



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE KONTROL TEORİSİ
UYGULAMALARI**

**Mak.Yük.Müh. Murad KUCUR
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı
Makina Mühendisliği Programı**

**Danışman
Prof.Dr. Nurkan YAĞIZ**

Şubat, 2007

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE KONTROL TEORİSİ
UYGULAMALARI**

Mak.Yük.Müh. Murad KUCUR
Makina Mühendisliği Anabilim Dalı
Makina Mühendisliği Programı

Danışman
Prof.Dr. Nurkan YAĞIZ

Şubat, 2007

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında her türlü desteği veren danışmanım Prof.Dr. Nurkan YAĞIZ ve çok değerli hocam Doç.Dr.Erol UZAL'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışmam boyunca manevi yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma ve her zaman bana destek olan aileme teşekkürü borç bilirim.

Şubat, 2007

Murad KUCUR

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ	1-2
2. GENEL KISIMLAR	3
2.1. AKIŞIN KARARLILIĞINA GENEL BAKIŞ.....	3-5
2.2. KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ.....	5-7
3. MALZEME VE YÖNTEM	8
3.1. AKIŞIN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ.....	8-11
3.2. KARARLILIĞI İNCELENEN AKIŞLAR.....	11
3.2.1. Paralel Plakalar Arası Akış.....	11-18
3.2.2. Kare Kesitli Oyuk İçerisindeki Akış.....	18-26
3.3. PARALEL PLAKA POISEUILLE AKIŞININ KONTROLÜ.....	26-31
3.4. KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞIN KONTROLÜ.....	31-35
4. BULGULAR	36
4.1. PARALEL PLAKALAR ARASI AKIŞ İÇİN SONUÇLAR.....	36-39
4.2. KONTROL UYGULANMIŞ PARALEL PLAKALAR ARASI AKIŞ İÇİN SONUÇLAR.....	40-43
4.3. KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ İÇİN SONUÇLAR.....	43-45

4.4. KONTROL UYGULANMIŞ KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ İÇİN SONUÇLAR.....	45-51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	52-53
KAYNAKLAR	54-58
EKLER	59-62
ÖZGEÇMİŞ	63

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	: Paralel plakalar arası akış.....	11
Şekil 3.2	: Paralel plakalar arası akış tipleri.....	12
Şekil 3.3	: Kararlılık sınırı	14
Şekil 3.4	: Kare kesitli oyuk içerisindeki akış.....	19
Şekil 3.5	: Kare kesitli oyuk için ağ yapısı	21
Şekil 3.6	: Paralel plakalar arası akış.....	26
Şekil 3.7	: Paralel plakalar arası akış tipleri.....	34
Şekil 4.1	: $Re_{kr}=5772,22$ için α ile c_i değişimi.. ..	37
Şekil 4.2	: Kararsız durum $Re=6800$ için α ile c_i değişimi	37
Şekil 4.3	: $Re=6800$ ve $\alpha>13,9$ için c_i değişimi	38
Şekil 4.4	: $Re=6800$ ve $\alpha>8$ için c_i değişimi	39
Şekil 4.5	: Kararlılık Sınırı	39
Şekil 4.6	: $K=0,1$ ve $Re=37900$ için α ile c_i değişimi	40
Şekil 4.7	: $K=0,5$ ve $Re=9850$ için α ile c_i değişimi	41
Şekil 4.8	: $K=1$ ve $Re=8098$ için α ile c_i değişimi.....	41
Şekil 4.9	: $K=0,01$ ve $Re=2000$ için α ile c_i değişimi	42
Şekil 4.10	: Kontrol katsayısı (K) ile Kritik Reynolds sayısının (Re_{kr}) değişimi	42
Şekil 4.11	: $Re=100$ ve $Re=400$ için akım çizgileri	43
Şekil 4.12	: $Re=850$ ve $Re=1000$ için akım çizgileri	44
Şekil 4.13	: $Re=100$ ve $Re=400$ için girdaplılık konturları	44
Şekil 4.14	: $Re=850$ ve $Re=1000$ için girdaplılık konturları	45
Şekil 4.15	: Genlik (A) ile Re_{kr} 'nin değişimi.....	45
Şekil 4.16	: Açısal frekans (q) ile A_{kr} 'nin değişimi	46
Şekil 4.17	: Açısal frekans (q) ile Re_{kr} 'nin değişimi.....	47
Şekil 4.18	: $q=0,001$ ve $q=0,01$ için akım çizgileri	47
Şekil 4.19	: $q=0,1$ ve $q=1$ için akım çizgileri	48
Şekil 4.20	: $q=1,5$ için akım çizgileri.....	48
Şekil 4.21	: $Re=850$ için özdeğerler, $\beta_i<0$	49
Şekil 4.22	: $Re=3750$ için özdeğerler, $\beta_i<0$	49
Şekil 4.23	: Kontrolcüsüz ve kontrolcülü durumda $Re=850$ için özdeğerler.....	50
Şekil 4.24	: Kontrolcüsüz durumda $Re=850$ ve kontrolcülü durumda $Re=3750$ için özdeğerler	50
Şekil 4.25	: Kontrolcüsüz ve kontrolcülü durumda $Re=3750$ için özdeğerler.....	51
Şekil 4.26	: Kontrolcüsüz ve kontrolcülü durumda $Re=5000$ için özdeğerler.....	51

SEMBOL LİSTESİ *

A	: genlik
c	: dalga hızı
h	: plakalar arası uzaklık
K	: kontrol sabiti
L	: uzunluk
p	: basınç
P	: temel akış basınç bileşeni
q	: açısal frekans
Re	: Reynolds sayısı
Re_{kr}	: kritik Reynolds sayısı
x, y, z	: kartezyen sistemde uzay koordinatları
u, v, w	: kartezyen koordinatlarda hız bileşenleri
\mathbf{V}	: hız vektörü
U, V	: kartezyen koordinatlarda temel akış hız bileşenleri
u', v', w'	: kartezyen koordinatlarda bozuntu hız bileşenleri
t	: zaman
$T_n(y)$: n. dereceden Chebyshev polinomu
$U_n(y)$: n. dereceden ikinci tür Chebyshev polinomu
V_∞	: karakteristik hız
α	: dalga sayısı
β_i	: kuvvetlendirme faktörü
β_r	: frekans
δ	: karakteristik uzunluk
ε	: bozuntu parametresi
ζ	: girdaplılık vektörü
ζ	: girdaplılık vektör elemanı
ν	: viskozite
ρ	: yoğunluk
φ	: dalgalanma genlik fonksiyonu
ψ	: akım fonksiyonu

* Koyu ve düz sembol vektör veya matris,
Normal italik sembol ise bir değişken ifade etmektedir.

ÖZET

AKIŞKANLAR MEKANİĞİNDE KONTROL TEORİSİ UYGULAMALARI

Bu çalışmada akışkanlar mekaniğinin önemli konularından akış alanı kontrolü ve lineer kararlılık teorisi incelenmiştir. Akış alanı kontrol edilerek laminer rejimden türbülanslı rejime geçişin geciktirilmesi, kritik Reynolds sayısının ileri atılması amaçlanmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde konunun genel nitelikleri anlatılmış, ikinci bölümde ise akışkan kontrolü ile ilgili literatürde yapılmış deneysel ve teorik çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde lineer kararlılık teorisi anlatılmış, iki model problem üzerinde kontrol teorisi uygulanmıştır. İlk olarak paralel plakalar arası akış için kararlılık analizi yapılmış; problem Chebyshev serisi yöntemi kullanılarak çözülmüş, kritik Reynolds sayısı bulunmuştur. Daha sonra bu kritik değerin ileri atılması için geri beslemeli kontrol yöntemi (aktif) uygulanmıştır. Burada kontrol yöntemi, üst plakada ölçülen kayma gerilmesine bağlı olarak alt plakaya küçük bir harmonik hareket verilmesidir. Bu problem analitik olarak çözülmüştür. Çalışmada incelenen ikinci model problem olan üst plakası çekilen kare kesitli oyuk içerisindeki akış problemi sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Probleme lineer kararlılık teorisi uygulanarak kritik Reynolds sayısı elde edilmiştir. Elde edilen çözümler ve kritik Reynolds sayısı literatür ile karşılaştırılmıştır. Burada alt plaka titreştirilerek, açık çevrim kontrol yöntemi (pasif) uygulanmış, kritik Reynolds sayısı yükseltmek istenmiştir.

Çalışmanın bulgular kısmında lineer kararlılık analizi yapılan iki model problem için elde edilen sonuçlar grafiklerle verilmiştir. Öncelikle problemlerin kontrol uygulanmamış durumları, yani akış alanları ve lineer kararlılık analizleri incelenmiştir. Daha sonra geliştirilen kontrol yöntemleri problemlere uygulanarak elde edilen sonuçlar her iki durum için ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Son kısımda ise uygulanan kontrol yöntemlerinin başarısı değerlendirilmiş, farklı akış alanları için benzer kontrol yöntemlerinin uygulanabilirliği ile ilgili değerlendirme yapılmış ve gelecekte yapılması planlanan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

SUMMARY

APPLICATIONS OF CONTROL THEORY IN FLUID MECHANICS

In this thesis, linear stability analysis and flow field control, important subjects in fluid mechanics, are investigated. The aim is to delay the transition from laminar to turbulent regime by increasing the critical Reynolds number.

In the first chapter, the general setting of the problem is described, and in the second, some theoretical and experimental studies about flow control published in the literature are summarized. In the third chapter, the linear stability theory is briefly summarized and control theory is applied to two model problems. The first problem is between parallel plates flow: stability analysis is made by applying the Chebyshev series method and the critical Reynolds number was found. Following this, feedback (active) control is applied to increase the critical Reynolds number. Here, the control method consists of slightly moving the bottom plate in proportion to the shear stress value measured at the top plate. This problem was solved analytically. The driven square-section cavity, the second model problem investigated in the thesis, was solved using the finite difference method. The critical Reynolds number was found by applying the linear stability analysis. The obtained solutions and the critical Reynolds number were compared with published studies. Here, the critical Reynolds number was increased by applying vibrations to the bottom plate; thus the method is open loop (passive) control.

In the next chapter, graphical results were presented for both problems for which linear stability analysis was made. First, the uncontrolled problems, i.e., flow fields and linear stability analysis were dealt with. Later, results obtained by applying the proposed control methods to both problems were given in some detail.

In the last chapter, the success of the proposed control methods and the applicability of these methods to different flow fields were discussed, and some thoughts on planned future work were presented.

1. GİRİŞ

Akış alanını kontrol ederek istenilen doğrultuda değişikliğe uğratmak pratikte önemlidir. Dolayısıyla akış kontrolü, duvarlarla sınırlandırılmış veya serbest kayan akış alanları için pasif, aktif cihazlar kullanılarak veya bir takım fiziksel müdahaleler yaparak akışın kararlılığının değişimine veya akışın yapısına etki edilmesidir. Burada amaç akış rejiminin laminer halden türbülanslı hale geçişini geciktirmek, türbülansı önlemek, ayrışmayı önlemek, sürtünme kuvvetini azaltmak, kaldırma kuvvetini arttırmak, karıştırma olayını büyütmek olabilir. Ancak bazen bu durumların tam tersi de istenebilir. Bu tezde kritik Reynolds sayısının yükseltilmesi, yani türbülansa geçişin geciktirilmesi üzerinde durulacaktır.

Akışın laminer halden türbülanslı hale geçiş olayının fiziksel anlamının bilinmesi, geçiş noktasının önceden belirlenmesi ve geçişin kontrol edilebilmesi birçok mühendislik uygulamalarında önemlidir. Özellikle, kanat profillerinin tasarımında, yanma odalarında, otomobillerin aerodinamik tasarımlarında ve denizaltılarda doğal laminer akışın kontrolü önemlidir. Uçak kanadı üzerindeki türbülansdan dolayı ortaya çıkan viskoz sürüklemenin azaltılması, kanat yüzeyinin geniş bölümü üzerindeki laminar akışın sürdürülebilmesi ancak kanat profilinin optimizasyonu veya uçağın kanadına yerleştirilen küçük hareket sağlayıcılarla (actuator-eyleyici) aktif laminer kontrol yapılarak olabilmektedir. Bu sayede artırılan aerodinamik performans uçakların yakıt tüketiminin azaltılmasında da büyük fayda sağlamaktadır. Denizaltılarda ise türbülanslı akıştan kaynaklanan gürültünün azaltılması denizaltıların tasarımında önemli bir faktör olarak karşımıza çıkmaktadır. Yanma odalarındaki türbülans ise, hava ile yakıtın çok daha iyi karışmasını ve bunun sonucunda da yanmanın iyi olmasını sağlamaktadır. Geçmiş yirmi yıl boyunca bazı Kuzey Amerika ve Avrupa ülkelerinde Laminer Akış Kontrolü konusunda rüzgar tünellerinde ve değişik koşullar altında uçuş deneyleri yapılmış, pek çok başarılı ve dikkate değer sonuçlar elde edilmiştir ve halen de bu konuda çalışmalar devam etmektedir.

Akışkan kontrolü için analitik yaklaşım kompleks akış durumlarında mümkün olmamakla beraber, maliyeti yüksek olmayan bilgisayarlarla ve sayısal yöntemler kullanılarak modellenenabilirler. Genellikle akışkanın kontrolü akış alanı içerisine üfleme yada emme yapılarak, sınırlar titreştirilerek veya akışkan ısıtılıp akışkanın fiziksel özelliği değiştirilerek sağlanmaya çalışılmaktadır. Akışkan kontrolünde kritik parametre Reynolds sayısıdır ve Reynolds sayısının değişimi akış alanını da değiştirmektedir. Dolayısıyla Reynolds sayısı kontrol yöntemleri kullanılarak ileriye atılmaya çalışılıp, laminar rejimden türbülanslı rejime geçiş geciktirilir.

Tezde teorik, deneysel ve bilgisayar destekli çözümlerden elde edilen sonuçların ayrıntılı ve anlaşılabilir karşılaştırılmasının yapılacağı, yeni sayısal yöntemlerin test edilebileceği model problemler olan, birçok araştırmacının geçmişten beri üzerinde çalıştığı ve teknolojik önemliliğe sahip paralel plakalar arası akış ve oyuk içerisinde akış problemleri üzerinde çalışılmış ve bu problemlerdeki geçiş olayı kontrol edilmek istenmiştir. Çalışmada kritik Reynolds sayısının ileri atılması yani geçişin geciktirilmesi üzerinde durulmuştur. Her iki problemde kontrol uygulanmamış hal için kritik Reynolds değerleri sayısal yöntemler kullanılarak hesaplanmıştır. Kontrol uygulanan durumda ise paralel plakalar arası akış için analitik çözüm yapılmış, oyuk içerisindeki akış için ise sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Uygulanan kontrol yöntemleri ise geri beslemeli kontrol (aktif kontrol) ve açık çevrim kontroldür (pasif kontrol). Paralel plakalar arası akış probleminde alt plakanın, üst plakada ölçülen yüzey sürtünmesine orantılı olarak uygulanan harmonik bozuntu ile kontrolü yapılmıştır. Buradaki orantısal sabit, kritik Reynolds sayısının yönetilmesinde kullanılan kontrol parametresidir. Üst plakası çekilen kare kesitli oyuk içerisindeki akış probleminde ise alt plaka titreştirilerek yapılan kontrol incelenmiş, kritik Reynolds sayısı alt plakanın çeşitli frekans ve genlik değerleri için hesaplanmıştır. Böylece çalışmada iki temel akış problemi için kararlılık analizi yapılmıştır. Üçüncü bölümde uygulanan kontrol yöntemleri ve çözümler özgündür. Dördüncü bölümde sayısal yöntemlerle elde edilen sonuçlar grafiklerle açıklanmaya çalışılmış, beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır, gelecekte yapılabilecek çalışmalar için öneriler yapılmıştır. Tezde yapılmak istenen kritik Reynolds sayısının ileri atılarak akışın kontrol edilmesi amacına ulaşılmıştır. Uygulanan kontrol yöntemlerinin akışkanlar mekaniğinin başka problemlerinde de kullanılabilecek nitelikte olduğu görülmüştür.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. AKIŞIN KARARLILIĞINA GENEL BAKIŞ

Hidrodinamik kararlılık akışkanlar mekaniğinin başlıca konularından biridir. Türbülansın başlangıcı, akışın laminar durumdan türbülanslı duruma geçişi akışkanlar mekaniğinde temel bir önem taşır. İlk olarak türbülansın oluşumu düz boru ve kanal içerisindeki akış tipleri olan Hagen-Poiseuille ve plaka Poiseuille akışlarının incelenmiştir. Bu iki tip problem basit geometrilerinden dolayı değişik analitik ve sayısal yöntemlerle hesaplanabilmiştir. Akışkan kontrolü ilk kez Prandtl (1904) ile başlamıştır. Çalışmasında sınır tabaka teorisini, ayrışma olayının fiziğini, kontrol edilmiş sınır tabaka ilgili çeşitli deneyleri açıklamıştır. Bu, akış alanının bilimsel yöntemlerle kontrol edilmesinin başlangıcıdır [1]. İlk defa kararlılık konusunda 19. yüzyılda Helmholtz, Kelvin, Rayleigh ve Reynolds çalışmışlar ve kararlılık problemini formüle etmişlerdir. Rayleigh 1880 yılında viskoz olmayan akışlar için kararlılık analizini yapmıştır [2]. Rayleigh çok küçük bozuntularla düz ve paralel kanal içerisindeki viskoz olmayan akışın kararlılık karakteri üzerinde çalışmış ancak geçiş olayını deneysel olarak açıklayamamıştır. Rayleigh' e göre viskoz olmayan akışın lineer kararsızlık hali için gerekli durum, laminar akış halinin kanalın girişinde bir büküm noktasına sahip olmasıdır. Bu şart aynı şekilde Poiseuille akışına uygulanmış ve her Reynolds sayısı için kararlılık gözlemlenmiştir. Bunun sonucu olarak viskozitenin lineer kararsızlığın sebebi olduğunu göstermiştir. Reynolds 1883 yılında boru içerisindeki akışın kararlılığı konusuyla ilgilenmiş ve deneysel çalışmalar yapmıştır [3]. Çalışmasında boru içerisindeki laminar akışa renkli boya enjekte ederek bozuntuları gözlemlemiştir. Çalışmalarının sonucunda laminar akışın boyutsuz bir sayıya bağlı olarak bu sayının değeri kritik değere ulaştığında bozulduğunu ilk defa ortaya atmıştır. Bu sayı ondan sonra Reynolds sayısı olarak ve sözkonusu geçişin meydana geldiği kritik değer ise Kritik Reynolds sayısı olarak adlandırılmıştır (Re_{kr}). Reynolds, Hagen-Poiseuille akışı için bu kritik değer 6400 civarında olduğunu tahmin etmiştir [3,4].

Lineer kararlılık analizi ile ilgili teorik çalışmalar yirminci yüzyılın ilk yarısında Orr 1907 [5], Sommerfeld 1908 [6], Tollmien 1929 [7] ve Schlichting 1932 [8] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar Liepmann 1943 [9], Schubauer ve Skramstad'ın 1947 yılında [10] yaptıkları deneysel çalışmalar ile desteklenmiştir.

