İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOKTORA TEZİ**

# POLİHEDRAL DAHİL ETMELERDE OPTİMALLİK İÇİN GEREK VE YETER KOŞULLAR

**Özkan DEĞER**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman**
**Prof.Dr. Bedriye M. ZEREN**

**İkinci Danışman**
**Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV**

**Mayıs, 2009**

**İSTANBUL**

Bu çalışma 28.05.2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

| | | |
|---|---|---|
| Prof.Dr. Bedriye M. ZEREN<br>Danışman<br>İstanbul Üniversitesi<br>Fen Fakültesi | Prof.Dr. Müfit GİRESUNLU<br>İstanbul Üniversitesi<br>Fen Fakültesi | Prof.Dr. Abbas AZİMLİ<br>Y.T.Ü.<br>Fen- Edebiyat Fakültesi |

| | |
|---|---|
| Prof.Dr. Nazım SADIK<br>İstanbul Üniversitesi<br>Fen Fakültesi | Prof.Dr Hüseyin ÇAKALLI<br>Maltepe Üniversitesi<br>Fen-Edebiyat Fakültesi |

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 1435 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

# ÖNSÖZ

Doktora problemimi ortaya koyan, tez çalışmamı bilimsel olarak yönlendiren, tanıştığımız günden beri çok sevdiği resim çalışmalarına bile vakit ayıramayacak bir özveri ile devamlı surette bilimsel araştırma ve kitap çalışmalarıyla meşgul olan yüksek lisans tezimin de danışmanı değerli hocam Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV'a tüm katkı ve desteğinden ötürü çok teşekkür ederim.

2006 yılında doktora yeterlik aşamasında olduğum sırada İstanbul Üniversitesi'nden ayrılmak zorunda kalan hocamın ardından, sıkıntılı günlerimde danışmanlığımı üstlenen, idari olarak tüm kolaylıkları sağlayan ve tecrübeleri ile yol gösteren sayın Prof.Dr. Bedriye M. ZEREN ile tez izleme komitesinin sayın üyeleri Prof.Dr. Müfit GİRESUNLU ve Prof.Dr. Abbas AZİMLİ'ye değerli destek ve katkılarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Kendisine danıştığım hemen her konuda beni yanıtsız bırakmayan sayın Prof.Dr. Nazım SADIK'a ve genç araştırmacılara iyi bir rol model olduğunu düşündüğüm sayın Prof.Dr. Serap ÖZTOP'a moral ve motivasyonumu artırdıkları için ayrı ayrı teşekkür ederim. Mayıs 2005'te Bakü'de birincisi düzenlenen "Ekonomik Uygulamarıyla Kontrol ve Optimizasyon" adlı uluslararası konferansta kendisiyle tanışmaktan büyük onur duyduğum ve o günden beri elektronik posta yoluyla kendisine yönelttiğim tüm sorularıma ayrıntılarıyla ve anında yanıt veren lineer olmayan analizinin kurucularından sayın Prof. Boris MORDUKHOVICH'e ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak, optimizasyon kelimesinin anlamını bilmeyen fakat üç erkek çocuğuna üniversite bitirtecek biçimde bir memur maaşını optimum kullanabilen canım annem Zeycan DEĞER ve doktora çalışmam sırasında vefat eden canım babam Turgut DEĞER'e, kardeşlerim Gürkan ve Serkan'a, her zaman tüm sıkıntılarımı paylaşan, her konuda bana sonsuz destek ve cesaret veren sevgili eşim Müge DEĞER'e ve neşe kaynağım sevgili kızım Özge DEĞER'e çok teşekkür ederim.

Özkan DEĞER
İstanbul, Mayıs 2009.

# İÇİNDEKİLER

# SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{co\,M}$ | : $M$ kümesinin konveks zarfı |
| $\boldsymbol{int(M)}$ | : $M$ kümesinin iç noktaları kümesi |
| $\boldsymbol{ri(M)}$ | : $M$ kümesinin izafi iç noktaları kümesi |
| $\boldsymbol{Lin(M)}$ | : $x_0 \in M$ için $M - x_0$ kümesini kapsayan tüm alt uzayların kesişim kümesi |
| $\boldsymbol{conM}$ | : $x_1 \in M, \lambda_1 \geqslant 0$ olmak üzere$x = \lambda_1 x_1$ gerçekleyen $x$ yönlerinin kümesi |
| $\boldsymbol{Aff(M)}$ | : $M$ kümesinin afin zarfı |
| $\boldsymbol{\overline{M}}$ | : $M$ kümesinin kapanışı |
| $\boldsymbol{W_M(\cdot)}$ | : $M$ kümesinin destek fonksiyonu |
| $\langle\cdot,\cdot\rangle$ | : İç çarpım |
| $\boldsymbol{f^*}$ | : $f$ fonksiyonunun dual fonksiyonu |
| $\boldsymbol{\delta_M(x)}$ | : $M$ konveks kümesinin indikatör fonksiyonu |
| $\boldsymbol{dom\,f}$ | : $f$ fonksiyonunun tanım kümesi |
| $\boldsymbol{epif}$ | : $f$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi |
| $\boldsymbol{\partial f(x_0)}$ | : $f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki subdiferansiyeli |
| $\boldsymbol{f'(x,p)}$ | : $f$ fonksiyonunun $x$ noktasında $p$ yönündeki türevi |
| $\boldsymbol{K^*}$ | : $K$ konisinin dual konisi |
| $\boldsymbol{a}$ | : Küme-değerli dönüşüm |
| $\boldsymbol{dom\,a}$ | : $a$ küme-değerli dönüşümünün tanım kümesi |
| $\boldsymbol{gph\,a}$ | : $a$ dönüşümünün grafiği |
| $\boldsymbol{W_a(x,\cdot)}$ | : $a(x)$ kümesinin negatif işaretli destek fonksiyonu |
| $\boldsymbol{\Omega_a(x^*,\cdot)}$ | : $gf\,a$ kümesinin negatif işaretli destek fonksiyonu |
| $\boldsymbol{a(x;y^*)}$ | : $\langle y, y^*\rangle$ iç çarpımına minimum değer veren $y \in a(x)$ noktalar kümesi |
| $\boldsymbol{a^*(y^*;z)}$ | : $z$ noktasındaki yerel dual dönüşüm |
| $\boldsymbol{K_a(z)}$ | : $z \in gf\,a$ noktasındaki teğet yönler konisi |
| $\boldsymbol{\partial_x W_a(x,y^*)}$ | : $W_a(x,y^*)$ fonksiyonunun $x$'e göre subdiferansiyeli |
| $\blacksquare$ | : İspat bitmiştir |

# ÖZET


**Polihedral Dahil Etmelerde Optimallik İçin Gerek ve Yeter Koşullar**

Bu tez çalışmasında, yerel dual dönüşüm kavramı kullanılarak iki farklı konveks optimizasyon probleminin çözümü için optimallik koşulları belirlenmiştir. Özel olarak, ele alınan problemlerde kümeler ve içermeler polihedraldir. Üstelik problemlerden biri diskret zamanlı polihedral diskret içermeli bir sistem, Mayer tipindeki diğer problem ise sürekli zamanlı polihedral diferansiyel içermeli bir sistem yardımıyla verilmektedir. Her iki problemde de polihedral içermeler küme-değerli dönüşümler yardımıyla tanımlanmışlardır. Son olarak, birden fazla küme-değerli dönüşüm ile tanımlanmış diskret içermeli bir konveks optimizasyon probleminin optimallik koşullarını belirlemek için onların bileşkeleri kullanılarak yeni bir yöntem verilmektedir.

# SUMMARY


**Necessary and Sufficient Conditions of Optimality for Polyhedral Inclusions**

In this work, using by the concept of local dual mapping, the optimality conditions for solution of two different convex optimization problems are determined. Specifically, the sets and the inclusions in the considered problems are polyhedral. Furthermore, one of the problems is given by a discrete inclusions system with discrete time and the other one which Mayer type is given by a differential inclusions system with continuous time. The polyhedral inclusions in each problem are defined by a set-valued mapping. Finally, it is given a new method to determine the optimality conditions for convex optimization problem with discrete inclusions described by more than one set-valued mapping using by their composition.

# 1. GİRİŞ

Aşağıda ekstremal problemlerin kısa bir tarihçesi, sonra bu tür problemlerin tiplerinin belirlendiği genel bir sınıflandırma bilgisi, daha sonra da bu tez çalışmasına konu olan problemlerin tanıtımı ve diğer bölümlerin içeriği hakkında bilgiler verilmiştir.

Birden fazla seçeneği karşısında bulan bir insan doğal olarak o seçenekler arasından optimal olanını seçer. Türkçemize de yerleşmiş ve kökeni Latince *optimus* olan *optimal* kelimesi *en iyi* anlamına gelmektedir. Optimal olanı seçmek için bir minimum ya da maksimum bulma probleminin yani bir takım niceliklerin en küçük veya en büyük değerlerinin bulunması probleminin çözülmesi gerekir. Minimum ya da maksimum kelimeleri her ikisine de karşılık olarak *ekstremum* kelimesi ile ifade edilir. Bu nedenle minimum ya da maksimum bulma problemlerine *ekstremal problemler* denir. Ekstremal problemlerin incelenmesi ve çözüm metodlarının araştırılması, matematik analizin adına *optimizasyon problemleri* denilen özel bir kolunu oluşturmaktadır.

Tarihteki ilk optimizasyon problemi, M.Ö. 825 yılında Fenikeli bir prenses olan Dido ile Hiarbas adlı bir kabile şefi arasında geçen "bir sığır derisi ile çevrelenebilecek en büyük alanlı toprak parçasının bulunması" olayına benzerliği nedeniyle Dido problemi olarak adlandırılan, kısaca; bir doğru ile sınırlandırılmış bir yarı düzlemde uçları o doğru üzerinde olan eşit uzunluktaki tüm eğriler arasından eğri ile doğru arasında maksimum alanı oluşturan eğrinin araştırılması problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Daha sonra geometride, Öklid'in bir üçgen içine çizilebilecek en büyük alanlı paralelkenarın bulunması, Steiner'in düzlemde verilen üç noktaya uzaklıkları toplamı en küçük olan noktanın bulunması gibi problemlerine rastlanmaktadır. 1662 yılında ünlü Fransız matematikçi Fermat, optikte ışığın yayılması problemine açıklık getiren, bir ışık ışınının bir noktadan diğer bir noktaya giderken minimal zamanda gideceği yörüngeyi seçmesi olarak ifade edilebilecek varyasyon prensibini ortaya koydu. Fermat'ın bu varyasyon prensibinden sonra mekanik ve fizikte daha bir çok varyasyon prensibi ortaya çıktı. Artık yavaş yavaş bilim adamlarının çoğu doğanın hareket ederken bir ekstremal problemin çözümü olan hareketleri seçtiğine inanmaya başladılar. Zira bu durumu, Euler "Dünyada meydana gelen her şey minimum ya da maksimumu bulma amaçlı bir olay olarak ele alınabilir" ve sayılar teorisinde çalışmalar yapan Alman Carl Ludwig Siegel ise esprili bir şekilde "Leibniz'e göre, bizim dünyamız mümkün olan tüm dünyalar içinde en iyisidir, bu nedenle doğa kanunları ekstremal prensiplerle ifade edilebilir" sözleri ile dile getirmişlerdir. 1696 yılında Johann Bernoulli, adına *brachistrochrone problemi* denilen, düşey bir düzlemde verilen iki nokta arasında bir cismin yerçekimi nedeniyle yapacağı yer değiştirmenin minimum zamanda olmasını sağlayacak yörüngenin bulunması problemini ortaya koydu ve çözdü. Brachistrochrone problemine kadar, tek değişkenli bir fonksiyonun ekstremumu bulunmaya çalışılırken bu problemden sonra daha fazla değişkenli fonksiyonların ekstremumlarının bulunması problemleri ile uğraşılmaya başlandı, 18. yüzyıldan itibaren matematiğin bu tip problemlerle çalışılan koluna *varyasyonlar analizi* denilmektedir [1, 2, 3, 4]. Diğer yandan, belli bir ürün belli yerlerdeki depolardan belli yerlerdeki marketlere hangi miktarlarda dağıtılmalıdır ki nakliye maliyetleri minimum olsun sorusuna cevap arayan *nakliye problemi*, verilen çeşitli ürünlerin birim maliyetleri ve bu ürünlerdeki mineral içeriklerinin bilinmesi koşulu ile gerekli tüketimi minimum maliyetli yapacak problemin çözümünü arayan *diyet problemi* gibi problemler ekonomide sık sık karşılaşılan problemlerden olup teorisi 1940'lardan sonra gelişmeye başlayan matematiğin *lineer programlama* dalına aittir [5, 6, 7]. Düz bir yolda sürtünmesiz bir şekilde hareket eden, belirli sınırlar içerisinde değiştirilebilen bir dış güç tarafından kontrol edilen, hareket halindeki bir arabanın belli bir yerde en kısa zamanda durdurulması problemi *en basit zaman-optimal problemi* olarak adlandırılır. 1950'lerden sonra, bunun gibi bir takım kontrol edilebilir güçleri bünyesinde barındıran ekstremal problemlerin çözümleri ile uğraşan ve adına *optimal kontrol teorisi* denilen bir teori gelişmeye başlanmıştır [8, 9]. Buraya kadar verilen örneklerden de anlaşıldığı üzere ekstremal problemler hem doğal bilimlerden, ekonomiden ve teknolojiden hem de matematiğin kendi ihtiyaçlarından ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle ekstremal problemler teorisi ve onun pratik hali olan optimizasyon teorisi günümüzde oldukça geniş bir popülarite kazanmıştır.

Her ekstremal problemin çözümünün illa ki analitik olarak yapılması gerekmez, örneğin Euler'in yukarıda bahsedilen bir üçgen içine çizilebilecek en büyük alanlı paralelkenarın bulunması problemi geometrik olarak çözülebilir. Ancak analitik yaklaşımın verdiği avantajlardan yararlanmak için problem betimsel dilden matematik analizin biçimsel diline dönüştürülmelidir. Tipik bir ekstremal problem iki bileşenden meydana gelir, biri bir $X$ kümesi üzerinde tanımlı bir $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyoneli diğeri de kısıt denilen bir $C \subseteq X$ alt kümesidir. Biçimsel olarak "$f$ fonksiyonelinin $C$ üzerinde ekstremumunun bulunması" şeklinde ifade edilen bu problem için aşağıdaki standart notasyon kullanılır:

$$f(x) \to \inf\,[\sup], \quad x \in C. \tag{1.1}$$

Eğer $C = X$ ise o zaman (1.1) problemine *kısıtsız problem* denir. Her $x \in C$ için $f(x) \geqslant f(\widetilde{x})$ $[f(x) \leqslant f(\widetilde{x})]$ gerçekleyen bir $\widetilde{x} \in C$ noktasına (1.1) probleminin bir çözümü denir ve ayrıca $f$ fonksiyoneli bu noktada bir mutlak minimuma [mutlak maksimuma] sahiptir denir.

Ekstremal problemler dört ana sınıf altında incelenirler:

*I. Eşitlik ve Eşitsizlik Kısıtları ile Verilen Düzgün Problemler:* Bu sınıftaki $X$ uzayı genellikle bir normlu uzay, $C$ kısıtı ise bir $F(x) = 0$ eşitliği ve sonlu sayıdaki $f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, .., m$ eşitsizliği ile verilmiştir, burada $Y$ diğer bir normlu uzay olmak üzere $F : X \to Y$ şeklinde bir dönüşümdür. $f_i,\ i = 1, .., m$ fonksiyonları ve $F$ dönüşümü bazı düzgünlük özelliklerine sahip olmak üzere

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0,\ \ i = 1, .., m$$

şeklindeki problemler bu sınıfa girer.

*II. Klasik Varyasyonlar Hesabı:* Bu sınıfta $X$, sürekli diferansiyellenebilir $n$-boyutlu $x(\cdot) = (x_1(\cdot), .., x_n(\cdot))$ vektör fonksiyonlarının uzayı olan $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ Banach uzayıdır. Bu sınıfa ait problemlerdeki fonksiyoneller genellikle üç tipte olurlar:

$$\textit{integral fonksiyonelleri} \qquad I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})dt, \tag{1.2}$$

$$\textit{son nokta fonksiyonelleri} \qquad \varphi(x(\cdot)) = \ell(x(t_0), x(t_1)), \tag{1.3}$$

$$\textit{Bolza fonksiyonelleri} \qquad B(x(\cdot)) = I(x(\cdot)) + \varphi(x(\cdot)). \tag{1.4}$$

Bu sınıfa ait problemlerdeki kısıtlar ise genellikle iki gruba ayrılırlar:

$$M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \Leftrightarrow M_i(t, x_1(t), .., x_n(t), \dot{x}_1(t), .., \dot{x}_n(t)) = 0, \ \ i = 1, .., p \tag{1.5}$$

şeklindeki *diferansiyel kısıtları* ve

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0 \Leftrightarrow \psi_j(x_1(t_0), .., x_n(t_0), x_1(t_1), .., x_n(t_1)) = 0, \quad j = 1, .., s \tag{1.6}$$

şeklindeki *sınır koşulları.* Buradaki $L, \ell, M_i, \psi_j$ fonksiyonları düzgün fonksiyonlardır.

$$I(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

problemine *Lagrange problemi*,

$$B(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

problemine *Bolza problemi*,

$$\varphi(x(\cdot)) \to \inf, \quad M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(t_1)) = 0$$

problemine de *Mayer problemi* denir.

*III. Konveks Programlama Problemleri:* Bu sınıfta $X$ lineer bir uzay, $C$ kısıtı ise $x \in A$ olmak üzere bir $F(x) = 0$ eşitlik ve $f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, .., m$ eşitsizlik sistemi ile verilir, burada $Y$ diğer bir lineer uzay olmak üzere $F : X \to Y$ şeklinde bir tasvirdir. $f_i(x) \leqslant 0,\ i = 0, 1, .., m$ fonksiyonları konveks, $F$ tasviri afin ve $A$ konveks bir küme olmak üzere

$$f_0(x) \to \inf, \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, .., m, \quad x \in A$$

biçimindeki problemler bu sınıfa girer. Eğer $f_i$ fonksiyonları lineer ve $A$ kümesi bir koni ise o zaman bu tip bir probleme *lineer programlama problemi* denir.

*IV. Optimal Kontrol Problemleri:* Bu sınftaki problemler genel olarak, fonksiyoneli

$$J(u(\cdot)) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \to \min \tag{1.7}$$

ve kısıtları

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.8}$$

olan problemler olarak göz önüne alınır. Burada (1.8) kısıtları, dinamik bir sistem ve onun başlangıç değeri ile vermektedir. Ayrıca $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ durum vektörü, $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ son nokta maliyet fonksiyonu, $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ ortalama maliyet fonksiyonu, $f : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ bir vektör alanıdır. Bu problemde $J = J(u)$ fonksiyonelini minimum yapacak $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ kontrol vektörlerinden oluşan $u(t)$ yörüngesi aranır. Bu probleme *Bolza problemi* denir, eğer $L(x, u, t) = 0$ ise problem

*Mayer problemi*, $\varphi(x(t_1)) = 0$ ise problem *Lagrange problemi* diye adlandırılır.

Ekstremal problemlerin bu sınıflarına ait klasik problemler ve çözüm yöntemleri optimal kontrol teorisine ait temel kitaplar olan [8] ve [9] da ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ekonomik dinamiklerin optimal kontrol modelleri [10] da, optimal kontrol teorisinin işletme bilimine ve ekonomiye uygulamaları [11] de, lineer olmayan parabolik sistemlerde optimal kontrol problemleri [12] de, eliptik sistemlerde optimal kontrol problemleri [13] te incelenmiştir.

Aşağıda, bu tez çalışmasına temel teşkil eden iki optimizasyon problemi tanıtılacaktır.

**Diskret içermeli konveks optimizasyon problemi:**
$X = \mathbb{R}^n$, $a : X \to 2^X$ konveks küme-değerli dönüşüm, $g(\cdot, t) : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve $N, M \subset X$ kümeleri konveks olmak üzere aşağıdaki problem göz önüne alınsın:

$$\sum_{t=1}^{T} g(x_t, t) \to \min \tag{1.9}$$

$$x_{t+1} \in a(x_t),\ t = 0, 1, .., T-1 \tag{1.10}$$

$$x_0 \in N, \quad x_T \in M \tag{1.11}$$

(1.10) bağıntısına diskret içermeli sistem denir. Ele alınan problem, (1.10) diskret içermeli sistemini sağlayan, $N$ kümesinde başlayan ve $M$ kümesinde son bulan tüm $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ yörüngeleri arasından $f$ fonksiyonuna minimum değer vereninin bulunmasından ibarettir. Ekonomik dinamiklerin modellerinin ekstremal problemleri ve konveks yapılı diskret sistemlerle kontrol edilen optimizasyon problemleri (1.9)-(1.11) probleminin özel durumları olarak ele alınabilirler.

**Diferansiyel içermeli konveks optimizasyon problemi:**
$X = \mathbb{R}^n$, $a : X \to 2^X$ konveks kapalı sınırlı küme-değerli dönüşüm, $x : [0, 1] \to X$ mutlak sürekli fonksiyon, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $N, M \subset X$ kümeleri konveks olsunlar. Aşağıdaki Mayer tipindeki optimizasyon problemi göz önüne alınsın:

$$\varphi(x(1)) \to \min \tag{1.12}$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)),\ t \in [0, 1] \tag{1.13}$$

$$x(0) \in N, \quad x(1) \in M. \tag{1.14}$$

Buradaki (1.13) bağıntısına diferansiyel içermeli sistem, (1.14) bağıntısına sınır koşulları denir. İlgilenilen problem, verilen diferansiyel içermeli sistemi ve sınır koşullarını sağlayan tüm $x(t)$, $t \in [0, 1]$ yörüngeleri arasında $\varphi$ fonksiyonuna $t = 1$ anında minimum değer verenini bulmaktan ibarettir. Ekonomideki bir çok problem bu formda formüle edilebildiğinden bu tipteki problemler önemlidir [14].

Yukarıda verilen hem diskret hem de diferansiyel içermeli optimizasyon problemlerinin optimalliği bir çok matematikçi çeşitli çalışmalar yapmıştır. Uygulamalı matematiğin büyük ustalarından Ukraynalı matematikçi Pshenichnyi genel matematik programlama problemleri ve somut ekstremal problemler için gerek koşulları 1969'da yazdığı 1971'de ingilizceye çevirisi yapılan [15] kitabında ele almıştır. 1976'da yukarıda verilen diskret ve diferansiyel içermeli problemlerin optimalliği için gerek ve yeter koşulları [16] ve [17] makalelerinde vermiştir. 1980'de konveks programlama ve küme-değerli dönüşümlerle ifade edilebilen optimal kontrol problemleri için yerel dual dönüşüm kavramını tanımlayarak yeni bir çözüm metodu getirdiği çalışmalarını [18] kitabında yayınlamıştır. Daha sonra Pshenichnyi'nin doktora öğrencisi olan Azeri matematikçi Elimhan Mahmudov da yine bu tipteki problemlerin özel olarak gecikmeli, hiperbolik, parabolik, eliptik, durum kısıtları Goursat-Darboux tipinde, dağıtılmış parametreli ve kısmi diferansiyel içermeli olanları üzerinde ayrı ayrı optimallik koşulları vermiştir [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Bu tez çalışmasında ele alınan problemlere taban teşkil eden, polihedral dönüşümler ve polihedral içermeli sistemler kavramlarını ilk kez lineer manifoldlar üzerinde [26, 27, 28] çalışmalarıyla Mahmudov vermiştir. Küme-değerli çokamaçlı optimizasyon problemlerini ve dualite bağıntılarını Azimov [29, 30] çalışmalarında ele almıştır. Lineer olmayan analiz, optimizasyon ve optimal kontrol alanlarında çalışmalar yapan ve modern varyasyon analizi ve genelleştirilmiş diferansiyelleme teorisinin kurucularından olan Boris Mordukhovich de benzer problemlerde 250 nin üzerinde makale yayınlamış ve son olarak 2005 yılında Mahmudov'un yukarıda bahsedilen çalışmalarına da yer verdiği iki ciltlik [3, 4] monografisini yazmıştır. Benzer konularda çalışmalar yapan ve dünya çapında tanınan diğer matematikçiler arasında Fransız Hélène Frankowska ve Jean-Pierre Aubin [31, 32], Rus Georgi Smirnov [33] ve İtalyan Arrigo Cellina [34, 35] sayılabilir.

