ge -n(n-1)c +$ $2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n}\left(h_{ij}^r\right)^2 + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&2\tau + \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\left\{\left(h_{11}^r + \ldots + h_{nn}^r\right)^2 + \left(h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r\right)^2\right\} \\
&+2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2 - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n} h_{ii}^r h_{jj}^r - n(n-1)c \\
&\ge 2\tau + \frac{n^2H^2}{2} - 2\sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} + 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2 - 2(n-1)c
\end{aligned}
\tag{2.4.72}
$$

çıkar. Böylece (2.4.71) ve (2.4.72) den,

$$
n^2H^2 \ge 4\left[\tau - \sum_{2\le i<j\le n} K_{ij} + \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2 - (n-1)c\right]
\tag{2.4.73}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, (2.1.2) ve (2.1.21) den $Ric(e_1) = (n-1)c + \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\ne 1} h_{jj}^r h_{11}^r -$ $\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\ne 1}\left(h_{j1}^r\right)^2$ ve (2.2.1), (2.1.3) ve (2.1.21) den, $\tau = \frac{n(n-1)}{2}c + \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j} h_{ii}^r h_{jj}^r -$

$\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2$ dir. Buna göre $\tau-\sum_{2\le i<j\le n}K_{ij}+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2=(n-1)c+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}h_{11}^r h_{jj}^r$ bulunur. O halde $\tau-\sum_{2\le i<j\le n}K_{ij}+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(h_{1j}^r\right)^2\ge Ric(e_1)$ ve dolayısıyla (2.4.73) ten,

$$n^2H^2\ge 4\left(Ric(e_1)-(n-1)c\right) \tag{2.4.74}$$

çıkar. $e_1=X$, p de herhangi bir keyfi birim tanjant vektör olacak şekilde seçilebildiğinden **(1)** elde edilir. (2.4.74) ün eşitlik olması için gerek ve yeter koşul

$$h_{12}^r=\ldots=h_{1n}^r=0 \text{ ve } h_{11}^r=h_{22}^r+\ldots+h_{nn}^r,\ r=n+1,\ldots,m \tag{2.4.75}$$

olmasıdır. Gerçekten, (2.1.2) ve (2.1.21) den,

$$4\left(Ric(e_1)-(n-1)c\right)=4\left[\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}h_{jj}^r h_{11}^r-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}\left(h_{j1}^r\right)^2\right]$$

dir. Ayrıca (2.4.71), (2.2.1), (2.1.3) ve (2.1.21) den,

$$\begin{aligned}
n^2H^2 &= 4\tau+\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r-h_{22}^r-\ldots-h_{nn}^r\right)^2+4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2 \\
&\quad -4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n}h_{ii}^r h_{jj}^r-2n(n-1)c \\
&= 4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}h_{ii}^r h_{jj}^r+\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r-h_{22}^r-\ldots-h_{nn}^r\right)^2-4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\le i<j\le n}h_{ii}^r h_{jj}^r \\
&= 4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}h_{11}^r h_{jj}^r+\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r-h_{22}^r-\ldots-h_{nn}^r\right)^2
\end{aligned}$$

olup, (2.4.74) ün eşitlik halinden $\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r-h_{22}^r-\ldots-h_{nn}^r\right)^2=-4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}\left(h_{j1}^r\right)^2$ ve buradan

$h_{11}^r = h_{22}^r + ... + h_{nn}^r$ ve $h_{12}^r = ... = h_{1n}^r = 0$, $r = n+1,...,m$ elde edilir. Tersine, $h_{12}^r = ... = h_{1n}^r = 0$ ve $h_{11}^r = h_{22}^r + ... + h_{nn}^r$, $r = n+1,...,m$ olsun. O takdirde

$$n^2 H^2 = 4\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1} h_{11}^r h_{jj}^r + \sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r - h_{22}^r - ... - h_{nn}^r\right)^2 = 4\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r\right)^2$$

ve

$$4\left(Ric\left(e_1\right) - \left(n-1\right)c\right) = 4\left[\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1} h_{jj}^r h_{11}^r - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}\left(h_{j1}^r\right)^2\right] = 4\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^r\right)^2$$

olup, (2.4.74) ün eşitlik hali, yani $n^2 H^2 = 4\left(Ric\left(e_1\right) - \left(n-1\right)c\right)$ gösterilmiş olur.

$H\left(p\right) = 0$ ise $h_{11}^r = 0$, $r = n+1,...,m$ bulunur. Böylece (2.4.75) ten, $e_1 = X$, p de bağıl sıfır uzay N_p dedir. Tersine, $e_1 = X$ bağıl sıfır uzayda ise $H\left(p\right) = 0$ olduğundan (2.4.74) ün eşitlik hali sağlanır.

Şimdi (2.4.70) in eşitlik durumunun p deki bütün birim tanjant vektörler için özdeş olarak gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda herhangi bir $r = n+1,...,m$ için

$$h_{ij}^r = 0,\ i \neq j \tag{2.4.76}$$

$$h_{11}^r + ... + h_{nn}^r - 2h_{ii}^r = 0,\ i = 1,...,n \tag{2.4.77}$$

olur. (2.4.76) ve (2.4.77), ya p nin tümel jeodezik bir nokta ya da $n = 2$ ve p nin tümel umbilik bir nokta olduğunu ifade eder. Bunun tersi açıktır. Böylece **(3)** durumu da çıkar. □

Teorem 2.4.23, keyfi dik boyutlu bazı altmanifoldlar için ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesinin kuvvetli tahminlerini elde etmek için uygulanabilir. Örneğin;

Teorem 2.4.23 ten aşağıdaki sonuç ifade edilebilir:

Sonuç 2.4.24.[12] $x : M^n \to E^m$, keyfi dik boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun E^m Öklid uzayına izometrik bir dahil edilmesi olsun. O takdirde

$$H^2(p) \geq \left(\frac{4}{n^2}\right) \max\left\{ Ric(X) \middle| X \in T_p\left(M^n\right), \|X\| = 1 \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.4.1.3. Chen Eşitliğini Sağlayan Bazı Özel Altmanifoldlar

B.Y. Chen [16], üst uzayın Öklid uzayı olduğu durumda, M^n nin $\inf K$ ve τ içsel skaler değişmezleri ile E^m de M^n nin H ortalama eğrilik vektörünün uzunluğu olan dışsal skaler değişmez $\|H\|$ arasında, Yardımcı Teorem 2.4.13 te verilen temel eşitsizliğin özel bir durumu olan

$$\inf K \geq \frac{1}{2}\left\{ 2\tau - \frac{n^2(n-2)}{(n-1)} H^2 \right\} \tag{2.4.78}$$

eşitsizliğini kanıtladı.

Şimdi temel eşitsizliğin eşitlik olması durumunda, altmanifoldun Einstein, konformal düz ve yarı-simetrik olma gibi belli başlı Riemann eğrilik koşullarından birini sağladığı ilave kabul altında, E^m nin M^n altmanifoldlarını inceleyeceğiz. Teorem 2.4.25, Teorem 2.4.26, Sonuç 2.4.27 ve Teorem 2.4.28 de M^n, E^m nin (2.4.78) deki eşitliği sağlayan bir altmanifoldu olduğundan; $\{e_1, ..., e_n\}$, M^n ye tanjant ve $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$, M^n ye normal olacak şekilde, E^m de uygun bir ortonormal $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_m\}$ çatısına göre, M^n nin şekil operatörlerinin matrislerini (2.4.32) ve (2.4.33) teki gibi alacağız.

Daha sonraki hesaplar için $K_{rs} = K(e_r \wedge e_s)$ şeklinde gösterilmek üzere, (2.1.3) ve (2.1.21) den $i, j > 2$ olmak üzere ,

$$K_{12}=\sum_{r=n+1}^{m}h_{11}^{r}h_{22}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{12}^{r}\right)^{2}=ab-\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right),$$

$$K_{1j}=\sum_{r=n+1}^{m}h_{11}^{r}h_{jj}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{1j}^{r}\right)^{2}=a\mu\,,$$

$$K_{2j}=\sum_{r=n+1}^{m}h_{22}^{r}h_{jj}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{2j}^{r}\right)^{2}=b\mu\,,$$

$$K_{ij}=\sum_{r=n+1}^{m}h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{ij}^{r}\right)^{2}=\mu^{2}$$

çıkar. Bundan başka, eğer i, j ve k ikişer ikişer farklı ise $R\left(e_i,e_j\right)e_k=0$ dır.

Teorem 2.4.25. [16] M^n, $n\geq 3$, E^m nin Chen eğitliğini sağlayan bir altmanifoldu olsun. O takdirde M^n nin Einstein uzayı olması için gerek ve yeter koşul M^n nin E^m de tümel jeodezik bir n-düzlem olmasıdır.

Kanıtlama: M^n, $n\geq 3$, manifoldunun Ricci eğrilikleri (2.1.2) ve (2.1.21) den,

$$Ric\left(e_1,e_1\right)=\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 1}\left[h_{11}^{r}h_{jj}^{r}-\left(h_{1j}^{r}\right)^{2}\right]=\left(n-2\right)a\mu+K_{12}\,,$$

$$Ric\left(e_2,e_2\right)=\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq 2}\left[h_{22}^{r}h_{jj}^{r}-\left(h_{2j}^{r}\right)^{2}\right]=\left(n-2\right)b\mu+K_{12}\,,$$

$\forall i\geq 3$,

$$Ric\left(e_i,e_i\right)=\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{j\neq i}\left[h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-\left(h_{ij}^{r}\right)^{2}\right]=\left(n-2\right)\mu^{2}\,,$$

şeklinde bulunur. Ayrıca $i\neq j$ için aşağıdakini yazabiliriz:

$$Ric\left(e_i,e_j\right)=0\,.$$

M^n nin Einstein uzayı olduğunu kabul edelim. O takdirde $Ric\left(e_1,e_1\right)=Ric\left(e_2,e_2\right)$ den, $\mu=0$ veya a=b olmalıdır. $\mu=0$ durumunda, $Ric\left(e_1,e_1\right)=Ric\left(e_3,e_3\right)=0$ dan, $K_{12}=0$ çıkar. Böylece $K_{12}=ab-\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)$ eşitliğinden $ab=\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)$

olup, bu bağıntıda $b=\mu-a$ yazılacak olursa, $ab=a(\mu-a)=\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)$ eşitliklerinden $-a^{2}=\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)$ ve buradan $a=0,\ b=0$, $h_{11}^{r}=0$, $h_{12}^{r}=0$, $r=n+2,...,m$ elde edilir. Dolayısıyla M^n nin tümel jeodezik olduğu gösterilmiş olur. $a=b$ durumunda $\mu=a+b=2a$ ve $Ric(e_1,e_1)=Ric(e_3,e_3)$ ten, $(n-2)a\mu+K_{12}=$ $(n-2)\mu^{2}$ olup $K_{12}=2a^{2}(n-2)$ bulunur. Diğer taraftan $K_{12}=a^{2}-\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)$ olduğundan, $(2n-5)a^{2}+\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)=0$ çıkar. $n\geq 3$ olduğundan, bu eşitlik ancak ve ancak $a=0$, $h_{11}^{r}=0$, $h_{12}^{r}=0$, $r=n+2,...,m$ olması halinde sağlanır. Bu durumda $b=0,\ \mu=0$ dır. O halde M^n nin E^m de tümel jeodezik olduğu elde edilir. Tersine M^n, E^m de tümel jeodezik bir n-düzlem olsun. O takdirde düzlemin asal eğrilikleri sıfır olduğundan, şekil operatörlerinin matrislerinin tüm bileşenleri sıfır olur. Böylece tüm Ricci eğrilikleri sıfır bulunur ve M^n nin Einstein uzayı olduğu gösterilmiş olur. □

Teorem 2.4.26.[16] M^n, $n>3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M^n nin konformal düz olması için gerek ve yeter koşul $\inf K=0$ olmasıdır.

Kanıtlama: M^n, $n>3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan konformal düz bir altmanifoldu olsun. O takdirde $\forall X,Y,Z,W\in T_p(M^n)$ için $C(X,Y;Z,W)=0$ dır. Buna göre (2.2.1), (2.1.2) de dikkate alınarak, (2.1.29), (2.1.3), (2.1.2) ve (2.1.21) den,

$$\begin{aligned}0=C(e_1,e_2;e_2,e_1)&=K_{12}-\frac{1}{n-2}\left\{(n-2)a\mu+K_{12}+(n-2)b\mu+K_{12}\right\}+\\&\quad\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{2K_{12}+(n-2)(n-1)\mu^{2}\right\}\\&=\frac{(n-3)}{(n-1)}K_{12}\end{aligned}$$

bulunur. O halde $n>3$ olduğundan, $K_{12}=0$ çıkar. Yardımcı Teorem 2.4.13 ten, M^n

nin Chen eşitliğini sağlaması durumunda, $\inf K$ nın K_{12} ye eşit olduğunu biliyoruz. Böylece $\inf K = 0$ elde edilir. Tersine $\inf K = 0$ olsun. Bu durumda $K_{12} = 0$ dır. C_{1221}, C_{1331}, C_{2332}, $C_{3443}, \ldots$ hesaplandığında hep K_{12} nin bir sabit katı bulunacağından, M^n konformal düzdür. □

Sonuç 2.4.27.[16] M^n, $n > 3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olsun. O takdirde M^n nin konharmonik düz olması için gerek ve yeter koşul M^n nin E^m de bir n-düzlem olmasıdır.