Viskoz akışların kararlılığının anlaşılması konusunda Orr 1907 ve Sommerfeld 1908 yıllarında ilk çalışmalarda bulunmuşlar, ve kendi adlarını taşıyan ve kararlılık analizinde temel olan denklemi türetmişlerdir. Orr-Sommerfeld denklemi, plaka Poiseuille akımının lineer yaklaşımında, sonsuz küçük bozuntular ile kararlılığın araştırılmasından ortaya çıkmıştır. Sonradan viskoz akışın kararlılığı konusunda yapılan birçok çalışmalar buna dayanmıştır. Plaka Poiseuille akımı küçük Reynolds sayıları için kararlıdır, fakat Heisenberg 1924 yılında ilk olarak büyük Reynolds sayıları için bu tip akımın kararsız olduğunu göstermiştir [11]. Heisenberg kararlılığın nötral eğrisinde dört nokta için bulgusal metod yaklaşımıyla Orr-Sommerfeld denklemini çözmüştür. Ancak Heisenberg hiçbir zaman kararsızlığın başlangıç noktası olan kritik değere ulaşamamıştır. İlk olarak Orr-Sommerfeld denklemini sayısal olarak Thomas 1953 yılında çözmüştür. Thomas, sonlu farklar yaklaşımını kullanmış ve kararsızlık için $Re_{kr}=5780$ değerini bulmuştur [12]. Lin 1944 [13] ve Shen 1954 [14] yıllarında yaptıkları hesaplamalarında Orr-Sommerfeld denklemini çözerek en küçük kritik Reynolds sayısını 5300 olarak elde etmişlerdir. Sonradan bu denklem üzerinde diğer araştırmacılar tarafından da çalışmalar yapılmış, Lin 1955 [15], Orszag 1971 [16], Drazin ve Reid 1982 [17] ve Maslowe'un 1985'de [18] yaptıkları çalışmaları sonrasında iyice anlaşılmıştır ki lineer teoremin kritik Reynolds sayısı $Re_{kr}=5772,22$ dir. Bu sonuç Orszag 1971 yılında Chebyshev yöntemi kullanarak yaptığı çalışma ile doğru ve kesin olarak elde edilmiştir [16,19].

1940-1970 tarihleri arasında doğal laminer akış, laminer akış kontrolü ile ilgili çalışmalar yapılmış ve kayda değer ilerlemeler olmuştur. Lachmann 1961 ve Wells 1969'da yazdıkları kitaplarda bu konularla ilgili çalışmaları dile getirmişlerdir. 1971 yılından sonra teknolojik uygulamalara daha çok önem verilmeye başlanmıştır [1] .

Bu konu hakkında yapılan çalışmalarda değişik şekillerde geçiş olayı incelenmeye çalışılmıştır. Genellikle temel akışa bozuntu uygulanarak sistem lineerleştirilerek

bozuntunun zamanla hangi sınır şartlarında nasıl değiştiği incelenmiştir. Akışkan kontrolünde optimal kontrol teorisi, geri beslemeli kontrol (aktif), açık çevrim kontrol (pasif) yöntemleri kullanılmıştır [20,21]. Jameson 1989 [22] , Berggren 1995 [23], Joslin 1997 [24], Hgberg, Bewley ve Henningson 2002 [25] bu yöntemler üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

Kontrol yöntemlerinde, uçak gövdesi üzerindeki sürükleme kuvvetini azaltmak, uçak kanatları üzerine etki eden taşıma kuvvetinin arttırılması, itici güç verimliliğinin arttırılması, ısı ve kütle transferinin azaltılması yada arttırılması, yanma kararsızlıklarının kontrol edilmesi, aeroakustik basınç dalgalanmalarının kontrol edilmesi amaçlanmıştır. Son yıllarda bilgisayar kapasitelerinin artması, sensör teknolojisinin gelişimi, akışkan dinamiği için sistem kontrolindeki ilerlemeler akış alanlarının kontrol edilmesinde ve tasarımında yeni gelişmelere sebebiyet vermiştir. Bu yöndeki gelişmeleri ve alışmaları Gad-el-Hak 1996 [1], Lumley ve Blossey 1998 [26], Bewley 2001 [27] yıllarında yazdıkları makaleler ile özetlemişlerdir. Sınır tabakanın aktif kontrolü son zamanlarda gelişen bir yöntemdir. Burada geçişin Tollmien-Schlichting (TS) dalgalarının bastırılması ile geciktirilmesi amaçlanır. Bu çalışmalardan karasızlığın önemli derecede bastırıldığı ancak bozuntuların tamamen yok edilemediği sonucu elde edilmiştir. Thomas 1990 [28], Metcalfe 1994 [29] alışmaları bu yöndedir.

2.2. KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDE AKIş

Kare kesitli oyuk içerisindeki akış problemi ise bilgisayar destekli çalışan bilimsel grupların dikkatini çekmiş ve bu konuyla ilgili uzun yıllardan beri çalışmışlardır. Burggraf 1966 yılındaki makalesiyle bu çalışmalara nc olmuştur [30]. alışmasında ikinci dereceden sonlu farklar yaklaşımı kullanmıştır. Bu konu hakkında yapılan eski çalışmalardan biri de Tuann ve Olson'nun 1978 yılında kaleme aldığı makaledir [31]. Ancak bu yıllarda yapılan sayısal çözüm yöntemlerini sınırlandıran en büyük etken bilgisayarların gelişmemiş olmasıydı. Bu sebepten dolayı elde edilen sonuçlar sınırlı kalmıştır. Bundan sonra problemin çözümüyle ilgili çok büyük sayıda makale yayınlanmıştır. Bu çalışmalarda temel problem çözümünde kullanılan algoritmanın geliştirilmesi üzerinde durulmuştur. Kullanılan sayısal yöntemlerle elde edilen çözümlerin çok daha doğru ve kararlı olması amaçlanmıştır. Söz konusu çalışmalarda

geliştirilen yöntemler iki boyutlu kare kesitli ya da üç boyutlu kübik formdaki oyuk içerisindeki akım problemlerine uygulanmıştır. Bu problemle ilgili kullanılan en önemli ve benimsenmiş sayısal yöntem Sonlu Farklar yöntemidir. Gatski, hız-girdaplılık formülü kullanarak sonlu farklar yaklaşımı uygulamıştır [32], Ghia multigrid yaklaşımı ile sonlu farklar yöntemini birleştirmiştir, Gustafsen ve Halasi, Soh ve Goodrich de sonlu farklar yöntemini kullanmışlardır [33,34,35,36]. Daha sonraları iki boyutlu kare oyuk içerisindeki akımın çözümü sonlu elemanlar ve sonlu hacimler yöntemleri de kullanılarak da yapılmıştır. Ghia, Ghia ve Shin 1982 yılında kare kesitli oyuk içerisindeki akışın yüksek Reynolds sayıları için çözümünü yapmış ve yaptığı çalışmayla iki boyutlu çözüm algoritmaları için referans bir çalışma oluşturmuşlardır [37]. Bu araştırmacılar çalışmalarında 257×257 gibi çok noktalı bir ağ sisteminde, yüksek Reynolds sayıları için problemi çözmüşlerdir. Elde ettikleri verileri ve sağlanan girdapların formlarını ayrıntılı bir şekilde grafiklerle ve tablolarla vermişlerdir. Daha sonra Schreiber ve Keller, Richardson ekstrapolasyonu ile ikinci derece merkezi sonlu farklar açılımını kullanarak elde ettikleri çözümde dördüncü dereceden doğruluk sağlamışlardır [38]. Bruneau ve Jouron yüksek Reynolds sayılarında multigrid metodunu kullanarak düzenli ağ yapısı içinde bilgisayar zamanında hızlı yaklaşım elde etmişlerdir. Gupta dördüncü derece sonlu farklar tekniğini her yönde 41 adım olarak kullanmış ve referans niteliğinde sonuçlar elde etmiştir [39].

Birçok gerçek akış alanları keskin köşeler içermektedir ki bu noktalarda akış tekillik göstermektedir. Sıklıkla bu gibi akış alanlarının çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerde tekillik, yalnızca küçük bir bölge için etki ettiği düşünülerek ihmal edilir. Gupta, Manohar ve Noble de çalışmalarında yarı analitik teknik kullanarak küçük Reynolds sayıları için bu tip akış alanları içerisindeki köşelerde oluşan tekilliğin etkisini incelemişlerdir. Ancak geliştirdikleri metotla kayan duvar için iyi sonuçlar elde ederlerken, yan duvarlar için sağlıklı sonuçlar elde etmişlerdir. Dolayısıyla bahsedilen problemde en önemli nokta hareket eden duvar ile sabit olan duvarların kesişim çizgisi üzerinde oluşan tekil noktalar. Bu tekilliğin nedeni sınır şartlarındaki hız değerleri arasındaki atlamadır. Ancak geliştirilen çözüm metodları bu tekilliği göz ardı edecek şekildedir [40,41]. Kim ve Moin 1985 yılında yaptıkları çalışma ile üç boyutlu, zamana bağlı Navier-Stokes denklemlerini kapalı sayısal yöntem kullanarak çözmüşlerdir [42].

Gupta ve Kalita 2004 yılında yaptıkları çalışma ile Navier-Stokes denklemlerini akım fonksiyonu-hız formülasyonu temel alarak yeni bir sayısal yöntem yaklaşımı geliştirmişlerdir [43].

Aidun 1991'de oyuk içerisindeki akış ile endüstride (fotoğraf filmlerinin ve özel kağıtların üzerlerine film tabakasının çekilmesi) kaplama teknolojisi arasındaki direkt ilişkiyi göstermiştir. Mikrokrystal malzemelerinin üretilmesinde, polimerik kompozitlerin sentezinde oyuk içerisindeki akış modelini görmek mümkündür [44,45].

Oyuk içerisindeki akışın kararlılık analizini Aidun, Triantafillopoulos ve Benson 1990 yılında incelemişlerdir [44]. Yine 1993 yılında Ramanan ve Homsy lineer kararlılık ile ilgili makale yayınlamışlar ve kritik Reynolds sayısını 594 olarak bulmuşlardır [46]. Aidun ve Poliashenko kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal hesaplanmasını denge durumlarının kararlılığı ve çatallanması ile birlikte inceledikleri çalışmalarında değişik en/boy oranındaki kesitteki oyuk içerisindeki akış problemi için genel kararlılık analizi yapmışlar ve kritik Reynolds sayılarını elde etmişlerdir [47]. Ding ve Kawahara 1998 ve 1999 yıllarında yaptıkları çalışmalarda sonlu elemanlar metodu kullanarak sıkıştırılmaz, viskoz akışlar için üç boyutlu kararlılık analizi yapmışlar ve kritik Reynolds sayısını oyuk içi akış problemi için 920 olarak bulmuşlardır [48,49]. Üç boyutlu oyuk içi akış probleminin kararlılık analizini 2005 yılında Non, Pierre ve Gervais yaptıkları çalışma ile göstermişlerdir [50]. Yine oyuk içerisinde akış probleminin kararlılığı hakkında Albensoeder, Kuhlmann ve Rath 1999 yılında üç boyutlu merkezkaç akış kararsızlıklarıyla ilgili çalışmalarında bilgi vermiştir [51]. Sahin ve Owen 2003 yılında iki kısım halinde yayınladıkları çalışmalarında yüksek Reynolds sayılarında sonlu hacim yöntemi kullanarak Navier-Stokes denklemlerini çözmüşler ve lineer kararlılık analizi yapmışlardır [52,53].

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 AKIŞIN KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

Kararlılık analizi temel akışa eklenen iki boyutlu çok küçük bozuntular ile Navier-Stokes denklemlerinin lineerleştirilmesi suretiyle çözülerek, kararlılığı etkileyen parametrenin kritik değerinin bulunmasıdır.

Zamanla değişen, laminer, sıkıştırılmaz viskoz akış için süreklilik denklemi ve momentum denklemi,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (3.2)$$

İki boyutlu akış göz önüne alındığında, aşağıdaki ifadeler kullanılarak boyutsuzlaştırma yapıldığında,

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{V_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{V_\infty} \quad (3.3)$$

$$p^* = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

$$Re = \frac{V_\infty \delta}{\nu},$$

δ karakteristik uzunluk olmak üzere, (3.1) ve (3.2) denkleminde yerlerine koyulduğunda,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

elde edilir. Bundan sonra daima boyutsuz değişkenler kullanıldığından (3.4) denklemindeki (*) lar atılarak

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

yazılacaktır. Kararlılık analizi için yapılacak iki boyutlu temel akış hızları U , V ve basınç P ise bu ifadelere bozuntu eklendiğinde

$$u = U + u'$$

$$v = V + v' \quad (3.6)$$

$$p = P + p'$$

ifadeleri elde edilir, burada u' , v' , p' iki boyutlu bozuntulardır. Bozuntu hızları paralel plakalar için,

$$u' = u(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (3.7)$$

Oyuk için,

$$u' = u(x, y)e^{-i\beta t} \quad (3.8)$$

olarak alınır, v' , p' benzer şekilde ifade edilir. Burada β kompleks bir büyüklük olup

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \quad (3.9)$$

olarak ifade edilir; dalganın zamanla değişimini gösteren katsayıdır [54]. β_r , titreşimin dairesel frekansı, β_i kuvvetlendirme faktörü olup kuvvetlendirme veya sönümleme derecesini belirler. Ayrıca

$$c = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanırsa (3.7)'deki üstel ifadesinin üssü

$$\alpha x - \beta t = \alpha(x - ct) \quad (3.11)$$

olur. Burada α dalga sayısı, c kompleks özdeğer

$$c = c_r + ic_i \quad (3.12)$$

olup c_r dalganın x yönünde yayılma hızı (faz hızı), c_i işaretine bağlı olarak sönümleme veya kuvvetlendirme faktörünü göstermektedir. Dolayısıyla,

$$u' = u(x, y)e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.13)$$

$$u' = u(x, y)e^{i\alpha x} e^{-i\alpha c_r t} e^{\alpha c_i t}$$

olur. Bu durumda

$c_i < 0$ kararlı hal, bozuntu zamanla azalmaktadır,

$c_i > 0$ kararsız hal, bozuntu zamanla büyümektedir,

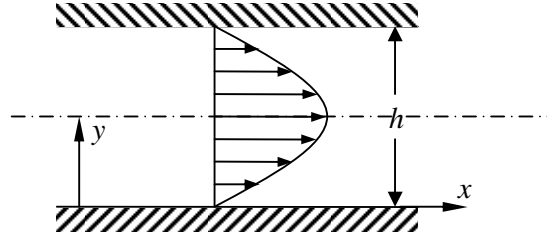
$c_i = 0$ nötral hal,

durumları sözkonusudur. Bozuntu eklenen problem en son olarak özdeğer problemi halini alır. Burada c özdeğerdir. Lineer kararlılık teorisine göre kritik Reynolds sayısı $c_i < 0$ için elde edilir.

3.2 KARARLILIĞI İNCELENEN AKIŞLAR

3.2.1 PARALEL PLAKALAR ARASI AKIŞ

Paralel plakalar arası akış, en basit viskoz akış alanı tipidir. z doğrultusunda çok büyük uzunlukta, y doğrultusunda birbirinden h kadar mesafede olan, x doğrultusunda yerleşmiş iki paralel yüzey arasında akış göz önüne alındığında (Şekil 3.1) y doğrultusunda bir akış bulunmamakta, basınç sadece x 'in bir fonksiyonu olmaktadır.



Şekil 3.1 Paralel plakalar arası akış

Yani,

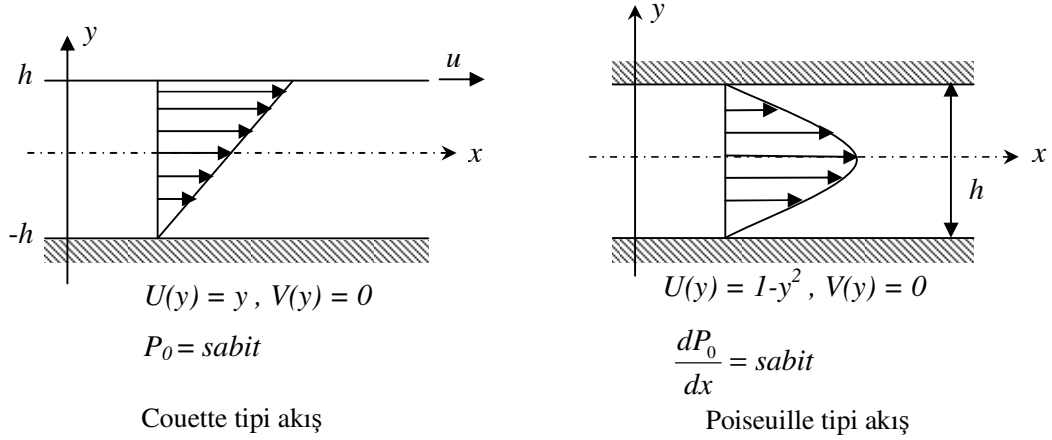
$$u = u(y)$$

$$v = w = 0 \tag{3.14}$$

$$p = p(x)$$

İki paralel yüzey arasındaki akış alanı, basınç gradyanının yanında, iki paralel yüzeyden birisini hareket ettirmek suretiyle oluşturulabilir. Bu tip akış plaka Couette akışı olarak adlandırılır (Şekil 3.2). $y = 0$ konumundaki plaka sabitken, $y = h$ kadar yukarıda paralel konumlandırılmış plaka x doğrultusunda sabit bir U hızı ile hareket ettirilmektedir. y doğrultusunda basınç gradyanı yoktur. x doğrultusunda dış basınç gradyanı yoktur [55,56].

Diğer paralel plakalar arası akış tipi olan Poiseuille akışı ise, viskoz akışkanın basınç gradyanı altında akışı olarak tanımlanır (Şekil 3.2).



Şekil 3.2 Paralel plakalar arası akış tipleri

(3.6) ifadeleri (3.5)'de yerine koyulduğunda üslü terimler cinsinden temel akış süreklilik ve momentum denklemleri

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} + \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 u' \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 v'$$

elde edilir. Hız ifadeleri akım fonksiyonu cinsinden,

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.17)$$

olarak yazılır. Akım fonksiyonu

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (3.18)$$

x yönünde c , hızı ile giden harmonik dalga olarak alındığında, α reel, c ise kompleks sayı olmak üzere, bozuntu hızları

$$\begin{aligned} u' &= \varphi'(y)e^{i\alpha(x-ct)} \\ v' &= -i\alpha\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir. Burada φ , dalgalanma genlik fonksiyonu olup y 'ye bağlıdır. Lineer sistemlerde belirli bir frekanstaki kararsızlık başka bir frekanstaki kararlılık durumunu etkilemez iken nonlinear sistemlerde lineer sistemlerin tersine sistemin belirli bir frekanstaki kararsızlığı diğer frekanstaki kararlılık durumunu etkiler bu yüzden nonlinear sistemlerde geniş frekans aralığında inceleme yapmak gerekir. Bu yüzden akım fonksiyonu (3.18)'deki gibi alınarak çeşitli α değerlerinde inceleme yapılır. Akış herhangi bir α için kararsız ise, bu dalga boyundaki bozuntular akışı kararsız hale getirir.