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}^n$ uzayında, yerel dual dönüşüm kavramı kullanılarak iki farklı konveks optimizasyon probleminin çözümü için optimallik koşulları incelenecektir. Özel olarak, ele alınan problemlerde kümeler ve içermeler polihedraldir. Üstelik problemlerden biri diskret zamanlı polihedral diskret içermeli bir sistem, Mayer tipindeki diğer problem ise sürekli zamanlı polihedral diferansiyel içermeli bir sistem yardımıyla verilmektedir. Her iki problemde de polihedral içermeler küme-değerli dönüşümler yardımıyla tanımlanmışlardır. Son olarak, birden fazla küme-değerli dönüşüm ile tanımlanmış diskret içermeli bir konveks optimizasyon probleminin optimallik koşullarını belirlemek için onların bileşkeleri kullanılarak yeni bir yöntem verilmektedir.

**Diskret İçermeli Problem:**

$$\sum_{t=0}^{T} g(x_t, t) \longrightarrow \min \tag{1.15}$$

$$x_{t+1} \in a(x_t)\ , \quad t = 0, 1, .., T-1 \tag{1.16}$$

$$x_0 \in N_0 \quad , \quad x_T \in M_T \tag{1.17}$$

burada $g$ fonksiyonları konveks, $a$ küme-değerli dönüşümü, $N_0$ ve $M_T$ kümeleri özel olarak polihedraldir. Amacımız (1.17) sınır koşullarını ve (1.16) diskret içermeli sistemi sağlayan bir $\{x_t\}_{t=0}^{T}$ yörüngesinin (1.15) toplamını minimum yapması için bir takım gerek ve yeter koşullar tespit etmektir.

**Diferansiyel İçermeli Problem:**

$$\varphi_0(x(1)) \longrightarrow \min \tag{1.18}$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t))\ , \quad t \in [0, 1] \tag{1.19}$$

$$x(0) \in N_0 \quad , \quad x(1) \in M_1 \tag{1.20}$$

burada $\varphi_0$ fonksiyonu konveks ve sürekli $a$ dönüşümü, $N_0$ ve $M_1$ kümeleri polihedraldir. Burada da amacımız diskret içermeli probleme benzer biçimde (1.20) sınır koşullarını ve (1.19) diferansiyel içermeli sistemi sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonunun son noktada yani $t = 1$ anında $\varphi_0$ fonksiyonelini minimum yapması için optimallik koşullarının bulunmasıdır.

Öncelikle her iki problem de en geniş anlamda bir konveks programlama problemidir. Konveks bir fonksiyonel konveks kümeler ile verilen bir kısıt bölgesinde minimum yapılmak istenmektedir. Konveks fonksiyonlar mutlak minimum olmayan yerel minimuma sahip olmadıklarından, problemin çözümü olmayan yerel minimum noktalarıyla veya durgun noktalarla uğraşılmak zorunda kalınmaz. Konvekslikte, bir optimal çözümün sadece gereklik değil yeterlik koşullarını belirlemek te görece olarak daha kolaydır. Bilinen anlamda diferansiyellenebilirlik olmadığı durumlarda bile, konveksliğin getirdiği daima var olan yönlü türev ve subgradient kavramları sayesinde optimallik koşulları diferansiyellenebilir olma halindeki gibi aynen işler. Ayrıca sürekli ve düzgün diferansiyellenebilirlik özelliklerine sahip olduklarından, konveks olmayan fonksiyonlar optimallik koşullarını koruyarak konveksleştirilebildiklerinden, konveks kümeler boş olmayan izafi içe sahip olduklarından, polihedral konveks kümeler uç noktaları ve uç yönleri ile tamamen karakterize edilebildiklerinden optimizasyon problemlerinde konvekslik kavramı ayrı ve önemli bir yer tutmaktadır. Konveks fonksiyon ve kümelerin özelliklerinin çalışıldığı ve uygulamasını konveks optimizasyonda bulan matematik dalına Konveks Analiz denilmektedir. Bu tez çalışmasıiçin konveks analize ait gerekli kavramlar ikinci bölümde verilmektedir. Bu dalda yazılmış temel ve klasik kaynak konveks analizin kurucularından kabul edilen Rockafellar'ın 1970 yılında yazdığı [36] kitabıdır. Özellikle uygulamasını optimizasyon problemlerinde bulduğundan bu konuda daha bir çok kaynağa ulaşmak mükündür, bunların arasında en önemlileri [37, 38, 39, 40, 41, 42] sayılabilir.

Ele alınan problemler için Pshenichnyi'nin matematik dünyasına kazandırdığı, kavram olarak küme-değerli dönüşümlerin türevine yakın olan, yerel dual dönüşüm metodu kullanılarak optimallik koşulları belirlenecektir. Bu metod ve bu metodda kullanılan temel tanım ve teoremler bu tez çalışmasının ikinci bölümü olan Genel Kısımlar başlığı altındadaki Küme-Değerli Dönüşümler ve Konveks Programlamada Optimallik alt başlıklarında gerektiği kadar verilmektedir. Daha derinlemesine bilgi edinmek için Pshenichnyi'nin bu yöntemi ilk olarak yayınladığı [17] makalesine daha sonra da monografi niteliğindeki [18] kitabına başvurulabilir, bu yöntem kullanılarak yapılan çalışmalara örnek olarak [19, 20, 21, 22, 24, 43] yayınları verilebilir. Özel olarak çalışılan polihedral fonksiyon ve kümelere ait temel bilgiler ikinci bölümün polihedral konveks fonksiyonlar ve kümeler alt başlığında verilecektir, polihedral teori için ayrıntılı bilgi [36, 37, 44, 45] kaynaklarından elde edilebilir. Özel olarak polihedral küme-değerli dönüşümler ve özellikleri için Mahmudov ve Pshenichnyi'nin [26] çalışmasına bakılmalıdır.

Bu çalışmada ele alınan optimizasyon problemindeki sistemler küme-değerli, özel olarak polihedral olan, bir dönüşüm yardımı ile verilmiştir. Küme-değerli dönüşümlerin bilimsel, teknik ve diğer akademik disiplinlerdeki çeşitli çalışmalarda ortaya çıkan problemlerin çözümünde temel bir matematiksel araç olarak kullanılması günden güne hızla artmaktadır. Örneğin doğrusal olmayan analiz, doğrusal olmayan programlama, matematiksel ekonomi ve işletme, optimal kontrol teorisi, biyoloji, yapay zeka ve daha birçok araştırma alanlarında ortaya çıkan problemlere küme-değerli dönüşümler ve onlara ait teoriler ile çözüm getirilebilir. Eğer tek değerli dönüşümleri küme-değerli dönüşümlerle, denklemler içermelerle ve diferansiyel denklemler de diferansiyel içermelerle yer değiştirilirse bu tür problemlerin çözümlerine ulaşmada kayda değer avantajlar elde edildiği bilinmektedir. Konveks küme-değerli dönüşümlere ait gerekli temel bilgiler ikinci bölümde Konveks Küme-Değerli Dönüşümler alt başlığında verilecektir. Daha kapsamlı ve derinlemesine bilgi için [18, 32, 35] bakınız.

Sürekli halde incelenen problem diferansiyel içermeli bir sistem ile verilemiştir. $a$ bir küme-değerli dönüşüm ve $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\dot{x}(t) \in a(x(t))$ bağıntısına diferansiyel içerme denir. Dinamik sistemlerin çoğu diferansiyel içermeler yardımıyla verilebilirler. Ekonominin dinamikleri, sosyal ve biyolojik makrosistemler küme-değerli olduklarından diferansiyel içermeler bu dinamik sistemlerde doğal modeller olarak karşımıza çıkarlar. Açıktır ki, $\dot{x} = f(x)$ adi diferansiyel denklemi ile verilen bir sistem, sağ taraf $a(x) = \{f(x)\}$ yazılarak bir diferansiyel içerme haline getirilebilir. Dolayısıyla diferansiyel içerme, adi diferansiyel denklem kavramının genellemesidir. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerle ilgili tüm problemler, yani çözümlerin varlığı, sürekliliği, başlangıç koşullarına ve parametreye bağlılık problemleri diferansiyel içermeler teorisi içinde ele alınırlar. Bir diferansiyel içerme genellikle verilen bir noktada başlayan birçok çözüme sahip olduğundan, bu çözümlerin topolojik özelliklerinin incelenmesi, verilen özelliklere sahip çözümlerin seçilmesi gibi yeni konular meydana çıkar. Bu problemlere cevap bulmak için özel matematiksel teknikler geliştirilmiştir. Böylece diferansiyel içermeler, sadece dinamik sistemlerin bir çoğu için model değil aynı zamanda matematiksel analizin çeşitli dalları için güçlü bir araç olmaktadır. Diferansiyel içerme teorisi optimal kontrol teorisinde varlık teoremlerinin kanıtlanmasında, optimallik için koşulların incelenmesinde ve oyunlar teorisinde de önemli rol oynar. Diferansiyel içermeler teorisine ait bu tez çalışmasında kullanılacak olan yeterli bilgi ikinci bölümde verilmiştir. Bu teoriye ait daha derinlemesine bilgiye [35, 46] kaynaklarından ulaşılabilir. Ayrıca bu çalışma için yeterli bilgi ikinci bölümde verilmiştir.

Ayrıca, birden fazla küme-değerli dönüşüm ile tanımlanmış diskret içermeli bir konveks optimizasyon probleminin optimallik koşullarını belirlemek için onların bileşkeleri kullanılarak yeni bir yöntem verilmektedir. Bu yöntem [47]'de konveks durum için ve konveks olmayan genel durum için de [43]'de geliştirilmiştir.

Tezde ele alınan problemler incelenirken gerekecek temel tanım, teorem ve yöntemler Genel Kısımlar başlığı altında ikinci bölümde, göz önüne alınan problemlere ait orjinal sonuçlamalar Bulgular başlığı altında üçüncü bölümde, elde edilen bulguların daha sonraki aşamalarda kullanılması ve literatüre katkısı hakkındaki görüş ve yorumlar Tartışma ve Sonuç başlığı altında dördüncü bölümde verilmiştir.

# 2. GENEL KISIMLAR

Konveks küme kavramına geçmeden önce bu ve bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı notasyonları verelim. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere, aksi belirtilmedikçe $X$ ile her $i = 1, ..., n$ için $x^i \in \mathbb{R}$ gerçekleyen $x = (x^1, ..., x^n)$ vektörlerinin $n$-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ ile gösterilecektir. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için iç çarpım

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

ve bu iç çarpım yardımıyla da bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ şeklinde tanımlanacaktır. $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için $x \leqslant y$ yazılışı ile her bir $i = i, ..., n$ için $x_i \leqslant y_i$ eşitsizliklerinin gerçeklendiği ifade edilecektir. $X^*$ ile $X$ uzayının cebirsel duali gösterilecektir. Bilindiği gibi bu tür sonlu boyutlu uzaylar için $X^* = X$ bağıntısı geçerlidir.

$A, B \subseteq X$ alt kümelerinin cebirsel toplamı ya da Minkowski toplamı $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ kümesi ile $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A$ kümesinin $\lambda$ katı ise $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$ kümesi ile ifade edilir. Bir $A$ kümesine tek bir $x$ vektörünü eklemekle elde edilen ve $A + x$ yerine $A + x$ biçiminde ifade edilen kümeye de $A$ kümesinin $x$ vektörü tarafından ötelenmesiyle elde edilen küme denir ve kısaca $A$ kümesinin ötelemesi denir.

$R^n$ uzayındaki $x$ ve $y$ noktaları arasındaki Öklid uzaklığı

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >},$$

bu uzaydaki açık ve kapalı birim küreler sırasıyla

$$B = \{x : \|x\| < 1\}, \quad \overline{B} = \{x : \|x\| \leqslant 1\},$$

ve bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktasına olan uzaklığı

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

şeklinde tanımlanacaktır. $M$ kümesinin tüm iç noktalarının kümesi

$$int(M) = \{x \in M : \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon B \subseteq M\}$$

olup bu küme $M$ içindeki tüm açık kümelerin birleşimi ile çakışır, öte yandan her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir. Her $\varepsilon > 0$ için $(a+\varepsilon B \backslash \{a\}) \cap M \neq \emptyset$ ise $a$ noktası $M$ kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. $M$ kümesine tüm yığılma noktalarının eklenmesiyle elde edilen kümeye $M$ kümesinin kapanışı denir, diğer yandan bu küme $M$ kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin kesişimi ile çakıştığından

$$\overline{M} = \bigcap_{\varepsilon>0} (M + \varepsilon \overline{B})$$

notasyonu ile de ifade edilir.

$\mathbb{R}^n$ uzayındaki herhangi iki $x_1$ ve $x_2$ vektörünün afin kombinasyonu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ şeklinde tanımlanır. Herhangi iki vektörünün afin kombinasyonunu kapsayan kümeye afin küme denir, yani

$$x_1, x_2 \in A,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \ \text{ için } \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$

gerçekleniyorsa $A$ kümesine bir afin küme denir. Geometrik olarak afin bir küme farklı iki noktasından geçen doğruyu kapsayan kümedir. Bir $x_0$ noktası ve $r \neq 0$ yön vektöründen geçen $L = \{x_0 + \lambda r : \lambda \in \mathbb{R}\}$ doğrusu en temel afin kümedir. Diğer bir afin küme örneği ise $x_0$ noktasından geçen ve $r_1 \neq 0$ ve $r_2 \neq 0$ vektörleri tarafından doğrulan iki boyutlu $P = \{x_0 + \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ düzlemdir. Herhangi iki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ vektörünün lineer kombinasyonu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ şeklinde tanımlanır. Herhangi iki vektörünün lineer kombinasyonunu içiren kümeye lineer alt uzay denir, yani

$$x_1, x_2 \in L,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \ \text{ için } \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L$$

gerçekleniyorsa $L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine bir lineer alt uzay denir. Bu tanımlardan kolayca her lineer alt uzayın bir afin küme olduğu sonucu elde edilir. $A$ ve $B$ iki afin küme olsun, eğer bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $A = B + x_0$ ise yani $A$ kümesi $B$ kümesinin bir ötelemesi ise $A$ afin kümesi $B$ afin kümesine paraleldir denir.

**Lemma 2.1.** *[44] Boş olmayan bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ alt kümesinin afin olabilmesi için gerek ve yeter koşul tek türlü belirli bir lineer $L$ alt uzayına paralel olmasıdır, yani bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $A = L + x_0$ gerçekleşmesidir.*

Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ afin kümesinin boyutu $dim(A)$ onun paralel olduğu tek türlü belirli olan lineer alt uzayın boyutu olarak tanımlanır. Tüm uzaya eşit olmayan en geniş afin kümeler özel bir öneme sahiptir. Bu tür afin kümeler hiperdüzlemlerdir. $\mathbb{R}^n$ uzayında bir hipredüzlem boyutu $n-1$ olan bir afin küme olarak tanımlanır. Bir $L \subset \mathbb{R}^n$ alt uzayının dik eşlenik uzayı $L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle = 0, x \in L\}$ olup her bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü $x_1 \in L$ ve $x_2 \in L^\perp$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Bilindiği gibi $dim(L) + dim(L^\perp) = n$ bağıntısı geçerli olup özel olarak $L$ uzayının boyutu $n-1$ ise $L^\perp$ uzayının boyutu 1 olur, yani $L^\perp$ uzayı bir doğru olur. Benzer biçimde bir hiperdüzlem bir uzayı adına yarıuzaylar denilen iki parçaya ayırır, öyle ki bu hiperdüzlemin normal vektörü bir boyutlu afin küme olan bir doğru oluşturur.

**Lemma 2.2.** *[44] Herhangi bir $H \subset \mathbb{R}^n$ hiperdüzlemi bir $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ için $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\}$ kümesidir.*

Afin kümelerin lineer denklem sistemleri ile olan yakın ilişkisi aşağıdaki lemma ile belirlenecektir.

**Lemma 2.3.** *[44] $A$, $m \times n$ reel matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ olsun bu durumda $Ax = b$ denklem sisteminin çözümü olan $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ kümesi bir afin kümedir, üstelik herhangi bir afin küme bu şekilde ifade edilebilir, dolayısıyla da afin kümeler hiperdüzlemlerin kesişimleri olarak elde edilen kümelerdir.*

Bir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm afin kümelerin kesişimine $S$ kümesinin afin zarfı denir ve $Aff(S)$ ile gösterilir. Dikkat edilirse herhangi sayıda afin kümenin kesişimi yine bir afin küme olduğundan afin zarf kümesi de bir afin kümedir.

## 2.1 KONVEKS KÜMELER VE KONİLER

Bu başlık altında, konveks analizin temel kavramlarından biri olan konveks kümeler ve konveks koniler ile onların özel halleri olan polihedral kümeler ve polihedral koniler hakkında bu tez çalışmasının anlaşılmasına yetecek kadar bilgi verilecektir.

### 2.1.1 Konveks Kümeler

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ noktaları arasındaki doğru parçası $\{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ kümesi ile ifade edilir. Bu tanımdan sonra artık konveks kümeyi tanımlayabiliriz.

**Tanım 2.1.** *Herhangi iki noktası arasındaki doğru parçasını kapsayan, yani*

$$x_1, x_2 \in M,\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \ \ \textit{için} \ \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$$

*gerçekleyen* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *kümesine konveks küme denir. Bir* $M$ *kümesinin konveksliği için eşdeğer bir tanım olarak her* $\lambda \in [0,1]$ *için* $(1-\lambda)M + \lambda M \subseteq M$ *gerçeklenmesi verilebilir.*

Tüm afin kümeler konvekstir, daha genel olarak sonlu ya da sonsuz sayıdaki denklemden oluşan $\langle a_i, x\rangle = b_i,\ i \in I$ denklem sisteminin çözüm kümesi yani $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle = b_i,\ i \in I\}$ bir konveks kümedir. Konvekslik koşulunu otomatik olarak gerçeklediklerinden tüm alt uzaylar ve dolayısıyla da $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ konveks kümelerdir. Konveks kümenin tanımından kolayca aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Lemma 2.4.** *[36] i)* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ *konveks kümeler ve* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *ise* $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ *kümesi de konvekstir.*
*ii) Bir konveks kümenin kapanışı yine bir konveks kümedir.*
*iii) Herhangi sayıda konveks kümenin kesişimi yine bir konveks kümedir.*
*iv)* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *bir afin dönüşüm, yani bir* $A, m \times n$ *reel matris ve* $b \in \mathbb{R}^m$ *vektörü için* $T(x) = Ax+b$ *biçiminde bir fonksiyon ise* $T$ *dönüşümü konveks kümeleri konveks kümelere dönüştürür.*

$\lambda_1, ..., \lambda_m \geqslant 0, \lambda_1 + ..., +\lambda_m = 1$ olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$ toplamına $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının bir konveks kombinasyonu denir. Bu tanım sonucunda bir küme ancak ve ancak herhangi iki noktasının konveks kombinasyonunu içerirse bir konveks küme olur.

**Lemma 2.5.** *[18] Eğer* $M$ *bir konveks küme ve* $x_1, x_2, ..., x_m \in M$ *ise bu noktaların konveks kombinasyonları da* $M$ *kümesine aittir.*

Herhangi bir $M \subset X$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine $M$ kümesinin konveks zarfı denir ve $co(M)$ ile gösterilir. Lemma 2.4'e göre $co(M)$ konveks kümedir. Öte yandan $M \subseteq co(M)$ olduğundan Lemma 2.5'e göre $co(M)$ kümesi $\lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, ..., m,\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 1,\ x_i \in M$ olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$ şeklinde verilen tüm $x$ noktalarını içermek zorundadır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Lemma 2.6.** *[18]* $M$ *kümesinin konveks zarfı olan* $co(M)$ *kümesi* $M$ *kümesine ait noktaların tüm konveks kombinasyonlarını içerir.*

Aşağıda $co(M)$ kümesinin elemanlarının $M$ kümesinin elemanları tarafından nasıl ifade edilebileceğini veren ünlü Caratheodory teoremi verilemektedir.

**Teorem 2.7.** *[46] $M \subset \mathbb{R}^n$ olsun, $co(M)$ kümesinin herhangi bir noktası $M$ kümesine ait ve sayısı $n+1$'den fazla olmayan noktaların konveks kombinasyonları şeklinde gösterilebilir. Bir başka deyimle her bir $x \in co(M)$ için öyle $x_1, x_2, ..., x_r \in M$ noktaları bulunabilir ki her $i = 1, 2, ..., r$ için $\lambda_i \geqslant 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r = 1$ve $r \leq n+1$ olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r$ yazılabilir.*

$x_0$ noktası $M \subset X$ konveks kümesinin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $M - x_0$ kümesini kapsayan tüm alt uzayların kesişimi $Lin(M)$ ile gösterilir. Bu $Lin(M)$ alt uzayının $x_0$ noktası tarafından ötelenmesi ile elde edilen afin kümeye $M$ kümesinin afin zarfı denir ve $Aff(M) = x_0 + Lin(M)$ yazılışı ile ifade edilir. Herhangi bir konveks $M$ kümesinin bir $x$ noktası için $x + \big(Lin(M) \cap \varepsilon B\big) \subseteq M$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı var ise $x$ noktasına $M$ kümesinin izafi iç noktası denir. $M$ kümesinin tüm izafi iç noktalarından oluşan küme $ri(M)$ ile gösterilir, yani

$$ri(M) = \{x \in AffM : \exists \varepsilon > 0,\, x + \big(Lin(M) \cap \varepsilon B\big) \subseteq M\}$$

kümesi ile verilir. Öte yandan $n$-boyutlu konveks $M$ kümesi için $Aff(M) = \mathbb{R}^n$ olduğundan $ri(M) = int(M)$ geçerlidir. Genelde $A_1 \subset A_2$ ise $\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2$ ve $int(A_1) \subset int(A_2)$ kapsamaları doğrudur. Ancak $ri(A_1) \subset ri(A_2)$ kapsaması gerçeklenmeyebilir. Örneğin $\mathbb{R}^3$ uzayında $A_1$ bir küp ve onun bir yüzü $A_2$ olsun. Bu durumda $A_2 \subset A_1$ geçerlidir. Üstelik $ri(A_1)$ ve $ri(A_2)$ kümeleri boş değildir ve kesişmezler. Dolayısıyla $ri(A_1) \not\subset ri(A_2)$ geçerlidir. Herhangi bir konveks $M$ kümesi için $Aff(M)$ kümesinin dolayısıyla da $Lin(M)$ uzayının boyutuna $M$ kümesinin boyutu denir ve $dim(M)$ ile gösterilir.

**Lemma 2.8.** *[18] Konveks bir $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için $ri\overline{M} = ri(M)$ eşitliği geçerlidir.*

Herhangi bir $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesini içeren tüm kapalı konveks kümelerin kesişimine $M$ kümesinin kapalı konveks zarfı denir ve bu küme $\overline{co}(M)$ ile gösterilir.

**Lemma 2.9.** *[18] Herhangi bir $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için $\overline{co}(M) = \overline{coM}$ eşitliği geçerlidir.*

**Lemma 2.10.** *[18] Kompakt bir kümenin konveks zarfı da kompakttır.*

Konveks kümeler birçok ilginç özelliğe sahiptir. Bunlardan birisi ayrık konveks kümelerin hiperdüzlemler ile ayrılabilir olmasıdır. $\mathbb{R}^2$ uzayı göz önüne alındığında bu durum kabaca, ayrık iki konveks küme için bu iki kümeyi farklı tarafında bırakacak şekilde ayıran bir doğrunun bulunması olarak düşünülebilir. Konveks olmayan kümeler için bu her zaman doğru olmaz. Konveks kümelerin $\mathbb{R}^n$ uzayındaki bu özelliği lineer programlamada dualite teorisinin teorik olarak özünü oluşturmaktadır.

Bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktasının $M$ kümesi üzerine izdüşümü $\pi(x_0, M) = \{x \in M : \|x_0 - x\| = d(x_0, M)\}$ kümesi olarak tanımlanır. Dikkat edilirse, izdüşüm kümesi $M$ kümesine ait olup $x_0$ noktasına en yakın olan noktalardan oluşmaktadır.

**Lemma 2.11.** *Eğer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $M \subset \mathbb{R}^n$ bir kapalı konveks küme ise, o zaman $\pi(x_0, M)$ izdüşüm kümesi tek bir noktadan ibarettir, yani $M$ kümesi içinde $x_0$ noktasına en yakın nokta tek bir tanedir.*

**İspat.** $M$ kümesi kapalı olduğundan, $M$ kümesinin $x_0$ noktasına en yakın noktaları vardır. Bu noktanın tek olduğunu göstermek için aksini kabul edelim. $x_1 \neq x_2$ ve $x_1 \in \pi(x_0, M)$, $x_2 \in \pi(x_0, M)$ gerçekleyen iki nokta olsun. Bu noktalar yardımıyla $z = \frac{x_1+x_2}{2}$ noktası tanımlansın. $M$ konveks olsuğundan $z \in M$ gerçeklenir. Bu durumda $x_0$ ve $z$ noktasını birleştiren doğru parçası $x_0, x_1, x_2$ noktalarının meydana getirdiği ikizkenar üçgenin yüksekliği olur ve $\|x_0 - z\| < \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_2\|$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise $z \in M$ noktasının $x_0$ noktasına $x_1$ ve $x_2$ noktasından daha yakın olması demektir. Bu sonuç $x_1 \in \pi(x_0, M)$ ve $x_2 \in \pi(x_0, M)$ olması ile çelişir. Şu halde $M$ kümesi $x_0$ noktasına tek bir noktada en yakındır. ∎

**Lemma 2.12.** *$M \subset \mathbb{R}^n$ bir konveks küme olsun. Eğer $x_0 \in ri(M)$, $x_1 \in \overline{M}$ ve $x_0 \neq x_1$ ise, o zaman her $\lambda \in [0, 1)$ için $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in riM$ kapsaması geçerlidir.*

**İspat.** $x_0 \in ri(M)$ olduğundan $U = x_0 + (Lin(M) \cap \varepsilon_0 B) \subseteq M$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır. Şimdi $\lambda \in [0, 1)$ olsun ve $V = \frac{x_\lambda - (1-\lambda)U}{\lambda}$ kümesi tanımlansın. Açıktır ki $V \subset x_0 + Lin(M)$ ve $x_1 = \frac{x_\lambda - (1-\lambda)x_0}{\lambda} \in V$ kapsamaları gerçeklenir. Öte yandan $x_1 \in \overline{M}$ olduğundan bir $y_1 \in V \cap M$ noktası vardır. Bu nokta yardımıyla $W = (1 - \lambda)U + \lambda y_1$ kümesi tanımlansın. $M$ kümesi konveks olduğundan $W \subset M$ kapsaması geçerlidir. Şimdi $x_\lambda \in W$ olduğunu gösterelim. $V$ kümesinin tanımından $y_1 = \frac{x_\lambda - (1-\lambda)y_0}{\lambda}$ eşitliğini sağlayan bir $y_0$ noktası vardır. Böylece

$$x_\lambda = (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1 \in (1 - \lambda)U + \lambda y_1 = W$$

olduğu yani $x_\lambda \in W$ içermesinin gerçeklendiği bulunur. Dolayısıyla da $x_\lambda \in ri(M)$ sonucuna ulaşılır. ∎

**Lemma 2.13.** *$M_1$ ve $M_2$ konveks kümeler olmak üzere, eğer $ri(M_1) \cap ri(M_2) \neq \emptyset$ ise $\overline{(M_1 \cap M_2)} = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ eşitliği geçerlidir.*

**İspat.** $x' \in ri(M_1) \cap ri(M_2)$ ve $x \in \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ olsun. Lemma 2.12 nedeniyle $\lambda \in [0, 1)$ için $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in ri(M_1) \cap ri(M_2)$ olur. Dolayısıyla $x \in \overline{(M_1 \cap M_2)}$ bulunur. Yani $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \subseteq \overline{(M_1 \cap M_2)}$ kapsaması geçerlidir. Ters kapsama daima geçerli olduğundan istenen eşitlik kanıtlanmış olur. ∎

**Lemma 2.14.** *$M$ bir konveks küme olmak üzere $x_1 \in \overline{M}$ ve $x_1 \notin M$ gerçeklensin. Bu durumda $x_1$ noktasının herbir komşuluğu $\overline{M}$ kümesine ait olmayan noktalar içerir.*

**İspat.** Bir $x_0 \in riM$ noktası göz önüne alınsın. Bu nokta yardımıyla $\lambda \geqslant 0$ olmak üzere $x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$ ışını tanımlansın. $\lambda > 1$ olduğunda bu ışının noktaları $\overline{M}$ kümesi tarafından kapsanamaz. Gerçekten $\lambda > 1$ ve $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in M$ olduğunda Lemma 2.12 nedeniyle $x_1 = \frac{x+(\lambda-1)x_0}{\lambda} \in ri(M)$ bulunur, bu ise $x_1 \notin M$ olması ile çelişir. ∎

**Teorem 2.15.** *$M$ bir konveks küme olmak üzere $x_0 \notin \overline{M}$ olsun. Bu durumda öyle bir $x^* \neq 0$ noktası ve bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x \in M$ için $\langle x, x^* \rangle \leqslant \langle x_0, x^* \rangle - \varepsilon_0$ gerçeklenir.*

**İspat.** $y = \pi(x_0, \overline{M})$ olsun. Bu durumda izdüşüm fonksiyonunun tanımı gereği her $x \in \overline{M}$ için $\|x - x_0\| \geqslant \|y - x_0\|$ eşitsizliği geçerlidir. $\overline{M}$ konveks olduğundan her $x \in \overline{M}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \overline{M}$ kapsaması geçerlidir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y - x_0\|^2 &= \langle y - x_0 + \lambda(x - y), y - x_0 + \lambda(x - y) \rangle \\ &= \|y - x_0\|^2 + 2\lambda\langle x - y, y - x_0 \rangle + \lambda^2\|x - y\|^2 \\ &\geqslant \|y - x_0\|^2 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Buradan da her $\lambda \in [0, 1]$ için $2\langle x - y, y - x_0 \rangle + \lambda\|x - y\|^2 \geqslant 0$ olduğu sonucuna varılır. Özel olarak $\lambda = 0$ ise

$$\langle x - y, y - x_0 \rangle \geqslant 0 \tag{2.1}$$

gerçeklenir. Şimdi $x^* = x_0 - y$ noktası ve bu nokta ayrdımıyla $\varepsilon_0 = \|x^*\|^2$ sayısı tanımlansın. $x_0 \notin \overline{M}$ olduğundan $y \neq x_0$ geçerlidir. Dolayısıyla $x^* \neq 0$ ve $\varepsilon_0 > 0$ olur. Şimdi (2.1) eşitsizliği $\langle x - y, -x^* \rangle = -\langle x, x^* \rangle + \langle y, x^* \rangle \geqslant 0$ ve dolayısıyla da

$$\langle x, x^* \rangle \leqslant \langle y, x^* \rangle = \langle x_0, x^* \rangle - \langle x^*, x^* \rangle = \langle x_0, x^* \rangle - \varepsilon_0$$

biçiminde yeniden yazılabilir ve $x \in M$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur. ∎

**Uyarı 2.1.** *Dikkat edilirse, eğer $M$ kapalı konveks küme ve $x_0 \notin M$ ise her $x \in M$ için $\langle x - \pi(x_0, M), x_0 - \pi(x_0, M)\rangle \leqslant 0$ eşitsizliği gerçeklenir. Gerçekten, $M$ kümesi kapalı olduğundan bir önceki teoremde $\overline{M} = M$ ve $y = \pi(x_0, M)$ olur. Bunlar (2.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa istenen elde edilir.*

**Teorem 2.16.** *$M$ bir konveks küme olmak üzere $x_0 \notin M$ olsun. Bu durumda öyle bir $x^* \neq 0$ noktası vardır ki her $x \in M$ için $\langle x, x^*\rangle \leqslant \langle x_0, x^*\rangle$ gerçeklenir.*

**İspat.** Eğer $x_0 \notin \overline{M}$ ise Teorem 2.15 nedeniyle istenen eşitsizlik geçerlidir. Şimdi $x_0 \in \overline{M}$ olsun. Lemma 2.14 nedeniyle $x_n \notin \overline{M}$ ve $x_n \to x_0$ gerçekleyen bir $(x_n)$ dizisi vardır. Teorem 2.15 nedeniyle $x \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere öyle $x_n^* \neq 0$ noktaları ve $\varepsilon_n > 0$ sayıları vardır ki $\langle x, x_n^*\rangle \leqslant \langle x_n, x_n^*\rangle - \varepsilon_n < \langle x_n, x_n^*\rangle$ gerçeklenir. Bu eşitsizliğin iki tarafı $\|x_n^*\|$ ile bölünürse her $x \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\langle x, \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|}\right\rangle < \left\langle x_n, \frac{x_n^*}{\|x_n^*\|}\right\rangle \tag{2.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi genelliği bozmaksızın $\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} \to x^*$, $\|x^*\| = 1$ kabul edip (2.2) bağıntısında limite geçilirse her $x \in M$ için $\langle x, x^*\rangle \leqslant \langle x_0, x^*\rangle$ eşitsizliği elde edilir. ∎

**Teorem 2.17.** *$M_1$ ve $M_2$ konveks kümeleri için $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gerçeklensin. Bu durumda öyle bir $x^* \neq 0$ noktası vardır ki her $x_1 \in M$ ve her $x_2 \in M_2$ için $\langle x_1, x^*\rangle \leqslant \langle x_2, x^*\rangle$ eşitsizliği gerçeklenir.*

**İspat.** $M = M_1 - M_2$ kümesi tanımlansın. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olduğundan sıfır noktası $M$ kümesine ait olamaz yani $0 \notin M$ olur. Teorem 2.16 nedeniyle öyle bir $x^* \neq 0$ noktası vardır ki $x = x_1 - x_2$, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ olmak üzere her $x \in M$ için $\langle x, x^*\rangle \leqslant \langle 0, x^*\rangle$ eşitsizliği ve dolayısıyla da her $x_1 \in M$ ve her $x_2 \in M_2$ için $\langle x_1 - x_2, x^*\rangle \leqslant 0$ eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat bitmiş olur. ∎

**Teorem 2.18.** *$M_1$ bir kompakt konveks küme ve $M_2$ bir kapalı konveks küme olsun. Eğer $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ise öyle bir $x^* \neq 0$ noktası ve bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x_1 \in M$ ve her $x_2 \in M_2$ için $\langle x_1, x^*\rangle \leqslant \langle x_2, x^*\rangle - \varepsilon_0$ eşitsizliği gerçeklenir.*

**İspat.** $M = M_1 - M_2$ kümesi tanımlansın. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olduğundan sıfır noktası $M$ kümesine ait olamaz yani $0 \notin M$ olur. Öte yandan $M$ kümesi kapalıdır, gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{1,n} \in M_1$, $x_{2,n} \in M_2$ olsun ve $x_n = x_{1,n} - x_{2,n} \to x$ gerçeklensin. $M_1$ kompakt olduğundan $(x_{1,n})$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmaksızın $(x_{1,n})$ dizisi olarak yakınsayan bu alt dizi alınabilir ve $x_{1,n} \to x_1 \in M_1$ kabul edebilebilir. $(x_n)$ dizisi yakınsak ve $M_2$ kümesi kapalı olduğundan $x_{2,n} \to x_2 \in M_2$ gerçeklenir. Böylece $x = x_1 - x_2 \in M$ elde edilir. Bu ise $M$ kümesinin kapalı olması demektir. Şimdi $x_0 = 0$ alınıp Teorem 2.15 uygulanırsa istenen eşitsizlik elde edilir. ∎

**Tanım 2.2.** *Bir $M$ konveks kümesinin destek fonksiyonu*

$$W_M(\cdot) = \sup_{x \in M}\{\langle x, \cdot\rangle\}$$

*biçiminde tanımlanır.*

**Teorem 2.19.** *$M$ kapalı konveks bir küme olmak üzere $x \in M$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x^* \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\langle x, x^*\rangle \leqslant W_M(x^*) \tag{2.3}$$

*eşitsizliğinin gerçeklenmesidir.*

**İspat.** $x \in M$ ise Tanım 2.2 nedeniyle (2.3) eşitsizliği geçerlidir. Tersine bir $x_0$ noktası (2.3) bağıntısını sağlasın ama $x_0 \in M$ gerçekleşmesin yani $x_0 \notin M$ olsun. Bu durumda Teorem 2.15 nedeniyle öyle bir $x^*$ noktası ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x \in M$ için $\langle x, x^*\rangle \leqslant \langle x_0, x^*\rangle - \varepsilon_0$ eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlikte $x \in M$ noktaları üzerinden supremum alınırsa $W_M(x^*) \leqslant \langle x_0, x^*\rangle - \varepsilon_0 < \langle x_0, x^*\rangle$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise $x_0$ noktasının (2.3) bağıntısını sağladığı varsayımı ile çelişir. ∎

### 2.1.2 Polihedral Kümeler

Polihedral kümeler (=polihedronlar) konveks kümelerin önemli ve özel bir sınıfını teşkil ederler. Bu tez çalışmasında özel olarak polihedral kümeler ile çalışılacağından bizim için ayrıca önemlidir. Bir $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, eğer sonlu sayıdaki kapalı yarı-uzayın kesişim olarak ifade edilebiliyorsa, yani $i = 1, 2, .., m$ için $b_i \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle x, b_i\rangle \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, .., m$$

biçimindeki sonlu sayıda eşitsizlikler sisteminin çözümü ise $M$ kümesine polihedral küme denir. Dolayısıyla herhangi bir polihedral küme $A$ bir $m \times n$ matris ve $b$ bir $m$-sütun vektör olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$$

kümesi ile gösterilebilir. Dikkat edilirse polihedral bir küme kapalı ve konveks bir kümedir. Öte yandan herhangi bir eşitlik iki eşitsizlik ile ifade edilebileceğinden polihedral bir küme sonlu sayıdaki eşitlik veya sonlu sayıdaki eşitlik ve eşitsizlikler ile verilen karışık sistemler ile belirlenebilirler.

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geqslant 0\},$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}$$

kümeleri ile herhangi bir afin küme, $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ tipik polihedral küme örnekleri olarak verilebilir. Ayrıca $R^n$ uzayında herhangi bir hiperdüzlem iki kapalı yarı-uzayın kesişimi olarak yazılabildiğinden polihedral bir kümedir. Sınırlı bir polihedral kümeye ya da eşdeğer olarak sonlu noktalı bir kümenin konveks zarfına bir politop denir.

Polihedral kümeler incelenirken iki yaklaşım söz konusudur, bunlardan biri konveks kümelerin yüzleri kavramı ile verilen dışsal gösterim, diğeri de konveks kümelerin uç noktalar, köşeler ve uç yönler kavramları ile verilen içsel gösterimidir. Bu iki yaklaşım da bu tezin asıl amacı dışında olduğundan burada derinlemesine bir inceleme verilmeyecektir, ancak bu konudaki kapsamlı bilgiye [36, 37, 44] kaynaklarından ulaşılabilir. Aslında polihedral olma özelliği, konveks kümelerin dışsal gösterilişleri üzerindeki bir sonluluk koşuludur. Konveks kümelerin içsel gösterilişleri üzerindeki sonluluk koşulu aynı öneme sahip dual bir özelliktir. *Sonlu doğrulmuş konveks küme* sonlu sayıdaki bir noktalar ve yönler kümesinin konveks zarfı olarak tanımlanır. Bu durumda, bir $C$ kümesinin sonlu doğrulmuş konveks küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul sabit bir $k$, $0 \leqslant k \leqslant m$, tam sayısı için $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, ve $i = 1, ..., m$ için $\lambda_i \geqslant 0$ olmak üzere $C$ kümesinin tüm vektörlerinin

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \lambda_m a_m\ ,$$

biçiminde yazılabilmesini sağlayan $a_1, ..., a_m$ vektörlerinin var olmasıdır. Aşağıdaki teorem ile polihedral kümelerin sonlu doğrulmuş konveks kümeler ile aynı oldukları anlaşılmaktadır. Bu klasik sonuç, geometrik içgüdüsü ile tamamen aşikar fakat cebirsel içeriği oldukça önemli ve ispatı aşikar olmayan bir gerçeğin güzel bir örneğidir.

**Teorem 2.20.** *[36] Bir $C$ konveks kümesinin aşağıdaki özellikleri eşdeğerdir:*
*(a) $C$ polihedral bir kümedir,*
*(b) $C$ kapalıdır ve sadece sonlu sayıda yüzü vardır,*
*(c) $C$ sonlu doğrulmuştur.*

Bu teoremin sonucu olarak bir polihedral kümenin herbir yüzünün de polihedral olduğu sonucu ve en fazla sonlu sayıda uç nokta ve uç yöne sahip olduğu elde edilir. Sonlu sayıda polihedral konveks kümenin kesişimi de polihedraldir.

**Teorem 2.21.** *$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm olsun. O zaman $\mathbb{R}^n$ deki herbir polihedral konveks $C$ kümesi için $AC$ kümesi de $\mathbb{R}^m$ uzayında polihedral konvekstir ve $\mathbb{R}^m$ deki herbir polihedral konveks $D$ kümesi için $A^{-1}D$ kümesi de $\mathbb{R}^n$ uzayında polihedral konvekstir.*

**İspat.** $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi polihedral olsun. Teorem 2.20 nedeniyle, $C$ kümesi sonlu doğrulmuştur, bu nedenle öyle $a_1, .., a_k, a_{k+1}, .., a_m$ vektörleri vardır ki

$$C = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i |\ \lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_k = 1, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, .., r\}$$

gerçeklenir. $b_i$ ler $a_i$ vektörlerinin $A$ lineer dönüşümü altındaki görüntüleri olsun. O zaman

$$AC = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i |\ \lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_k = 1, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, .., r\}$$

dolayısıyla $AC$ sonlu doğrulmuş olur ve Teorem 19.1 nedeniyle polihedraldir. Şimdi $D \subseteq \mathbb{R}^m$ bir polihedral konveks küme olsun. $D$ kümesini bir

$$< y, a_i^* > \leqslant \alpha_i,\ i = 1, 2, .., s$$

sisteminin çözümleri olan $y$ vektörlerinin kümesi olarak alabiliriz. O zaman $A^{-1}D$ kümesi de

$$< Ax, a_i^* > \leqslant \alpha_i\ i =!, 2, .., s$$

sisteminin çözümleri olan $x$ noktalarının kümesidir. Bu ise $x$ in bir sonlu eşitsizlikler sistemidir, dolayısıyla $A^{-1}D$ polihedraldir. ∎

**Sonuç 2.22.** *$C_1$ ve $C_2$, kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayında polihedral iki küme ise $C_1 + C_2$ toplam kümesi de polihedraldir.*

**İspat.** $C = \{(x_1, x_2) | x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ olsun. Açıktır ki $C$ kümesi $\mathbb{R}^{2n}$ uzayında sonlu tane kapalı yarı-uzayın kesişimi şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $C$ kümesinin $A : (x_1, x_2) \to x_1 + x_2$ lineer dönüşümü altındaki görüntüsü de Teorem 2.22 nedeniyle polihedraldir ve bu görüntü kümesi de $C_1 + C_2$ kümesidir. ∎

### 2.1.3 Konveks Koniler

Konveks koniler extremal problemler teorisinin temel kavramlarından birisidir. Bu tür konilerin duallerinin hesaplanması onların temel özelliklerinin iyi bilinmesini gerektirmektedir. Aşağıda konveks konilerin bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 2.3.** *Her $x \in K$ ve her $\lambda > 0$ için $\lambda x \in K$ içermesini gerçekleyen bir $K$ kümesine koni denir. Eğer $K$ kümesi konveks ise o zaman bu koniye konveks koni denir.*

Konveks konilerin üyelerinin pozitif skalerli tüm lineer kombinasyonlarını yani konik kombinasyonlarını içerdiği gerçeği aşağıdaki lemma ile verilmektedir.

**Lemma 2.23.** *$K$ konveks bir koni olmak üzere $x_1, x_2, .., x_m \in K$ ve $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m > 0$ ise $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \in K$ gerçeklenir.*

**İspat.** Pozitif $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_m > 0$ sayısı tanımlansın. Böylece herbir $i = 1, 2, .., m$ için $0 < \frac{\lambda_i}{\lambda} < 1$ olup $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ gerçeklenir. Bu durumda $K$ konveks olduğundan $\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in K$ içermesi geçerlidir. Bu ve $K$'nın koni olduğu kullanılırsa istenen $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m = \lambda \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in K$ içermesi elde edilmiş olur. ∎

Konveks olmayan koniler bu tez çalışmasının kapsamı dışında olduğundan bundan sonra kısalık amacıyla koni denildiğinde konveks koni anlaşılacaktır. Şimdi tezin önemli ve temel kavramlarından biri olan dual koni ve bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.4.** *$K$ bir koni olmak üzere her $x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ gerçekleyen $x^* \in X^*$ vektörlerinin kümesine $K$ konisinin dual konisi denir ve $K^*$ ile gösterilir, kısaca bir $K$ konisinin dual koni aşağıdaki kümedir:*

$$K^* = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle \geqslant 0,\ \forall x \in K\}$$

Dual konilerin daima kapalı kümeler oldukları aşağıdaki lemmada kanıtlanmıştır.

**Lemma 2.24.** *$K$ bir koni olmak üzere onun $K^*$ dual konisi daima kapalıdır.*

**İspat.** Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n^* \in K^*$ içermesi ve $x_n^* \to x_0^*$ yakınsaması gerçeklensin. Bu durumda her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\langle x, x_n^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği gerçeklenir. Şimdi bu eşitsizlikte limite geçildiğinde her $x \in K$ için $\langle x, x_0^* \rangle \geqslant 0$ ve buradan da Tanım 2.4 nedeniyle $x_0^* \in K^*$ elde edilir. Sonuçta $K^*$ kümesi, tüm yığılma noktalarını kapsıyor olması nedeniyle kapalıdır. ∎

**Lemma 2.25.** *Bir $K$ konisi ve onun $\overline{K}$ kapanış konisi aynı dual koniye sahiptir, yani $(\overline{K})^* = K^*$ eşitliği geçerlidir.*

**İspat:** Eğer $x^* \in (\overline{K})^*$ ise her $x \in \overline{K}$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ ve $K \subseteq \overline{K}$ nedeniyle her $x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği geçerli olur. Bu ise Tanım 2.4 nedeniyle $x^* \in K^*$ demektir. Tersine, $x^* \in K^*$, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in K$ ve $x_n \to x_0$ gerçeklensin. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\langle x_n, x^* \rangle \geqslant 0$ olup limite geçildiğinde her $x^* \in K^*$ için $\langle x_0, x^* \rangle \geqslant 0$ ve dolayısıyla da $x^* \in (\overline{K})^*$ bulunur. Şu halde aranan eşitlik geçerlidir. ∎

Dual konilerin daima kapalı oldukları Lemma 2.24 nedeniyle bilinmektedir. Bu durumda kapalı olmayan bir koninin dual konisinin duali kendisine eşit olamaz. Çünkü kendisi kapalı değil ancak dualinin duali bir dual koni olduğundan kapalıdır. Bu sonuç nedeniyle dualinin duali kendisine eşit olabilecek konileri kapalı koniler arasında aramak gerekir.

