



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN KOZMOLOJİDEKİ
UYGULAMALARI**

Özcan ERDOĞAN
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı

Danışman
Prof.Dr. Hâşim MUTUŞ

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimim ve de Tez çalışmalarım süresince huzurlu bir ortam sağlayan Fizik Bölümü Başkanı Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ ile Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Başkanı Prof. Dr. Şehsuvar ZEBİTAY hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Hâşim MUTUŞ' a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım boyunca hiçbir zaman benden yardımını ve desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Araş.Gör. Dr. Ertan GÜDEKLİ' ye çok teşekkür ederim.

Ayrıca bana her türlü imkânı sunmak için çaba gösteren aileme emekleri ve sevgileri için teşekkür ederim.

Temmuz, 2006

Özcan ERDOĞAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2.GENEL KISIMLAR.....	6
2.1 Dinamik Sistemler Teorisinin Kısa Bir Tarihçesi.....	6
2.2. Kozmik Akışkan.....	7
2.2.1 Mükemmel Akışkan ve Barotropik Lineer Hâl Denklemi.....	8
2.2.2 Chaplygin Gazı.....	9
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	12
3.1 Dinamik Sistemler Teorisi.....	12
3.1.1 Diferansiyel Denklem Sistemi ve Akışı.....	12
3.1.2 Denge Noktası ve Yörüngeler.....	14
3.1.3 Kararlılık.....	15
3.1.4 İnvaryant Küme.....	16
3.1.5 Monoton Fonksiyon.....	16
3.2. Kozmoloji.....	18
3.2.1 Koordinatsal Tabanda Einstein Alan Denklemleri ve Uzay-Zaman Geometrisi.....	18
3.2.2 Tetrad Tabanında Geometri.....	20
3.2.2a Genel Tetrad Sistemi.....	20
3.2.2b Dik-Birim Tetrad Sistemi.....	24
3.2.3. Tetrad Sisteminde Kozmoloji.....	25
3.2.3a Uzay-Zamanın 1+3 Kovaryant Ayrışımı.....	25
3.2.3b Kozmik Akışkanın Kinematik Büyüklükleri.....	26
3.2.3c Dik-Birim Tetrad Sisteminde Bağlantı Katsayıları ve Komütasyon Fonksiyonları.....	27
3.2.3d Kozmolojik Denklemler.....	30

3.2.4 Uzayca Homojen Modellere İndirgenmiş Evrim ve Bağ Denklemleri.....	35
3.2.4a Bianchi-Tip Modeller.....	36
3.2.4b Evrim Denklemlerinin Toplu Gösterimi.....	39
4.BULGULAR.....	41
4.1.FLRW Modelleri İçin Dinamik Sistem.....	41
4.1.1 Evrim ve Bağ Denklemlerinin Dinamik Sistem Hâline Getirilmesi.....	43
4.1.2 Barotropik Lineer Hal Denklemleri Akışkan.....	46
4.1.2a Dinamik Sistem Analizi.....	47
4.1.3 Chaplygin Gazı.....	57
4.1.3a Dinamik Sistem Analizi.....	59
4.2.Bianchi-Tip Modeller İçin Dinamik Sistem.....	64
5.TARTIŞMA VE SONUÇ.....	69
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	73

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	: Lineer Barotropik Akışkan İçin γ Parametresinin Değerlerine Karşılık Düşen Madde-Enerji Tipleri.....	9
Şekil 4.1	: g için Faz Uzayı.....	49
Şekil 4.2	: $L^{-1} 0$ için DS' nin Faz uzayı.....	51
Şekil 4.3	: Negatif Olmayan Basınçlı $L^{-1} 0$ Modellerin Faz Portreleri.....	53
Şekil 4.4	: Negatif Basınçlı $L^{-1} 0$ Modellerin Faz Portreleri.....	56
Şekil 4.5	: Şekil 4.5 : Çeşitli α Değerleri için Faz Portresi	63

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1 : Akışkanın Kinematik Büyüklükleri Cinsinden Bağlantı Katsayıları ve Komütasyon Fonksiyonları.....	29
Tablo 3.2 : Bianchi-tip Modellerin Ellis ve MacCallum Sınıflandırması.....	37
Tablo 3.3 : Bianchi-tip Modellerde Hiyerarşi.....	38
Tablo 4.1 : Denge Noktalarının Kararlılığı.....	49
Tablo 4.2 : γ Değerleri için Denge Noktaları ve Kararlılık Analizi.....	52
Tablo 4.3 : Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı için $L = 0$ Durumunda DS' in Denge Noktaları ve Kararlılık Analizi.....	59

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{R}	: Reel Sayılar Kümesi
\mathbb{R}^n	: n-boyutlu Öklit uzayı
DST	: Dinamik Sistemler Teorisi
DSA	: Dinamik Sistem Analizi
DS	: Dinamik Sistem
IDS	: İndirgenmiş Dinamik Sistem
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
FL	: Friedmann-Lemaitre
RW	: Robertson-Walker
FLRW	: Friedmann-Lemaitre- Robertson-Walker
KMFI	: Kozmik Mikrodalga Fon Işınımı
G_{ab}	: Einstein tansörü
R_{ab}	: Ricci tansörü,
g_{ab}	: 4-boyutlu uzay-zamanın metriği
R	: 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci Skaler Eğriliği
T_{ab}	: Enerji-momentum tansörü
L	: Kozmolojik sâbit
u^a	: Akışkanı oluşturan parçacıkların veya gözlemcinin 4-lü hız vektörü
h_{ab}	: İzdüşüm tansörü
m	: Madde-enerji yoğunluğu
q_a	: Enerji akısı ya da momentum yoğunluğu
p	: Eşyönlü basınç
p_{ab}	: Eşyönsüz basınç
s_{ab}	: Kayma (Shear) tansörü
w_{ab}	: Girdap tansörü
C_{abcd}	: Weyl tansörü
$\{w^a\}$: Genel taban 1-formları
$\{e_a\}$: Tetrad tabanı

ÖZET

DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN KOZMOLOJİDEKİ UYGULAMALARI

Bu Tez’de, dik tetrad formalizmini kullanarak, dik ve tek-bileşenli akışkan içeren Bianchi- tip ve Robertson-Walker (RW) modellerinde kozmik evrim ve bağ denklemlerinin sistematik ve ayrıntılı bir çıkarımını veriyoruz. Sonrasında, kozmolojik evrim denklemlerinin, boyutsuz değişkenler cinsinden birinci mertebeden âdi diferansiyel denklemlerden oluşan bir otonom sistem olarak nasıl yazılabileceği açıkça gösterilmektedir. Dinamik Sistem analizininin uygulanışı, düz, açık ve Λ kozmolojik sâbitli RW modellerinde, $p = (\gamma - 1)\mu$ biçiminde barotropik lineer hâl denklemlerine bir mükemmel akışkan göz önüne alınarak, örneklenmektedir. Bu alışlagelmiş akışkana alternatif olarak, (genelleştirilmiş) Chaplygin gazı denilen $p = -A/\mu^\alpha$ biçiminde bir hal denklemlerine bir ekzotik akışkan göz önüne alıyoruz, ve bu akışkan için, ilk defa, bir dinamik sistem analizi veriyoruz. Düz ve açık RW modellerinde, kozmolojik sâbiti sıfır varsayarak, geçmiş çekicinin basınçsız düz bir Friedmann modeli ve gelecek çekicinin de şişmeli bir de Sitter evreniyle benzer davranış gösteren bir model olduğunu buluyoruz. Buradan, Chaplygin gazına, bir pozitif kozmolojik sâbit α gözünüyle bakılabileceği sonucunu çıkarıyoruz. Bu sonuç, α parametresinin değerlerine bağlı bulunmamaktadır.

SUMMARY

APPLICATIONS OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS IN COSMOLOGY

In this Thesis, using the orthonormal tetrad formalism, we give a systematic and detailed derivation of the full set of cosmic evolution and constraint equations in Bianchi-type and Robertson-Walker (RW) models containing an orthogonal, one-component fluid. It is then shown explicitly how the cosmological evolution equations can be written as an autonomous system of first order ordinary differential equations in terms of dimensionless variables. The application of the dynamical systems analysis is illustrated in flat and also in open RW models with a cosmological term Λ , using a perfect fluid source with a linear barotropic equation of state : $p = (\gamma - 1)\mu$. As an alternative to this conventional fluid, we consider an exotic fluid known as (generalised) Chaplygin gas with an equation of state : $p = -A/\mu^\alpha$, and we give, for the first time, a dynamical systems analysis for it. We find that in flat and open RW models, assuming a zero cosmological constant, the past attractor is a pressureless flat Friedmann model and the future attractor is the one which mimics the behaviour of a de Sitter model which is inflationary. From this, we conclude that the Chaplygin gas can be considered as playing the role of a positive cosmological constant. The result doesn't depend on the values of the parameter α .

1.GİRİŞ

Kısmî türevli, nonlinear (lineer olmayan) ve birbirlerine kuple (bağlı) n adet diferansiyel denklemden oluşmuş sistemin çözümünü bulmak son derece zor ve hatta olanaksızdır. Türevler birinci mertebeden ve hatta düz bile olsalar, nonlinearlik ve kuplelikten dolayı $n^3 - 2$ için durum böyledir. Yapılacak yegâne iş, ya pertürbasyon ya da sayısal çözüm yöntemlerine başvurmaktır. Bununla beraber, bir yöntem daha bulunmaktadır ki, bu, denklem sisteminin tam çözümünü bilmeksizin de çözümler hakkında bazı kritik özelliklerin belirlenmesine olanak tanımaktadır. Nitel Analiz denilen bu yöntem yalnız Matematik ve Fizikte değil, fakat, Biyoloji, İktisat, Tıp, Meteoroloji gibi pek çok alanda giderek yoğun bir ilgi görmeye başlamıştır. Bir diferansiyel denklem sistemine böyle bir yaklaşımda ; değişkenleri boyutsuz kılmak, türev değişkenini IR nin tamamını kapsayacak biçimde yeniden tanımlamak gibi işlemlerle sisteme bir Dinamik Sistem yapısı kazandırılmakta ve sonrasında da 19. yüzyılın sonlarında Poincaré tarafından başlatılmış olan Dinamik Sistemler Teorisi (kısaca DST olarak anılacaktır) uygulanmaktadır. DST epey gelişme kaydetmiş olmasına rağmen henüz ham bir teoridir. Eksikleri ve yetersizlikleri günümüzde yoğun bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Einstein' in Genel Rölativite Teorisi'nin Alan Denklemleri de yukarıda sözü edilen tipte, yâni, ikinci mertebeden uzaysal ve zamansal türevli, nonlinear ve kuple olmaları dolayısıyla zorlu bir denklem sistemi oluşturmaktadırlar. Uzay-zaman hakkında küresel simetri, homojenlik, eşyönlülük gibi simetri özellikleri varsayarak denklem ya da değişken sayısını eksiltmek gibi birtakım kolaylıklar sağlamak olanaklı olsa bile, çözüm bulmak yine de kolay olmamaktadır. Kozmoloji alanında da durum böyledir. Evrenin uzay-zamanı için son derece kısıtlayıcı olan uzayca homojenlik ve eşyönlülük varsayımı bile, kozmolojik evrim denklemlerinin ikinci mertebeden düz türevli denklemler olmasına yol açmasına rağmen, analitik çözümler ancak bazı özel durumlar için elde edilebilmektedir. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (kısaca FLRW denilecek) modelleri denilen bu modellerin bir mertebe genelini uzayca homojen ama eşyönsüz olan modeller oluşturmaktadır. Bianchi-tip modeller denilen bu modellerde de çözüm bulma daha da karmaşık duruma gelmektedir.

Kozmolojik kapsamdaki bu tür zorluklar, 1969'da Ellis ve MacCallum'un[1,2,3] yaygınlaşmasına önemli katkılar yaptığı Tetrad Formalizmi sayesinde daha hâkim olunabilir bir yapı kazanmıştır. İkinci mertebeden türevler veren metrik yaklaşıma alternatif olarak Tetrad Formalizmi birinci mertebeden türevli denklemlere yol açmaktadır. Özel olarak, uzayca homojen modeller söz konusu olduğunda, denklemler yalnızca düz zamansal türevli ve değişkenler de yalnızca zamanın fonksiyonu olmaktadır. Ancak, bu basitleştirmenin bir bedeli bulunmaktadır ; o da, denklem sayısı, metrik yaklaşımdakine göre daha fazla olmaktadır. Ama, yine de, Tetrad Formalizmi, berrak fiziksel yorum yapabilme, simetrisi daha iyi ifade edebilme, daha bütünsel olma gibi üstünlükleri nedeniyle çok rağbet edilen bir formalizm olmayı sürdürmektedir. Bu yaklaşımı daha da popüler kılan gelişme, ilk defa 1971' de Collins[4] tarafından evrim ve bağ denklemlerine DST uygulanması olmuştur. Aslında, DST tam da Kozmoloji'deki isteğe cevap vermektedir. Şöyle ki, evrenin evrimi konusunda şu iki evrenin tasviri büyük önem taşımaktadır : birincisi, başlangıcındaki, yâni uzak geri zamanlardaki (uzak geçmiş) tekilliğin mahiyeti, ikincisi ise evrenin uzak ileri zamanlarındaki (uzak gelecek) akıbeti. Evrenin bu asimtotik davranışlarını bilmek şu bakımından önem taşımaktadır. Bilindiği gibi, günümüzdeki galaksi sayımları, Kozmik Mikrodalga Fon Işınımı (KMFI) ölçümleri gibi pek çok gözlemsel veri, evrenimizin güncel görünümünün homojen ve eşyönlü olduğu düşüncesine yönelmektedir. Bu da, homojenlik ve eşyönlülük varsayımına dayanan FLRW modellerinin yaygın bir biçimde kullanılmasına bir dayanak oluşturmaktadır. Ancak, bu modeller homojenliği ve eşyönlülüğü açıklamamakta, bunları yalnızca basit bir çalışma varsayımı olarak kullanmaktadırlar. Evrenin, başlangıç evrelerinde eşyönlü olmadığı olasılık dışı değildir. Bu evreler daha gerçekçi modeller olan hangi eşyönsüz modeller ile tasvir edilmelidir? Ya da, meselâ, 10 farklı tip olan eşyönsüz Bianchi tip modeller kullanıldığında acaba bunların uzak gelecek davranışları eşyönlü olacak mıdır? (eşyönlüleşme problemi). Öte yandan, uzak geçmişte bu modeller ne tip bir tekillığe yol açmaktadır? (tekillik problemi). İşte bu iki asimtotik davranışının varlığı, DST' nin Kozmoloji'de ne denli yararlı ve gerekli bir yöntem olduğunu göstermeye yetmektedir.

Literatürde, DST' nin Kozmoloji'deki uygulamalarını konu alan pek çok çalışma mevcuttur[5]. Bunlarda ortak tutum, evreni doldurduğu varsayılan akışkanın hâl denklemini $p = (g - 1)m$ ($0 \leq g \leq 2$, g sâbit bir parametre) biçiminde almaktır. Lineer barotropik hâl denkleminin denilen bu ifâdede, p ile μ sırasıyla, akışkanın basıncını ve

madde-enerji yoğunluğunu göstermektedir. $g^3 > 1$ değerleri, toz, radyasyon gibi akla yatkın madde-enerji tiplerini tasvir ederken, $g < 1$ değerleri de, daha çok sicim teorilerinde ve şişmeli evren teorilerinde yer bulan negatif basınçlı madde tipini tasvir etmektedir. Böyle bir hâl denkleminin yaygın kullanımında fiziksel yönelimlerin yanı sıra sağladığı matematiksel kolaylıkların payı da büyüktür. Böyle olmakla birlikte, son 4-5 senedir, hâl denklemi $p = -\frac{A}{m}$ (A pozitif bir sâbit) olan yeni bir tip akışkan modeli de Kozmoloji’de gündeme gelmiştir[6-11]. Chaplygin Gazı denilen bu ekzotik akışkan, ilk defa Chaplygin tarafından 1904’de aerodinamik kapsamda kullanılmıştır. Kozmolojik kapsamda gündeme gelmesi ise, bir yandan böyle bir hâl denkleminin sicim ve zar-evren modellerinde de rastlanması ; diğer bir yandan da, çok yakın zamanlardaki gözlemsel verilerin telkin ettiği üzere evrenin genişlemesinin hızlanan tipte olduğunu[12,13] açıklamak için bir alternatif oluşturmasıdır. Chaplygin gazı, Literatürde genellikle $p = -\frac{A}{m^a}$ (A pozitif bir sâbit ve a da $0 < a \leq 1$ olan bir sâbit) biçiminde alınmakta ve A ile a parametreleri gözlemleri açıklayacak biçimde belirlenmeye çalışılmaktadır [6-11]. Chaplygin Gazının bu biçimine “Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı” denilmektedir.

Bu Tez’ de, Dinamik Sistemler Teorisi’nin (DST) Kozmoloji’de nasıl bir kullanım alanı bulduğunu ele alıyoruz. Bu iki disiplinin buluşmasını göstermek üzere, amaçladığımız işlerden biri, önce DST hakkında anlaşılabilir, öz ve yeterli bir bilgi derlemesi sunmak ve sonra da kozmolojik evrim ve bağ denklemlerinin bir Dinamik Sistem (DS) hâline getirilişlerini aşama aşama göstermek olacaktır. Kozmolojik denklemlerin, tüm geometrik ve dinamik tanımları ile hareket noktalarının belirtilip sistematik bir biçimde çıkarımları ve sonra da bunların uzayca homojen modellere özelleştirilmeleri ayrıntılarıyla gösterilecektir. Kinematik ve dinamik değişkenlerin : boyutsuzlaştırma, normlama, parametrikleştirme gibi Dinamik Sistem işlemlerini uzayca homojen modellerin bir alt sınıfını oluşturan Bianchi-tip modeller (uzayca homojen ve eşyönsüz) ile Robertson-Walker (uzayca homojen ve eşyönlü) modelleriyle sınırlı tutmaktayız. Ayrıca da kozmik akışkanımız tek bileşenli ve dik olacaktır. Dolayısıyla homojen ve eşyönsüz modellerden olan Kantowski-Sachs modelleri ile eğik akışkan ve skaler alan modelleri bu Tez’imizin kapsamına girmeyecektir. Bianchi-tip modeller için DS elde edilmesini tüm genelliğiyle göstermekle birlikte bu modellerde

Dinamik Sistem Analizinin nasıl gerçekleştirildiğine girmiyoruz. Zirâ bu, on farklı Bianchi-tip model ve sayısız varsayım ile işgörülebileceği anlamına geleceğinden bu Tez'in çerçevesini son derece aşan bir uğraş olacaktır. Buna karşılık Dinamik Sistem Analizinin nasıl uygulandığını nisbeten basit modeller olan Robertson-Walker (RW) modellerini göz önüne alarak göstereceğiz. Literatürde : a) açık ve düz, b) Λ -sız ve Λ -lı durumlar için barotropik lineer hâl denklemlerle akışkan alınarak yapılan çalışmaların sistematik, derli toplu bir derlemesini sunacağız. Bu, DST' nin Kozmoloji'deki uygulamaları hakkında dar kapsamlı da olsa bir fikir vermeye yetecektir.

Barotropik lineer hâl denklemlerle akışkana alternatif olarak Genelleştirilmiş Chaplygin Gazını göz önüne alacağız ki, Tez'imizin özgün kısmını işte bu oluşturacaktır. Literatür taramasından gördüğümüz kadarıyla, Chaplygin Gazını konu alan bir Dinamik Sistem Analizi çalışması bulunmamaktadır. Çalışmamızın, bu konuda analitik olarak yapılanlara bir alternatif oluşturacağını düşünmekteyiz.

Tezimizin çalışma planı şöyle olacaktır :

Genel Kısımlar Bölümü'nde, DST' nin tarihçesinden kısaca bahsettikten sonra, kozmik akışkanın tasvirini ele alarak lineer barotropik hâl denklemleriyle Chaplygin Gazı'nı tanıtlıyoruz.

Tez'in 3. Bölümü olan Malzeme ve Yöntem Bölümü'nde, önce, DST' ne ilişkin kavram, tanım ve teoremleri genel hatlarıyla öz olarak tanıtlıyoruz. Bu derlemeyi Tez'imiz de kullanacağımız kadarıyla sınırlı tutmaktayız. Daha sonra da Kozmoloji' ye geçerek Tetrad Formalizmini geniş bir biçimde tanıtlıp evrim ve bağ denklemlerini ayrıntılı bir biçimde en genel hâliyle çıkarıyoruz. Bu Bölüm'de ayrıca, Bianchi-tip modeller hakkında kısa bir bilgilendirme de veriyoruz.

Bulgular Bölümü'nde önce, FLRW modellerinde, evrim ve bağ denklemlerinin nasıl bir DS hâline getirildiğini gösteriyoruz. Evrim ve bağ denklemlerini homojen modellerin genel denklemlerinden özelleştirip yazmak mümkünse de, biz, Tetrad Formalizminin bağıntılarını örneklemek amacıyla bunları metriktan doğrudan doğruya tesis etmeyi tercih ettik. Bu Bölüm'de DSA' ni FLRW modeli için lineer barotropik hâl denklemleri olarak gösterdikten sonra Chaplygin Gazı için incelemeye geçiyoruz. Bu bölümün

sonunda ise, evrim ve bağ denklemlerinin Bianchi-tip modellerde indirgenecek şekillerini, tüm genellikleriyle ayrıntılı bir biçimde tesis ediyoruz.

Tartışma ve Sonuç Bölümü ise yapılanların kısa bir tartışmasına ve değerlendirmesine ayrılmıştır.

2.GENEL KISIMLAR

2.1 DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİNİN KISA BİR TARİHÇESİ

Doğa yasalarının diferansiyel denklemler olarak ifade edilmeleri ilk defa Newton’la başlamıştır. Diferansiyel denklemler teorisinin gelişmesinde özellikle Gök Mekaniği itici güç olmuştur. Gök mekaniğinin, 18 ve 19. yüzyılın ünlü matematikçilerini en çok meşgul eden problemlerinden biri “n-cisim problemi” diye adlandırılan problem olmuştur. Bu; Newtonsal Gravitasyon etkisi altında n maddesel noktanın hareketini belirleme, yâni

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

diferansiyel denklem sisteminin, verilmiş başlangıç koşulları altında, çözümünü bulmak demektir. (2.1) denklemini otonom (f_i fonksiyonlarının zamana açıkça bağlı olmaması) olmasının yanısıra, Gravitasyonun korunumlu olması nedeniyle, bir de

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

biçiminde Hamiltoniyen formda yazılma gibi bir özellik taşımaktadır. Problem, verilmiş bir anda parçacıkların koordinatları ve hızları bilindiğinde, bunların gelecekte ne olacağı ya da geçmişte ne olduğudur. Problem $n = 2$ için tamamen analitik olarak integre edilebilmektedir. Ancak, durum, değil $n > 3$ için, $n = 3$ için bile muazzam derecede karmaşıklaşmaktadır. Bu durumu, Fransız matematikçisi Borel şöyle ifade etmektedir : “Gök Mekaniğinde, 3 sayma sayısı pek çok demektir” (Bkz.[14], Giriş, xvii-xxiii). (2.2) sistemi analitik olarak integre edilebilmiş olsa bile, bu analitik ifâdenin kullanılamayacak derecede çok karmaşık olmayacağını garanti bulunmamaktadır. Öte yandan, seri çözümleri için de aynı şey geçerlidir. Nitekim, güneş tutulması probleminde (2.2) denkleminin yakınsak çözümü elde edilmiş ama yeterli yakınsamayı sağlamak için göz önüne alınması gereken terim sayısının “ Einstein evreninin elektron sayısı” kadar olduğu bulunmuştur!. Öte yandan, sayısal yöntemler de tatminkar değildir ; zirâ, bunlar, bağımsız değişkenin ancak sonlu bir aralığı için özel çözüm vermekte ; değişkenin sonsuz değerlerinde çözümün ne olacağını söylememektedirler. Bilgisayar teknolojisi ne kadar ileri olursa olsun, bu temel sorun var olmaya devam edecektir.

Diferansiyel Denklem sistemlerinin çözüm problemine en doğru yaklaşım 1879'da Doktora Tezinde Poincaré tarafından bulunmuştur ([14] ve kaynakları). Poincaré, en basit sistem olan

$$\dot{x} = P(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (2.3)$$

dan hareketle Nitel Analiz'in genel formalizminin temellerini atmıştır. Poincaré' nin çalışmaları Bendixson tarafından tamamlanmış, Birkoff tarafından da sağlam temellere oturtulmuştur ([14] ve kaynakları). Tüm bu çalışmalar Gök Mekaniği kapsamında gelişmiştir. Ancak, 20. yüzyılın başlarında, mekanik, optik akustik gibi alanlarda periyodik süreçli olayların keşfi ve teknolojiye uygulamaları nonlinear denklem sistemlerinin Nitel Analizi Teorisine ilgiyi daha da artırmıştır. Özellikle 1920'lerden itibaren gelişmeye başlayan Radyo Mühendisliği bu gelişmenin ikinci itici gücü olmuştur. Nitel Analiz ya da Dinamik Sistemler Teorisi olarak adlandırılan bu yöntem günümüzde : Fizik, Matematik, Biyoloji, Meteoroloji gibi hemen hemen her disiplinde uygulama alanı bulmakla birlikte henüz ham bir teori görünümündedir ve dolayısıyla da yoğun bir araştırma alanı oluşturmaktadır (DST hakkında geniş bir bilgi için [14-20] numaralı kaynaklara bakılabilir).

