



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKIŞKAN TAŞIYAN ELASTİK BORULARIN TİTREŞİM
ANALİZİ**

Birkan DURAK

Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Danışman

Doç.Dr.Erol UZAL

Haziran, 2008

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKIŞKAN TAŞIYAN ELASTİK BORULARIN TİTREŞİM
ANALİZİ**

Birkan DURAK

Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı

Danışman

Doç.Dr.Erol UZAL

Haziran, 2008

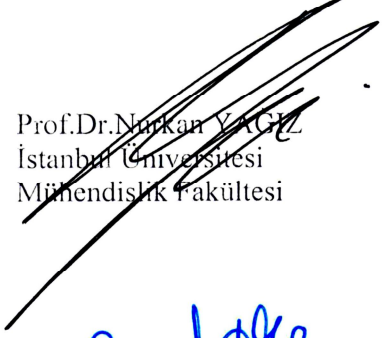
İSTANBUL

Bu çalışma 15/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Doç.Dr.Erol UZAL
(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr.Nurkan YAGIZ
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr.Salim ÖZÇELEBİ
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Doç.Dr.Serdar BARIŞ
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof.Dr.Metin Orhan KAYA
İstanbul Teknik Üniversitesi
Uçak Ve Uzay Bilimleri Fakültesi

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmam boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımlardan dolayı tüm bölüm öğretim üyelerimize ve tez danışmanım Doç.Dr.Erol UZAL'a çok teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Haziran, 2008

Birkan DURAK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ŞEKİL LİSTESİ	III
TABLO LİSTESİ	IV
SEMBOL LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	2
3. MALZEME VE YÖNTEM	6
3.1. İKİ UCUNDAN BASİT MESNETLENMİŞ BİR BORUNUN HAREKET DENKLEMİ.....	6
4. BULGULAR	14
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	25
KAYNAKLAR.....	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3-1: Basit mesnetlenmiş boru için düşey yer değiştirme	6
Şekil 3-2: Borudan alınan küçük bir eleman üzerindeki kuvvetler	7
Şekil 4-1: İçi boş borunun mod biçimleri	15
Şekil 4-2: Akışkanın $u=0,1$ hızıyla geçişi sırasındaki mod biçimleri.....	16
Şekil 4-3: Özdeğerlerin sanal kısımlarının gerçel kısımları ile değişimi.....	18
Şekil 4-4: Özdeğerlerin sanal kısmının hız ile değişimi	18
Şekil 4-5: Özdeğerlerin gerçel kısımlarının hız ile değişimi.....	19
Şekil 4-6: İkinci mod için özdeğerin gerçel kısımlarının sanal kısımları ile değişimi ...	21
Şekil 4-7: Çırpınma hızının alfa katsayısı ile değişimi.....	24
Şekil 4-8: Çırpınma hızının beta katsayısı ile değişimi	24

TABLO LİSTESİ

Tablo 4-1:Boyutsuz hızın farklı değerleri için ilk özdeğerler	17
Tablo 4-2:Boyutsuz hızın farklı değerleri için ikinci özdeğerler	20
Tablo 4-3:Farklı alfa katsayıları için çarpınma hızları	22
Tablo 4-4:Farklı beta katsayıları için çarpınma hızları	23

SEMBOL LİSTESİ

A	: Boru kesit alanı [m^2]
E	: Elastisite modülü [N/m^2]
F	: Birim uzunluk başına düşen kuvvet [N/m]
I	: Borunun et kısmının alan ikinci momenti [m^4]
L	: Boru boyu [m]
M	: Eğilme momenti [Nm]
Q	: Kesme kuvveti [N]
T	: Eksenel gerilme [N/m^2]
U	: Akışkan hızı [m/s]
m	: Borunun birim boyunun kütlesi [kg/m]
p	: Karakteristik denklemin kökü
q	: Birim uzunluk başına düşen kayma gerilmesi [N/m^3]
s	: İncelenen elemanın çevresi [m]
t	: Zaman [s]
w	: Çökme miktarı [m]
π	: Pi [3,14159]
ρ	: Akışkan yoğunluğu [kg/m^3]
ω	: Özdeğer

ÖZET

AKIŞKAN TAŞIYAN ELASTİK BORULARIN TİTREŞİM ANALİZİ

Bu çalışmada akışkan taşıyan elastik borularda meydana gelen titreşimler matematiksel olarak incelenmiştir. Boru üzerinde akış sırasında kuvvetler yüzünden gerçekleşen dinamik yerdeğişimlerini uzay koordinatlarına ve zamana bağlı olarak gösteren dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklem verilmiştir. Bu denklem boyutsuzlaştırılmış ve ardından karakteristik denklem yazılarak boyutsuz akışkan hızı için özdeğerlerin hesaplaması yapılmıştır. Farklı özdeğerler için mod biçimleri çizilmiştir.

SUMMARY

VIBRATION ANALYSIS of FLUID-CARRYING ELASTIC PIPES

In this study, vibrations of elastic pipes which are used for fluid flow examined mathematically. A fourth order differential equation dependent of time and spatial-coordinates that represent dynamic displacements on pipe that occur because of forces during flow is given. This equation is non-dimensionalized and eigenvalues for dimensionless flow speed are calculated by writing characteristic equation. Mod shapes are drawn for different eigenvalues.

1. GİRİŞ

Günümüzde akışkanların elastik borular aracılığıyla taşınması sırasında meydana gelen titreşimler sonucunda boru tesisatlarda oluşan çatlaklar ve kırılmalar oldukça ciddi ekonomik sorunlar yaratmaktadır. Yanıcı ve parlayıcı maddelerin taşındığı boru hatlarında bu tarz sorunların oluşmasını önlemek amacıyla ciddi çalışmalar yapılmaktadır. Belirli bir çalışma ömrü için tasarlanan mühendislik sistemlerinde bu titreşimlerin verim düşümlerine neden olmasını engellemek amacıyla borular üzerindeki titreşimin azaltılması önemlidir. Boru hatlarındaki sorun bakım ve onarım maliyetlerini arttırmakta, işgücü kayıplarına neden olmaktadır. Özellikle titreşimler yüzünden içmesuyu hatlarında oluşacak çatlaklar suyun kalitesinde önemli düşüslere neden olarak toplum sağlığını tehdit edecektir. Bu yüzden boru hatlarındaki bu sorunun incelenmesi insan sağlığı, çevre temizliği, akışkan kayıplarının önlenmesi, bakım ve onarım maliyetlerinin azaltılabilmesi açısından önemlidir.

2. GENEL KISIMLAR

Kabukların deformasyon durumlarını inceleyebilmek amacıyla Donell (1934) Yüzey Kabuk Teorisini önermiştir. Bu teoride radyal ve çevresel kabuk deplasmanı için 3 adet denge denklemi tanımlanırken, aksenal yöndeki deplasmanlar için 2 adet denge denklemi kullanılmıştır. Yüksek çevresel dalga numarası n ile gösterilmek üzere $n \geq 5$ için teori ile bulunan hesaplamaların gerçeğe daha yakın olduğu görülmüştür.

Von Karman ve Tsien (1941) aksenal yüklemeler altındaki silindirik kabukların deformasyonunu incelerken Donell' in teorisinden yararlanmışlardır.

Mushtari ve Galimov (1957) ince elastik kabukların orta ve büyük ölçekli deformasyonlarını incelemişlerdir.

İçerisinde kısmen sıvı bulunan kabukların (boruların) nonlineer titreşimi ile ilgili en önemli çalışmalardan birisi Shkenev (1964) tarafından yapılmıştır. Shkenev çalışmasında sıvının akış halini lineer denklemler ile tanımlayarak titreşim analizinde nonlineer kabuk teorisinden yararlanmışdır. Sovyetler Birliğindeki daha sonra yapılan çalışmalar daha çok roketlerde karşılaşılan sorunların giderilmesine yönelik olmuştur.