**Lemma 2.26.** *Bir $K$ kapalı konisi verildiğinde eğer her $x^* \in K^*$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ gerçekleniyorsa $x \in K$ olur.*

**İspat.** Tersini kabul edelim, yani her $x^* \in K^*$ için $\langle x_0, x^* \rangle \geqslant 0$ gerçeklensin ama $x_0 \notin K$ olsun. $x_0 \notin K$ ise Teorem 2.18 nedeniyle öyle bir $x_0^*$ vektörü ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x \in K$ için

$$\langle x_0, x_0^* \rangle \leqslant \langle x, x_0^* \rangle - \varepsilon_0 \tag{2.4}$$

gerçeklenir. Dikkat edilirse bir $x \in K$ için $K$ koni olduğundan yeterince küçük $\lambda > 0$ sayısı için $\lambda x \in K$ olur, yani sıfıra yeterince yakın noktalar koniye dahildir. Özellikle kapalı koniler daima sıfır noktasını içerirler. Bu durumda $\langle x, x_0^* \rangle$ çarpımının alt sınırı sıfırdan daha küçük olamaz. (2.4) bağıntısı nedeniyle $\langle x, x_0^* \rangle$ çarpımı alttan sınırlıdır. Şimdi $\langle x, x_0^* \rangle \geqslant 0$ olduğunu gösterelim. Eğer $\langle x_1, x_0^* \rangle < 0$ olacak şekilde bir $x_1 \in K$ elemanı varsa bu nokta yardımıyla $x = \lambda x_1$ noktası tanımlansın. Bu durumda $\lambda \to +\infty$ için $\langle x, x_0^* \rangle \to -\infty$ olur bu ise $\langle x, x_0^* \rangle$ çarpımının alttan sınırlı olması ile çelişir. Dolayısıyla $\inf_{x \in K} \langle x, x_0^* \rangle = 0$ bulunur. Böylece $x_0^* \in K^*$ elde edilir. Kabul edelim ki (2.4) bağıntısında $x = 0$ olsun. O zaman kabulümüz ile çelişen $\langle x, x_0^* \rangle < -\varepsilon$ sonucuna ulaşılırdı. Dolayısyla $x_0 \in K$ olmak zorundadır. ∎

Dikkat edilirse $K$ konisi $X$ uzayında, $K^*$ konisi $X$ uzayına eşyapılı olan $X^*$ uzayında, $(K^*)^* = K^{**}$ konisi de tekrar $X$ uzayındadır. Ancak $K^{**}$ konisinin tekrar $K$ konisine eşit olması gerekmez. Hangi durumda eşitliğin gerçeklendiği aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 2.27.** *$K$ konisi kapalı ise $K^{**} = K$ eşitliği gerçeklenir.*

**İspat.** Tanım 2.4'ye göre $K^{**} = \{x : \langle x, x^* \rangle \geqslant 0,\ x^* \in K^*\}$ olur. Bu durumda daima $x \in K$ ise her $x^* \in K^*$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ olduğundan $x \in K^{**}$ olur, yani daima $K \subseteq K^{**}$ kapsamaı geçerlidir. Tersine $K$ kapalı ise Lemma 2.26 nedeniyle her $x^* \in K^*$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliğinden $x \in K$ elde edilir. Böylece $K$ kapalı olduğunda $K^{**} \subseteq K$ olduğu anlaşılır. Sonuçta istenen eşitlik elde edilmiş olur. ∎

**Uyarı 2.2.** *Genel halde $K^{**} = \overline{K}$ eşitliği doğrudur. Gerçekten Lemma 2.25 nedeniyle $K^* = (\overline{K})^*$ olup bu eşitlikte her iki tarafın duali alınarak $K^{**} = (\overline{K})^{**} = \overline{K}$ bulunur.*

Şimdi konilerin toplam ve kesişimlerinin dualleri hakkındaki bilgileri elde edelim.

**Lemma 2.28.** *$K_1$ ve $K_2$ herhangi iki konveks koni olsun. Bu durumda $K_1 + K_2$ toplamı da bir konveks konidir ve $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$ gerçeklenir.*

**İspat.** İki konveks küme toplamının da bir konveks küme olması nedeniyle $K_1 + K_2$ kümesi konvekstir ve $x = x_1 + x_2, x_1 \in K_1, x_2 \in K_2$ olmak üzere $x \in K_1 + K_2$ için $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in K_1 + K_2$ gerçeklendiğinden $K_1 + K_2$ bir konidir. Öte yandan $x^* \in (K_1 + K_2)^*$ içermesi ancak ve yalnız her $x_1 \in K_1$ ve her $x_2 \in K_2$ için $\langle x_1 + x_2, x^* \rangle \geqslant 0$ oduğunda geçerlidir. Bu eşitsizliğin bağımsız olarak değişen $x_1$ ve $x_2$ değişkenlerince sağlandığı ve bunlardan birinin sıfıra yeterince yaklaşabileceği göz önünde bulundurulursa bu eşitsizlik aşağıdaki gibi iki eşitsizlik halinde yazılabilir:

$$\langle x_1, x^* \rangle \geqslant 0, \ \ \forall x_1 \in K_1 \ , \ \langle x_2, x^* \rangle \geqslant 0, \ \ \forall x_2 \in K_2 \ ,$$

Bu eşitsizlikler nedeniyle $x^* \in K_1^*$ ve $x^* \in K_2^*$ olur, dolayısıyla $x^* \in (K_1 + K_2)^*$ için gerek ve yeter koşulun $x^* \in K_1^* \cap K_2^*$ olduğu bulunur. ∎

**Lemma 2.29.** *Kapalı $K_1$ ve $K_2$ konileri için $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{(K_1^* + K_2^*)}$ geçerlidir.*

**İspat.** Lemma 2.27, Lemma 2.28 ve iki kapalı konveks koninin toplamının kapalı olması gerekmediği göz önüne alınarak Uyarı 2.2 kullanılırsa

$$(K_1 \cap K_2)^* = (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* = ((K_1^* + K_2^*)^*)^* = (K_1^* + K_1^*)^{**} = \overline{(K_1^* + K_2^*)}$$

eşitliği bulunur. ∎

**Lemma 2.30.** *Eğer* $\langle x, x^* \rangle$ *çarpımı her* $x \in K$ *için alttan sınırlı ise* $x^* \in K^*$ *gerçeklenir. Eğer* $x \in int(K)$ *ise her* $x^* \in K^*, x^* \neq 0$ *için* $\langle x, x^* \rangle > 0$ *gerçeklenir.*

**İspat.** İlk kısımın ispatı Lemma 2.26'nin kanıtlamasında yer almaktadır. Şimdi $x \in int(K)$ olsun o zaman $x + \varepsilon_0 B \in K$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $x^* \in K^*$ ve $z \in B$ olmak üzere $\langle x + \varepsilon_0 z, x^* \rangle \geqslant 0$ gerçeklenir. Buradan da istenen

$$\langle x, x^* \rangle \geqslant \varepsilon_0 \sup_{z \in B} \langle -z, x^* \rangle \geqslant \varepsilon_0 \left\langle \frac{x^*}{\|x^*\|}, x^* \right\rangle = \varepsilon_0 \|x^*\| > 0$$

sonucu bulunur. ∎

**Teorem 2.31.** $K_1, K_2, .., K_m$ *konveks konileri verilsin.* $K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m = \emptyset$ *olması için gerek ve yeter koşul aynı anda sıfır olmayan ve* $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ *eşitliğini gerçekleyen* $x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ *noktalarının var olmasıdır.*

**İspat.** Elemanları $(x_1, x_2, .., x_m)$ olan ve her bir $i = 1, 2, .., m$ için $x_i \in \mathbb{R}^n$ olan $X^m = \mathbb{R}^{mn}$ uzayı ve bu uzaydaki

$$\widetilde{K} = K_1 \times K_2 \times .. \times K_m = \{(x_1, x_2, .., x_m) : x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, .., x_m \in K_m\}$$

$$\widetilde{P} = \{(x, x, .., x) : x \in X\}$$

konileri göz önüne alınsın. $K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m = \emptyset$ olduğundan $\widetilde{K}$ ve $\widetilde{P}$ konileri kesişmezler. Teorem 2.17 nedeniyle $x \in X, x_1 \in K_1, x_2 \in K_2, .., x_m \in K_m$ olmak üzere

$$\langle x, x_1^* \rangle + \langle x, x_2^* \rangle + .. + \langle x, x_m^* \rangle \leqslant \langle x_1, x_1^* \rangle + \langle x_2, x_2^* \rangle + .. + \langle x_m, x_m^* \rangle \tag{2.5}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $(x_1^*, x_2^*, .., x_m^*)$ vektörü vardır. (2.5) eşitsizliği nedeniyle $\langle x_i, x_i^* \rangle$ çarpımı $i = 1, 2, .., m$ olmak üzere tüm $K_i$ konileri üzerinde alttan sınırlıdır. Bu durumda Lemma 2.30 nedeniyle her $i = 1, 2, .., m$ için $x_i^* \in K_i^*$ gerçeklenir. Her $x \in X$ için (2.5) eşitsizliğinin sol tarafındaki çarpım üstten sınırlıdır. Ancak bu durum yalnızca her $x \in X$ için $\langle x, x_1^* \rangle + \langle x, x_2^* \rangle + .. + \langle x, x_m^* \rangle = 0$ olduğunda dolayısıyla her $x \in X$ için $\langle x, x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* \rangle = 0$ olduğunda mümkündür. Bu ise $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ demektir. ∎

**Teorem 2.32.** $K_1, K_2, .., K_m$ *konveks konileri verilsin.* $K = K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m$ *ve* $K_1 \cap intK_2 \cap .. \cap intK_m \neq \emptyset$ *olsun. Bu durumda* $K^* = K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*$ *eşitliği geçerlidir.*

**İspat.** Dual koni tanımından dolayı $K_1^* + K_2^* + .. + K_m^* \subseteq K^*$ kapsaması daima doğrudur. Öte yandan $x^* \in K^*$ ve $x^* \neq 0$ olsun ve $K_0 = \{x : \langle x, x^* \rangle < 0\}$ konisi tanımlansın. Şu halde $K_0$ ve $K$ konileri kesişmezler, aksi halde bir $x_1 \in K_0 \cap K \neq \emptyset$ elemanı var olurdu. Bu durumda $x_1 \in K_0$ olduğundan $\langle x_1, x^* \rangle < 0$ eşitsizliği ve $x_1 \in K, x^* \in K^*$ olduğundan $\langle x_1, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği gerçeklenir. Şimdi $K_0$ konisinin dualini belirleyelim. $\langle x, x^* \rangle < 0$ gerçekleyen $x$ noktaları için $\langle x, y^* \rangle \geqslant 0$ gerçeklensin, yani $y^* \in K_0^*$ ve $y^* \neq 0$ olsun. Bu durumda $x^*$ ve $y^*$ noktaları lineer bağımlıdır, yani $\alpha_1$ ve $\alpha_2$ aynı anda sıfır olmamak üzere $\alpha_1 x^* + \alpha_2 y^* = 0$ eşitliği gerçeklenir. $x^* \neq 0$ olsun, eğer $y^* \neq 0$ ise $\alpha_2 \neq 0$ ve $\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ olmak üzere $y^* = \lambda x^*$ bulunur. Üstelik $x \in K_0$ için $0 \leqslant \langle x, y^* \rangle = \lambda \langle x, x^* \rangle$ gerçeklenir. $\langle x, x^* \rangle < 0$ eşitsizliğinden $\lambda < 0$ olduğu bulunur. Eğer $y^* = 0$ ise $y^* = 0 \cdot x^*$ eşitliği gerçeklenir demektir, yani $\lambda = 0$ olur. Dolayısıyla dual koni $K_0^* = \{y^* : y^* = \lambda x^*,\ \lambda \leqslant 0\}$ biçiminde bulunur. $K_0$ ile $K$ konisi dolayısıyla da $K_1, K_2, .., K_m$ konileri kesişmediğinden Teorem 2.31 nedeniyle öyle $y^* \in K_0^*,\ x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ noktaları vardır ki hepsi aynı anda sıfır değildir ve

$$y^* + x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0 \tag{2.6}$$

bağıntısını sağlar. Şimdi $\lambda \leqslant 0$ olmak üzere $y^* = \lambda x^*$ vektörü tanımlanırsa (2.6) bağıntısı

$$-\lambda x^* = x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* \tag{2.7}$$

biçimini alır. Eğer $\lambda < 0$ ise herbir $i = 1, 2, .., m$ için $x_i^* \in K_i^*$ olduğundan

$$x^* = (-\frac{1}{\lambda})x_1^* + (-\frac{1}{\lambda})x_2^* + .. + (-\frac{1}{\lambda})x_m^* \in K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*$$

olduğu elde edilir. Şimdi $\lambda = 0$ olduğu varsayılsın, o zaman (2.7) eşitliğinden

$$x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0 \tag{2.8}$$

bulunur. Burada $x_i^*$ vektörlerinin hepsi aynı anda sıfır değildir dolayısıyla en az iki tanesi sıfırdan farklıdır, sözgelimi $x_1^*$ ve $x_2^*$ vektörleri sıfırdan farklı olsunlar, bu durumda teoremin hipotezi gereği $x_0 \in K_1 \cap intK_2 \cap .. \cap intK_m$ gerçekleyen bir $x_0$ noktası vardır ve Lemma 2.30 nedeniyle $\langle x_0, x_2^* \rangle > 0$ ve $i \neq 2$ için $\langle x_0, x_i^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizlikleri gerçeklenir. Şimdi (2.8) eşitliğinin her iki tarafı $x_0$ vektörü ile çarpılırsa

$$0 = \langle x_0, x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* \rangle = \langle x_0, x_1^* \rangle + \langle x_0, x_2^* \rangle + .. + \langle x_0, x_m^* \rangle > 0$$

çelişkisi elde edilir. Şu halde $\lambda = 0$ olamaz. Böylece $K^* \subseteq K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*$ ters kapsamasının dolayısıyla da istenen eşitliğin geçerli olduğu kanıtlanmış olur. ∎

**Teorem 2.33.** *$K_1, K_2, .., K_m$ konveks koniler olmak üzere $K = K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m$ olsun. Bu durumda ya*

$$K^* = K_1^* + K_2^* + .. + K_m^* \tag{2.9}$$

*gerçeklenir ya da hepsi aynı anda sıfır olmayan öyle $x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ vektörleri vardır ki $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ eşitliği gerçeklenir.*

**İspat.** Eğer (2.7) bağıntısındaki her $x^* \in K^*$ için $\lambda < 0$ oluyorsa, o zaman $x^*$ vektörü $x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ vektörlerinin toplamı şeklinde yazılabilir. Bu durumda (2.9) eşitliği gerçeklenir. Eğer $x^*\lambda = 0$ ise bu sefer de $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ eşitliği gerçeklenir. ∎

**Uyarı 2.3.** *Dikkat edilirse Teorem 2.33 bize, $K_1, K_2, .., K_m$ konveks konileri için eğer $K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m = \emptyset$ geçerli ise $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ gerçekleyen ve hepsi aynı anda sıfır olmayan $x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ vektörlerinin var olduğunu söyler.*

**Tanım 2.5.** *$K_1, K_2, .., K_m$ konveks koniler olmak üzere, eğer $x_1^* + x_2^* + .. + x_m^* = 0$ gerçekleyen ve hepsi aynı anda sıfır olmayan $x_i^* \in K_i^*,\ i = 1, 2, .., m$ vektörleri varsa $K_1, K_2, .., K_m$ konveks konileri ayrılabilirdir denir.*

Konveks konilerin önemli bir tipi ve onunla ilgili genel bilgiler aşağıda verilecektir.

**Tanım 2.6.** *$M \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere $conM$ kümesi $conM = \{x : x = \lambda x_1, x_1 \in M, \lambda > 0\}$ biçiminde tanımlanır.*

**Teorem 2.34.** *Eğer $M$ konveks bir küme ise $conM$ kümesi bir konveks konidir. Üstelik $x_1 \in int(M)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $x = \lambda x_1$ ise $x \in int(conM)$ kapsaması gerçeklenir.*

**İspat.** $x_1, x_2 \in conM$ olsun. Bu durumda $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in M$ ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olmak üzere $x_1 = \lambda_1 \overline{x}_1$ ve $x_2 = \lambda_2 \overline{x}_2$ yazılabilir. Şimdi $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \alpha_1 \lambda_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \overline{x}_2 \\ &= (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \left[ \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} \overline{x}_1 + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2} \overline{x}_2 \right] \in conM \end{aligned}$$

gerçeklenir, dolayısıyla $conM$ kümesinin konveks olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $x_1 \in int(M)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $x = \lambda x_1$ olsun. $x_1 \in int(M)$ olduğundan öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki $x_1 + \varepsilon_0 B \subseteq M$ gerçeklenir. Buradan da $x + \lambda\varepsilon_0 B = \lambda x_1 + \lambda\varepsilon_0 B = \lambda(x_1 + \varepsilon_0 B) \subseteq \lambda M = conM$ elde edilir. $\varepsilon = \lambda\varepsilon_0 > 0$ denilirse $x + \varepsilon B \subseteq conM$ gerçeklendiğinden $x \in int(conM)$ elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ∎

**Teorem 2.35.** *$M_1, M_2, .., M_k$ konveks kümeler olmak üzere herbir $i = 1, 2, .., k$ için $0 \in M_i$ kapsaması geçerli ise $\bigcap_{i=1}^{k} conM_i = con(\bigcap_{i=1}^{k} M_i)$ eşitliği gerçeklenir.*

**İspat.** $x \in con(\bigcap_{i=1}^{k} M_i)$ olsun, bu durumda $x = \lambda x_1, \lambda > 0, x_1 \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i$ buradan da herbir $i = 1, 2, .., k$ için $x_1 \in M_i$ bulunur. Dolayısıyla herbir $i = 1, 2, .., k$ için $x = \lambda x_1 \in conM_i$ yani $x \in \bigcap_{i=1}^{k} conM_i$ gerçekleşir. Tersine $x \in \bigcap_{i=1}^{k} conM_i$ olsun, bu durumda herbir $i = 1, 2, .., k$ için $x \in conM_i$ yani $x = \lambda_i x_i, \lambda_i > 0, x_i \in M_i$ gerçeklenir. Herbir $i = 1, 2, .., k$ için $\frac{1}{\lambda_i}x = x_i \in M_i$ kapsaması geçerli olduğundan $0 \leqslant \lambda < 1$ için $\lambda(\frac{1}{\lambda_i}x) = (1-\lambda)\cdot 0 + \lambda(\frac{1}{\lambda_i}x) \in M_i$ geçerlidir. Öte yandan $0 \leqslant \mu \leqslant \min_i \frac{1}{\lambda_i}$ gerçekleyen $\mu > 0$ sayısı ve herbir $i = 1, 2, .., k$ için $\mu x = (\mu\lambda_i)(\frac{1}{\lambda_i}x) \in M_i$ kapsaması ve dolayısıyla $\mu x \in \bigcap_{i=1}^{k} M_i$ gerçeklenir. Böylece $x = (\frac{1}{\mu})\mu x \in con(\bigcap_{i=1}^{k} M_i)$ bulunup ispat bitirilmiş olur. ■

**Teorem 2.36.** *$M \neq \emptyset$ bir konveks küme olmak üzere $x^* \in (conM)^*$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in M$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliğinin gerçeklenmesidir.*

**İspat.** Dual koni tanımı nedeniyle $x^* \in (conM)^*$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in M$ ve $\lambda > 0$ için $\langle \lambda x, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği geçerli olup bu eşitsizliğin iki tarafı $\lambda > 0$ sayısına bölünürse her $x \in M$ için $\langle x, x^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Dolayısıyla ispat bitmiştir. ■

### 2.1.4 Polihedral Koniler

Aşağıda, homojen lineer eşitsizlikler sistemi ile verilen sınırsız kümelerin önemli bir sınıfı olan polihedral koniler incelenecektir.

**Tanım 2.7.** *Eğer bir $K$ konisinin, herbir $x \in K$ vektörü için*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, .., m \tag{2.10}$$

*olacak biçimde sonlu tane $x_1, x_2, .., x_m$ vektörleri varsa $K$ konisine polihedral koni denir.*

**Teorem 2.37.** *Polihedral koniler*

$$\langle x, x_k^* \rangle \geqslant 0, \quad k = 1, 2, .., l \tag{2.11}$$

*şeklindeki lineer homojen eşitsizlikler sistemi ile verilebilir.*

**İspat.** Elemanları (2.10) bağıntısındaki noktalar gibi olan ve ek olarak $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \leqslant 1$ eşitsizliğini sağlayan $M$ kümesi göz önüne alınsın. $0, x_1, x_2, .., x_m$ noktalarının gerdiği bir $M$ polihedral kümesi vardır, bu nedenle $M$ kümesi

$$\langle x, x_k^* \rangle \geqslant \alpha_k, \quad k = 1, 2, .., l_1 \tag{2.12}$$

sonlu lineer eşitsizlik sistemi ile ifade edilebilir. $0 \in M$ noktası (2.12) sisteminin içine gömülerek $k = 1, 2, .., l_1$ için $\alpha_k \leqslant 0$ elde edilir. $k = 1, 2, .., l \leqslant l_1$ için $\alpha_k = 0$ olsun, bu durumda $1 \leqslant k \leqslant l$ için (2.12) eşitsizliği (2.11) bağıntısına dönüşür. Şimdi, ancak ve ancak (2.11) bağıntısını sağlayan $x$ noktalarının $K$ konisine ait olduğunu gösterelim. genel durumda eğer $x$ noktaları (2.10) bağıntısıyla tanımlanmışsa yeterince küçük $\alpha > 0$ için $\alpha x = \sum_{i=1}^{m} \alpha\lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha\lambda_i \leqslant 1$ olur, yani $\alpha x \in M$, $\alpha x$ noktaları (2.12) eşitsizliklerini ve özel olarak da (2.11) bağıntılarını sağlar. O zaman $\alpha > 0$ olduğundan $x$ noktası (2.11) homojen eşitsizliklerini sağlar. Tersine, eğer $x$ noktası (2.11) bağıntılarını sağlarsa, yeterince küçük $\alpha > 0$ için $\alpha x$ noktası (2.12) koşullarını sağlar, yani $M$ polihedronuna ait olur. Bu ise $\alpha x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \leqslant 1$, $\lambda_i \geqslant 0$ demek olup sonuçta $x = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in K$ bulunur. ■

**Teorem 2.38.** *Polihedral koniler kapalıdır.*

**İspat.** İddiamızı Tanım 2.7'yi göz önüne alarak $m$ üzerinden indüksiyon ile yapalım. $m = 1$ için istenen iddia gerçeklendiği açıktır. Farzedelim ki iddia $m$'den küçük doğal sayılar için geçerlidir ve $x \in \overline{K}$ içermesi geçerlidir. Bu varsayım nedeniyle $x$ noktasının $\{x_1, x_2, .., x_m\}$ kümesinin herhangi bir has alt kümesi tarafından doğrulan koniye ait olamayacağını kabul edebiliriz. $x \in \overline{K}$ olduğundan $\lambda_1^j x_1 + .. + \lambda_m^j x_m \to x$ olacak biçimde $\lambda_i^j, ; i = 1, 2, .., m,\ j = 1, 2, ..$ sayıları vardır. Eğer her bir $\{\lambda_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı ise $\{(\lambda_1^j, .., \lambda_m^j)\} \to (\overline{\lambda}_1, .., \overline{\lambda}_m)$ gerçekleyen yakınsak bir $\{(\lambda_1^j, .., \lambda_m^j)\}$ alt dizisi vardır ve $x = \overline{\lambda}_1 x_1 + .. + \overline{\lambda}_m x_m$ geçerlidir. Diğer yandan, var olan bu yakınsak alt dizi yardımıyla

$$\left( \frac{\lambda_1^j}{\max\{\lambda_1^j, .., \lambda_m^j\}}, ..., \frac{\lambda_m^j}{\max\{\lambda_1^j, .., \lambda_m^j\}} \right) \to (\mu_1, .., \mu_m)$$

geçerlidir. Dolayısıyla

$$\mu_1 x_1 + .. + \mu_m x_m = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\max\{\lambda_1^j, .., \lambda_m^j\}} (\lambda_1^j x_1 + .. + \lambda_m^j x_m) = 0$$

gerçeklenir. Her bir $j$ için $\frac{\lambda_i^j}{\max\{\lambda_1^j, .., \lambda_m^j\}} = 1$ olacak biçimde bir $i = i, .., m$ var olacağından $\mu_1 = .. = \mu_m = 0$ olamaz. Dolayısıyla $\mu_m \neq 0$ varsayabiliriz. Bu durumda

$$a_m = \frac{\mu_1}{\mu_m} x_1 + .. + \frac{\mu_{m-1}}{\mu_m} x_{m-1}$$

yazılabilir, bu ise varsayımımız ile çelişen, $x$ noktasının $x_1, ..x_{m-1}$ tarafından doğrulduğu demektir. ■

**Teorem 2.39.** *Eğer $K$ polihedral konisi* (2.11) *bağıntısındaki lineer eşitsizlikler sistemi ile verilmiş ise $K^*$ dual konisi de polihedral konidir ve $\gamma_k \geqslant 0$ olmak üzere $x^* = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k x_k^*$ elemanlarından oluşur.*

**İspat.** $\widetilde{K} = \{x^* : x^* = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k x_k^*, \gamma_k \geqslant 0\}$ polihedral konisi ele alınsın. Teorem 2.38 nedeniyle bu koni kapalıdır. Tanımdan dolayı, eğer $k = 1, 2, .., l$ ve $\gamma_k \geqslant 0$ için $\langle x, \sum_{k=1}^{l} \gamma_k x_k^* \rangle \geqslant 0$ ise $x \in (\widetilde{K})^*$ gerçeklenir. Fakat bu durum ancak $k = 1, 2, .., l$ için $\langle x, x_k^* \rangle \geqslant 0$ olduğunda geçerlidir. Bu ise $x \in K$ demektir. Bu nedenle $K = (\widetilde{K})^*$ geçerlidir. Sonuçta $\widetilde{K}$ kapalı olduğundan istenen $K^* = (\widetilde{K})^{**} = \widetilde{K}$ eşitliği bulunur. ■

**Teorem 2.40.** *Lineer eşitsizlikler sistemi ile verilen bir koni polihedraldir.*

**İspat.** $K$ konisi (2.11) lineer eşitsizlikler sistemi ile verilsin. Buna dual olan $K^*$ konisi polihedral olduğundan, öyle $x_i,\ i = 1, 2, .., m$ noktaları vardır ki ancak ve ancak $x^* \in K^*$ noktaları $\langle x_i, x^* \rangle \geqslant 0$ , $i = 1, 2, .., m$ eşitsizliklerini sağlar. $K$ konisi kapalı olduğundan $K = (K^*)^*$ ve Teorem 2.39 nedeniyle $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geqslant 0$ olur yani $K$ polihedral konidir. ■

Polihedral koniler ya Tanım 2.7'deki gibi ya da sonlu lineer homojen eşitsizlik sistemlerinin çözümleri biçiminde verilebilir.