Kanıtlama: M^n, $n > 3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan konharmonik düz bir altmanifoldu olsun. Bu durumda Teorem 2.3.2 den, M^n nin konformal düz ve sıfır skaler eğrilikli bir altmanifold olduğunu söyleyebiliriz. E^m nin Chen eşitliğini sağlayan M^n altmanifoldu için (2.2.1), (2.1.2) de dikkate alınarak, (2.1.3) ve (2.1.21) den, $2\tau = 2K_{12} + (n-2)(n-1)\mu^2$ bulunur. $2\tau = 0$ olduğundan, $-2K_{12} = (n-2)(n-1)\mu^2$ çıkar. M^n, $n > 3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan konformal düz bir altmanifoldu olduğundan, Teorem 2.4.26 ve Yardımcı Teorem 2.4.13 göz önüne alındığında, $K_{12} = 0$ elde edilir. O halde $\mu = 0$ bulunur. Yine, $0 = K_{12} = ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2 + \left(h_{12}^r\right)^2\right)$ olduğundan, $ab = \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2 + \left(h_{12}^r\right)^2\right)$ yazılabilir. Buna göre $a(\mu - a) = -a^2 = \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2 + \left(h_{12}^r\right)^2\right)$ olup, $a = 0$, $h_{11}^r = 0$, $h_{12}^r = 0$, $r = n+2, \ldots, m$ ve dolayısıyla $b = 0$ bulunur ki, böylece M^n nin E^m de tümel jeodezik olduğu gösterilmiş olur. Tersine M^n, E^m de Chen eşitliğini sağlayan bir n-düzlem olsun. O takdirde düzlemin asal eğrilikleri sıfır olduğundan, şekil operatörlerinin matrislerinin tüm bileşenleri sıfır olur. Buna göre $K_{12} = 0$ ve $2\tau = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 2.4.26 nın kanıtında da ifade ettiğimiz gibi, C_{1221}, C_{1331}, C_{2332}, $C_{3443}, \ldots$ hesaplandığında hep K_{12} nin bir sabit katı bulunacağından, M^n konformal düzdür. M^n konformal düz ve sıfır skaler eğrilikli olduğundan, Teorem 2.3.2 den M^n, konharmonik düzdür. □

Yerel olarak simetrik manifoldlar, eğrilik tensör alanının paralel oluşu, yani $\nabla R = 0$ ile karakterize edilir. Daha genel olarak, yarı-simetrik bir M^n manifoldu ise M^n nin her X,Y,U,V,W tanjant vektör alanı için

$$\begin{aligned}\left(R(X,Y).R\right)(U,V)W &:= R(X,Y)\left(R(U,V)W\right)-R\left(R(X,Y)U,V\right)W\\ &\quad -R\left(U,R(X,Y)V\right)W-R(U,V)\left(R(X,Y)W\right)=0\end{aligned}$$

anlamına gelen $R.R=0$ koşulu ile karakterize edilir.

Teorem 2.4.28.[16] M^n, $n\geq 3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olsun. O takdirde M^n nin yarı-simetrik olması için gerek ve yeter koşul $a\mu=0$ veya $b\mu=K_{12}$ ve $b\mu=0$ veya $a\mu=K_{12}$ olmasıdır.

Kanıtlama: M^n, $n\geq 3$, E^m nin Chen eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olduğundan, kolay bir hesaplamayla, (2.1.21) den,

(1) $\left(R(e_1,e_3).R\right)(e_2,e_3)e_1=a\mu\left(b\mu-K_{12}\right)e_2$ ve

(2) $\left(R(e_2,e_3).R\right)(e_1,e_3)e_2=b\mu\left(a\mu-K_{12}\right)e_1$

olduğu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}\left(R(e_1,e_3).R\right)(e_2,e_3)e_1 &= R(e_1,e_3)\left(R(e_2,e_3)e_1\right)-R\left(R(e_1,e_3)e_2,e_3\right)e_1\\ &\quad -R\left(e_2,R(e_1,e_3)e_3\right)e_1-R(e_2,e_3)\left(R(e_1,e_3)e_1\right)\end{aligned}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}R(e_2,e_3)e_1 &= \left\langle R(e_2,e_3)e_1,e_1\right\rangle e_1+\ldots+\left\langle R(e_2,e_3)e_1,e_n\right\rangle e_n\\ &=\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{21}^r-h_{21}^r h_{31}^r\right)\right)e_1+\ldots+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{2n}^r-h_{21}^r h_{3n}^r\right)\right)e_n\\ &=0\end{aligned}$$

bağıntılarından,

$$R(e_1,e_3)\left(R(e_2,e_3)e_1\right)=0\,,$$

$$
\begin{aligned}
R(e_1,e_3)e_2 &= \langle R(e_1,e_3)e_2,e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle R(e_1,e_3)e_2,e_n\rangle e_n \\
&= \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^{r}h_{11}^{r} - h_{12}^{r}h_{31}^{r}\right)\right)e_1 + \ldots + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^{r}h_{1n}^{r} - h_{12}^{r}h_{3n}^{r}\right)\right)e_n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bağıntılarından da

$$
R\left(R(e_1,e_3)e_2,e_3\right)e_1 = 0
$$

çıkar. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
R(e_1,e_3)e_3 &= \langle R(e_1,e_3)e_3,e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle R(e_1,e_3)e_3,e_n\rangle e_n \\
&= \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{33}^{r}h_{11}^{r} - h_{13}^{r}h_{31}^{r}\right)\right)e_1 + \ldots + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{33}^{r}h_{1n}^{r} - h_{13}^{r}h_{3n}^{r}\right)\right)e_n \\
&= \mu a e_1
\end{aligned}
$$

bulunur ki, böylece

$$
R\left(e_2,R(e_1,e_3)e_3\right)e_1 = R(e_2,\mu a e_1)e_1 = \mu a R(e_2,e_1)e_1
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
R(e_2,e_1)e_1 &= \langle R(e_2,e_1)e_1,e_1\rangle e_1 + \langle R(e_2,e_1)e_1,e_2\rangle e_2 + \ldots + \langle R(e_2,e_1)e_1,e_n\rangle e_n \\
&= \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^{r}h_{21}^{r} - h_{21}^{r}h_{11}^{r}\right)\right)e_1 + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^{r}h_{22}^{r} - h_{21}^{r}h_{12}^{r}\right)\right)e_2 \\
&\quad + \ldots + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{11}^{r}h_{2n}^{r} - h_{21}^{r}h_{1n}^{r}\right)\right)e_n \\
&= \left(ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^2 + \left(h_{12}^{r}\right)^2\right)\right)e_2
\end{aligned}
$$

bağıntılarından,

$$R\left(e_2,R\left(e_1,e_3\right)e_3\right)e_1=\mu a\left(ab-\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2+\left(h_{12}^r\right)^2\right)\right)e_2$$

elde edilir. Yine,

$$\begin{aligned}R\left(e_1,e_3\right)e_1&=\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_1,e_1\right\rangle e_1+\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_1,e_2\right\rangle e_2+\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_1,e_3\right\rangle e_3\\&\quad+\ldots+\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_1,e_n\right\rangle e_n\\&=\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{11}^r-h_{11}^r h_{31}^r\right)\right)e_1+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{12}^r-h_{11}^r h_{32}^r\right)\right)e_2\\&\quad+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{13}^r-h_{11}^r h_{33}^r\right)\right)e_3+\ldots+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{31}^r h_{1n}^r-h_{11}^r h_{3n}^r\right)\right)e_n\\&=-a\mu e_3\end{aligned}$$

bulunur ki, böylece

$$R\left(e_2,e_3\right)\left(R\left(e_1,e_3\right)e_1\right)=R\left(e_2,e_3\right)\left(-a\mu e_3\right)=-a\mu R\left(e_2,e_3\right)e_3$$

olup,

$$\begin{aligned}R\left(e_2,e_3\right)e_3&=\left\langle R\left(e_2,e_3\right)e_3,e_1\right\rangle e_1+\left\langle R\left(e_2,e_3\right)e_3,e_2\right\rangle e_2+\ldots+\left\langle R\left(e_2,e_3\right)e_3,e_n\right\rangle e_n\\&=\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{33}^r h_{21}^r-h_{23}^r h_{31}^r\right)\right)e_1+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{33}^r h_{22}^r-h_{23}^r h_{32}^r\right)\right)e_2\\&\quad+\ldots+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{33}^r h_{2n}^r-h_{23}^r h_{3n}^r\right)\right)e_n\\&=\mu b e_2\end{aligned}$$

bağıntılarından,

$$R\left(e_2,e_3\right)\left(R\left(e_1,e_3\right)e_1\right)=-a\mu\left(\mu b\right)e_2$$

çıkar. O halde

$$\left(R\left(e_1,e_3\right).R\right)\left(e_2,e_3\right)e_1 = -\mu a\left(ab - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2+\left(h_{12}^r\right)^2\right)\right)e_2 + a\mu\left(\mu b\right)e_2$$
$$= a\mu\left(b\mu - K_{12}\right)e_2$$

gösterilmiş olur. Diğer taraftan,

$$\left(R\left(e_2,e_3\right).R\right)\left(e_1,e_3\right)e_2 = R\left(e_2,e_3\right)\left(R\left(e_1,e_3\right)e_2\right) - R\left(R\left(e_2,e_3\right)e_1,e_3\right)e_2$$
$$-R\left(e_1,R\left(e_2,e_3\right)e_3\right)e_2 - R\left(e_1,e_3\right)\left(R\left(e_2,e_3\right)e_2\right)$$

dir. Buna göre

$$R\left(e_2,e_3\right)\left(R\left(e_1,e_3\right)e_2\right)=0,$$
$$R\left(R\left(e_2,e_3\right)e_1,e_3\right)e_2=0,$$
$$R\left(e_1,R\left(e_2,e_3\right)e_3\right)e_2 = R\left(e_1,\mu b e_2\right)e_2 = \mu b R\left(e_1,e_2\right)e_2$$

olup,

$$R\left(e_1,e_2\right)e_2 = \left\langle R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_1\right\rangle e_1 + \ldots + \left\langle R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_n\right\rangle e_n$$
$$= \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{22}^r h_{11}^r - h_{12}^r h_{21}^r\right)\right)e_1 + \ldots + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{22}^r h_{1n}^r - h_{12}^r h_{2n}^r\right)\right)e_n$$
$$= \left(ba - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2+\left(h_{12}^r\right)^2\right)\right)e_1$$

bağıntılarından,

$$R\left(e_1,R\left(e_2,e_3\right)e_3\right)e_2 = \mu b\left(ba - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2+\left(h_{12}^r\right)^2\right)\right)e_1$$

bulunur. Ayrıca

$$R(e_2,e_3)e_2 = \langle R(e_2,e_3)e_2,e_1\rangle e_1 + \langle R(e_2,e_3)e_2,e_2\rangle e_2 + \langle R(e_2,e_3)e_2,e_3\rangle e_3$$
$$+\ldots+\langle R(e_2,e_3)e_2,e_n\rangle e_n$$
$$=\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^r h_{21}^r - h_{22}^r h_{31}^r\right)\right)e_1 + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^r h_{22}^r - h_{22}^r h_{32}^r\right)\right)e_2$$
$$+\left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^r h_{23}^r - h_{22}^r h_{33}^r\right)\right)e_3 + \ldots + \left(\sum_{r=n+1}^{m}\left(h_{32}^r h_{2n}^r - h_{22}^r h_{3n}^r\right)\right)e_n$$
$$= -b\mu e_3$$

bağıntılarından,

$$R(e_1,e_3)\left(R(e_2,e_3)e_2\right) = R(e_1,e_3)(-b\mu e_3) = -b\mu R(e_1,e_3)e_3 = -b\mu(\mu a)e_1$$

elde edilir ki, bu sayede

$$\left(R(e_2,e_3).R\right)(e_1,e_3)e_2 = -\mu b\left(ba - \sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^r\right)^2 + \left(h_{12}^r\right)^2\right)\right)e_1 + b\mu(\mu a)e_1$$
$$= b\mu(a\mu - K_{12})e_1$$

gösterilmiş olur.

$\mu = 0$ ise kanıt açıktır. Dolayısıyla $\mu \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $K_{12} = 0$ ise **(1)** den $ab = 0$ olduğu elde edilir. $a = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $K_{12} = 0$ dan, $h_{11}^r = h_{12}^r = 0$, $r = n+2,\ldots,m$ olduğu çıkar. Dolayısıyla A_{n+1} dışındaki bütün şekil operatörlerinin matrisleri sıfır olur. Eğer $K_{12} \neq 0$ ise o takdirde **(1)** ve **(2)** den $a = b$ olduğu elde edilir. Bunu **(1)** de değerlendirecek olursak,

$$a\mu\left(b\mu-K_{12}\right)=2b^{2}\left(2b^{2}-\left(b^{2}-\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)\right)\right)$$
$$=2b^{2}\left(b^{2}+\sum_{r=n+2}^{m}\left(\left(h_{11}^{r}\right)^{2}+\left(h_{12}^{r}\right)^{2}\right)\right)=0,$$

dolayısıyla $b=0$ elde ederiz ki, bu $\mu\neq 0$ oluşu ile çelişir. Tersi açıktır. □

2.4.2. Keyfi Bir Riemann Manifoldunun Keyfi Riemann Altmanifoldları İçin Genel Bir Optimal Eşitsizlik

Sabit kesit eğriliğine sahip Riemann manifoldlarının altmanifoldları için genel bir optimal eşitsizlik, [10] da elde edilmiştir. Şimdi bu eşitsizliğin, keyfi bir Riemann manifoldunun keyfi Riemann altmanifoldları için genel bir optimal eşitsizliğe genişletilmesini inceleyeceğiz. Genel eşitsizlik; δ-değişmezini, Riemann altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesini ve üst Riemann manifoldunun (altmanifold üzerindeki bir noktada altmanifoldun tanjant uzayının düzlem kesitlerine kısıtlanan) kesit eğrilik fonksiyonunun maksimumunu içerir. Daha açık olarak, bir $\tilde{M}^{m}$ Riemann manifoldunun herhangi bir M^{n} altmanifoldu için, $\max\tilde{K}(p)$, p de M^{n} nin $T_{p}\left(M^{n}\right)$ tanjant uzayının 2-düzlem kesitlerine kısıtlanan $\tilde{M}^{m}$ nin kesit eğrilik fonksiyonunun maksimumunu göstermek üzere, herhangi bir $\left(n_{1},...,n_{k}\right)\in S(n)$ k-lısı için aşağıdaki genel optimal eşitsizlik sağlanır:

$$\delta\left(n_{1},...,n_{k}\right)\leq c\left(n_{1},...,n_{k}\right)H^{2}+b\left(n_{1},...,n_{k}\right)\max\tilde{K}\,. \tag{2.4.79}$$

Teorem 2.4.29.[15] M^{n}, keyfi bir $\tilde{M}^{m}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. O takdirde $\max\tilde{K}(p)$, p de M^{n} nin $T_{p}\left(M^{n}\right)$ tanjant uzayının 2-düzlem kesitlerine kısıtlanan $\tilde{M}^{m}$ nin kesit eğrilik fonksiyonunun maksimumunu göstermek üzere, her bir $p\in M^{n}$ noktası ve her bir $\left(n_{1},...,n_{k}\right)\in S(n)$ k-lısı için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\delta\left(n_{1},...,n_{k}\right)(p)\leq c\left(n_{1},...,n_{k}\right)H^{2}(p)+b\left(n_{1},...,n_{k}\right)\max\tilde{K}(p)\,. \tag{2.4.80}$$

(2.4.80) eşitsizliğinin eşitlik durumunun bir $p\in M^{n}$ noktasında gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun gerçeklenmesidir:

(a) p noktasında $\tilde{M}^m$ de M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.40) ve (2.4.41) deki gibi olacak şekilde, p de ortonormal bir $\{e_1,...,e_m\}$ bazının var olmasıdır.