(3.19), (3.15)'de yerine koyulup, basınç elimine edilirse, dördüncü dereceden bir adi diferansiyel denklem elde edilir, bu denklem Orr-Sommerfeld Kararlılık Denklemi olarak adlandırılmaktadır [4].

$$(U - c)(\varphi'''' - \alpha^2 \varphi'') - U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi) \quad (3.20)$$

$U = U(y)$ (Paralel akış), α ve Re reel sayılar olup, α , dalga sayısını ifade etmektedir. c , kompleks özdeğerdir ve

$$c = c_r + ic_i \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Sınır şartları,

$$\begin{aligned} y = -1 \text{ de } \quad u' &= v' = 0 \\ \varphi &= 0 \\ \varphi' &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
y=1' \text{ de } \quad u' = v' = 0 \\
\varphi = 0 \\
\varphi' = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

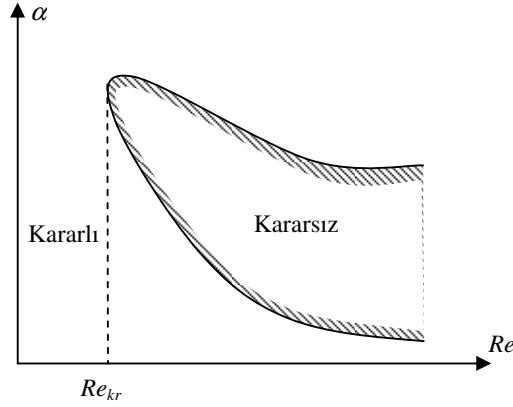
şeklindedir. Kararlılık analizi yapılırken verilen α değeri ve bilinen U , Re değerleri kullanılarak c , karakteristik değerler bulunur. c_i değeri için,

$c_i < 0$ kararlı hal, bozuntu zamanla azalmaktadır.

$c_i > 0$ kararsız hal, bozuntu zamanla büyümektedir.

$c_i = 0$ nötral hal,

durumlarından nötral haller hesaplanarak, kararlılık sınırı α ve Re 'nin fonksiyonu olarak bulunur (Şekil 3.3). Re_{kr} değeri nötral eğrinin α eksenine teğet olduğu noktadır. Bundan küçük Re değerlerinde kararsız hal ortaya çıkmaz [57,58,59,60].



Şekil 3.3 Kararlılık sınırı

Paralel plakalar arası akış için Reynolds sayısının ve bozuntu frekansı, α 'nın geniş aralıktaki değerleri için sayısal yöntemlerle çözüm yapılır. Sayısal yöntemler arasında sonlu farklar, spektral, Galerkin yöntemleri sayılabilir. Bu sayısal yöntemlerde çözümün doğruluğu yöntemin mertebesine bağlıdır. Ayrıca ortogonal polinom açılımlarını kullanmakta yeterli ortogonal polinom alınması durumunda çözümde kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca Chebyshev polinomları kullanılarak yüksek mertebeden çözüm yapılabilmektedir. Bu sayede daha kesin ve doğru çözüm elde edilmektedir. Hidrodinamik kararlılık problemlerinde genelde bu yöntem kullanılmıştır [16, 61].

Chebyshev polinomları [62,63],

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \quad , \quad y = \cos \theta \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (3.24)$$

ise

$$\varphi = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y) \quad (3.25)$$

alınarak Orr-Sommerfeld denklemi,

$$\varphi^{iv} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha \operatorname{Re}[(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] = 0 \quad (3.26)$$

Chebyshev polinomlarına açıldığında burada $T_n(y)$ 'lerin sağlandığı rekürans bağıntıları kullanılarak [62,63],

$$\varphi'' = \sum_{n=0}^N \frac{n a_n (n T_n(y) - y U_{n-1}(y))}{n^2 - 1} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{iv} = & \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{8ny^2(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{(y^2 - 1)^3} - \frac{2n(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{(y^2 - 1)^2} - \frac{1}{(y^2 - 1)^2} \right. \\ & \left. \left(4ny \left(-U_{n-1}(y) + n^2 U_{n-1}(y) - \frac{y(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{y^2 - 1} \right) \right) + \right. \\ & \frac{1}{(y^2 - 1)} \left(n \left(\frac{2y^2(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{(-1 + y^2)^2} - \frac{2(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{y^2 - 1} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{n^2(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{y^2 - 1} - \frac{1}{(y^2 - 1)} \left(n \left(-U_{n-1}(y) - y^2 U_{n-1}(y) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{n(nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{y^2 - 1} \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilir, burada $U_n(y)$ ikinci tür Chebyshev polinomudur [62,63],

$$U_n(y) = \sin(n+1)\theta / \sin \theta \quad , \quad y = \cos \theta \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (3.29)$$

türevler yerine koyulduğunda genel ifade,

$$\sum_{n=0}^N a_n \left(\alpha^4 T_n(y) - \frac{2n\alpha^2 (nT_n(y) - yU_{n-1}(y))}{y^2 - 1} + \frac{1}{(y^2 - 1)^3} (n(n(4 + 11y^2 + n^2(y^2 - 1))T_n(y) - 3y(3 + 2y^2 + 2n^2(y^2 - 1))U_{n-1}(y))) - i \operatorname{Re} \alpha (2T_n(y) + \frac{(y^2 - 1 + c)(- (n^2 - (y^2 - 1)\alpha^2)T_n(y) + nyU_{n-1}(y))}{y^2 - 1}) \right) = 0 \quad (3.30)$$

olarak elde edilir. Yani,

$$\sum_{n=0}^N a_n f_n(y) = 0 \quad (3.31)$$

yazılır. Ortogonalite özelliği kullanılarak [62,63],

$$a_n = \frac{2}{c_n \pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(y)}{\sqrt{1 - y^2}} T_n(y) dy \quad , \quad c_n = \begin{cases} 2 & , \quad n = 0 \\ 1 & , \quad n > 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

a_n katsayıları elde edilir. Sınır şartları Chebyshev polinomları cinsinden

$$y = -1 \text{ 'de} \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n T_n(y) &= 0 \\ \sum_{n=0}^N n a_n U_{n-1}(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$y = 1 \text{ 'de} \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n T_n(y) &= 0 \\ \sum_{n=0}^N n a_n U_{n-1}(y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilir. Ancak burada hem fonksiyonun kendisi hem de sınır koşulları

$$\varphi(y) = -\varphi(-y) \quad (3.35)$$

şartını sağlamaktadır. Problem tamamen simetriktir. Dolayısıyla problemdeki dört sınır şartından yalnızca iki tanesini almak problemin çözümüne yeterli olacaktır. Yani (3.33) sağlanınca (3.34) otomatikman sağlanır. Burada (3.33) sınır şartı kullanılmıştır.

Chebyshev polinomlarının

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad (3.36)$$

özelliğinden, sınır şartları,

$\varphi(1) = 0$ için,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = 0 \quad (3.37)$$

$\varphi(-1) = 0$ için,

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^N a_N = 0 \quad (3.38)$$

olarak yazılır, (3.37) ile (3.38) taraf tarafa toplandığında,

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots = 0 \quad (3.39)$$

olur. (3.37) ile (3.38) birbirinden çıkartıldığında,

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 0 \quad (3.40)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} T_n'(1) &= n^2 \\ T_n'(-1) &= (-1)^{n-1} n^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

özelliğinden yola çıkılarak türev sınır şartları için,

$\varphi'(1) = 0$ için,

$$a_1 + 2^2 a_2 + 3^2 a_3 + 4^2 a_4 + \dots + N^2 a_N = 0 \quad (3.42)$$

$\varphi'(-1) = 0$ için,

$$a_1 - 2^2 a_2 + 3^2 a_3 - 4^2 a_4 + \dots + (-1)^N N^2 a_N = 0 \quad (3.43)$$

yazılır, denklem (3.42) ve (3.43) taraf tarafa toplanır ve çıkartılırsa,

$$a_1 + 3^2 a_3 + \dots = 0 \quad (3.44)$$

$$2^2 a_2 + 4^2 a_4 + \dots = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.39), (3.40), (3.44), (3.45)'den görülmektedir ki a_{2k} , a_{2k+1} 'den bağımsızdır. Dolayısıyla buradan n 'nin çift değerleri için 50 nokta alınarak çözüm yapılmıştır. Bu işlem sınır şartlarından sadece (3.33)'ü kullanmayı gerektirir. Buradan elde edilen denklem sisteminin katsayılarının oluşturduğu matrisin özdeğerleri, karakterisitik değer c 'yi verecektir, yani,

$$c = f(\alpha, Re) = c_r + ic_i \quad (3.46)$$

Burada α ve Re değerleri değiştirilerek $c_i=0$ olan yerler aranmaktadır. Bu değerler bulunurken secant yöntemi kullanılmıştır [Ek-2]. Elde edilen değerlerle kararlılık sınırı çizilerek buradan Re_{kr} bulunur.

3.2.2 KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ

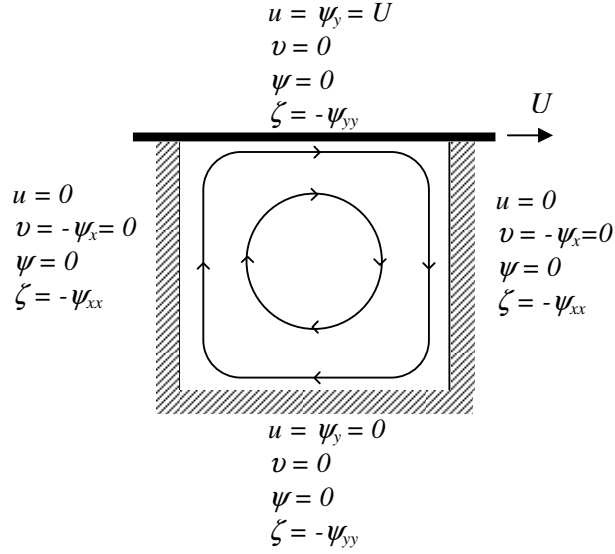
Çalışmanın bu kısmında üzerindeki plaka çekilen kare kesitli oyuk içerisindeki akış problemi incelenmiş, çeşitli Reynolds değerlerinde çözüm yapılmıştır. Sonraki bölümde probleme bir bozuntu eklenmiş ve sistemin kararlılığına bakılmış, kritik Reynolds sayısı, Re_{kr} bulunmuştur. Zaman bağılı, sıkıştırılmaz viskoz bir akış için süreklilik ve momentum denklemleri,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v$$

şeklindedir. Şekil 3.4’de akışkan duvarlarla sınırlanmış kare kesitli, sayfaya dik yönde sonsuz uzun oyuk içerisinde. Üst duvar sabit bir hız ile çekilerek akım oluşmaktadır [65].



Şekil 3.4 Kare kesitli oyuk içerisindeki akış

Burada Reynolds sayısı,

$$Re = \frac{U \cdot \ell}{\nu} \quad (3.48)$$

olup, ℓ , oyukun genişliğidir. Oyukun uzunluğunda genişliği kadardır. Oyuk kare kesittir.

Girdaplılık vektörü,

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (3.49)$$

olduğuna göre iki boyutlu akışlar için

$$\boldsymbol{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \zeta \mathbf{k} \quad (3.50)$$

şeklinde ifade edilir.

Akım fonksiyonu, ψ ise aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial y} &= u \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -v\end{aligned}\tag{3.51}$$

Sıkıştırılamaz, iki boyutlu Navier-Stokes denklemleri (3.47)'de basınç elimine edilip, bir araya getirilir, girdaplılık ve akım fonksiyonu cinsinden yazılırsa, daimi olmayan durum için girdaplılık taşınım denklemi,

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta\tag{3.52}$$

veya

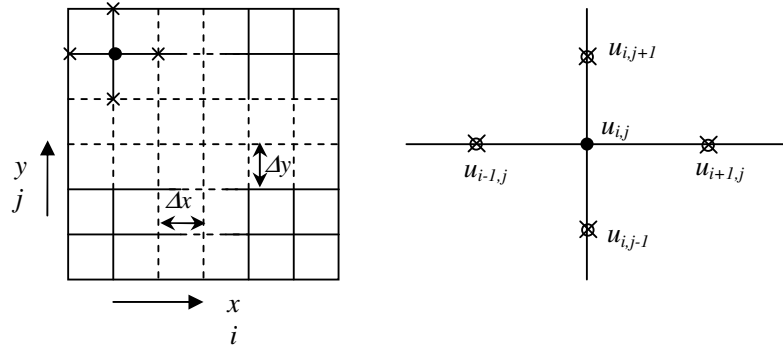
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)\tag{3.53}$$

şeklinde elde edilir. (3.50)'nin akım fonksiyonu, ψ , (3.51) cinsinden yazılması sonucu elde edilen Poisson denklemi eliptik bir denklem olup aşağıdaki gibidir,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta\tag{3.54}$$

Böylece problem (3.53) ve (3.54) ile ifade edilmiş olmaktadır. Oyuk içersindeki akım problemi sonlu farklar metodu ile girdaplılık ve akım fonksiyonu yaklaşımıyla çözülmüş, bunun yanında basınç-hız yaklaşımı da kullanılarak ikinci bir çözüm daha yapılmıştır. Daha sonra elde edilen değerler kullanılarak kararlılık analizi incelenmiştir.

Kare kesitli oyuk içersindeki akım probleminin çözümünde yaygın olarak kullanılan formülasyon girdaplılık ve akım fonksiyonu yaklaşımıdır.



Şekil 3.5 Kare kesitli oyuk için ağ yapısı

Girdaplılık denkleminde ikinci mertebe bir yöntem olan merkezi farklar kullanılırsa (Şekil 3.5),

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.55)$$

$$\zeta_{i,j} = -\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta y} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.56)$$

elde edilir. Bu ifade çözüm ağı içerisindeki noktalarda girdaplılık değeri olarak alınır. Sınırlarda girdaplılık değerleri uygun ikinci mertebe yaklaşımlar kullanılarak,

üst duvar için,

$$\zeta_{i,ny+1} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,ny+1} = -\frac{3u_{i,ny+1} - 4u_{i,ny} + u_{i,ny-1}}{2\Delta y} \quad (3.57)$$

alt duvar için,

$$\zeta_{i,1} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,1} = -\frac{-3u_{i,1} + 4u_{i,2} - u_{i,3}}{2\Delta y} \quad (3.58)$$

yan duvarlar için,

$$\zeta_{1,j} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{1,j} = \frac{-3v_{1,j} + 4v_{2,j} - v_{3,j}}{2\Delta x} \quad (3.59)$$

$$\zeta_{nx+1,j} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{nx+1,j} = \frac{3v_{nx+1,j} - 4v_{nx,j} + v_{nx-1,j}}{2\Delta x} \quad (3.60)$$

şeklinde yazılır. Daimi olmayan iki boyutlu akış için girdaplılık taşınım denklemi,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (3.61)$$

olduğuna göre (3.61)'in sağ tarafındaki ifade $E_{i,j}(t)$ olarak gösterilir ise,

$$E_{i,j}(t) = -u_{i,j} \left(\frac{\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - v_{i,j} \left(\frac{\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \frac{1}{Re} \left(\left(\frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (3.62)$$

şeklinde yazılır. O zaman girdaplılık taşınım denklemi

$$\zeta_{i,j}(t + \Delta t) = \zeta_{i,j}(t) + E_{i,j}(t) \quad (3.63)$$

şekline dönüşür. Poisson denklemi (3.54) merkezi farklar ile ikinci mertebe sonlu fark yöntemi kullanılarak

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\zeta_{i,j} \quad (3.64)$$

$$\psi_{i+1,j} - 2(1 + \gamma)\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \gamma(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) = -\Delta x^2 \zeta_{i,j}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Gauss-Siedel Yenileme yöntemi kullanılarak çözülür.

$$\gamma = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \quad (3.65)$$

dır. Sınır şartları bütün duvarlarda $\psi = 0$ olmak koşuluyla çözüm yapılır. (3.63)'den ζ , (3.64)'den ψ değerleri bulunur.

Hız bileşenleri,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (3.66)$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.63)'den her zaman adımı için çözüm yapılır. Buradan bulunan hız, girdaplılık ve akım fonksiyonu değerleri kritik Reynolds sayısının bulunmasında ve akışın kontrolünde kullanılacaktır.

Aynı problem Basınç-Hız yaklaşımı kullanılarak çözülmek istendiğinde ise x ve y momentum denklemlerinden yola çıkılarak, basınç sınır şartları kullanılır ve öncelikle basınç değerleri, daha sonra hız bileşenleri ve buna bağlı olarak da akım fonksiyonu bulunur. Basınç sınır şartları,

alt duvar için,

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(u, v) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

olduğundan momentum denklemi sadeleşerek basınç sınır şartı,

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.68)$$

üst duvar için,

$$\begin{aligned} u &= 1, \quad v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(u, v) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

olduğundan momentum denklemi sadeleşerek basınç sınır şartı,

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.70)$$

yan duvarlar için,

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(u, v) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

olduğundan momentum denklemi sadeleşerek basınç sınır şartı,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.72)$$

elde edilir. Momentum denklemlerinin sırasıyla $\partial/\partial x$ ve $\partial/\partial y$ 'e göre türevleri alınıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\nabla^2 p = 2(u_x v_y - v_x u_y) \quad (3.73)$$

elde edilir ((3.68), (3.70), (3.72) basınç sınır şartlarından dolayı $\partial p/\partial n$ sınırlarda bilinmektedir). (3.73) sonlu farklar yöntemi kullanılarak merkezi farklarla açılarak basınç hız denklemi elde edilir.

$$\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} = RS \quad (3.74)$$

burada

$$RS = 2 \left(\frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})}{4\Delta x \Delta y} - \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(v_{i+1,j} - v_{i-1,j})}{4\Delta x \Delta y} \right) \quad (3.75)$$

dır. (3.74) denklemi

$$P_{i,j}^n = \frac{\Delta y^2 (P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n) + \Delta x^2 (P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n) - RS^n \Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (3.76)$$

halini alır. Momentum denklemleri ikinci derece merkezi farklar ile sonlu farklara açılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_i^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = -\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + Re^{-1} \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ + Re^{-1} \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} = -\frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + Re^{-1} \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ + Re^{-1} \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu problemde,

$$\Delta x = \Delta y = h \quad (3.78)$$

alınmıştır. Buradan hız bileşenleri elde edilir. Bu işlemler herbir zaman adımı için yapılır. Sonuçlar yakınsadığı zaman elde edilen hız bileşenleri kullanılarak akım fonksiyonu değerleri bulunur. Akım çizgileri hesaplanırken kullanılan sınır şartları,

üst duvar için,

$$\begin{aligned} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \end{aligned} \quad (3.79)$$

alt duvar için,

$$\begin{aligned} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

yan duvarlar için,

$$\begin{aligned} \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

şeklindedir. (3.79), (3.80) ve (3.81) sınır şartları kullanılarak (3.66) ile akım fonksiyonu değerleri bulunur. Girdaplılık için,

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.82)$$

ifadesi ikinci derece, merkezi farklar kullanılarak

$$\zeta_{i,j} = -\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2 \Delta y} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (3.83)$$

şeklinde yazılır. Buradan girdaplılık değerleri elde edilir. Bu yöntemde dikkat edilmesi gereken nokta basıncın bir noktadaki başlangıç değerinin bilinmesi gerektiğidir. Bu çalışmada başlangıç koşulu olarak basınç kurulan ağ yapısı içerisinde (2,2) noktasında $P_{2,2} = 1$ alınarak çözüm yapılmıştır.