**Teorem 2.41.** *Polihedral konilerin toplamları da polihedraldir.*

**İspat.** $K_1$ ve $K_2$ polihedral olsunlar. Bu durumda bu konilerin elemanları $x_1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{i1},\ \lambda_i \geqslant 0$ ve $x_2 = \sum_{j=1}^{l} \gamma_j x_{j2},\ \gamma_j \geqslant 0$ şeklinde gösterilebilir. Eğer $x \in K_1 + K_2$ ise $x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{i1} + \sum_{j=1}^{l} \gamma_j x_{j2},\ \lambda_i \geqslant 0,\ \gamma_j \geqslant 0$ olup $K_1 + K_2$ konisinini polihedral olduğu sonucuna varılır. ■

**Teorem 2.42.** *Polihedral konilerin kesişimleri de polihedraldir.*

**İspat.** Teorem 2.37 nedeniyle polihedral $K_1$ ve $K_2$ konileri (2.11) tipindeki eşitsizliklerin sonlu lineer sistemleri ile verilebilir. Açıktır ki, $K_1 \cap K_2$ konisi $K_1$ ve $K_2$ konisinin belirttiği ortak lineer eşitsizlikler sistemini sağlar. Teorem 2.40 nedeniyle $K_1 \cap K_2$ polihedral bir konidir. ■

**Teorem 2.43.** *Polihedral konilerin dualleri de polihedraldir.*

**İspat.** Teorem 2.37 ve Teorem 2.39'den elde edilen kolay bir sonuçtur. ■

**Teorem 2.44.** *$K_1, K_2, .., K_m$ polihedral konileri için*

$$(K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m)^* = K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*$$

*geçerlidir.*

**İspat.** Lemma 2.29 nedeniyle

$$(K_1 \cap K_2 \cap .. \cap K_m)^* = \overline{K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*}$$

bağıntısı geçerlidir. Fakat Teorem 2.43 nedeniyle $K_i^*, i = 1, 2, .., m$ polihedral konilerdir. Teorem 2.43 ve Teorem 2.41 nedeniyle $K_1^* + K_2^* + .. + K_m^*$ polihedral konidir ve Teorem 2.38 nedeniyle kapalıdır. Dolayısıyla kapanışı kendisine eşit olur. ∎

## 2.2 KONVEKS FONKSİYONLAR VE SUBDİFERANSİYEL

Konveks fonksiyonlar da konveks kümeler gibi ekstremal problemler teorisi ve konveks analiz çalışmalarının temel konularındandır. Aşağıda konveks fonksiyonlar, dual fonksiyonlar, pozitif homojen fonksiyonlar, yöne göre türev ve subdiferansiyel kavramları ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

### 2.2.1 Konveks Fonksiyonlar

Bundan sonra $X(= \mathbb{R}^n)$ uzayından $[-\infty, +\infty]$ uzayına tanımlı $f(x)$ fonksiyonları ile çalışılacaktır. Yani bu fonksiyonların $-\infty$ ve $+\infty$ değerlerini alabileceklerini kabul ediyoruz. Herbir $f$ fonksiyonu ile ilgili iki küme tanımlanacaktır. Bunlardan ilki, tanım kümesi dediğimiz ve $f$ fonksiyonunu sonlu ya da $-\infty$ yapan $x$ noktalarının kümesi olarak tanımladığımız

$$dom f = \{x : f(x) < +\infty\}$$

kümesidir. İkinci küme ise $f$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi denilen kümedir ki bu küme $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ve $x \in X$ olmak üzere $\alpha \geqslant f(x)$ gerçekleyen tüm $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nokta çiftlerinden oluşan kümedir, kısaca

$$epi f = \{(\alpha, x) : \alpha \geqslant f(x)\}$$

kümesidir. Dikkat edilirse, yalnızca $x \in dom f$ olduğunda $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktası $epi f$ kümesine ait olur, $f(x) = +\infty$ olduğunda $\alpha \geqslant f(x)$ gerçekleyen $\alpha$ noktası yoktur.

Öte yandan bir $f$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi fonksiyonun kendisini tamamen belirler, gerçekten kolayca görülür ki

$$f(x) = \inf_{\alpha}\{\alpha : (\alpha, x) \in epif\} \tag{2.13}$$

Genelde, $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında $(\alpha, x)$ noktasını ve $\beta \geqslant \alpha$ gerçekleyen $(\beta, x)$ noktasını içeren bir küme alınırsa ve bu kümeye bir fonksiyonun grafiküstü kümesi denilirse, bu durumda (2.13) formülü bu fonksiyonu belirlememize imkan verir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayındaki kümeler ile $\mathbb{R}^n$ uzayındaki fonksiyonlar arasında yakın bir ilişki vardır.

**Tanım 2.8.** *Epigraf kümesi $epif$ konveks olan $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.*

**Tanım 2.9.** *$-\infty$ değerini almayan ve özdeş olarak da $+\infty$ değerine eşit olmayan bir $f$ fonksiyonuna has (=proper) fonksiyon denir.*

Bu tanımdan, bir $f$ has fonksiyonu için $domf \neq \emptyset$ ve $x \in domf$ için $f(x)$ değerinin sonlu olduğu sonucuna varılır. Has fonksiyonlar için konveksliğin, grafiküstü kümesi kullanılmadan verilen diğer ve kullanışlı tanımı aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

**Lemma 2.45.** *Bir $f$ has fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $x_1, x_2$ için*

$$\begin{gathered} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0\ , \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{gathered} \tag{2.14}$$

*bağıntılarının sağlanmasıdır.*

**İspat.** Eğer $f$ konveks ise Tanım 2.8 nedeniyle $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere $(\alpha_1, x_1) \in epif,\ (\alpha_2, x_2) \in epif$ gerçeklendiğinde

$$\lambda_1(\alpha_1, x_1) + \lambda_2(\alpha_2, x_2) = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in epif$$

kapsaması gerçeklenir, başka bir deyişle $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ eşitsizliği gerçeklenir. Özel olarak, $\alpha_1 = f(x_1),\ \alpha_2 = f(x_2)$ alınırsa $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ için $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ istenen eşitsizliği elde edilir. Tersine $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $(\alpha_1, x_1) \in epif,\ (\alpha_2, x_2) \in epif$ olsun. Şimdi $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ gerçeklensin, $(\alpha_1, x_1) \in epif,\ (\alpha_2, x_2) \in epif$ nedeniyle $f(x_1) \leqslant \alpha_1$ ve $f(x_2) \leqslant \alpha_2$ olduğundan $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ gerçeklenir. Dolayısıyla $\lambda_1(\alpha_1, x_1) + \lambda_2(\alpha_2, x_2) = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in epif$ elde edilir ki bu da $epif$ kümesinin ve dolayısıyla da $f$ fonksiyonunun konveks olması demektir. ∎

**Lemma 2.46.** *Eğer $f$ fonksiyonu konveks ise $domf$ kümesi de konvekstir.*

**İspat.** $x_1, x_2 \in domf$ olsun. Bu durumda sonlu $\alpha_1, \alpha_2$ sayıları vardır ve $f(x_1) \leqslant \alpha_1$ ve $f(x_2) \leqslant \alpha_2$ eşitsizlikleri gerçeklenir. Dolayısıyla $(\alpha_1, x_1) \in epif$, $(\alpha_2, x_2) \in epif$ olur. $f$ konveks olduğundan $epif$ konveks kümedir ve bu nedenle $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere $\lambda_1(\alpha_1, x_1) + \lambda_2(\alpha_2, x_2) \in epif$ kapsaması ve dolayısıyla da $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 < +\infty$ gerçeklenir. Kısacası $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \neq \infty$ olduğundan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in domf$ bulunur. Böylece ispat biter. ∎

Konveks fonksiyonların bazı özellikleri aşağıda verilecektir.

**Lemma 2.47.** *$I$ herhangi bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $f_i(x)$ konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ fonksiyonu da konvekstir.*

**İspat.** Açıktır ki $f$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi $f_i$ fonksiyonlarının grafiküstü kümelerinin kesişimidir, yani $epif = \bigcap_{i\in I} epif_i$ eşitliği geçerlidir. Konveks kümelerin kesişimi de konveks olduğundan $epif$ kümesi konveks olup sonuçta $f$ fonksiyonu konveks olur. ∎

**Lemma 2.48.** *$f$ has konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, .., m$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_m = 1$ olmak üzere $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + .. + \lambda_m x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + .. + \lambda_m f(x_m)$ eşitsizliği gerçeklenir.*

**İspat.** $\lambda_i$ sayılarının sıfıra eşit olması sadece toplama katılanların sayısını azaltacağından, tüm $\lambda_i$ sayılarının sıfırdan büyük alınabilir. Eğer bir $i$ için $x_i \notin domf$ ise $f(x_i) = +\infty$ ve dolayısıyla $\lambda_i f(x_i) = +\infty$ olur ve eşitsizliğin sağ tarafı $+\infty$ olduğundan eşitsizlik aşikar olarak gerçeklenir. Şimdi $i = 1, 2, , .., m$ için $x_i \in domf$ olsun. $epif$ kümesinin konveks bir küme ve konveks bir konveks kümenin elemanlarının konveks kombinasyonlarını içerdiği gerçeği nedeniyle $(f(x_i), x_i) \in epif$ kapsamasından $(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + .. + \lambda_m f(x_m), \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + .. + \lambda_m x_m) \in epif$ elde edilir. Dolayısıyla da $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + .. + \lambda_m x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + .. + \lambda_m f(x_m)$ eşitsizliği gerçeklenir. ∎

**Lemma 2.49.** *Has konveks fonksiyonların negatif olmayan çarpanlı toplamları yine konveks fonksiyondur.*

**İspat.** Eğer $i = 1, 2, .., m$ için $f_i$ has konveks fonksiyonlar ise, Lemma 2.45 nedeniyle $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere $f_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f_i(x_1) + \lambda_2 f_i(x_2)$.

Bu eşitsizlikler negatif olmayan $\alpha_i \geqslant 0$ skalerleri ile çarpılırsa $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x_1) + \lambda_2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x_2)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece lemmanın ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur. ∎

**Uyarı 2.4.** *Eğer $f_0(x)$ fonksiyonu konveks bir $D$ kümesi üzerinde tanımlanmış ve $D$ kümesi üzerinde* (2.14) *bağıntılarını sağlasın. Bu durumda*

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & , \ x \in D \\ +\infty & , \ x \notin D \end{cases}$$

*fonksiyonu konvekstir. Özel olarak $G$ bir konveks küme olmak üzere, $G$ kümesinin indikatör fonksiyonu olan*

$$\delta_G(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in G \\ +\infty & , \ x \notin G \end{cases}$$

*fonksiyonu da konveks olur.*

Aşağıdaki lemma daha sonraki ispatlarda kullanılacağı için önemlidir.

**Lemma 2.50.** *$g(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha$'ya göre konveks ve $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{dom} g$ olmak üzere $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_0)}{\alpha_2 - \alpha_0} \geqslant \frac{g(\alpha_1) - g(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0},$$

$$\frac{g(\alpha_1) - g(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0} \leqslant \frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

*eşitsizlikleri gerçeklenir.*

**İspat.** $\lambda_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0}$ ve $\lambda_2 = 1 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0}$ alınırsa $\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} \alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} \alpha_0 = \alpha_1$ olur. Dolayısıyla

$$g(\alpha_1) = g(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_0) \leqslant \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_2) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_0) \tag{2.15}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin iki tarafından $g(\alpha_0)$ çıkartılıp her taraf $\alpha_1 - \alpha_0$'a bölünürse lemmanın ilk eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olduğundan (2.15) eşitsziliği

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_1) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_1) \leqslant \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_2) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} g(\alpha_0)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_0} \Big[ g(\alpha_1) - g(\alpha_0) \Big] \leqslant \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_2 - \alpha_0} \Big[ g(\alpha_2) - g(\alpha_1) \Big]$$

eşitsizliği ve dolayısıyla da lemmanın ikinci eşitsizliği elde edilir. Dikkat edilirse lemmanın ilk eşitsizliği nedeniyle $\alpha_0 < \alpha$ olmak üzere $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)-g(\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}$ fonksiyonu $\alpha$'nın azalmayan bir fonksiyonudur. ∎

Bir fonksiyonunu konveksliği, sürekliliği ile yakından ilgilidir.

**Teorem 2.51.** *$f$ has konveks fonksiyonu bir $x_0 \in domf$ noktasının bir civarında üstten sınırlı ise bu $x_0$ noktasında süreklidir.*

**İspat.** Genelliği bozmaksızın $x_0 = 0$ alınabilir. $\Omega$ ile sıfır merkezli açık bir küre gösterilsin ve $c_1$ bir sabit olmak üzere için her $x \in \Omega$ için $f(x) \leqslant c_1$ gerçeklensin. Sabit bir $x \in \Omega$ için $g(\alpha) = f(\alpha x)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Lemma 2.50'un ilk eşitsizliğinde $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \alpha > 0, \alpha_2 = 1$ alınırsa $\frac{g(\alpha)-g(\alpha_0)}{\alpha} \leqslant \frac{g(1)-g(0)}{1}$ elde edilir. $g(1) = f(x) \leqslant c_1$ ve $g(0) = f(0) \leqslant c_1$ olduğundan

$$f(\alpha x) - f(0) \leqslant 2c_1\alpha \tag{2.16}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Diğer taraftan Lemma 2.50'un ikinci eşitsizliğinde $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha$ alınırsa $\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)} \leqslant \frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha}$ elde edilir. $g(-1) = f(-x) \leqslant c_1$ ve $g(0) = f(0) \leqslant c_1$ olduğundan

$$-2c_1\alpha \leqslant f(\alpha x) - f(0) \tag{2.17}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla (2.16) ve (2.17) eşitsizliklerinden

$$|f(\alpha x) - f(0)| \leqslant 2c_1\alpha \tag{2.18}$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{2c_1} < 1$ ve $\Omega_\delta = \delta\Omega$ olsun. Bu durumda bir $y \in \Omega_\delta$ için öyle bir $x \in \Omega$ noktası vardır ki $y = \delta x$ gerçeklenir. (2.18) bağıntısı nedeniyle $|f(y) - f(0)| = |f(\delta x) - f(0)| \leqslant 2\delta c_1 = \varepsilon$ elde edilir, bu ise $f$ fonksiyonunun 0 noktasındaki sürekliliğini kanıtlar. ∎

**Teorem 2.52.** *Eğer $f(x)$ konveks fonksiyonu bir $x_0$ noktasında sürekli ise $f$ fonksiyonu bu $x_0$ noktasında Lipschitz koşulunu sağlar, yani $L > 0$ bir sabit olmak üzere $x_0$ noktasının bir civarındaki her $x$ için $|f(x) - f(x_0)| \leqslant L\|x - x_0\|$ gerçeklenir.*

**İspat.** $x_0 = 0$ alınsın, $\Omega$ ise sıfır merkezli $r$ yarıçaplı bir küre olsun. $\|y\| < \frac{r}{2}$ olacak şekilde bir $y \in \Omega$ alınsın. $x = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|}$ noktası için (2.18) eşitsizliği nedeniyle $|f(y) - f(0)| = |f(\frac{2\|y\|}{r}x) - f(0)| \leqslant \frac{4c_1}{r}\|y\| = L\|y\|$ elde edilir. ∎

**Teorem 2.53.** *[18] $f$ bir has konveks fonksiyon ise $ridomf$ kümesinde süreklidir.*

Konveks fonksiyonlarda ayrılabilme teoremlerinin uygulamasının doğal bir sonucu olarak dual fonksiyonlar ortaya çıkmaktadır. Tanım 2.2'de verilen

$$W_M(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle : x \in M\}$$

destek fonksiyonu ile bir kapalı konveks kümenin tamamen karakterize edildiği Teorem 2.19'te verilmişti. Şimdi bir $f$ kapalı konveks fonksiyonun grafiküstü kümesinin destek fonksiyonunu hesaplayalım. $epif \in \mathbb{R}^{n+1}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$W_{epif}(x^{\circ*}, x^*) = \sup_{(x^\circ, x)} \{\langle x, x^* \rangle + x^\circ x^{\circ*} : (x^\circ, x) \in epif\}$$

elde edilir. Eğer $x^{\circ*} > 0$ ise verilen $x$ ve $x^\circ$ noktası istenildiği kadar büyük olabileceğinden $W_{epif}(x^{\circ*}, x^*) = +\infty$ olur. Geriye $x^{\circ*} \leqslant 0$ için $W_{epif}$ fonksiyonunu hesaplamak kaldı. $f$ kapalı konveks olduğundan $x^{\circ*} \leqslant 0$ için $W_{epif}$ fonksiyonunu hesaplamak yerine $W_{epif}(-1, x^*)$ fonksiyonunu hesaplamak yeterlidir. Eğer $x^{\circ*} = -1$ ise

$$W_{epif}(-1, x^*) = \sup_{(x^\circ, x)} \{\langle x, x^* \rangle - x^\circ : x^\circ \geqslant f(x) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

bulunur.

**Tanım 2.10.** $f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$ *fonksiyonu $f$ fonksiyonunun dual fonksiyonu denir.*

**Lemma 2.54.** *Dual fonksiyon daima kapalı ve konvekstir.*

**İspat.** Sabit bir $x$ için $\langle x, x^* \rangle - f(x)$ fonksiyonu $x^*$'a göre lineerdir, dolayısıyla da $x^*$'a göre kapalı ve konvekstir. $f^*(x^*)$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi $\langle x, x^* \rangle - f(x)$ fonksiyonlarının grafiküstü kümelerinin kesişimi olduğundan kapalı ve konvekstir. Bu nedenle $f^*(x^*)$ fonksiyonu da kapalı ve konvekstir. ∎

Fenchel-Young eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik Tanım 2.10'dan kolayca elde edilir.

**Lemma 2.55.** $f(x) + f^*(x^*) \geqslant \langle x, x^* \rangle$ *eşitsizliği geçerlidir.*

Aşağıdaki teorem $f$ ile $f^*$ arasındaki bağıntıyı veren Fenchel-Moreau teoremidir.

**Teorem 2.56.** *[36] $f$ has fonksiyonu kapalı ve konveks olsun. Bu durumda $f(x) = f^{**}(x)$ gerçeklenir, buradaki $f^{**}(x)$ Tanım 2.10'e göre*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^*} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)\} \tag{2.19}$$

*fonksiyonudur.*

Her $\lambda > 0$ sayısı için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ gerçekleyen $f$ fonksiyonuna pozitif homojen denir.

**Lemma 2.57.** *Pozitif homojen kapalı konveks fonksiyonlar için daima $f(0) = 0$ gerçeklenir.*

**İspat.** $f$ konveks ve poazitif homojen olduğundan $f(x_1 + x_2) = f(2(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)) = 2f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$ eşitsizliği aslında daha genel olarak $f(x_1 + x_2 + .. + x_m) \leqslant f(x_1) + f(x_2) + .. + f(x_m)$ eşitsiziliği gerçeklenir. ilk eşitsizlikte $x_1 = 0$ ve $x_2 = x$ alınırsa $f(x) \leqslant f(0) + f(x)$ yani $f(0) \geqslant 0$ elde edilir. Öte yandan $f$ fonksiyonu kapalı olduğundan $\lim_{\lambda \downarrow 0} f(\lambda x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda f(x) = 0 \geqslant f(0)$ gerçeklenir. Dolayısıyla ispat biter. ∎

**Teorem 2.58.** *$f$ fonksiyonu pozitif homojen kapalı konveks ise dual fonksiyonu $f^*(x^*) = \delta_{domf^*}(x^*)$ olur.*

**İspat.** Lemma 2.55 ve Lemma 2.57 nedeniyle $f^*(x^*) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\} \geqslant -f(0) = 0$ olur. Şimdi öyle bir $x_1$ noktası var olsun ki $\langle x_1, x^*\rangle - f(x_1) > 0$ gerçeklensin. Bu durumda $f^*(x^*) \geqslant \sup_{\lambda>0}\{\langle \lambda x_1, x^*\rangle - f(\lambda x_1)\} = \sup_{\lambda>0} \lambda[\langle x_1, x^*\rangle - f(x_1)] = +\infty$ gerçeklenir. Dolayısıyla, $f^*(x^*)$ fonksiyonu değer olarak ya 0 ya da $+\infty$ değerini alır. Bu nedenle

$$f^*(x^*) = \delta_{domf^*}(x^*) = \begin{cases} 0 & , x^* \in domf^* \\ +\infty & , x \notin domf^* \end{cases}$$

gerçeklenir. ∎

**Teorem 2.59.** *$f$ fonksiyonu pozitif homojen kapalı konveks olsun. Bu durumda $f(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle : x^* \in domf^*\}$ gerçeklenir.*

**İspat.** Teorem 2.56 nedeniyle $f(x) = f^{**}(x)$ geçerlidir. Teorem 2.58 nedeniyle de $f^*(x^*) = \delta_{domf^*}(x^*)$ geçerlidir. Bu durumda $f(x) = f^{**}(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)\} = \sup_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle - \delta_{domf^*}(x^*)\} = \sup_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle : x^* \in domf^*\}$ istenen sonucu bulunur. ∎

### 2.2.2 Yöne Göre Türev Ve Subdiferansiyel

Konveks fonksiyonlar genel olarak diferansiyellenebilir olmak zorunda değildirler, ancak yöne göre türevlere sahiptirler. Bununla birlikte düzgün fonksiyonlar için kullandığımız gradient kavramı yerine konveks fonksiyonlar için subgradient kavramını tanımlamak mümkündür. Aşağıda bu kavramlar ve bunların uygulamaları anlatılacaktır.

$$f'(x,p) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda p) - f(x)}{\lambda}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine $f$ fonksiyonunun $x$ noktasındaki $p \in X$ yönündeki türevi denir.