(b) $T_p\left(M^n\right)$ nin p de

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right)=\tau-\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right) \tag{2.4.81}$$

eşitliğini sağlayan herhangi ikişer ikişer ortogonal k altuzayı $L_1,...,L_k$ için $\Delta_1=\{1,...,n_1\},\ldots,\Delta_k=\{n_1+...+n_{k-1}+1,...,n_1+...+n_k\}$ olmak üzere, $i\neq j$ olacak şekilde herhangi bir $\alpha_i\in\Delta_i$, $\alpha_j\in\Delta_j$ için

$$\tilde{K}\left(e_{\alpha_i},e_{\alpha_j}\right)=\max\tilde{K}\left(p\right) \tag{2.4.82}$$

olmasıdır.

Kanıtlama: $k=0$ olduğunda, (2.4.79) eşitsizliği [17] de bulunabilir. M^n, m-boyutlu bir $\tilde{M}^m$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu ve p, M^n de bir nokta olsun. Bu durumda $\|h\|^2$, h ikinci temel formunun normunun karesi ve $\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right)$, $\tilde{M}^m$ üst uzayının $T_p\left(M^n\right)\subset T_p\left(\tilde{M}^m\right)$ altuzayına, yani $T_p\left(M^n\right)$ nin ortonormal bir $\{e_1,...,e_n\}$ bazı için

$$\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right)=\sum_{i<j}\tilde{K}\left(e_i,e_j\right)$$

ye karşılık gelen skaler eğriliği olmak üzere, (2.2.1) ve (2.1.15) ten, p de

$$\tau\left(p\right)=\sum_{i<j}\tilde{K}\left(e_i,e_j\right)+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}h_{ii}^{r}h_{jj}^{r}-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^{r}\right)^2$$

$$= \sum_{i<j} \tilde{K}\left(e_i, e_j\right) + \frac{1}{2}\left[\sum_{r=n+1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^r\right)^2 - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^r\right)^2\right] - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}\left(h_{ij}^r\right)^2$$

$$= \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) + \frac{1}{2}n^2H^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^r\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i\neq j}\left(h_{ij}^r\right)^2$$

$$= \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) + \frac{1}{2}n^2H^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2\right)$$

ve böylece

$$2\tau\left(p\right) = n^2H^2 - \left\|h\right\|^2 + 2\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) \tag{2.4.83}$$

çıkar.

$$\eta = 2\tau\left(p\right) - \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{n+k-\sum n_j}H^2 - 2\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) \tag{2.4.84}$$

alalım. Bu durumda (2.4.83) ve (2.4.84) ten, $\gamma = n+k-\sum n_j$ olmak üzere, (2.4.43) elde edilir.

p de her bir $\alpha_i \in \Delta_i$ için $e_{\alpha_i} \in L_i$ olacak şekilde ortonormal bir $\left\{e_1,...,e_m\right\}$ bazını seçelim. Bundan başka, e_{n+1} normal vektörünü p de ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda seçelim. (p de ortalama eğrilik vektörü sıfır olduğunda, e_{n+1} i, p deki herhangi bir birim normal vektör seçebiliriz.). O takdirde $1 \le i, j \le n$ için, $a_i = h_{ii}^{n+1}$ olmak üzere, (2.4.43) ten (2.4.44) bulunur. (2.4.45) ten, (2.4.44) ün (2.4.46) ya eşdeğer olduğu çıkar. Yardımcı Teorem 2.4.1 i, (2.4.46) ya uygulamakla (2.4.47) elde edilir.

Diğer taraftan, (2.2.2) ve (2.1.15); $\tilde{\tau}\left(L_j\right)$, $\tilde{M}^m$ nin $L_j \subset T_p\left(M^n\right)$ ye karşılık gelen skaler eğriliği olmak üzere, her bir $j \in \left\{1,...,k\right\}$ için

$$\tau\left(L_j\right) = \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^r h_{\beta_j\beta_j}^r - \left(h_{\alpha_j\beta_j}^r\right)^2\right) + \tilde{\tau}\left(L_j\right),\ \alpha_j, \beta_j \in \Delta_j \tag{2.4.85}$$

eşitliğini gerçekler. Şöyle ki;

$$K\left(e_{\alpha_j}, e_{\beta_j}\right) = \tilde{K}\left(e_{\alpha_j}, e_{\beta_j}\right) + \sum_{r=n+1}^{m} h^r_{\alpha_j\alpha_j} h^r_{\beta_j\beta_j} - \sum_{r=n+1}^{m} \left(h^r_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$

olup,

$$\sum_{\alpha_j<\beta_j} K\left(e_{\alpha_j}, e_{\beta_j}\right) = \sum_{\alpha_j<\beta_j} \tilde{K}\left(e_{\alpha_j}, e_{\beta_j}\right) + \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{\alpha_j<\beta_j} h^r_{\alpha_j\alpha_j} h^r_{\beta_j\beta_j} - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{\alpha_j<\beta_j} \left(h^r_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$

eşitliğinden (2.4.85) bulunur. $\Delta = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_k$ ve $\Delta^2 = \left(\Delta_1 \times \Delta_1\right) \cup ... \cup \left(\Delta_k \times \Delta_k\right)$ alalım. (2.4.85) ten,

$$\sum_{j=1}^{k} \tau\left(L_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} h^{n+1}_{\alpha_j\alpha_j} h^{n+1}_{\beta_j\beta_j} + \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} h^r_{\alpha_j\alpha_j} h^r_{\beta_j\beta_j} - \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} \left(h^{n+1}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$
$$- \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} \left(h^r_{\alpha_j\beta_j}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

olup, (2.4.47) den,

$$\sum_{j=1}^{k} \tau\left(L_j\right) \geq \frac{\eta}{2} + \sum_{i<j} \left(h^{n+1}_{ij}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \left(h^r_{ij}\right)^2$$
$$+ \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} h^r_{\alpha_j\alpha_j} h^r_{\beta_j\beta_j} - \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} \left(h^{n+1}_{\alpha_j\beta_j}\right)^2$$
$$- \sum_{r=n+2}^{m} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha_j<\beta_j} \left(h^r_{\alpha_j\beta_j}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

çıkar. Buna göre

$$\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)\geq\frac{\eta}{2}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{n+1}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h_{\alpha\beta}^{n+1}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}\left(h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha\notin\Delta}\left(h_{\alpha\alpha}^{r}\right)^2$$
$$+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h_{\alpha\beta}^{r}\right)^2$$
$$+\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}h_{\beta_j\beta_j}^{r}-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{n+1}\right)^2$$
$$-\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha_j<\beta_j}\left(h_{\alpha_j\beta_j}^{r}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

eşitsizliğinde, (2.4.84) kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)&\geq\frac{\eta}{2}+\frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{(\alpha,\beta)\notin\Delta^2;\alpha\neq\beta}\left(h_{\alpha\beta}^{r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{\alpha_j\in\Delta_j}h_{\alpha_j\alpha_j}^{r}\right)^2\right)\\&+\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha\notin\Delta}\left(h_{\alpha\alpha}^{r}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)\\&\geq\frac{\eta}{2}+\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)\\&=\tau\left(p\right)-\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)}H^2-\left(\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right)-\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)\right)\end{aligned}\qquad(2.4.86)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.4.86) dan,

$$\tau-\sum_{j=1}^{k}\tau\left(L_j\right)\leq\frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)}H^2+\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right)-\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)\qquad(2.4.87)$$

çıkar. (2.4.86), (2.2.3) ve (2.2.4); $\tilde{L}_1,...,\tilde{L}_k$, $boy\,\tilde{L}_j=n_j$, $j=1,...,k$ olacak şekilde $T_p\left(M^n\right)$ nin ikişer ikişer ortogonal bütün k altuzayları üzerinden değişecek şekilde,

$$\tilde{\delta}^M(n_1,...,n_k) := \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \inf\left\{\tilde{\tau}\left(\tilde{L}_1\right) + ... + \tilde{\tau}\left(\tilde{L}_k\right)\right\} \tag{2.4.88}$$

olmak üzere,

$$\delta(n_1,...,n_k) \leq \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \tilde{\delta}^M(n_1,...,n_k) \tag{2.4.89}$$

eşitsizliğini gerçekler. Gerçekten, (2.4.86) dan,

$$\inf\left\{\tau(L_1) + ... + \tau(L_k)\right\} \geq \tau - \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 - \left(\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)\right)$$

bulunur. O halde (2.2.3) ve (2.2.4) ten,

$$\delta(n_1,...,n_k) \leq \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

çıkar.

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &: M^n \to \tilde{M}^m \\ \mathrm{x}_* &: T_p\left(M^n\right) \to T_{\mathrm{x}(p)}\left(\tilde{M}^m\right) \\ & \quad e_i \mapsto \mathrm{x}_*\left(e_i\right) = \tilde{e}_i \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa, $\mathrm{x}_*\big|_{L_j} = \tilde{L}_j$ ve $\inf\left\{\tilde{\tau}\left(\tilde{L}_1\right) + ... + \tilde{\tau}\left(\tilde{L}_k\right)\right\} \leq \tilde{\tau}\left(L_1\right) + ... + \tilde{\tau}\left(L_k\right)$ yazabiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} \delta(n_1,...,n_k) &\leq \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right) \\ &\leq \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \inf\left\{\tilde{\tau}\left(\tilde{L}_1\right) + ... + \tilde{\tau}\left(\tilde{L}_k\right)\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden ve (2.4.88) den (2.4.89) elde edilir. $\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right)-\sum_{j=1}^{k}\tilde{\tau}\left(L_j\right)$ ifadesinde bulunan 2-düzlem kesitlerinin kesit eğriliklerinin sayısı $\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j\left(n_j-1\right)}{2}$ dir. Bu kesit eğriliklerinin her biri $\max\tilde{K}(p)$ den küçük veya eşit olduğundan, (2.4.86), (2.2.3) ve (2.2.4) ten,

$$\delta\left(n_1,...,n_k\right)(p)\leq c\left(n_1,...,n_k\right)H^2(p)+b\left(n_1,...,n_k\right)\max\tilde{K}(p)$$

eşitsizliği, yani (2.4.80) bulunur.

(2.4.80) in eşitlik halinin p noktasında gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki iki koşulun gerçeklenmesidir:

(i) (2.4.47) ve (2.4.86) daki eşitsizlikler eşitlik olur,

(ii) p de (2.4.81) i sağlayan $T_p\left(M^n\right)$ nin herhangi ikişer ikişer ortogonal k altuzayı $L_1,...,L_k$ için $i\neq j$ olmak üzere, herhangi bir $\alpha_i\in\Delta_i$, $\alpha_j\in\Delta_j$ için (2.4.82) çıkar.

Yardımcı Teorem 2.4.1, (2.4.47) ve (2.4.86) dan, **(i)** koşulunun gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul p de $\tilde{M}^m$ de M^n nin şekil operatörlerinin matrisleri (2.4.40) ve (2.4.41) koşullarını sağlayacak şekilde, ortonormal bir $\{e_1,...,e_m\}$ bazının var olmasıdır. Gerçekten, (2.4.47) nin eşitlik olması halinde Yardımcı Teorem 2.4.1 den $\overline{a}_1+\overline{a}_2=\overline{a}_3=...=\overline{a}_{\gamma+1}$ ve dolayısıyla (2.4.45) ten $a_1+a_2+...+a_{n_1}=a_{n_1+1}+...+a_{n_1+n_2}=$ $...=a_{n_1+...+n_{k-1}+1}+...+a_{n_1+...+n_k}=a_{n_1+...+n_k+1}=...=a_n=\mu_{n+1}$ olduğu elde edilir. Buradan $r=n+1$ için $\dot{I}z\left(A_1^{n+1}\right)=...=\dot{I}z\left(A_k^{n+1}\right)=\mu_{n+1}$ ve $a_{n_1+...+n_k+1}=...=a_n=\mu_{n+1}$ bulunur. Diğer taraftan, (2.4.86) nın eşitlik olması halinde de (2.4.50) çıkar ve böylece **(a)** elde edilir. Yine, (2.4.86) nın eşitlik halinden, (2.4.81) eşitliğini sağlayan $T_p\left(M^n\right)$ nin herhangi ikisi ortogonal k altuzayı $L_1,...,L_k$ için

$$\delta(n_1,...,n_k) = \tau - \sum_{j=1}^{k} \tau(L_j)$$

$$= \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 + \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(n+k-\sum n_j\right)\left(n+k-1-\sum n_j\right)\mu_{n+1}{}^2 + \tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right)$$

bulunur. (2.4.80) in sağ tarafından da

$$c(n_1,...,n_k)H^2(p) + b(n_1,...,n_k)\max \tilde{K}(p)$$

$$= \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} \frac{\left(n+k-\sum n_j\right)^2 \mu_{n+1}{}^2}{n^2} + \frac{1}{2}\left(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)\max \tilde{K}(p)$$

$$= \frac{\left(n+k-1-\sum n_j\right)\left(n+k-\sum n_j\right)}{2}\mu_{n+1}{}^2 + \frac{1}{2}\left(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)\max \tilde{K}(p)$$

çıkar. O halde (2.4.80) in eşitlik halinden,

$$\tilde{\tau}\left(T_p\left(M^n\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\tau}\left(L_j\right) = \frac{1}{2}\left(n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j\left(n_j-1\right)\right)\max \tilde{K}(p)$$

olup, buradan $i \neq j$ olmak üzere, $\alpha_i \in \Delta_i$, $\alpha_j \in \Delta_j$ için $\tilde{K}\left(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}\right) = \max \tilde{K}(p)$ ve dolayısıyla **(b)** elde edilir. Tersini gerçeklemek kolaydır. □

Teorem 2.4.30.[15] $\tilde{M}^m$, kesit eğrilik fonksiyonu üstten c ile sınırlanan bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n, bir $p \in M^n$ noktasında, bir $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ k-lısı için (2.4.51) i sağlayacak şekilde n-boyutlu bir Riemann manifoldu ise o takdirde M^n, $\tilde{M}^m$ ye minimal izometrik şekilde dahil edilemez.

Sonuç 2.4.31.[15] Eğer M^n, bir $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ k-lısı için M^n de bir noktada, (2.4.52) yi sağlayacak şekilde n-boyutlu bir Riemann manifoldu ise bu durumda keyfi dik boyutlu M^n Riemann manifoldu, pozitif olmayan kesit eğriliğe sahip herhangi bir $\tilde{M}^m$ Riemann manifoldu içine minimal izometrik şekilde dahil edilemez.

2.5. ALTMANİFOLD TEORİSİNDE ÖZEL BİR NOKTASAL EŞİTSİZLİK

2.5.1. Noktasal Bir Eşitsizlik

Bu kısımda, $\mathrm{x}: M^n \to R^{n+2}(c)$ nin M^n, $n \geq 2$, Riemann manifoldunun sabit c kesit eğrilikli $(n+2)$-boyutlu bir Riemann uzay formuna izometrik bir dahil edilmesi olduğunu kabul edeceğiz.