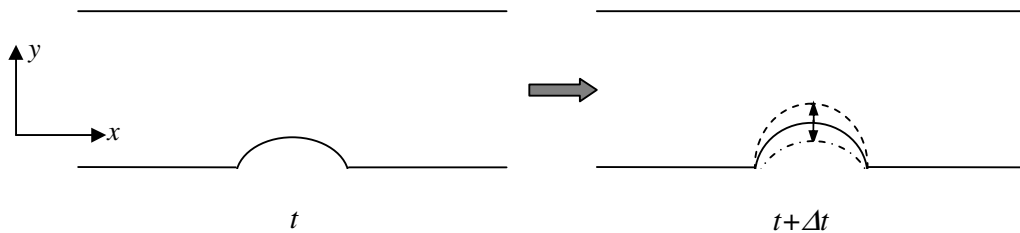
3.3 PARALEL PLAKA POISEUILLE AKIŞININ KONTROLÜ

Burada kontrol edilmek istenen paralel plakalar arası akış için Re_{kr} değerinin uygulanan kontrol yöntemi ile ileri atılarak akışın laminer rejimden türbülanslı rejime geçişinin geciktirilmesi amaçlanmaktadır. Poiseuille akışı için hız profili

$$U(y) = 1 - y^2 \quad -1 < y < 1 \quad (3.84)$$

$$V(y) = 0$$

şeklinde ve basınç gradyanı (dP/dx) sabittir. Bu temel akışa alt plakada küçük zamanla değişen lokal geometrik bozuntular uygulanır (Şekil 3.6).



Şekil 3.6 Alt plakada zamanla değişen iki boyutlu bozuntu

Bozuntunun formu aşağıdaki şekilde alınmıştır,

$$y = -1 + \varepsilon f(x, t) \quad (3.85)$$

ε , küçük bir parametre olup işlemleri kolaylaştırmak amacıyla kullanılmıştır. Bu bozuntu z doğrultusuna bağlı değildir, dolayısıyla problem iki boyutludur. İki boyutlu zamanla değişen süreklilik ve momentum denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Sınır şartları,

$$\begin{aligned} y = -1 + \varepsilon f(x, t) \text{ 'de} \quad & u = v = 0 \\ y = 1 \text{ 'de} \quad & u = 1, v = 0 \\ x \rightarrow \pm\infty \text{ için} \quad & u \rightarrow 1 - y^2, v \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

şeklinde. Özdeğer problemi çözüleceğinden başlangıç koşullarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Temel akış için $\varepsilon = 0$ olup, küçük ε için bilinmeyenler kuvvet serisine açıldığında,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 1 - y^2 + \varepsilon u_1(x, y, t) + \dots \\ v(x, y, t) &= \varepsilon v_1(x, y, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$p(x, y, t) = P(x) + \varepsilon p_1(x, y, t) + \dots$$

elde edilir. (3.86)'ya (3.88) açılımları koyup, ε 'a göre birinci mertebeden terimler alındığında,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + (1-y^2) \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2yv &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + (1-y^2) \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right)\end{aligned}\tag{3.89}$$

bulunur. (3.89), (3.86)'nın tersine lineerdir. Sınır şartları ise,

$$\begin{aligned}u_1(x, -1, t) &= -2f(x, t) \\ v_1(x, -1, t) &= 0 \\ u_1(x, 1, t) &= v_1(x, 1, t) = 0 \\ x \rightarrow \pm \infty \text{ için } u_1, v_1 &\rightarrow 0\end{aligned}\tag{3.90}$$

olarak yazılır. (3.89) ve sınır şartları (3.90) küçük sınır bozuntusundan oluşan lineerize edilmiş davranışları yönetirler. Bozuntu uygulanmış akış için akım çizgileri ve girdaplılık denklemleri,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\tag{3.91}$$

şeklindedir. (3.89)'de basınç ifadesi yok edilirse,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (1-y^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\zeta\end{aligned}\tag{3.92}$$

olur. Akım çizgileri için sınır şartları,

$$\begin{aligned}
y = -1 \text{ 'de} \quad \psi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2f(x,t) \\
y = 1 \text{ 'de} \quad \psi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\
x \rightarrow \pm \infty \text{ için} \quad \psi \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

olarak yazılır. (3.92) ve sınır şartları (3.93) temel problemi oluşturmaktadır. Bu denklem sistemi $f(x,t)$ şeklinde bir sınır girişi olduğunda akışın lineer cevabını yönetir. Eğer sınır girişi aşağıdaki gibi olursa,

$$f(x,t) = F(x)e^{-i\beta t} \tag{3.94}$$

sistemin bu girişe karşı verdiği tepkinin formu

$$\begin{aligned}
\psi(x, y, t) = \varphi(x, y)e^{-i\beta t} \\
\zeta(x, y, t) = \Omega(x, y)e^{-i\beta t}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

olur ve (3.92)

$$\begin{aligned}
-i\beta\Omega + (1-y^2)\frac{\partial\Omega}{\partial x} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}\right) \\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\Omega
\end{aligned} \tag{3.96}$$

haline gelir. Sınır şartları ise,

$$\begin{aligned}
y = -1 \text{ 'de} \quad \varphi = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2F(x) \\
y = 1 \text{ 'de} \quad \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\
x \rightarrow \pm \infty \text{ için} \quad \varphi \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{3.97}$$

şeklinde olur. (3.96) ve (3.97) kontrol problemini oluşturmaktadır. Sınır girişi $F(x)$ akışla ilişkilendirilmiş ölçülebilir nicelikte bir fonksiyondur. Burada yapılan eğer kayma

gerilmesi üst plakanın her noktasında ölçülmüş ve alttaki plakanın bütün olarak ölçülen bu kayma gerilmesine orantılı olarak hareket ettirildiği düşünülürse söz konusu fonksiyon,

$$f(x,t) = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x,1,t) \quad (3.98)$$

şeklinde tanımlanır. K orantı sabitidir. Böylece alt plaka için sınır şart,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,-1) = -2K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,1) \quad (3.99)$$

olarak yazılır. (3.96) denklemini (3.97)'deki $y = 1$ için sınır şartı (3.95) ile değiştirilmiş olarak çözüm yapılır. Burada Fourier transformasyonu kullanıldığında,

$$\hat{\varphi}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (3.100)$$

ters dönüşüm ise

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.101)$$

şeklindedir. Ω 'nun Fourier transformasyonu da benzer şekildedir, temel problem

$$-i\beta \hat{\Omega} - i\alpha(1-y^2)\hat{\Omega} - 2i\alpha\hat{\varphi} = \frac{1}{\text{Re}}(-\alpha^2 \hat{\Omega} + \hat{\Omega}''') \quad (3.102)$$

$$-\alpha^2 \hat{\varphi} + \hat{\varphi}' = -\hat{\Omega}$$

şeklini alır ve problemin sınır şartları,

$$\hat{\varphi}(\pm 1) = 0$$

$$\hat{\varphi}'(1) = 0 \quad (3.103)$$

$$\hat{\varphi}'(-1) = -2K \hat{\varphi}''(1)$$

olur. Problemin alt plaka için sınır şartı değişmiştir. Son sınır şartından dolayı simetriklik bozulmuştur. Bu yüzden de Chebyshev polinomları yöntemi ile çözüm yapılırken dört sınır şartını da kullanmak gerekmektedir. Burada türev sınır şartında $K=0$ olduğunda söz konusu problem klasik Orr-Sommerfeld problemi haline dönüşmektedir. Bu denklem sistemi özdeğer problemi şeklindedir ve özdeğer

$$\beta = \beta(\alpha, Re, K) = \beta_r + \beta_i \quad (3.104)$$

dır. Eğer β 'nin imajiner kısmı negatif ise ($Im(\beta) < 0$) akış kararlı, pozitif ise ($Im(\beta) > 0$) akış kararsızdır. Kontrol sabiti (K), öncelikle gözardı edilerek sadece bilinen dalga sayısı (α) için Reynolds değeri β 'nin imajiner kısmı sıfıra eşit olduğu durumda bulunur. Bu değer bilinen α için kritik Reynolds sayısıdır. Daha sonra K değiştirilerek daha yüksek Reynolds sayısında geçişi sağlayacak K 'nin aralığı hesaplanır.

3.4 KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞIN KONTROLÜ

İkinci olarak kontrol uygulanan akış tipi kare kesitli oyuk içerisindeki akımdır. Önceden sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılan çözüm sonucu söz konusu akış için $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $p_0(x, y)$, $\zeta_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ değerleri bulunmuştur. Bulunan bu değerlere bozuntu eklenerek kararlılık analizi yapılmış kritik Reynolds değeri hesaplanmıştır. İki boyutlu, zamanla değişen süreklilik ve momentum denklemleri,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Bozuntu eklenen hız ve basınç bileşenleri,

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + u_1 \\
v &= v_0 + v_1 \\
p &= p_0 + p_1
\end{aligned} \tag{3.106}$$

şeklindedir. Süreklilik ve momentum denklemlerinde (3.105)'de u , v ve p değerlerini yerine koyup lineerleştirirsek,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_1 \\
\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v_1
\end{aligned} \tag{3.107}$$

durumuna dönüşür. Zamanla değişen periyodik bozuntu aşağıdaki şekilde alınır,

$$\begin{aligned}
u_1 &= U_1(x, y)e^{-i\beta t} \\
v_1 &= V_1(x, y)e^{-i\beta t}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Burada $\beta = \beta(Re)$ dır.

$$\begin{aligned}
-i\beta U_1 + u_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial U_1}{\partial y} + V_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U_1 \\
-i\beta V_1 + u_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} + U_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial V_1}{\partial y} + V_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 V_1
\end{aligned} \tag{3.109}$$

elde edilir. x ve y momentum denklemlerinin sırasıyla $(\partial/\partial y)$ ve $(\partial/\partial x)$ türevleri alınıp birbirinden çıkartılırsa basınç elimine edilir, girdaplılık ve akım fonksiyonu cinsinden yazıldığında,

$$i\beta\zeta_1 - u_0 \frac{\partial\zeta_1}{\partial x} - v_0 \frac{\partial\zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \frac{\partial\zeta_0}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta_1 \quad (3.110)$$

bulunur. (3.110)'da u_0, v_0, ζ_0 değerleri klasik kare kesitli oyuk içerisindeki akış probleminin sayısal çözümünden elde edilen değerlerdir. Dolayısıyla bilinmeyenler ψ_1 ve ζ_1 dir.

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} = -\zeta_1 \quad (3.111)$$

(3.110) ve (3.111) kullanılarak sayısal çözüm yapılmıştır. Bütün sınırlarda,

$$U_1 = V_1 = \zeta_1 = 0 \quad (3.112)$$

şeklindeir. (3.110) ve (3.111) denklem takımı sonlu farklar ayrıklaştırması kullanılarak,

$$\begin{aligned} & i\beta\zeta_{1,j} - u_{0,j} \frac{\zeta_{1,i+1,j} - \zeta_{1,i-1,j}}{2\Delta x} - v_{0,i,j} \frac{\zeta_{1,i,j+1} - \zeta_{1,i,j-1}}{2\Delta y} - \\ & \frac{\psi_{1,i,j+1} - \psi_{1,i,j-1}}{2\Delta y} \frac{\zeta_{0,i+1,j} - \zeta_{0,i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{\psi_{1,i+1,j} - \psi_{1,i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\zeta_{0,i,j+1} - \zeta_{0,i,j-1}}{2\Delta x} = \\ & -\frac{1}{Re} \left(\frac{\zeta_{1,i+1,j} - 2\zeta_{1,i,j} + \zeta_{1,i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{1,i,j+1} - 2\zeta_{1,i,j} + \zeta_{1,i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.113)$$

ve

$$\frac{\psi_{1,i+1,j} - 2\psi_{1,i,j} + \psi_{1,i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{1,i,j+1} - 2\psi_{1,i,j} + \psi_{1,i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\zeta_{0,i,j} \quad (3.114)$$

yazılır. (3.113) denklemi ζ_1, ψ_1 ve (3.114) ψ_1 cinsinden düzenlenerek,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.115)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada $N \times N$ ağ yapısı içerisinde, düğüm noktalarındaki ζ_l ve ψ_l bilinmeyenlerinin oluşturduğu \mathbf{B}_{11} , \mathbf{B}_{12} , \mathbf{B}_{21} , \mathbf{B}_{22} matrisler $N^2 \times N^2$ boyutunda blok matrislerdir. Yapılan çözüm sonucu çıkan blok matris formları,

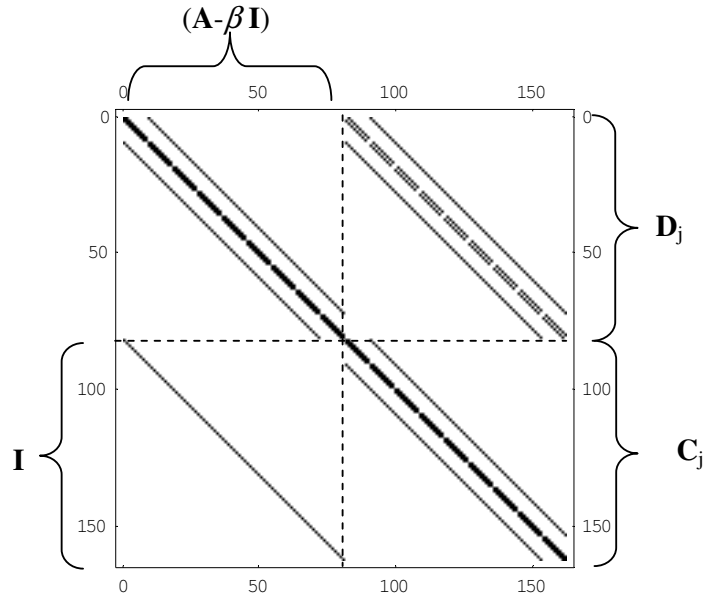
$\mathbf{B}_{11} = (\mathbf{A} - \beta \mathbf{I})$ matrisi

$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{D}$ köşegen matrisi

$\mathbf{B}_{21} = \mathbf{I}$ birim matris

$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{C}$ köşegen, simetrik matris

şeklindedir. En genel halde matris Şekil 3.7'deki gibidir.



Şekil 3.7 Çözüm Matrisinin Formu

Yani,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \beta \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.116)$$

şeklini alır. Çok noktalı ağ yapısı için çözüm yapıldığında matrisin boyutu ($2 \times$ düğüm noktası \times düğüm noktası) olmaktadır. Dolayısıyla çok fazla elemanlı matris oluşmaktadır. Bu durumda çözümü kolaylaştırmak için bu tip blok matrislerin aşağıdaki özelliği kullanılarak,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

ise

$$\det \mathbf{M} = \det(\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{21}) \quad (3.118)$$

şeklindedir.

Öyleyse (3.116) matrisinin özdeğerleri β lar bulunur. β kompleks sayıdır. $\beta_i = 0$ olduğu durum için elde edilen Re , kritik Reynolds sayısıdır.

Kontrol için alt duvara zamanla periyodik bir hareket verilmesi düşünülmüştür, yani

$$u(x,1,t) = A \sin qt \quad (3.119)$$

Burada q açısal frekans, A ise genliktir. Diğer üç sınır şartı değiştirilmemiştir. Bu kare oyuk içerisindeki akışın kritik Reynolds sayısının alt duvar titreştirilerek, geri besleme olmadan, kontrolü olarak düşünülebileceği gibi (açık çevrim kontrol), üst plaka çekilen, alt duvar titreşen kare oyuk probleminin kritik Reynolds sayısının bulunması olarak da düşünülebilir. Bu şekilde, daimi olmayan bir akışın kritik Reynolds sayısı hesaplanmaktadır. Kare kesitli oyuk içerisindeki daimi olmayan akış problemi sayısal olarak çözülmüş, u_0, v_0, ζ_0 değerleri hesaplanmış ve (3.113), (3.114) kullanılarak elde edilen (3.116) matrisinin özdeğerleri bulunmuştur. $\beta(q,A,Re)$ olmak üzere bu matrisin özdeğerleri, β 'ları vermektedir. β değerlerinin imajiner kısımlarına bakılarak kritik Reynolds sayısı (Re_{kr}) bulunur. Eğer,

$$\beta_i < 0 \text{ ise kararlı hal,}$$

$$\beta_i > 0 \text{ ise kararsız hal,}$$

$$\beta_i = 0 \text{ ise nötral hal}$$

söz konusudur. Böylece Re_{kr} , A ve q 'nun fonksiyonu olarak bulunmaktadır.