Abramson ve Kana (1966) önceden yapılmış ve yayınlanmış olan içi boş veya içerisinde az miktarda sıvı olan boruların büyük genlikli titreşim deneylerinin sonuçlarını toplayarak düzenlemişlerdir. Yapılmış olan bu çalışmaların bir çoğunda basit mesnetlenmiş, radyal ve boylamsal kuvvetlerle titreşime zorlanmış borular için deneyler yapılmıştır. Bu dönemin diğer çalışmalarından birindeyse basit mesnetlenmiş ve suya tamamen daldırılmayan içerisi su dolu ve yüzey dalgalarının etkisine açık borular incelenmiştir. Boru kalınlığının üçte biri oranındaki bir noktadan radyal yüklere maruz bırakılmış borunun titreşim genliğinde etkiyen yüzey dalgaları yüzünden boru doğal frekansının yaklaşık olarak % 0.4 oranında bir azalma olduğu gözlenmiştir.

Chu ve Kana (1967) yapısında ihmal edilebilecek kadar zayıf nonlineer özellikler barındıran kabukların (boruların) titreşimi için Lineer Kabuk Teorisi kullanımının uygun olacağını belirtmişlerdir.

Kana ve Craig (1968) yapmış oldukları deneyler sonunda Donell' in Nonlineer Yüzey-Kabuk Teorisinden faydalanarak hareket denklemlerinin eldesinde Galerkin metodunu kullanılması ile bulunmuş olan teorik hesaplamaların uygunluğunu göstermişlerdir.

Obraztsova (1976) ve Chiba ve diğerleri (1986) sert bir yüzey üzerine oturtulmuş ve içerisinde sıvı bulunan boruların nonlineer parametrik titreşimlerini zeminin harmonik salınım hareketi yapması durumu için incelemişlerdir.

Chiba (1986) ve diğerleri çalışmalarında sallama tablası üzerine yerleştirdikleri poliyester bir boruyu incelerken tablanın titreşim frekansını sürekli değiştirmişler ve hareket halindeki alanlarda oluşan parametrik rezonansın sisteme verilen titreşimin şiddetinin ve boru içerisindeki sıvının seviyesinin bir fonksiyonu olduğunu bulmuşlardır.

Sak (1995) yapmış olduğu yüksek lisans tezinde titreşimi incelerken tranfer matris yöntemini kullanmıştır. Bu yöntemde sistem sonlu sayıda elemana bölünerek her bir elemanın dinamik dengesinden hareketle sağında ve solunda oluşan çökme, dönme, eğilme ve kesme kuvvetleri bir matris aracılığıyla birbirine bağlanır.

Gorman (2000) ve diğ. hidrodinamik basınçtan ve akışkan hızından etkilenen boruların titreşimini incelerken buldukları nonlineer hareket denklemlerini, akışkanın süreklilik ve momentum korunum denklemlerinden türetmişlerlerdir. Buldukları 5 adet kısmi difransiyel denklemi çözmek için sonlu farklar metodunu kullanmışlardır.

Mısra (2001) ve diğ. bir ucunun tek noktasından, diğer ucundaysa kelepçe ile sabitlenmiş olan sıvı taşıyan bir boruyu incelerken dalga yayılımı metodu ve Fourier dönüşümü yaklaşımı olmak üzere iki metodu hareket analizine uygulayarak kıyaslamışlardır.

Biswas (2001) ve diğ. akışkan taşıyan boruları incelerken borunun yatay titreşimlerinin minimum olduğu en büyük akış hızı değerini bulabilmek amacıyla Pontrying minimum integral prensibinden yararlanmışlardır.

Zou (2005) ve diğ. akışkanın Poisson oranı, boru yarıçapının boru kalınlığına oranı, akışkan sıvı yoğunluğunun boru duvarının kütle yoğunluğuna oranı, başlangıç gerilimi ve sıvı akışkan basıncı gibi faktörlerin titreşime olan etkilerini incelerken ANSYS yazılımını sonlu elemanlar analizinde kullanmışlardır. Ayrıca çalışmalarında Ritz metodunu akışkan taşıyan kompozit doğalgaz borularının titreşim analizine uygulamışlardır.

Carneiro (2005) ve diğ. boruya dinamik analiz uygulayabilmek amacıyla sonlu boru elemanı için bir sayısal algoritma geliştirmişlerdir. Yapı dinamik karakteristiklerinin farklı çevre şartlarındaki harekete olan etkileri için daha önceden yapılmış deneylerin sonuçlarıyla, uyguladıkları tekniğin sonuçlarını karşılaştırarak özfrekans için bu değerlerin birbirine uygun olduğunu görmüşlerdir.

Modarres-Sadeghi (2005) ve diğ. içerisinde aksel akış olan ince silindirik boruları incelemişlerdir. Çalışmalarında simetri ekseni uzatılarak boyuna ve enine yer değiştirmeleri kapsayan iki adet nonlinear denklem tanımlanmıştır. Aksel akış anında gerçekleşen hareket için Hamilton prensibinden faydalanarak oluşturulan denklemlerin hesaplamalarını yanal yer değiştirmeler için birinci derece, aksel yer değiştirmeler için ise ikinci derece terime kadar yapmışlardır. Navier-Stokes denklemleri yarı akışkan, hidrostatik ve viskoz kuvvetleri için ayrı ayrı uygulanmıştır.

Amabili (2006) ve diğerleri yaptıkları çalışmada Donnell'in Yüzey-Kabuk Teorisine Galerkin çözüm metodunu uygulayarak elde ettiği başlangıç verileri için Uygun Ortogonal Ayırıklaştırma (POD) yaparak sistemin zaman serisi cevabını çıkardıktan sonra sistem davranışı inceleme yoluna gitmişlerdir.

Uğurlu ve Ergin (2007) akışkan taşıyan ya da aksel bir akım içerisine daldırılmış elastik yapıların dinamik analizi için, lineer bir hidroelastik çözüm metodu sunmuşlardır. Çalışmalarında yapısal sönüm ve dış kuvvetlerin yokluğunda elastik

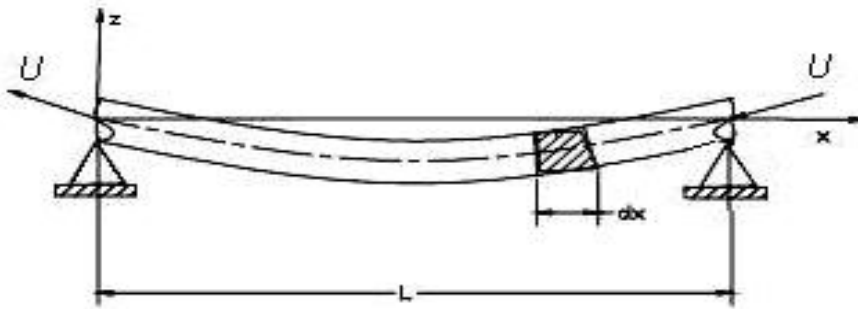
yapının dinamik karakteristiklerini belirleyerek, yapının akışkanla temastayken doğal modlarında hareket ettiği ve her bir modal formun yapının ıslak yüzeyinde bir basınç dağılımına neden olduğunu varsaymışlardır.