Aşağıdaki üç aşikar eşitsizliği kullanacağız:

$2ab \leq a^2 + b^2$; eşitlik ancak ve ancak $a = b$ olması halinde gerçeklenir. (2.5.1)

$(a+b)^2 \geq 4ab$; eşitlik ancak ve ancak $a = b$ olması halinde gerçeklenir. (2.5.2)

$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$; eşitlik ancak ve ancak $a = b$ olması halinde gerçeklenir. (2.5.3)

(2.5.3) te, $a = A - B$ ve $b = B - C$ alalım. O takdirde

$(A-C)^2 \leq 2\left((A-B)^2 + (B-C)^2\right)$ dir, eşitlik ancak ve ancak $A - B = B - C$, yani $B = \frac{1}{2}(A+C)$ olması halinde gerçeklenir. (2.5.4)

Yardımcı Teorem 2.5.1.[18] $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olsun ve $A = \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2$ tanımlansın. Bu durumda

(1) $A \geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2$ dir ve eşitliğin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = a_3 = a_4 = \ldots = a_n$ olmasıdır.

(2) $k, \ell,\ 1 \leq k < \ell \leq n$ ve $(k, \ell) \neq (1, 2)$ olacak şekilde tamsayılar olsun.

$$A = \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{n}{2}(a_k - a_\ell)^2$$

ise o takdirde $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ dir.

Kanıtlama: (1) için $n = 2$ ise teorem açıktır. Şimdi, teoremin bir $n \geq 2$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (2.5.4) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{i<j=1}^{n+1}\left(a_i - a_j\right)^2 &= \sum_{i<j=1}^{n}\left(a_i - a_j\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i - a_{n+1}\right)^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_{n+1})^2 + (a_2 - a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{n+1}{2}(a_1 - a_2)^2\end{aligned}$$

bulunur ve eğer eşitlik gerçeklenirse $a_3 = a_4 = ... = a_n = a_{n+1}$ ve $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ olur. Tersi açıktır. Şimdi de **(2)** yi kanıtlayalım. $k,\ \ell > 2$ ise **(1)** den $a_k = a_\ell$ çıkar. O takdirde $A = 0$ dır ve istenen elde edilir. Dolayısıyla $\ell > 2$ ve $k = 2$ olduğunu varsayalım. $(1,2)$ ve $(2,\ell)$ indislerinin her ikisi için **(1)** uygulanarak,

$$a_\ell = \frac{1}{2}(a_1 + a_2),$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_\ell + a_2)$$

bulunur. Bu iki denklemden, $a_\ell = a_1 = a_2$ ve böylece yine, $A = 0$ olduğu çıkar. □

Teorem 2.5.2.[18] $x : M^n \to R^{n+2}(c)$ izometrik bir dahil etme olsun. Bu durumda her p noktasında,

$$H^2 \geq \rho + \rho^\perp - c \qquad (2.5.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (2.5.5) teki eşitliğin bir $p \in M^n$ noktasında gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \mu & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde, tanjant uzayın ortonormal bir $\{e_1,...,e_n\}$ bazının ve normal uzayın ortonormal bir $\{\xi_1,\xi_2\}$ bazının var olmasıdır.

Kanıtlama: $p \in M^n$ olsun. ξ_1 ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda ve $\xi_2 \perp \xi_1$ olacak şekilde seçelim. A_{ξ_2} köşegensel olacak şekilde ortonormal bir $\{e_1,...,e_n\}$ bazı alalım. $\langle h(e_i,e_j),\xi_k \rangle = h_{ij}^k$ diyelim.

$$A_{\xi_1}(e_i) = \langle A_{\xi_1}(e_i),e_1 \rangle e_1 + ... + \langle A_{\xi_1}(e_i),e_i \rangle e_i + ... + \langle A_{\xi_1}(e_i),e_j \rangle e_j + ... + \langle A_{\xi_1}(e_i),e_n \rangle e_n,$$

$$A_{\xi_2}(e_i) = \langle A_{\xi_2}(e_i),e_1 \rangle e_1 + ... + \langle A_{\xi_2}(e_i),e_i \rangle e_i + ... + \langle A_{\xi_2}(e_i),e_j \rangle e_j + ... + \langle A_{\xi_2}(e_i),e_n \rangle e_n$$

eşitlikleri ile (2.1.11) den,

$$\langle A_{\xi_2}(e_i), A_{\xi_1}(e_j) \rangle = h_{i1}^2 h_{j1}^1 + h_{i2}^2 h_{j2}^1 + ... + h_{ii}^2 h_{ji}^1 + ... + h_{ij}^2 h_{jj}^1 + ... + h_{in}^2 h_{jn}^1,$$

$$\langle A_{\xi_1}(e_i), A_{\xi_2}(e_j) \rangle = h_{i1}^1 h_{j1}^2 + h_{i2}^1 h_{j2}^2 + ... + h_{ii}^1 h_{ji}^2 + ... + h_{ij}^1 h_{jj}^2 + ... + h_{in}^1 h_{jn}^2$$

elde edilir. (2.1.22) Ricci denkleminden,

$$\langle R^{\perp}(e_i,e_j)\xi_1,\xi_2 \rangle = \langle A_{\xi_2}(e_i), A_{\xi_1}(e_j) \rangle - \langle A_{\xi_1}(e_i), A_{\xi_2}(e_j) \rangle = (h_{ii}^2 - h_{jj}^2) h_{ij}^1$$

çıkar. (2.1.12) ortalama eğrilik vektörünün tanımından,

$$n^2H^2=\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^1\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^2\right)^2$$
$$=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1-h_{jj}^1\right)^2+\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2\right)+\frac{2n}{n-1}\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1h_{jj}^1+h_{ii}^2h_{jj}^2\right)$$

veya

$$n^2(n-1)H^2=\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1-h_{jj}^1\right)^2+\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2+2n\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1h_{jj}^1+h_{ii}^2h_{jj}^2\right)$$

elde edilir. Böylece (2.1.31) ve (2.1.21) den, baz seçimini kullanarak,

$$n^2(n-1)(\rho-c)+2n\sum_{i<j}\left(h_{ij}^1\right)^2$$
$$=2n\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1h_{jj}^1+h_{ii}^2h_{jj}^2\right)-2n\sum_{i<j}\left(\left(h_{ij}^1\right)^2+\left(h_{ij}^2\right)^2\right)+2n\sum_{i<j}\left(h_{ij}^1\right)^2$$
$$=2n\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1h_{jj}^1+h_{ii}^2h_{jj}^2\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$n^2(n-1)H^2=\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1-h_{jj}^1\right)^2+\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2+n^2(n-1)(\rho-c)+2n\sum_{i<j}\left(h_{ij}^1\right)^2$$

bulunur. Bu sayede

$$n^2(n-1)\left(H^2-\rho+c\right)=\sum_{i<j}\left(h_{ii}^1-h_{jj}^1\right)^2+\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2+2n\sum_{i<j}\left(h_{ij}^1\right)^2$$
$$\geq\sum_{i<j}\left(\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2+2n\left(h_{ij}^1\right)^2\right)$$

çıkar. (2.5.2) den,

$$\sum_{i<j}\left(\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2+2n\left(h_{ij}^1\right)^2\right)\geq\left(8n\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2\left(h_{k\ell}^1\right)^2\right)^{1/2}$$

ve Yardımcı Teorem 2.5.1 den,

$$\left(8n\sum_{k<\ell}\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2\left(h_{k\ell}^1\right)^2\right)^{1/2}\geq\left(8n\sum_{k<\ell}\frac{n}{2}\left(h_{kk}^2-h_{\ell\ell}^2\right)^2\left(h_{k\ell}^1\right)^2\right)^{1/2}$$
$$=2n\left(\sum_{k<\ell}\left(h_{kk}^2-h_{\ell\ell}^2\right)^2\left(h_{k\ell}^1\right)^2\right)^{1/2}$$

elde edilir. (2.1.22) Ricci denklemi yardımıyla (2.1.32),

$$\rho^{\perp}=\frac{2}{n(n-1)}\sqrt{\sum_{i<j=1}^{n}\left\langle\left[A_{\xi_1},A_{\xi_2}\right](e_i),e_j\right\rangle^2}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\sqrt{\sum_{i<j=1}^{n}\left(\left\langle A_{\xi_2}(e_i),A_{\xi_1}(e_j)\right\rangle-\left\langle A_{\xi_1}(e_i),A_{\xi_2}(e_j)\right\rangle\right)^2}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{i<j=1}^{n}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2\left(h_{ij}^1\right)^2\right)^{1/2}$$

şeklinde bulunur. Böylece $2n\left(\sum_{k<\ell}\left(h_{kk}^2-h_{\ell\ell}^2\right)^2\left(h_{k\ell}^1\right)^2\right)^{1/2}=n^2(n-1)\rho^{\perp}$ olup, eşitsizlik kısmının kanıtını tamamlayan

$$n^2(n-1)\left(H^2-\rho+c\right)\geq n^2(n-1)\rho^{\perp}$$

çıkar. Şimdi (2.5.5) teki eşitliğin bir p noktasında gerçeklendiğini varsayalım. Bu durumda yukarıda elde edilen bütün eşitsizlikler eşitlik haline gelir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.5.1 ve (2.5.2) uygulanarak, $1\leq k<\ell\leq n$ için

$$h_{kk}^1-h_{\ell\ell}^1=0, \tag{2.5.6}$$

$$\sum_{i<j}\left(h_{ii}^2-h_{jj}^2\right)^2=2n\sum_{i<j}\left(h_{ij}^1\right)^2, \tag{2.5.7}$$

$$h_{k\ell}^1=0 \text{ veya her } m\neq k,\ell \text{ için } \frac{1}{2}\left(h_{kk}^2+h_{\ell\ell}^2\right)=h_{mm}^2 \tag{2.5.8}$$

olduğu bulunur. İlk önce, (2.5.8) in ikinci kısmının iki (k,ℓ) çifti için geçerli olduğunu kabul edelim. O takdirde Yardımcı Teorem 2.5.1 den $h_{11}^2=h_{22}^2=...=h_{nn}^2$ olduğu çıkar. Buna göre ξ_2, ortalama eğrilik vektörüne ortogonal olduğundan her i için $h_{ii}^2=0$ dır. O zaman (2.5.7) den, $i\neq j$ için $h_{ij}^1=0$ olduğu çıkar. Böylece (2.5.6), M^n nin tümel umbilik olmasını gerektirir. Sonra, (2.5.8) in ikinci kısmının yalnızca bir (k,ℓ) çifti için geçerli olduğunu varsayalım. $\{e_1,...,e_n\}$ bazını yeniden sıralayarak, $k=1$ ve $\ell=2$ olduğunu kabul edelim. Eğer $h_{11}^2=\mu$ ve $h_{22}^2=\upsilon$ alırsak (2.5.8), $h_{mm}^2=\frac{1}{2}\left(h_{11}^2+h_{22}^2\right)$ olmasını gerektirir. ξ_2, ortalama eğrilik vektörüne ortogonal olduğundan iz alarak $\upsilon=-\mu$ olduğu elde edilir. Varsayımımızı kullanarak, (2.5.8) den $(k,\ell)\neq(1,2)$ olmak üzere, $k<\ell$ için $h_{k\ell}^1=0$ olduğu çıkar. Böylece (2.5.7) den

$$2n\left(h_{12}^1\right)^2=4\mu^2+2\left(n-2\right)\mu^2=2n\mu^2$$

bulunur. Dolayısıyla e_2 yi $-e_2$ ile yerdeğiştirerek ve gerekirse (2.5.6) ile birlikte ele alarak bu hal için kanıt tamamlanır. Son olarak, (2.5.8) in ikinci kısmının asla geçerli olmadığını kabul edelim. Dolayısıyla bütün $k<\ell$ indisleri için $h_{k\ell}^1=0$ dır. Bu ise bizi (2.5.7) den, (2.5.8) in ikinci kısmının asla sağlanmadığı iddiamız ile çelişen $h_{11}^2=...=h_{nn}^2$ olması sonucuna götürür ki, böylece kanıt tamamlanmış olur. □

Eşitlik bir p noktasında gerçeklenirse o noktada,

$$H^2=\lambda^2, \tag{2.5.9}$$

$$\rho^{\perp} = \frac{4}{n(n-1)}\mu^2 \tag{2.5.10}$$

olur.

2.5.2. Bazı Sınıflandırmalar

Bu kısımda, altmanifoldların iki özel sınıfını inceleyeceğiz. İlk olarak, M^n nin her p noktasında, Teorem 2.5.2 deki eşitliği gerçekleyen ve sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip M^n altmanifoldlarını inceleyeceğiz. Sonra, M^n nin her p noktasında (2.5.5) teki eşitliği gerçekleyen ve sıfırdan farklı sabit normal eğriliğe sahip M^n altmanifoldlarını ele alacağız.

Yardımcı Teorem 2.5.3.[18] M^n nin (2.5.5) teki eşitliği gerçeklediğini kabul edelim. p, M^n nin tümel jeodezik olmayan bir noktası olsun. Eğer

(1) $H(p) \neq 0$ ve $\rho^{\perp}(p) \neq 0$,

(2) $H(p) \neq 0$ ve p nin bir komşuluğu üzerinde $\rho^{\perp} = 0$,

(3) p nin bir komşuluğu üzerinde $H = 0$

koşullarından biri gerçeklenir ise bu durumda $3 \leq i, j \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h(e_1,e_1) &= \lambda\xi_1 + \mu\xi_2, & h(e_1,e_i) &= 0 \\ h(e_1,e_2) &= \mu\xi_1, & h(e_2,e_i) &= 0 \\ h(e_2,e_2) &= \lambda\xi_1 - \mu\xi_2, & h(e_i,e_j) &= \delta_{ij}\lambda\xi_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde, yerel $e_1,...,e_n$ ortonormal tanjant vektör alanları, ξ_1 ve ξ_2 ortonormal normal vektör alanları ve λ ile μ fonksiyonları vardır.