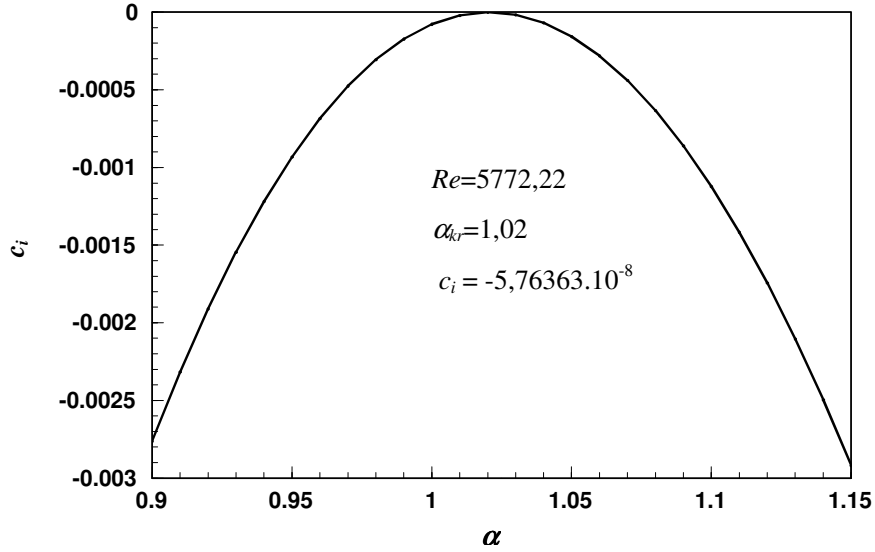
4. BULGULAR

Bu bölümde kontrol edilen iki tip akış alanı için kontrol uygulanmamış durum ve uygulanmış durum için elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Sonuçlar çeşitli Reynolds sayıları, açısal frekans, genlik ve kontrol katsayıları için değerlendirilmiştir. Kontrol katsayısı, genlik ve açısal frekansın kritik Reynolds sayısına etkisi araştırılmıştır. Paralel plakalar arası akış için uygulanan kapalı-çevrim kontrol yönteminde kontrol katsayısının Reynolds sayısına etkisine bakılırken, kare kesitli oyuk içi akışta ise alt duvarın titreştirilmesiyle genlik (A) ve açısal frekans (q)'nun değişik değerleri için Reynolds sayısının değerine bakılmıştır. Paralel plakalar arası akış probleminde plakalar arası uzaklık boyutsuz olarak $-1 < h < 1$ şeklinde, oyuk içi akış alanı ise kare kesitli, sayfaya dik yönde sonsuz olarak alınmıştır. Akış her iki problem için de sıkıştırılmazdır. Her iki problemde de kontrol uygulanmamış durumlar için sayısal çözümler yapılmış ve kritik Reynolds sayısı hesaplanmıştır. Kontrol uygulanmış durumda ise Orr-Sommerfeld problemi için analitik çözüm kullanılarak geri beslemeli kontrol yöntemi uygulanmış ve yüksek Reynolds sayıları için daha kararlı olduğu gözlemlenmiştir, kare kesitli oyuk içerisindeki akış probleminde de frekans yükseldikçe yine akışın daha kararlı olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

4.1 PARALEL PLAKALAR ARASI AKIŞ İÇİN SONUÇLAR

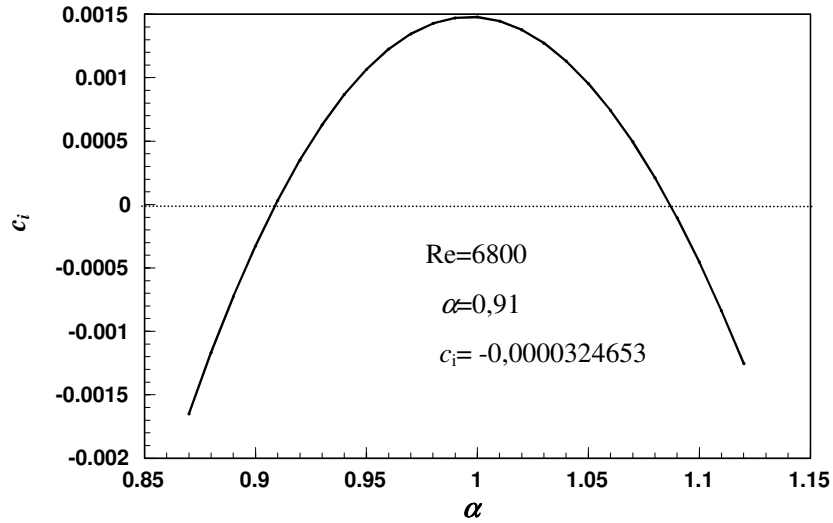
Orr-Sommerfeld denklemi Chebyshev polinomlarıyla çözülmüştür. Kararlılık sınırını çizmek için karakteristik değer c , bilinen U ve Re ile geniş aralıktaki α değerleri için elde edilir. Reynolds sayısı sabit kalarak, α değerine karşılık c_i değerleri bulunur. $c_i \leq 0$ olduğu sürece sistem kararlıdır. $c_i > 0$ olduğu durumda ise sistem kararsız duruma geçmiştir. Çizilen eğrinin α eksenine teğet olduğu nokta α 'nın kritik değerini vermektedir. Şekil 4.1'de gösterildiği üzere Re 'nin belirli değerinde ($Re=5772$), $\alpha=0,1$ 'den başlayarak 0,01 aralıklarla değiştirilmiş, $\alpha=1,02$ 'de c 'nin imajiner kısmı sifıra çok yaklaşmış (-10^{-8} mertebesinde) ancak pozitif değerlere çıkmamıştır, bu noktada çizilen grafik α eksenine teğettir. Bu da α 'nın kritik değerini vermektedir. α 'nın

bundan sonraki değerleri için aynı Reynolds sayısı için hep $c_i \leq 0$ dır. Dolayısıyla Poiseuille tipi akış için kritik Reynolds, $Re_{kr}=5772,22$ ve $\alpha_{kr}=1,02$ olarak bulunmuştur. Bu değer kararlılık sınırındır.



Şekil 4.1 $Re_{kr}=5772,22$ için α ile c_i arasındaki değişim

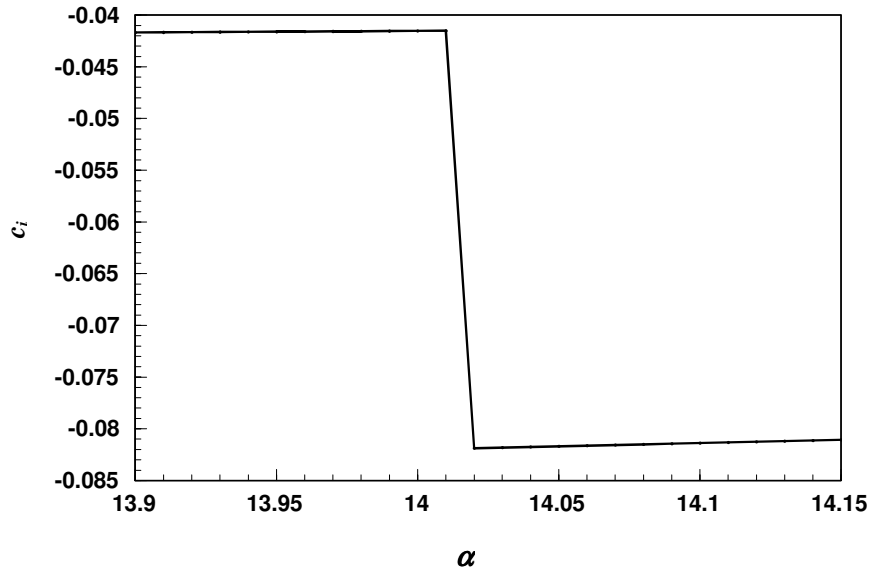
Kararsız durum için ise Şekil 4.2'de gösterildiği gibi α 'nın bazı değerleri için $c_i > 0$ olmuştur. Bu durum için inceleme yapılırken yine $\alpha=0,1$ 'den başlanılarak 0,01 aralıklarla artırılmış ve c_i değerleri bulunmuştur. $Re=6800$ için $\alpha=0,91$ 'de $c_i < 0$ iken $\alpha=0,92$ 'de $c_i > 0$ olmuştur. Dolayısıyla $Re=6800$ için $1,09 > \alpha > 0,91$ şeklindedir. Kararlılık sınırı çizilirken $Re=6800$ için $\alpha=0,91$ alınır.



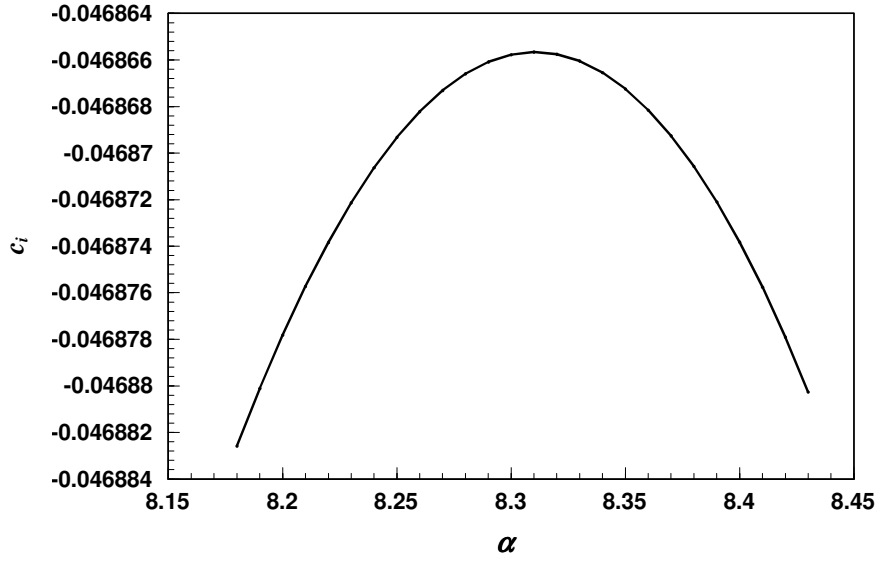
Şekil 4.2 Kararsız durum - $Re=6800$ için α ile c_i arasındaki değişim

Literatürde sisteme kontrol eklenmemiş durumda, $Re_{kr}=5772,22$ için $\alpha \gg 1,02$ değerlerinde c_i 'nin nasıl bir davranış gösterdiği konusunda bir bilgi olmadığı görülmüştür. Aynı şekilde literatürdeki bu çalışmalarda $Re_{kr}>5772,22$ için $\alpha=1,02$ ve etrafındaki noktalar da inceleme yapılmış ancak bunun dışındaki noktalar için c_i 'nin değişimi ile ilgili bir bilgi verilmemiştir. Hem kararlılık sınırında ($Re=Re_{kr}$), hem de $Re>Re_{kr}$ için, α ile c_i nin değişiminin büyük α değerlerinde ($1,02 < \alpha$) incelenmesi sisteme kontrolcü eklendiği haldeki durumu yorumlayabilmek için önemlidir.

$Re>5772,22$ için (örneğin; $Re=6800$) α ile c_i arasındaki grafikte yüksek α değerleri için kırılmalar meydana gelmiştir (Şekil 4.3). Yine aynı değerler için α ile c_i arasındaki grafikte birden fazla maksimum tepe noktaları oluşabildiği anlaşılmıştır. Şekil 4.4'de görüldüğü gibi $\alpha=8,3$ için c_i , $\alpha=1$ den farklı olarak başka bir maksimum değer almıştır.

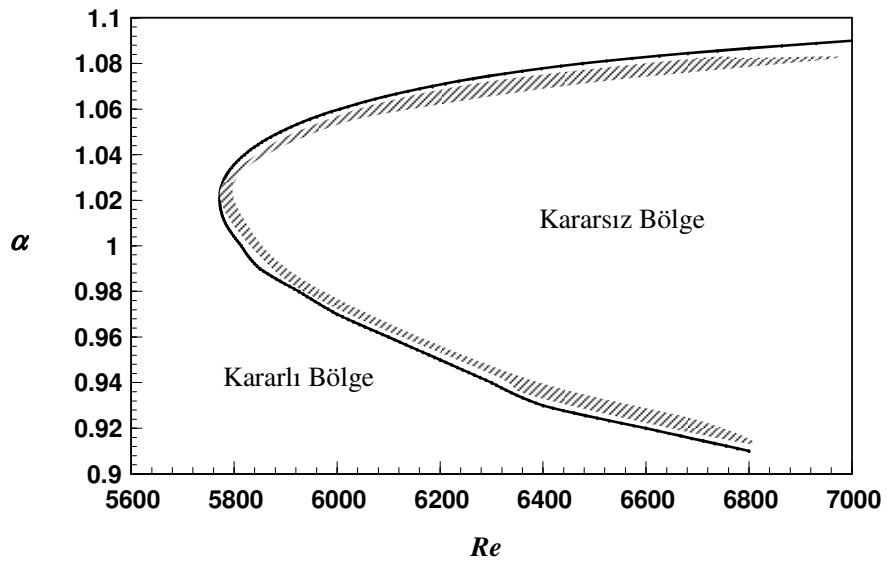


Şekil 4.3 $Re = 6800$ ve $\alpha > 13,9$ için c_i değişimi



Şekil 4.4 $Re=6800$ ve $\alpha>8$ için c_i değişimi

$Re \leq 5772,22$ değerler için de α ile c_i arasındaki grafiğe bakıldığında $\alpha > 1,02$ değerlerinde birçok noktada maksimum tepe noktaları oluştuğu görülmüştür. $Re=5772,22$ olduğu zaman, $\alpha=9,48$ 'de maksimum tepe noktası meydana gelmiştir. Bu maksimum noktalardan yalnızca $\alpha=1,02$ için olanı alınmıştır. Bunun sebebi c_i sıfıra en yakın olduğu durum, yani eksene teğet olduğu noktadır. Elde edilen bu değerler ile çizilen Kararlılık Sınırı Şekil 4.5'de gösterilmiştir.

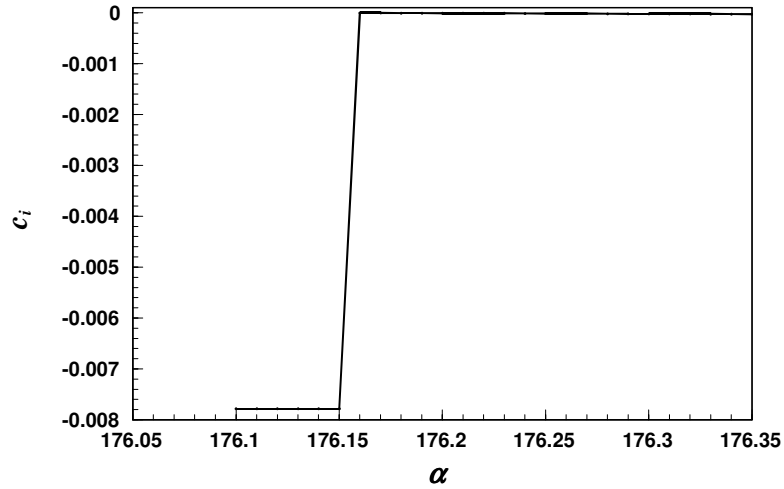


Şekil 4.5 Kararlılık Sınırı

4.2 KONTROL UYGULANMIŞ PARALEL PLAKALAR ARASI AKIŞ İÇİN SONUÇLAR

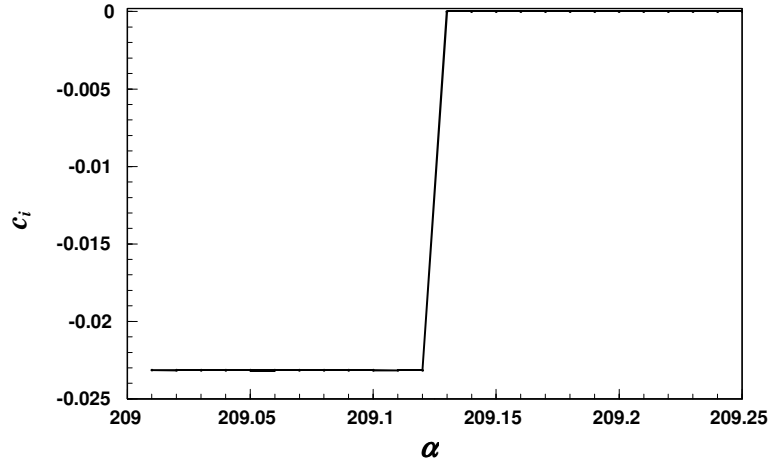
Tezin bu kısmında çözülen paralel plaklar arası akış problemine geri beslemeli kontrol uygulanarak kritik Reynolds sayısının yükseltilmesi amaçlanmıştır. Kontrol katsayısı K değiştirilerek, bilinen Re için $\alpha - c_i$ değişimine bakılarak Re_{kr} değeri elde edilmiştir.

Klasik Orr-Sommerfeld denkleminin Pouiseuille tipi akış için çözümünden elde edilen değerler ve grafikler bir önceki kısımda verilmişti. Kontrol uygulanmadığı durumda kritik Reynolds sayısı hesaplanırken $\alpha - Re$ arasında kararlılık sınır grafiği çizilip y eksenine paralel, eğriye teğet çizgi çizildiğinde elde edilen α ve Re değerleri kritik değerler olmaktadır. Ancak kontrol uygulandığı durumda bu kritik değerleri elde etmek zorlaşmaktadır. α 'nın değişimi ile c_i arasındaki grafiklere bakıldığında süreksiz bölgeler olduğu görülmüştür, bu süreksiz bölgeler kararlılık sınırının düzgün bir eğri şeklinde elde edilmesini engellemektedir. Dolayısıyla α 'nın çok geniş aralıktaki değerleri için çok küçük adımlarla c_i değeri incelenmiştir. Bu durumda öncelikle Reynolds sayısı sabit kalacak şekilde α değiştirilmiş c_i değerine bakılmış daha sonra Reynolds sayısı değiştirilerek yine α 'nın geniş aralıktaki değişimleri için c_i değerine bakılmıştır. Şekil 4.6'da $K=0,1$ için kritik Reynolds sayısını araştırırken $Re=37900$ değerinde $\alpha>176,15$ için karakteristik değer c_i 'nin sıfıra çok yaklaştığı gözlemlenmiştir. $Re>37900$ için $c_i>0$ olacağından $K=0,1$ için $Re_{kr}=37900$ olarak saptanmıştır.

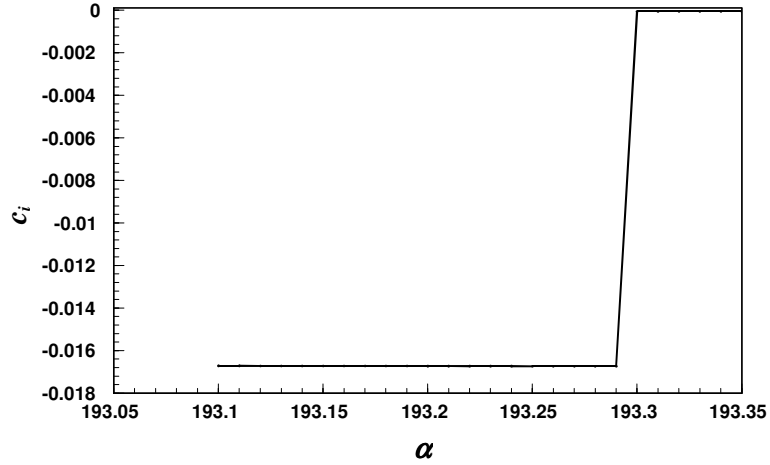


Şekil 4.6 $K=0,1$ ve $Re=37900$ için α ile c_i değişimi

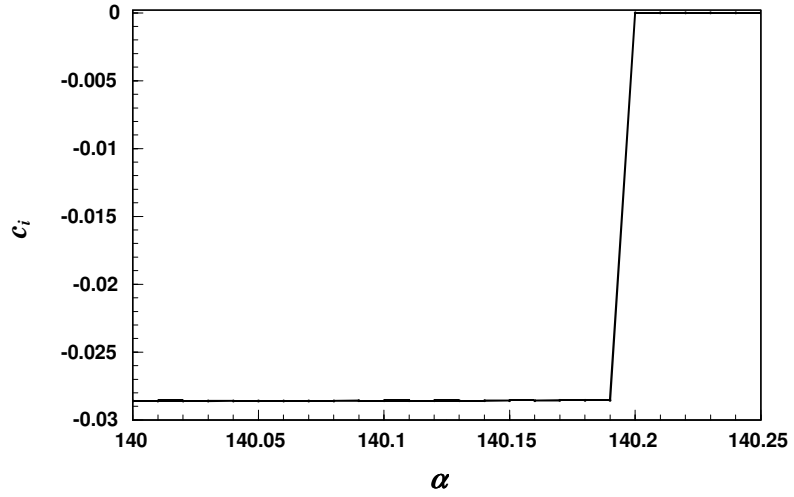
Yine Şekil 4.7’de $K=0,5$ için, Şekil 4.8’de $K=1$ için, Şekil 4.9’da $K=0,01$ için elde edilen grafikler gösterilmektedir. Bu grafiklerdende anlaşılacağı üzere K ’nın çeşitli değerlerinde Re ’nin belirli bir değerinde α ’nın yüksek değerleri için $c_i > 0$ olmaktadır. Klasik Orr-Sommerfeld probleminde α ’nın yüksek değerleri için bir inceleme yapmaya gerek yok iken kontrol uygulanmış problemde α ’yı çok geniş aralıkta incelemek gerekmektedir. Önceden de belirtildiği üzere α ’nın küçük değişimleri için c_i birden sıfırdan büyük değerlere çıktığından (Kırılma meydana gelmekte) α ’nın artımlarına dikkat etmek gerekmektedir.