Elastik boruların titreşim davranışları üzerinde yapılan bir çok çalışmada görülebileceği gibi bilimadamları öncelikle çeşitli yüzey-kabuk teorilerinden faydalanarak sistemin hareket denklemlerini çıkarmışlardır. Daha sonraki adım bu hareket denklemlerini çözmektir. Ancak diferansiyel denklemlerin çoğu zaman analitik olarak çözümü çok zor olduğundan sayısal olarak çözülmesi amacıyla ya bazı kabuller yapılarak denklemler sadeleştirme yoluna gidilmiş ya da birkaç sayısal hesaplama tekniği ard arda uygulanarak çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır. Kimi araştırmacılar ise kendilerinden önce yapılan çalışmalarını iyileştirmeye yönelik bir ön çalışma yaptıktan sonra deneylerden buldukları sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Başlangıç ve sınır şartlarının değişmesiyle beraber hesaplamalar yeniden yapılmak zorunda olacaktır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

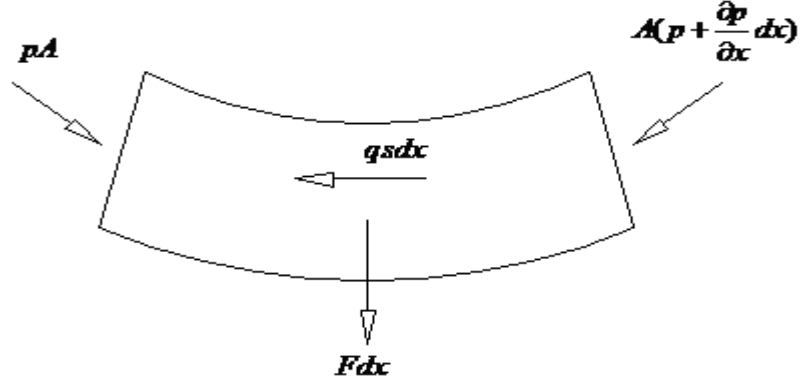
3.1. İKİ UCUNDAN BASİT MESNETLENMİŞ BİR BORUNUN HAREKET DENKLEMİ

Mekanik sistemlerin incelenebilmesi için öncelikle sistem üzerindeki kuvvetlerin tanımlanması gerekmektedir. Akışkan boru içerinden geçerken basınç kuvveti, sürtünme kuvveti ve oluşan diğer kuvvetler küçük aksel çökmelere neden olacaktır. Boru elastik olduğundan eski haline gelmeye çalışacaktır. Belirli bir zaman sonra borunun z eksenini boyunca yukarı aşağı titreştiği gözlemlenecektir. Basit mesnetli bir kiriş üzerine kuvvet uygulanıp bırakılırsa kiriş dikey eksen boyunca benzer bir titreşim hareketi yapar. İki ucundan basit mesnetlenmiş olan bir borunun basit eğilmeye maruz kaldığı göz önünde bulundurulsa Euler kiriş eğilme teorisi borunun titreşim hareketini tanımlayacak olan denklemin oluşturulmasında kullanılabilir. Oluşan titreşimin genliği uygulanan kuvvetle orantılıdır. Her iki ucundan basit mesnetlenmiş bir borunun hareket denklemini yazabilmek amacıyla şekil 3.1 de gösterilmiş L boyunda basit mesnetlenmiş bir boruyu göz önüne alalım. Şekilde akışkan boru içerisinde bütün olarak hareket etmektedir ve ortalama akış göz önüne alınmaktadır. Akışkan boru içerisinde U sabit hızıyla geçmektedir.

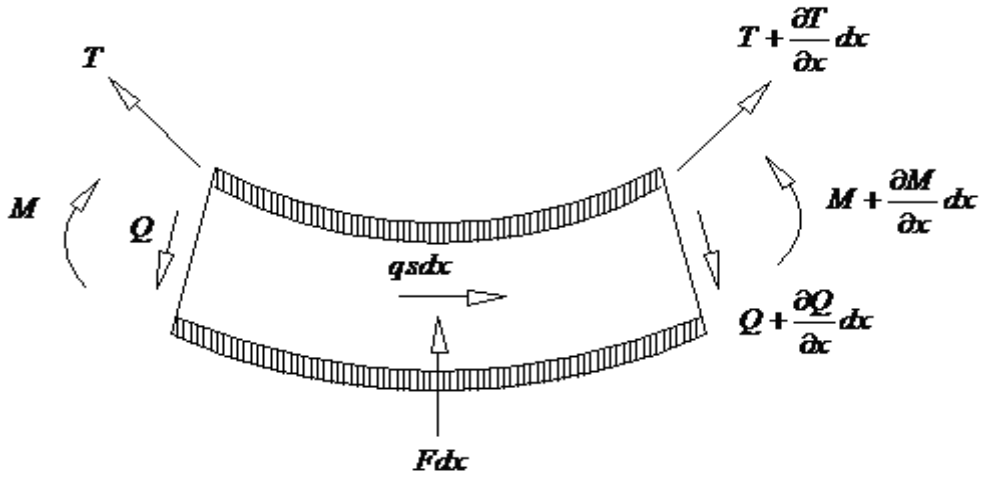


Şekil 3-1: Basit mesnetlenmiş boru için düşey yer değiştirme

Boru üzerinde dx gibi çok küçük bir uzunluğa sahip olan bir eleman alınmış olsun incelenen bu bölümdeki sıvı elemanında oluşan kuvvetler şekil 3.2 (a) ve boru elemanında oluşan kuvvetler ise şekil 3.2 (b) ile gösterilebilir. Şekilde birim uzunluk başına düşen kuvvet F ve birim uzunluk başına düşen kayma gerilmesi ise q ile gösterilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 3-2: Borudan alınan küçük bir eleman üzerindeki kuvvetler

Boru elemanına T aksenal çekme kuvveti, Q kesme kuvveti ve M eğilme momenti etkimektedir. E borunun elastisite modülünü, I borunun et kısmının alan ikinci momentini, m borunun birim boyunun kütesini, w çökmeyi, ρ akışkanın yoğunluğunu, s incelenen elemanın çevresini, A akışın gerçekleştiği akış alanını, U akışkanın sabit akış hızını göstermektedir. Akışkan elemanın x yönündeki ivmesi ve z yönündeki hızı sırasıyla

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2)$$

Burada w borunun z yönündeki şekil değiştirmesini (deformasyonunu) gösterir z yönündeki ivme denklemi

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \quad (3.3)$$

olur. Akışkan elemanı için x ve z yönlerindeki hareket denklemleri

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - qs = \rho A \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$F = -\rho A \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \quad (3.5)$$

Boru elemanı için ise

$$\frac{\partial T}{\partial x} + qs = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

Eğilme halindeki kesme kuvveti, Euler-Bernoulli kiriş teorisinde

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.8)$$

denklemini ile verilmektedir. Kesme kuvvetinin denklem (3.8) deki eşiti denklem (3.7) de yerine yazılarak F yalnız bırakılırsa

$$F = EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

Bu ifade denklem (3.5) te yazılıp son denklem düzenlenirse denklemin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3.10)$$

Bu denklem Weaver ve Paidoussis tarafından 1977 yılındaki makalelerinde verilmiştir. Yukarıda verilen diferansiyel denklemin dört sınır şartı ise her iki uçta çökme ve moment sıfır olmasıdır.

$$x = 0 \quad \text{da} \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$x = L \quad \text{de} \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.11)$$

Verilen diferansiyel denklemin özdeğer analizi ile çözümüne geçilmeden önce boyutsuzlaştırılması gerekmektedir. Denklemi boyutsuzlaştırmak için aşağıdaki boyutsuz uzunluk, zaman ve hız kullanılacaktır.

$$x^* = \frac{x}{L} \quad t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{\rho A}{E}}} \quad u = \frac{U}{L} \sqrt{\frac{\rho A}{E}} \quad (3.12)$$

Denklem (3.12) teki x yataydaki herhangi bir uzaklığı, t zamanı, u ise boyutsuz hızı göstermektedir. Burada x 'in birimi metre t 'nin birimi ise saniyedir. Yıldızlı büyüklükler boyutsuzdur. Boyutsuz parametrelerin kısmi türevleri göz önünde bulundurularak her terim E' ye bölünürse (3.10) denklemi aşağıdaki hale gelecektir.

$$\frac{I}{L^4} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} + \frac{m + \rho A}{\rho A} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2u \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial t^*} + u^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad (3.13)$$

(3.13) denklemindeki I, L, ρ, m, A, E sabit sayılar olduğundan denklemi boyutsuz hız olan u açısından incelemek gerekmektedir. Bu şekilde değişen u değerleri için bir diferansiyel denklem ailesinin çözümü bulunmalıdır.

$$\alpha = \frac{I}{L^4} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{m + \rho A}{\rho A} \quad \text{olmak üzere}$$

(3.13) denklemi aşağıdaki hale gelir

$$\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.14)$$

$\alpha = \beta = 1$ özel durumu için (3.14) ile verilen denklemin çözümünün yapılabilmesi için w yi konumun ve zamanın bir fonksiyonu olarak yazmak gerekmektedir.