Kanıtlama: İlk olarak, $H(p) \neq 0$ ve $\rho^{\perp}(p) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Sonra ξ_1 i ortalama eğrilik vektörü doğrultusunda bir birim normal vektör olarak seçelim ve $\xi_2 \perp \xi_1$ alalım. O takdirde Teorem 2.5.2 den, A_{ξ_2} nin iki tanesi 1 katlı ve bir tanesi de $n-2$ katlı olmak üzere üç farklı öz değere sahip olduğu çıkar. Böylece e_1 ve e_2, 1-boyutlu öz uzayları ve $e_3,...,e_n$ $(n-2)$-boyutlu öz uzayı gerecek şekilde diferansiyellenebilir $e_1,...,e_n$ vektör alanlarını bulabiliriz. Eğer p nin bir komşuluğu üzerinde $\rho^{\perp}=0$ ise bu durumda M^n, p civarında tümel umbilik olup, keyfi bir yerel ortonormal baz alırız. Eğer p nin bir komşuluğunda $H=0$ ise o zaman keyfi ξ_1 ve ξ_2 normal vektör alanları için yukarıdaki işlemleri aynen yapabiliriz. □

p, M^n nin tümel jeodezik olmayan bir noktası olsun ve $n\geq 3$ olduğunu varsayalım. Yardımcı Teorem 2.5.3 **(1)**, **(2)** veya **(3)** ün gerçeklendiğini kabul edelim ve $\{e_1,...,e_n\}$ ile $\{\xi_1,\xi_2\}$ teoremde tanımladığımız gibi olsun. Buna göre aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz:

Yardımcı Teorem 2.5.4.[18] $3\leq i,j,k\leq n$ için

$$e_k(\lambda)=0, \tag{2.5.11}$$

$$\lambda\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1=0, \tag{2.5.12}$$

$$e_1(\lambda)=-\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle, \tag{2.5.13}$$

$$e_2(\lambda)=\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle, \tag{2.5.14}$$

$$\mu\left\langle\nabla_{e_i}e_j,e_1\right\rangle=-\delta_{ij}\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle, \tag{2.5.15}$$

$$\mu\left\langle\nabla_{e_i}e_j,e_2\right\rangle=\delta_{ij}\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle, \tag{2.5.16}$$

$$\left\langle\nabla_{e_1}e_2+\nabla_{e_2}e_1,e_k\right\rangle=0, \tag{2.5.17}$$

$$\left\langle\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_2}e_2,e_k\right\rangle=0, \tag{2.5.18}$$

$$e_1(\mu)=\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle+2\mu\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle, \tag{2.5.19}$$

$$e_2(\mu) = -\lambda\left\langle \nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1, \xi_2 \right\rangle + \mu\left\langle \nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1, \xi_2 \right\rangle + 2\mu\left\langle \nabla_{e_1}e_1, e_2 \right\rangle, \tag{2.5.20}$$

$$e_k(\mu) = \mu\left\langle \nabla_{e_1}e_1, e_k \right\rangle = \mu\left\langle \nabla_{e_2}e_2, e_k \right\rangle, \tag{2.5.21}$$

$$\mu\left\langle \nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1, \xi_2 \right\rangle + 2\mu\left\langle \nabla_{e_k}e_1, e_2 \right\rangle = -\mu\left\langle \nabla_{e_1}e_2, e_k \right\rangle \tag{2.5.22}$$

dır.

Kanıtlama: Önceki yardımcı teoremde oluşturduğumuz yerel ortonormal çatıları alalım. $t, y, z \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere,

$$\nabla_{e_z}e_y = \left\langle \nabla_{e_z}e_y, e_1 \right\rangle e_1 + \left\langle \nabla_{e_z}e_y, e_2 \right\rangle e_2 + ... + \left\langle \nabla_{e_z}e_y, e_n \right\rangle e_n$$

dir ve h ikinci temel formunun $\overline{\nabla}h$ kovaryant türevi, $h(e_t, e_y) \in \mathcal{X}^{\perp}(M^n)$ olduğu dikkate alınarak,

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_t, e_y, e_z\right) = \left(\overline{\nabla}_{e_t}h\right)\left(e_y, e_z\right) = \nabla^{\perp}_{e_t}\left(h\left(e_y, e_z\right)\right) - h\left(\nabla_{e_t}e_y, e_z\right) - h\left(e_y, \nabla_{e_t}e_z\right)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (2.1.24) Codazzi denkleminden,

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_t, e_y, e_z\right) = \left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_y, e_t, e_z\right)$$

eşitliği geçerlidir ve (2.1.9) dan,

$$\begin{aligned} \left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_t, e_y, e_z\right) &= \nabla^{\perp}_{e_t}\left(h\left(e_y, e_z\right)\right) - h\left(\nabla_{e_t}e_y, e_z\right) - h\left(e_y, \nabla_{e_t}e_z\right) \\ &= \nabla^{\perp}_{e_t}\left(h\left(e_z, e_y\right)\right) - h\left(\nabla_{e_t}e_z, e_y\right) - h\left(e_z, \nabla_{e_t}e_y\right) \\ &= \left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_t, e_z, e_y\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki, böylece bu denklem Codazzi denklemi ile birlikte düşünülürse $\overline{\nabla}h$ tensör alanının bütün değişkenlerine göre simetrik bir tensör alanı olduğu çıkar.

$k,\ \ell \in \{3,...,n\}$ olsun. O takdirde

$$h\left(\nabla_{e_k} e_1, e_2\right) = \lambda \left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle \xi_1 - \mu \left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle \xi_2 ,$$
$$h\left(e_1, \nabla_{e_k} e_2\right) = \lambda \left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle \xi_1 + \mu \left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle \xi_2$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_k, e_1, e_2\right) = e_k\left(\mu\right)\xi_1 + \mu\left(\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1 - 2\left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle \xi_2\right)$$

bulunur.

$$h\left(\nabla_{e_1} e_k, e_2\right) = \left(\mu \left\langle \nabla_{e_1} e_k, e_1 \right\rangle + \lambda \left\langle \nabla_{e_1} e_k, e_2 \right\rangle\right) \xi_1 - \mu \left\langle \nabla_{e_1} e_k, e_2 \right\rangle \xi_2 ,$$
$$h\left(e_k, \nabla_{e_1} e_2\right) = \left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle \left(\lambda \xi_1\right)$$

olup, buradan

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_1, e_k, e_2\right) = \mu\left(\left\langle \nabla_{e_1} e_1, e_k \right\rangle \xi_1 - \left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle \xi_2\right)$$

elde edilir.

$$h\left(\nabla_{e_2} e_k, e_1\right) = \left\langle \nabla_{e_2} e_k, e_1 \right\rangle \left(\lambda \xi_1 + \mu \xi_2\right) + \left\langle \nabla_{e_2} e_k, e_2 \right\rangle \left(\mu \xi_1\right),$$
$$h\left(e_k, \nabla_{e_2} e_1\right) = \left\langle \nabla_{e_2} e_1, e_k \right\rangle \left(\lambda \xi_1\right)$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_2, e_k, e_1\right) = \mu\left(\left\langle \nabla_{e_2} e_2, e_k \right\rangle \xi_1 + \left\langle \nabla_{e_2} e_1, e_k \right\rangle \xi_2\right)$$

çıkar. $\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_1, e_k, e_2\right) = \left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_2, e_k, e_1\right)$ olup,

$$\mu\left(\left\langle \nabla_{e_1} e_1, e_k \right\rangle \xi_1 - \left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle \xi_2\right) = \mu\left(\left\langle \nabla_{e_2} e_2, e_k \right\rangle \xi_1 + \left\langle \nabla_{e_2} e_1, e_k \right\rangle \xi_2\right)$$

ve dolayısıyla

$$\mu\left\langle \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_2} e_2, e_k \right\rangle \xi_1 - \mu\left\langle \nabla_{e_1} e_2 + \nabla_{e_2} e_1, e_k \right\rangle \xi_2 = 0$$

bulunur ki, böylece (2.5.17) ve (2.5.18) elde edilir. $\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_k, e_1, e_2\right) = \left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_1, e_k, e_2\right)$ olduğundan,

$$e_k\left(\mu\right)\xi_1 + \mu\left(\left\langle \nabla^{\perp}_{e_k} \xi_1, \xi_2 \right\rangle \xi_2 - 2\left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle \xi_2\right) = \mu\left(\left\langle \nabla_{e_1} e_1, e_k \right\rangle \xi_1 - \left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle \xi_2\right)$$

çıkar. Bu eşitlik ile (2.5.18) den,

$$e_k\left(\mu\right) = \mu\left\langle \nabla_{e_1} e_1, e_k \right\rangle = \mu\left\langle \nabla_{e_2} e_2, e_k \right\rangle$$

bulunur ki, böylece (2.5.21) ve yine aynı eşitlikten,

$$\mu\left\langle \nabla^{\perp}_{e_k} \xi_1, \xi_2 \right\rangle + 2\mu\left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle = -\mu\left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle$$

çıkar ki, bu sayede (2.5.22) gösterilmiş olur.

$$h\left(\nabla_{e_k} e_1, e_1\right) = \left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle \mu \xi_1$$

olup, buradan

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_k,e_1,e_1\right)=e_k\left(\lambda\right)\xi_1+\lambda\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1+e_k\left(\mu\right)\xi_2+\mu\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_2-2\left\langle\nabla_{e_k}e_1,e_2\right\rangle\mu\xi_1$$

elde edilir.

$$h\left(\nabla_{e_1}e_k,e_1\right)=\left\langle\nabla_{e_1}e_k,e_1\right\rangle\left(\lambda\xi_1+\mu\xi_2\right)+\left\langle\nabla_{e_1}e_k,e_2\right\rangle\mu\xi_1,$$
$$h\left(e_k,\nabla_{e_1}e_1\right)=\left\langle\nabla_{e_1}e_1,e_k\right\rangle\lambda\xi_1$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_1,e_k,e_1\right)=-\left\langle\nabla_{e_1}e_k,e_1\right\rangle\mu\xi_2-\left\langle\nabla_{e_1}e_k,e_2\right\rangle\mu\xi_1$$

çıkar. Ayrıca (2.5.21) ve (2.5.22) den,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_1,e_k,e_1\right)&=e_k\left(\mu\right)\xi_2-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1,\xi_2\right\rangle\xi_1-2\left\langle\nabla_{e_k}e_1,e_2\right\rangle\mu\xi_1\\&=e_k\left(\mu\right)\xi_2+\mu\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_2-2\left\langle\nabla_{e_k}e_1,e_2\right\rangle\mu\xi_1\end{aligned}$$

bulunur. $\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_k,e_1,e_1\right)=\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_1,e_k,e_1\right)$ dir. O halde

$$\begin{aligned}&e_k\left(\lambda\right)\xi_1+\lambda\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1+e_k\left(\mu\right)\xi_2+\mu\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_2-2\left\langle\nabla_{e_k}e_1,e_2\right\rangle\mu\xi_1\\&=e_k\left(\mu\right)\xi_2+\mu\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_2-2\left\langle\nabla_{e_k}e_1,e_2\right\rangle\mu\xi_1\end{aligned}$$

ve böylece

$$e_k\left(\lambda\right)\xi_1+\lambda\nabla^{\perp}_{e_k}\xi_1=0$$

elde edilir. Buna göre

$$e_k\left(\lambda\right)=0$$

çıkar ki, bu sayede (2.5.11) ve yine aynı eşitlikten,

$$\lambda \nabla^{\perp}_{e_k} \xi_1 = 0$$

elde edilir ki, sonuçta (2.5.12) gösterilmiş olur.

$$h\left(\nabla_{e_1} e_\ell, e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_1} e_\ell, e_k \right\rangle \lambda \xi_1,$$
$$h\left(e_\ell, \nabla_{e_1} e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_1} e_k, e_\ell \right\rangle \lambda \xi_1$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_1, e_\ell, e_k\right) = \delta_{\ell k} e_1(\lambda)\xi_1 + \delta_{\ell k} \lambda \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1$$

ve

$$h\left(\nabla_{e_\ell} e_1, e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_\ell} e_1, e_k \right\rangle \lambda \xi_1,$$
$$h\left(e_1, \nabla_{e_\ell} e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \left(\lambda \xi_1 + \mu \xi_2\right) + \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \mu \xi_1$$

eşitliklerinden de

$$\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_\ell, e_1, e_k\right) = -\left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \mu \xi_1 - \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \mu \xi_2$$

bulunur. $\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_1, e_\ell, e_k\right) = \left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_\ell, e_1, e_k\right)$ dır. O halde

$$\delta_{\ell k} e_1(\lambda)\xi_1 + \delta_{\ell k} \lambda \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1 = -\left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \mu \xi_1 - \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \mu \xi_2$$

eşitliğinden,

$$-\delta_{\ell k} \lambda \left\langle \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1, \xi_2 \right\rangle = \mu \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle$$

çıkar ki, bu (2.5.15) i verir. Yine, aynı eşitlikten

$$\delta_{\ell k} e_1(\lambda) = -\mu \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \tag{2.5.23}$$

elde edilir.

$$h\left(\nabla_{e_2} e_\ell, e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_2} e_\ell, e_k \right\rangle \lambda \xi_1,$$
$$h\left(e_\ell, \nabla_{e_2} e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_2} e_k, e_\ell \right\rangle \lambda \xi_1$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_2, e_\ell, e_k\right) = \delta_{\ell k} e_2(\lambda) \xi_1 + \delta_{\ell k} \lambda \nabla_{e_2}^{\perp} \xi_1$$

ve

$$h\left(\nabla_{e_\ell} e_2, e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_\ell} e_2, e_k \right\rangle \lambda \xi_1,$$
$$h\left(e_2, \nabla_{e_\ell} e_k\right) = \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \mu \xi_1 + \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \left(\lambda \xi_1 - \mu \xi_2\right)$$

eşitliklerinden de

$$\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_\ell, e_2, e_k\right) = -\left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \mu \xi_1 + \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \mu \xi_2$$

bulunur. $\left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_2, e_\ell, e_k\right) = \left(\overline{\nabla} h\right)\left(e_\ell, e_2, e_k\right)$ dır. Bu durumda

$$\delta_{\ell k} e_2(\lambda) \xi_1 + \delta_{\ell k} \lambda \nabla_{e_2}^{\perp} \xi_1 = -\left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \mu \xi_1 + \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_2 \right\rangle \mu \xi_2$$

çıkar. O halde

$$\delta_{\ell k} e_2(\lambda) = -\mu \left\langle \nabla_{e_\ell} e_k, e_1 \right\rangle \tag{2.5.24}$$

ve

$$\delta_{\ell k}\lambda\left\langle \nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle=\mu\left\langle \nabla_{e_\ell}e_k,e_2\right\rangle$$

elde edilir ki, böylece (2.5.16) gösterilmiş olur. (2.5.23) te (2.5.16) yı kullanacak olursak,

$$e_1(\lambda)=-\lambda\left\langle \nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle$$

çıkar ki, sonuçta (2.5.13) bulunur. Yine, (2.5.24) te (2.5.15) i kullanacak olursak,

$$e_2(\lambda)=\lambda\left\langle \nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle$$

çıkar ki, bu sayede de (2.5.14) elde edilir.

$$h\left(\nabla_{e_1}e_2,e_2\right)=\left\langle \nabla_{e_1}e_2,e_1\right\rangle\mu\xi_1$$

olup, buradan

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_1,e_2,e_2\right)=e_1(\lambda)\xi_1+\lambda\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1-e_1(\mu)\xi_2-\mu\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_2+2\mu\left\langle \nabla_{e_1}e_1,e_2\right\rangle\xi_1$$

bulunur.

$$h\left(\nabla_{e_2}e_1,e_2\right)=\left\langle \nabla_{e_2}e_1,e_2\right\rangle\left(\lambda\xi_1-\mu\xi_2\right),$$
$$h\left(e_1,\nabla_{e_2}e_2\right)=\left\langle \nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle\left(\lambda\xi_1+\mu\xi_2\right)$$

eşitliklerinden,

$$\left(\overline{\nabla}h\right)\left(e_2,e_1,e_2\right)=e_2(\mu)\xi_1+\mu\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1-2\mu\left\langle \nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle\xi_2$$

çıkar. $(\overline{\nabla}h)(e_1,e_2,e_2)=(\overline{\nabla}h)(e_2,e_1,e_2)$ dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
&e_1(\lambda)\xi_1+\lambda\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1-e_1(\mu)\xi_2-\mu\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_2+2\mu\left\langle\nabla_{e_1}e_1,e_2\right\rangle\xi_1\\
&=e_2(\mu)\xi_1+\mu\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1-2\mu\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle\xi_2
\end{aligned}
$$

eşitliğinden ve (2.5.13) ten,

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle\xi_1+\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle\xi_2-e_1(\mu)\xi_2-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_2,\xi_1\right\rangle\xi_1+2\mu\left\langle\nabla_{e_1}e_1,e_2\right\rangle\xi_1\\
&-e_2(\mu)\xi_1-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle\xi_2+2\mu\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle\xi_2=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\left(-\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_2,\xi_1\right\rangle+2\mu\left\langle\nabla_{e_1}e_1,e_2\right\rangle-e_2(\mu)\right)\xi_1\\
&+\left(\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle-e_1(\mu)-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle+2\mu\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle\right)\xi_2=0
\end{aligned}
$$

olup, buradan

$$
e_1(\mu)=\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle-\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle+2\mu\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle
$$

bulunur ki, bu sayede (2.5.19) ve yine aynı eşitlikten

$$
e_2(\mu)=-\lambda\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle+\mu\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle+2\mu\left\langle\nabla_{e_1}e_1,e_2\right\rangle
$$

çıkar ki, sonuçta (2.5.20) gösterilmiş olur. □

Teorem 2.5.5.[18] $x:M^n\to R^{n+2}(c)$, (2.5.5) teki eşitliği her noktada gerçekleyen izometrik bir dahil etme olsun. Eğer M^n, sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip ise o takdirde M^n tümel umbiliktir.