2.2. KOZMİK AKIŞKAN

Einstein Alan Denklemlerinin en çok tartışma konusu yapılan yanlarından birinin Λ Kozmolojik Sâbiti ; diğerinin de T_{ab} enerji-momentum tansörü olduğunu söylemek çok da yanlış olmaz. Λ kozmolojik sâbitinin gerekliliği ve rolü henüz açık bir sorudur. Öte yandan, kozmolojik kapsamda, evreni doldurduğu varsayılan akışkanın mahiyeti, yâni, evrenin madde-enerji içeriği konusundaki belirsizlik de temel bir sorundur. Matematiksel olarak, bir 4-lü hız vektörüyle hareket eden bir gözlemci için akışkanın enerji-momentum tansörü

$$T_{ab} = m u_a u_b + p(g_{ab} + u_a u_b) + 2q_{(a} u_{b)} + p_{ab} \quad (2.4)$$

ifâdesiyle verilir. Burada : m, p, q_a ve p_{ab} büyüklükleri u^a 4-lü hız vektörüyle hareket eden gözlemciye göre ölçülmüş büyüklükler olup şöyle anılırlar :

μ : madde-enerji yoğunluğu,

p : eşyönlü basınç,

q_a : enerji akısı,

p_{ab} : eşyönsüz basınç

Bunların

$$q_a u^a = 0, \quad p_{ab} = p_{ba}, \quad p_{ab} u^b = 0, \quad p^a_a = 0 \quad (2.5)$$

özelliklerini taşıdıklarını ve enerji momentum tansörünün de

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (2.6)$$

korunum kanununa uyduğunu şimdiden kaydedelim.

2.2.1 Mükemmel Akışkan ve Barotropik Lineer Hâl Denklemi

(2.4) bağıntısı tamamen matematiksel bir ifâdedir. Bunun fizikselliğini, yukarıdaki dinamik değişkenler arasındaki bir takım kısıtlamalar ile hâl denklemi denilen bir takım bağıntılar belirler. Kozmoloji' de en çok kullanılan akışkan tipi

$$q_a = 0, \quad p_{ab} = 0 \quad (2.7)$$

bağıntılarıyla tanımlanan, yâni, enerji-momentum tansörü

$$T_{ab} = m u_a u_b + p(u_a u_b + g_{ab}) \quad (2.8)$$

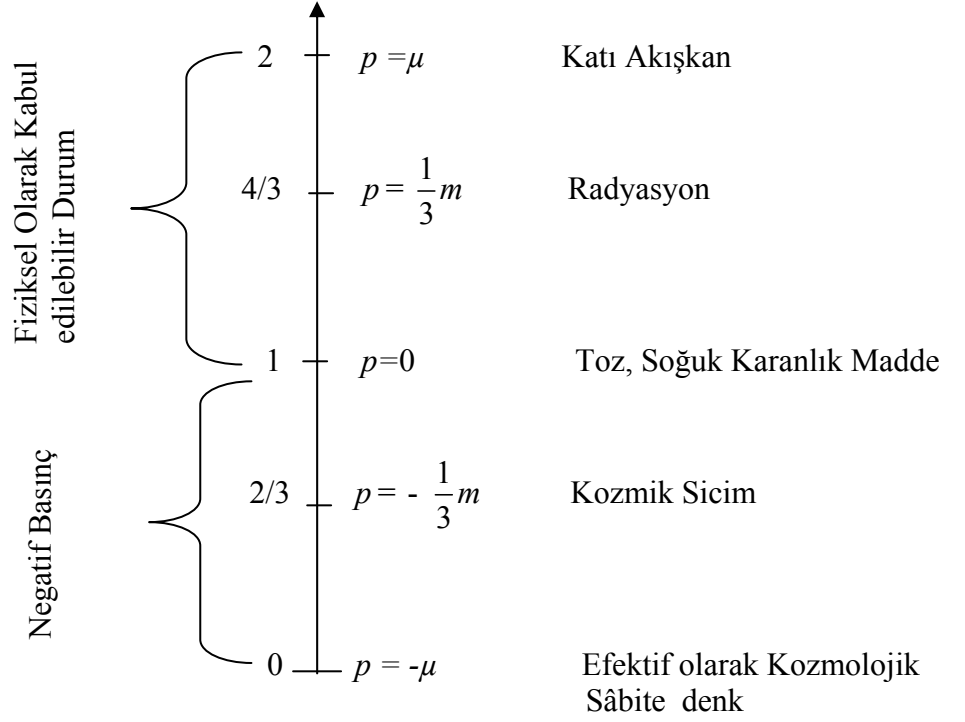
biçiminde olan akışkandır. Buna Mükemmel Akışkan denir. Böyle bir akışkan için (2.7) dekilere ek olarak

$$p = p(\mu) \quad (2.9)$$

biçimindeki bir bağıntıya barotropik hâl denklemi denir. Özel olarak, $p = 0$ (basıncsız akışkan) hâline Toz ya da (Soğuk) Karanlık Madde adı verilir. (2.9) bağıntısı genel olarak,

$$p = (\gamma - 1) \mu \quad 0 \leq \gamma \leq 2, \quad \gamma, \text{ sâbit bir parametre} \quad (2.10)$$

biçiminde lineer olarak alınır. γ parametresinin özel değerlerinin işaret ettiği durumlar Şekil.2.1 de gösterilmektedir.



Şekil 2.1: Lineer Barotropik Akışkan için γ parametresinin değerlerine karşılık düşen madde-enerji tipleri

Dikkat edileceği gibi böyle bir akışkan geniş bir madde tipi spektrumunu kapsamaktadır. Öte yandan, dinamik değişkenlerin, hâl denkleminin uymalarının yanı sıra bir de enerji koşulları denilen bazı koşullara uymaları istenmektedir. Bunlar, Mükemmel akışkan için

$$m + p^3 \geq 0 \quad \text{ve} \quad m^3 \geq 0 \quad (2.11a)$$

biçiminde ifade olunan Zayıf Enerji Koşulu (ZEK) ve

$$m + 3p^3 \geq 0 \quad (2.11b)$$

biçiminde ifade olunan Kuvvetli Enerji Koşuludur (KEK).

2.2.2 Chaplygin Gazı

Bir başka tip Mükemmel Akışkan ise, son dört-beş senedir pek moda olan ve Chaplygin Gazı diye anılan akışkandır[6-11]. Bu,

$$p = -\frac{A}{m} \quad (A, \text{pozitif bir sâbit}) \quad (2.12)$$

biçiminde ekzotik bir hâl denkleminin uyan bir akışkandır. Negatif basınçlı böyle bir hâl denklemi, ilk defa 1904'de, Rus fizikçisi Chaplygin tarafından, aerodinamik kapsamda, bir uçağın kanadına etkiyen kaldırma kuvvetinin hesabında kullanılmıştır. Daha sonrasında da aynı model yine aynı kapsamda tekrar keşfedilmiştir. Negatif basınçlı Chaplygin Gazı modeli, sağladığı geniş simetri özellikleri ve integre edilebilirlik kolaylıkları nedeniyle, katı cisimlerin şekil değiştirmelerinin, kuvantumsal Hall etkisinin ve daha pek çok olayın tasvirinde kullanılmaktadır. Kozmoloji kapsamında ise böyle bir hâl denkleminin Sicim Teorisiyle zarif bir bağlantısı ortaya çıkmıştır. Söz konusu hâl denklemi, bir (d+2)-boyutlu uzay-zaman(bulk) içinde hareket eden d-boyutlu zarlar için yazılacak Nambu-Goto aksiyonundan elde edilebilmektedir. Öte yandan, Chaplygin Gazı, süper-simetrik bir genelleştirmeye sahip yegane akışkan özelliği taşımaktadır. Ayrıca, d-boyutlu zar evrenlerin karadelik tipi bulklarda kararlılık incelemesi yine Chaplygin Gazı tipinde bir akışkanı ortaya çıkarmaktadır. A sâbitinin negatif olması hâline Anti-Chaplygin Gazı denilmekte olup bu da Sicim Teorilerinin bir sınıfında ortaya çıkmaktadır (Bu konular hakkında geniş bir bilgi için [8] nolu kaynağa ve onun kaynaklarına bakılabilir). Öte yandan, (2.12) yerine bazen

$$p = - \frac{A}{m^a} \quad , \quad 0 < a \leq 1 \quad , \quad (A, \text{pozitif bir sâbit}) \quad (2.13)$$

alındığı da olmaktadır. Buna Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı denilmektedir.

Kozmolojik kapsamda, Chaplygin gazının(ya da genelleştirilmişinin) son dört-beş seneden beri çok rağbet görmesinin nedeni, çok yakın zamanlarda elde edilen kozmolojik gözlemsel verilerin açıklanmasında ilginç bir alternatif oluşturmasıdır[6-11]. Tip Ia Süpernova'lara (SNeIa) ilişkin gözlemler[12-13], evrenin genişlemesinin günümüzde hızlanarak olduğu yolunda bir düşünceye sevketmektedir. Bu ise evrendeki madde-enerji dağılımına, negatif basınçlı bir akışkanın egemen olduğu anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle (2.11b) deki kuvvetli enerji koşulu ihlal edilmiş olmaktadır. Kozmolojik evrimin bir evresinde bu, koşulun sağlanmamasından sorumlu madde Karanlık Enerji olarak adlandırılmaktadır[21]. SNeIa gözlemlerine ek olarak, Kozmik Mikrodalga Fon Işınımı, Galaksi Spektrumu gibi ölçümler de böyle bir Karanlık Enerji varlığına işaret etmektedir. Toplam enerji yoğunluğun 0,70'i (yaklaşık üçte ikisi) böyle negatif basınçlı Karanlık Enerji hâindedir.

Karanlık Enerjinin kökeni için pek çok aday bulunmaktadır[21]. Bunlardan en gelenekseli Λ Kozmolojik Sâbitidir. Zirâ bu daha önce de söylendiği gibi, $p=-\mu$ hâl denklemleri bir akışkanın varlığına eşdeğerdir. Ancak, burada şöyle bir sorun ortaya çıkmaktadır : Niçin Kozmolojik Sâbitin gözlenen değeri, Planck kütle skalasına göre çok küçüktür? Başka bir deyişle evrenin şu hâlinde gözlenen Karanlık Enerji miktarı temel skala ile karşılaştırıldığında niçin çok düşüktür (ince ayar problemi) ve niçin bugünkü kritik yoğunluk mertebesinde (çakışma problemi-cosmic coincidence conundrum). Kozmolojik Sâbit varsayımı bu her iki problemi de beraberinde getirmektedir. Karanlık Enerjinin kökenini açıklamaya diğer bir aday da skaler alanlardır[21]. Chaplygin Gazı ya da Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı işte bunlara bir alternatif olarak gündeme gelmektedir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 DİNAMİK SİSTEMLER TEORİSİ

Aşağıda, Dinamik Sistemler Teorisinin, [20,22,23] nolu kaynaklardan derlediğimiz tanıtıcı kısa bir özetini sunuyoruz.

3.1.1 Diferansiyel Denklem Sistemi ve Akışı

\mathbb{R}^n Öklit uzayında : $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ile bir vektör ;
 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile bir tasvir (vektör fonksiyonu) ve $t \in \mathbb{R}$ ile de bir reel parametre (değişken) gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \end{aligned}$$

biçiminde adi türevli n adet diferansiyel denklemden oluşmuş sistemi göz önüne alalım.

Bu, tıkkız bir biçimde, " ϕ " ile de d/dt türevlerini göstererek

$$\frac{d}{dt} \phi = f(\phi; t) \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebilir.

Bu diferansiyel denklem sistemi (kısaca DDS denilecek) fiziksel olarak şöyle yorumlanabilir : t parametresi zaman değişkenini gösterebilir ve x_1, x_2, \dots, x_n değişkenleri

de bir fiziksel olayı tasvir eden kinematik ve dinamik değişkenler olsun. Bu taktirde fiziksel sistemin bir t anındaki durumu, \mathbb{R}^n uzayında $\phi(t)$ vektörü ile gösterilebilir.

\mathbb{R}^n uzayına durum (hâl) veyâ faz uzayı ; ϕ vektörüne de durum (hâl) vektörü denir.

(3.1) denklemi fiziksel sistemin \mathbb{R}^n matematiksel uzayındaki evrimini verir.

Eğer f vektör fonksiyonu t ye açıkça bağlı değilse, DDS' ne otonom DDS ; aksi taktirde otonom olmayan DDS denir. Biz bu Tez'imizde, yalnızca,

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.2)$$

olarak yazacağımız otonom DDS ile ilgileneceğiz. (3.2) deki denklemler genel olarak birbirlerine bağılırlar (kuple) ve lineer değildir. Ama, f vektörü fonksiyonu, A , $n \times n$ tipinde reel bir matris olmak üzere $f(x) = Ax$ ise, bu durumda (3.2)

$$\dot{x} = Ax \quad (3.3)$$

olur ki buna lineer DDS denir. Nonlinear DDS (3.2) nin özelliklerinin araştırılmasında, bu lineer DDS temel bir rol oynar.

(3.2)' nin çözümü,

$$y(t) = f(y(t)), \text{ her } t \in \mathbb{R} \text{ için} \quad (3.4)$$

olan bir $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonudur. Bu y çözüm eğrisinin \mathbb{R}^n 'deki görüntüsüne DDS' nin bir yörüngesi (orbit) denir. (3.4) denklemini, bir x değerindeki $f(x)$ vektör alanının, x noktasında yörüngeye teğet olduğu sonucunu vermektedir. Sistemin zaman içindeki evrimi, x noktasının bir yörünge boyunca hareketi ile tasvir edilir.

$y(t)$ çözümleri aslında başlangıç koşullarına bağlıdır. $x(0) = a$ olmak üzere çözümler $x(t) = y_a(t)$ ile gösterilsin. Bu, belirli (verilmiş) bir a için, sistemin a dan geçen yörünge üzerindeki evrimini verir. Öte yandan,

$$F_t(a) = y_a(t) \quad (3.5)$$

ile $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tasvirleri tanımlansın. Bu tasvirlerin $\{F_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ kümesine DDS' nin akışı adı verilir. (3.5) bağıntısı, belirli (verilmiş) bir t anında \mathbb{R}^n 'nin her $a \in \mathbb{R}^n$ noktasından geçen tüm çözüm eğrilerinin kümesini verir. $\{F_t\}$ akışı, \mathbb{R}^n 'yi kendi üzerine tasvir eden tek parametrelili bir dönüşüm grubudur. Buna, Dinamik Sistem (kısaca DS olarak anılacaktır) adı da verilir. Akışın \mathbb{R}^n deki gösterimine Faz Portresi denir. (3.5) deki $y_a(t)$ ile $F_t(a)$ arasındaki farkı vurgulamak iyi olacaktır.

- $y_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; belirli bir $a \in \mathbb{R}^n$ için sistemin, $y_a(0) = a$ başlangıç koşulu altında, her $t \in \mathbb{R}$ için $y_a(t)$ durumunu verir.

- $F_t(\vec{a}): IR^n \rightarrow IR^n$; belirli bir $t \in IR$ için sistemin, t anında, her \vec{a} başlangıç durumu için, $F_t(\vec{a})$ durumunu verir.

Bir DDS' nin tam çözümü, $n \geq 2$ için, genel olarak, bulunamaz. Dolayısıyla, fiziksel sistemin davranışını belirlemek için sayısal hesap, pertürbasyon yaklaşımı ya da nitel analiz kullanmak gerekmektedir. Nitel analizin amacı DDS' nin tipik çözümlerinin $t \in \pm \infty$ sonsuz için asimtotik davranışlarını anlamaktır. Bu uğraşta, denge çözümleri, periyodik çözümler ile bunların kararlılık özellikleri de tipik çözümlerin asimtotik davranışlarında çok önemli rol oynamaktadır. Aşağıda bunlara kısaca değinilmektedir.

3.1.2 Denge Noktası ve Yörüngeler

Bir DDS' nin denge noktaları, \dot{x} türevlerini sıfır yapan noktalar, yâni,

$$\dot{f}(\vec{x}_0) = 0 \quad (3.6)$$

denkleminin kökleri olarak tanımlanır. \vec{x}_0 noktalarına, tekil noktalar veyâ sâbit noktalar da denir. Eğer $\dot{f}(\vec{x}_0) = 0$ ise, bu, her $t \in IR$ için $y(t) = \vec{x}_0$ demektir ve DDS' in bir çözümdür, zirâ

$$\dot{y}(t) = \dot{f}(y(t)) \quad (3.7)$$

bağıntısı her $t \in IR$ için özdeş olarak sağlanır.

DS' in F_t akışı cinsinden denge noktasının tanımı, (3.5) den dolayı

$$F_t(\vec{x}_0) = \vec{x}_0, \quad \text{her } t \in IR \text{ için} \quad (3.8)$$

dir. Bu ve buna eşdeğer olan $y(t) = \vec{x}_0$ sâbit çözümleri fiziksel sistemin bir denge durumunu tasvir eder.

Bir F_t akışı verildiğinde keyfi bir \vec{x}_0 noktasının yörüngesi

$$G(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in IR^n \mid \dot{\vec{x}} = F_t(\vec{x}_0), t \in IR\} \quad (3.9)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Yörünge tipleri şöyledir :

- Eğer, \vec{x}_0 bir denge noktası ise, $G(\vec{x}_0)$ yörüngesi söz konusu \vec{x}_0 noktasından ibaret olur. Buna nokta yörünge denir.

- Eğer, $\overset{1}{x}_0$ keyfi bir nokta ise, $G(x_0)$ ' a bayağı yörünge denir. Bu, $\overset{1}{f}$ vektör alanını teğet olarak kabul eden bir eğridir.
- Farklı iki denge noktasını birleştiren yörüngeye heteroklinik yörünge denir.
- Eğer bir denge noktasından çıkan yörünge tekrar aynı noktaya kapanıyorsa buna homoklinik yörünge denir.
- Eğer $F_T(x_0) = \overset{1}{x}_0$ olacak biçimde bir $T > 0$ varsa, $G(x_0)$ ' a periyodik yörünge denir. Periyodik yörüngeler, zamana göre periyodik olan sistemleri tasvir eder.
- Her $t \neq 0$ için $F_T(x_0) \neq \overset{1}{x}_0$ ise $G(x_0)$ 'a periyodik-olmayan yörünge denir. Homoklinik, hetroklinik ve bayağı yörüngeler böyledir.
- Eğer $G(x_0)$ periyodik değilken, her $N(x_0)$ civarı ve her $T \in \mathbb{R}$ için $F_T(x_0) \in N(x_0)$ olacak biçimde bir $t > 0$ varsa, $G(x_0)$ 'a tekrarlayan yörünge denir. Bu durumda fiziksel sistem önceki hâline istenildiği kadar yaklaşır.

3.1.3 Kararlılık

Bir fiziksel sistemin, $t \in \pm \mathbb{R}$ denge durumundan bir sapmaya uğradığında tekrar denge durumunu alması (kararlılık) ya da denge durumuna yaklaşması (asimtotik kararlılık) önem taşımaktadır. Nonlinear bir DDS için bir x_0 denge noktasında akışın davranışını incelemek için lineer yaklaşıklık göz önüne alınır. Buna göre

$$Df^{\mathbb{R}}(x_0) \circ \left(\frac{\overset{1}{f}_i}{\overset{1}{x}_j} \right)_{x=x_0} \quad (3.10)$$

ile bir $\overset{1}{x}_0$ noktasında Jacobiyen matrisin değeri gösterilmek üzere, $\overset{1}{f}$ ' nin yaklaşık değeri

$$\overset{1}{f}(x_0); Df^{\mathbb{R}}(x_0) (\overset{1}{x} - \overset{1}{x}_0) \quad (3.11)$$

olur. Eğer, $\overset{1}{u} = \overset{1}{x} - \overset{1}{x}_0$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\overset{1}{u} \dot{\phi} = Df^{\mathbb{R}}(\overset{1}{x}_0) \overset{1}{u} \quad (3.12)$$

olur ki, $Df^{\mathbb{R}}(\overset{1}{x}_0) \circ A$ yazarak, bu (3.3) ile gösterilen lineer DDS'ne denk olur. Lineer bir DDS' nin akışının özellikleri A matrisinin özdeğer ve özvektörleri aracılığıyla tamamen belirlenebilmektedir. O halde bir x_0 denge noktasında $Df^{\mathbb{R}}(\overset{1}{x}_0)$ 'ın özdeğer ve özvektörleri incelenerek akış hakkında bilgi edinilebilir. Gerçekten de, Hartman-Grobman Teoremi, eğer x_0 noktasında $Df^{\mathbb{R}}(\overset{1}{x}_0) \circ A$ nin tüm özdeğerleri sıfırdan farklı

reel kısımlara sahipse (ki böyle noktalara hiperbolik denge noktası denir) nonlinear DDS (3.2) ile lineer DDS (3.3) ün yörüngelerinin topolojik olarak “aynı” olduğunu söyler. Lineer DDS (3.3) ün denge noktaları analizinden hareketle, (3.2) nonlinear DDS’ nin hiperbolik denge noktalarının özellikleri için şunlar söylenebilir.

- Eğer $Df^1(x_0)$ in tüm özdeğerleri için $Re l_i < 0$ ise, x_0 a yerel düğüm denir. Bu taktirde tüm başlangıç durumları $t \in \mathbb{R}^+$ için bu denge noktasına yönelir.
- Eğer $Df^1(x_0)$ in tüm özdeğerleri için $Re l_i > 0$ ise x_0 a yerel kaynak denir. Bu taktirde tüm başlangıç durumları $t \in \mathbb{R}^-$ için bu denge noktasına yönelir.
- Eğer özdeğerlerin bazıları negatif bazıları pozitif ise, düğüm noktasına yerel semer noktası denir.

Hiperbolik denge noktaları ($Re l_i \neq 0$) yalın (izole) denge noktalarıdır (0-boyutlu). Denge noktaları yalın olmayabilir. Eğer denge noktaları bir C-eğrisinden oluşuyorsa (2-boyutlu), C’ ye denge kümesi denir. Denge kümesinin her bir noktasında özdeğerlerden biri zorunlu olarak sıfırdır. Eğer geri kalan özdeğerlerin hepsi negatif reel kısma sahip ise C’ ye düğüm eğrisi denir. Eğer pozitif reel kısma sahip iseler C’ ye kaynak eğrisi denir. Genel olarak, eğer r özdeğer sıfır olursa, bu taktirde denge kümesi r-boyutlu uzay olur.

3.1.4 İnvaryant Küme

Eğer her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in S$ için $F_t(x) \in S$ olacak biçimde bir $S \subset \mathbb{R}^n$ varsa, S’ ye F_t akışının invaryant kümesi denir. Eğer bir x noktası (özel olarak denge noktası) S ye ait ise $G^1(x)$ yörüngesi de S ye ait olur. İnvaryant küme, şu durumda ortaya çıkar : Eğer diferansiyel denklemlerden biri ya da daha fazlası, a sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$Z' = aZ \quad (3.13)$$

tipinde ise $Z < 0$, $Z = 0$ ve $Z > 0$ alt kümeleri birer invaryant küme olur.

3.1.5 Monoton Fonksiyon

S bir invaryant küme olmak üzere Z fonksiyonu S üzerinde tanımlı reel bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in S$ için $Z(F_t(x))$ fonksiyonu monoton eksilen bir fonksiyon ise, Z ye monoton eksilen fonksiyon denir. Başka bir deyişle eğer Z nin akış doğrultusundaki türevi için

$$Z \neq \emptyset \quad \dot{N}Z \times f(x) < 0 \quad (3.14a)$$

ise, Z ye monoton eksilen denir. Benzer şekilde,

$$Z \neq \emptyset \quad \dot{N}Z \times f(x) > 0 \quad (3.14b)$$

ise Z ye monoton artan denir. Eğer

$$Z \neq \emptyset \quad \dot{N}Z \times f(x) \neq 0 \quad (\text{veyâ } Z \neq \emptyset \quad \dot{N}Z \times f(x) \neq 0) \quad (3.15)$$

ise ve eşitlik hâlinde de S hiçbir yörünge içermiyorsa, buradan S nin monoton eksilen (veyâ artan) olduğu sonucu çıkar.

Monoton fonksiyonun varlığı çok önemli bir sonuca yol açar. Eğer böyle bir fonksiyon varsa, S kümesi, periyodik, tekrarlayan ve homoklinik yörüngeler içermez.