Şekil 4.7 $K=0,5$ ve $Re=9850$ için α ile c_i değişimi

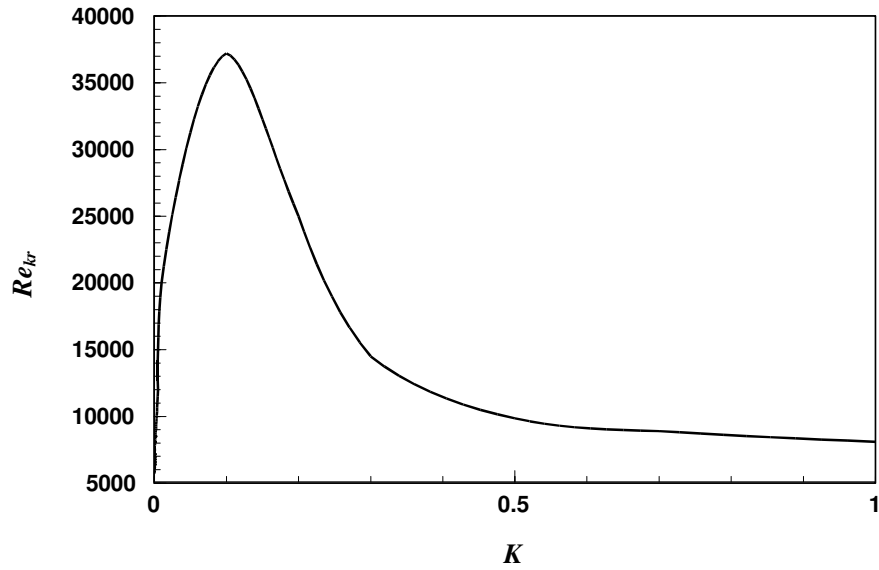


Şekil 4.8 $K=1$ ve $Re=8098$ için α ile c_i değişimi



Şekil 4.9 $K=0,01$ ve $Re=20000$ için α ile c_i değişimi

Geri beslemeli kontrol uygulanan paralel plakalar arası Poiseuille tipi akış için çeşitli kontrol katsayısı için kritik Reynolds değeri elde edilmiştir. Bazı K 'lar için Re_{kr} artarken bazı K değerlerinde ise Re_{kr} azalmıştır ve K 'nın belirli bir değerinden sonra artık Re_{kr} değeri değişmemiştir. Şekil 4.10'da $K - Re_{kr}$ değişimi gösterilmiştir.



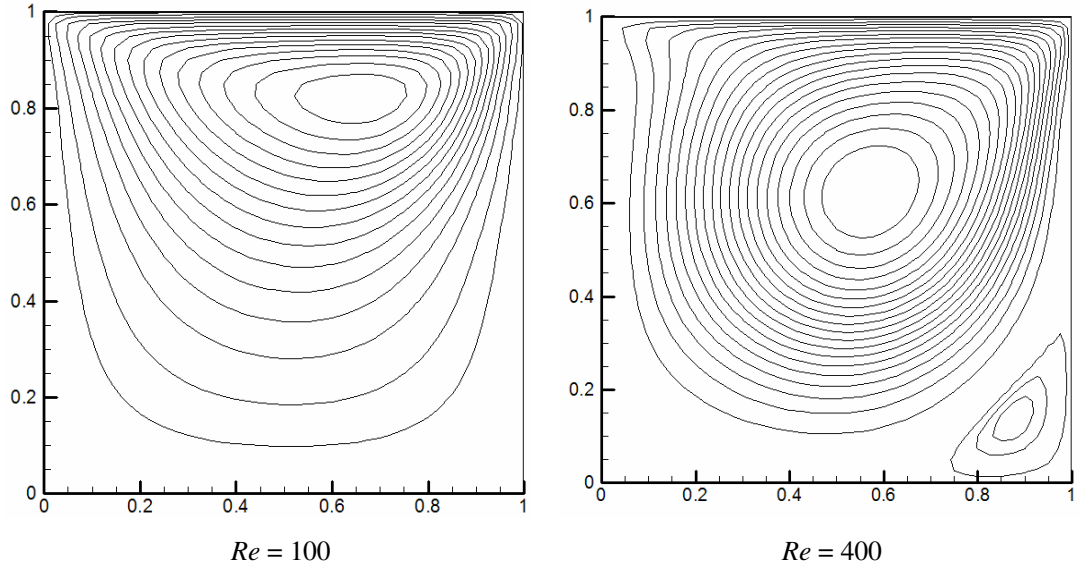
Şekil 4.10 Kontrol katsayısı (K) ile Kritik Reynolds sayısının (Re_{kr}) değişimi

$K=0$ için $Re_{kr}=5772,22$ olarak elde edilmiştir. K değeri Şekil 4.10'daki gibi değiştiğinde, ilk olarak bu değer artmış, $K=0,1$ 'de Reynolds kritik maksimum değeri olan

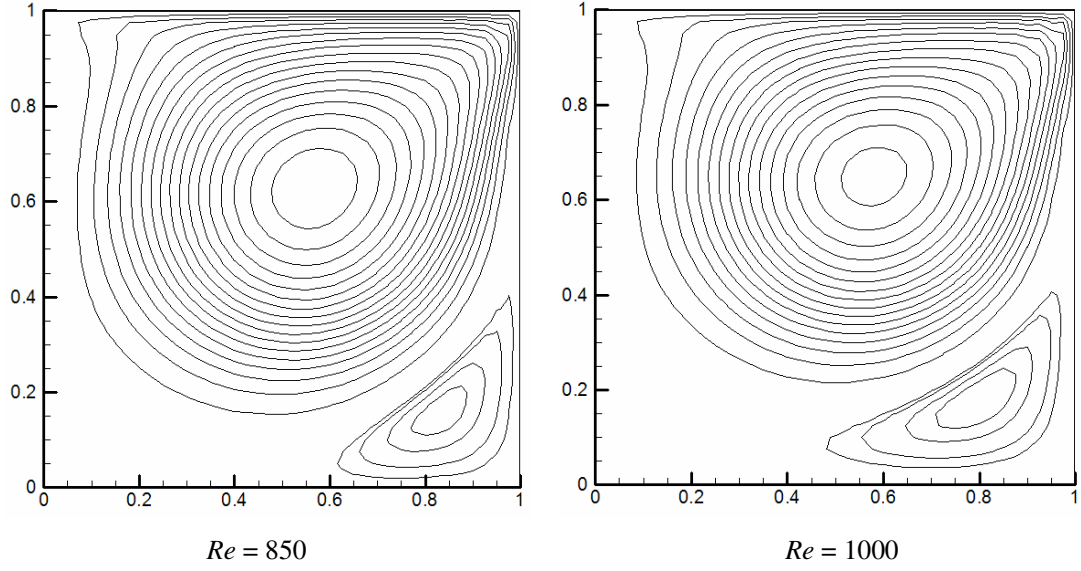
$Re_{kr}=37900$ 'e ulaşmıştır. Daha sonra düşmeye başlamış ve yaklaşık olarak $Re_{kr}=5750$ 'de sabitlenmiştir. Yani K değişse de Re_{kr} değeri değişmemektedir.

4.3 KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ İÇİN SONUÇLAR

Tezde incelenen ikinci problem olan kare kesitli oyuk içerisindeki akış için akım fonksiyonu-girdaplılık formülasyonu kullanılarak sonlu farklar yöntemi ile yapılan çözüm sonucunda çeşitli Reynolds değerleri için elde edilen akım fonksiyonu grafikleri Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de verilmiştir. 21×21 , 41×41 , 61×61 , 81×81 ve 131×131 ağ yapıları için çözüm yapılmış ve hepsi için hız vektörleri, akım fonksiyonları ve girdaplılık değerleri hesaplanmıştır. Ancak burada kontrol uygulanan durum için 41×41 den sonraki ağ yapısı için yapılan çözümler sonucu elde edilen değerlerde değişiklik olmadığı tespit edildiğinden 41×41 ağ yapısı göz önüne alınarak çözüm yapmak yeterli olmuştur. $Re=100$ için elde edilen akım fonksiyonu eğrileri ile $Re=1000$ için elde edilen eğriler birbirinden farklıdır. $Re=100$ 'de akım fonksiyonu eğrileri tam oluşmamıştır.

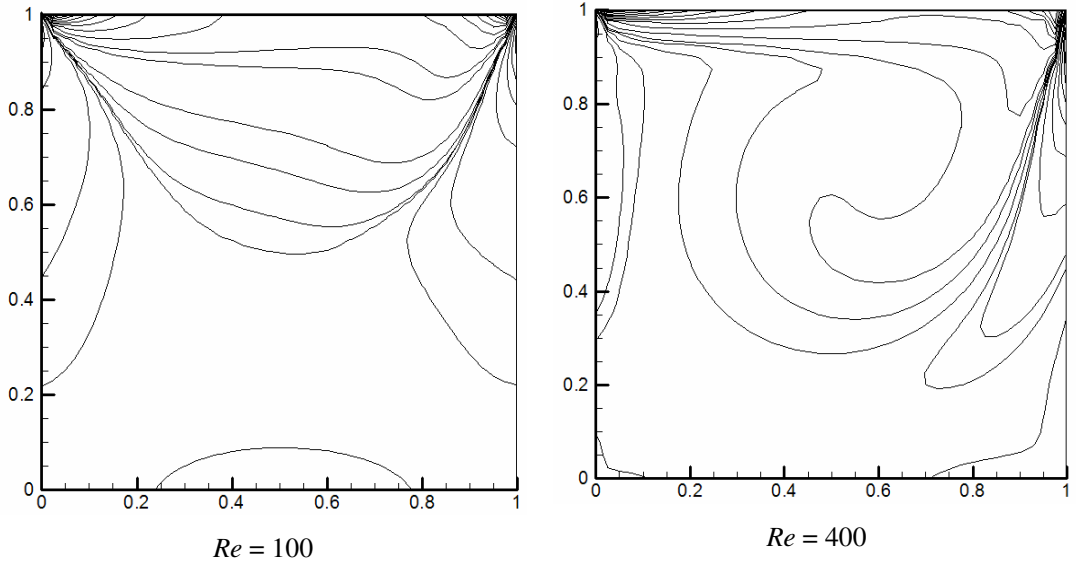


Şekil 4.11 $Re=100$ ve $Re=400$ için akım çizgileri

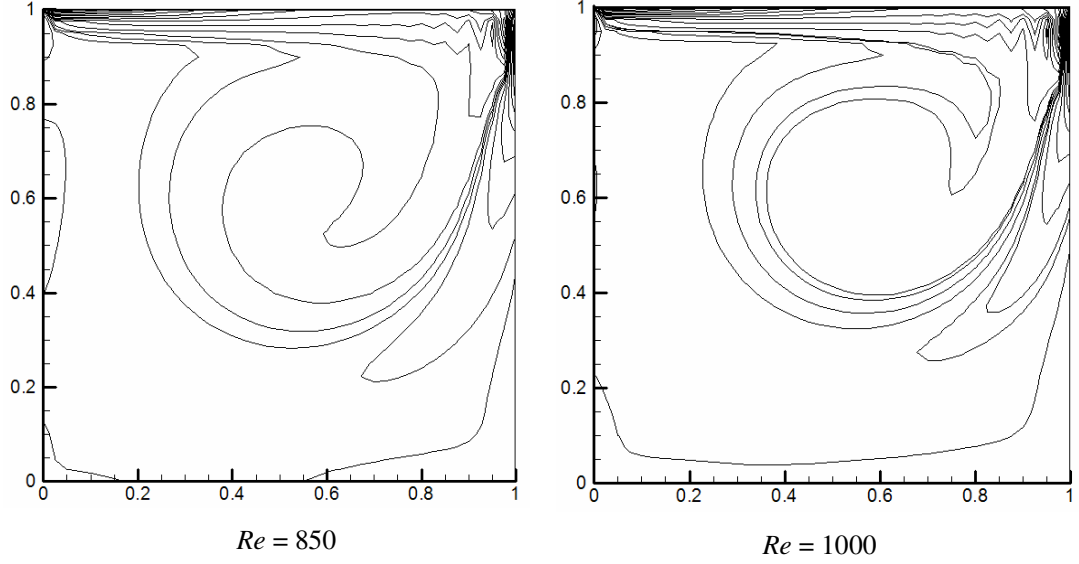


Şekil 4.12 $Re=850$ ve $Re=1000$ için akım çizgileri

$Re=850$ ve $Re=1000$ için alt köşelerdeki akım çizgileri büyümektedir. Kare kesitli oyuk içerisindeki akışın çeşitli Reynolds değerleri için elde edilen girdaplılık grafikleri ise Şekil 4.13 ve Şekil 4.14’de verilmiştir. $Re=100$ için elde edilen girdaplılık grafiğindeki eğri yapısının $Re=400$ için elde edilenden çok farklı olduğu görülmektedir.

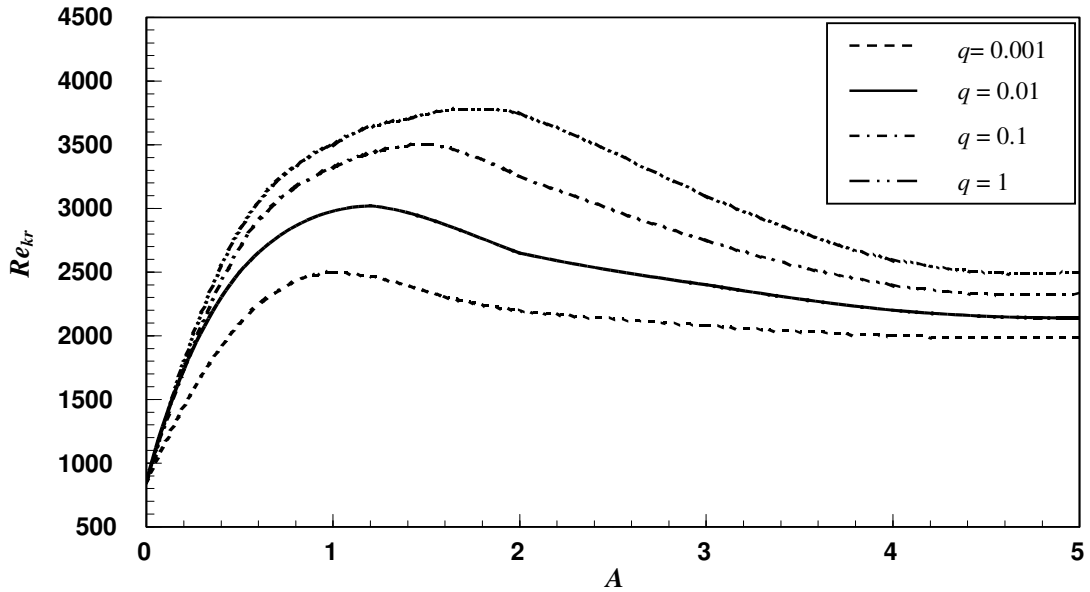


Şekil 4.13 $Re=100$ ve $Re=400$ için girdaplılık konturları

Şekil 4.14 $Re=850$ ve $Re=1000$ için girdaplılık konturları

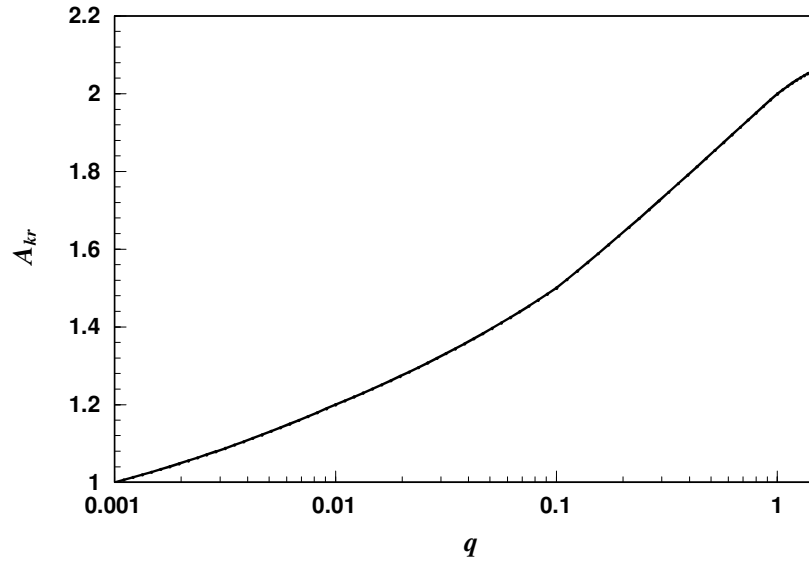
4.4 KONTROL UYGULANMIŞ KARE KESİTLİ OYUK İÇERİSİNDEKİ AKIŞ İÇİN SONUÇLAR

Üst duvarı çekilen kare kesitli oyuk içerisindeki akışta alt duvar $u = A \sin qt$ şeklinde periodik olarak titreştirilerek Re_{kr} değerinin değişimine bakılmıştır. Belirli bir q değerinde $A - Re_{kr}$ değişiminin nasıl olduğu incelenmiştir. Kare kesitli oyuk içerisinde akım probleminin kontrolü sonucunda elde edilen değerler Şekil 4.15’de gösterilmiştir.