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

Yukarıdaki ifadede $W(x) \neq 0$ ve ω terimi ise diferansiyel denklemin özdeğeridir.

$$W'''' + u^2 W'' + 2iu\omega W' - \omega^2 W = 0 \quad (3.16)$$

diferansiyel denklemin sınır şartları

$$x = 0 \quad \text{da}$$

$$W = \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

$x = L$ de

$$W = \frac{d^2W}{dx^2} = 0 \quad (3.17)$$

olmak üzere diferansiyel denklemin karakteristik denklem (3.18) deki gibidir.

$$p^4 + u^2 p^2 + 2iu\omega p - \omega^2 = 0 \quad (3.18)$$

(3.16) ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\bar{W}(x) = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x} + C_3 e^{p_3 x} + C_4 e^{p_4 x} \quad (3.19)$$

Genel çözüme sınır şartları uygulanırsa özel çözüm elde edilecektir.

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

$$C_1 e^{p_1} + C_2 e^{p_2} + C_3 e^{p_3} + C_4 e^{p_4} = 0$$

$$C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2 + C_4 p_4^2 = 0$$

$$C_1 p_1^2 e^{p_1} + C_2 p_2^2 e^{p_2} + C_3 p_3^2 e^{p_3} + C_4 p_4^2 e^{p_4} = 0 \quad (3.20)$$

(3.20) ile verilmiş olan homojen lineer denklem takımında C_1, C_2, C_3, C_4 keyfi sabitlerinin bulunabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının 0 olması gerekmektedir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{p_1} & e^{p_2} & e^{p_3} & e^{p_4} \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & p_4^2 \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

Bu determinanttaki karakteristik denklemin p_1, p_2, p_3, p_4 kökleri ω 'nın bir fonksiyonudur. Determinant açıldığında nonlineer bir denklem çıkacaktır ve bu denklemin kökleri olan ω lar sonsuz sayıdadır. Analitik çözüm imkansız olduğundan bu kökler ancak sayısal hesaplama metodlarıyla bulunabilir. Buradaki ω özdeğeri,

boyutsuz hız olan u 'nun aldığı değerlere göre değişen karakteristik denklem köklerine göre yeniden hesaplanmalıdır. Özdeğerler karmaşık sayı olarak bulunacaklardır.

Boruda sıvı akışının olmadığı durum için yani $u = 0$ olsun buna göre (3.18) denklemindeki ikinci ve üçüncü terimler sıfır olacaktır. (3.22) ile karakteristik denklem verilmiştir.

$$p^4 - \omega^2 = 0 \quad (3.22)$$

Bu denklemin dört kökü

$$p_1 = +\sqrt{\omega}$$

$$p_2 = -\sqrt{\omega}$$

$$p_3 = +i\sqrt{\omega}$$

$$p_4 = -i\sqrt{\omega} \quad (3.23)$$

(3.21) da yazılmış olan denkleme bu kökler yerleştirilir ise katsayılar matrisinin determinanı (3.24) denklemindeki gibi olacaktır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\omega}} & e^{-\sqrt{\omega}} & e^{i\sqrt{\omega}} & e^{-i\sqrt{\omega}} \\ \omega & \omega & -\omega & -\omega \\ \omega e^{\sqrt{\omega}} & \omega e^{-\sqrt{\omega}} & -\omega e^{i\sqrt{\omega}} & -\omega \sqrt{\omega} e^{-i\sqrt{\omega}} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

Bu determinant hesaplanırsa

$$2i \cdot \sin(\sqrt{\omega}) [1 + e^{2\sqrt{\omega}}] = 0 \quad (3.25)$$

n bir tamsayı olmak üzere (3.25) nolu denklemin kökü olan ω özdeğeri dolayısıyla

$$\omega = n^2 \pi^2$$

olarak bulunur. Bu denklemin pozitif olan ilk üç özdeğeri ise $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2$ dir.

Eğer $u \neq 0$ ise (3.18) deki denklemde ω 'ya bir değer atanarak, karakteristik denklemin kökleri bulunur ve (3.21) de verilen determinanta yazılır. Eğer determinant sıfır ise aranılan özdeğeri bulunmuştur. Hesaplama bilgisayar aracılığıyla kolayca yapılabilir.

Karakteristik denklem

$$p^4 + u^2 p^2 + 2iu\omega p - \omega^2 = 0$$

denklemin kökleri

$$p_1 = \frac{-iu + \sqrt{-u^2 + 4\omega}}{2}$$

$$p_2 = \frac{-iu - \sqrt{-u^2 + 4\omega}}{2}$$

$$p_3 = \frac{iu + \sqrt{-u^2 - 4\omega}}{2}$$

$$p_4 = \frac{iu - \sqrt{-u^2 - 4\omega}}{2} \quad (3.26)$$

Bu eşitliklerden yararlanarak u 'ya reel sayı ve ω 'ya karmaşık bir sayı atanarak buradan p_1, p_2, p_3, p_4 bulunarak determinanttaki yerlerine yazılır. Sonra determinantın değeri hesaplanır. Bu işleme determinant değeri sıfır olana kadar veya sıfıra çok yakın bir değere ulaşana kadar devam edilecektir. Döngü sonunda verilen diferansiyel denklemin özdeğeri hesaplanmış olacaktır. Özdeğerin negatif karmaşık sayı olduğu u boyutsuz hızı Çırpınma (Flutter) Hızı olarak adlandırılır. Boru bu hızın üzerinde titreşmeye başladığında sistemde bozulmalar olacaktır.

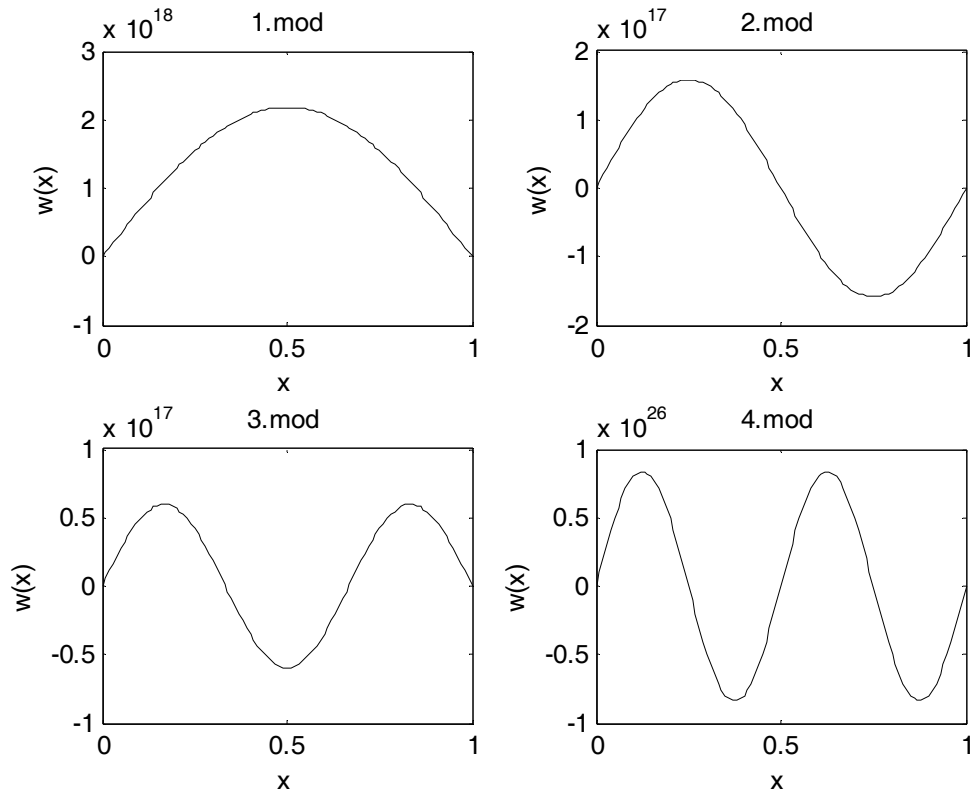
4. BULGULAR

İçerisinde sıvı akışı olmayan iki ucundan basit mesnetlenmiş olan borunun $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve içi boş borunun ilk dört özdeğeri $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2$ olarak bulunmuştur. Borunun mod biçimlerinin çizilebilmesi için bu özdeğerleri $p^4 - \omega^2 = 0$ denkleminde yazarak karakteristik denklemin dört kökü hesaplanmalıdır. Daha sonra (3.20) denklemindeki C_1, C_2, C_3, C_4 sabit sayıları hesaplanmalıdır.