3.2. KOZMOLOJİ

Bu Alt-bölümde, Genel Rölativite Teorisinin Alan Denklemlerinin dayandığı temel geometrik kavramları özetledikten sonra Tetrad Formalizmini tanıtıyor ve tek bileşenli dik kozmik akışkan için evrim ve bağ denklemlerinin sistematik bir çıkarımını sunuyoruz. Bianchi tip modellerin kısa bir tanıtım ile evrim ve bağ denklemlerinin bu modellerde alacakları biçimlerin belirlenmesi de yapacağımız işler arasında yer almaktadır. Bu Alt-bölümün içeriği büyük ölçüde, sunum farklılığıyla, [1,2,3,23,24,25,26,27,28] nolu kaynaklardan derlenmiştir.

3.2.1. Koordinatsal Tabanda Einstein Alan Denklemleri ve Uzay-Zaman

Geometrisi

Bir $\{x^i, i = 0, 1, 2, 3\}$ koordinat sisteminde

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \quad (3.16)$$

metriğiyle tasvir edilen 4-boyutlu Riemansal bir uzay-zamanda, Einstein Alan Denklemleri (kısaca EAD diye anılacaktır)

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = k T_{ij} \quad , \quad k = \frac{8pG}{c^4} \quad (3.17a)$$

olup, burada :

G_{ij} : Einstein Tansörü ;

R_{ij} : Ricci Tansörü ;

R : 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci Skaler Eğriliği ;

Λ : kozmolojik sâbit ;

T_{ij} : enerji-momentum tansörü

dir. ((3.17a) denklemleri, eşdeğer olarak, T_{ij} nin izi T ile gösterilmek üzere

$$R_{ij} = k(T_{ij} - \frac{1}{2}T g_{ij}) + \Lambda g_{ij} \quad (3.17b)$$

biçiminde de ifâde edilebilir.

Bu Tez'de, G Newton Gravitasyon Sâbiti ile c ışık hızının $8\pi G = c = 1$ alındığı birim sisteminde çalışılacaktır. Dolayısıyla k Einstein sâbiti $k = 1$ olup denklemlerde artık yer almayacaktır.

Ricci Tansörü ile Ricci Skaler Eğriliği, $R^i{}_{jkl}$ Riemann Eğrilik Tansöründen hareketle

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj} \quad , \quad R = R^i{}_i \quad (3.18)$$

büzülmeleriyle tanımlanmıştır. Riemann Eğrilik Tansörünün tanımı ise X_k keyfi bir vektör olmak üzere

$$\nabla_i \nabla_j X_k - \nabla_j \nabla_i X_k = R_{ijkl} X^l \quad (3.19)$$

dir. Burada ∇_i 'ler kovaryant türevi göstermekte olup, sırasıyla

$$\nabla_i X^j = \partial_i X^j + \Gamma^j{}_{ik} X^k \quad (3.20a)$$

$$\nabla_i X_j = \partial_i X_j + \Gamma^k{}_{ij} X_k \quad (3.20b)$$

dir. $\Gamma^i{}_{jk}$ Christoffel Sembollerinin, g_{ij} metriği ile onun

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j \quad (3.21)$$

bağıntısıyla tanımlı tersi olan g^{ij} metriği cinsinden ifadesi

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \quad (3.22)$$

dir.

Biz, bu Tez'imizde, Riemann Geometrisinin tüm kavram ve bağıntılarını vermeyi amaçlamıyoruz, fakat yalnızca, Kozmolojik kapsamda bir Dinamik Sistem olarak yorumlanabilecek denklemlerin tesisine götüreceğiz düşünce zincirini aktarmak istiyoruz. Bu bakımdan, yalnızca gerekli görülen bazı kavramları tanıtmaya çalışacağız. Yukarıdaki formalizmde şu noktayı vurgulamak gerekmektedir. Yukarıdaki bağıntıların tümü bir $\{x^i, i = 0, 1, 2, 3\}$ yerel koordinat sisteminde yazılmışlardır. x^i -koordinat eğrilerinin teğet vektörlerinden oluşan $\partial_i (\equiv \frac{\partial}{\partial x^i})$ taban vektörleri, tansörler için doğal bir taban oluşturmaktadır. $\{\partial_i\}$ 'ye koordinatsal taban denilmektedir.

$$dx^i (\partial_j) = \delta^i{}_j \quad (3.23)$$

düalite bağıntısı, ∂_i 'lerin düalleri olan dx^i 'leri tanımlar. dx^i 'ler diferansiyel 1-formlar olup bunların oluşturduğu $\{dx^i\}$ tabanına da koordinatsal 1-form tabanı denilmektedir. Buna göre $\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanda metrik

$$g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j \quad g^{ij} = dx^i \cdot dx^j \quad (3.24a)$$

ya da

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} \partial_i \partial_j \quad (3.24b)$$

biçiminde ifâde edilir. Bir X vektörü ise bu tabandaki bileşenleri cinsinden

$$X = X^i \partial_i = X_i dx^i \quad (3.25)$$

olup, kovaryant ve kontravaryant bileşenleri birbirlerine

$$X^i = g^{ij} X_j \quad , \quad X_i = g_{ij} X^j \quad (3.26)$$

bağıntılarıyla bağlıdır.

Yukarıdaki ifâdeler, herhangi bir mertebeden tansör ve bileşenlerine benzer biçimde genelleştirilebilir.

3.2.2 Tetrad Tabanında Geometri

3.2.2a Genel Tetrad Sistemi

$\{\partial_i, dx^i\}$ koordinatsal tabanı, uzay-zamanın simetrisi söz konusu olduğunda, bunları ifade etmeye elverişli değildir. Bu bakımdan daha genel bir tabanda çalışmak gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Birbirlerinden bağımsız herhangi 4 adet vektörü, bir taban olarak seçmek her zaman mümkündür. $\{e_a, a = 0, 1, 2, 3\}$ ile gösterilecek bu tabana genel taban ya da tetrad tabanı (kısaca tetrad) denir. Bu dört vektör, $\{\partial_i\}$ koordinatsal taban vektörlerinin

$$e_a = e_a^i(x) \partial_i \quad (3.27)$$

biçiminde lineer kombinasyonları olup, burada, $e_a^i(x)$ ler a nıncı vektörün i ninci bileşenini göstermektedir. Bundan böyle : Latin alfabesinin ilk yarısının harfleri tetrad indislerini ya da bileşenlerini (a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3) ; ikinci yarısının harfleri ise tansör indislerini ya da bileşenlerini gösterecektir (i, j, k, ... = 0, 1, 2, 3). Grek alfabesinin ilk yarısı da tetrad bileşenlerinin uzaysal kısmını ($\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$) ; ikinci yarısı da uzaysal tansör indislerini gösterecektir ($\mu, \nu, \rho, \dots = 1, 2, 3$).

e_a ' ların düali

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b \quad (3.28)$$

ile tanımlanmış olup, $\{\omega^a\}$ ya tetrad 1-form tabanı denir, ve $\{dx^i\}$ koordinatsal 1-form tabanı cinsinden

$$\omega^a = e^a_i(x) dx^i \quad (3.29)$$

dir. Tanımlarından,

$$e_a^i e^b_i = \delta^b_a \quad , \quad e_a^i e^a_j = \delta^i_j \quad (3.30)$$

olduğu (birbirlerinin tersi) kolayca görülür.

$\{e_a, \omega^a\}$ tetrad tabanında metriğin ifâdesi

$$g_{ab} = e_a \cdot e_b \quad , \quad g^{ab} = \omega^a \omega^b \quad (3.31a)$$

$$ds^2 = g_{ab} \omega^a \omega^b = g^{ab} e_a \cdot e_b \quad (3.31b)$$

olup, g_{ab} ye metriğin tetrad bileşenleri denir ve tetrad ile tansör bileşenler arasındaki geçiş

$$g_{ab} = e_a^i e_b^j g_{ij} \Leftrightarrow g_{ij} = e^a_i \cdot e^b_j g_{ab} \quad (3.32a)$$

$$g^{ab} = e^a_i e^b_j g^{ij} \Leftrightarrow g^{ij} = e_a^i e_b^j g^{ab} \quad (3.32b)$$

bağıntılarıyla olur. Benzer şekilde herhangi bir tansör için

$$T^{a\dots b\dots} = e^a_i \dots e_b^j T^{i\dots j\dots} \quad (3.33a)$$

$$T^{i\dots j\dots} = e_a^i \dots e_b^j T^{a\dots b\dots} \quad (3.33b)$$

dir. Tansör indisleri g_{ij} ve g^{ij} ile indirilip kaldırılırken tetrad indisleri g_{ab} ve g^{ab} aracılığıyla olur. $\{e_a\}$ tabanında, e_b taban vektörünün e_a doğrultusundaki kovaryant türevi yine bir vektör olup

$$\nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c_{ab}(x) e_c \quad (3.34)$$

le tanımlanmıştır. Bu lineer kombinezonun Γ^c_{ab} katsayılarına Bağlantı Katsayıları ya da Ricci Dönme Katsayıları denir. Buna göre bir $Y = Y^a e_a$ vektörünün ve de bir $\omega = \omega_a \omega^a$ 1-formunun bir $X = X^a e_a$ vektörü doğrultusundaki kovaryant türevi

$$\tilde{\nabla}_X Y^c = (e_a Y^c + G^c_{ab} Y^b) X^a \quad (3.35a)$$

$$\tilde{\nabla}_X w_c = (e_a w_c - G^b_{ac} w_b) X^a \quad (3.35b)$$

olur. Bu ifâdeler daha yüksek mertebeden tansörlerin kovaryant türev ifâdelerine, Tansör Analizindeki ifâdelere benzer biçimde genelleştirilebilir. Bu ifâdelerde

e_a , operatör olup bazen ∂_a biçiminde de gösterilir ($\partial_a \equiv e_a = e_a^i \partial_i$ dir). Kezâ, $\nabla_{e_a} = \nabla_a$ biçiminde de gösterilir.

Tetrad formalizminde önemli bir kavram da taban vektörlerinin komütatörüdür. Bilindiği üzere, X ve Y gibi iki operatörün komütatörü, f keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad (3.36)$$

bağıntısıyla tanımlanır ve

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{antisimetri özelliği}) \quad (3.37a)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{Jacobi Özdeşliği}) \quad (3.37b)$$

özelliklerini sağlar. Bir koordinatsal tabanda

$$[\partial_i, \partial_j] \equiv 0 \quad (3.38)$$

dir. Ama bir tetrad tabanında

$$[e_a, e_b] = \gamma^c{}_{ab}(x) e_c \quad (3.39)$$

olup, $\gamma^c{}_{ab}(x)$ fonksiyonlarına Komütasyon fonksiyonları denir. Yukarıdaki özelliklerden dolayı

$$\gamma^c{}_{ab} = -\gamma^c{}_{ba} \quad (\text{antisimetri}) \quad (3.40a)$$

$$e_{[a} \gamma^d{}_{bc]} - \gamma^d{}_{e[a} \gamma^e{}_{bc]} = 0 \quad (\text{Jacobi Özdeşliği}) \quad (3.40b)$$

özelliklerini taşır. Bu sonucunda d = a yapılırsa

$$e_a \gamma^a{}_{bc} + e_b \gamma^a{}_{ca} + e_c \gamma^a{}_{ab} - \gamma^a{}_{ea} \gamma^e{}_{bc} = 0 \quad (3.40c)$$

elde edilir ki buna Büzülmüş Jacobi Özdeşliği denir.

Komütasyon fonksiyonları, burulmasız bir uzay-zaman için Ricci Dönme Katsayılarına

$$\gamma^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab} - \Gamma^c{}_{ba} \quad (3.41)$$

bağıntısıyla bağlıdır. Bunu görmek için, burulma operatörünün

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad , \quad \forall X, Y \quad (3.41)$$

tanımında, $X = e_a$ ve $Y = e_b$ almak ve $T \equiv 0$ yapmak yeterlidir.

Komütasyon Fonksiyonları ile Ricci Dönme Katsayıları eşdeğer olarak,

$$\gamma_{abc} = g_{ad} \gamma^d{}_{bc} \quad (\Leftrightarrow \gamma^a{}_{bc} = g^{ad} \gamma_{dbc}) \quad (3.42)$$

$$\Gamma_{abc} = g_{ad} \Gamma^d{}_{bc} \quad (\Leftrightarrow \Gamma^a{}_{bc} = g^{ad} \Gamma_{dbc}) \quad (3.43b)$$

biçiminde de yazılabilir.

$\nabla_i g_{jk} = 0$ Ricci Teoreminden dolayı

$$\nabla_c g_{ab} = e_c g_{ab} - \Gamma^d{}_{ca} g_{db} - \Gamma^d{}_{cb} g_{da} = 0 \quad (3.44a)$$

dır ve buradan da

$$e_c g_{ab} = \Gamma_{bca} + \Gamma_{acb} \quad (3.44b)$$

yazılır. Bu denklem Γ 'lara göre çözümlerse

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{cab} - \gamma_{bca} + \partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{cb}) \quad (3.45)$$

elde edilir. Ricci dönme Katsayıları, koordinatsal tabandaki Christoffel Sembollerinin tetrad tabanındaki karşılıklarıdır. Ancak, bunlar, burulma olmasa dahi herhangi bir simetri özelliği taşımamaktadırlar (oysa burulmasız uzay-zaman için $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$ dir).

Riemann Eğrilik Tansörünün $\{e_a, \omega^a\}$ tabanındaki ifâdesi ; Riemann Eğrilik Operatörünün

$$R(X, Y)Z = \tilde{N}_X \tilde{N}_Y Z - \tilde{N}_Y \tilde{N}_X Z - \tilde{N}_{[X, Y]} Z \quad , \quad " X, Y, Z \text{ için} \quad (3.46)$$

tanım ifâdesini taban vektörleri için yazarak ve de

$$R(e_a, e_b)e_c \equiv R^d{}_{cab} e_d \quad (3.47)$$

tanımını kullanarak

$$R^a{}_{bcd} = e_c \Gamma^a{}_{db} - e_d \Gamma^a{}_{cb} + \Gamma^f{}_{db} \Gamma^a{}_{cf} - \Gamma^f{}_{cb} \Gamma^a{}_{df} - \gamma^f{}_{cd} \Gamma^a{}_{fb} \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Ricci Tansörü için de $a = c$ büzülmesi yapılır ve de (3.41) bağıntısı kullanılırsa

$$R_{ab} = R_{ba} = e_f G^f{}_{ab} - e_a G^f{}_{fb} + G^f{}_{ab} G^e{}_{ef} - G^f{}_{eb} G^f{}_{fb} \quad (3.49)$$

elde edilir.

Riemann Tansörü ;

$$\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_a X_c = R_{abcd} X^d \quad , \quad X \text{ keyfi bir vektör} \quad (3.50)$$

Ricci Özdeşliği ile

$$\nabla_a R_{bcde} + \nabla_b R_{cade} + \nabla_c R_{abde} = 0 \quad (3.51)$$

İkinci Bianchi Özdeşliği denilen iki diferansiyel özdeşlik sağlamaktadır. Ayrıca

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{dcba} \quad (3.52)$$

ile

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0 \quad (3.53)$$

cebirsel özdeşliklerini de sağlamaktadır. Bu sonuncuya Birinci Bianchi Özdeşliği denir. Riemann Geometrisinin bir diğer önemli büyüklüğü de, C_{abcd} ile gösterilen Weyl Tansörüdür. Bu, Riemann eğrilik tansörünün izsiz kısmı olup

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad}) + \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (3.54)$$

ifâdesiyle verilmektedir ve R_{abcd} ile aynı simetri özelliklerini, yâni,

$$C_{abcd} = C_{[ab][cd]} = C_{dcba} \quad (3.55a)$$

$$C_{a[bcd]} = 0 \quad (3.55b)$$

sağlamakta, fakat bunlara ek olarak izsizdir :

$$C^a{}_{bad} = 0 \quad \text{ve} \quad C^{ab}{}_{ab} = 0 \quad (3.55c)$$

Geometrik büyüklükler hakkında bu kısa bilgilendirmeden sonra Einstein'ın Alan Denklemlerine (EAD) geri dönelim. Bir $\{e_a, \omega^a\}$ tetrad tabanında EAD,

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} \quad (3.56a)$$

ya da

$$R_{ab} = T_{ab} - \frac{1}{2}T g_{ab} + \Lambda g_{ab} \quad (3.56b)$$

biçiminde ifâde olunacaktır. EAD 'nın yazılmış olduğu varyete (V_4, g) biçiminde gösterilecektir. Burada, g normal hiperbolik metrik olup imzasının $(-1, 1, 1, 1)$ olduğu kabul edilecektir. Buna göre bir X vektörü ; $\|X\| = g_{ab}X^a X^b = X^a X_a$ biçiminde tanımlanan normunun işaretine göre şöyle anılacaktır: Normu pozitif, negatif veyâ sıfır ise, sırasıyla uzay-cinsinden, zaman-cinsinden ve ışık-cinsinden denilecektir.

3.2.2b Dik-birim Tetrad Sistemi

$\{e_a\}$ tetrad taban vektörlerinin ; η ile Minkowski metriği gösterilmek üzere

$$e_a \cdot e_b = \eta_{ab} \quad , \quad \eta_{ab} = \text{köş}(-1, 1, 1, 1) \quad (3.57a)$$

ya da açıkça,

$$e_0 \times e_0 = -1 \quad , \quad e_0 \times e_b = 0 \quad , \quad e_a \times e_b = d_{ab} \quad (3.57b)$$

özeliğini sağlayan durumunda $\{e_a\}$ ya bir dik-birim tetrad sistemi denir. Yukarıdaki gibi, bundan böyle, Grek alfabesinin ilk yarısının harfleri uzaysal tetrad adını ya da bileşenini gösterecektir ($\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, 3$). Tetrad Sisteminin $g_{ab} = \eta_{ab}$ olacak biçiminde çok özel kılınması önceki paragraftaki pek çok bağıntıyı oldukça sâdeleştirir. Buna göre; $e_c g_{ab} \equiv e_c \eta_{ab} = 0$ olacağından (3.44b) den

$$\Gamma_{abc} = -\Gamma_{cba} \quad (\text{ilk ve son indislere göre antisimetri}) \quad (3.58)$$

olur. (3.45) ve (3.49) de sırasıyla

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(\gamma_{abc} + \gamma_{cab} - \gamma_{bca}) = \frac{1}{2}(\eta_{ae}\gamma^e_{bc} + \eta_{ce}\gamma^e_{ab} - \eta_{be}\gamma^e_{ca}) \quad (3.59)$$

ve

$$R_{ab} = R_{ba} = e_f \Gamma^f_{ab} - e_a \Gamma^f_{fb} + \Gamma^f_{ab} \Gamma^e_{ef} - \Gamma^f_{ca} \Gamma^e_{fb} \quad (3.60)$$

olur.

3.2.3. Tetrad Sisteminde Kozmoloji

3.2.3a Uzay-zamanın 1+3 Kovaryant Ayrışımı

Şimdi, (V_4, g) varyetesinde u ile gösterilen ayrıcalıklı bir 4-lü vektör (alanı) bulunsun.

Bu, zaman cinsinden (zamansal) ve de normlanmış olsun, yani

$$u^a u_a = -1 \quad (3.61)$$

olsun. Bu ayrıcalıklı u vektör alanı, kozmoloji kapsamında, ya gözlemcinin 4-lü hız vektörü, veya âkışkan gibi düşünülen madde-enerji içeriğinin 4-lü akış hız vektörü, veyahut da hiperyüzeylerin normalı gibi düşünülebilir. Böyle bir ayrıcalıklı vektör ile donanmış (V_4, g, u) varyetesi

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.62a)$$

$$U^a_b = -u^a u_b \quad (3.62b)$$

gibi iki tansörün tanımlanabilmesine olanak sağlar. İzdüşüm tansörleri denilen bu tansörlerin

$$h_{ab} = h_{ba}, \quad h_{ab} u^b = 0, \quad h^a_a = 3, \quad h^a_c h^c_b = h^a_b \quad (3.63a)$$

$$U_{ab} = U_{ba}, \quad U_{ab} u^b = u_a \quad (3.63b)$$

özelliklerini taşıdıkları kolayca gösterilebilir. Bunlardan h_{ab} izdüşüm tansörü, efektif olarak, akışkan ile birlikte hareket eden gözlemcinin(eş-hareketli gözlemci), u ya dik anlık durgunluk sisteminin(3-boyutlu uzay)metriğidir. u'yu teğet olarak kabul eden eğri ailesine (kongrüans) göre kinematik ve dinamik büyüklüklerin yazılmasına uzay-zamanın 1+3 ayrışımı denir.

3.2.3b Kozmik Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

Özel olarak, akışkanın u 4-lü hız vektörünün kovaryant türevi

$$\begin{aligned}\nabla_a u_b &= -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \\ &= -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \omega_{ab}\end{aligned}\quad (3.64)$$

biçiminde ayrışır. Burada :

\dot{u}_b : akışkanın 4-lü ivmesi;

θ_{ab} : genişleme (hızı) tansörü;

θ : genişleme (hızı) skaleri, ya da kısaca, genişleme ;

σ_{ab} : kayma tansörü(θ_{ab} nin $\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}$ ile tanımlı izsiz kısmı);

ω_{ab} : girdap(dönme) tansörü

olarak anılırlar. Bunların fiziksel yorumları, Newtonsal hidrodinamikteki benzerlerinden hareketle yapılmaktadır. Buna göre :

θ_{ab} : u ya dik 3-uzayın, şeklini değiştirmeksizin, hacimce genişlemesini gösterir.

σ_{ab} : u ya dik 3-uzayın elemanlarının hacim değiştirmeksizin biçim değişikliğini tasvir eder(kürenin elipsoide dönüşmesi gibi).

ω_{ab} : Yerel durgunluk sisteminin bir eylemsizlik sistemine göre dönmesinin bir ölçüsünü verir.

Bu kinematik büyüklükler

$$\dot{u}_a u^a = 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{u} \perp u) \quad (3.65a)$$

$$\theta_{ab} = \theta_{ba} \quad , \quad \theta_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \theta^a_a = \theta \quad (3.65b)$$

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} \quad , \quad \sigma_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \sigma^a_a = 0 \quad (3.65c)$$

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} \quad , \quad \omega_{ab} u^b = 0 \quad , \quad \omega^a_a = 0 \quad (3.65d)$$

özelliklerini taşır. Ayrıca bunlara

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ba} \sigma^{ab} \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} \quad (3.66)$$

gibi iki skaler de bağlanabilir. Tanımlarından, bunların

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ab} = 0 \quad (3.67a)$$

$$\omega = 0 \Leftrightarrow \omega_{ab} = 0 \quad (3.67b)$$

özelliği taşıdıkları görülmektedir. Öte yandan, ω_{ab} antisimetrik bir tansör olması nedeniyle,

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abcd} \omega^{bc} u^d \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (3.68a)$$

veya

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abc} \omega^{bc} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c \quad (3.68b)$$

gibi bir vektörle de tamamen tasvir edilebilir. ω^a 'ya girdap (dönme) vektörü denir. Bu ifâdelerdeki η_{abcd} , 4-boyutlu uzay-zamanın tamamen antisimetrik dönüşümlü (alterne) tansörüdür. η_{abc} ise bunun 3-boyutlu uzaya izdüşürülmüşüdür. (3.65) daki özellikleri kullanarak, (3.64) den söz konusu kinematik büyüklüklerin

$$\dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a \quad (3.69a)$$

$$\theta_{ab} = \nabla_{(a} u_{b)} + u_{(a} \dot{u}_{b)} \quad (3.69b)$$

$$q = q^a{}_a = \tilde{N}^a u^a \quad (3.69c)$$

$$\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3} \theta h_{ab} \quad (3.69d)$$

$$\omega_{ab} = \nabla_{[a} u_{b]} + u_{[a} \dot{u}_{b]} \quad (3.69e)$$

bağıntılarıyla verildikleri kolayca görülebilir.

3.2.3c Dik-birim Tetrad Sisteminde Bağlantı Katsayıları ve Komütasyon

Fonksiyonları

Uzay-zamanın 1+3 ayrışımının temel amacı; verilmiş bir ayrıcalıklı 4-lü u vektör alanından hareketle oluşturulan (3.62) deki h_{ab} ve U_{ab} izdüşümü tansörleri aracılığıyla, uzay-zaman geometrisinin : Ricci özdeşlikleri, Birinci ve ikinci Bianchi özdeşlikleri, Weyl tansörü gibi kilit bağıntılarını u ya dik ve paralel izdüşürmektedir. Einstein Alan Denklemleri, bu işlemde, R_{ab} tansörünü T_{ab} cinsinden ifâde eden ((3.56b) denklemi) cebirsel bağıntılar olarak işin içine girmektedir. Sonuçta , yukarda sözü edilen

kinematik ve dinamik değişkenlerin $u^a \nabla_a$ ve $h^a_b \nabla_a$ türevlerini içeren bir dizi denklem elde edilmektedir. Bunlardan $u^a \nabla_a$ zamansal türevini içerenlerine evrim (ya da yayılım) denklemleri ; $h^a_b \nabla_a$ uzaysal türevlerini içerenlerine ise bağ denklemleri adı verilmektedir. Bu denklemler, tamamen keyfi bir tetrad tabanında ve keyfi bir u 4-lü vektörü için yazılmış denklemlerdir. Eğer tetrad özel olarak dik birim alınır ve bunun e_0 zamansal taban vektörü de $e_0 = u$ ($e_0 // u$) seçilirse, bu taktirde §3.2.4b de listelenen denklemler elde edilir. Ancak, biz bu yolu tâkip etmeyeceğiz. Söz konusu denklemlerin, Ellis ve MacCallum'un [1] yaptığı gibi, önce bir dik birim tetrad seçip, $e_0 = u$ varsayımı altında, yukarıdaki bağıntılardan doğrudan doğruya nasıl elde edilebileceğini sistematik bir biçimde göstereceğiz. Şimdi, önce Bağlantı Katsayıları ile Komütasyon Fonksiyonlarının, akışkanın kinematik büyüklükleri cinsinden ifâdelerini verelim.