**Lemma 2.60.** *$f$ bir has konveks fonksiyon ve $x_0 \in dom f$ olsun. Bu durumda herhangi bir $p \in X$ için sonlu ya da sonsuz değerli $f'(x,p)$ türevi mevcuttur.*

**İspat.** Her $\lambda > 0$ için $x_0 + \lambda p \notin dom f$ ise $f(x_0 + \lambda p) = +\infty$ ve $f'(x_0, p) = +\infty$ olur. Eğer küçük $\lambda > 0$ için $x_0 + \lambda p \in dom f$ ise Lemma 2.50 nedeniyle $\frac{f(x_0+\lambda p)-f(x_0)}{\lambda}$ ifadesi $\lambda$ sıfıra azalarak yaklaştıkça $\lambda$'nın azalmayan bir fonksiyonudur. Bu nedenle daima $f'(x,p) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0+\lambda p)-f(x_0)}{\lambda}$ limiti vardır. ■

**Tanım 2.11.** *$f(x)$ bir has konveks fonksiyon olmak üzere her $x \in X$ için $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x - x_0, x^* \rangle$ eşitsizliğini gerçekleyen $x^*$ vektörüne, $f$ fonksiyonunun $x_0 \in dom f$ noktasındaki bir subgardienti denir.*

**Tanım 2.12.** *$f$ has konveks fonksiyonunun bir $x_0$ noktasındaki subgradientlerinin kümesine $f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki subdiferansiyeli denir ve*

$$\partial f(x_0) = \{x^* : f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x - x_0, x^* \rangle, \ \forall x \in X\}$$

*ile gösterilir.*

**Teorem 2.61.** *Eğer $f'(x_0,p)$ türevi $p$'ye göre kapalı bir fonksiyon ise $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ ve $f'(x_0,p) = \sup_{x^*}\{\langle p, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x_0)\}$ gerçeklenir.*

**İspat.** $f'(x_0,p)$ pozitif homojen ve konveks olduğundan Teorem 2.59 nedeniyle

$$f'(x_0,p) = \sup_{x^*}\{\langle p, x^* \rangle : x^* \in dom(f'(x_0,\cdot))^*\} \tag{2.20}$$

olur, burada $(f'(x_0,\cdot))^*$ ile $f'(x_0,0)$ fonksiyonunun $p$'ye göre duali, yani

$$(f'(x_0,\cdot))^*(x^*) = \sup_{p}\{\langle p, x^* \rangle - f'(x_0,p)\} \tag{2.21}$$

kastedilmektedir. Öte yandan Teorem 2.58 nedeniyle

$$(f'(x_0,\cdot))^*(x^*) = \begin{cases} 0 & , \ x^* \in dom(f'(x_0,\cdot))^* \\ +\infty & , \ x \notin dom(f'(x_0,\cdot))^* \end{cases}$$

olur. Dolayısıyla (2.21) bağıntısı nedeniyle $x^* \in dom(f'(x_0,\cdot))^*$ için gerek ve yeter koşulun $0 \geqslant \langle p, x^* \rangle - f'(x_0, p)$ olduğu elde edilir. Bu son elde edilen ise (**??**) ile eşdeğerdir. Buradan $\partial f(x_0) = \partial_p f'(x_0, 0) = dom(f'(x_0,\cdot))^*$ bulunur. Bu eşitlikler ve (2.20) nedeniyle ispat biter. ∎

**Teorem 2.62.** *Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir $x_0$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa $\partial f(x_0)$ kümesi tek bir $f'(x_0)$ gradient vektöründen oluşur.*

**İspat.** Eğer $f(x)$ fonksiyonu bir $x_0$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa $f'(x_0, p) = \langle p, f'(x_0) \rangle$ olup, sonuçta $f'(x_0, p)$ türevi $p$'nin kapalı bir fonksiyonudur. Teorem 2.61 nedeniyle $\langle p, f'(x_0) \rangle = \sup_{x^*}\{\langle p, x^* \rangle : x^* \in \partial f(x_0)\}$ eşitliği geçerlidir. Bu ise ancak ve yalnız $\partial f(x_0)$ kümesinin tek bir $f'(x_0)$ noktasından oluşması ile mümkündür. ∎

İki has konveks fonksiyonun toplamının subdiferansiyeli hakkındaki aşağıdaki teorem Moreau-Rockafellar teoremi olarak bilinir.

**Teorem 2.63.** *[36] $f_1$ ve $f_2$ iki has konveks fonksiyon olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olsun. Ayrıca öyle bir $x_1 \in dom f_1 \cap dom f_2$ noktası var olsun ki $f_1$ fonksiyonu bu $x_1$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\partial f(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$ gerçeklenir.*

**Teorem 2.64.** *[36] $riK_1 \cap ...riK_m \neq \emptyset$ olsun, bu durumda $(K_1 \cap ... \cap K_m)^* = K_1^* + ... + K_m^*$ eşitliği geçerlidir.*

**Uyarı 2.5.** *$M$ konveks küme olmak üzere $\partial \delta_M(x_0)$ subdiferansiyel kümesini belirleyelim. Tanımdan dolayı $x^* \in \partial \delta_M(x_0)$ için gerek ve yeter koşul $\delta_M(x) - \delta_M(x_0) \geqslant \langle x - x_0, x^* \rangle$ gerçeklenmesidir. Fakat $\delta_M(x_0) = 0$ olup, $x \notin M$ için $\delta_M(x) = +\infty$ olduğundan eşitsizlik daima doğrudur. Her $x \in M$ için*

$$0 \geqslant \langle x - x_0, x^* \rangle \tag{2.22}$$

*gerçeklenir. $K_M^*(x_0) = con(M - x_0) = \{p : p = \lambda(x - x_0), \lambda > 0, x \in M\}$ olduğundan (2.22) eşitsiziliği $-x^* \in (con(M - x_0))^*$ dahil etmesine eşdeğerdir. Böylece*

$$\partial \delta_M(x_0) = -(con(M - x_0))^* = -K_M^*(x_0) \tag{2.23}$$

*elde edilir.*

**Teorem 2.65.** *$M^*$ bir kapalı konveks küme ve $f(x) = \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle : x^* \in M^*\}$ olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonunun bir $x_0$ noktasındaki subdiferansiyeli*

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in M^* : \langle x_0, x^* \rangle = f(x_0)\}$$

*kümesidir ve özel olarak $x_0 = 0$ ise $\partial f(0) = M^*$ olur.*

**İspat.** $x^* \in M^*$ ve $\langle x_0, x^* \rangle = f(x_0)$ gerçeklensin. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun tanımı gereği herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geqslant \langle x, x^* \rangle$ olup $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x, x^* \rangle - \langle x_0, x^* \rangle = \langle x - x_0, x^* \rangle$ eşitsizliği yani $x^* \in \partial f(x_0)$ içermesi gerçeklenir. Tersine $x_0^* \in \partial f(x_0)$ olsun fakat $x_0^* \notin M^*$ gerçeklensin, bu durumda kapalı konveks küme ile o kümeye ait olmayan bir noktanın ayrılabilmesini karakterize eden Teorem 2.15 nedeniyle öyle bir $p$ vektörü vardır ki

$$\sup_{x^*}\{\langle p, x^* \rangle : x^* \in M^*\} < \langle p, x_0^* \rangle \tag{2.24}$$

kesin eşitsizliği geçerli olur. Öte yandan herhangi $A, B \in \mathbb{R}^n$ kümeleri için $\sup(A - B) \geqslant \sup A - \sup B$ gerçeğinden haraketle $\sup_{x^*}\{\langle x - x_0, x^* \rangle : x^* \in M^*\} \geqslant \sup_{x^*}\{\langle x, x^* \rangle : x^* \in M^*\} - \sup_{x^*}\{\langle x_0, x^* \rangle : x^* \in M^*\} = f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x - x_0, x_0^* \rangle$ eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için geçerli olur, özel olarak $x = x_0 + p$ alınırsa (2.24) bağıntısıyla çelişen $\sup_{x^*}\{\langle p, x^* \rangle : x^* \in M^*\} \geqslant \langle p, x_0^* \rangle$ ifadesi elde edilir. Şu halde $x_0^* \in \partial f(x_0)$ iken $x_0^* \in M^*$ gerçeklenmek zorundadır. $x_0^* \in \partial f(x_0)$ olduğundan $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x - x_0, x_0^* \rangle = \langle x, x_0^* \rangle - \langle x_0, x_0^* \rangle$ ve buradan da $f(x) - \langle x, x_0^* \rangle \geqslant f(x_0) - \langle x_0, x_0^* \rangle$ eşitsizliğinin her $x \in \mathbb{R}^n$ için geçerli olduğu anlaşılır, özel olarak $x = 0$ alınırsa $f(0) = 0$ olduğundan $\langle x_0, x_0^* \rangle \geqslant f(x_0)$ eşitsizliği geçerlidir. Diğer yandan $x_0^* \in M^*$ için $f$ fonksiyonunun tanımından $f(x_0) \geqslant \langle x_0, x_0^* \rangle$ geçerlidir. Elde edilen bu son iki eşitsizlikten istenilen $f(x_0) = \langle x_0, x_0^* \rangle$ eşitliği elde edilir. Özel olarak $x_0 = 0$ ise her $x^* \in M^*$ için $0 = f(0) = \langle 0, x^* \rangle = 0$ olduğundan $\partial f(0) = M^*$ gerçeklenir. ∎

## 2.3 KONVEKS KÜME-DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

$X$ ve $Y$ sonlu boyutlu Öklid uzayları ve $Z = X \times Y$ olsun. Herhangi bir $M \subseteq Z$ kümesini göz önüne alınsın. Bu durumda $M$ kümesi

$$a(x) = \{y : (x, y) \in M\}$$

formülü ile küme-değerli bir $a : X \to Y$ dönüşümünü tanımlar. Bundan sonra aksi sölenmedikçe $a$ ile küme-değerli bir dönüşüm kastedilecektir. Tanımdan anlaşılacağı üzere $M$ kümesi $a$ dönüşümünün grafiğidir. Bu grafik

$$gph\, a = \{(x, y) : y \in a(x)\}$$

kümesi ile ifade edilir. Öte yandan $a$ dönüşümünün tanım kümesi

$$dom\, a = \{x : a(x) \neq \emptyset\}$$

ve $a(x)$ kümesinin normu

$$\|a(x)\| = \sup_y\{\|y\| : y \in a(x)\}$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve özel olarak $\|\emptyset\| = 0$ kabul edilir.

**Tanım 2.13.** *$gph\, a(\subseteq Z)$ kümesi konveks ise $a$ dönüşümüne bir konveks dönüşüm denir.*

Daha açık ifade ile herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \supseteq \lambda a(x_1) + (1-\lambda)a(x_2),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

gerçekleniyorsa $a$ dönüşümüne konveks küme-değerli dönüşüm denir. $M \subseteq X \times Y$ konveks ise $a(x) = \{y : (x,y) \in M\}$ kümesi konvesktir ve $gph\, a = M$ geçerlidir. Ayrıca $a(x)$ kümesi boş olabilir ve bir $A \subset Y$ için $A + \emptyset = \emptyset$ ve $\lambda\emptyset = \emptyset$ geçerlidir.

Aşağıda konveks küme-değerli dönüşüm örnekleri verilmiştir.

**Örnek 1:** $Y = \mathbb{R}$ ve $f$ fonksiyonu $X$ üzerinde konveks bir fonksiyon olmak üzere $a(x) = \{y \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant y\}$ şeklinde tanımlanan $a : X \to Y$ küme-değerli dönüşümü konveks bir dönüşümdür.

**Örnek 2:** $\varphi(x,y)$ fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde konveks bir fonksiyon olduğunda $a(x) = \{y : \varphi(x,y) \leqslant 0\}$ şeklinde tanımlanan $a : (X \times Y) \to Y$ dönüşümü konveks küme-değerli bir dönüşümdür, gerçekten $\varphi(x_1, y_1) \leqslant 0, \varphi(x_2, y_2) \leqslant 0$ olduğundan

$$\varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leqslant \lambda\varphi(x_1,y_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2,y_2) \leqslant 0$$

yani $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ gerçeklenir. Bu ise $a$ küme-değerli dönüşümünün konveks olması demektir.

**Örnek 3:** $A : X \to Y$ lineer bir dönüşüm ve $U \subseteq Y$ konveks bir küme olmak üzere $a(x) = Ax + U$ konveks bir küme-değerli dönüşümdür.

**Tanım 2.14.** *$a(x)$ kümesi konveks ise $a$ küme-değerli dönüşümüne bir konveks değerli dönüşüm denir.*

**Tanım 2.15.** *$gph\, a$ kümesi polihedral ise $a$ dönüşümüne bir polihedral dönüşüm denir.*

**Tanım 2.16.** *$gph\, a$ kümesi kapalı ise $a$ dönüşümüne bir kapalı dönüşüm denir.*

**Tanım 2.17.** *Eğer her $x \in dom\, a$ için $\|a(x)\| \leqslant c(1 + \|x\|)$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa $a$ dönüşümü sınırlıdır denir.*

**Tanım 2.18.** *$Y$ uzayındaki sıfır noktasının her $U$ komşuluğuna karşılık, $X$ uzayının sıfır noktasının $\forall x \in x_0 + V$ için $a(x) \subseteq a(x_0) + U$, $(a(x_0) \subseteq a(x) + U)$ koşulunu sağlayan bir $V$ komşuluğu varsa $a$ dönüşümüne $x_0 \in X$ noktasında üstten (alttan) yarı süreklidir denir. $a$ dönüşümü $x_0$ noktasında hem alttan hem de üstten sürekli ise $x_0$ noktasında süreklidir denir.*

**Tanım 2.19.** *Her $x_1, x_2 \in M \subseteq X$ için $\rho(a(x_1), a(x_2)) \leqslant L\|x_1 - x_2\|$ olacak şekilde bir $L > 0$ sabiti varsa $a$ dönüşümü $M$ üzerinde $L$ sabiti ile Lipschitz koşulunu sağlıyor denir, burada $A$ ve $B$ kümeleri $Y$ uzayının birer alt kümeleri olmak üzere $\rho(A, B) = \max\{\sup\limits_{y_1 \in A} \inf\limits_{y_2 \in B} \|y_1 - y_2\|, \sup\limits_{y_2 \in B} \inf\limits_{y_1 \in A} \|y_1 - y_2\|\}$ kümeler arasındaki uzaklık fonksiyonudur.*

**Lemma 2.66.** *$a$ dönüşümü konveks kapalı ve bir $x_0 \in dom\, a$ içn $a(x_0)$ kümesi sınırlı olsun, bu durumda $a$ dönüşümü sınırlıdır.*

**İspat** Aksini kabul edelim. O zaman $\frac{\|y_k\|}{1+\|x_k\|} \to \infty$ gerçekleyen bir $z_k = (x_k, y_k)$, $y_k \in a(x_k)$ dizisi var olurdu. $i)$ $\|x_k\| < r$ olsun. $\lambda_k = \frac{1+\|x_k\|}{\|y_k\|}$ diyelim, bu durumda $\lambda_k \to 0$ olur. Bir $y_0 \in a(x_0)$ noktası göz önüne alınsın, bu nokta yardımıyla

$$\overline{x}_k = \lambda_k x_k + (1 - \lambda_k)x_0, \quad \overline{y}_k = \lambda_k y_k + (1 - \lambda_k)y_0$$

noktaları oluşturulsun. Büyük $k$ sayıları için $0 < \lambda_k < 1$ ve $a$ konveks olduğundan $\overline{y}_k \in a(\overline{x}_k)$ içermesi gerçeklenir. Ayrıca $\overline{x}_k \to x_0$ geçerlidir ve

$$\overline{y}_k = (1 + \|x_k\|)\frac{y_k}{\|y_k\|} + (1 - \lambda_k)y_0$$

şeklinde yazılabilir. $\frac{y_k}{\|y_k\|} \to \omega$ denirse $\|\omega\| = 1$ olur. Benzer şekilde $\|x_k\| \to \alpha$ olduğunda $\overline{y}_k \to (1+\alpha)\omega + y_0$ elde edilir. $a$ dönüşümünün kapalı olmasından dolayı $(1+\alpha)\omega + y_0 \in a(x_0)$ içermesi geçerlidir ve $y_0$ noktası $a(x_0)$ kümesinin herhangi bir elemanı olduğundan $(1 + \alpha)\omega + a(x_0) \subseteq a(x_0)$ kapsaması elde edilir. Bu ise $a(x_0)$ kümesinin sınırlı olması ile çelişir. $ii)$ $\|x_k\| \to +\infty$ olsun. $\lambda_k = \frac{1+\|x_k\|}{\|x_k\|\|y_k\|}$ diyelim. $i)$ şıkkındakine benzer işlemler tekrarlanırsa $\overline{y}_k = \frac{a+\|x_k\|}{\|x_k\|} \cdot \frac{y_k}{\|y_k\|} + (1-\lambda_k)y_0$ ve $\frac{1+\|x_k\|}{\|x_k\|} \to 1$ elde edilerek yine $a$ dönüşümünün sınırlı olması ile çelişilir. ∎

**Lemma 2.67.** *$K \subseteq Z$ bir konveks kapalı koni olmak üzere $gph\, a = K$ olsun. Bu durumda a dönüşümünün sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul $a(0) = \{0\}$ gerçeklenmesidir.*

**İspat** $gph\, a = K$ konisi konveks ve kapalı olduğundan $a$ dönüşümü konveks ve kapalıdır. Üstelik $a(0) = \{0\} \neq \emptyset$ olduğundan $0 \in dom\, a$ gerçeklenir. Yalnızca sıfır noktasından oluşan $\{0\} = a(0)$ kümesi sınırlı olduğundan Lemma 2.66 nedeniyle $a$ dönüşümü sınırlıdır. Tersine şimdi $a$ sınırlı olsun ancak sıfırdan farklı bir $y_0 \neq 0$ için $y_0 \in a(0)$ içermesi doğru olsun. $K$ koni olduğundan $\lambda > 0$ için $\lambda(0, y_0) = (0, \lambda y_0) \in K$ gerçeklenirdi bu ise $\lambda > 0$ için $\lambda y_0 \in a(0)$ demektir, ancak bu $a(0)$ kümesinin sırsız olması demektir ki bu da $a$ dönüşümününü sınırlı olması ile çelişir. ∎

**Lemma 2.68.** *$a^*(y^*)$ dual dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $dom\, a = X$ olmasıdır.*

**İspat** $K^*$ dual konisinin daima kapalı olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla $a^*(y^*)$ kapalı konveks bir dönüşümdür. Eğer $x^* \in a^*(0)$ ise $K^*$ tanımından her $(x, y) \in K$ için $-\langle x, x^* \rangle + \langle y, 0 \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği gerçeklenir. Sonuçta

$$\langle x, x^* \rangle \leqslant 0, \quad x \in dom\, a \tag{2.25}$$

elde edilir. Eğer $dom\, a = X$ ise bu son eşitsizlik ancak $x^* = 0$ durumunda yani $a^*(0) = \{0\}$ olduğunda mümkündür, bu ise Lemma 2.67 ye göre $a^*(y^*)$ dual dönüşümünün sınırlı olması demektir. Tersine, eğer $x^* \neq 0$ ise $dom\, a$ kümesi (2.25) eşitsizliği ile belirlenen yarı uzaydır. Bu durumda $a^*(0)$ kümesi sıfır olmayan elemanları içerir yani $a^*$ sınırlı olamaz, yani $dom\, a \neq X$ çelişkisi elde edilir. ∎

**Teorem 2.69.** *[18] a dönüşümü konveks kapalı ve bir $x_0 \in dom\, a$ noktası için $a(x_0)$ kümesi sınırlı olsun, bu durumda a dönüşümü $x_0$ noktası civarında Lipschitz koşulunu sağlar.*

**Teorem 2.70.** *a konveks kapalı bir dönüşüm ve $M \subseteq X$ kompakt kümesi için $M \subseteq intdom\, a$ kapsaması geçerli olsun. Bu durumda a dönüşümü M kompakt kümesi üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar.*

**İspat.** $M$ kompakt olduğundan $M + rB \subseteq intdom\, a$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla bir önceki teoremdeki $x_0$ noktasını $M$ kümesinden seçmek ve $r$ sayısını da uygun bir şekilde seçmek mümkündür. ∎

### 2.3.1 Yerel Dual Küme-Değerli Dönüşümler

Bilindiği gibi diferansiyellenebilir fonksiyonların yerel özellikleri, yeterli mertebeden türevlerin ve bu türevlere bağlı gradientlerin yardımıyla belirlenebilir. Konveks fonksiyonlar için gradient kavramının yerini subdiferansiyel kavramı ve küme-değerli dönüşümler için ise benzer rolü yerel dual dönüşümler oynar. Aşağıda yerel dual dönüşümlere ait temel kavramlar verilecektir.
Öncelikle aşağıda tanımlanan iki fonksiyonu göz önüne alalım;

$$W_a(x, y^*) = \inf_y \{\langle y, y^*\rangle : y \in a(x)\} \tag{2.26}$$

$$\Omega_a(x^*, y^*) = \inf_{(x,y)} \{-\langle x, x^*\rangle + \langle y, y^*\rangle : (x, y) \in gph\ a\} \tag{2.27}$$

Ayrıca $a(x) = \emptyset$ için $W_a(x, y^*) = +\infty$ kabul edilir. Dikkat edilirse $W_a(x, y^*)$ fonksiyonu $a(x)$ kümesinin ve $\Omega_a(x^*, y^*)$ fonksiyonu da $gph\, a$ kümesinin $-$ işaretli destek fonksiyonudur. Aslında destek fonksiyonu olan bu fonksiyonlar yazılışta kolaylık amacıyla tanımlanmışlardır. Ayrıca bu iki fonksiyon arasında

$$\Omega_a(x^*, y^*) = \inf_x \{-\langle x, x^*\rangle + W_a(x, y^*)\} \tag{2.28}$$

şeklinde bir ilişki olduğuna dikkat edilirse

$$\Omega_a(x^*, y^*) \leqslant -\langle x, x^*\rangle + W_a(x, y^*) \tag{2.29}$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan (2.28) eşitliği yardımıyla ve $W_a(x, y^*)$ fonksiyonuna da $y^*$ sabit tutulup $x$'in bir fonksiyonu gözü ile bakılırsa

$$\Omega_a(x^*, y^*) = -[W_a(\cdot, y^*)]^*(x^*) \tag{2.30}$$

bağıntısı elde edilir, yani $\Omega_a(x^*, y^*)$ fonksiyonu $-$ işaretiyle $W_a(\cdot, y^*)$ fonksiyonunun dualidir.