Kanıtlama: Eğer λ sıfırdan farklı bir sabit ise Yardımcı Teorem 2.5.4 (2.5.12), (2.5.13) ve (2.5.14) ten ξ_1 in paralel olduğu çıkar. Bundan dolayı M^n, (2.5.10) dan, $\mu = 0$ olmasını gerektiren aşikar normal koneksiyona sahip olur. Böylece Teorem 2.5.2 den, M^n tümel umbilik bulunur. □

Eğer $\mu = 0$ ise M^n tümel umbiliktir. Dolayısıyla şu andan itibaren $\mu \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Aynı zamanda M^n nin normal eğriliğinin sabit olduğunu da varsayacağız ki bu, (2.5.10) dan, μ nün sabit olmasına eşdeğerdir. Bu durumda aşağıdaki teoreme sahibiz:

Teorem 2.5.6.[18] $\mathrm{x}: M^n \to R^{n+2}(c)$, $n \geq 3$, M^n nin her p noktasında (2.5.5) teki eşitliği gerçekleyen izometrik bir dahil edilmesi olsun. Eğer $\rho^{\perp}$ sıfırdan farklı bir sabit ise x minimaldir.

Kanıtlama: $\lambda \neq 0$ ve μ nün sıfırdan farklı bir sabit olduğunu kabul edelim. O takdirde (2.5.12) den, $\nabla^{\perp}_{e_k} \xi_1 = 0$ olduğu çıkar. e_3, $[e_1, e_2] \in G\mathrm{er}\{e_1, e_2, e_3\}$ olacak şekilde seçilebilir. μ sabit olduğundan, Yardımcı Teorem 2.5.4 ten,

$$\nabla_{e_1} e_1 = e e_2, \qquad \nabla_{e_2} e_2 = d e_1,$$
$$\nabla_{e_1} e_2 = -e e_1 + a e_3, \qquad \nabla_{e_2} e_1 = -d e_2 - a e_3,$$

olacak şekilde yerel a, e ve d fonksiyonlarının var olduğu elde edilir. Ayrıca $\alpha = \left\langle \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1, \xi_2 \right\rangle$, $\beta = \left\langle \nabla^{\perp}_{e_2} \xi_1, \xi_2 \right\rangle$ alınarak ve ∇^1 ile ∇ nın $\{e_1, e_2, e_3\}$ üzerindeki bileşeni gösterilerek, $k \geq 3$ için aşağıdakiler bulunur:

(2.5.12) ve (2.5.22) den, $2\mu \left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle = -\mu \left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle = -\mu \left\langle -e e_1 + a e_3, e_k \right\rangle = -\mu a \delta_{k3}$

ve böylece $\left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_2 \right\rangle = -\dfrac{a}{2} \delta_{k3}$ çıkar. (2.5.15) ten, $-\mu \left\langle \nabla_{e_k} e_1, e_k \right\rangle = -\lambda \left\langle \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1, \xi_2 \right\rangle$ olup,

$$\nabla_{e_k} e_1 = -\frac{a}{2} \delta_{k3} e_2 + \frac{\lambda}{\mu} \alpha e_k$$

elde edilir.

$$\nabla^1_{e_1} e_3 = -ae_2 \ ,$$
$$\nabla^1_{e_2} e_3 = ae_1$$

bulunur. (2.5.12) ve (2.5.22) den, $-2\mu\left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle = -\mu\left\langle \nabla_{e_1} e_2, e_k \right\rangle$ olup, $\left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_1 \right\rangle = \frac{a}{2}\delta_{k3}$ ve (2.5.16) dan da $\left\langle \nabla_{e_k} e_2, e_k \right\rangle = -\left\langle \nabla_{e_k} e_k, e_2 \right\rangle = -\frac{\lambda}{\mu}\left\langle \nabla^{\perp}_{e_2} \xi_1, \xi_2 \right\rangle = -\frac{\lambda}{\mu}\beta$ çıkar ki, böylece

$$\nabla_{e_k} e_2 = \frac{a}{2}\delta_{k3} e_1 - \frac{\lambda}{\mu}\beta e_k$$

elde edilir. (2.5.15) ten, $\left\langle \nabla_{e_3} e_3, e_1 \right\rangle = -\frac{\lambda}{\mu}\left\langle \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1, \xi_2 \right\rangle = -\frac{\lambda}{\mu}\alpha$ ve (2.5.16) dan, $\left\langle \nabla_{e_3} e_3, e_2 \right\rangle = \frac{\lambda}{\mu}\left\langle \nabla^{\perp}_{e_2} \xi_1, \xi_2 \right\rangle = \frac{\lambda}{\mu}\beta$ dır. O halde

$$\nabla^1_{e_3} e_3 = -\frac{\lambda}{\mu}\alpha e_1 + \frac{\lambda}{\mu}\beta e_2$$

bulunur. (2.5.20) den, $0 = -\lambda\beta + \mu\alpha + 2\mu e$ ve dolayısıyla

$$e = \frac{1}{2\mu}\left(\lambda\beta - \mu\alpha\right)$$

çıkar. (2.5.19) dan da $0 = \lambda\alpha - \mu\beta + 2\mu d$ ve dolayısıyla

$$d = \frac{1}{2\mu}\left(\mu\beta - \lambda\alpha\right)$$

elde edilir.

$$0=R^{\perp}\left(e_1,e_3\right)\xi_1=\nabla^{\perp}_{e_1}\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_1-\nabla^{\perp}_{e_3}\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1-\nabla^{\perp}_{[e_1,e_3]}\xi_1=-\nabla^{\perp}_{e_3}\left(\alpha\xi_2\right)-\nabla^{\perp}_{[e_1,e_3]}\xi_1$$
$$=-e_3\left(\alpha\right)\xi_2-\alpha\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_2-\nabla^{\perp}_{[e_1,e_3]}\xi_1$$

dir. Buna göre $\left[e_1,e_3\right]=\nabla_{e_1}e_3-\nabla_{e_3}e_1$ olup,

$$\left[e_1,e_3\right]^1=\nabla^1_{e_1}e_3-\nabla^1_{e_3}e_1=-\frac{1}{2}ae_2-\frac{\lambda}{\mu}\alpha e_3$$

bağıntılarından,

$$\nabla^{\perp}_{[e_1,e_3]}\xi_1=-\frac{1}{2}a\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1-\frac{\lambda}{\mu}\alpha\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_1=-\frac{1}{2}a\beta\xi_2$$

bulunur. O halde

$$0=R^{\perp}\left(e_1,e_3\right)\xi_1=-e_3\left(\alpha\right)\xi_2+\alpha\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_1+\frac{1}{2}a\beta\xi_2=-e_3\left(\alpha\right)\xi_2+\frac{1}{2}a\beta\xi_2$$

eşitliklerinden,

$$e_3\left(\alpha\right)=\frac{1}{2}a\beta$$

çıkar. Benzer bir şekilde, $e_3\left(\beta\right)$ yı hesaplayalım:

$$0=R^{\perp}\left(e_2,e_3\right)\xi_1=\nabla^{\perp}_{e_2}\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_1-\nabla^{\perp}_{e_3}\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1-\nabla^{\perp}_{[e_2,e_3]}\xi_1=-\nabla^{\perp}_{e_3}\left(\beta\xi_2\right)-\nabla^{\perp}_{[e_2,e_3]}\xi_1$$
$$=-e_3\left(\beta\right)\xi_2-\beta\nabla^{\perp}_{e_3}\xi_2-\nabla^{\perp}_{[e_2,e_3]}\xi_1$$

dir. Buna göre $\left[e_2,e_3\right]=\nabla_{e_2}e_3-\nabla_{e_3}e_2$ olup,

$$\left[e_2, e_3\right]^1 = \nabla^1_{e_2} e_3 - \nabla^1_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} a e_1 + \frac{\lambda}{\mu} \beta e_3$$

bağıntılarından,

$$\nabla^{\perp}_{[e_2, e_3]} \xi_1 = \frac{1}{2} a \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1 + \frac{\lambda}{\mu} \beta \nabla^{\perp}_{e_3} \xi_1 = \frac{1}{2} a \alpha \xi_2$$

elde edilir. O halde

$$0 = R^{\perp}\left(e_2, e_3\right) \xi_1 = -e_3\left(\beta\right) \xi_2 + \beta \nabla^{\perp}_{e_3} \xi_1 - \frac{1}{2} a \alpha \xi_2 = -e_3\left(\beta\right) \xi_2 - \frac{1}{2} a \alpha \xi_2$$

eşitliklerinden,

$$e_3\left(\beta\right) = -\frac{1}{2} a \alpha$$

bulunur. Şimdi $\ell \geq 4$ olmak üzere, $R^{\perp}\left(e_1, e_\ell\right) \xi_1 = 0 = R^{\perp}\left(e_2, e_\ell\right) \xi_1$ eşitliklerinden, $e_\ell\left(\alpha\right) = e_\ell\left(\beta\right) = 0$ olduğunu gösterelim:

$$0 = R^{\perp}\left(e_1, e_\ell\right) \xi_1 = \nabla^{\perp}_{e_1} \nabla^{\perp}_{e_\ell} \xi_1 - \nabla^{\perp}_{e_\ell} \nabla^{\perp}_{e_1} \xi_1 - \nabla^{\perp}_{[e_1, e_\ell]} \xi_1 = -\nabla^{\perp}_{e_\ell}\left(\alpha \xi_2\right) - \nabla^{\perp}_{[e_1, e_\ell]} \xi_1$$

dir. Buna göre $\left[e_1, e_\ell\right] = \nabla_{e_1} e_\ell - \nabla_{e_\ell} e_1$ olup,

$$\left[e_1, e_\ell\right]^1 = \nabla^1_{e_1} e_\ell - \nabla^1_{e_\ell} e_1 = \nabla^1_{e_1} e_\ell = -\left\langle \nabla_{e_1} e_3, e_\ell \right\rangle e_3$$

bağıntılarından,

$$\nabla^{\perp}_{[e_1, e_\ell]} \xi_1 = -\left\langle \nabla_{e_1} e_3, e_\ell \right\rangle \nabla^{\perp}_{e_3} \xi_1 = 0$$

çıkar. O halde

$$0 = R^{\perp}(e_1, e_\ell)\xi_1 = -\nabla^{\perp}_{e_\ell}(\alpha\xi_2) = -e_\ell(\alpha)\xi_2 - \alpha\nabla^{\perp}_{e_\ell}\xi_2 = -e_\ell(\alpha)\xi_2 + \alpha\nabla^{\perp}_{e_\ell}\xi_1$$

bağıntılarından,

$$e_\ell(\alpha) = 0$$

elde edilir.

$$0 = R^{\perp}(e_2, e_\ell)\xi_1 = \nabla^{\perp}_{e_2}\nabla^{\perp}_{e_\ell}\xi_1 - \nabla^{\perp}_{e_\ell}\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1 - \nabla^{\perp}_{[e_2,e_\ell]}\xi_1 = -\nabla^{\perp}_{e_\ell}(\beta\xi_2) - \nabla^{\perp}_{[e_2,e_\ell]}\xi_1$$

dir. Buna göre $[e_2, e_\ell] = \nabla_{e_2} e_\ell - \nabla_{e_\ell} e_2$ dir. Dolayısıyla

$$[e_2, e_\ell]^1 = \nabla^1_{e_2} e_\ell - \nabla^1_{e_\ell} e_2 = \nabla^1_{e_2} e_\ell = -\left\langle \nabla_{e_2} e_3, e_\ell \right\rangle e_3$$

bulunur ve böylece

$$\nabla^{\perp}_{[e_2,e_\ell]}\xi_1 = -\left\langle \nabla_{e_2} e_3, e_\ell \right\rangle \nabla^{\perp}_{e_3}\xi_1 = 0$$