Dik birim tetrad tabanının e_0 taban vektörü

$$e_0 = u \quad (3.70)$$

olacak biçiminde seçilirse, yâni gözlemcinin 4-lü hız vektörü olan e_0 , aynı zamanında akışkanın da 4-lü hız vektörü olarak alınır (eşhareketli sistem), bu taktirde u nun tetrad bileşenleri

$$u^a = (1,0,0,0) \equiv \delta^a_0 \quad (3.71)$$

$$u_a = \eta_{ab} u^b = (-1,0,0,0) = -\delta^0_a \quad (3.72)$$

olur. Böyle bir seçim sonucunda (3.65) dan

$$\dot{u}_a = \theta_{a0} = \sigma_{a0} = \omega_{a0} = 0 \quad (3.73)$$

bulunur. Öte yandan

$$\nabla_a u_b = e_a u_b - \Gamma^c_{ab} u_c \quad (3.74)$$

ile (3.64) in karşılaştırılmasından, zaman indisli Γ 'lar ve (3.41) nin kullanılmasıyla da zaman indisli γ 'lar elde edilebilir. Öte yandan, hepsi de uzay indisli $\gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ lar

$$n^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{(\alpha}_{\delta\theta} \epsilon^{\beta)\delta\theta} \quad (3.75a)$$

ve

$$a_\alpha = \frac{1}{2} \gamma^\gamma_{\alpha\gamma} \quad (\gamma \text{ üzerinden toplam}) \quad (3.75b)$$

biçiminde tanımlı, bir simetrik $n^{\alpha\beta}$ matrisi ve bir uzaysal $a = (a_1, a_2, a_3)$ vektörü aracılığıyla

$$g^g_{ab} = e_{abl} n^{lg} + a_a d^g_b - a_b d^g_a \quad (3.76)$$

biçiminde ifade edilebilir. (3.43) (3.58) ve (3.59) aracılığıyla da buna ilişkin Γ 'lar bulunabilir. Tablo 3.1 de sıfırdan farklı Γ ve γ 'lar topluca gösterilmiştir.

Tablo 3.1 : Akışkanın kinematik büyüklükleri cinsinden Bağlantı Katsayıları ve Komütasyon Fonksiyonları

$$\begin{aligned} G^0_{0b} &= G^b_{00} = \mathcal{W}_b \\ G^0_{ab} &= G^b_{a0} = q_{ab} + e_{abd} W^d \\ G^g_{0b} &= -G^b_{0g} = e^g_{bd} W^d \\ G^g_{ab} &= -G^b_{ag} = a^g d_{ab} - a_b d^g_a + \frac{1}{2} e_{abd} n^{dg} + \frac{1}{2} (e^g_{ad} n^d_b + e^g_{bd} n^d_a) \\ g^0_{0b} &= -g^0_{b0} = \mathcal{W}_b \\ g^0_{ab} &= -g^0_{ba} = 2e_{abd} W^d \\ g^g_{a0} &= -g^g_{0a} = q^g_a - e^g_{ad} (W^d + W^d) \\ g^g_{ab} &= -g^g_{ba} = e_{abd} n^{dg} + a_a d^g_b - a_b d^g_a \\ \text{diğer G ve g'lar} &= 0 \end{aligned}$$

Tablo 3.1.de yer alan Ω^α büyüklükleri

$$\Omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} u_d e_b \cdot \dot{e}_c \quad (3.77)$$

ile tanımlanmış olup bu, u 4-lü hızıyla hareket eden bir gözlemcinin kendi durgunluk sisteminde $\{e_\alpha\}$ üçlüsünün (triad da denir) Fermi yayılımlı eksenlere göre açısal hızını göstermektedir. $\Omega^a u_a = 0$ olduğundan $\Omega^0 = 0$ olur.

Sonuç olarak ; tetradın (3.70) ile özelleştirilmesi, G^c_{ab} ve g^c_{ab} değişkenlerinin, akışkanın kinematik özellikleri cinsinden hesabını büyük ölçüde sâdeleştirmektedir. Yukarıdakilere ek olarak tetrad taban vektörlerinin komütatörlerinin de Tablo 3.1 den hareketle

$$[e_0, e_\beta] = \dot{u}_\beta e_0 + (\varepsilon^\gamma_{\beta\delta} (\omega^\delta + \Omega^\delta) - \sigma^\gamma_\beta - \frac{1}{3} \delta^\gamma_\beta \theta) e_\gamma \quad (3.78a)$$

$$[e_a, e_b] = 2e_{abd} W^d e_0 + (e_{abd} n^{dg} - a_a d^g_b - a_b d^g_a) e_g \quad (3.78b)$$

olacağını kaydedelim.

3.2.3d Kozmolojik Denklemler

Şimdi, tetradla ilişkin $n_{\alpha\beta}, a_\alpha$ ve Ω_α değişkenleri ile akışkana ilişkin kinematik : $\dot{u}_\alpha, \theta_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, \omega_{\alpha\beta}, \theta, \sigma, \omega_\alpha$ değişkenlerinin ve dinamik : μ, p, q_α, p_{ab} değişkenlerinin uyduğu denklemlerin nasıl tesis edildiğini göstermek istiyoruz. Bunun için önce (3.51) ile gösterilen İkinci Bianchi Özdeşliğini ele alalım. Bunun iki kere büzülmesi, EAD'den ötürü $\nabla_a T^{ab} = 0$ korunum kanuna denktir. Öte yandan, $g_{ab} = \eta_{ab}$ ve (3.71) deki seçim nedeniyle enerji momentum tansörü için

$$q_0 = p_{00} = p_{a0} = 0 \quad (3.79a)$$

$$T_{00} = \mu \quad (3.79b)$$

$$T_{\alpha 0} = -q_\alpha \quad (3.79c)$$

$$T_{ab} = p d_{ab} + p_{ab} \quad (3.79d)$$

$$T = T^a_a = -T_{00} + T^\gamma_\gamma = -\mu + 3p \quad (3.79e)$$

$$T_{\langle ab \rangle} = T_{ab} - \frac{1}{3} d_{ab} T^g_g = p_{ab} \quad (\text{izsiz simetrik kısım}) \quad (3.79f)$$

bağıntıları kolaylıkla yazılabilir. Tablo 3.1 deki Γ 'ların kullanımıyla kovaryant türevin hesabı sonuçta

$$e_0 m + e_a q^a = - (m + p) q - d^a_b p^b_a - 2(\mathcal{L}_a - a_a) q^a \quad (3.80)$$

ve

$$e_0 q^a + d^{ab} e_b p + e_b p^{ab} = - (m + p) \mathcal{L} - \frac{4}{3} q q^a - s^a_b q^b - (\mathcal{L}_b - 3a_b) p^{ab} + e^a_{bg} [(W^b - w^b) q^g + n^b_{dg}] \quad (3.81)$$

denklemlerini verir.

Öte yandan, (3.40b) deki Jacobi özdeşliği ilk dört denklemi ; (3.40c) deki Büzülmüş Jacobi denklemi de son iki denklemi verir.

$$e_0 \omega^\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta \dot{u}_\gamma = \sigma^\alpha_\gamma \omega^\gamma - \frac{2}{3} \theta \omega^\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (2\omega_\beta \Omega_\gamma - \dot{u}_\beta a_\gamma) - \frac{1}{2} n^{\alpha\gamma} \dot{u}_\gamma \quad (3.82)$$

$$e_\alpha \omega^\alpha = (\dot{u}_\alpha + 2a_\alpha) \omega^\alpha \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
e_0 n^{ab} + e_g [e^{gl} (a s^b)_l] & - \frac{1}{3} q n^{ab} + 2s^{(a} n^{b)g} - 2e^{gl} (a n^b)_g (w_l + W_l) \\
+ (w^g + W^g) d^{ab} & = -\frac{2}{3} [e^{gl} (a d^b)_l (w^g + W^g) d^{ab} \\
- d^{g(a} (w^b) + W^b)] & - d^{g(a} (w^b) + W^b)] \quad (3.84)
\end{aligned}$$

$$e_\beta n^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\beta a_\gamma = -2 \sigma^\alpha_\beta \omega^\beta - \frac{2}{3} \theta \omega^\alpha + 2 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega_\beta \Omega_\gamma + 2 n^{\alpha\beta} a_\beta \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned}
e_0 a_\alpha + e_\gamma \left[-\frac{1}{2} \sigma^\gamma_\alpha + \frac{1}{3} \delta^\gamma_\alpha \theta + \frac{1}{2} \varepsilon^\gamma_{\alpha\lambda} (\omega^\lambda + \Omega^\lambda) \right] & = -\frac{1}{3} \theta (\dot{u}_\alpha + a_\alpha) \\
- (\dot{u}_\gamma - 2a_\gamma) \left[-\frac{1}{2} \delta^\gamma_\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^\gamma_{\alpha\lambda} (\omega^\lambda + \Omega^\lambda) \right] & \quad (3.86)
\end{aligned}$$

$$e_0 \omega^\alpha - \frac{1}{2} e_\beta [\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\dot{u}_\gamma - a_\gamma) - n^\alpha_\gamma] = -\theta \omega^\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \dot{u}_\beta a_\gamma - \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} (\dot{u}_\beta - 2a_\beta) \quad (3.87)$$

Bu denklemlerden sonucusu bağımsız bir denklem oluşturmaz, zira, (3.85) ile birleştirildiğinde tekrar (3.82) denklem elde edilir.

Şimdi ; (3.56b) ile verilen EAD'ni ele alalım. T_{ab} için (3.79) daki bağıntılar kullanılırsa EAD'nın

$$R_{00} = \frac{1}{2} (\mu + 3p) - \Lambda \quad (3.88a)$$

$$R_{\alpha 0} = -q_\alpha \quad (3.88b)$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2} (m - p + 2L) d_{ab} + p_{ab} \quad (3.88c)$$

biçiminde yazılabileceği kolayca görülür. Ayrıca,

$$R_{\langle ab \rangle} = R_{ab} - \frac{1}{3} d_{ab} R^g_g = p_{ab} \quad (R_{\alpha\beta} \text{ nin izsiz simetrik kısmı}) \quad (3.88d)$$

ve

$${}^4 R \equiv R^a_a = -R_{00} + R^\gamma_\gamma = \mu - 3p + 4\Lambda \quad (3.88e)$$

oldukları da bulunur. Öte yandan, Tablo 3.1 deki Γ 'ları kullanarak (3.60) dan

$R_{ab} = R_{ba}$ tansörünün tetrad bileşenleri için

$$R_{00} = e_\alpha \dot{u}^\alpha - e_0 \theta + \dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha - 2a_\alpha \dot{u}^\alpha - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 + 2\omega^2 \quad (3.89)$$

$$R_{\alpha 0} = e_\beta \sigma^\beta_\alpha - \frac{2}{3} e_\alpha \theta - \varepsilon^\beta_{\alpha\lambda} e_\beta \omega^\lambda + 2\varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \dot{u}^\beta \omega^\lambda - 3\sigma_{\alpha\lambda} a^\lambda - \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} a^\beta \omega^\lambda + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} \sigma^\beta_\gamma n^{\lambda\gamma} - n_{\alpha\lambda} \omega^\lambda \quad (3.90)$$

$$R_{\alpha\beta} = e_0 \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} e_0 \theta + (e_\gamma a^\gamma + \dot{u}_\gamma a^\gamma - 2a_\gamma a^\gamma) \delta_{\alpha\beta} - \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta + \sigma_{\alpha\beta} \theta + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \theta^2 - 2\omega^\lambda \Omega_\lambda \delta_{\alpha\beta} + 2\omega_{(\alpha} \Omega_{\beta)} - 2\sigma_{\gamma(\alpha} \varepsilon^{\gamma\beta)\lambda} \Omega^\lambda + (e_\gamma + \dot{u}_\gamma - 2a_\gamma) n^\lambda_{(\alpha} \varepsilon^{\gamma\beta)\lambda} + e_\alpha a_\beta - \dot{u}_\alpha a_\beta - e_\alpha \dot{u}_\beta + b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} b + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda} [e_0 \omega^\lambda + \omega^\lambda \theta + \frac{1}{2} e_\gamma n^{\gamma\lambda} + \frac{1}{2} (\dot{u}_\gamma - 2a_\gamma) n^{\gamma\lambda}] \quad (3.91)$$

elde edilir. Burada

$$b_{\alpha\beta} \equiv 2n_{\alpha\gamma} n^\gamma_\beta - n^\gamma_\gamma n_{\alpha\beta} \quad (3.92a)$$

ve

$$b \equiv b^\alpha_\alpha = 2n^\theta_\gamma n^\gamma_\theta - n^\gamma_\gamma n^\theta_\theta \quad (3.92b)$$

biçiminde tanımlanan kısaltmalardır. (3.89) ile (3.88a) dan

$$e_0 \theta - e_\alpha \dot{u}^\alpha = \dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha - 2a_\alpha \dot{u}^\alpha - 2\sigma^2 - \frac{1}{3} \theta^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2} (\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.93)$$

bulunur.

(3.90) ile (3.88b)'den de

$$e_b s^b_a - \frac{2}{3} e_a q - e^b_{al} e_b w^l = 3s^b_g a_b + n^b_a w_b + e_{abl} [n^b_l s^{lg} + (q^b - 2a^b) w^g] - q_a \quad (3.94)$$

elde edilir.

(3.91) bağıntısı $e_0 \sigma_{\alpha\beta}$ yı ifade etmeye olanak tanımaktadır. Ancak, bu bağıntı

$e_0 \theta, e_0 \omega^\lambda$ gibi istenmeyen türevleri içermektedir. Bunlardan kurtulmak için

$$R_{\langle\alpha\beta\rangle} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} R^{\gamma}_{\gamma}$$

biçiminde tanımlanan izsiz simetrik kısım göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} R_{\langle\alpha\beta\rangle} = & e_0 \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} - \dot{u}_{\langle\alpha} \dot{u}_{\beta\rangle} - a_{\langle\alpha} \dot{u}_{\beta\rangle} - e_{\langle\alpha} \dot{u}_{\beta\rangle} + \sigma_{\langle\alpha\beta\rangle} \theta + 2\omega_{\langle\alpha} \Omega_{\beta\rangle} \\ & - 2\sigma_{\gamma\langle\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta\rangle\lambda} \Omega^{\lambda} + \dot{u}_{\gamma} n^{\lambda}_{\langle\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta\rangle\lambda} + [(e_{\gamma} - 2a_{\gamma}) n^{\lambda}_{\langle\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta\rangle\lambda} \\ & + e_{\langle\alpha} a_{\beta\rangle} + b_{\langle\alpha\beta\rangle}] \end{aligned}$$

olur. (3.88d) kullanılır ve izsiz simetrik kısımlar düzenlenir ve de son terimin yalnızca $n^{\alpha\beta}$ ve a_{α} komütasyon fonksiyonlarına bağlı olmasından ötürü

$${}^*S_{\alpha\beta} = (e_{\gamma} - 2a_{\gamma}) n^{\lambda}_{(\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta)\lambda} + e_{(\alpha} a_{\beta)} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} e_{\gamma} a^{\gamma} + b_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} b^{\alpha}_{\alpha} \quad (3.95)$$

tanımı yapılırsa, sonuçta

$$\begin{aligned} e_0 \sigma_{\alpha\beta} = & (e_{\langle\alpha} + \dot{u}_{\langle\alpha} + a_{\langle\alpha}) \dot{u}_{\beta\rangle} + \sigma_{\alpha\beta} \theta - 2\omega_{\langle\alpha} \Omega_{\beta\rangle} \\ & + 2\sigma_{\gamma(\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta)\lambda} \Omega^{\lambda} - n^{\lambda}_{(\alpha} \varepsilon^{\gamma}_{\beta)\lambda} \dot{u}_{\gamma} - {}^*S_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.96)$$

elde edilir.

Şimdi, (3.56b) deki EAD'nin

$${}^4R \equiv R^a_a = -R_{00} + R^{\alpha}_{\alpha} = -T^a_a + 4\Lambda = \mu - 3p + 4\Lambda \quad (3.97)$$

biçiminde büzülmüş hâlini göz önüne alalım (son eşitlikte (3.79.e) kullanılmıştır).

(3.91)den R^{α}_{α} büzülmesi yapılırsa

$$R^{\alpha}_{\alpha} = e_0 \theta + \theta^2 + (2a_{\gamma} - \dot{u}_{\gamma} - e_{\gamma}) \dot{u}_{\gamma} - 4\omega_{\lambda} \Omega^{\lambda} + 4e_{\gamma} a^{\gamma} - 6a_{\gamma} a^{\gamma} - \frac{1}{2} b \quad (3.98)$$

bulunur. Bu ifâdeye (3.93) den çekilecek $e_0 \theta$ nın ifâdesi yerleştirilirse

$$R^{\alpha}_{\alpha} = \frac{2}{3} \theta^2 + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{2} (\mu + 3p) + \Lambda - 4\omega_{\lambda} \Omega^{\lambda} + 4e_{\gamma} a^{\gamma} - 6a_{\gamma} a^{\gamma} - \frac{1}{2} b \quad (3.99)$$

olur. Bu ifâde (3.97) ye yerleştirilir ve R_{00} için (3.88a) kullanılırsa

$$4e_{\gamma} a^{\gamma} - 6a_{\gamma} a^{\gamma} - \frac{1}{2} b = -2(\mu + \Lambda) - \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 + 4\omega_{\lambda} \Omega^{\lambda} \quad (3.100a)$$

elde edilir. Bu son ifâde,

$${}^*R \equiv 4e_{\gamma} a^{\gamma} - 6a_{\gamma} a^{\gamma} - \frac{1}{2} b \quad (3.101)$$

tanımlamak suretiyle

$${}^*R = 2(\mu + \Lambda) - \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 + 4\omega_{\lambda} \Omega^{\lambda} \quad (3.100b)$$

biçimini alır.

Bu son denklem ile, kinematik ve dinamik değişkenlerin evrim (e_0 türevleri) ve bağ (yalnızca e_α uzaysal türevlerini içerenler) denklemlerinin tesisi tamamlanmış olmaktadır. Ancak, şu iki noktayı da eklemek gerekmektedir.

Birincisi (3.97) ve (3.101) de tanımlanan ${}^*S_{\alpha\beta}$ ve *R büyüklükleri yalnızca $n_{\alpha\beta}$ ve a_α komütasyon fonksiyonlarını ilgilendiren birer tanımdır. Bu büyüklüklerden hareketle

$${}^3S_{\alpha\beta} \equiv {}^*S_{\alpha\beta} - \omega_{<\alpha} \omega_{\beta>} + 2\omega_{<\alpha} \Omega_{\beta>} \quad (3.102)$$

$${}^3R \equiv {}^*R + 2\omega^2 - 2\omega_\alpha \Omega^\alpha \quad (3.103)$$

bağıntıları aracılığıyla ${}^3S_{\alpha\beta}$ ve 3R ile gösterilen büyüklükler tanımlansın. Bunlar cinsinden (3.98) ve (3.100b) denklemleri yeniden yazılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} e_0 \sigma_{\alpha\beta} = & (e_{<\alpha} + \omega_{<\alpha} + a_{<\alpha}) \omega_{\beta>} - \sigma_{\alpha\beta} \theta + 2\omega_{<\alpha} \omega_{\beta>} \\ & + 2\sigma_{\gamma(\alpha} \varepsilon_{\beta)\lambda} \Omega^\lambda - n^\lambda_{(\alpha} \varepsilon_{\beta)\lambda} \omega_{\gamma} - {}^3S_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.104)$$

ve

$${}^3R = 2(\mu + \Lambda) - \frac{2}{3} \theta^2 + 2\sigma^2 \quad (3.105)$$

olur. $\omega = 0$ olduğundan (3.102) ve (3.103) bağıntılarından

$${}^3S_{\alpha\beta} = {}^*S_{\alpha\beta} \quad (3.106)$$

$${}^3R = {}^*R \quad (3.107)$$

olacağı görülmektedir. Bu hâle girdapsız (veyâ dönmesiz) akışkan denir. Bu taktirde, u 4-lü hız vektörünün bir t kozmik zamanı tanımlayabileceği ve u 'nun da bu $t = \text{sâbit}$ hiperyüzeylerinin normalleri olacağı gösterilebilir. Böyle olunca, u hızına sahip gözlemcinin durgunluk uzayları ile $n = u$ normaline sahip 3-hiperyüzeyler çakışır ve h_{ab} izdüşüm tansörü bu 3-hiperyüzeylerin ${}^3g_{ab}$ metriği olur. Bu metrikten hareketle hesaplanan 3-hiperyüzeylerin Ricci tansörü ${}^3R_{ab}$ ile gösterilmek üzere ${}^3R \equiv {}^3R^\alpha_\alpha$ bu hiperyüzeylerin uzaysal Ricci Skaleri olur. ${}^3S_{\alpha\beta}$ ise

$${}^3S_{\alpha\beta} \equiv {}^3R_{<\alpha\beta>} \equiv {}^3R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} {}^3R \quad (3.108)$$

biçiminde tanımlanan izsiz simetrik uzaysal Ricci tansörüdür.

İkinci bir nokta ise C_{abcd} Weyl tansörüyle ilgilidir. EAD, yerel kaynakların uzay-zaman geometrisine etkisini tasvir eder. Gravitasyon dalgaları, gelgit etkileri gibi uzak kaynakların katkısı ise Weyl tansörü aracılığıyla olur. Bir ayrıcalıklı u 4-lü vektörünün varlığı varsayımı altında Weyl tansörü

$$E_{ab} = C_{aebf} u^e u^f \quad (3.109a)$$

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ab}{}^{gh} C_{ghf} \quad (3.109b)$$

biçiminde iki tansör tanımlar. Maxwell Teorisindeki benzerliklerden ötürü E_{ab} 'ye elektrik kısım ; H_{ab} 'ye de magnetik kısım denir ve bunlar

$$E_{ab} = E_{(ab)} \quad , \quad H_{ab} = H_{(ab)} \quad (3.110a)$$

$$E^a{}_a = 0 \quad , \quad H^a{}_a = 0 \quad (3.110b)$$

$$E_{ab} u^b = 0 \quad , \quad H_{ab} u^b = 0 \quad (3.110c)$$

özelliklerini sağlar.(3.54) dan hareketle

$$E_{\alpha\beta} = -\gamma^\gamma{}_{<\alpha} \sigma_{\gamma>\beta} + \frac{1}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} + {}^3S_{\alpha\beta} \quad (3.111)$$

$$H_{\alpha\beta} = \varepsilon_{<\alpha}{}^{\gamma\lambda} e_\gamma \sigma_{\beta>\lambda} - \varepsilon_{<\alpha}{}^{\gamma\lambda} a_\gamma \sigma_{\beta>\lambda} - 3n_{<\alpha}{}^\gamma \sigma_{\beta>\gamma} + \frac{1}{2} n^\gamma{}_\gamma \sigma_{\alpha\beta} \\ - (e_{<\alpha} + 2\dot{u}_{<\alpha} + a_{<\alpha}) \omega_{\beta>} + \varepsilon_{<\alpha}{}^{\gamma\lambda} n_{\beta>\gamma} \omega_\lambda \quad (3.112)$$

olduğu hesaplanabilir. Bu büyüklükler için de 2 adet evrim ve 2 adet bağ denklemi yazılabilirse de, ilerideki hesaplarımızda bunlara gerek kalmayacağından buraya almıyoruz.