**Lemma 2.71.** *a konveks bir dönüşüm ise*

$$a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \supseteq \lambda a(x_1) + (1-\lambda)a(x_2),\ \lambda \in [0, 1] \tag{2.31}$$

*kapsaması gerçeklenir ve $W_a(x, y^*)$ fonksiyonu x'e göre konvekstir.*

**İspat.** Eğer $(x_1, y_1) \in gph\, a$, $(x_2, y_2) \in gph\, a$ ise $gph\, a$ konveks olduğundan $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in gph\, a$ gerçeklenir, bu ise $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ demektir. Burada $y_1 \in a(x_1)$ ve $y_2 \in a(x_2)$ keyfi elemanlar olduğundan $\lambda_1 a(x_1) + \lambda_2 a(x_2) \subseteq$

$a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ kapsaması geçerlidir. Herhangi $A \subseteq B$ kümeleri için $\inf B \leqslant \inf A$ gerçeği (2.31) kapsamasındaki kümelere uygulanırsa $W_a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y^*) = \inf_y \{\langle y, y^*\rangle : y \in a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} \leqslant \inf_{y_1,y_2}\{\langle \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, y^*\rangle : y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)\} = \lambda_1 W_a(x_1, y^*) + \lambda_2 W_a(x_2, y^*)$ elde edilerek istenen sonuca ulaşılır. ∎

**Tanım 2.20.** *Eğer $gph\, a = K$ konveks bir koni ise $a$ dönüşümünün $a^*$ dual dönüşümü $a^*(y^*) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K^*\}$ kümesi ile tanımlanır.*

**Tanım 2.21.** *Bir $gph\, a$ kümesi için $z \in gph\, a$ noktasındaki teğet yönler konisi*

$$K_a(z) = con(gph\, a - z) = \{\bar{z} : \bar{z} = \lambda(z_1 - z), z_1 \in gph\, a,\ \lambda > 0\} \tag{2.32}$$

*şeklinde tanımlanır.*

Dikkat edilirse bu tanımdan $\bar{z} \in K_a(z)$ için gerek ve yeter koşulun yeterince küçük $\lambda > 0$ için $z + \lambda\bar{z} \in gph\, a$ içermesinin gerçeklenmesi gerektiği elde edilir. Öte yandan $\langle y, y^*\rangle$ çarpımına minimum değer veren $y \in a(x)$ noktaları kümesi

$$a(x; y^*) = \{y \in a(x) : \langle y, y^*\rangle = W_a(x, y^*)\} \tag{2.33}$$

ve $gph\, a_z = K_a(z)$ konisi ile belirlenen dönüşüm de

$$a_z(\bar{x}) = \{\bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}) \in K_a(z)\} \tag{2.34}$$

notasyonu ile gösterilsin.

**Tanım 2.22.** *Konveks küme-değerli bir $a$ dönüşümünün bir $z \in gph\, a$ noktasındaki yerel dual dönüşümü*

$$a^*(y^*; z) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K_a^*(z)\}$$

*kümesi ile tanımlanır.*

**Teorem 2.72.** *$a$ konveks bir dönüşüm ise*

$$a^*(y^*; z) = \begin{cases} \emptyset & ,\ y \notin a(x, y^*) \\ \partial_x W_a(x, y^*) & ,\ y \in a(x, y^*) \end{cases} \tag{2.35}$$

*geçerlidir.*

**İspat.** Lemma 2.71 ya göre $W_a(x, y^*)$ fonksiyonu $x$'e göre konvekstir. Teoremin ifadesindeki $\partial_x W_a(x, y^*)$ ile $W_a(x, y^*)$ kümesinin $x$'e göre subdiferansiyeli gösterilmektedir, yani $\partial_x W_a(x, y^*)$ kümesinin elemanları öyle $x^*$ elemanlarından oluşur ki her

$x_1 \in X$ için $W_a(x_1, y^*) - W_a(x, y^*) \geqslant \langle x_1 - x, x^* \rangle$ eşitsizliği gerçeklenir. Şimdi $x^* \in a^*(y^*; z)$, $z = (x, y)$ olsun. Bu durumda $x^* \in a^*(y^*; z)$ ise $(-x^*, y^*) \in K_a^*(z)$ gerçeklendiğinden $K_a(z)$ konisinin tanımı gereği her $(\overline{x}, \overline{y}) \in K_a(z)$ için $-\langle \overline{x}, x^* \rangle + \langle \overline{y}, y^* \rangle \geqslant 0$ eşitsizliği doğrudur. Elde edilen bu eşitsizlik ise (2.32) nedeniyle

$$- \langle \lambda(x_1 - x), x^* \rangle + \langle \lambda(y_1 - y), y^* \rangle \geqslant 0, \quad (x_1, y_1) \in gph\, a \tag{2.36}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $x_1 = x$ seçilirse $y_1 \in a(x)$ olup her $y_1 \in a(x)$ için $\langle y_1, y^* \rangle \geqslant \langle y, y^* \rangle$ gerçeklenir. Bu ise $y \in a(x, y^*)$ ve $\langle y, y^* \rangle = W_a(x, y^*)$ demektir. (2.36) nedeniyle $\langle y_1, y^* \rangle - W_a(x, y^*) \geqslant \langle x_1 - x, x^* \rangle$ eşitsizliği yazılabilir, bu eşitsizliğin sol tarafının $y_1 \in a(x_1)$ üzerinden infimumu alınırsa

$$W_a(x_1, y^*) - W_a(x, y^*) \geqslant \langle x_1 - x, x^* \rangle \tag{2.37}$$

eşitsizliği yani $x^* \in \partial_x W_a(x, y^*)$ elde edilir. Tersine eğer $x^* \in \partial_x W_a(x, y^*)$ ve $y \in a(x, y^*)$ ise (2.37) eşitsizliğinden yararlanarak ters yönde gidilerek $x^* \in a^*(y^*; z)$ elde edilir. ∎

Dikkat edilirse $z = (x, y)$ olmak üzere herhangi $y \in a(x, y^*)$ için $a^*(y^*; z)$ kümesinin değeri değişmez ve hep $\partial_x W_a(x, y^*)$ kümesine eşittir.

**Lemma 2.73.** *a konveks bir dönüşüm olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:*

$$\partial_{y^*} W_a(x, y^*) = a(x; y^*) \tag{2.38}$$

**İspat.** $W_a(x, y^*)$ fonksiyonunun tanımının verildiği (2.26) eşitliğinin her iki tarafı $-1$ ile çarpılırsa $-W_a(x, y^*) = -\inf_y\{\langle y, y^* \rangle : y \in a(x)\} = \sup_y\{-\langle y, y^* \rangle : y \in a(x)\} = \sup_y\{\langle -y, y^* \rangle : y \in a(x)\}$ fonksiyonu bulunur. Elde edilen bu fonksiyona $y^*$'a göre subdiferansiyel almak üzere Teorem 2.65 uygulanırsa ve (2.33) eşitliği dikkate alınırsa $\partial_{y^*}(-W_a(x, y^*)) = \{y \in a(x) : \langle -y, y^* \rangle = W_a(x, y^*)\} = -\{y \in a(x) : \langle y, y^* \rangle = W_a(x, y^*)\} = -a(x; y^*)$ eşitlikleri elde edilir. Buradan da $\partial_{y^*} W_a(x, y^*) = -\partial_{y^*}(-W_a(x, y^*)) = -(-a(x; y^*)) = a(x; y^*)$ bulunur, bu ise istenilendir. ∎

## 2.4 KONVEKS PROGRAMLAMADA OPTİMALLİK

**Teorem 2.74.** *Bir $x_0$ noktasının $X(= \mathbb{R}^n)$ uzayında bir $f(x)$ has konveks fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $0 \in \partial f(x_0)$ dahil etmesinin gerçeklenmesidir.*

**İspat.** $f(x)$ fonksiyonunun $X$ üzerinde has olmasının gereği olarak her bir $x \in X$ için $f(x) \neq -\infty$ ve dolayısıyla da $f(x_0) > -\infty$ gerçeklenir. Öte yandan $x_0$ noktası $X$ üzerinde $f$ fonksiyonuna minimum değer verdiğinden her $x \in X$ için $f(x) \geqslant f(x_0)$ gerçeklenir. Bu eşitsizliği daima

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x - x_0, 0 \rangle, \quad x \in X, \quad 0 \in X^* \tag{2.39}$$

biçiminde yazmak mümkündür. Buradan da subdiferansiyel tanımını dikkate alınırsa $0 \in \partial f(x_0)$ elde edilir. ■

Aşağıdaki önemli sonuçlar biraz önce kanıtlanan basit ancak temel olan Teorem 2.74 yardımıyla elde edilecektir.

**Teorem 2.75.** *$M \subseteq X$ konveks küme ve bir $x_1 \in M$ noktasında $f(x)$ konveks fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda bir $x_0 \in M$ noktasının $f(x)$ fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul*

$$\partial f(x_0) \cap K_M^*(x_0) \neq \emptyset \tag{2.40}$$

*gerçeklenmesidir.*

**İspat.** Dikkat edilirse verilen $f(x)$ fonksiyonunun $M$ kümesi üzerinde minimumunun bulunması problemi, $M$ kümesinin

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in M \\ +\infty & , \; x \notin M \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\delta_M(x)$ indikatör fonksiyonu nedeniyle $f(x) + \delta_M(x)$ fonksiyonunun $X$ üzerindeki minimumunun bulunması problemi ile eşdeğerdir. Teorem 2.63 nedeniyle $f(x) + \delta_M(x)$ fonksiyonunun subdiferansiyeli $f(x)$ ile $\delta_M(x)$ fonksiyonlarının subdiferansiyelleri toplamına eşittir. Öte yandan (2.23) bağıntısı nedeniyle $\partial\delta_M(x_0) = -K_M^*(x_0)$ eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla $f(x) + \delta_M(x)$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki subdiferansiyeli $\partial f(x_0) - K_M^*(x_0)$ olup, Teorem 2.74'ye göre $x_0$ noktasının $f(x) + \delta_M(x)$ fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $0 \in \partial f(x_0) - K_M^*(x_0)$ olması ve dolayısıyla da $\partial f(x_0) \cap K_M^*(x_0) \neq \emptyset$ gerçekleşmesidir. ■

**Teorem 2.76.** *Teorem 2.75'in koşulları sağlansın ve teoremin ifadesindeki $M$ kümesi $i = 1, 2, .., k$ olmak üzere $M_i$ konveks kümelerinin kesişimi olarak verilsin, yani $M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k$ olsun. Ayrıca $int(M_1) \cap int(M_2) \cap .. \cap int(M_{k-1}) \cap M_k \neq \emptyset$*

*olsun. O zaman bir* $x_0 \in M$ *noktasının* $f(x)$ *fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul* $x^* = x_1^* + x_2^* + .. + x_k^*$ *gerçeklenecek biçimde* $x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0)$, $i = 1, 2, .., k$ *ve* $x^* \in \partial f(x_0)$ *noktalarının var olmasıdır.*

**İspat.** Teorem 2.35 nedeniyle teoremin koşullarından

$$K_M(x_0) = \bigcap_{i=1}^{k} K_{M_i}(x_0) \tag{2.41}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan bir $x_2 \in int(M_1) \cap int(M_2) \cap .. \cap int(M_{k-1}) \cap M_k$ yardımıyla $\overline{x}_2 = x_2 - x_0$ tanımlanırsa $K_{M_k}(x_0)$ teğet yönler konisinin tanımı gereği $\overline{x}_2 \in K_{M_k}(x_0)$ ve Teorem 2.34 nedeniyle de $\overline{x}_2 \in int(K_{M_i}(x_0))$, $i = 1, 2, .., k-1$ gerçeklendiği görülür. Bu nedenle

$$int(K_{M_1}(x_0)) \cap int(K_{M_2}(x_0)) \cap .. \cap int(K_{M_{k-1}}(x_0)) \cap K_{M_k}(x_0) \neq \emptyset \tag{2.42}$$

olduğu elde edilir. (2.41) ve (2.42) bağıntıları dikkate alınıp Teorem 2.32 kullanılırsa

$$K_M^*(x_0) = K_{M_1}^*(x_0) + ... + K_{M_k}^*(x_0) \tag{2.43}$$

bulunur. Bu durumda Teorem 2.75 nedeniyle var olan $x^* \in \partial f(x_0) \cap K_M^*(x_0)$ noktası

$$x^* = x_1^* + x_2^* + .. + x_k^* \,, \quad x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0),\ i = 1, 2, .., k \tag{2.44}$$

gerçeklemek zorundadır. Böylece istenen elde edilmiş olur. ∎

Son olarak aşağıdaki önemli teoremi kanıtlayalım.

**Teorem 2.77.** *$f(x)$ has konveks bir fonksiyon ve her bir $i = 1, 2, .., k$ için $M_i$ konveks küme olmak üzere bir $M = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$ verilsin. Üstelik $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu bir $x_1 \in M$ noktası var olsun. Bu durumda bir $x_0 \in M$ noktasının $f(x)$ fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek koşul:*

$$\lambda x^* = x_1^* + x_2^* + ... + x_k^* \tag{2.45}$$

*gerçeklenecek biçimde, hepsi aynı anda sıfır olmayan $x^* \in \partial f(x_0)$, $x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0)$ vektörlerinin ve 0 veya 1 değerini alan $\lambda$ sayısının var olmasıdır. Eğer $\lambda = 1$ ise bu koşullar aynı zamanda yeter koşullardır.*

**İspat.** Teorem 2.75 nedeniyle $x^* \in \partial f(x_0)$ noktası vardır ve $x^* \in K_M^*(x_0)$ gerçeklenir. (2.41) bağıntısı dikkate alındığında Teorem 2.33 nedeniyle aşağıdaki iki durumdan birisi geçerlidir:

1) Ya (2.43) ve dolayısıyla da (2.44) bağıntısı doğrudur. Bu durumda Teorem 2.75 gerek ve yeter koşulları verdiğinden ve (2.44) bağıntısı (2.45) bağıntısının $\lambda = 1$ hali olduğundan (2.45) koşulu aynı zamanda yeter koşuldur.

2) Ya da hepsi birden sıfır olmayacak biçimde $x_1^* + x_2^* + ... + x_k^* = 0$ gerçekleyen $x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0)$, $i = 1, 2, .., k$ noktaları vardır. Bu durum (2.45) bağıntısında $\lambda = 0$ haline karşılık gelmektedir. ∎

### 2.4.1 Konveks Durumda Diskret İçermeli Problem İçin Optimallik

Şimdi, $t$ zaman değişkeni $0, 1, 2, .., T$ değerlerini alsın. $a$ konveks kümedeğerli bir dönüşüm olmak üzere $t$ anındaki $x$ vektörünün $t+1$ anında $y \in a(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ vektörlerinden birine dönüştüğü ve $x_t, t = 0, 1, .., T$ vektörlerinin birbirlerine

$$x_{t+1} \in a(x_t), \quad t = 0, 1, .., T-1 \tag{2.46}$$

bağıntısıyla bağlı olduğu bir diskret sistemi göz önüne alalım. $x_0$ vektörüne başlangıç vektörü denir ve önceden belirli sabit bir vektördür. (2.46) bağıntısıyla belirlenen $x_0, x_1, .., x_T$ sonlu noktalar dizisine sistemin bir yörüngesi denir. $M$ konveks bir küme ve herbir $t = 1, 2, .., T$ için $g(x_t, t)$ fonksiyonları konveks olsunlar. Şimdi bu bölüm içinde adına *esas problem* diyeceğimiz

$$f = \sum_{t=1}^{T} g(x_t, t), \quad x_T \in M \tag{2.47}$$

fonksiyonunu minimum yapan $\{x_t\}_{t=0}^T$ yörüngesini belirleme problemini ele alalım. Esas problem Teorem 2.77'e adapte edilerek çözülecektir ve bu amaçla yeni tanımlamalar yaplacaktır. $w = (x_1, x_2, .., x_T) \in \mathbb{R}^{nT}$ vektörü tanımlansın, $x_0$ vektörünün bu yeni vektörün yazılışında yer almamasının nedeni zaten önceden belirli olmasıdır. $f(w) = \sum_{t=1}^T g(x_t, t)$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}^{nT}$ uzayında

$$\widetilde{M}_t = \{w : (x_t, x_{t+1}) \in gph\, a\}, \quad t = 0, 1, .., T-1 \tag{2.48}$$

$$\widetilde{M}_T = \{w : x_T \in M\} \tag{2.49}$$

konveks kümeleri tanımlansın. Tüm bu tanımlamalardan sonra esas problem, konveks $f(w)$ fonksiyonunun $\widetilde{M} = \bigcap_{t=0}^T \widetilde{M}_t$ kümesi üzerinde minimizasyonu problemine indirgenmiş olur. Teorem 2.77'ü uygulamak için $K_{\widetilde{M}_t}(w)$ konilerini hesaplamak gerekmektedir, karışıklığa yer vermemek için bu koniler kısaca $\widetilde{K}_t(w)$ ile gösterilsin.

Eğer yeterince küçük $\lambda > 0$ sayıları için $w+\lambda\overline{w} \in \widetilde{M}_t, t = 0, 1, .., T-1$ gerçekleniyorsa yani $(x_t+\lambda\overline{x}_t, x_{t+1}+\lambda\overline{x}_{t+1}) \in gph\ a, t = 0, 1, .., T-1$ gerçekleniyorsa Tanım 2.21 nedeniyle $\overline{w} \in \widetilde{K}_t(w)$ gerçekleşir. Dolayısıyla $\widetilde{K}_t(w) = \{\overline{w} : (\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1}) \in K_a((x_t, x_{t+1}))\}$ bulunur.

Şimdi, $\widetilde{K}_t^*(w)$ dual konisini hesaplayalım. $w^* = (x_1^*, x_2^*, .., x_T^*) \in \mathbb{R}^{nT}$ olmak üzere dual koni tanımı nedeniyle $w^* \in \widetilde{K}_t^*(w)$ içermesi ancak ve yalnız her $\overline{w} \in \widetilde{K}_t(w)$ için

$$\langle \overline{w}, w^* \rangle = \sum_{k=1}^{T} \langle \overline{x}_k, x_k^* \rangle \geqslant 0 \tag{2.50}$$

olduğunda geçerlidir. Ancak $\overline{w} \in \widetilde{K}_t(w)$ vektörünün $\overline{x}_k$ bileşenleri $t = 1, 2, .., T-1$ olmak üzere $k \neq t, t+1$ için herhangi bir reel sayı olabileceğinden (2.50) bağıntısı yalnızca $k \neq t, t+1$ için $x_k^* = 0$ olduğunda gerçeklenir. Bu durumda (2.50) bağıntısı $t = 1, 2, .., T-1$ olmak üzere

$$\langle \overline{x}_t, x_t^* \rangle + \langle \overline{x}_{t+1}, x_{t+1}^* \rangle \geqslant 0, \quad (\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1}) \in K_a((x_t, x_{t+1}))$$

şeklini alır, yani $(x_t^*, x_{t+1}^*) \in K_a^*((x_t, x_{t+1}))$ gerçeklenir, böylece aranan dual koninin

$$\widetilde{K}_t^*(w) = \{w^* : (x_t^*, x_{t+1}^*) \in K_a^*((x_t, x_{t+1})), x_k^* = 0, k \neq t, t+1\} \tag{2.51}$$

olduğu bulunur.

$t = 0$ olduğunda $x_0$ sabit olmak üzere $w + \lambda\overline{w} \in \widetilde{M}_0$ için gerek ve yeter koşul $x_1 + \lambda\overline{x_1} \in a(x_0)$ olması yani $\overline{x}_1 \in K_{a(x_0)}(x_1)$ gerçeklenmesidir. Böylece $\widetilde{K}_0(w) = \{\overline{w} : \overline{x}_1 \in K_{a(x_0)}(x_1)\}$ olur ve dolayısıyla

$$\widetilde{K}_0^*(w) = \{\overline{w} : x_1^* \in K_{a(x_0)}^*(x_1)\}, x_t^* = 0, t = 2, 3, .., T\} \tag{2.52}$$

elde edilir.

Son olarak da $t = T$ olduğunda $\widetilde{K}_T(w) = \{\overline{w} : \overline{x}_T \in K_M(x_T)\}$ bağıntısından

$$\widetilde{K}_T^*(w) = \{\overline{w} : x_T^* \in K_M^*(x_T)\}, x_t^* = 0, t = 1, 2, .., T-1\} \tag{2.53}$$

bulunur.

Şimdi kabul edelim ki her bir $t = 0, 1, .., T$ için $x_t$ noktasında $g(x_t, t)$ fonksiyonlarını sürekli kılan bir $\{x_t\}_{t=0}^T$ yörüngesi var olsun. Bu durumda esas problemi indirgeyerek elde ettiğimiz sistem için eğer $\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^T$ bir optimal yörünge ise Teorem 2.77 nedeniyle öyle $w^*(t) \in \widetilde{K}_t^*(\widetilde{w}), t = 0, 1, .., T, \widetilde{w} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, .., \widetilde{x}_T)$ vektörleri ve 0 veya 1 olan $\lambda$ sayısı vardır ki $w^* \in \partial_x f(\widetilde{w})$ olmak üzere

$$\lambda w^* = \sum_{t=0}^{T} w^*(t) \tag{2.54}$$

gerçeklenir ve burada $\lambda$ sayısı ve $w^*(t)$ vektörleri aynı anda 0 değildir, yani $\lambda = 0$ olduğunda $w^*(t)$ vektörlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. $f(w)$ fonksiyonunun yapısı gereği eğer $w^* \in \partial_w f(\widetilde{w})$ ise $w^*$ vektörünün

$$w^* = (x_{10}^*, x_{20}^*, .., x_{T0}^*), \quad x_{t0}^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_t, t) \tag{2.55}$$

biçiminde olduğu anlaşılır. Ayrıca (2.51),(2.52) ve (2.53) bağıntıları nedeniyle

$$\begin{gathered} w^*(t) = (0, 0, .., 0, x_t^*(t), x_{t+1}^*(t), 0, .., 0), \\ \big(x_t^*(t), x_{t+1}^*(t)\big) \in K_a^*((\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})), \quad t = 1, 2, .., T-1, \end{gathered} \tag{2.56}$$

$$w^*(0) = (x_1^*(0), 0, .., 0), \quad x_1^*(0) \in K_{a(x_0)}^*(\widetilde{x}_1), \tag{2.57}$$

$$w^*(T) = (0, 0, .., x_T^*(T)), \quad x_T^*(T) \in K_M^*(\widetilde{x}_T) \tag{2.58}$$

bulunur. Elde edilen bu bilgiler (2.54) formülünde yerine yazılırsa

$$\lambda x_{t0}^* = x_t^*(t-1) + x_t^*(t), \quad t = 1, 2, .., T \tag{2.59}$$

bağıntısına ulaşılır. Şimdi

$$x_{t+1}^* \equiv x_{t+1}^*(t), \;\; t = 0, 1, .., T-1 \;\text{ ve }\; x^* \equiv x_T^*(T) \tag{2.60}$$

tanımlamaları yapılsın. Şimdi (2.56) ve yerel dual dönüşümün tanımlandığı Tanım 2.22

$$-x_t^*(t) \in a^*\Big(x_{t+1}^*(t); (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})\Big), \quad t = 1, 2, .., T-1$$

dahil etmesine ulaşılır, buradan da (2.59) eşitliği ve (2.60) tanımlamaları yardımıyla

$$x_t^* - \lambda x_{t0}^* \in a^*\Big(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})\Big), \quad t = 1, 2, .., T-1 \tag{2.61}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse (2.61) bağıntısı $t = 0$ ve $t = T$ anları için bize bir bilgi vermemektedir. Şimdi bu durumları ayrıca inceleyelim.

$t = 0$ olduğunda, (2.57) bağıntısı ve (2.60) tanımlamaları yardımıyla $x_1^* \in K^*_{a(x_0)}(x_1)$ bulunur, bu ise Teorem 2.36 nedeniyle ancak ve yalnız her $y \in a(x_0)$ için $\langle y - \widetilde{x}_1, x_1^* \rangle \geqslant 0$ gerçekleştiğinde mümkündür. Buradan $\langle \widetilde{x}_1, x_1^* \rangle = \inf_y \{\langle y, \widetilde{x}_1 \rangle : y \in a(x_0)\}$ elde edilir. Bu son ifade (2.33) notasyonu kullanılarak

$$\widetilde{x}_1 \in a(x_0; x_1^*) \tag{2.62}$$

biçiminde yazılır. Şimdi $x_{00}^* = 0$ tanımlansın ve herhangi bir $x_0^* \in a^*(x_1^*; (x_0, \widetilde{x}_1))$ elemanı alınsın. Dikkat edilirse (2.62) ve Teorem 2.72 nedeniyle $a^*(x_1^*, (x_0, \widetilde{x}_1)) \neq \emptyset$ gerçeklenir ve tersine yine Teorem 2.72 nedeniyle $a^*(x_1^*, (x_0, \widetilde{x}_1)) \neq \emptyset$ ise (2.62) gerçeklenir. Dolayısıyla (2.57) ifadesi (2.62) içermesine ve o da

$$x_0^* - \lambda x_{00}^* \in a^*(x_1^*, (x_0, \widetilde{x}_1)) \tag{2.63}$$

gerçekleyen bir $x_0^*$ vektörünün varlığına eşdeğerdir. Böylece dikkat edilirse (2.61) bağıntısı $t = 0$ zamanı için (2.57) koşulunu kapsar.