$\omega = \pi^2$ olmak üzere karakteristik denklemin kökleri

$$p_1 = \pi \quad p_2 = -\pi \quad p_3 = i\pi \quad p_4 = -i\pi$$

olarak bulunacaktır. $C_1 = 1$ kabul ederek diğer keyfi sabitler bulunabilir. 1. mod biçimini çizmek için x 'in değerleri 0 ile 1 arasında 0,1 kadar arttırılarak bunlara karşılık gelen \bar{W} değerleri hesaplanmıştır. 2. mod biçimi için $\omega = 4\pi^2$, 3. mod biçimi için $\omega = 9\pi^2$, 4. mod biçimi için $\omega = 16\pi^2$ değerleri alınarak aynı hesap adımları ile karakteristik denklemlerin kökleri ve ardından keyfi sabitler bulunmalıdır. Yapılan hesaplamalar sonucunda içi boş borunun ilk dört mod biçimi şekil 4.1 de verilmiştir. Şekil 4.1 deki \bar{W} değerleri sadece gerçel sayılardır.



Şekil 4-1: İçi boş borunun mod biçimleri

$\alpha = 0,1$, $\beta = 1,1$ ve $u = 0,1$ durumu için karakteristik denklem aşağıdaki gibidir

$$0,1p^4 + 0,01p^2 + 0,2i\omega p - 1,1\omega^2 = 0$$

Denklem (3.21) deki determinant dikkate alınarak ilk iki özdeğer $\omega_1 = 2,9858$ ve $\omega_2 = 11,890$ olarak bulunur. (3.20) denklemine göre $C_1 = 1$ keyfi sabiti için diğer sabitler aşağıdaki gibi olur.

$$C_2 = -1,0980 + 0,0216i$$

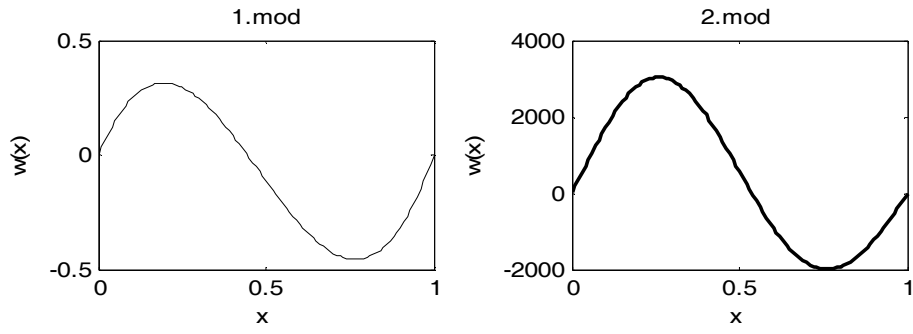
$$C_3 = 0,0457 + 0,0124i$$

$$C_4 = 0,0523 - 0,0340i$$

Elastik borunun farklı titreşim frekansları altında alacağı şekil denklem (3.19) daki fonksiyon ile tanımlanacaktır. Bulunan karakteristik denklem kökleri ve keyfi sabitlere göre bu fonksiyon aşağıdaki hale gelir.

$$\bar{W}(x) = e^{3,3020ix} + (-1,0980 + 0,0216i)e^{(-3,1425 - 0,1508i)x} + (0,0457 + 0,0124i)e^{(3,1425 - 0,1508i)x} \\ + (0,0523 - 0,0340i)e^{-3,0004ix}$$

Akışkanın 0,1 hızıyla boru içerisinde geçişi sırasında oluşacak ilk iki mod şekil 4.2 de verilmiştir.



Şekil 4-2: Akışkanın $u=0,1$ hızıyla geçişi sırasındaki mod biçimleri

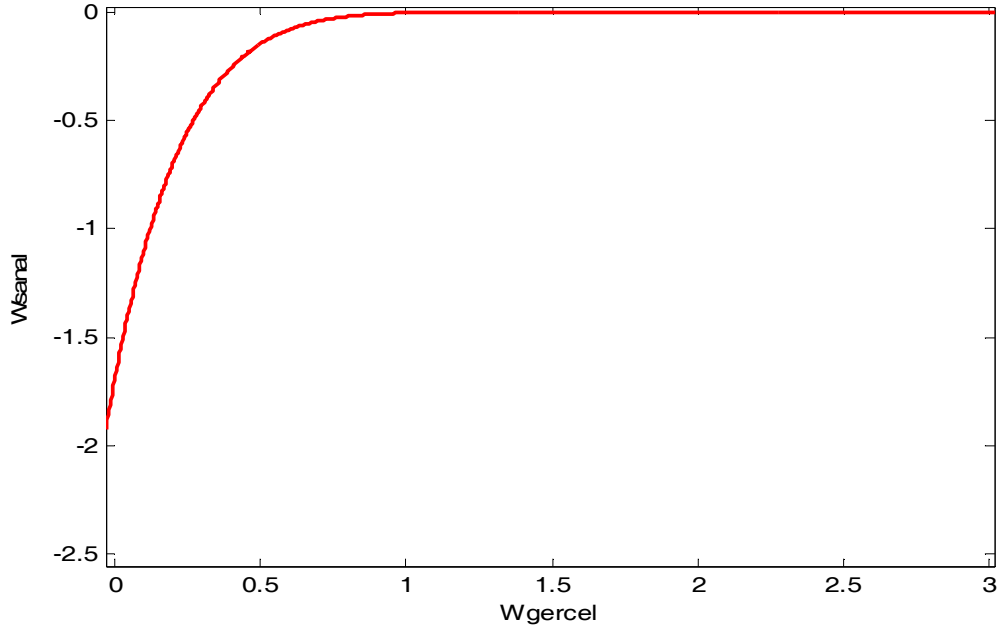
$\alpha = 0,1$, $\beta = 1,1$ olmak üzere boyutsuz hıza farklı değerler verilerek borunun ilk modu için özdeğerler hesaplanmıştır. Tablo 4.1 de bu hesaplamaların sonuçları tablo halinde verilmiştir.