3.2.4 Uzayca Homojen Modellere İndirgenmiş Evrim ve Bağ Denklemleri

Buraya kadar yapılanları toparlayalım. Elimizde $\mu, q^\alpha, \omega^\alpha, n^{\alpha\beta}, a_\alpha, \theta$ ve $\sigma_{\alpha\beta}$ değişkenlerinin $e_0 (\equiv \partial_0)$ türevlerini veren 7 takım denklem (toplam 23 adet skaler denklem) ve bunların yalnızca $e_\alpha (\equiv \partial_\alpha)$ türevlerini içeren, ya da (3.105) gibi, bunları da içermeyen 4 takım denklem (toplam 8 adet) bulunmaktadır. Bunlar (3.80,81,82,84,86,93) ve (3.104) ile gösterilen evrim denklemleri ve (3.83,85,94) ve (3.105) ile gösterilen bağ denklemleridir. Ancak, bunlar kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir ve Dinamik Sistem Analizi böyle durumlar için henüz emekleme

aşamasındadır. Bu yüzden, denklem sayısını düşürmek, düz türevli denklemler elde etmek gibi kolaylıklar sağlamak üzere uzay-zamanın birtakım simetriklerle donatıldığını varsaymak bir zorunluluk olmaktadır. Bunlar arasında en çok başvurulanı ve yaygın bir biçimde kullanılanı, uzay-zamanın uzaysal kısmının (üç-boyutlu hiperyüzeylerinin) homojen olduğu varsayımıdır. Uzayca homojen diye adlandırılan bu modellerde, uzay-zamanın, denklemi $t = \text{sabit}$ olan 3-boyutlu uzaysal hiperyüzeyler ailesiyle homojenlik yüzeylerine dilimlenmiş olduğu tasarlanır. Zamansal e_0 taban vektörü bu hiperyüzeylerin normali olarak alınırken ($e_0 = n$), $\{e_\alpha\}$ üçyüzlüsü de bu hiperyüzeyleri gerer. n normalinin 3-hiperyüzeyle dik olması, normalin geodeziksel ($n^a \nabla_a n_b \equiv \dot{n}_b = 0$) ve de girdapsız ($\nabla_a n_b - \nabla_b n_a = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$) olmasına yol açar. Bu durum, hiperyüzeylerin geodeziksel olarak paralel kalmasını ve $\{e_\alpha\}$ üçyüzlüsünün daima hiperyüzeyle ait olmasını sağlar. Hiperyüzeylerin kozmik zaman denilen tek bir t değişkeni ile parametrize edilmesi evrim denklemlerinin t ye göre düz türevli denklemler olmasına yol açar ki, işte bu durum için, Dinamik Sistem Analizini uygulamak olanaklı olur.

3.2.4a Bianchi-tip Modeller

Grup Teorisi diliyle, uzayca homojen modeller, uzaysal hiperyüzeyleri bir G_r eşölçüm grubu altında invariant kalan uzay-zamanlardır. Eğer $r = 3$ ve G_3 de uzaysal hiperyüzeyle basit geçişli olarak etkiyorsa böyle modellere Bianchi-tip modeller denir. Bianchi-tip modeller uzayca homojen ve eşyönsüz modellerdir. G_3 eşölçüm grubu altında invariant kalan 3-boyutlu uzaylar ilk defa 1897’ de Bianchi tarafından tip : I, II, ..., IX biçiminde 9 ayrı tip olarak sınıflandırılmış[29] ve gene ilk defa 1950’de Taub tarafından Kozmoloji’ye sokulmuşlardır[30]. Ellis ve MacCallum[1], 1969’da bunların yeni bir sınıflandırmasını yapmışlardır. Buna göre, G_3 ’e bağlanan Lie Cebrinin C^a_{bg} Yapı Sâbitleri (3.76) daki gibi yeni n^{ab} ve a_a değişkenleri cinsinden ifade edilmektedir. Uzayın homojenliği sonucu n normal vektörünün girdapsız ve dönmesiz olması (3.85) denklemini

$$n^{ab} a_b = 0 \quad (3.113)$$

bağıntısına indirgemektedir. Ellis ve MacCallum, n_{ab} matrisini köşegenleştirme, eksen ad ve yönlerini yeniden tanımlama gibi serbestlik derecelerini kullanarak n_{ab} matrisini ve a_a vektörünü

$$n_{ab} = \text{köşegen}(n_1, n_2, n_3) \quad (3.114a)$$

$$a_a = (a_1, 0, 0) \quad (3.114b)$$

biçiminde almaktadırlar. Bu taktirde (3.113) bağıntısı

$$n_1 a_1 = 0$$

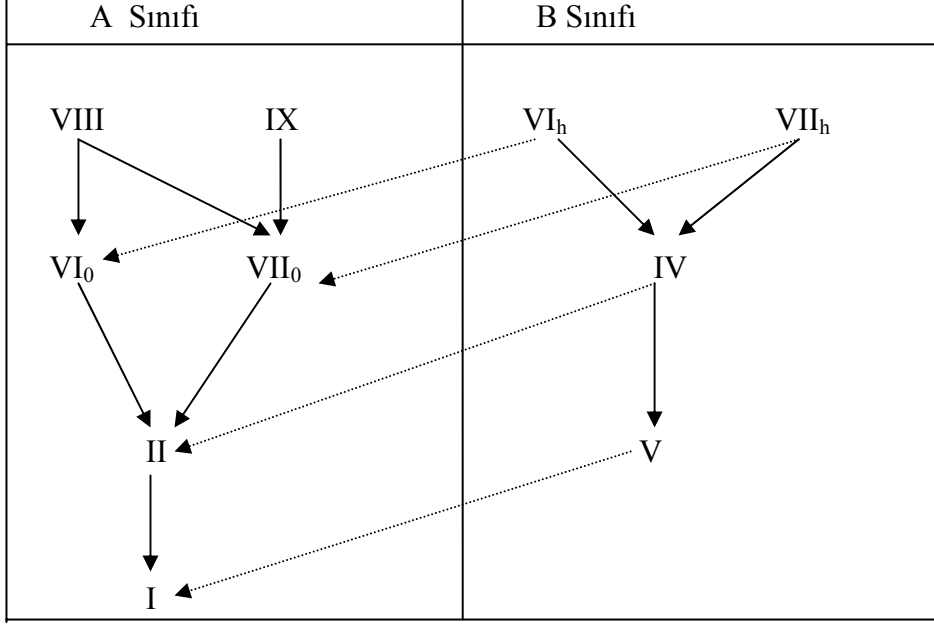
hâline indirgenmektedir ki, buradan da, $a_1 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ olmasına göre, Bianchi tip modelleri, sırasıyla A sınıfı ve B sınıfı gibi iki ana sınıfa ayırmak olanağı doğmaktadır. Ve ayrıca, n_a 'ların işaretlerine göre de bu iki sınıfın alt-sınıfları oluşturulmaktadır. Söz konusu sınıflandırma Tablo 3.2 de gösterilmektedir. Tablo 3.3 de ise Bianchi-tip modellerdeki hiyerarşi verilmektedir. Bianchi-tip modeller 1960'lardan bugüne kadar, eşyönsüzlüğün etkisini yansıtmak için yoğun bir biçimde kullanılmaktadır.

Tablo 3.2 : Bianchi-tip Modellerin Ellis ve MacCallum Sınıflandırması.

Tabloda modellerin on eşdeğerlik sınıfı gösterilmektedir[1,26,27,28]. Bianchi tarafından sınıflandırmada III ile gösterilen model bu sınıflandırmada VI₁ modeline karşılık düşmektedir. h, grupları alt gruplara ayırmak üzere $a_1^2 = h n_2 n_3$ ile tanımlı bir parametredir.

Grup Sınıfı	Grup Tipi	a_1	n_1	n_2	n_3	FLRW' ı içeriyor mu ?
A ($a_1 = 0$)	I	0	0	0	0	$k = 0$
	II	0	+	0	0	—
	VI ₀	0	0	+	-	—
	VII ₀	0	0	+	+	$k = 0$
	VIII	0	-	+	+	—
	IX	0	+	+	+	$k = +1$
B ($a_1 \neq 0$)	V	\pm	0	0	0	$k = -1$
	IV	\pm	0	0	+	—
	VI _h ($h < 0$)	\pm	0	+	-	—
	VII _h ($h > 0$)	\pm	0	+	+	$k = -1$

Tablo 3.3 : Bianchi-tip modellerde hiyerarşi.
Sıfırdan farklı parametreleri sıfır yaparak elde edilebilecek grup tipleri gösterilmektedir.
Noktalı çizgili oklar grup sınıfı değişikliğini ; dolu çizgililer ise sınıfta bir değişiklik olmadığını göstermektedir[26-28].



Uzayca homojenliğin yanı sıra, eğer 3-uzaylar bir de eşyönlü iseler, böyle modellere (uzayca) homojen ve eşyönlü modeller veyâ Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (kısaca FLRW) modeller denir. Çok yüksek simetriye sahip bu modeller, gözlemsel verileri incelemek ve açıklamak için Einstein'dan günümüze kadar en çok kullanılan modeller olmuşlardır. Bunlar G_6 (6 parametrelili eşölçüm grubu) simetrisine sahip modeller olup grup teorisi diliyle ifâde edilmeleri ilk defa 1932'de Robertson Walker tarafından gerçekleştirilmiştir.

Homojen Modeller için evrim ve bağ denklemlerini yazmadan önce şunlara da işaret edelim. Kozmolojik kapsamda, homojen modellerde θ Genişleme (hızı) Skalari yerine sıklıkla, $\theta=3H$ biçiminde tanımlanan bir H değişkeni kullanılır. H ' ya Hubble Parametresi denir. $\dot{H} > 0$ veya $\dot{H} < 0$ olması, sırasıyla, evrenin genişlediği veya büzüldüğü anlamına gelir. Bu genişleme ya da büzülmenin ölçüsünü ise

$$q = -\frac{\dot{H}}{H} - 1 \quad (3.115)$$

biçiminde tanımlanan q parametresi belirler. q 'ya yavaşlama parametresi denilmekte olup, $q > 0$, yavaşlayan ; $q < 0$ ise hızlanan (şişme) bir genişlemeyi tasvir eder (3.115) tanımı

$$\dot{H} = -(1+q)H^2 \quad (3.116)$$

biçiminde bir evrim denkleminde denktir. Bu, homojen modellerde, (3.93) ile gösterilen evrim denklemini bir bağ denkleminde dönüştürecektir.

Bu Tez'de, akışkanın tek bir bileşene (toz, radyasyon, Chaplygin Gazı gibi...) sahip olması hâli göz önüne alınacaktır ve bunun 4-lü hız vektörü de n ' ye paralel, yâni $u = n$ varsayılacaktır. Buna Dik Akış[31,32] denilmektedir. Akışkanın 3-hiperyüzeyle göre (gözlemciye göre) bir v 3-lü hızıyla hareket etmesi demek olan $u^1 n$ durumuna ise Eğik Akış[33] denilmekte olup bu Tez'in kapsamı dışında kalacaktır.

3.2.4b Evrim Denklemlerinin Toplu Gösterimi

O hâlde,

$$n = u = e_0 = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}t} \circ \quad " \times " \quad ; \quad e_a \circ \mathbb{1}_a = 0 \quad (3.117a)$$

$$w_a = 0 \quad , \quad \mathbb{1}_a = 0 \quad (3.117b)$$

kısıtlamaları altında (3.86, 84, 96, 80 ve 81) den Evrim Denklemleri ; (3.75) veya (3.87, 94, 93 ve 103)'den Bağ Denklemleri ; (3. 99 ve 95) den Tanım Bağlıları ; (3.111 ve .112) den de Serbest Alanların ifâdeleri olarak sırasıyla aşağıdakiler elde edilir.

Evrin denklemleri :

$$\mathbb{H} = - (1+q)H^2 \quad (3.118)$$

$$\mathbb{1}_a = - H a_a - a_g s^g_a - e^g_{al} a_g W^l \quad (3.119)$$

$$\mathbb{1}_{ab} = - H n_{ab} - 2s_{(a}^g n_{b)g} - 2e^{gl}_{(a} n_{b)g} W_l \quad (3.120)$$

$$s_{ab} = - 3H s_{ab} + 2s_{(a}^g e^g_{b)l} W^l - {}^3S_{ab} + p_{ab} \quad (3.121)$$

$$\mathbb{1} = - 3(m+ p)H - s^a_b p^b_a + 2a_a q^a \quad (\text{Korunum Denklemi}) \quad (3.122)$$

$$\mathbb{1} = - 4Hq^a - s^a_b q^a + 3a_b p^{ab} + e^a_{bg} (W^b q^g + n^b_d p^{dg}) \quad (3.123)$$

Bağ denklemleri :

$$n^{ab} a_b = 0 \quad (3.124)$$

$$q_a - 3s_{ab} a^b + e_{abg} s^b_l n^{gl} = 0 \quad (3.125)$$

$$qH^2 = \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{6}(m+3p) - \frac{L}{3} \quad (\text{Raychaudhuri Denklemi}) \quad (3.126)$$

$${}^3R = 2(m+L) - 6H^2 + 2s^2 \quad (\text{Genelleştirilmiş Friedmann Denklemi}) \quad (3.127)$$

Tanım Bağlıları :

$${}^3R = 6a_g a^g - n^q_g n^g_q + \frac{1}{2}n^g_g n^q_q \quad (3.128)$$

$${}^3S_{ab} = -2a_g n^g_{(a} e^g_{b)l} + 2n_{ag} n^g_b - n^g_g n_{ab} - \frac{1}{3}d_{ab} (2n^q_g n^g_q - n^g_g n^q_q) \quad (3.129)$$

Serbest Alanlar :

$$E_{ab} = -s^g_{<a} s_{g>b} + Hs_{ab} - \frac{1}{2}p_{ab} + {}^3S_{ab} \quad (3.130)$$

$$H_{ab} = e_{<a}^l s_{b>l} a_g - 3n^g_{<a} s_{b>g} + Hs_{ab} - \frac{1}{2}n^g_g s_{ab} \quad (3.131)$$

Bu denklemler hakkında şu noktalara kısaca değinmek yararlı olacaktır :

- E_{ab} ve H_{ab} serbest alanlarının sağladığı (3.130) ve (3.131) denklemleri temel denklemler olmayıp diğerlerinin bir sonucudur. Bu bakımdan Dinamik Sistem Analizi'ne dahil edilmeyebilirler.
- p_{ab} ve p değişkenleri için evrim denklemi bulunmamaktadır. Bu anlaşılabilir bir durumdur, zirâ, bunlar akışkanın fiziksel özelliklerini yansıtan hâl denkleminin değişkenleridir.
- Benzer şekilde, W^a için de evrim denklemi yoktur. Bu da, tetradın yönlendirilmesini keyfi seçmek gibi bir serbestlik derecesinden ileri gelmektedir.

4.BULGULAR

4.1.FLRW MODELLERİ İÇİN DİNAMİK SİSTEM

Evrım ve Bağ denklemlerinin bir Dinamik Sistem (DS) hâline dönüştürülmesini, ilk önce, en basit modellerden olan FLRW Modelleri çerçevesinde ele alıyoruz. Evrim ve Bağ denklemleri, sayfa39 daki denklemlerin FLRW modellerine özelleştirilmesi yoluyla bulunabileceği gibi, metrikten hareketle uygun bir dik-tetrad sistemi oluşturularak da bulunabilir. Biz, §3.2.2 deki Tetrad formalizmini örneklemek amacıyla FLRW modelleri için bu ikinci yolu seçiyoruz.

FLRW modelleri uzayca homojen ve eşyönlü modeller olup bir (t, r, q, j) eş-hareketli koordinat sisteminde

$$ds^2 = - dt^2 + l^2(t)[dr^2 + f_k^2(r)(dq^2 + \sin^2(q)dj^2)] \quad (4.1)$$

metriği ile tasvir edilir. Robertson-Walker (RW) metriği denilen bu metrik, alan denklemlerinden bağımsız olup homojenlik ve eşyönlülük hipotezlerinden hareketle tamamen grup teorisi aracılığıyla elde edilmiştir. Grup teorisi diliyle RW metriği 6 parametrelili G_6 eşölçüm grubu altında invaryant kalan 3-hiperyüzeyleri tasvir eder. Yukarıda $f_k(r)$ fonksiyonu, $k = -1, +1, 0$ değerlerini alan bir k parametresine bağlı olarak

$$f_k(r) = \begin{cases} \sin r & k = +1 \\ r & k = 0 \\ \sinh r & k = -1 \end{cases} \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Buna göre : $k=+1$ ise evrenin kapalı (eliptik) ; $k=0$ ise düz (öklitsel) ve $k=-1$ ise açık (hiperbolik) olduğu söylenir. t ' ye kozmik zaman veya öz-zaman, $l(t)$ 'ye de uzaklık ölçek çarpanı denir.

(4.1) yay elemanını,

$$\begin{aligned} w^0 &= dt \\ w^1 &= ldr \\ w^2 &= lf_k dq \\ w^3 &= lf_k \sin q dj \end{aligned} \quad (4.3)$$

biçiminde $w^a = e^a_i dx^i$ taban 1-formları seçerek

$$ds^2 = - (w^0)^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2 \quad (4.4)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu dik-birim sistemin $e_a = e_a^i \mathbf{e}_i$ taban vektörleri ise (3.28)

deki düalete bağıntısından ötürü ($e_a^i = (e^a_i)^{-1}$ dir)

$$\begin{aligned} e_0 &= \mathbf{t} \\ e_1 &= l^{-1} \mathbf{r} \\ e_2 &= l^{-1} f_k^{-1} \mathbf{q} \\ e_3 &= l^{-1} f_k^{-1} (\sin q)^{-1} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur. Bunların (3.39) daki komütatörlerinden hareketle g^a_{bg} komütasyon fonksiyonları

$$\begin{aligned} g^1_{01} &= -g^1_{10} = -\frac{\dot{l}}{l} \\ g^2_{02} &= -g^2_{20} = -\frac{\dot{f}_k}{f_k} \\ g^3_{03} &= -g^3_{30} = -\frac{\dot{f}_k}{f_k} \\ g^2_{12} &= -g^2_{21} = -\frac{f_k \dot{q}}{f_k} \\ g^3_{13} &= -g^3_{31} = -\frac{f_k \dot{q}}{f_k} \\ g^3_{23} &= -g^3_{32} = -\cot q / l f_k, \quad \text{diğerleri} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. Burada : $\frac{dl}{dt}$ ve $f_k \frac{df_k}{dr}$ dir. Bunları (3.75) ve (3.76) bağıntılarında kullanarak

$$\begin{aligned} w_a &= 0 \quad (\text{ivmesiz}) , \quad w_{ab} = 0 \quad (\text{dönmesiz}) \\ q_{11} &= q_{22} = q_{33} = \frac{\dot{l}}{l} , \quad q = 3 \frac{\dot{l}}{l} \quad (\$ \quad H = \frac{\dot{l}}{l}) \\ s_{ab} &= 0 \quad (\text{eşyönsüzlük yok}) \\ a_1 &= -\frac{f_k \dot{q}}{f_k} , \quad a_2 = -\cot q / 2l f_k , \quad a_3 = 0 \\ n_{13} &= n_{31} = -\cot q / 2l f_k , \quad \text{diğerleri} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

oldukları bulunur. Son iki satırdaki değerler, (3.95) ve (3.101) de kullanılırsa, sırasıyla

$${}^*S_{ab} = {}^3S_{ab} = 0 \quad \text{ve} \quad {}^*R = {}^3R = \frac{6k}{l^2(t)} \quad (4.8)$$

elde edilir. Öte yandan bulunan $H = \frac{\dot{l}}{l}$ ifadesi (3.115) e taşınırsa q yavaşlama parametresinin

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\dot{H}}{H} \quad (4.9)$$

ile verildiği görülür.

Şimdi,(4.7) sonuçları ışığında evrim ve bağ denklemlerinin sâdeleşmesini ele alalım. (3.94) ve (3.96) denklemleri $q_a = p_{ab} = 0$ verir. Bu, FLRW modellerinin, ancak Mükemmel Akışkan Şeması ile tutarlı olabileceği anlamına gelmektedir. Bunların sonucunda (3.81) den $e_b p = 0$ Ş $p = p(t)$ elde edilir ki bu, homojenlik varsayımı ışığında, beklenen bir sonuçtur. (3.82) ve (3.83) ün özdeş olarak sağlandığı görülmektedir. Eğer W^r üzerindeki serbestlik $W^r = 0$ seçimi olarak kullanılırsa, bu, (3.84), (3.85), (3.86) denklemlerinde herhangi bir tutarsızlığa yol açmaz ve bunlar da özdeş olarak sağlanır. Geriye kalanlar, (3.80), (3.93) ve (3.100b) veyâ (3.103) den, sırasıyla,

$$\dot{m} = - 3H(m+ p) \quad (\text{Korunum denklemi}) \quad (4.10)$$

$$\dot{H} = - H^2 - \frac{1}{6}(m+ 3p) + \frac{L}{3} \quad (\text{Raychaudhuri denklemi}) \quad (4.11)$$

$${}^3R = 2(m+ L) - 6H^2 \quad (\text{Friedmann denklemi}) \quad (4.12)$$

olur.

Öte yandan, (3.111) ve (3.112) den de $E_{ab} = 0$ ve $H_{ab} = 0$ bulunur ki, bu $C_{abcd} = 0$ sonucuna yol açar. Başka bir deyişle, FLRW modelleri konformal olarak düzdür.

4.1.1 Evrim ve Bağ Denklemlerinin Dinamik Sistem Hâline Getirilmesi

Canlı kalan denklemleri tekrar, toplu olarak gösterelim.

$$\dot{H} = - (1+ q)H^2 \quad (4.13)$$

$$\dot{m} = - 3H(m+ p) \quad (\text{Korunum denklemi}) \quad (4.14)$$

$$\dot{H} = - H^2 - \frac{1}{6}(m+ 3p) + \frac{L}{3} \quad (\text{Raychaudhuri denklemi}) \quad (4.15)$$

$${}^3R = 2(m+ L) - 6H^2 \quad (\text{Friedmann denklemi}) \quad (4.16)$$

$${}^3R = \frac{6k}{l^2(t)} \quad (\text{Simetri yüzeylerinin 3-eğriliği}) \quad (4.17)$$

$$H = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} \quad (\text{Hubble parametresi}) \quad (4.18)$$

$$q = - \frac{1}{H^2} \frac{\ddot{l}(t)}{l(t)} \quad (\text{Yavaşlama parametresi}) \quad (4.19)$$

Denklemler bu ham görünüşleriyle bir Dinamik Sistem (DS) oluşturmazlar, zirâ değişkenler hem boyut taşımakta hem de t değişkeni $t \in \mathbb{R}$ değildir. Ayrıca, bu denklem sistemi kapalı da değildir. Zirâ, p basıncı için bir evrim denklemi sistemde yer almamaktadır. Şimdi, yukarıdaki sistemin bir DS hâlini alması için yapılması gerekenleri aşamalı olarak sıralayalım.

Değişkenleri boyutsuz kılmak için uygun bir değişkene normlamak gerekmektedir. Bu uygun değişken (4.16) daki Friedmann denkleminden hareketle belirlenebilir. Bunu

$$H^2 = -\frac{1}{6} {}^3R + \frac{1}{3} m + \frac{1}{3} L \quad (4.20)$$

biçiminde yazalım. Madde-enerji yoğunluğu olan m , Zayıf Enerji Koşulundan dolayı $m \geq 0$ dır. (4.17) den, eğer $k=0$ veyâ $k=-1$ ise ${}^3R \leq 0$ olur. Eğer $L \geq 0$ ise yukarıdaki ifâdede H^2 terimi diğer bütün terimlerden büyük, yâni, egemen terim olur. $H > 0$, genişleyen bir evreni; $H < 0$ de büzülen bir evreni tasvir eder. $H=0$ olduğunda ise $\dot{R} \neq 0$ olacağından evren çökmeden önceki maksimum genişlemeye ulaşmış olur. Öte yandan, $k=+1$ ve $L \geq 0$ ise bu taktirde egemen terim, (4.20) nin

$$D^2 \circ H^2 + \frac{1}{6} {}^3R = \frac{1}{3} m + \frac{1}{3} L \quad (4.21)$$

biçiminde yazılışından $D \circ \sqrt{H^2 + \frac{1}{6} {}^3R}$ olur[34]. O halde değişkenler, $H \geq 0$ (veyâ $D \geq 0$) in kuvvetlerine bölünerek boyutsuz yapılabilir. Buna göre :

$k = -1, 0$ ve $L \geq 0$ için ($k = +1$ modellerini bu çalışmamızda göz önüne almıyoruz) :

$$W = \frac{m}{3H^2}, \quad W_L = \frac{L}{3H^2}, \quad P = \frac{p}{3H^2}, \quad K = -\frac{{}^3R}{6H^2} \quad (4.22)$$

değişkenleri tanımlansın. Bunlara H -ya normlanmış değişkenler denilmekte olup ilk defa Wainwright ve Hsu[31] tarafından kullanılmıştır.