çıkar. O takdirde

$$0 = R^{\perp}(e_2, e_\ell)\xi_1 = -\nabla^{\perp}_{e_\ell}(\beta\xi_2) = -e_\ell(\beta)\xi_2 - \beta\nabla^{\perp}_{e_\ell}\xi_2 = -e_\ell(\beta)\xi_2 + \beta\nabla^{\perp}_{e_\ell}\xi_1$$

bağıntılarından,

$$e_\ell(\beta) = 0$$

elde edilir. $R(e_1, e_2)e_3 = 0$ dır. Buna göre

$$0 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_3$$

$$\equiv \nabla_{e_1}\left(ae_1\right) - \nabla_{e_2}\left(-ae_2\right) - \nabla_{\left(-ee_1+de_2+2ae_3\right)}e_3 \mod\left\{e_1,e_2,e_3\right\}^{\perp}$$

$$\equiv e_1\left(a\right)e_1 + a\left(ee_2\right) + e_2\left(a\right)e_2 + a\left(de_1\right)$$

$$+e\left(-ae_2\right) - d\left(ae_1\right) - 2a\left(-\frac{\lambda}{\mu}\alpha e_1 + \frac{\lambda}{\mu}\beta e_2\right) \mod\left\{e_1,e_2,e_3\right\}^{\perp}$$

$$\equiv \left(e_1\left(a\right) + 2a\alpha\frac{\lambda}{\mu}\right)e_1 + \left(e_2\left(a\right) - 2a\beta\frac{\lambda}{\mu}\right)e_2 \mod\left\{e_1,e_2,e_3\right\}^{\perp}$$

ve böylece

$$e_1\left(a\right) = -2a\alpha\frac{\lambda}{\mu},\ e_2\left(a\right) = 2a\beta\frac{\lambda}{\mu}$$

elde edilir. (2.1.21) den, $\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_3,e_1\right\rangle = c + \lambda^2$ dir. Diğer taraftan, Tanım 2.1.29 dan,

$$\left\langle R\left(e_1,e_3\right)e_3,e_1\right\rangle = \left\langle \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_3, e_1\right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{\lambda}{\mu}e_1\left(\alpha\right)e_1 - \frac{\lambda}{\mu}\alpha\nabla_{e_1}e_1 + \frac{\lambda}{\mu}e_1\left(\beta\right)e_2 + \frac{\lambda}{\mu}\beta\nabla_{e_1}e_2, e_1\right\rangle$$

$$+\left\langle e_3\left(a\right)e_2 + a\nabla_{e_3}e_2, e_1\right\rangle - \left\langle \nabla_{\left(-\frac{1}{2}ae_2 - \frac{\lambda}{\mu}\alpha e_3\right)}e_3, e_1\right\rangle$$

$$= -\frac{\lambda}{\mu}e_1\left(\alpha\right) + \frac{\lambda}{\mu}\beta\left\langle -ee_1 + ae_3, e_1\right\rangle + a\left\langle \frac{1}{2}ae_1 - \frac{\lambda}{\mu}\beta e_3, e_1\right\rangle$$

$$+\frac{1}{2}a\left\langle \nabla_{e_2}e_3, e_1\right\rangle + \frac{\lambda}{\mu}\alpha\left\langle \nabla_{e_3}e_3, e_1\right\rangle$$

$$= -\frac{\lambda}{\mu}e_1\left(\alpha\right) - \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{2\mu}\left(\lambda\beta - \mu\alpha\right)\beta + a^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\alpha^2$$

dir. Böylece $c + \lambda^2 = -\frac{\lambda}{\mu}e_1\left(\alpha\right) - \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{2\mu}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta\right) + a^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\alpha^2$ veya

$$e_1(\alpha) = -\frac{(c+\lambda^2)\mu}{\lambda} + \frac{a^2\mu}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\mu}\beta^2 - \frac{\lambda}{\mu}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta \tag{2.5.25}$$

bulunur. (2.1.21) den, $\langle R(e_2,e_3)e_3,e_2\rangle = c+\lambda^2$ dir. Diğer taraftan, Tanım 2.1.29 dan,

$$\begin{aligned}
\langle R(e_2,e_3)e_3,e_2\rangle &= \left\langle \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_3, e_2\right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{\lambda}{\mu}e_2(\alpha)e_1 - \frac{\lambda}{\mu}\alpha\nabla_{e_2}e_1 + \frac{\lambda}{\mu}e_2(\beta)e_2 + \frac{\lambda}{\mu}\beta\nabla_{e_2}e_2, e_2\right\rangle \\
&\quad - \left\langle e_3(a)e_1 + a\nabla_{e_3}e_1, e_2\right\rangle - \left\langle \nabla_{\left(\frac{1}{2}ae_1 + \frac{\lambda}{\mu}\beta e_3\right)}e_3, e_2\right\rangle \\
&= -\frac{\lambda}{\mu}\alpha\left\langle \nabla_{e_2}e_1, e_2\right\rangle + \frac{\lambda}{\mu}e_2(\beta) - a\left\langle -\frac{1}{2}ae_2 + \frac{\lambda}{\mu}\alpha e_3, e_2\right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2}a\left\langle \nabla_{e_1}e_3, e_2\right\rangle - \frac{\lambda}{\mu}\beta\left\langle \nabla_{e_3}e_3, e_2\right\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2\mu}\alpha\beta - \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\alpha^2 + \frac{\lambda}{\mu}e_2(\beta) + a^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\beta^2
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $c+\lambda^2 = \frac{\lambda}{2\mu}\alpha\beta - \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\alpha^2 + \frac{\lambda}{\mu}e_2(\beta) + a^2 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\beta^2$ veya

$$e_2(\beta) = \frac{(c+\lambda^2)\mu}{\lambda} - \frac{a^2\mu}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\mu}\alpha^2 + \frac{\lambda}{\mu}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta \tag{2.5.26}$$

çıkar. (2.1.22) den,

$$\begin{aligned}
\langle R^{\perp}(e_1,e_2)\xi_1,\xi_2\rangle &= \langle A_{\xi_2}(e_1), A_{\xi_1}(e_2)\rangle - \langle A_{\xi_1}(e_1), A_{\xi_2}(e_2)\rangle \\
&= \left(h_{11}^2 - h_{22}^2\right)h_{12}^1 \\
&= (\mu - (-\mu))\mu \\
&= 2\mu^2
\end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, (2.1.22) ve (2.1.23) ten,

$$\begin{aligned}\left\langle R^{\perp}\left(e_1,e_2\right)\xi_1,\xi_2\right\rangle &= \left\langle \nabla^{\perp}_{e_1}\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1-\nabla^{\perp}_{e_2}\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1-\nabla^{\perp}_{[e_1,e_2]}\xi_1,\xi_2\right\rangle\\ &=\left\langle e_1\left(\beta\right)\xi_2+\beta\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_2,\xi_2\right\rangle-\left\langle e_2\left(\alpha\right)\xi_2+\alpha\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_2,\xi_2\right\rangle\\ &\quad-\left\langle \nabla^{\perp}_{(-ee_1+de_2+2ae_3)}\xi_1,\xi_2\right\rangle\\ &=e_1\left(\beta\right)-e_2\left(\alpha\right)+e\left\langle\nabla^{\perp}_{e_1}\xi_1,\xi_2\right\rangle-d\left\langle\nabla^{\perp}_{e_2}\xi_1,\xi_2\right\rangle\\ &=e_1\left(\beta\right)-e_2\left(\alpha\right)+\frac{1}{2\mu}\Big(2\lambda\alpha\beta-\mu\left(\alpha^2+\beta^2\right)\Big)\end{aligned}$$

elde edilir ki, böylece

$$e_1\left(\beta\right)-e_2\left(\alpha\right)+\frac{1}{2\mu}\Big(2\lambda\alpha\beta-\mu\left(\alpha^2+\beta^2\right)\Big)=2\mu^2 \qquad (2.5.27)$$

bulunur. (2.1.21) den, $\left\langle R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_1\right\rangle=c+\lambda^2-2\mu^2$ dir. Diğer taraftan, Tanım 2.1.29 dan,

$$\begin{aligned}\left\langle R\left(e_1,e_2\right)e_2,e_1\right\rangle &=\left\langle\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2-\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2-\nabla_{[e_1,e_2]}e_2,e_1\right\rangle\\ &=e_1\left(d\right)-\left\langle -e_2\left(e\right)e_1-e\nabla_{e_2}e_1+e_2\left(a\right)e_3+a\nabla_{e_2}e_3,e_1\right\rangle\\ &\quad-\left\langle\nabla_{(-ee_1+de_2+2ae_3)}e_2,e_1\right\rangle\\ &=e_1\left(d\right)+e_2\left(e\right)-a^2+e\left\langle\nabla_{e_1}e_2,e_1\right\rangle-d\left\langle\nabla_{e_2}e_2,e_1\right\rangle-2a\left\langle\nabla_{e_3}e_2,e_1\right\rangle\\ &=e_1\left(d\right)+e_2\left(e\right)-2a^2-e^2-d^2\end{aligned}$$

çıkar ki, bu sayede

$$e_1\left(d\right)+e_2\left(e\right)-e^2-d^2-2a^2=c+\lambda^2-2\mu^2 \qquad (2.5.28)$$

elde edilir. (2.5.28) de e ve d yi α ve β bilinmeyen fonksiyonları yardımıyla ifade edecek olursak,

$$\frac{1}{2}\left(e_1(\beta)-e_2(\alpha)\right)-\frac{\lambda}{2\mu}e_1(\alpha)+\frac{\lambda}{2\mu}e_2(\beta)-e^2-d^2-2a^2=c+\lambda^2-2\mu^2 \quad (2.5.29)$$

bulunur. Şimdi de (2.5.25), (2.5.26) ve (2.5.27) yi (2.5.29) da değerlendirecek olursak,

$$\begin{aligned}
&\mu^2-\frac{\lambda}{2\mu}\alpha\beta+\frac{1}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(c+\lambda^2\right)-\frac{a^2}{2}+\frac{\lambda^2}{4\mu^2}\beta^2+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\alpha^2-\frac{\lambda}{4\mu}\alpha\beta\\
&+\frac{1}{2}\left(c+\lambda^2\right)-\frac{a^2}{2}+\frac{\lambda^2}{4\mu^2}\alpha^2+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\beta^2-\frac{\lambda}{4\mu}\alpha\beta\\
&-e^2-d^2-2a^2=c+\lambda^2-2\mu^2
\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$3\mu^2-\frac{\lambda}{\mu}\alpha\beta+\frac{1}{4}\left(\alpha^2+\beta^2\right)-3a^2+\frac{3\lambda^2}{4\mu^2}\left(\alpha^2+\beta^2\right)-e^2-d^2=0 \quad (2.5.30)$$

çıkar. e^2 ve d^2 ifadelerini (2.5.30) da yazacak olursak,

$$3\mu^2-3a^2+\frac{\lambda^2\alpha^2}{2\mu^2}+\frac{\lambda^2\beta^2}{2\mu^2}=0$$

veya

$$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\lambda^2-6a^2\mu^2+6\mu^4=0 \quad (2.5.31)$$

elde edilir. (2.5.31), e_3 yönünde türetilirse $e_3(a)=0$, benzer şekilde e_ℓ $(\ell>3)$ yönünde türetilirse de $e_\ell(a)=0$ çıkar. Şimdi a için integrallenebilme koşulunu hesaplayalım. Bir taraftan,

$$[e_1, e_3]a = e_1(e_3(a)) - e_3(e_1(a))$$
$$= a^2\beta\frac{\lambda}{\mu}$$

ve diğer taraftan da

$$[e_1, e_3]a = \left(\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{e_3}e_1\right)a$$
$$= -a^2\beta\frac{\lambda}{\mu}$$

bulunur. Dolayısıyla $a^2\lambda\beta = 0$ dır. Benzer şekilde, $a^2\lambda\alpha = 0$ da çıkar. Eğer $\alpha = \beta = 0$ alırsak, o takdirde λ bir sabittir ve Teorem 2.5.5 ten $\mu = 0$ elde edilir ki bu, μ nün sıfırdan farklı bir sabit olması ile çelişir. Dolayısıyla $a = 0$ dır ve bu durumda da (2.5.31) den $\lambda = 0$ bulunur ki bu, $\lambda \neq 0$ kabulümüzle çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır ve $\lambda = 0$ olup x minimaldir. □

3. BULGULAR

Bu bölümde, bir Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş keyfi dik boyutlu tümel jeodezik Riemann uzay formlarının bazı karakterizasyonları ve bununla birlikte her bir karakterizasyon için keyfi dik boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun E^m Öklid uzayına bir Riemann uzay formu olarak minimal izometrik şekilde dahil edilebilmesi için gerekli olan bir koşul elde edilmiştir.

Teorem 3.1. $(n_1,...,n_k)\in S(n)$ ve M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O takdirde $k\geq 1$ olmak üzere, **(i)** $n_1=n_2=...=n_k$ ve **(ii)** $n_1+n_2+...+n_k=n$ olmadıkça, M^n nin (2.4.53) ü özdeş olarak sağlaması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Riemann uzay formu ve dahil etmenin tümel jeodezik olmasıdır.

Kanıtlama: M^n nin bir $R^m(c)$ Riemann uzay formunun $k\geq 1$ olmak üzere, **(i)** ve **(ii)** oladıkça, (2.4.53) eşitliğini sağlayan bir altmanifoldu olduğunu kabul edelim. Bu durumda Teorem 2.4.17 nin kanıtındaki gibi $\delta(n_1,...,n_k)=\hat{\delta}(n_1,...,n_k)$ eşitliğinden, M^n bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı olup, (2.4.54) elde edilir. Teorem 2.3.12 den, $k\geq 2$ olmak üzere, M^n bir $S(n_1,...,n_k)$-uzayı ise **(i)** ve **(ii)** olmadıkça, M^n nin bir Riemann uzay formu olduğunu biliyoruz. O halde (2.4.55) eşitliğine sahibiz. Yine, Teorem 2.4.17 nin kanıtından **(i)** ve **(ii)** olmadıkça, (2.4.55) in gerçeklenmesi için $\mu_{n+1}=0$ ve (2.4.56) dan da $a_{\alpha_j}=a_{\beta_j}$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $h^r_{\alpha_j\alpha_j}=h^r_{\beta_j\beta_j}$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $r=n+2,...,m$ ve $h^r_{\alpha_j\beta_j}=0$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $r=n+1,...,m$ olmalıdır. Buna göre Teorem 2.4.15 ten, $\dot{I}z\left(A_1^{n+1}\right)=\ \dot{I}z\left(A_2^{n+1}\right)=...=\dot{I}z\left(A_k^{n+1}\right)=0$ olacağından, $a_{\alpha_j}=a_{\beta_j}=0$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$ ve (2.4.50) den $h^r_{\alpha_j\alpha_j}=h^r_{\beta_j\beta_j}=0$; $\alpha_j,\beta_j\in\Delta_j$, $j=1,...,k$, $r=n+2,...,m$ çıkar. Ayrıca Teorem 2.4.15 ten $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2\cup...\cup\Delta_k$ olmak üzere, $\alpha\notin\Delta$ için, $a_{\alpha\alpha}=\mu_{n+1}=0$ buluruz. (2.4.50) den, $h^r_{\alpha\alpha}=0$; $\alpha\notin\Delta$, $r=n+2,...,m$ ve

$\Delta^2 = (\Delta_1 \times \Delta_1) \cup ... \cup (\Delta_k \times \Delta_k)$ olmak üzere, $h^r_{\alpha\beta} = 0$; $(\alpha, \beta) \notin \Delta^2$, $\alpha \neq \beta$, $r = n+1,$ $..., m$ olduğunu biliyoruz. Böylece M^n, $R^m(c)$ de tümel jeodeziktir. $k = 1$ için kanıt açıktır. Tersi, Teorem 2.4.17 de gösterildi. □

Teorem 3.2. $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ ve M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O takdirde M^n nin (2.4.53) ü özdeş olarak sağlaması ve $\mu_{n+1} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul M^n nin bir Riemann uzay formu ve dahil etmenin tümel jeodezik olmasıdır.