Tablo 4-1 Boyutsuz hızın farklı değerleri için ilk özdeğerler

u	ω_1
0	2,9757
0,01	2,9756
0,1	2,9858
0,5	2,5130
0,6	2,2936
0,7	2,0160
0,8	1,6589
0,9	1,1634
1,0	-0,30902i
1,1	-1,2471i
1,2	-1,7250i
1,3	-2,0757i
1,4	-2,3411i
1,5	-2,5319i

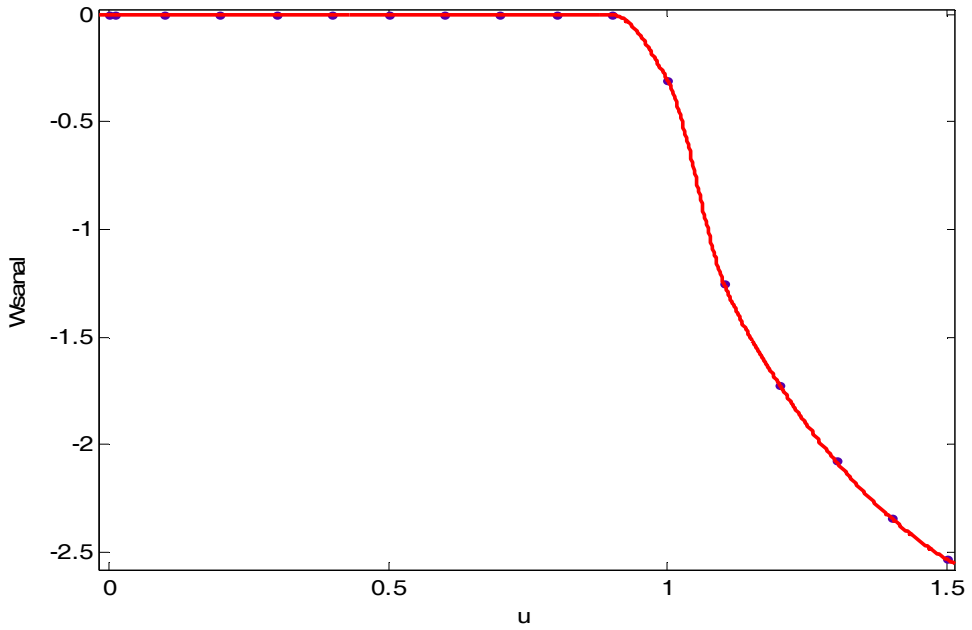
Bu tablodan faydalanarak şekil 4.3, şekil 4.4 ve şekil 4.5 çizilmiştir. Tablodan özdeğerin sanal kısmının negatif değer aldığı ilk hız değerinin 1 olduğu görülmektedir. Bu hız aranan Çırpınma (Flutter) hızıdır.

Şekil 4.3 de görüldüğü gibi gerçel kısmı sürekli azalmakta iken sanal kısım sıfırdır. Belirli bir hıza ulaşıldığında özdeğerin gerçel kısmı sıfır olurken sanal kısmı negatif olmaktadır.



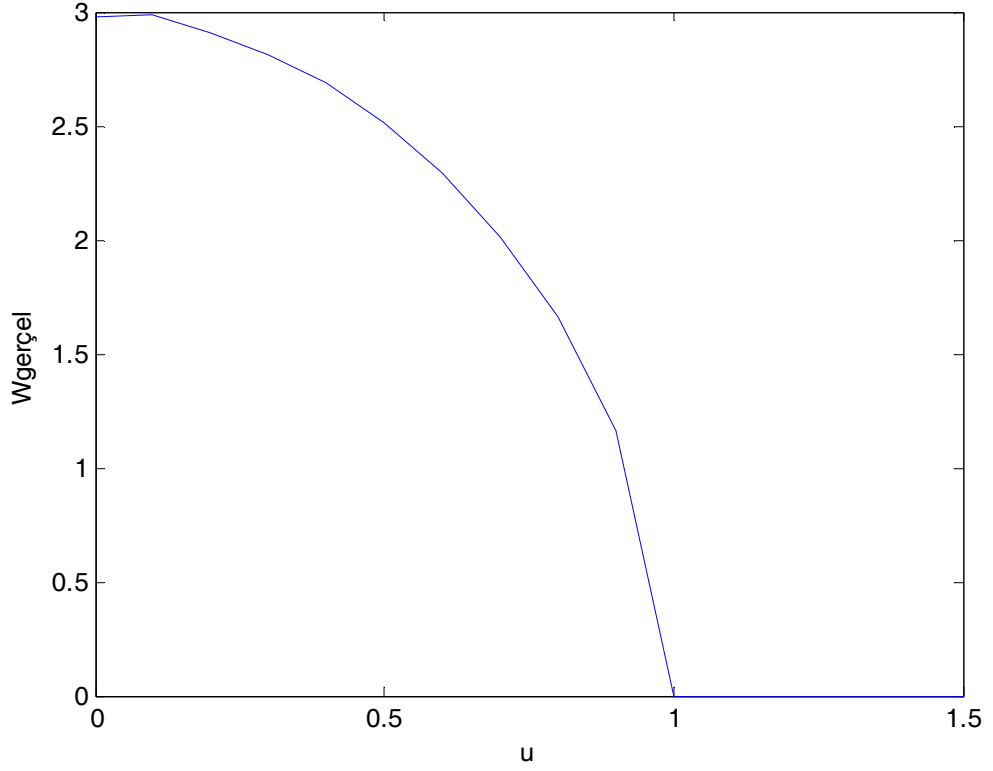
Şekil 4-3: Özdeğerlerin sanal kısımlarının gerçel kısımları ile değişimi

Şekil 4.4 hız ile özdeğerin sanal kısmının değişimini göstermektedir. Çırpınma (flutter) Hızına kadar özdeğerin sanal kısmı sıfır iken bu hızdan sonra negatif olduğu görülmektedir.



Şekil 4-4: Özdeğerlerin sanal kısmının hız ile değişimi

Şekil 4.5 de ise özdeğerin gerçel kısmının hızla nasıl değiştiği görülmektedir. Flutter hızına kadar gerçel kısım sürekli azalmaktadır. Bu hızdan sonra incelenen hız aralığında sıfır olduğu bulunmuştur.



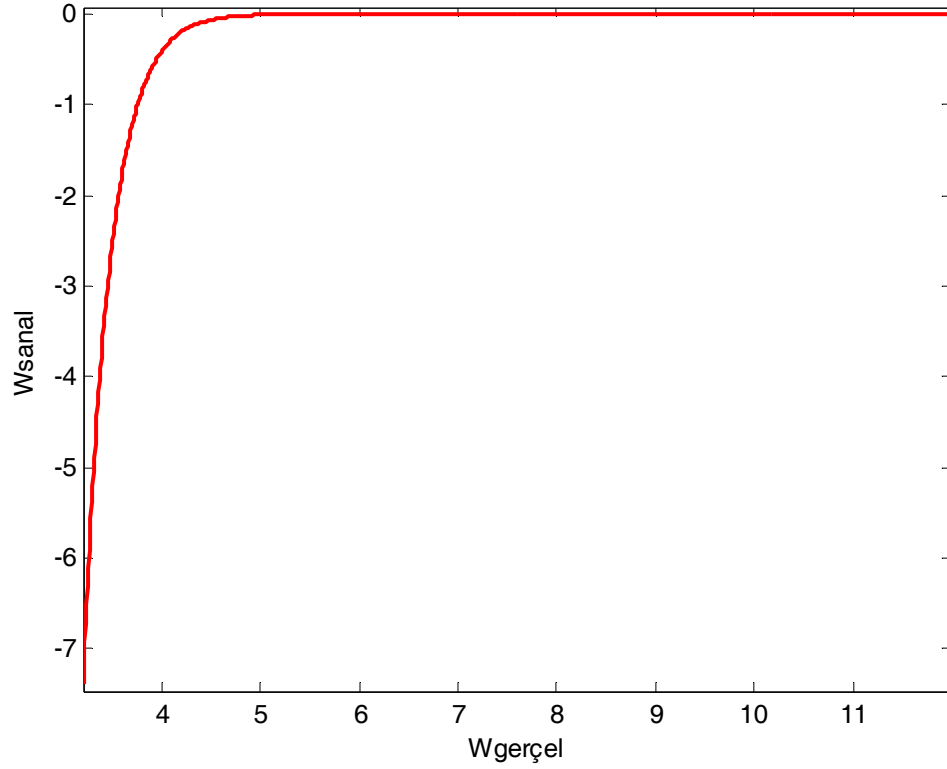
Şekil 4-5:Özdeğerlerin gerçel kısımlarının hız ile değişimi

Tablo 4.2 de ikinci mod için yapılan hesaplamalar verilmiştir. İkinci özdeğerin gerçel kısmı sürekli azalmaktadır. Sanal kısım ise mutlak değerce artmaktadır.