Şimdi, (4.22) de tanımlı değişkenler cinsinden (4.13-4.19) denklem sistemi

$$\dot{H} = -(1+q)H^2 \quad (4.23)$$

$$\dot{W} = H[(-1+2q)W - 3P] \quad (4.24)$$

$$q = \frac{1}{2}(W+3P) - W_L \quad (4.25)$$

$$1 = K + W + W_L \quad (4.26)$$

olur. Bu şekil, yine, bir DS oluşturmamaktadır, zirâ türevler hâla boyut taşımaktadır. Bunun için

$$t = \int H(t)dt \quad \hat{U} \quad dt = H(t)dt \quad (4.27)$$

biçiminde yeni bir t zaman değişkeni tanımlanır. Bu, (4.18) den dolayı

$$l = l_0 e^t \quad \text{veyâ} \quad t = \ln \frac{l}{l_0} \quad (l_0 \text{ bir integrasyon sâbiti}) \quad (4.28)$$

bağıntısına denktir. t ya logaritmik zaman denir. t 'nun değişim aralığının IR olduğu görülmektedir. Dolayısıyla böyle bir t nun seçimi ile yalnızca türevleri boyutsuz kılmakla kalmıyor, fakat aynı zamanda, faz uzayın tamamını da kapsamış oluyoruz. t ya göre türevler " ϕ " ile gösterilmek üzere

$$H\phi = H\phi \quad (4.29)$$

ve keyfi bir X fonksiyonu için de

$$X\phi = X\phi \quad (4.30)$$

yazılacağına dikkat ederek yukarıdaki denklem sistemi

$$H\phi = -(1+q)H \quad (4.31)$$

$$W\phi = (-1+2q)W - 3P \quad (4.32)$$

$$q = \frac{1}{2}(W+3P) - W_L \quad (4.33)$$

$$1 = K + W + W_L \quad (4.34)$$

biçimine dönüşür. Eğer basınç değişkeni için belirsizlik şimdilik göz ardı edilirse, bu sistem hâlâ bir DS değildir. Zirâ, L , sâbit bir parametre olmasına karşılık W_L bir değişkendir ve sistemde bunun için bir evrim denklemi eksiktir. Fakat bunu gidermek son derece kolaydır. W_L nın (4.22) deki tanımından, (4.13) ü de kullanarak

$$W_L\phi = 2(1+q)W_L \quad (4.35)$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu arada, zorunlu olmamakla birlikte, K eğrilik değişkeni için de (4.22), (4.17) ve (4.31) den

$$K\phi = 2qK \quad (4.36)$$

biçiminde bir evrim denklemi yazılabileceğini kaydedelim. (4.31-36) denklemlerinin bir DS oluşturması için $P\phi$ nün de denklemlerde yer alması gerekirdi. Bu eksikliği $p = p(m)$, yani, $P = f(W)$ biçimindeki bir hâl denklemi giderecektir. Bunu birazdan ele alacağız.

4.1.2 Barotropik Lineer Hâl Denklemleri

Yukarıda söylenildiği gibi, denklem sistemini kapamak için $P\phi$ yu ya da P yi tanımlamak gerekmektedir. Bunu, önce, literatürde en sık kullanılan

$$p = (g - 1)m \quad \hat{U} \quad P = (g - 1)W \quad (4.37)$$

biçiminde barotropik lineer hâl denklemleri olarak alıyoruz. Bu taktirde $k=0, -1$ ve $L^3 = 0$ durumuna ilişkin (4.31-36) denklemleri, bir DS olarak sonunda

$$H\phi = - (1 + q)H \quad (4.38)$$

$$W\phi = (2q + 2 - 3g)W \quad (4.39)$$

$$W_L\phi = 2(1 + q)W_L \quad (4.40)$$

$$K\phi = 2qK \quad (4.41)$$

$$1 = K + W + W_L \quad (4.42)$$

$$q = \frac{1}{2}(3g - 2)W - W_L \quad (4.43)$$

biçimini alırlar. Bu sistem hakkında şu genel saptamaları yapalım :

Bu denklem sisteminde ilk göze çarpan özellik, (4.38) denkleminin diğerlerine bağıllığının olmadığıdır (dekuple). Zira, H parametresi diğer denklemlerin hiçbirinde yer almamaktadır. Bu denklemin ayrı tutulduğu DS' ye İndirgenmiş Dinamik Sistem (IDS) denir. IDS'nin faz uzayı (durum uzayı), ilk bakışta, sanki 3 boyutluymuş gibi görünmektedir (W, W_L ve K değişkenleri). Ancak (4.42) deki bağ denklemleri, bir değişkeni diğerleri cinsinden ifade etmeye olanak tanıdığından, sonuçta faz uzayı 2-boyutlu olur. Ama zaten, tesisinden de anlaşılacağı üzere, meselâ, (4.41) denklemleri bağımsız olmayıp (4.39), (4.40) ve (4.42) denklemlerinin bir sonucudur. İki boyutlu faz uzayı, (4.42) yardımıyla elenen değişkene göre: (W, W_L), (W, K) veyâ (W_L, K) uzaylarından biri olarak alınabilir. Elenen değişkenin sağladığı diferansiyel denklemler ise yardımcı denklemler gözüyle bakılır. Dolayısıyla yukarıdaki denklem sisteminden, temel denklemler ve yardımcı denklemler secimi yaparak bir DS oluşturmak pek çok türlü yapılabilir. Öte yandan (4.43) denklemleri q için bir tanım bağıntısıdır ve istenirse denklemlere yerleştirilerek f_i fonksiyonlarının (Bakınız§3.1.1), değişkenlere bağıllığı açıkça yansıtılabilir. Eğer böyle yapılırsa, yukarıdaki sistem için f_i lerin en fazla ikinci mertebeden nonlinear polinom ifadeler oldukları görülür. Polinom ifadeleri, meselâ, rasyonel ifadelerle göre daha basittir ama nonlinearlik daha baskın bir özelliktir.

4.1.2a Dinamik Sistem Analizi

- $\Lambda=0$ durumu :

Dinamik Sistem Analizini, ilk önce, bu en basit durum için ele alıyoruz.

$W_L = 0$ olduğunda bağ ile tanım denklemleri sırasıyla

$$1 = K + W \quad (4.44)$$

$$q = \frac{1}{2}(3g - 2)W \quad (4.45)$$

ifâdelerine indirgenir. (4.45) ü (4.39) a yerleştirirsek

$$W\dot{W} = - (3g - 2)(1 - W)W \quad (4.46)$$

elde edilir. Ayrıca (4.45) ile (4.45) denklemlerinde W değişkenini eleyerek (4.41) i

$$K\dot{K} = (3g - 2)(1 - K)K \quad (4.47)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu her iki denklem de bağımsız olduğundan, her hangi birini, tek bileşenli lineer hâl denklemlerle akışkanın evrimini tasvir için seçebiliriz. (4.46) yı seçelim.

Faz Uzayı :

Faz uzayı tek-boyutlu W -ekseni olur ama bunu W değişkeninin değişim aralığını belirleyerek daha da kısıtlayabiliriz. Zayıf Enerji Koşulu (ZEK) olan $m^3 = 0$ bağıntısı $W^3 = 0$ eşitsizliğini verir. Öte yandan, $k=-1,0$ için $K^3 = 0$ olacağından, (4.44) den $W \leq 1$; ve $k=+1$ için de $K < 0$ olacağından, $W > 1$ olması gerektiği bulunur. Demek ki :

$k=-1, 0$ için $0 \leq W \leq 1$ (sonlu, sınırlı, kompakt)

$k=+1$ için $W > 1$ (sınırsız)

dir. O hâlde (4.46) denkleminin faz uzayı negatif olmayan tek boyutlu W -eksenidir.

Denge Noktaları :

(4.46) denkleminin $W=0$ ve $W=1$ olmak üzere iki denge noktası bulunmaktadır.

$W=0$ noktası :

Bu noktada $q=0$, $K=1$ Ş $k=-1$ olur. $H\dot{W} = -H$ olacağından bunun integrasyonu $l(t) : t$ verir. Bu denge noktası Milne evrenine karşılık gelmektedir ve M ile gösterilecektir.

$W=1$ noktası :

Bu noktada $q = \frac{1}{2}(3g - 2)$, $K=0$ Ş $k=0$ olur. $H\dot{W} = -\frac{3g}{2}H$ denkleminde $l(t) : t^{2/3g}$

($g^{-1} = 0$) bulunur. Bu denge noktası düz FLRW evrenine karşılık gelmektedir ve F ile gösterilecektir.

Denge Noktalarının Kararlılığı :

Faz uzayı $g > \frac{2}{3}$ ve $g < \frac{2}{3}$ için sırasıyla Şekil 4.1a ve Şekil 4.1b de gösterilmiştir.

Okların yönünü W nün işareti belirlemektedir. Şekil 4.1a' da $g > \frac{2}{3}$ için M noktasının bir odak noktası olduğu görülmektedir. Dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W = 0 \quad (4.48)$$

dır. Bu ; ileri zamanlarda (uzak gelecekte) $k=-1$ (açık) modellerin evriminin yaklaşık olarak Milne modelininki gibi $(l(t): t)$ olacağı anlamına gelmektedir. Bu durum, radyasyon ($g = \frac{4}{3}$ \hat{U} $p = \frac{1}{3}m$) veyâ basınçsız madde ($g = 1$ \hat{U} $p = 0$) hâlini de

kapsamaktadır. $g < \frac{2}{3}$ için ise (Şekil 4.1b) M noktası bir kaynak noktasıdır ; dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} W = 0 \quad (4.49)$$

dır. Bu ; evrenin erken zamanlarında (uzak geçmiş) evriminin Milne evrenininki gibi $(l(t): t)$ olduğu anlamına gelmektedir. $0 \leq W < 1$ aralığında $q < 0$ olduğundan, evren “kuvvet kanunlu $(l(t): t)$ ” şişmeli (enflasyon) bir davranış gösterir. F noktasının $g > \frac{2}{3}$ için bir semer noktası olduğu görülmektedir (Şekil 4.1a). Dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} W = 1 \quad (4.50)$$

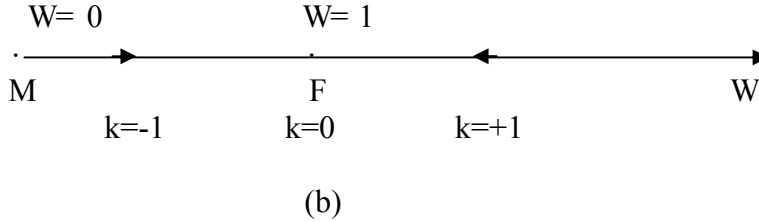
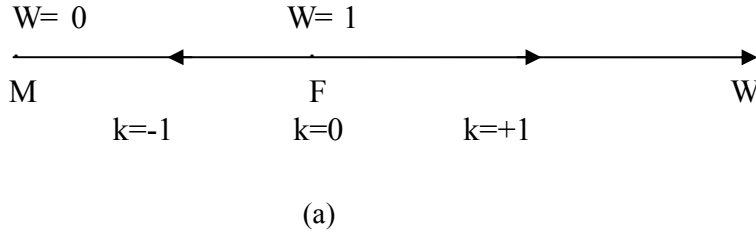
dir. Bu ; evrenin başlangıç zamanlarında tüm modellerin (her $k=0,-1,+1$ ve her $g > \frac{2}{3}$ için) evriminin düz FLRW modeli gibi olacağı anlamına gelmektedir. $k=+1$, $W > 1$ kapalı modelleri için

$$\lim_{t \rightarrow t_{maks}} W = +\infty \quad (\S \lim_{t \rightarrow \infty} q = +\infty) \quad (4.51)$$

olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, bu modeller sonlu bir zamanda, çökmeden önce, maksimum genişlemeye uğramaktadırlar. Dolayısıyla kapalı evrenlerin tasviri eksik kalmaktadır. $k=+1$ için faz uzayının W -değişkenini kompaktlaştırmak gerekmektedir. $g > \frac{2}{3}$ için düz FLRW modeli ($k=0$, $W=1$) daima genişleyen modeller ($k=-1$, $W < 1$) ile çöken modeller ($k=+1$, $W > 1$) arasında bir sınır oluşturmaktadır. Dolayısıyla düz modelin yoğunluğuna kritik yoğunluk deyip yoğunluk parametresini

$W = m/m_c$ yazmak gerekecektir. Buna göre özel bir zamanda yoğunluk yeterince büyük olduğunda, yâni, $m > m_c$ olduğunda model çökmeye uğrayacaktır.

Son olarak, $g < \frac{2}{3}$ için Şekil 4.1b den, F noktasının bir düğüm noktası olduğu görülmektedir. Buna göre, her model ($k=0, -1, +1$ ve " $g < \frac{2}{3}$ ") uzak gelecekte düz FLRW modeline asimtot olacaktır. Ayrıca $k=-1$ modelleri ise uzak geçmişte Milne modeline asimtot olacaktır. Tablo 4.1 de denge noktasının kararlılıkları gösterilmektedir.



Şekil 4.1 : γ için Faz uzayı : (a) $g > \frac{2}{3}$ için Faz Uzayı (b) $g < \frac{2}{3}$ için Faz Uzayı

Tablo 4.1 : Denge Noktalarının Kararlılığı

İsim	W	q	K	$0 < g < 2/3$	$2/3 < g < 2$
M	0	0	1	kaynak	düğüm
F	1	$\frac{1}{2}(3g - 2)$	0	düğüm	semer

- $L^1 \geq 0$ durumu :

(4.38-43) denklemlerine geri dönelim. Faz uzayı değişkenlerini : $(W, W_L) \in \mathbb{R}^2$, $(W, K) \in \mathbb{R}^2$ ve $(K, W_L) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere üç türlü seçebiliriz. Birinciyi seçelim. q nun ifâdesini W ile W nin ifâdelerini taşırsak, DS,

$$W' = [(2 - 3g)(1 - W) - 2W_L]W \quad (4.52)$$

$$W_L' = [- (2 - 3g)W + 2(1 - W_L)]W_L \quad (4.53)$$

denklemlerinden ibaret olur.

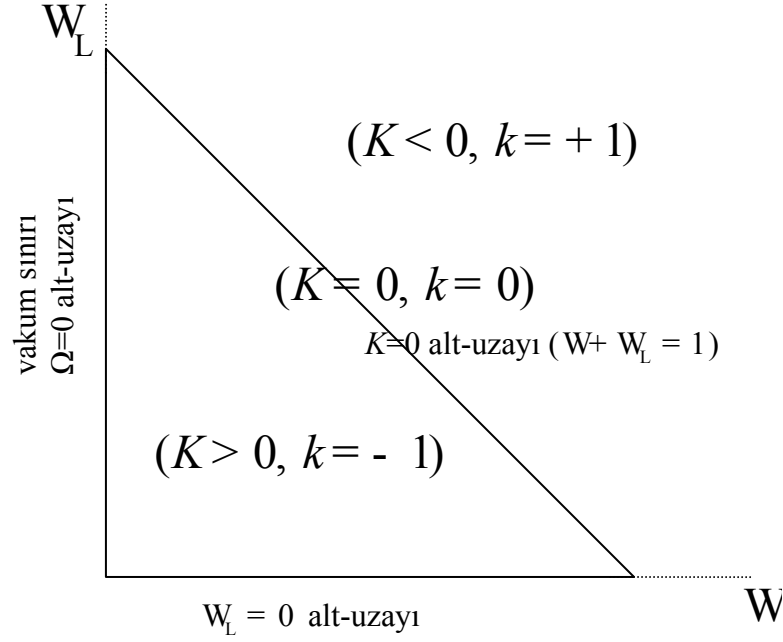
Faz Uzayı :

$m^3 \geq 0$ (ZEK) ile $k = 0, -1$ ve $L^3 \geq 0$ varsayımları $W^3 \geq 0$, $K^3 \geq 0$ ve $W_L^3 \geq 0$ eşitsizliklerini verir. Dolayısıyla (4.12) bağı denkleminde W , K ve $W_L \in [1, \infty)$ olması gerektiği bulunur.

O hâlde, $k = 0, -1$ ve $L^3 \geq 0$ için

$$0 \leq W \leq 1, \quad 0 \leq W_L \leq 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq K \leq 1 \quad (4.54)$$

dır. Başka bir deyişle, W , W_L ve K faz değişkenleri sonludur (sınırlı, kompakt). Şimdi, faz uzayının da sınırlılığına bakalım. (4.42) bağı denklemini $W^3 \geq 0$ ve $W_L^3 \geq 0$ kısıtlamalarına ek olarak $W + W_L \leq 1$ koşuluyla da kısıtlamaktadır. $W + W_L \leq 1$ bölgesinde $K < 0$ yani $k = +1$ dir (Bkz Şekil. 4.2) Faz uzayının bu bölgesini kompaktlaştırmak gerekmektedir. Goliath ve Ellis [34] $k = +1$ (kapalı modeller) için değişkenleri H yerine D ye (bkz.(4.21)) normlamaktadır. Biz, bu Tez'imizde yalnızca $k = 0, -1$ modeller ile ilgilendiğimizden, DSA' ini daha zor ve karmaşık olan $k = +1$ modellerini ele almayacağız.



Şekil 4.2 : $L^1 = 0$ için DS' nin Faz uzayı.
 $k=0, -1$ için Faz uzayı sınırlı (kompak) olup şekildeki üçgensel bölgedir. $k=+1$ için ise Faz uzayı sınırsızdır.

Denge Noktaları ve Kararlılık :

(4.52), (4.53) ve (4.41) deki denklemlerin yapısından, §3.1 de söylenenlerin ışığında, üç tane invaryant alt küme bulunmaktadır. Bunlar :

$$\begin{aligned} W = 0 & \quad (\text{vakum sınırı}) \\ W_L = 0 & \quad (L = 0 \text{ alt-uzayı}) \\ K = 0 & \quad (\text{düz alt-uzay}) \end{aligned}$$

dır. (4.38) denkleminin görünüşünden $H=0$ in da bir invaryant alt-küme olduğunu söylemek gerekirdi, ama, $H^1 = 0$ varsayıldığından böyle bir şey söz konusu değildir.

Elimizdeki IDS'nin denge noktalarını ve bu noktalarda değerlendirilen Jakobiye matrisin özdeğerlerini Tablo 4.2 de göstermekteyiz. Tablolarda, ayrıca, γ parametresinin değerlerine bağlı olarak özdeğerlerin işaretlerinden hareketle denge noktalarının kararlılık analizi de yer almaktadır.

Tablolarda, M , dS ve F sembolleriyle işaretlenen denge noktaları yalın hiperbolik denge noktalarıdır (bu noktalarda özdeğerlerden hiçbiri sıfır değildir). Buna karşılık Tablo 4.2b deki D_I , bir denge noktası kümesini göstermektedir (özdeğerlerden yalnızca biri sıfır olduğundan bu, denklemi $W_L = 0$ ile tanımlı 1- boyutlu eğri (doğru) dir (W -ekseni). Bu denge kümesi M ve F yi de içermektedir. Benzer biçimde, Tablo 4.2c deki

D_2 ile gösterilen denge kümesi $W+ W_L = 1$ doğrusundan oluşmaktadır. Bu, F ve dS noktasını da içermektedir. DS' nin faz portrelerini $p^3 = 0$ ile $p < 0$ hâlleri için, çeşitli γ değerlerine göre, sırasıyla Şekil 4.3 ile Şekil 4.4 de göstermekteyiz.

Tablo 4.2 : γ değerleri için denge noktaları ve kararlılık analizi : (a) $0 < g < \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} < g \leq 2$ için (b) $g = \frac{2}{3}$ ($p = -\frac{1}{3}m$) için (c) $g = 0$ ($p = -m$) için

(a)

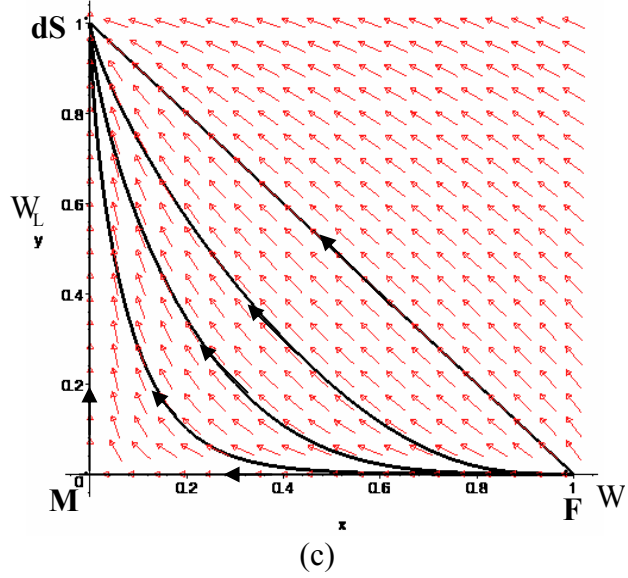
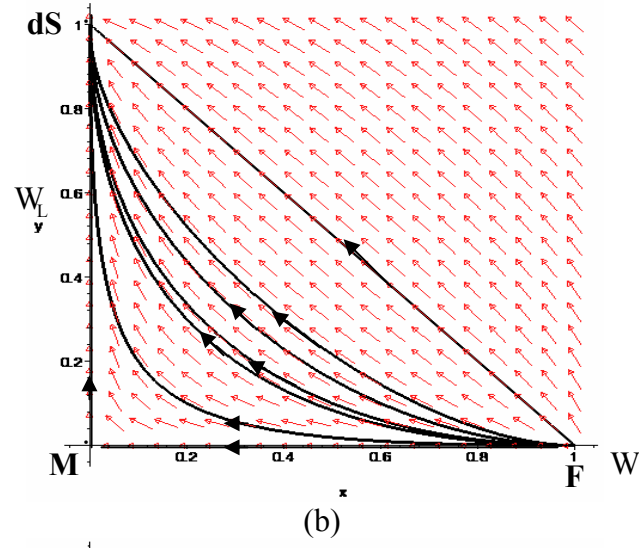
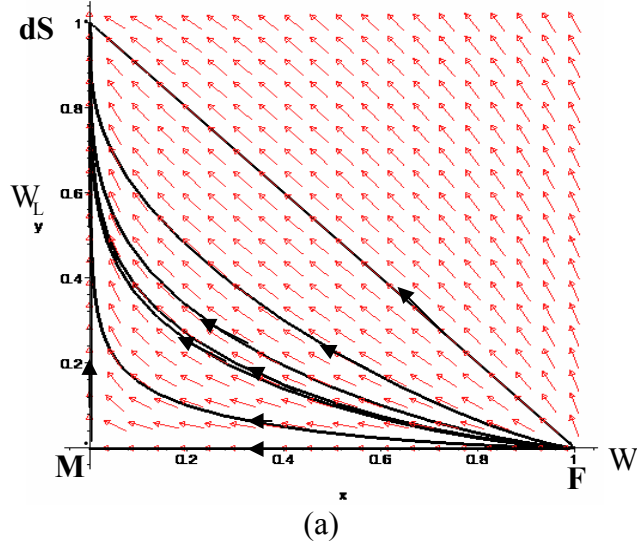
Adlandırma	W	W_L	K	q	Özdeğerler		Kararlılık	
					l_1	l_2	$0 < g < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} < g \leq 2$
M (Milne modeli)	0	0	1 ($k=-1$)	0	$2-3\gamma$	2	kaynak	semer
dS (de Sitter modeli)	0	1	0 ($k=0$)	-1	-3γ	-2	düğüm	düğüm
F (düz FL modeli)	1	0	0 ($k=0$)	$\frac{1}{2}(3g-2)$	$-(2-3\gamma)$	3γ	semer	kaynak

(b)

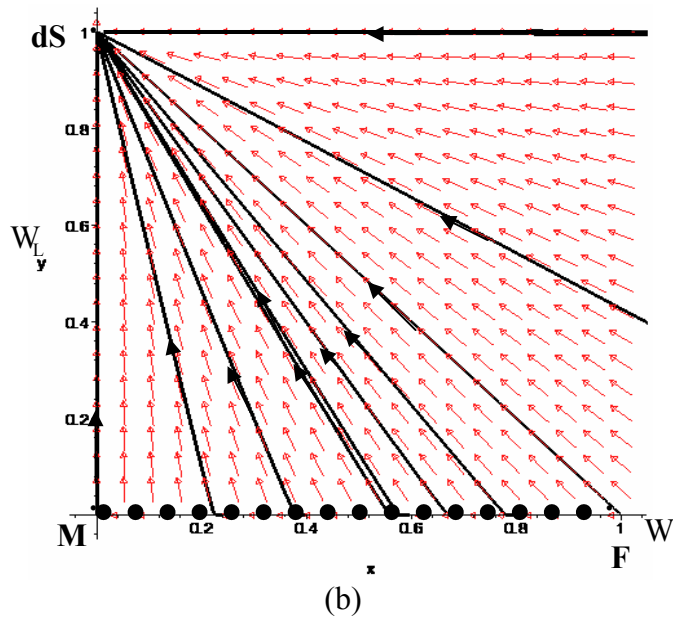
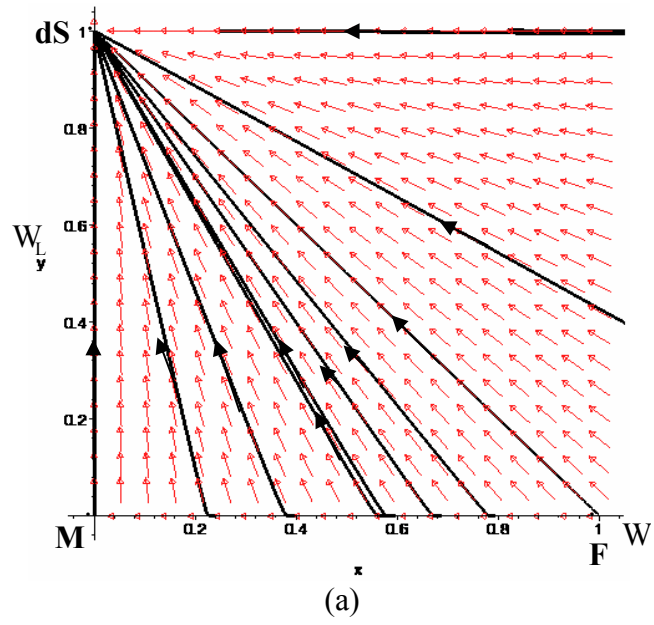
Adlandırma	W	W_L	K	q	Özdeğerler		Kararlılık
					l_1	l_2	$g = \frac{2}{3}$
dS (de Sitter modeli)	0	1	0	-1	-2	-2	düğüm
$D_1(W_L = 0$ alt-uzayı)	W	0	1- W	0	0	2	kaynak eğrisi