Şekil 4.15 Genlik (A) ile Re_{kr} 'nin değişimi

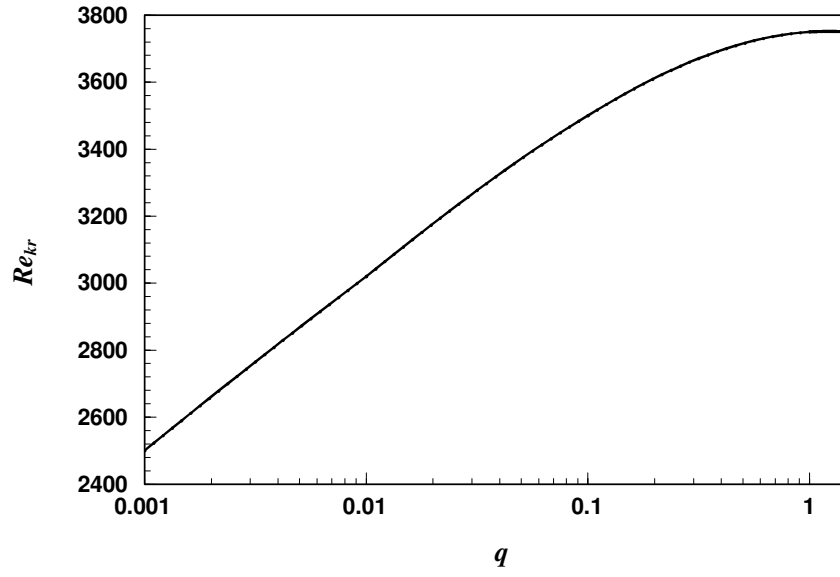
Frekans arttıkça akış daha kararlı olmaktadır. Aynı frekans değerinde genlik arttıkça kritik Reynolds sayısı değeri de artmıştır. Frekansın sıfır olduğu durum ile dalga genliğinin sıfır olduğu durum için $Re_{kr}=850$ olduğu görülmektedir. q 'nun farklı değerleri için $1 < A < 2$ arasında Re_{kr} maksimum değerlerine ulaşmaktadır, daha sonra azalan bir profil çizerek asimtotik değerlere yakınsamışlardır.

Açısal frekans ile maksimum Re_{kr} değeri için genlik (A) arasındaki değişimi gösteren grafik Şekil 4.16'daki gibidir. Açısal frekansın belirli değerinden sonra genlik değişmemektedir.



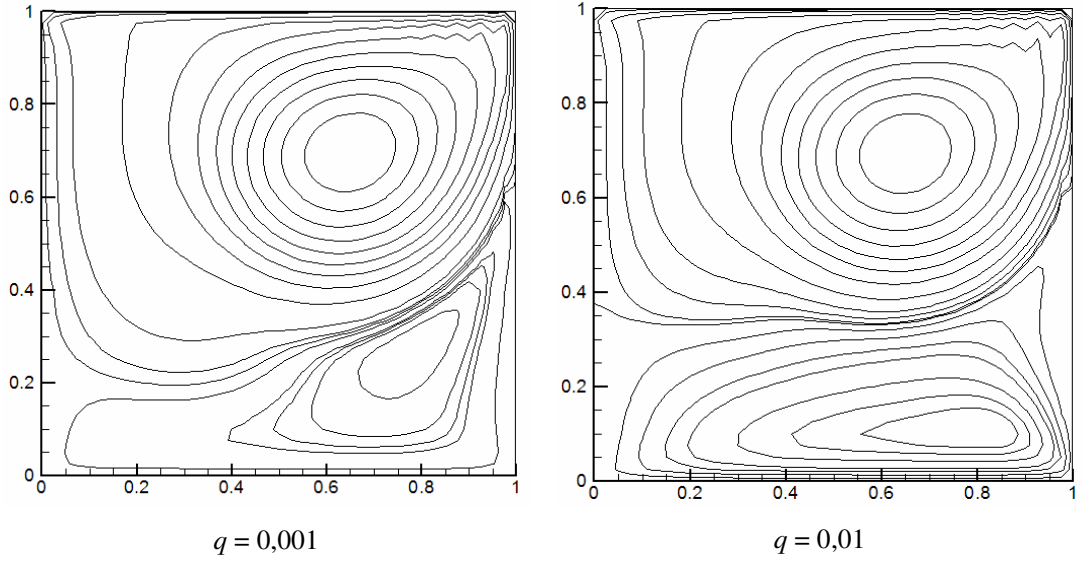
Şekil 4.16 Açısal Frekans (q) ile A_{kr} 'nin değişimi

Açısal frekansın Kritik Reynolds değerine etkisi ise Şekil 4.17'de gösterilmiştir. Burada A değerleri maksimum Re_{kr} değerleridir. Açısal frekans değeri yükseldikçe Re_{kr} artmaktadır. Ancak $q > 1$ değerinden sonra Re_{kr} değeri belirli bir değere yakınsamaktadır.

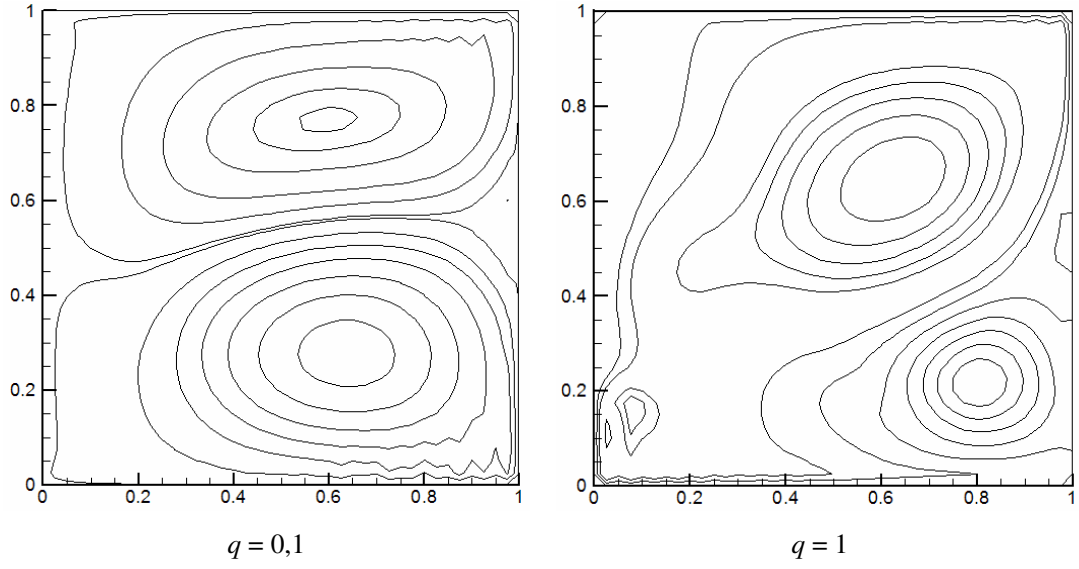


Şekil 4.17 Açısal frekans (q) ile Re_{kr} 'nin değişimi

Bu kontrol yöntemi ile $Re_{kr}=850$ 'den $Re_{kr}=3750$ değerlerine yükseltilmiştir. Çeşitli frekans değerleri için kare kesitli oyuk içerisindeki akış alanının durumu Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da gösterilmiştir.

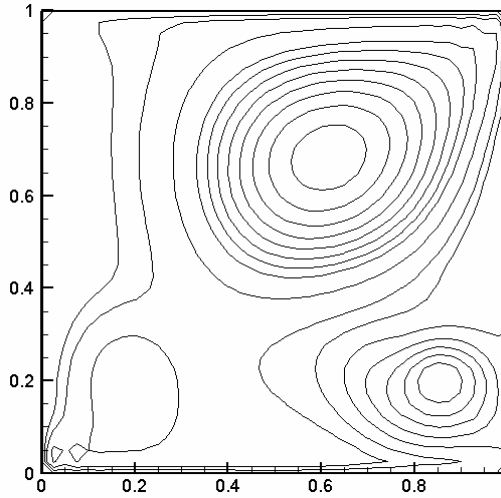


Şekil 4.18 $q=0,001$ ve $q=0,01$ için akım çizgileri



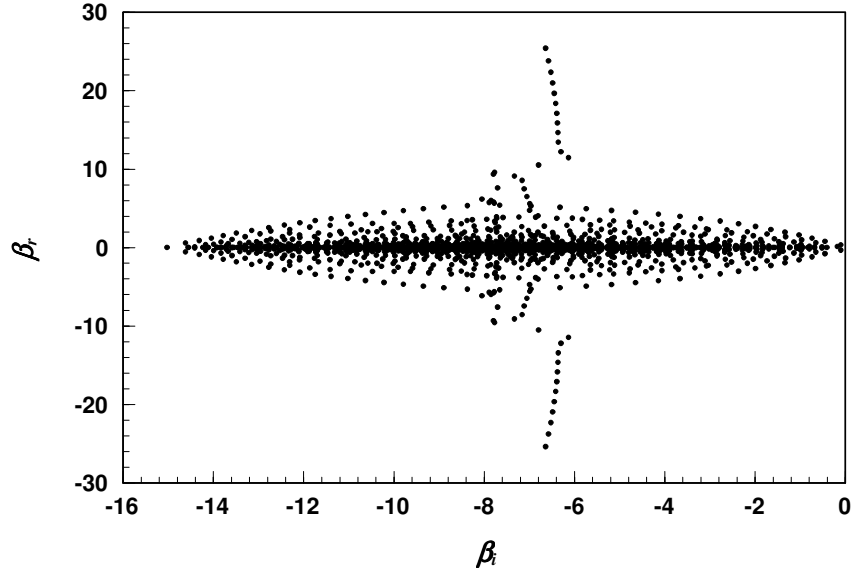
Şekil 4.19 $q=0,1$ ve $q=1$ için akım çizgileri

Şekil 4.20’de görüldüğü üzere $q=1,5$ için elde edilen akım çizgileri $q=1$ ’deki akım çizgilerinden çok büyük bir farklılık göstermemektedir.



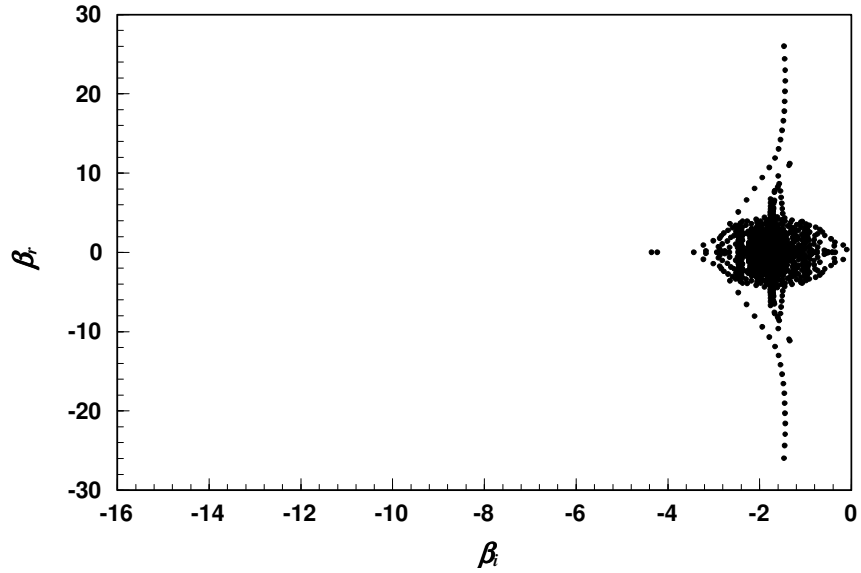
Şekil 4.20 $q=1,5$ için akım çizgileri

Kontrol uygulanmamış durumda kararlılık sınırı olan $Re=850$ değeri için problemin özdeğerlerinin dağılımı ise Şekil 4.21’de gösterilmektedir.

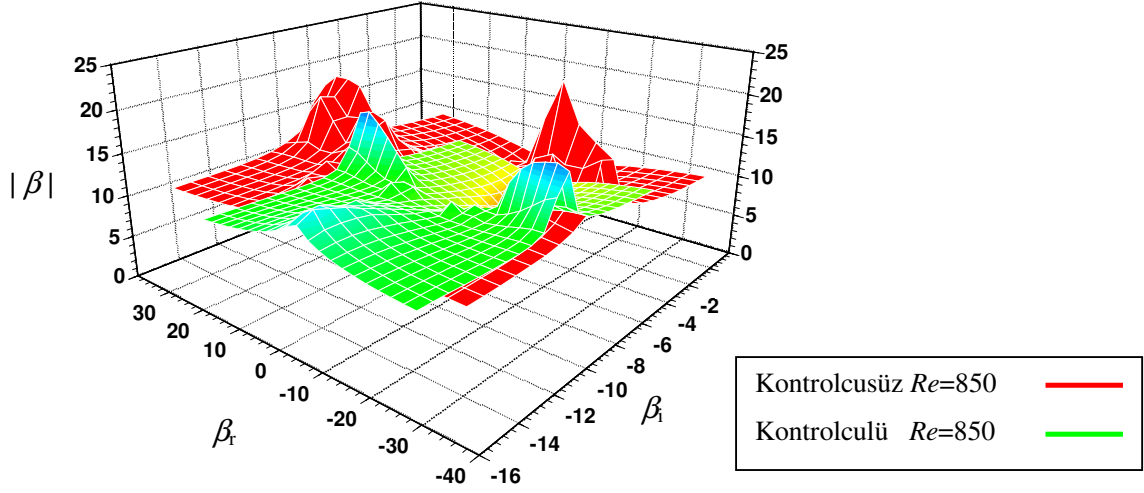


Şekil 4.21 $Re=850$ için özdeğerler $\beta_i < 0$

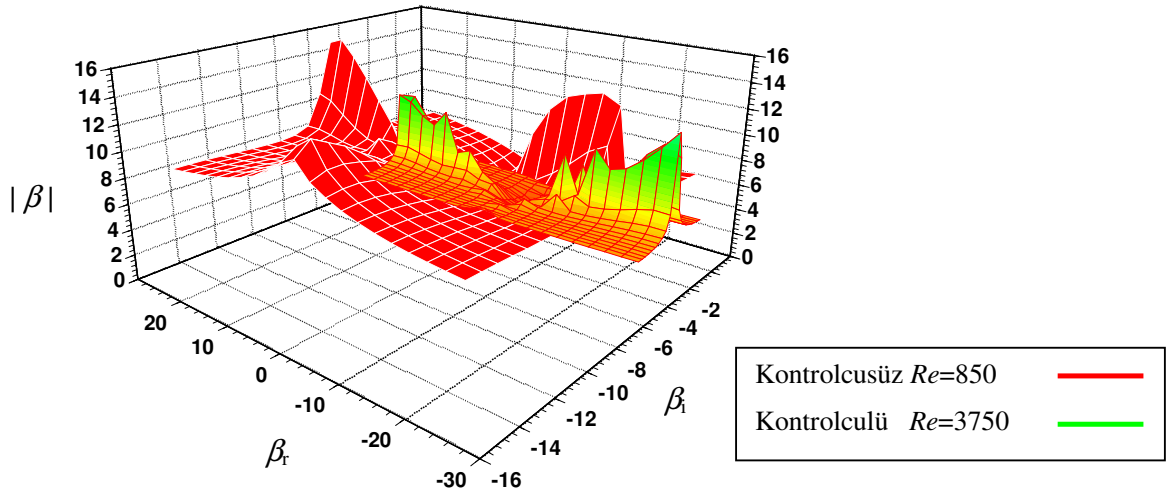
Kontrol uygulanmış durumda ise kararlılık sınırı $Re=3750$ için özdeğerlerin dağılımı Şekil 4.22’deki gibidir. Her zaman $\beta_i > 0$ ‘dır.



Şekil 4.22 $Re=3750$ için özdeğerler $\beta_i < 0$

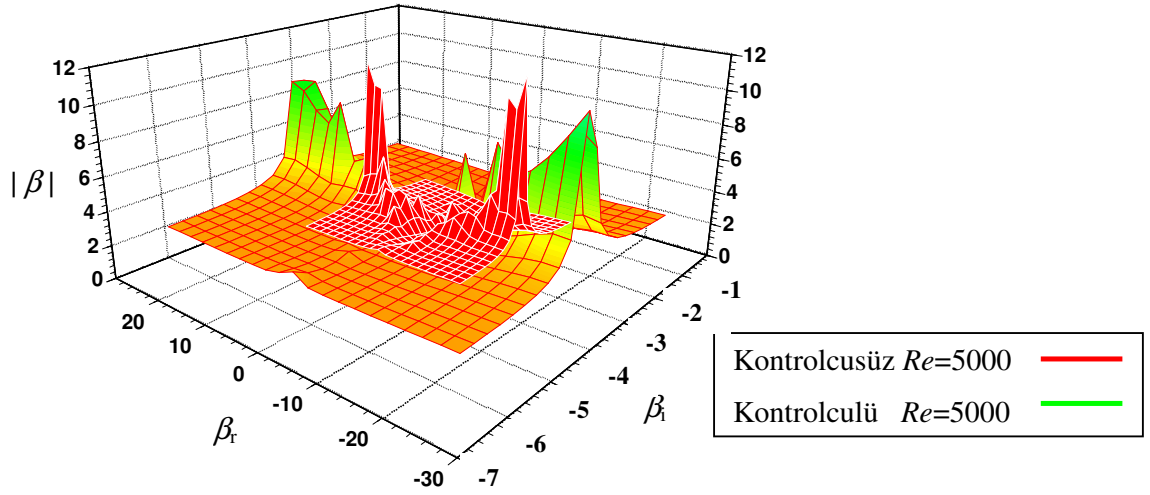
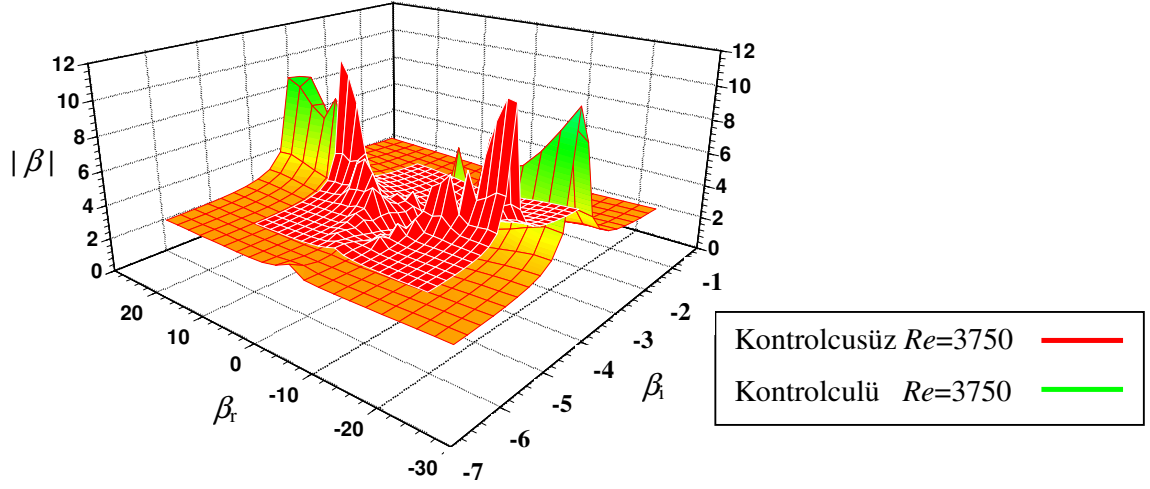


Şekil 4.23 Kontrolcüsüz ve kontrolcülü durumda $Re=850$ için özdeğerler



Şekil 4.24 Kontrolcüsüz durumda $Re=850$ ve kontrolcülü durumda $Re=3750$ için özdeğerler

Şekil 4.23'de $Re=850$ için kontrolcülü durum daha iyi çıkmıştır. Yine Şekil 4.24'de kontrolcülü durum kontrolcüsüz duruma göre çok daha iyidir.