Tablo 4-2: Boyutsuz hızın farklı değerleri için ikinci özdeğerler

u	ω_2
0	11,9031
0,01	11,9030
0,1	11,8906
0,2	11,8528
0,3	11,7896
0,4	11,7008
0,5	11,5858
0,6	11,4440
0,7	11,2748
0,8	11,0770
0,9	10,8496
1,0	10,5908
1,5	8,72881
2,0	4,5606
2,1	3,5950
2,2	3,4146-3,0953i
2,3	3,4548-3,7307i
2,4	3,4453-4,1863i
2,5	3,3930-4,5107i
2,6	3,2921-4,7144i

Bu tablodan faydalanarak şekil 4.6 ile verilen grafik elde edilmiştir.



Şekil 4-6: İkinci mod için özdeğerin gerçel kısımlarının sanal kısımları ile değişimi

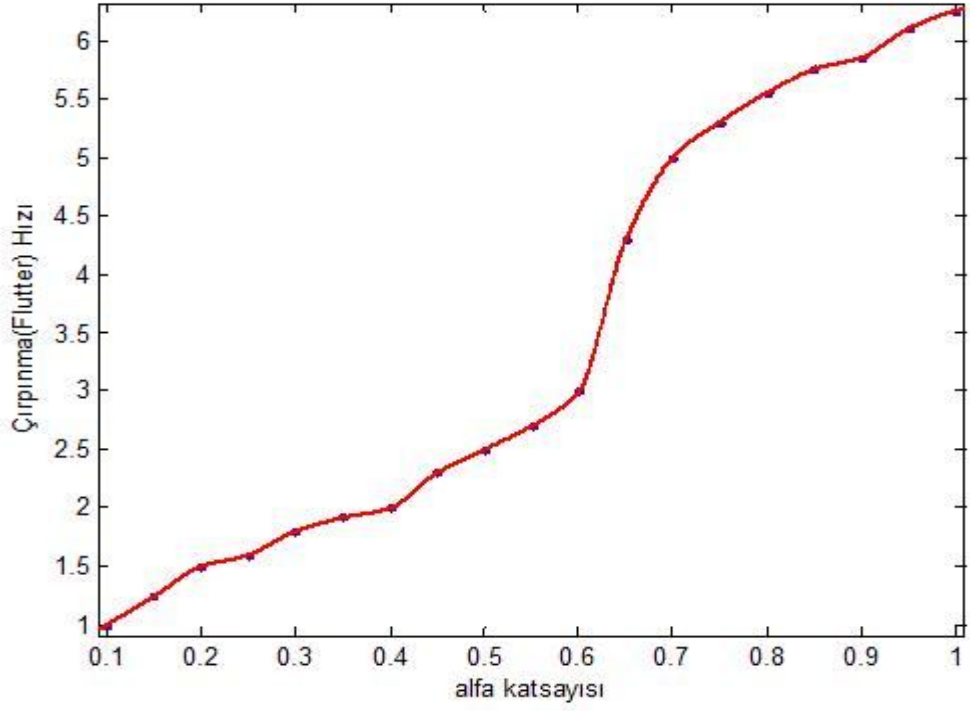
Karakteristik denklemin katsayılarından α ve β 'nın değişimiyle flutter hızının nasıl değiştiği hesaplanmıştır. Aşağıdaki şekil 4.7 ve 4.8 bu değişimi göstermektedir. Her iki katsayı ile flutter hızının arttığı görülmektedir. Tablo 4.3 ve 4.4 te bu hesaplamalar görülmektedir. Tablo 4.3 için $\beta = 1,1$ iken α ya farklı değerler verilerek çarpınma hızı hesaplanmıştır. Tablo 4.4 te ise $\alpha = 0,1$ iken β değiştirilerek hesaplamalar yapılmıştır.

Tablo 4-3:Farklı alfa katsayıları için çirpınma hızları

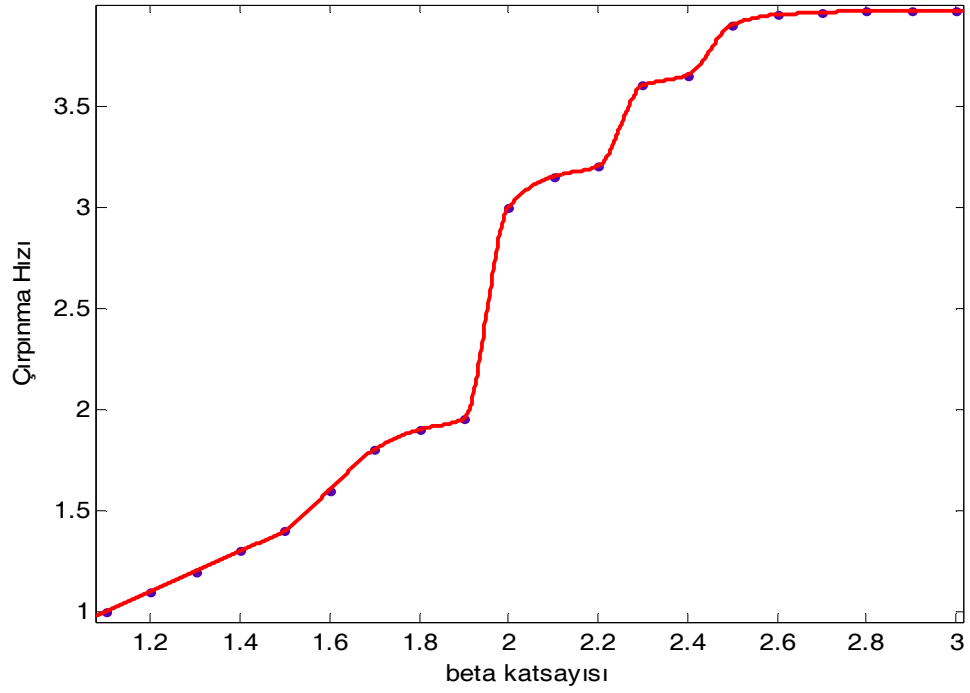
α	Çirpınma (Flutter) Hızı
0,1	1,00
0,15	1,24
0,20	1,50
0,25	1,60
0,30	1,80
0,35	1,92
0,40	2,00
0,45	2,30
0,50	2,50
0,55	2,70
0,60	3,00
0,65	4,30
0,70	5,00
0,75	5,30
0,80	5,55
0,85	5,75
0,9	5,85
0,95	6,10
1,00	6,25

Tablo 4-4:Farklı beta katsayıları için çirpınma hızları

β	Çirpınma (Flutter) Hızı
1,1	1,00
1,2	1,10
1,3	1,20
1,4	1,30
1,5	1,40
1,6	1,60
1,7	1,80
1,8	1,90
1,9	1,95
2,0	3,00
2,1	3,15
2,2	3,20
2,3	3,60
2,4	3,65
2,5	3,90
2,6	3,95
2,7	3,96
2,8	3,97



Şekil 4-7:Çırpınma hızının alfa katsayısı ile değişimi



Şekil 4-8:Çırpınma hızının beta katsayısı ile değişimi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Boru titreşimleri ile ilgili yapılacak olan çalışmalarda dikkat edilmesi gereken hususlardan birisi de sınır şartlarıdır. Tez çalışmasında iki ucu serbest boru göz önüne alınmıştır.

Hareket denklemini veren diferansiyel denklemin boyutsuzlaştırılmış olması, en genel haliyle hareketin doğasının anlaşılmasına yardımcı olmuştur. Boyutsuzlaştırma sonunda elde edilen katsayılardan $\beta = 1$ olması borunun kütlelerinin sıfır olduğu durumdur. Fiziksel olarak bu mümkün değildir, ancak sistemin davranışı hakkında bir fikir verebilmesi açısından bu durumun matematiksel olarak incelenmesi uygun görülmüştür.