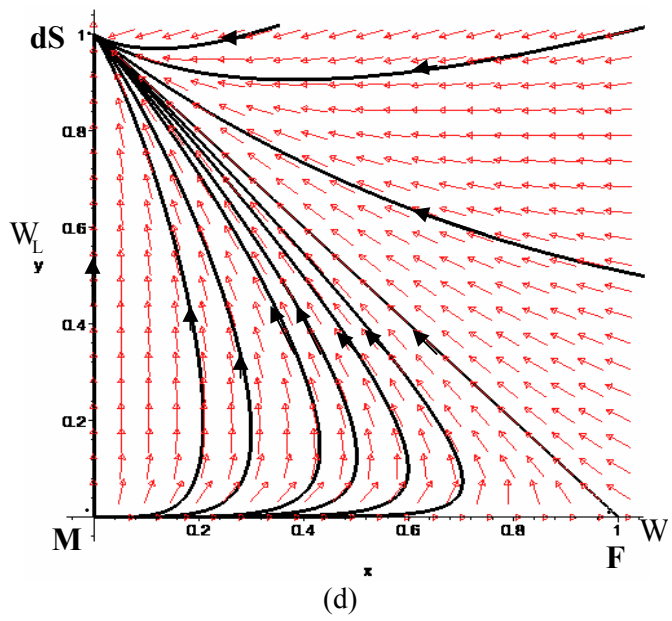
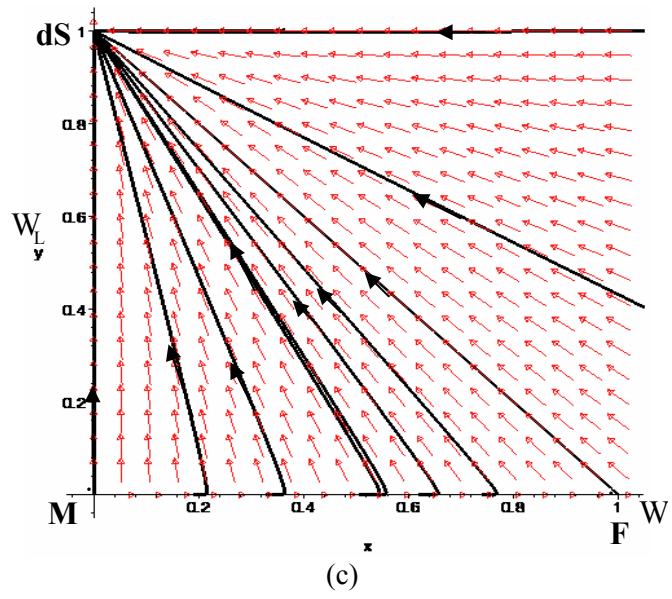
(c)

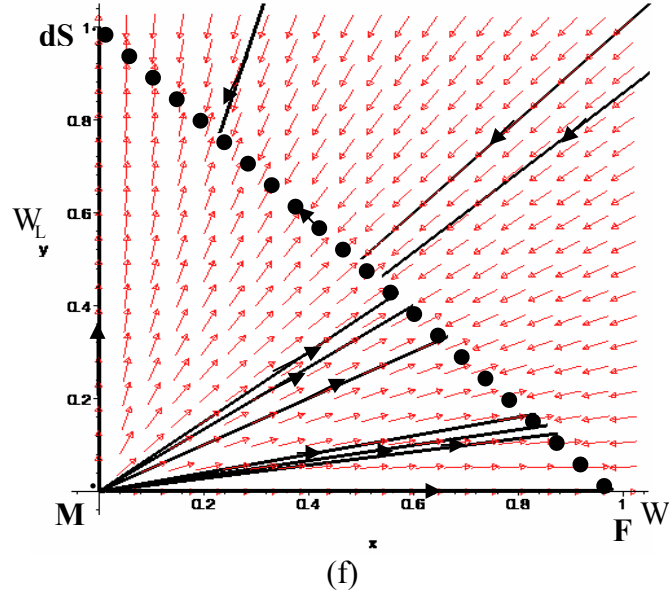
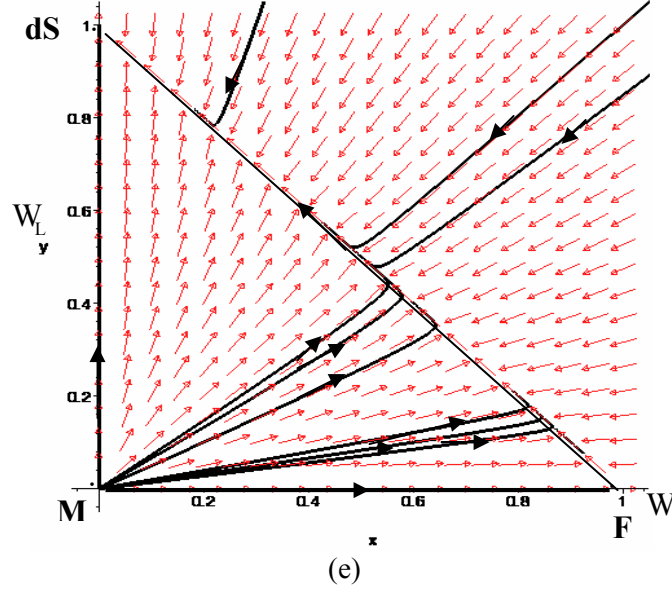
Adlandırma	W	W_L	K	q	Özdeğerler		Kararlılık
					l_1	l_2	$g = 0$
M (Milne modeli)	0	1	0	-1	2	2	kaynak
$D_2(K = 0$ alt-uzayı)	W+	$W_L = 1$	0	-1	-2	0	düğüm eğrisi



Şekil 4.3 : Negatif Olmayan Basıncılı $L^{-1} > 0$ Modellerin Faz Portreleri : (a) $g = 2$ ($p = m$, katı akışkan) için (b) $g = \frac{4}{3}$ ($p = \frac{1}{3}m$, radyasyon) için (c) $g = 1$ ($p = 0$, basınçsız soğuk madde, toz) için







Şekil 4.4 : Negatif Basıncılı $L^{-1} = 0$ Modellerin Faz Portreleri : (a) $g = 0.67$ ($p < 0$) için (b) $g = \frac{2}{3}$ ($p = -\frac{1}{3}m$, kozmik sicim) için (c) $g = 0.66$ ($p < 0$) için (d) $g = \frac{1}{2}$ ($p < 0$) için (e) $g = 0.01$ ($p < 0$) için (f) $g = 0$ ($p = -m$, bir kozmolojik sâbite eşdeğer) için

Nitel İnceleme :

$\frac{2}{3} < g \leq 2$ değerleri için (negatif olmayan basınç) Şekil 4.3a, b ve c de gösterilen faz portrelerinden tüm modeller için FL modelinin geçmiş çekici, de Sitter modelinin ise gelecek çekici olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, her türlü model, uzak geçmişte (tekillik civarında) $W=0$ olan düz ($k=0$) bir FL modeliyle yaklaşık olarak tasvir

edilebilirken, uzak gelecekte modelin davranışı de Sitter modelininki gibi olacaktır ; yâni, boş ($W^0 = 0$), düz ($k=0$) ve şişmeli ($q=-1$) genişleme hızlanan ve $l(t) : \exp(\sqrt{\frac{L}{3}}t)$. Evrenin tekillikten bu hâle geçmesi doğrudan doğruya olabileceği gibi, önce Milne (M) modeline evrimleşip sonra da şişmeye uğraması olanaklıdır. Bu bakımdan M noktası bir ara evrimi göstermektedir.

Şimdi, Şekil 4.4 de gösterilen $0 < g < 1$ (negatif basınç) hâlini ele alalım. Faz portresi, $\frac{2}{3} < g < 1$ aralığı için önceki $p^3 = 0$, haliyle aynı görünümü göstermektedir ; yâni, F geçmiş çekici, dS ise gelecek çekicidir (Bkz Şekil 4.4a) . Ancak, $g = \frac{2}{3}$ için geçmiş çekici tüm $\Lambda=0$ -lı modeller olmaktadır (Bkz Şekil 4.4b). $0 < g < \frac{2}{3}$ aralığı için ise geçmiş çekici Milne modeli ; gelecek çekici de de Sitter modeli olmaktadır. FL modeli (F noktası) ise bir ara evrimi göstermektedir. Dolayısıyla, $g = \frac{2}{3}$ bir çatallaşma değeri oluşturmaktadır. $g = 0$ için ise geçmiş çekici Milne modeli olurken, gelecek çekici düz modeller ($k=0$) kümesi olmaktadır (Bkz. Şekil 4.4f).

4.1.3 Chaplygin Gazı

Şimdi, (4.31-36) denklemlerini, hâl denklemi

$$p = - \frac{A}{m^a} , \quad m^1 = 0, \quad A \text{ pozitif bir sâbit ve } 0 < a \leq 1 \quad (4.55)$$

biçiminde olan (Genelleştirilmiş) Chaplygin Gazı için yazmak istiyoruz. Bunun için önce, A sâbitini de boyutsuz kılmak üzere W_A ile göstereceğimiz

$$W_A = \frac{a+1\sqrt{A}}{3H^2} \quad (4.56)$$

biçiminde boyutsuz bir değişken tanımlayalım. Bu taktirde (4.55), (4.22) yi de kullanarak

$$P = - \frac{W_A^{a+1}}{W^a} , \quad W^1 = 0 , \quad W_A^3 = 0 \quad \text{ve} \quad 0 < a \leq 1 \quad (4.57)$$

biçiminde ifâde edilir. Bu ifâdeyi (4.31-36) ya taşımadan önce, W_A için de bir evrim denklemi yazmak gerekecektir. W_A nın t ya göre türetilmesinden elde edilecek

$$W_A \dot{\phi} = \frac{a+1\sqrt{A}}{3} \left(\frac{-2}{H^2} \cdot \frac{H \dot{\phi}}{H} \right)$$

ifâdesinde (4.31) i kullanırsak, sonuçta

$$W_A \dot{\phi} = 2(1+q)W_A \quad (4.58)$$

buluruz. O hâlde (4.31-36) denklem sistemi Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı için

$$H \dot{\phi} = -(1+q)H \quad (4.59)$$

$$W \dot{\phi} = (-1+2q)W + 3 \frac{W_A^{n+1}}{W^n} \quad (4.60)$$

$$W_A \dot{\phi} = 2(1+q)W_A \quad (4.61)$$

$$W_L \dot{\phi} = 2(1+q)W_L \quad (4.62)$$

$$K \dot{\phi} = 2qK \quad (4.63)$$

$$\text{tanım bağıntısı : } q = \frac{1}{2W^n} (W^{n+1} - 3W_A^{n+1}) - W_L \quad (4.64)$$

$$\text{bağ koşulu : } 1 = K + W + W_L \quad (4.65)$$

sistemine dönüşür. Bu sistemde, (4.63) ü yardımcı denklem olarak alalım (zira bu, önce de söylenildiği gibi diğerlerinden elde edilebilirdi). O hâlde DS' imiz, q ifâdesini de denklemlere taşıyarak

$$W \dot{\phi} = - \frac{1}{W^n} [(1-W)(W^{n+1} - 3W_A^{n+1}) + 2W_L W^{n+1}] \quad (4.66)$$

$$W_A \dot{\phi} = \frac{1}{W^n} [W^{n+1} - 3W_A^{n+1} + 2W^n (1-W_L)] W_A \quad (4.67)$$

$$W_L \dot{\phi} = \frac{1}{W^n} [W^{n+1} - 3W_A^{n+1} + 2W^n (1-W_L)] W_L \quad (4.68)$$

olur. Bu DS' in faz uzayının 3-boyutlu olduğu görülmektedir. Biz bu Tez kapsamında, DSA' i daha zor olan bu durumu ele almayı yalnızca L sız durum ile ilgileneceğiz. O hâlde ; L = 0 için DS :

$$W \dot{\phi} = - \frac{1}{W^n} (1-W)(W^{n+1} - 3W_A^{n+1}) \quad (4.69)$$

$$W_A \dot{\phi} = \frac{1}{W^n} (W^{n+1} - 3W_A^{n+1} + 2W^n) W_A \quad (4.70)$$

denklemlerinden ibaret olacaktır.

4.1.3a Dinamik Sistem Analizi

Faz Uzayı :

Faz uzayı 2 boyutlu $(W, W_A) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının kümesidir. W, K ve W_L değişkenleri; $k=-1, 0$ ve $L \geq 0$ için, ZEK' dan ve $W \geq 0$ koşulundan dolayı (4.65) denklemi uyarınca, FLRW modellerinde olduğu gibi ($W \geq 0$ olmak üzere)

$$0 < W \leq 1 \text{ ve } 0 \leq K \leq 1, \quad 0 \leq W_L \leq 1 \quad (4.71)$$

eşitsizliklerini sağlar. Öte yandan $W_A, A \geq 0$ eşitliğinden dolayı $W_A \geq 0$ dır. Ayrıca, (2.11a) ile gösterilen $m + p \geq 0$ ZEK' na eşdeğer $W + P \geq 0$ ifadesine (4.57) yerleştirilirse, a parametresinin değerine bağlı olmaksızın, $W - W_A \geq 0$ koşulu elde edilir. O hâlde W_A nın değişim aralığı

$$0 \leq W_A \leq W \leq 1 \quad (4.72)$$

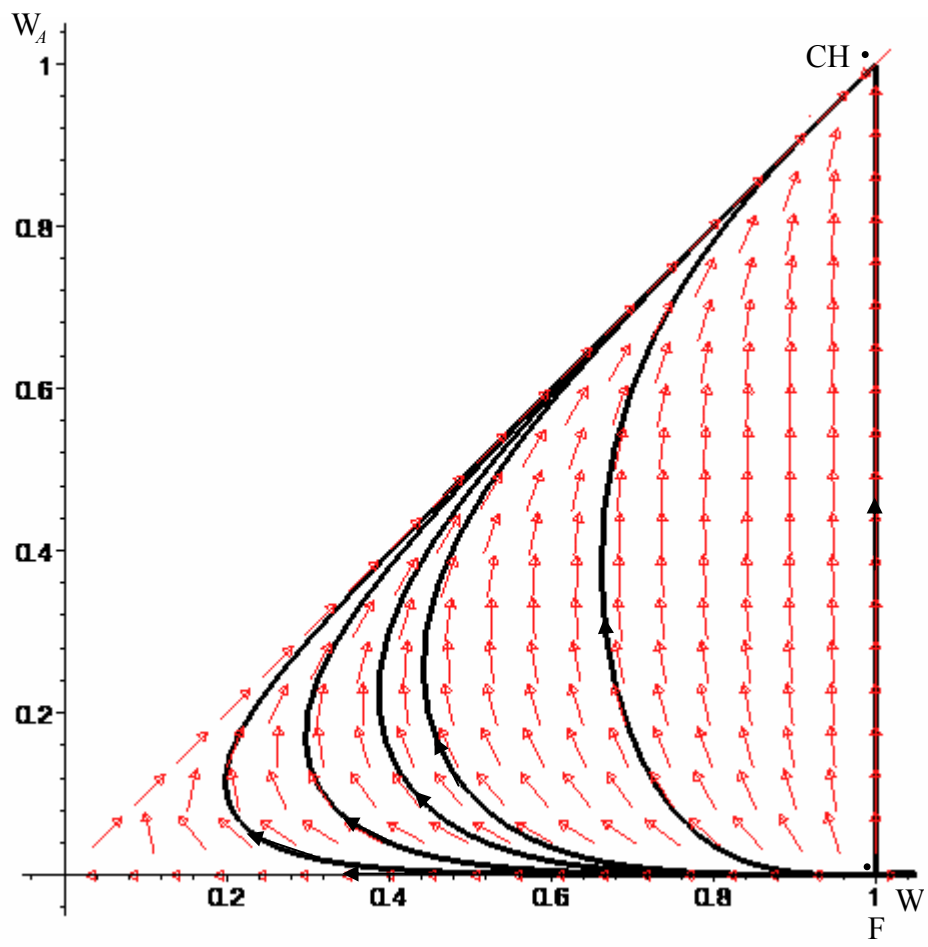
olup bu W_A değişkeninin Ω ile birlikte sınırlı olduğunu ifade eder. Sonuç olarak $k=0,-1$ durumu için faz uzayı $W_A = 0, \Omega = 1$ ve $W = W_A$ doğrularıyla sınırlanmış üçgensel bölgedir. $k=+1$ (kapalı modeller) için ise maksimum genişlemede $H=0$ olacağından (4.56) tanımının anlamı kaybolacaktır. Bu durumda §4.11 de belirtildiği gibi, değişkenleri (4.21) ile tanımlı D değişkenine normlamak gerekecektir. $k=+1$ için, (4.65) denklemi $W > 1$ vereceğinden faz uzayının bu bölgesi ancak $H=0$ olana kadarki süreç için bir anlam taşıyacaktır ; aksi takdirde $k=+1$ için DSA' i eksik kalacaktır.

Denge Noktaları ve Kararlılık :

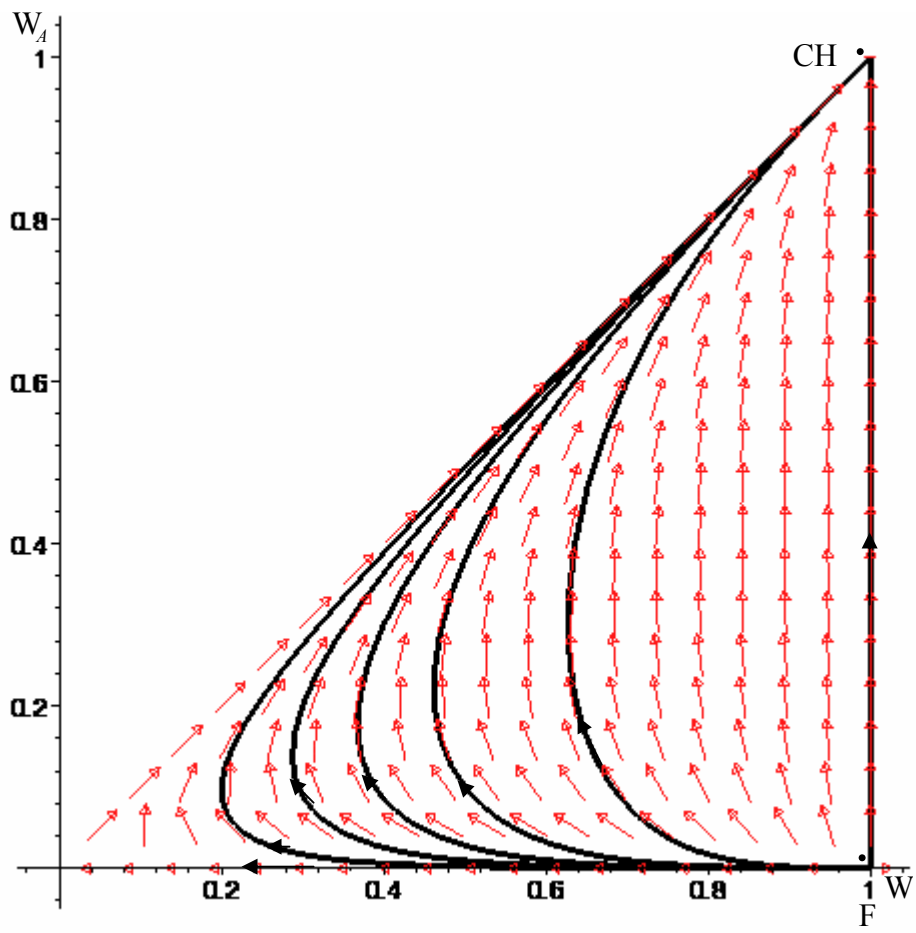
(4.69-70) ile gösterilen DS' in $(W, W_A) = (1,0)$ ve $(1,1)$ olmak üzere 2 hiperbolik denge noktası bulunmaktadır. Bunlar RW metriği için Genelleştirilmiş Chaplygin Gazına karşılık düşen çözümler olup kararlılık analiziyle birlikte Tablo 4.3 de gösterilmektedir. Şekil 4.5 de ise çeşitli α değerleri için faz portresini göstermekteyiz.

Tablo 4.3 : Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı için $L = 0$ durumunda DS' in denge noktaları ve kararlılık analizi.

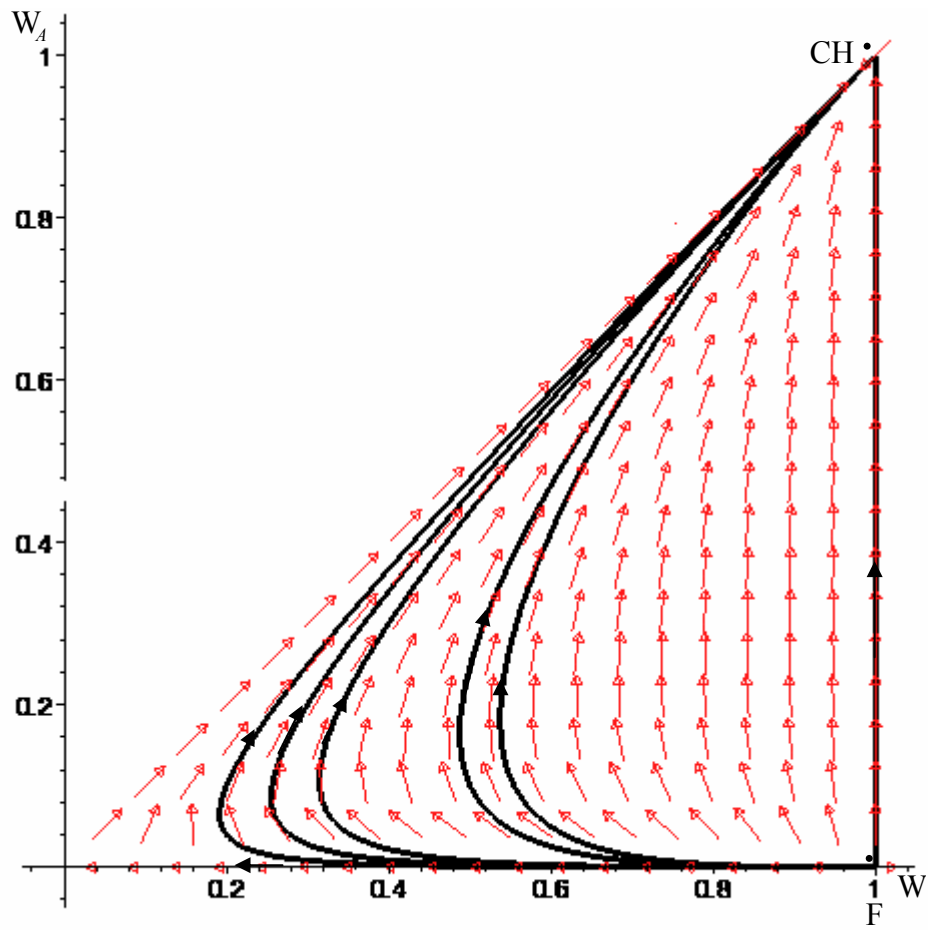
Adlandırma	W	W _L	K	q	Özdeğerler		Kararlılık " $a \in]p,1]$ "
					l_1	l_2	
F (düz FL modeli)	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1	3	kaynak
CH(Chaplygin modeli)	1	1	0	-1	-2	$-3\alpha-3$	düğüm



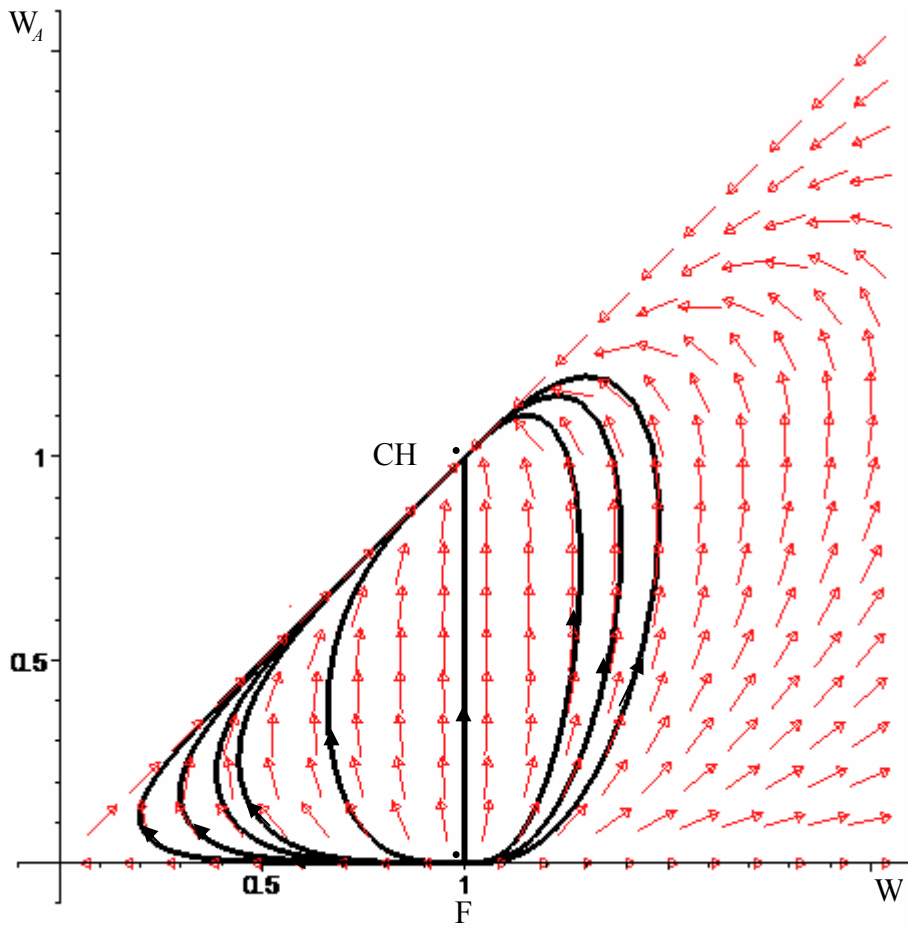
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.5 : Çeşitli α değerleri için Faz Portresi : (a) $\alpha=1$ için (b) $\alpha=1/2$ için (c) $\alpha=1/100$ için (d) $\alpha=1$ için ($k=+1$ modellerinin $H=0$ olana kadarki süreç için)

Nitel İnceleme :

Şekillerden, α parametresinin değerine bağlı olmaksızın F noktasının geçmiş çekici; CH noktasının da gelecek çekici olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle evren uzak

geçmişte (tekillik zamanında) düz ($K=0$) ve yavaşlayan ($q = \frac{1}{2} > 0$) bir davranış gösterirken uzak gelecekte yine düz fakat hızlanan ($q = -1 < 0$, şişmeli) bir davranış gösterecektir.