Kanıtlama: Kanıt, Teorem 2.4.17 nin kanıtından kolayca çıkar. □

Sonuç 3.3. $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ ve M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n, $k \geq 1$ için **(i)** $n_1 = n_2 = ... = n_k$ ve **(ii)** $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ olmadıkça, (2.4.53) ü özdeş olarak sağlarsa M^n, bir Riemann uzay formu ve dahil etme minimal olur. Özel olarak, M^n, $k \geq 1$ için **(i)** ve **(ii)** olmadıkça,

$$\hat{\delta}(n_1,...,n_k) = \frac{n^2\left(n+k-1-\sum n_j\right)}{2\left(n+k-\sum n_j\right)} H^2 \tag{3.1}$$

eşitliğini özdeş olarak sağlarsa o takdirde keyfi dik boyutlu M^n Riemann manifoldu, Öklid uzayına bir Riemann uzay formu olarak minimal izometrik şekilde dahil edilebilir.

Sonuç 3.4. $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ ve M^n, sabit c kesit eğrilikli bir $R^m(c)$ Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n, (2.4.53) ü özdeş olarak sağlar ve $\mu_{n+1} = 0$ ise M^n bir Riemann uzay formu ve dahil etme minimal olur. Özel olarak M^n, (3.1) eşitliğini özdeş olarak sağlar ve $\mu_{n+1} = 0$ ise bu durumda keyfi dik boyutlu M^n Riemann manifoldu, Öklid uzayına bir Riemann uzay formu olarak minimal izometrik şekilde dahil edilebilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

B.Y. Chen tarafından, bir Riemann uzay formunun keyfi dik boyutlu altmanifoldları için yeni Riemann eğrilik değişmezleri tanımlanarak, içsel ve dışsal eğrilik değişmezleri arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir; bunları içeren teoremleri bu tez kapsamında incelemiş bulunuyoruz [1,8-14]. Chen tarafından yapılan bazı çalışmalarda [11]; Kulkarni [30] tarafından verilmiş olan, $n \geq 4$ olmak üzere, n-boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun konformal düz olmasının, ortogonal her $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tanjant vektör dörtlüsü için ikişer ikişer tanımlanan kesit eğriliklerinin $K_{12} + K_{34} = K_{14} + K_{23}$ şeklinde bir bağıntıyı sağlamasına eşdeğer olduğu gerçeğinden ilham alındığı anlaşılmaktadır. Bilindiği gibi bir M^n Riemann manifoldu uygun bir Öklid uzayına minimal izometrik bir şekilde dahil edilebiliyor ise M^n kompakt değildir. Yine, bir M^n Riemann manifoldu uygun bir Öklid uzayına minimal izometrik bir şekilde dahil edilebiliyor ise M^n nin Ricci tensör alanı negatif yarı-tanımlıdır. B.Y. Chen, [13] te, verilen bir M^n Riemann manifoldunun uygun bir Öklid uzayına minimal izometrik bir şekilde dahil edilebilmesi için üçüncü bir gerek koşulu ifade etmiştir. Bu koşul, $\forall p \in M^n$ noktasındaki herhangi bir $\pi \subset T_p\left(M^n\right)$ düzlem kesitinin tanımladığı kesit eğriliği ile skaler eğrilik arasında $K(\pi) \geq \tau(p)$ şeklinde bir eşitsizliğin sağlanmasıdır. Ayrıca B.Y. Chen, Öklid uzayının $\inf K \equiv \tau$ koşulunu sağlayan minimal altmanifoldlarını da sınıflandırmıştır [13]. Bu tez kapsamında, bir Riemann uzay formunun keyfi dik boyutlu bir altmanifoldunun şekil operatörü ile k-Ricci eğriliği arasındaki ilişkiyi veren bazı teoremlerin yanında, keyfi dik boyutlu bir altmanifoldun bir Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmesi durumunda, ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi ile Ricci eğriliği arasındaki ilişkiyi veren bazı teoremleri inceledik [12]. Ayrıca Chen tarafından bulunmuş olan temel eşitsizliğin eşitlik olması durumunda, altmanifoldun Einstein, konformal düz ve yarı-simetrik olma gibi belli başlı Riemann eğrilik koşullarından birini sağladığı ilave kabul altında, E^m nin M^n altmanifoldlarını inceleyerek ilgili sonuçları ortaya koyduk [16]. Bunların yanında Riemann uzay formlarının altmanifoldları için verilen genel bir optimal eşitsizliğin, keyfi bir Riemann manifoldunun keyfi bir Riemann altmanifolduna genişletilmesi olan ve sadece δ-değişmezi ile altmanifoldun ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi ve üst manifoldun (altmanifold üzerindeki bir noktada altmanifoldun tanjant uzayının 2-düzlem kesitlerine kısıtlanan) kesit eğrilik fonksiyonunun maksimumundan oluşan genel bir optimal eşitsizliği çalıştık [15]. Chen eşitsizlikleri ve özel halde eşitliklerinin sağlanma koşullarının araştırılması yaygın bir uygulama alanı bulmuştur. Bir altmanifoldun başlıca dışsal değişmezleri ile başlıca içsel değişmezleri arasında bir ilişki kurma probleminin farklı çözümlerinin incelenmiş olduğu bu teze noktasal bir uygulamayı da dahil ederek, 2 dik boyutlu bir M^n, $n \geq 2$, Riemann manifoldunun $\mathrm{x}: M^n \to R^{n+2}(c)$ şeklindeki bir izometrik dahil edilmesi için normalize edilmiş skaler eğrilik ve normal skaler eğrilik, sırasıyla ρ ve $\rho^{\perp}$ ile gösterilmek üzere, ortalama eğrilik vektörünün uzunluğunun karesi ile bu eğrilikler arasındaki $H^2 \geq \rho + \rho^{\perp} - c$ şeklinde verilen bir eşitsizliği inceledik [18]. Bu eşitsizliğin eşitlik olması halinde, tümel jeodezik olmayan bir p noktasında, ortalama eğrilik sıfırdan farklı bir sabitken M^n nin tümel umbilik olacağını kanıtladık ve $n \geq 3$ için yukarıdaki eşitsizliğin eşitlik halinin sağlanması durumunda, $\rho^{\perp}$ sıfırdan farklı bir sabit ise bu halde x in minimal bir dahil etme olacağını gösterdik [18]. Ayrıca Bölüm 3 te, bir Riemann uzay formuna izometrik olarak dahil edilmiş keyfi dik boyutlu tümel jeodezik Riemann uzay formlarının bazı karakterizasyonlarını ve bununla birlikte her bir karakterizasyon için keyfi dik boyutlu bir M^n Riemann manifoldunun E^m Öklid uzayına bir Riemann uzay formu olarak minimal izometrik şekilde dahil edilebilmesi için gerekli olan bir koşul elde ettik. Günümüzde halen bu konuda birçok çalışma sürdürülmektedir.

1957 yılında, Y. Ishii tarafından "On conharmonic transformations, *Tensor* (1957), 73-80" adresi ile yayınlanmış makalede g, Riemann metriği; R, Riemann eğrilik tensör alanı ve Ric, Ricci tensör alanı olmak üzere, M^n ye tanjant X, Y, Z, W vektör alanları için K, konharmonik eğrilik tensör alanı,

$$\mathrm{K}(X,Y;Z,W) = R(X,Y;Z,W) - \frac{1}{n-2}\{g(X,W)Ric(Y,Z) + g(Y,Z)Ric(X,W)$$
$$-g(X,Z)Ric(Y,W) - g(Y,W)Ric(X,Z)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır [34]. Bu çalışma sonucunda, içsel ve dışsal eğrilik değişmezlerini içeren bağıntıların konharmonik eğrilik tensör alanı ile de ilişkilendirilebileceği, konharmonik düz bir Riemann manifoldunun aynı zamanda konformal düz ve sıfır skaler eğriliğe sahip olması nedeniyle kolayca görülmektedir. O nedenle ileri aşamalarda bu konuda çalışılabilmesi mümkün görülmektedir. Bütün bu konularda ve ideal dahil etmeler hususunda sınıflandırma problemlerini ileriye götürmek ve halihazırda tanımlanmış bulunan veya yeni tanımlanacak olan Riemann değişmezlerinin topolojik gerektirmelerini araştırmak ve yeni uygulamalarını bulmak veya bu yeni değişmezler ile diğer bazı geometrik çokluklar arasında ilişkiler kurmak açık problemler olarak gözükmektedir.

KAYNAKLAR

[1]. CHEN, B.Y., 2000, Riemannian DNA, Inequalities and Their Applications, *Tamkang Journal of Science and Engineering*, Vol. 3, No. 3, 123-130.

[2]. OSSERMAN, R., 1990, Curvature in the Eighties, *Amer. Math. Monthly*, 97, 731-756.

[3]. CHENG, S.-Y., YAU, S.-T., 1977, Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature, *Math. Ann.*, 225, 195-204.

[4]. ROS, A., 1988, Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature and a Congruence Theorem, *J. Differential Geom.*, 27, 215-220.

[5]. NASH, J. F., 1956, The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds, *Ann. of Math.*, 63, 20-63.

[6]. YAU, S.-T., 1991, *Mathematical Research Today and Tomorrow, Viewpoints of Seven Fields Medalists*, Springer-Verlag, 30-39.

[7]. CHERN, S.S., 1968, *Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold*, Univ. of Kansas, Lawrence, Kansas.

[8]. CHEN, B.Y., 1995, A Riemannian Invariant and Its Applications to Submanifold Theory, *Results in Mathematics*, 29, 17-26.

[9]. CHEN, B.Y., 1998, Strings of Riemannian Invariants, Inequalities, Ideal Immersions and Their Applications, *Third Pacific Rim Geom. Conf.*, Intern. Press, Cambridge, MA, 7-60.

[10]. CHEN, B.Y., 2000, Some New Obstructions to Minimal and Lagrangian Isometric Immersions, *Japan. J. Math.*, 26, 105-127.

[11]. CHEN, B.Y., DILLEN, F., VERSTRAELEN, L., VRANCKEN, L., 2000, Characterizations of Riemannian Space Forms, Einstein Spaces and Conformally Flat Spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol.128, 589-598.

[12]. CHEN, B.Y., 1999, Relations Between Ricci Curvature and Shape Operator for Submanifolds with Arbitrary Codimensions, *Glasgow Math. J.*, 41, 33-41.

[13]. CHEN, B.Y., 1993, Some Pinching and Classification Theorems for Minimal Submanifolds, *Arch. Math.*, 60, 568-578.

[14]. CHEN, B.Y., 1996, Mean Curvature and Shape Operator of Isometric Immersions in Real-Space-Forms, *Glasgow Math. J.*, 38, 87-97.

[15]. CHEN, B.Y., 2005, A General Optimal Inequality for Arbitrary Riemannian Submanifolds, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Volume 6, Issue 3, Article 77, 1-10.

[16]. DILLEN, F., PETROVIC, M., VERSTRAELEN, L., 1997, Einstein, Conformally Flat and Semi-Symmetric Submanifolds Satisfying Chen's Equality, *Israel J. Math.,* 100, 163-169.

[17]. SUCEAVĂ, B., 1999, Some Remarks on B.Y. Chen's Inequality Involving Classical Invariants, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*, 45, 405-412.

[18]. DE SMET P.J., DILLEN, F., VERSTRAELEN, L., VRANCKEN, L., 1999, A Pointwise Inequality in Submanifold Theory, *Archivum Mathematicum (Brno),* Tomus 35, 115-128.

[19]. DE FELICE, F., CLARKE, C.J.S, 1990, *Relativity on Curved Manifolds,* Cambridge University Press, Cambridge, 0-521-26639-4.

[20]. YANO, K., KON, M., 1984, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 9971-966-15-8.

[21]. DO CARMO, M.P., 1992, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, 0-8176-3490-8.

[22]. SPIVAK, M., January, 1998, *Calculus on Manifolds*, The Advanced Book Program Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 0-8053-9021-9.

[23]. SPIEGEL, M.R., 1959, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, Schaum Publishing Co., New York.

[24]. AUBIN, T., 2001, *A Course in Differential Geometry*, American Mathematical Society, USA, 0-8218-2709-X.

[25]. KÜHNEL, W., 2002, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, American Mathematical Society, USA, 0-8218-2656-5.

[26]. CHEN, B.Y., 1973, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, Inc., New York, 0-8247-6075-1.

[27]. KOBAYASHI, S., NOMUZI, K., 1963, *Foundations of Differential Geometry*, Volume 1, Interscience Publishers a Division of John Wiley & Sons, New York, London, 0 470 49647 9.

[28]. DUGGAL, KRISHAN L., BEJANCU AUREL, 1996, *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publisher P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 0-7923-3957-6.

[29]. VERSTRAELEN, L., ZAFINDRATAFA, G., 1991, On the Sectional Curvature of Conharmonically Flat Spaces, *Rendiconti del Seminario Matematico di Messina*, Seria 2, Vol.1, 247-254.

[30]. KULKARNI, R.S., 1969, Curvature Structures and Conformal Transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 75, 91-94.

[31]. DILLEN, F., PETROVIC-TORGASEV, M., VERSTRAELEN, L., 1988, The Conharmonic Curvature Tensor and 4-Dimensional Catenoids, *Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica*, 33, 2, 16-23.

[32]. CHEN, B.Y., OKUMURA, M., May 1973, Scalar Curvature, Inequality and Submanifold, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 38, Number 3, 605-608.

[33]. LEUNG, P.F., 1985, On a Relation Between the Topology and the Intrinsic and Extrinsic Geometries of a Compact Submanifold, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 28, 305-311.

[34]. ISHII, Y., 1957, On Conharmonic Transformations, *Tensor*, 7, 73-80.

ÖZGEÇMİŞ

24.11.1980 tarihinde İstanbul'da doğdum. İlkokul birinci ve ikinci sınıfı Maçka İlkokulu, üçüncü ve dördüncü sınıfı Şükrü Naili Paşa İlkokulu ve beşinci sınıfı Ahmet Çuhadaroğlu İlköğretim Okulu'nda okudum. Orta okulu Sait Çiftçi İlköğretim Okulu'nda ve liseyi de Beşiktaş Sakıp Sabancı Lisesi'nde bitirdim. 1999 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2001 yılında Fizik Bölümü Çift Anadal Programı'na kayıt yaptırdım. 2003 yılında Matematik Bölümü'nden mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım. Yine bu yıl, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandım. 2004 yılında Fizik Bölümü Çift Anadal Programı öğrenimimi tamamladım. Halen araştırma görevlisi olarak çalışmalarıma devam etmekteyim.