Katsayılar matrisinin determinantı nonlinear bir denklemdir ve bunun kökleri olan ω özdeğerleri sonsuz sayıdadır. Bu özdeğerleri hesaplayabilmek amacıyla özdeğerin reel ve sanal kısımları belirli aralıklarda değiştirilerek determinantın reel ve sanal kısımlarının sıfıra oldukça yakın olduğu özdeğer problemin o sınır şartları altındaki özdeğer olarak kabul edilmiştir. Özdeğerlerin hesabından sonra mod biçimleri çizilmiştir.

Borunun hareketini tanımlayan diferansiyel denklemin içerisinde yer alan $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ terimi borunun çökmesini zamana ve konuma bağlı olarak göstermektedir. Çökmeyi tanımlayan bu fonksiyondaki $e^{i\omega t}$ terimi için özdeğer olan ω sadece reel sayı ise boru belirli bir genlikte titreşir. Eğer özdeğer pozitif bir karmaşık sayı ise boru zamanla sönümlenen bir titreşim yapacaktır. Ancak ω nın negatif bir sanal sayı olması durumunda borunun titreşim genliği zamanla sürekli olarak artacaktır. Boru için emniyetli bir akış hızı tanımlanabilir. Bu hız özdeğerin sanal kısmının negatif olduğu ilk hız olan çırpınma (flutter) hızıdır.

Boyutsuzlaştırma yapılırken $u = \frac{U}{L} \sqrt{\frac{\rho A}{E}}$ eşitliği kullanılmıştır. Hesaplamalar sonucunda

Çırpınma hızı boyutsuz olarak bulunmuştur. Borunun Elastisite modu, boyu, akışkanın

yoğunluğu ve akışın gerçekleştiği kesit alanı bu formülde yerine konarak gerçek Çırpınma hızı hesaplanabilir.

Şekil 4.7 de çırpınma hızının alfa katsayısı arttıkça büyüdüğü görülmektedir. $\alpha = \frac{I}{L^4}$ olduğuna göre boru boyuna sabit iki borudan et kısmının alan atalet ikinci momenti daha büyük olan boru ile daha yüksek hızlarda akışkan taşınabileceği anlaşılmaktadır.

$\beta = \frac{m + \rho A}{\rho A}$ olmak üzere şekil 4.8 de çırpınma hızının β katsayısı arttıkça büyüdüğü görülmektedir. Aynı akışkanı taşıyan borulardan birim boyunun kütlesi daha büyük olan boru daha emniyetlidir.

Bundan sonraki yapılacak çalışmalarda incelenecek olan borunun malzeme özelliklerine ve akışkana bağlı olarak α ve β katsayıları hesaplanarak, karakteristik denklem bulunmalı ve denklemin kökleri çözülerek mod biçimleri çizilmelidir.

KAYNAKLAR

ABRAMSON, H.N., KANA, D.D., 1966, Some Recent Research on the Vibration of Elastic Shells Containing Liquids, *Proc of Symp on Theory of Shells*, Univ of Houston, TX, 253-310.

AMABILI, M., SARKAR, A., PAIDOUSSIS, M.P., 2006, Chaotic Vibrations of Circular Cylindrical Shells: Galerkin Versus Reduced-Order Models via the Proper Orthogonal Decomposition Method, *Journal of Sound and Vibration*, 290, 736-762.

AMABILI, M., PAIDOUSSIS, M.P., 2003, Review of Studies on Geometrically Nonlinear Vibrations and Dynamics of Circular Cylindrical Shells and Panels with and without Fluid-Structure Interaction, *Applied Mechanical Review*, 50(4), 349-381.

BISWAS, S.K., AHMED, N.U., 2001, Optimal Control of Flow-Induced Vibration of Pipeline, *Dynamics and Control*, 11, 187-201.

CHIBA, M., TANI, J., HASHIMOTO, H., SUDO, S., 1986, Dynamic Stability of Liquid-Filled Cylindrical Shells under Horizontal Excitation, Part I: Experiment, *J. Sound Vib.*, 104, 301-319.

CHU, W.H., KANA, D.D., 1967, A Theory for Nonlinear Transverse Vibration of a Partially Filled Elastic Tank, *AIAA J.*, 5, 1828-1835.

CARNEIRO, J.O., de MELO, F.J., RODRIGUES, J.F.D., LOPES, H., TEIXERA, V., 2005, The Modal Analysis of a Pipe Elbow with Realistic Boundary Conditions, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82, 593-601.

DOWELL, E.H., CRAWLEY, E.F., CURTISS Jr., H.C., PETERS, D.A., SCANLAN, R.H., SISTO, F., 1995, *A Modern Course in Aeroelasticity*, Kluwer Academic Publishers, 3rd ed., Dordrecht, Netherlands, 0-7923-2789-6

GORMAN, D.G., REESE, J.M., ZANG, Y.L., 2000, Vibration of a Flexible Pipe Conveying Viscous Pulsating Fluid Flow, *Journal of Sound and Vibration*, 230(2), 379-392.

KANA, D.D., CRAIG, Jr.R.R., 1968, Parametric Oscillations of a Longitudinally Excited Cylindrical Shell Containing Liquid, *J. Spacecr. Rockets*, 5, 13-21.

MISRA, A.K., WONG, S.S.T., PAIDOUSSIS, M.P., 2001, Dynamics and Stability of Pinned-Clamped and Clamped-Pinned Cylindrical Shells Conveying Fluid, *Journal of Fluid and Structures*, 15, 1153-1166.

MODARRES-SADEGHI, Y., PAIDOUSSIS, M.P., SEMLER, C., 2005, A Nonlinear Model for an Extensible Slender Flexible Cylinder Subject to Axial Flow, *Journal of Fluid and Structures*, 21, 609-627.

MUSHTARI, K.H.M., GALIMOV, K.Z., 1957, Non-Linear Theory of Thin Elastic Shells, *Academy of Sciences (Nauka) Kazan' (English Version, NASA-TT-F62 in 1962)*

OBRAZTSOVA, E.I., 1976, Nonlinear Parametric Oscillations of Cylindrical Shell with Liquid under Longitudinal Excitation, *Soviet Aeronautics*, 19 (3), 63-67.

SAK, E., 1995, *İçinden Akışkan Geçen Borulardaki Titreşim Hareketinin Kombine Sonlu Elemanlar –Transfer Matrisi Yöntemiyle İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü.

SHKENEV, S., 1964, The Dynamics of an Elastic and Elastoplastic Shell Filled with an Ideal Liquid, *Proc of IV All-Union Conf. on Theory of Shells and Plates*, Nauka, Moscow, 997-1007.

UĞURLU, B., ERGİN, A., 2007, Üniform Eksenel Akım Etkisindeki Elastik Yapıların Dinamik Analizi için bir Sınır Eleman Metodu, *İ.T.Ü Mühendislik Dergisi*, 6(1), 25-36.

Von KARMAN, T., TSIEN, H.S., 1941, The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression, *Journal of Aeronaut. Sci.*, 8, 303-312.

WEAVER, D.S., PAIDOUSSIS, M.P., 1977, On Collapse and Flutter Phenomena in Thin Tubes Conveying Fluid, *Journal of Sound and Vibration*, 50, 117-132

ZOU, G.P., CHERAGHI, N., TAHERİ, F., 2005, Fluid-Induced Vibration of Composite Natural Gas Pipelines, *International Journal of Solids and Structures*, 42, 1253-126

ÖZGEÇMİŞ

Birkan Durak 1978 yılında İstanbul'da doğdu. Lise eğitimini 1996 yılında İskenderun Lisesinde bitirdikten sonra 1997 yılında İstanbul Üniversitesi Makine Mühendisliği bölümünde Lisans eğitime başladı. Lisans eğitiminin ardından 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitime başlamıştır. 2005 yılından itibaren İstanbul Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulunda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.