Tablo 4.3 de F ile adlandırılan denge noktasında $P = 0$ (basınçsız) olmaktadır. Dolayısıyla bu, $P = (g - 1)W$ bağıntısıyla karşılaştırılırsa, $g = 1$ değerine karşılık gelmektedir. Bu noktada $K=0$ ve $q = \frac{1}{2}$ olması Tablo 4.2a daki son satır ile karşılaştırılırsa, F nin, basınçsız düz bir FL modelini tasvir ettiği sonucuna yol açmaktadır. Bu da bu denge noktasını F ile göstermemizin nedenini oluşturmaktadır. Öte yandan, CH denge noktasında $P=-1$ olmaktadır. Bu, lineer barotropik hâl denklemi ile karşılaştırılırsa $g = 0$ değerine karşılık gelmektedir. Tablo 4.3 deki son satır ile Tablo 4.2a daki ikinci satırın K ve q değerleri bakımından uyuşması CH çözümünün de Sitter modeli gibi davrandığı sonucuna sürüklemektedir. Davranış aynı olmakla birlikte aralarında şu iki önemli fark bulunmaktadır.

1. de Sitter evreni boş ($W= 0$) ve Λ -lı ($W_\Lambda = 1$) dır.
2. Buna karşılık, CH evreni dolu ($W= 1$) fakat Λ -sız ($W_\Lambda = 0$) dır.

Bu iki özellikten, W_Λ nin bir pozitif kozmolojik sâbit rolünü oynadığı sonucu çıkmaktadır.

4.2.BIANCHI-TİP MODELLER İÇİN DİNAMİK SİSTEM

§ 3.2.4b sonundaki evrim ve bağ denklemleri, değişkenlerin ve türevlerinin boyut taşımaları ve ayrıca t nin değişim aralığının IR^3 nin tamamını kapsamaması nedeniyle bir DS oluşturmamaktadır.(3.127) deki Genelleştirilmiş Friedmann denklemi, değişkenleri boyutsuz kılmak üzere normlamak için alınması gereken egemen büyüklüğün ne olması gerektiğini söylemektedir. Buna göre, $L^3 > 0$ için ve ${}^3R < 0$ için (ki, IX- tipi hariç tüm Bianchi modellerinde ${}^3R \neq 0$ dir) egemen büyüklük H^2 dir. O halde, değişkenleri H nin uygun kuvvetlerine bölerek H -ya normlu boyutsuz değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir[31,32,33] .

Kaynak Değişkenleri :

$$\left\{ \frac{m}{3H^2}, \frac{p}{3H^2}, \frac{q_a}{H^2}, \frac{p_{ab}}{3H^2}, \frac{L}{3H^2}, \frac{E_{ab}}{3H^2}, \frac{H_{ab}}{3H^2} \right\} \otimes \{W, P, Q_a, P_{ab}, W_L, \hat{E}_{ab}, \hat{H}_{ab}\} \quad (4.73)$$

Komütasyon Fonksiyonları :

$$\left\{ \frac{s_{ab}}{H}, \frac{W_a}{H}, \frac{a_a}{H}, \frac{n_{ab}}{H} \right\} \otimes \{ \hat{a}_{ab}, R_a, A_a, N_{ab} \} \quad (4.74)$$

Eğrilik Değişkenleri :

$$\left\{ -\frac{{}^3R}{6H^2}, \frac{{}^3R_{ab}}{H^2} \right\} \otimes \{K, \hat{S}_{ab}\} \quad (4.75)$$

Skalerler :

$$\left\{ \frac{s^2}{3H^2}, \frac{p^2}{3H^2}, \frac{E^2}{3H^2}, \frac{H^2}{3H^2} \right\} \otimes \{ \hat{a}^2, P^2, \hat{E}^2, \hat{H}^2 \} \quad (4.76)$$

Son ifâdedeki $E^2, P^2, \hat{E}^2, \hat{H}^2$ skalerleri, bunlara karşılık düşen $\hat{a}_{ab}, P_{ab}, \hat{E}_{ab}$ ve \hat{H}_{ab} matrislerinden hareketle ortak bir ifâdeyle tanımlanabilir. Buna göre y_{ab} ile söz konusu matrislerin herhangi biri ve y^2 ile de bunlara karşılık düşen skalerler gösterilirse

$$y^2 = \frac{1}{6} y_{ab} y^{ab}$$

olur .

Yine (4.24) ile tanımlı τ logaritmik zaman kullanılarak sonuçta H-ya normlu değişkenler için bağıntılar aşağıdaki gibi olur.

$$H\dot{\phi} = -(1+q)H \quad (4.77)$$

$$A_a\dot{\phi} = qA_a - \hat{a}^g{}_a A_g + e_{abg} R^b A^g \quad (4.78)$$

$$N_{ab}\dot{\phi} = qN_{ab} + 2\hat{a}^g{}_{(a} N_{b)g} - 2e^{gl}{}_{(a} N_{b)g} R_l \quad (4.79)$$

$$\hat{a}^g{}_{ab}\dot{\phi} = (q-2)\hat{a}^g{}_{ab} - 2e^{gl}{}_{(a} \hat{a}^g{}_{b)g} R_l + P_{ab} - \hat{S}_{ab} \quad (4.80)$$

$$W\dot{\phi} = (-1+2q)W - 3P - \frac{1}{3}\hat{a}^a{}_b P^b{}_a + \frac{2}{3}A_a Q^a \quad (4.81)$$

$$Q\dot{\phi} = 2(q-1)Q^a - \hat{a}^a{}_b Q^b + 3A_a P^{ab} + e^{abg} R_b Q_g + e^{abg} N_{ab} P^d{}_g \quad (4.82)$$

$$W_L\dot{\phi} = 2(1+q)W_L \quad (4.83)$$

$$K\dot{\phi} = 2qK - 2E_{11}A_1^2 + \frac{1}{3}(3\hat{a}_{11}\hat{S}_{11} + 3\hat{a}_{22}\hat{S}_{22} + \hat{a}_{11}\hat{S}_{22} + \hat{a}_{22}\hat{S}_{11} + \hat{a}_{33}\hat{S}_{33}) \quad (4.84)$$

Bağ Denklemleri :

$$N^{ab} A_b = 0 \quad (4.85)$$

$$Q_a - 3\dot{a}_{ab} A^b + e_{abg} \dot{a}^b{}_l N^{gl} = 0 \quad (4.86)$$

$$q = 2\dot{a}^2 + \frac{1}{2}(W + 3P) - W_L \quad (4.87)$$

Tanım Bağlıları :

$$K = A_a A^a + \frac{1}{2}(2N^q{}_g N^g{}_q - N^g{}_g N^q{}_q) \quad (4.88)$$

$$\hat{S}_{ab} = -2e_{(a}{}^{gl} N_{b)g} A_l + 2N_{ag} N^g{}_b - N^g{}_g N_{ab} - \frac{1}{3}(N^q{}_g N^g{}_q - N^g{}_g N^q{}_q) d_{ab} \quad (4.89)$$

Serbest Alanlar :

$$\hat{E}_{ab} = -\dot{a}^s{}_a \dot{a}^s{}_b + 2\dot{a}^2 d_{ab} + \dot{a}^s{}_ab - \frac{1}{2} P_{ab} + \hat{S}_{ab} \quad (4.90)$$

$$\hat{H}_{ab} = -3N^l{}_{(a} \dot{a}^l{}_{b)} + N^l{}_g N^g{}_l d_{ab} + e_{(a}{}^{gl} \dot{a}^l{}_{b)g} A_l + \frac{1}{2} N^g{}_g \dot{a}^s{}_ab \quad (4.91)$$

Bu denklem sistemi, P basınç değişkeni için daha sonra yazacağımız bağıntıya değinmezsek, bir DS hâline gelmiştir. Ancak, bunu matematiksel olarak ele almak için matris ve vektörlerin bileşenleri cinsinden de yazmalıyız. Bu noktada şöyle bir kolaylık bulunmaktadır :

$s_{ab}, p_{ab}, {}^3S_{ab}, E_{ab}, H_{ab}$ ve dolayısıyla da $\dot{a}^s{}_ab, P_{ab}, \hat{S}_{ab}, \hat{E}_{ab}, \hat{H}_{ab}$ matrisleri simetrik ve izsizdir. Dolayısıyla bağımsız bileşen sayıları 5 tir. Bunları aşağıdaki gibi parametrikleştirmek denklemlerde hem değişken sayısını indirgemekte hem de simetrik bir yazılım sağlamaktadır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
y_+ &= \frac{1}{2}(y_{22} + y_{33}) = -\frac{1}{2}y_{11} & y_{11} &= -2y_+ \\
y_- &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(y_{22} - y_{33}) & y_{22} &= y_+ + \sqrt{3}y_- \\
y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_{23} & y_{33} &= y_+ - \sqrt{3}y_- \\
y_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_{31} & y_{23} &= y_{32} = \sqrt{3}y_1 \\
y_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}y_{12} & y_{31} &= y_{13} = \sqrt{3}y_2 \\
& & y_{12} &= y_{21} = \sqrt{3}y_3
\end{aligned} \tag{4.92}$$

biçiminde parametrikleştirilmiş büyüklükler tanımlanırsa denklemler şu biçimleri alırlar:

Evrim Denklemleri :

$$H\dot{\phi} = -(1+q)H \tag{4.93}$$

$$A_1\dot{\phi} = (q + 2\dot{a}_+)A_1 \tag{4.94a}$$

$$A_2\dot{\phi} = 0 = (-\sqrt{3}\dot{a}_3 + R_3)A_1 \tag{4.94b}$$

$$A_3\dot{\phi} = 0 = (-\sqrt{3}\dot{a}_2 - R_2)A_1 \tag{4.94c}$$

$$N_1\dot{\phi} = (q - 4\dot{a}_+)N_1 \tag{4.95a}$$

$$N_2\dot{\phi} = (q + 2\dot{a}_+ + 2\sqrt{3}\dot{a}_-)N_2 \tag{4.95b}$$

$$N_3\dot{\phi} = (q + 2\dot{a}_+ - 2\sqrt{3}\dot{a}_-)N_3 \tag{4.95c}$$

$$\dot{a}_+\dot{\phi} = (q - 2)\dot{a}_+ + \sqrt{3}\dot{a}_3R_3 - \sqrt{3}\dot{a}_2R_2 + P_+ - \hat{S}_+ \tag{4.96a}$$

$$\dot{a}_-\dot{\phi} = (q - 2)\dot{a}_- + \dot{a}_2R_3 + \dot{a}_2R_2 - 2\dot{a}_1R_1 + P_- - \hat{S}_- \tag{4.96b}$$

$$\dot{a}_1\dot{\phi} = (q - 2)\dot{a}_1 + \dot{a}_2R_3 - \dot{a}_3R_2 + 2\dot{a}_-R_1 + P_1 - \hat{S}_1 \tag{4.96c}$$

$$\dot{a}_2\dot{\phi} = (q - 2)\dot{a}_2 - \dot{a}_1R_3 + \dot{a}_3R_1 + \sqrt{3}\dot{a}_+R_2 - \dot{a}_-R_2 + P_2 \tag{4.96d}$$

$$\dot{a}_3\dot{\phi} = (q - 2)\dot{a}_3 - \dot{a}_1R_2 - \dot{a}_2R_1 - \sqrt{3}\dot{a}_+R_3 - \dot{a}_-R_3 + P_3 \tag{4.96e}$$

$$W\dot{\phi} = (-1 + 2q)W - 3P - \frac{1}{3}\dot{a}_{ab}P^{ab} + \frac{2}{3}A_1Q^1 \tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}
Q_1\dot{\phi} &= 2(q - 1)Q_1 + 2\dot{a}_+Q_1 - \sqrt{3}\dot{a}_3Q_2 - \sqrt{3}\dot{a}_2Q_3 - 6A_1P_+ \\
&\quad + R_2Q_3 - R_3Q_2 + \sqrt{3}(N_2 - N_3)P_1
\end{aligned} \tag{4.98a}$$

$$\begin{aligned}
Q_2\dot{\phi} &= 2(q - 1)Q_2 - \dot{a}_+Q_2 - \sqrt{3}\dot{a}_-Q_2 - \sqrt{3}\dot{a}_3Q_1 - \sqrt{3}\dot{a}_1Q_3 \\
&\quad + 3\sqrt{3}A_1P_3 - R_1Q_3 + R_3Q_1 + \sqrt{3}(N_3 - N_1)P_2
\end{aligned} \tag{4.99b}$$

$$Q_3 = 2(q-1)Q_3 - \hat{a}_+ Q_3 + \sqrt{3} \hat{a}_- Q_3 - \sqrt{3} \hat{a}_1 Q_2 - \sqrt{3} \hat{a}_2 Q_1 + 3\sqrt{3} A_1 P_2 + R_1 Q_2 - R_2 Q_1 + \sqrt{3}(N_1 - N_2) P_3 \quad (4.99c)$$

$$W_L = 2(1+q)W_L \quad (4.100)$$

$$K = 2qK + 4E_+ A_1^2 + 2(\hat{a}_+ \hat{S}_+ + \hat{a}_- \hat{S}_-) \quad (4.101)$$

Bağ Denklemleri :

$$N_1 A_1 = 0 \quad (4.102)$$

$$Q_1 = \sqrt{3}[-2\sqrt{3} \hat{a}_+ A_1 - \hat{a}_1 (N_3 - N_2)] \quad (4.103a)$$

$$Q_2 = \sqrt{3}[3\hat{a}_3 A_1 - \hat{a}_2 (N_1 - N_3)] \quad (4.103b)$$

$$Q_3 = \sqrt{3}[3\hat{a}_2 A_1 - \hat{a}_3 (N_2 - N_1)] \quad (4.103c)$$

$$q = 2\hat{a}_-^2 + \frac{1}{2}(W + 3P) - W_L \quad (4.104)$$

$$K = -\hat{a}_-^2 + 1 - W - W_L \quad (4.105)$$

Tanım Bağlıları :

$$K = A_1^2 + \frac{1}{12}[2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) - (N_1 + N_2 + N_3)^2] \quad (4.106)$$

$$\hat{S}_+ = \frac{1}{6}[N_1(-2N_1 + N_2 + N_3) + (N_2 - N_3)^2] \quad (4.107a)$$

$$\hat{S}_- = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(N_1 - N_2 - N_3) - (N_3 - N_2)] \quad (4.107b)$$

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_2 - N_3)A_1 \quad (4.107c)$$

$$\hat{a}_-^2 = E_+^2 + E_-^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 \quad (4.108)$$

Bu denklemler Tablo 3.2 deki Bianchi-tip modellerine özelleştirilip, §4.1.2 de değindiğimiz gibi pek çok türlü biçimde Dinamik Sistem oluşturabilir. Bu konuda daha fazla bilgi için [31-37] numaralı kaynaklara bakılabilir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Dinamik Sistemler Teorisi'nin henüz yeteri kadar gelişmemiş olduğunu söylemiştik. Düzlemsel faz uzayı için ($n = 2$) dinamik sistem analizi çok iyi bilinmesine karşılık, $n > 3$ boyutlu faz uzayları söz konusu olduğunda, faz portresi gösterimi olanaksız olduğundan analiz güçleşmektedir. Bu durumlarda denge noktalarını bulup kararlılıklarını saptamak dışında yapılacak bir iş yoktur. Dolayısıyla, yüksek boyutlu faz uzayından bilgi çıkartılması sınırlı kalmaktadır. Bu, çalışmamızda kozmik akışkanı neden tek bileşenli ve dik aldığımızı açıklamaktadır.

Akışkan için daha gerçekçi bir model akışkanın radyasyon, toz gibi pek çok bileşene sahip olmasıdır. Meselâ, Chaplygin gazına ek olarak evrenin bir toz ya da radyasyon ile dolu olduğunu varsayarak evrimini incelemek ilginç olabilirdi. Bu taktirde evrenin hangi evrelerinde hangi akışkanın egemen olacağını söyleyebilecek olanağa sahip olabilirdik. Ancak böyle bir modelin, faz uzayının boyutunu arttırıp görüntülenmesini olanaksız kılacağı da aşikârdır. Bununla birlikte, Literatürde böyle yüksek boyutlu faz uzayları hâlinde Dinamik Sistem Analizi yapılmamış değildir. Ancak bu iş, bir hayli karmaşık olduğundan, bunu ilerideki çalışmalarımıza bırakmayı tercih ettik. Gene ele almadığımız konulardan biri de, evrenin kapalı olması hâlinde (RW modelleri için $k=+1$ durumu ve Bianchi-tip modeller içinde Bianchi-tip IX modeli) kinematik ve dinamik değişkenlerin H-ya değil de D parametresine normlanması meselesidir. Bu, Literatürde, analizin karmaşıklığı nedeniyle çok az ele alınmış bir konudur. Bunu da, Chaplygin gazı kapsamında, ilerideki çalışmalarımızın bir uğraşısı olarak planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

1. ELLIS, G.F.R. and MACCALLUM, M.A.H., 1969, A class of homogeneous cosmological models, *Commun. Math. Phys.* 12, 108-141.
2. ELLIS, G.F.R., 1971, Relativistic cosmology. *In General Relativity and Cosmology*, Proceedings of XLVII Enrico Fermi Summer School, ed. R. K. Sachs. Academic Press.
3. ELLIS, G.F.R., 1973, Relativistic cosmology. *In Cargèse Lectures in Physics*, Volume 6, ed. E. Schatzmann. Gordon and Breach.
4. COLLINS, C.B., 1971, More Qualitative Cosmology, *Commun. Math. Phys.* 23, 137-156.
5. WAINWRIGHT, J. and ELLIS, G. F. R., 1997, *Dynamical systems in cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge.
6. ALEXANDER KAMENSHCHIK, UGO MOSCHELLA. and VINCENT PASQUIER., 2001, An Alternative to Quintessence, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/0103004>
7. BENTO, M.C, BERTOLAMI, O. and SEN, M. C., 2002, Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy-Matter Unification, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/0202064>
8. BENTO, M. C, BERTOLAMI, O. and SEN, M. C.,2003, Generalized Chaplygin Gas Model: Dark Energy-Dark Matter Unification and CMBR Constraints, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/030586>
9. GORILI,V, KAMENSHCHIK, A, MOSCHELLA, U. and PASQUIR.V, 2004, The Chaplygin Gas as a Model for Dark Energy, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/0403062>
10. YUNGUI GONG., 2004, Observational Constraints on Generalized Chaplygin Gas Model, <http://xxx.lanl.gov/astro-ph/0411253>
11. MAK, M. K. and HARKO,T., 2005, Chaplygin Gas Dominated Anisotropic Brane World Cosmological Model, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/0505034>
12. RIESS, A.G, et. al.,1998, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Supernova Search Team Collaboration, *Astrophys. J.* 116, 1009-1038, [astro-ph/9805201](http://xxx.lanl.gov/astro-ph/9805201)
13. PERLMUTTER, S, et. al., 1999, Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, Supernova Cosmology Project Collaboration, *Astrophys. J.* 517, 565-586, [astro-ph/9812133](http://xxx.lanl.gov/astro-ph/9812133)

14. ANDRONOV, A. G., 1966, Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems, *Translated in English by Israel Program for Scientific Translation Ltd.*, (1973), John Wiley & Sons, LTD., CHICHESTER.
15. HIRSCH, M.W. and SMALE, S., 1974, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press.
16. PERKO, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlang.
17. LAWRENCE, P., 2000, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed., Springer-Verlang, New York.
18. WIGGINS, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlang, New York.
19. ARROWSMITH, D.K, PLACE, C. M., (1990) : *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
20. TAVAKOL, R., 1997, Introduction to dynamical systems. *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, pp.37.
21. COPELAND, E.J., SAMI, M. and TSUJIKAWA, S. 2006, Dynamics of dark energy, <http://xxx.lanl.gov/hep-th/0603057Vv2>
22. COLEY, A. A., 2003, *Dynamical Systems and Cosmology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
23. GÜDEKLİ, E., 2004, *Bianchi tip Çözümlerde Ufuk-Eşyönlüleşme Meseleleri*, Doktora Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
24. ELLIS, G.F.R., 1967, Dynamics of pressure-free mater in general relativity, *J. Math. Phys.***8**, 1171-94.
25. MACCALLUM, M., 1973, Cosmological models from a geometric point of view. *In Cargèse Lectures in Physics*, Volume 6, ed. E. Schatzman. Gordon & Breach.
26. MACCALLUM, M., 1971, A Class of Homogeneous Cosmological Models III : Asymptotic Behavior, *Commun. Math. Phys.* ,**20**, 57-84.
27. ELLIS, G. F. R, SIKLOS, S. T. C. and WAINWRIGHT, J., 1997, Geometry of Cosmological Models, *Dynamical Systems in Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, 37.
28. COLLİNS, C.B. and HAWKİNG, S. W., 1973, Why is the Universe İsotropic?, *Astrophys. J.* **180**,317-34.

29. BIANCHI, L., 1897, Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, *Soc. Ital. Mem. di Mat.* **11**, 267-???
30. TAUB, A. H., 1951, Empty space-times admitting a three-parameter group of motions, *Ann. Math.* **53**, 472-490.
31. WAINWRIGHT, J. and HSU, L., 1989, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies : Orthogonal models of class A, *Class. Quantum. Grav.* **6**, 1409-1431.
32. HEWITT, C. G. and WAINWRIGHT, J., 1993, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies : orthogonal models of class B, *Class. Quantum Grav.* **10**, 99-124.
33. HEWITT, C. G. and WAINWRIGHT, J., 1992, Dynamical systems approach to tilted Bianchi Cosmologies : Irrotational models of type V, *Phys. Rev. D.* **46**, 4242-52.
34. GOLIATH, M. and ELLIS, G.F.R., 1999, Homogeneous cosmologies with a cosmological constant, *Phys. Rev. D.* **60**, 023502-10.
35. HEWITT C.G. and WAINWRIGHT, J., 1990, Orthogonally Transitive G_2 Cosmologies, *Class. Quantum Grav.* **7**, 2295-2316.
36. COLEY, A. and WAINWRIGHT, J., 1992, Qualitative Analysis of Two-fluid Bianchi Cosmologies, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992) , 651-665.
37. WAINWRIGHT, J. and LIM, W. C., 2004, Cosmological Models from a Dynamical Systems Perspective, <http://xxx.lanl.gov/gr-gc/0409082>

ÖZGEÇMİŞ

1974 yılında İstanbul'da doğdum. Orta Öğrenimimi İstanbul'da tamamladıktan sonra 1991'de girmiş olduğum Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde Hazırlık, 1 ve 2. sınıfları okudum ve yatay geçişle gelmiş olduğum İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü'nden 1999 yılında mezun oldum. İngilizce ve Almanca bilmekteyim.