Şekil 4.25 ve Şekil 4.26'da görüldüğü üzere kontrolcülü durum yine kontrolcüsüz duruma göre daha iyidir. $Re > Re_{kr}$ olduğunda kontrolcülü hala kontrolcüsüzden daha iyidir ancak önemli derece iyi değildir. Kontrolcüsüz durumda daha yüksek değerlerde grafik pik yapmıştır. Bütün bunların sonucu olarak akış alanı için kontrolcülü hal daha iyi olduğu anlaşılmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çalışma kapsamında hidrodinamik kararlılığa, akışkanlar mekaniğinin temel iki akış tipi üzerinde, akış alanını sınırlayan plaka veya duvarların titreştirilmesinin etkisi incelenmiştir. Üçüncü bölümde kritik Reynolds sayısının kontrol edilmesinin paralel plakalar için yapılan analitik çözümü ile oyuk içerisindeki akış problemi için uygulanan açık çevrim kontrol yöntemi çalışmaya özgüdür.

Çalışmada incelenen iki problemde ilki paralel plakalar arası Poiseuille tipi akış Chebyshev polinomu kullanılarak sayısal çözüm yapılmış, akışın laminar rejimden türbülanslı rejime geçişini yöneten kritik Reynolds sayısı (Re_{kr}) 5772,22 ve buna karşılık gelen kritik dalga sayısı (α_{kr}) 1,02 olarak bulunmuştur. Probleme kontrol uygulanmadan önce klasik Orr-Sommerfeld problemi için kritik Reynolds sayısının doğru olarak bulunması, çeşitli α ve Reynolds sayısı değerleri için c_i 'nin nasıl bir değişim gösterdiğinin bilinmesi gerekmektedir. Bu doğrultuda yapılan çalışma sonucunda Poiseuille tipi paralel plakalar arası akış için bulunan kritik değerler geçmişte yapılmış sonuçlarla aynı olarak yani $Re_{kr}=5772,22$ ve $\alpha_{kr}=1,02$ elde edilmiştir. Daha sonra çalışmanın esas kısmını teşkil eden geçiş Reynolds sayısının yükseltilmesi için alt plaka, üst plakada ölçülen kayma gerilmesi değerine bağlı olarak y doğrultusunda titreştirilerek harmonik bir hareket verilmiştir. Üst plakada ölçülen kayma gerilmesi ($\partial u / \partial y$) geri besleme değişkeni olmaktadır. Bu analitik çözüm çalışmaya özgüdür. $K=0$ için $Re_{kr}=5772,22$ olarak elde edilmiş, $K=0,1$ 'de Reynolds sayısının maksimum değeri olan $Re_{kr}=37900$ 'e ulaşmış, daha sonra düşmeye başlamış ve yaklaşık olarak $Re_{kr}=5750$ 'ye yakınsayarak sabitlenmiştir. Bu da teorik olarak paralel plakalar arası akışa ait kritik Reynolds sayısının üst plakadaki yüzey sürtünmesinin ölçülmesi ile 5772,22'den 37900'e arttırılmasının mümkün olduğu sonucunu göstermiştir.

Tezde incelenen ikinci problem olan oyuk içerisindeki akış olayında ise öncelikle klasik üst duvarı çekilen kare kesitli oyuk içerisindeki akış problemi çözülerek, hız, girdaplılık ve akım fonksiyonu değerleri hesaplanmış, literatürdeki değerler ile karşılaştırılarak doğruluğundan emin olunmuş ve özdeğer problemi çözülerek kritik Reynolds değeri $Re_{kr}=850$ olarak hesaplanmıştır. Daha sonra açık çevrim kontrol yöntemi kullanılmış, alt duvar titreştirilmiş, yani alt duvar için sınır şartı $u=Asin(qt)$ şeklinde bir harmonik hareket verilmiş ve bu şekilde sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal yöntemle çözüm yapılmıştır. Burada A ile Re_{kr} arasındaki değişim elde edilmiş. $A=0$ için $Re_{kr}=850$ iken A arttıkça geçiş Reynolds sayısı artmış ve belirli bir değerden sonra sabitlenmiştir. Aynı şekilde açısal frekans arttıkça kontrol katsayısı da arttığı görülmüş. Belirli bir frekans değerinde ise artık A 'nın değişmediği görülmüştür. Bu kontrol yöntemi ile de akış için $Re_{kr}=3750$ 'ye yükseltilmiştir.

İlerideki çalışmalarda oyuk içerisindeki akış için problem kapalı çevrim kontrol yöntemi kullanılarak çözülebilir. Yine üç boyutlu oyuk için aynı çalışma tekrarlanabilir. Değişik sınır giriş fonksiyonları alınarak da problemler tekrar çözülebilir.

KAYNAKLAR

1. GAD-EL HAK, M., Modern developments in flow control, *Applied mechanics reviews*, 49, 364-379.
2. RAYLEIGH, L., 1880, On the stability or instability of certain fluid motions, *Proceedings of the London mathematical society*, 11, 57-70.
3. REYNOLDS, O., 1883, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, *Proceedings of the royal society of London*, 35, 84-99.
4. DRAZIN, P.G., REID, W.H., 1981, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, United States of America, 0-521-22798.
5. ORR, W.M.F., 1907, The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid, *Proceedings of the royal Irish academy A*, 27, 9-138.
6. SOMMERFELD, A., 1908, Ein beitrage zur hydrodynamischen erklarung der turbulenten fluessigkeitsbewegungen, *Proceedings 4th International congress of mathematicians*, Rome, 3, 116-124.
7. TOLLMIEEN, W., 1929, Über die entstehung der turbulenz, *Nachrichten gesellschaft der wissenschaften zu göttingen, Math. phys. klasse*, 26, 21-44.
8. SCHLICHTING, H., 1933, Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung, *Nachrichten gesellschaft der wissenschaften zu göttingen, Math. phys. klasse*, 182-208.
9. LIEPMANN, R.E., 1943, Investigation of laminar boundary layer stability and transition on curved boundaries, *Naca wartime report*, W-107.
10. SCHUBAUER, G.B. ve SKRAMSTAD, H.K., 1947, Laminar boundary layer oscillations and transitions on flat plate, *Naca report*, 909, 327-357.
11. HEISENBERG, W., 1924, Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren, *Poggendorf's annalen der physik und chemie*, 46, 423-442.
12. THOMAS, L.H., 1953, The stability of plane poiseuille flow, *Physical review*, 91 (4), 780-784.

13. LIN, C.C., 1944, On the stability of two-dimensional parallel flows, *Proceedings of the national academy of sciences*, 30, 316-323.
14. SHEN, S.F., 1954, Calculated amplified oscillations in the plane Poiseuille and Blasius flows, *Aeronautical sciences*, 21, 62-64.
15. LIN, C.C., 1955, *Theory of hydrodynamic stability*, Cambridge University, England, 06BNMP8.
16. ORSZAG, S.A., 1971, Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *Journal of fluid mechanics*, 50, 689-703.
17. DRAZIN, P.G. ve REID W.H., 1982, Hydrodynamic stability, *SIAM review*, 24, 351-354.
18. MASLOWE, S.A., 1985, Shear flow instabilities and transition. In Hydrodynamics stabilities and transition to turbulence (ed. H.L.Swinney and J.P.Gollub), *Topics in applied physics*, 45 (7), 181-228.
19. ORSZAG, S.A., ve KELLS, L.C., 1980, Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of fluid mechanics*, 96, 159-205.
20. ABERGEL, F., ve TEMAM, R., 1990, On some control problems in fluid mechanics, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1, 303-325.
21. JOSHI, S.S., SPEYER, ve J.L., KIM, J., 1997, A systems theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite amplitude disturbances in plane poiseuille flow, *Journal of fluid mechanics*, 332, 157-184.
22. JAMESON, A., 1989, Computational aerodynamics for aircraft design, *Science*, 245, 361-371.
23. BERGGREN, M., 1995, *Optimal control of time evolution systems: controllability investigations and numerical algorithms*, Thesis (PhD), Rice University.
24. JOSLIN, R.D., GUNZBURGER, M.D., NICOLAIDES, R.A., ERLEBACHER, G. ve HUSSAINI, M.Y., 1997, A self-contained, automated methodology for optimal flow control, *AIAA journal*, 35, 816-824.
25. HÖGBERG, M., BEWLEY, T.R. ve HENINGSON, D.S., 2003, Linear feedback control and estimation of transition in plane channel flow, *Journal of fluid mechanics*, 481, 149-175.
26. LUMLEY, J. ve BLOSSEY, P.N., 1998, Control of turbulence, *Annual review of fluid mechanics*, 30, 311-327.

27. BEWLEY, T.R., 2001, Flow control: new challenges for a new Renaissance, *Progress in aerospace science*, 37, 21-58.
28. THOMAS, A.S.W., 1990, Active wave control of boundary-layer transition. In viscous drag reduction in boundary layers, *Progress in astronautics and aeronautics*, 123, 179-199.
29. METCALFE, R.W., 1994, Boundary layer control: A brief review, In computational fluid dynamics '94, *John Wiley&Sons*, 52-60.
30. BURGGRAF, O.R., 1966, Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *Journal of fluid mechanics*, 24, 113-151.
31. OLSON, M.D. ve TUANN S.Y., 1979, New finite element results for the square cavity, *Journal of computers and fluids*, 7, 123-135.
32. GATSKI, T.B., GROSCH, C.E ve ROSE M.E., 1982, A numerical study of the two-dimensional Navier-Stokes equations in vorticity-velocity variables, *Journal of computational physics*, 48, 1-22.
33. GUSTAFSON, K., HALASI, K., 1986, Vortex dynamics of cavity flows, *Journal of computational physics*, 64 (2), 279-319.
34. GUSTAFSON, K., HALASI, K., 1987, Cavity flow dynamics at higher Reynolds number and higher aspect ratio, *Journal of computational physics*, 70(2), 271-283.
35. SOH, W.Y., GOODRICH, J.W., 1988, Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of computational physics*, 79(1), 113-134.
36. GOODRICH, J.W., GUSTAFSON, K., HALASI, K., 1990, Hopf bifurcation in the driven cavity, *Journal of computational physics*, 90(1), 219-261.
37. GHIA, U., GHIA K.N. ve SHIN T., 1982, High Re solutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method, *Journal of computational physic*, 48, 387-411.
38. SCHREIBER R. ve KELLER H.B., 1983, Driven cavity flows by efficient numerical techniques, *Journal of computational physic* , 49, 310-333.
39. GUPTA, M.M., 1991, High accuracy solutions of incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of computational physics*, 93, 343-359.
40. GUPTA M.M., MANOHAR R.P. ve NOBLE B., 1981, Nature of viscous flows near shape corners, *Journal of computers and fluids*, 9, 379-388.
41. AUTERI, F., PAROLINI N. ve QUARTAPELLE L., 2002, Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow, *Journal of computational physics*, 183, 1-25.

42. KIM, J. ve MOIN, P., 1985, Application of a fractional step method to incompressible Navier Stokes equations, *Journal of computational physic*, 59, 308-323.
43. GUPTA, M.M. ve KALITA J.C., 2005, A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation, *Journal of computational physics*, 207, 52-68.
44. AIDUN, C.K., TRIANTAFILLOPOULOS, N.G. ve BENSON, J.D., 1991, Global stability of lid driven cavity with throughflow: Flow visualization studies, *Physics of fluids A*, 3 (9), 2081-2091.
45. SHANKAR, P.N. ve DESHPANDE, M.D., 2000, Fluid mechanics in the driven cavity, *Annual review of fluid mechanics*, 32, 93-136.
46. RAMANAN, N. ve HOMSY, G.M., 1994, Linear stability of lid driven cavity flow, *Physics of fluids*, 6 (8), 2690-2701.
47. AIDUN, C.K. ve POLIASHENKO, M., 1995, A direct method for computation of simple bifurcations, *Journal of computational physic*, 121, 246-260.
48. DING, Y. ve KAWAHARA, M., 1998, Linear stability of incompressible fluid flow in a cavity using finite element method, *International journal for numerical methods in fluids*, 27, 139-157.
49. DING, Y. ve KAWAHARA, M., 1999, Three dimensional linear stability analysis of incompressible viscous flows using the finite element method, *International journal for numerical methods in fluids*, 31, 451-479.
50. NON, E., PIERRE, R. ve GERVAIS J.J., 2006, Linear stability of the three dimensional lid driven cavity, *Physics of fluids*, 18 (8), 1-10.
51. ALBENSOEDER, S., KUHLMANN, H.C. ve RATH, H.J., 2001, Three dimensional centrifugal flow instabilities in the lid driven cavity problem, *Physics of fluids*, 13 (1), 2001.
52. OWENS, R.G. ve SAHIN, M., 2003, A novel fully implicit finite volume method applied to the lid driven cavity problem – Part I: High Reynolds number flow calculations, *International journal for numerical methods in fluids*, 42, 57-77.
53. OWENS, R.G. ve SAHIN, M., 2003, A novel fully implicit finite volume method applied to the lid driven cavity problem – Part II: Linear stability analysis, *International journal for numerical methods in fluids*, 42, 79-88.
54. SCHLICHTING, H., 1979, *Boundary layer theory*, McGraw Hill, United States of America, 0-07-055334-3.

55. RAHI, D.N., 2000, *Flow Instability*, Wit Press, Great Britain, 1-85312-7019.
56. GEORGESCU, A., 1985, *Hydrodynamic stability theory*, Martinus Nijhoff Publishers, Romania, 90-247-3120-8.
57. JORDINSON, R., 1970, The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation, *Journal of fluid mechanics*, 43, 801-811.
58. GASTER, M., ve JORDINSON, R., 1975, On the eigenvalues of the Orr-Sommerfeld equation, *Journal of fluid mechanics*, 72, 121-133.
59. GERSTING, J.M., 1980, Numerical methods for eigensystems: The Orr-Sommerfeld problem as an initial value problem, *An international Journal Computers & Maths. with Appls.*, 6, 167-174.
60. FELDMAN, S., 1955, *On the hydrodynamic stability of two viscous incompressible fluids in parallel uniform shearing motion*, Thesis (PhD), California Institute of Technology.
61. BOURNE, D., 2003, Hydrodynamic stability, the Chebyshev tau method and spurious eigenvalues, *Continuum mechanics and thermodynamics*, 15, 571-579.
62. FOX, L., PARKER I.B., 1968, *Chebyshev polynomials in numerical analysis*, Oxford University Press, Northern Ireland, 978-0198596141.
63. MASON, J.C., HANDSCOMB, D.C., *Chebyshev polynomials*, CRC Press, United States of America, 08493-0355-9.
64. SCHULTZ, W.W., LEE, N.Y. ve BOYD, J.P., 1989, Chebyshev pseudospectral method of viscous flows with corner singularities, *Journal of scientific computing*, 4, 1-24.
65. TANNEHILL J.C., ANDERSON D.A.,PLETCHER R.H., 1997, *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Taylor&Francis, United States of America, 1-56032-046-X.
66. ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A., 1972, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, United States of America, 0486612724.

EKLER

1. CHEBYSHEV POLİNOMLARI

n. mertebeden Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad \cos \theta = x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bazı chebyshev polinomları

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad (1.2)$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

şeklinde. Daha yüksek mertebedeki polinom katsayıları tablolardan elde edilebilir [62,63,66]. Temel rekürans bağıntısı

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (1.3)$$

ayrıca,

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \sqrt{(1-x^2)} \left\{ 1 - [T_n(x)]^2 \right\} \quad (1.4)$$

olarak da yazılabilir.

Chebyshev serisi,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \quad (1.6)$$

olup, orthogonalite özelliği [62,63]

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_k(x) T_l(x) dx = \delta_{kl} \quad (1.7)$$

kullanılarak polinomun katsayıları

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} f(x) T_k(x) dx \quad (1.8)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci tür Chebyshev polinomu $U_n(y)$ olmak üzere

$$U_n(x) = \sin(n+1)\theta / \sin \theta, \quad x = \cos \theta, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır. Bazı n değerleri için $U_n(x)$ ifadeleri

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x \quad (1.10)$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

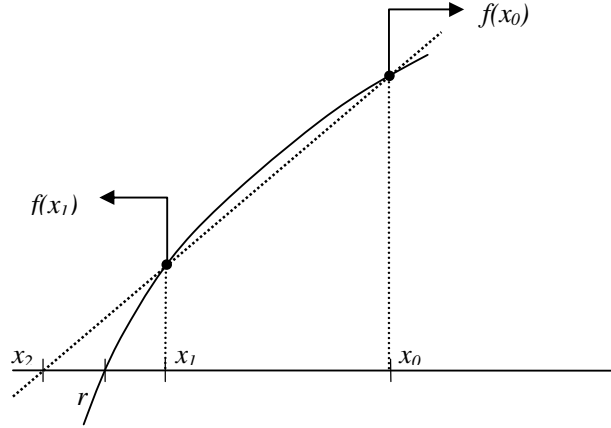
olarak yazılır. Yüksek mertebedeki $U_n(x)$ değerleri için polinomların katsayıları tablolardan elde edilebilir [62,63,66]. $U_n(x)$ için rekürans bağıntısı,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n=2, 3, \dots, \quad (1.11)$$

şeklindedir.

2. SECANT YÖNTEMİ İLE KÖK BULMA

Problemin çözümü yapılırken kullanılan sayısal yöntemlerden biri de secant yöntemidir. Bu yöntem bir kök bulma algoritması olup, incelenen bölge içerisinde yaklaşık olarak lineer bir fonksiyon farzedilerek çözüm yapılmasıdır. Secant yöntemi, Newton yönteminden yola çıkılarak, $f(x)$ fonksiyonunun x_n ve x_{n-1} noktalarında türetilmesiyle elde edilir.



Şekil 1. Secant Yöntemi

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \quad (2.1)$$

$f(x)$ yaklaşık olarak lineer, x_2 asıl kök (r) 'ye eşit değil, ancak hesaplamaya başlanılan iki noktaya göre köke daha yaklaşık bir değerdir. Bir sonraki iterasyon için her zaman son hesaplanan iki nokta alınır. Bu yöntemde önemli olan, kökün ne kadar yakınında noktalar seçilirse okadar hızlı ve doğru yaklaşım sağlanır.

3. GENELLEŐTİRİLMİŐ ÖZDEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İçerisinde karakteristik değeri barındıran katsayılar matrisi \mathbf{A} ise, $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})x=0$ formu özdeğer problemin alışıl gelmiŐ formudur. Bazı durumlarda özdeğer problemi $(\mathbf{A}-\mathbf{B}\lambda)x = 0$ şeklinde de karşımıza çıkabilir. Bu tip problemlere genelleŐtirilmiŐ özdeğer problemleri denmektedir.

$$\mathbf{A}x = \lambda\mathbf{B}x$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1})x = \mathbf{B}^{-1} \cdot \lambda\mathbf{B}x$$

(3.1)

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = 0$$

$$\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Şeklinde özdeğerler bulunur.

ÖZGEÇMİŞ

Murad KUCUR, 1976 yılında İstanbul' da doğdu. Orta ve lise öğrenimini Şişli Terakki Lisesi'nde tamamladı. 1997 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini 2000 yılında tamamladı. 2002 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. 1998 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlamış olan Murad KUCUR, halen bu görevini sürdürmektedir.