Son olarak $t = T$ olduğunda: (2.59) bağıntısı ve (2.60) ifadesindeki $x^* \equiv x_T^*(T)$ tanımlaması yardımıyla

$$\lambda x_{T0}^* = x_T^* + x^*, \quad x^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T) \tag{2.64}$$

bağıntısı elde edilir.

Böylece aşağıdaki çok önemli teorem ispat edilmiş olur:

**Teorem 2.78.** *a bir konveks, kümedeğerli dönüşüm, her bir $t = 0, 1, .., T$ için $g(x,t)$ fonksiyonları $x$'e göre konveks ve $x_0$ önceden belirli sabit bir vektör olsun. Ayrıca*

$$x_{t+1} \in a(x_t), \quad t = 0, 1, .., T-1 \quad \textit{ve} \quad x_T \in M$$

*gerçekleyen sonlu bir $\{x_t\}_{t=0}^T$ yörüngesi var ve $g(x,t)$ fonksiyonları bu yörüngenin herbir $x_t,\ t = 0, 1, .., T$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda $x_0$ noktasından başlayan ve bir $x_T \in M$ noktasında son bulan bir $\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^T$ yörüngesinin*

$$f = \sum_{t=1}^{T} g(x_t, t)$$

*fonksiyonunu minimum yapması için gerek koşul:*

$$\begin{gathered} x_t^* \in a^*\Big(x_{t+1}^*; \big(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}\big)\Big) + \lambda \partial_x g(\widetilde{x}_t, t) \\ t = 0, 1, .., T-1, \quad \partial_x g(x_0, 0) \equiv 0 \end{gathered} \tag{2.65}$$

$$x_T^* + x^* \in \lambda \partial_x g(\widetilde{x}_T, T) \tag{2.66}$$

$$x^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T) \tag{2.67}$$

*gerçekleyen ve aynı anda sıfır olmayan* $x^*, x_t^*$, $t = 0, 1, .., T$ *vektörlerinin ve* $\lambda \in \{0, 1\}$ *sayısının var olmasıdır. Eğer* $\lambda = 1$ *ise bu koşullar aynı zamanda yeter koşullardır.*

### 2.4.2 Genel Durumda Diskret İçermeli Problem İçin Optimallik

Bir önceki alt başlıkta konveks durumda diskret içermeli bir probleminin optimizasyonu için gerek ve yeter koşullar verilmişti. Bu paragrafta ise benzer problemler konveks olmayan fonksiyon ve kümeler için incelenecektir. Aslen konveks durumlarla ilgilenmemize rağmen konveks olmayan durumlarda problemin nasıl konveks hale yaklaştırıldığının kavranması nedeniyle önemlidir. Şimdi bu kısımda kullanılacak bazı tanımları verelim.

$M \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir konveks küme olsun. Eğer $x \in M$ noktasında $x + \lambda\overline{x} + \varphi(\lambda) \in M$, $\lambda \geqslant 0$ sağlayan ve $\lambda \downarrow 0$ için $\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \to 0$ özelliğine sahip $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu bulunabilirse $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörüne $M$ kümesinin $x$ noktasındaki teğet yönü denir. Eğer $x$ noktasındaki $K_M(x)$ konveks konisi için $\overline{x} \in K_M(x)$ içermesinden $\overline{x}$ vektörünün $x \in M$ noktasında teğet yön olduğu sonucuna varılıyor ise bu $K_M(x)$ konisine $x$ noktasında teğet yönler konisi denir.

Bu tanımdan anlaşıldığı üzere her yöne karşılık bir $\varphi(\lambda)$ bulunabilir. Bu durum ise verilen noktada $M$ kümesinin hangi özelliğe sahip olduğu hakkında bilgi vermez. Bu yüzden Boltyanskii'nin 1975 yılında tanımladığı aşağıdaki yerel çadır kavramına ihtiyaç vardır [48].

Eğer her $\overline{x}_0 \in ri(K_M(x_0))$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan ve koordinat başlangıcında tanımlanmış sürekli $\psi(\overline{x})$ fonksiyonu ve konveks $Q$ konisi varsa $K_M(x_0)$ teğet vektörler konisine $x_0 \in M$ noktasında yerel çadır denir:

a) $\overline{x}_0 \in ri(Q)$, $Lin\, Q = Lin\, K_M(x_0)$ ve $Q \subseteq K_M(x_0)$
b) $\psi(\overline{x}) = \overline{x} + r(\overline{x})$, $\overline{x} \to 0$ için $\|\overline{x}\|^{-1} r(\overline{x}) \to 0$
c) $x_0 + \psi(\overline{x}) \in M$, $\overline{x} \in Q \cap \varepsilon B$.

Dikkat edilirse $M$ konveks küme ise $x_0 \in M$ olmak üzere $K_M(x_0) = con(M - x_0)$ bir yerel çadır olur.

$x \in dom\, f$ ve $\overline{x} \in X, (\overline{x} \neq 0)$ için

$$F(\overline{x}, x) = \sup_{r(.)} \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda\overline{x} + r(\lambda)) - f(x)}{\lambda}$$

olsun. Burada $r(\lambda) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^{-1}r(\lambda) \to 0$, $\lambda \downarrow 0$ 'dır. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $h(\overline{x}, x)$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun $x$ noktasında üstten konveks yaklaşımı (ÜKY) denir;

1) Her $\overline{x} \neq 0$ için $h(\overline{x}, x) \geqslant F(\overline{x}, x)$,

2) $h(\overline{x}, x)$ fonksiyonu $\overline{x}$ 'ye göre konveks kapalı pozitif homojen fonksiyondur.

$h(\overline{x}, x)$ fonksiyonu $x$ noktasında $f$ fonksiyonu için bir ÜKY ise $\partial h(0, x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : h(\overline{x}, x) \geqslant \langle \overline{x}, x^* \rangle, \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ kümesine $f$ fonksiyonunun $x$ noktasında subdiferansiyeli denir ve $\partial f(x)$ ile gösterilir.

Şimdi $M \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme ve $f$ fonksiyonu da üstten konveks yaklaşıma sahip olmak üzere

$$\begin{array}{c} f(x) \to \min \\ x \in M \end{array} \tag{2.68}$$

problemini ele alalım.

**Teorem 2.79.** *[18]* (2.68) *probleminde bir $x_0 \in M$ noktası $f$ fonksiyonuna minimum değer veren nokta ve $h(\overline{x}, x_0)$ ise $f$ fonksiyonu için bir ÜKY ve $K_M(x_0)$ yerel çadır olsun. Şu halde*

$$intdom\, h(., x_0) \cap K_M(x_0) \neq \emptyset$$

*ise $\partial f(x_0) \cap K_M^*(x_0) \neq \emptyset$ olur.*

**Teorem 2.80.** *[18] $x_0$ noktası $f$ fonksiyonunun $M = \bigcap_{i=1}^m M_i$ kümesinde minimum noktası olsun. Ayrıca $h(\overline{x}, x_0)$, $x_0$ noktasında $f$ fonksiyonunun bir ÜKY fonksiyonu olup $K_{M_i}(x_0)$ konileri yerel çadır olsunlar ve*

$$intdom\, h(., x_0) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} K_{M_i}(x_0)) \neq \emptyset$$

*sağlansın. Bu durumda aynı anda sıfır olmayan öyle $\lambda \geqslant 0$ sayısı ve $x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0)$ vektörleri bulunabilir ki*

$$\lambda x_0^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^*, \quad x_0^* \in \partial f(x_0)$$

*gerçeklenir.*

Şimdi aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$\sum_{t=0}^{T} g(x_t, t) \to \min \tag{2.69}$$

$$x_{t+1} \in a(x_t),\ t = 0, 1, ..., T-1 \tag{2.70}$$

$$x_0 \in N,\ x_T \in M \tag{2.71}$$

$\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ yörüngesi (2.69)-(2.71) probleminin optimal çözümü olsun ve bu çözüm aşağıdaki

1. $a$ küme-değerli fonksiyonu $K_a(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})$, $t = 0, 1, ..., T-1$ teğet yönler konilerinin yerel çadır olduğu bir fonksiyondur.

2. $K_N(\widetilde{x}_0)$ ve $K_M(\widetilde{x}_T)$ teğet yönler konileri yerel çadırlardır.

3. $g(x,t)$, $t = 0, 1, ..., T$, fonksiyonlarının $\widetilde{x}_t$ noktalarında $\overline{x}$ nin sürekli fonksiyonu olan bir $h_t(0, \widetilde{x}_t)$ ÜKY fonksiyonu vardır. Bir başka deyişle $\partial g(\widetilde{x}_t, t) = \partial h_t(0, \widetilde{x}_t)$ subdiferansiyeli tanımlanmıştır.

koşullarını sağlasın. $w$ vektörü, $n$ boyutlu $x_t$, $t = 0, 1, ..., T$, bileşenli vektörlerden ibaret olan $\mathbb{R}^{(T+1)n}$ uzayının bir elemanı olsun.

$$f(w) = \sum_{t=0}^{T} g(x_t, t)$$

$$\widetilde{N} = \{w : x_0 \in N\}\,,\ \widetilde{M} = \{w : x_T \in M\} \tag{2.72}$$

$$\widetilde{M_t} = \{w : (x_t, x_{t+1}) \in gph\, a\},\ t = 0, 1, ..., T-1$$

yazılışı yardımıyla gösterilebilir ki (2.69)-(2.71) problemi ile aşağıdaki optimizasyon problemi eşdeğerdir:

$$\begin{gathered} f(w) \to \min \\ w \in \widetilde{N} \cap (\textstyle\bigcap_{t=o}^{T-1} \widetilde{M_t}) \cap \widetilde{M} \end{gathered} \tag{2.73}$$

Teorem 2.80 kullanılarak (2.73) problemi için gerek koşul aşağıdaki teorem ile verilebilir.

**Teorem 2.81.** *[18] Yukarıdaki 1-3 koşulları sağlansın. Şu halde* (2.70) *sisteminin* (2.71) *koşullarını sağlayan* $\{\widetilde{x}_t\}_t^T$ *yörüngesinin* (2.69) *toplamına minimum değer verebilmesi için gerek koşul, hepsi aynı anda sıfır olmayan ve aşağıdaki*

$$x_t^* \in a^*(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})) + \lambda \partial g(\widetilde{x}_t, t), \; t = 0, 1, ..., T-1 \tag{2.74}$$

$$x_T^* + x_e^* \in \lambda \partial g(\widetilde{x}_T, T), \tag{2.75}$$

$$x_0^* \in K_N^*(\widetilde{x}_0), \tag{2.76}$$

$$x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T) \tag{2.77}$$

*koşullarını sağlayan* $x_t^*$, $t = 0, 1, ..., T$, $x_e^*$ *vektörlerinin ve* $\lambda \in \{0, 1\}$ *sayısının var olmasıdır. Eğer* $\lambda = 1$ *ise bu koşullar aynı zamanda yeter koşuldurlar.*

**Uyarı 2.6.** *a küme-değerli fonksiyonu konveks olduğunda* $K_a(z)$ *bir yerel çadır olup yukardaki 1) koşulu gerçeklenir. N kümesi konveks olduğunda* $K_N(x)$ *teğet yönler konisi yerel çadır olup yukardaki 2) koşulu gerçeklenir. g fonksiyonu konveks olduğunda g için ÜKY kendisi olacağından 3) koşulu geçerlidir.*

**Sonuç 2.82.** *a dönüşümü,* $N, M$ *kümeleri ve g fonksiyonu konveks oluğunda Uyarı 2.6 nedeniyle Teorem 2.81 geçerlidir.*

**Sonuç 2.83.** *Polihedral durumda Teorem 2.44 dikkate alındığında* (2.74) *ve* (2.75) *koşullarında* $\lambda = 1$ *olur.*

### 2.4.3 Diferansiyel İçermeli Problem İçin Optimallik

Bu bölümde Mayer tipindeki diferansiyel içermeli bir probleminin optimalliği için gerek koşullar verilecektir. Bu amaçla öncelikle diferansiyel içerme kavramı ve onun çözümü hakkında genel bilgiler verilecek, sonra optimalliğini araştırdığımız problem bir önceki bölümde incelenen diskret zamanlı problemin bir diskret yaklaşımı olarak ifade edilecek ve daha sonra limite geçilerek aranan optimallik koşulları elde edilecektir.

Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $[0, T]$ aralığının $\sum_k |t_k'' - t_k'| < \delta$ sağlayan herhangi sayılabilir ayrık bir $\{(t_k', t_k'')\}$ alt aralıklar ailesi için $\sum_k \|x(t_k'') - x(t_k')\| < \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bir $\delta > 0$ sayısı var ise $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $[0, T]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir. Mutlak sürekli bir fonksiyon süreklidir ve sınırlı değişime sahiptir. Öte yandan herhangi bir Lipschitz fonksiyonu mutlak süreklidir.

Mutlak sürekli bir $x(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu hemen her yerde, $h.h.$ $[0,T]$, diferansiyellenebilirdir ve türevi olan $\dot{x}(\cdot)$ Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olup Newton-Leibniz formülü, yani $t' < t''$ olmak üzere her $t', t'' \in [0,T]$ için

$$x(t'') - x(t') = \int_{t'}^{t''} \dot{x}(t)dt$$

eşitliği geçerlidir.

$X = \mathbb{R}^n$ ve $Y = \mathbb{R}^n$ sonlu boyutlu uzayları göz önüne alınsın. $Z = X \times Y, gph\ a \subseteq Z$ olmak üzere $a(x)$ küme-değerli bir dönüşüm olsun. Şimdi her bir $t \in [0,1]$ için $x(t) \in \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyonu tanımlı olsun. Yukarıda vurgulandığı gibi mutlak sürekli fonksiyonlar hemen her yerde türeve sahiptirler ve hemen her $t$ için

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)) \tag{2.78}$$

bağıntısını gerçeklerler. (2.78) bağıntısına diferansiyel dahil etme veya diferansiyel içerme denir ve yukarıda bahsedilen koşullar altında $x(t)$ fonksiyonuna da bu diferansiyel içermenin çözümü denir. Aslında diferansiyel dahil etmeler, adi diferansiyel denklemlerin genelleştirmesidir. $a(x)$ tek değerli bir dönüşüm ve $a(x)$ kümesi de tak bir $f(x)$ elemanından meydana gelseydi, bu durumda (2.78) bağıntısı $\dot{x}(t) = f(x)$ diferansiyel denklemine dönüşürdü. Eğer belli bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $u \in U(\subseteq \mathbb{R}^s)$ için $f(x,u) \in \mathbb{R}^n$ bir vektör fonksiyon olsun, bu durumda $a(x)$ küme-değerli dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür:

$$a(x) = \{y : y = f(x,u),\ u \in U\} = f(x,U) \tag{2.79}$$

$a$ dönüşümümün bu şekilde seçilmesi durumunda (2.78) bağıntısı $\dot{x}(t) \in f(x(t),U)$ ya da

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad u(t) \in U \tag{2.80}$$

halini alır. Dikkat edilirse, (2.80) denkleminin her $u(t) \in U$ kontrol fonksiyonuna karşılık gelen $x(t)$ çözümü aynı zamanda (2.78) diferansiyel dahil etmesinin de bir çözümüdür. Diğer yandan genel koşullar altında ve $a(x)$ dönüşümü (2.79) bağıntısı ile verildiğinde (2.78) dahil etmesinin çözümünün aynı zamanda her $u(t) \in U$ için (2.80) denkleminin de bir çözümü olduğu gösterilebilir. Bu durumda (2.78) dahil etmesinin çözümünün birden fazla olabileceği sonucu ortaya çıkar. O zaman, hangi koşullar altında (2.78) diferansiyel dahil etmesinin tek çözümü vardır ve çözümler ailesi hangi özelliklere sahiptir, sorusu ortaya çıkar. Bu soruların cevabına ilk olarak Filippov'un sağ yanı kümedeğerli olan diferansiyel denklemelerin çözümleri üzerine 1967 yılında yazdığı [49] makalesinde rastlanmaktadır. Aubin-Cellina'nın 1984 yılında birlikte yazdığı diferansiyel içermeler adlı [35] kitabında çözümleri varlığı ve tekliği üzerine sonuçlara geniş bir şekilde yer verilmektedir.

Şimdi $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks sürekli fonksiyon, $N, M \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler, $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ konveks, kapalı ve sınırlı küme-değerli bir dönüşüm olmak üzere aşağdaki diferansiyel içermeli problemi ele alalım:

$$\begin{gathered} \varphi_0(x(1)) \longrightarrow \min \\ \dot{x}(t) \in a(x(t))\ , \quad t \in [0,1] \\ x(0) \in N \quad , \quad x(1) \in M \end{gathered} \tag{2.81}$$

Şimdi $x(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz sürekli fonksiyon olsun. $\delta > 0$ olmak üzere [0,1] aralığını $\delta$ uzunluğundaki eşit aralıklara bölerek (2.81) içermelerini $x_\delta(0) = x_0$ ve $t = 0, \delta, 2\delta, ..., 1-\delta$ için $x_\delta(t+\delta) \in x_\delta(t) + \delta a(x_\delta(t))$ içermesi şeklinde yazıp $k = 0, 1, .., \frac{1-\delta}{\delta}$ ve $t \in [k\delta, (k+1)\delta]$ için $x_\delta(t) = x_\delta(k\delta) + (t-k\delta)\frac{x_\delta((k+1)\delta) - x_\delta(k\delta)}{\delta}$ lineer yaklaşımı kullanılarak $x_\delta(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu tanımlayalım. Küçük $\delta > 0$ sayıları için $\frac{x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)}{\delta} \approx \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ h.h. $[0,1]$ olduğuna dikkat ederek yukarıdaki (2.81) diferansiyel içermeli problemine karşılık aşağıdaki diskret yaklaşım problemi elde edilir:

$$\begin{gathered} \varphi_0(x_\delta(1)) \longrightarrow \min \\ \frac{x_\delta(t+\delta) - x_\delta(t)}{\delta} \in a(x_\delta(t))\ , \quad t = 0, \delta, 2\delta, ..., 1-\delta \\ x_\delta(0) \in N \quad , \quad x_\delta(1) \in M \end{gathered} \tag{2.82}$$

Dikkat edilirse $\delta \to 0$ için limite geçildiğinde (2.82) problemi tamamen (2.81) problemine dönüşür. Şimdi (2.82) problemindeki diskret içermeyi

$$x_\delta(t+\delta) \in x_\delta(t) + \delta a(x_\delta(t)),\ t = 0, \delta, 2\delta, ..., 1-\delta$$

biçiminde yazalım ve sağ taraftaki kümeyi tek bir küme-değerli dönüşüm ile ifade edelim bu amaçla sağ tarafı

$$\widetilde{a}(x) = x + \delta a(x) \tag{2.83}$$

ile gösterelim. Bu yazılış dikkate alınırsa (2.82) problemi aşağıdaki

$$\varphi_0(x_\delta(1)) \longrightarrow \min$$

$$x_\delta(t+\delta) \in \widetilde{a}(x_\delta(t)) \ , \quad t = 0, \delta, 2\delta, ..., 1-\delta \tag{2.84}$$

$$x_\delta(0) \in N \quad , \quad x_\delta(1) \in M$$

diskret içermeli probleme dönüşür. Şimdi elde edilen bu diskret problem ile Teorem 2.81'te optimalliği için gerek ve yeter koşullar belirlediğimiz diskret içermeli problemi karşılaştıralım. Teoremdeki diskret adımlar 1 birim olup burada $\delta$ kadardır bu durumda teoremdeki $T-1$'e burada $1-\delta$ karşılık gelir. Ayrıca burada minimum yapılmak istenen $\varphi_0(x(1))$ fonksiyoneli teoremdeki toplama katılan $T$ anındaki $g(x_T, T)$ fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Bu durumda teoremdeki toplama katılan diğer $g(x_t, t)$, $t = 0, 1, ..., T-1$ fonksiyonları burada $t = 0, \delta, 2\delta, ..., 1-\delta$ için özdeş olarak 0 olurlar. Tüm bu ayrıntılara dikkat edilirek (2.84) problemine Teorem 2.81 uygulanırsa teoremdeki koşullar aşağıdaki gibi olur:

$$x^*_\delta(t) \in \widetilde{a}^*\Big(x^*_\delta(t+\delta); \big(\widetilde{x}_\delta(t), \widetilde{x}_\delta(t+\delta)\big)\Big), \quad t = 0, \delta, .., 1-\delta, \tag{2.85}$$

$$x^*_\delta(1) + x^*_e \in \lambda \partial_x \varphi_0(\widetilde{x}_\delta(1)), \tag{2.86}$$

$$x^*_\delta(0) \in K^*_N(\widetilde{x}_\delta(0)), \quad x^*_e \in K^*_M(\widetilde{x}_\delta(1)). \tag{2.87}$$

Ancak, dikkat edilirse (2.82) dolayısıyla da ona eşdeğer olan (2.84) probleminin çözümü için (2.85) içermesindeki $\widetilde{a}^*$ küme-değerli dönüşümünü $a^*$ dönüşümü cinsinden ifade etme zorunluluğu vardır. $\widetilde{a}^*$ ile $a^*$ arasında bulunacak bağıntı bizim diskret içermeli optimizasyon probleminden diferansiyel içermeli optimizasyon problemine geçmemizi sağlayacak çok önemli bir köprü olacaktır.

Her ne kadar ele aldığımız problem konveks durumda olsa da $\widetilde{a}^*$ ile $a^*$ arasındaki bağıntıyı en genel hal, yani konveks olmayan durumu da içine alan haller için incelemekte fayda vardır. Bu incelemede yerel çadır yönteminden yararlanılacaktır. Tanım nedeniyle $z = (x, y)$ olmak üzere $K_{\widetilde{a}}(z)$ bir yerel çadır ise $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y})$ olmak üzere öyle $r(\overline{x}, \overline{y}) = (r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y}))$ fonksiyonu vardır ki $\|\overline{z}\| = \|(\overline{x}, \overline{y})\| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ olmak üzere $\lim_{\overline{z}\to 0} \frac{r(z)}{\|\overline{z}\|} = 0$ gerçekler. Daha açık bir ifade ile $i = 1, 2$ için $\lim_{\overline{z}\to 0} \frac{r_i(\overline{x},\overline{y})}{\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|} = 0$ gerçekleyen $r_i(\overline{x}, \overline{y})$ fonksiyonları vardır. Ayrıca yine yerel çadır tanımına göre $Q \subseteq K_{\widetilde{a}}(z)$ gerçekleyen $Q$ konisine ait küçük $\widetilde{z}$ noktaları yani $(\overline{x}, \overline{y}) \in Q \cap \varepsilon B$ gerçekleyen $(\overline{x}, \overline{y})$ notaları için

$$(x, y) + (\overline{x}, \overline{y}) + \big(r_1(\overline{x}, \overline{y}), r_2(\overline{x}, \overline{y})\big) \ \in gph\, \widetilde{a},$$

$$\Big(x + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y}), y + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y})\Big) \ \in gph\, \widetilde{a},$$

$$y + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \in \widetilde{a}\big(x + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})\big)$$

içermesi elde edilir, şimdi bu içermeyi $\widetilde{a}(x) = x + \delta a(x)$ bağıntısını dikkate alarak yeniden düzenlersek

$$y + \overline{y} + r_2(\overline{x}, \overline{y}) \ \in x + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y}) + a\big(x + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})\big)$$

olur, burada da gerekli yer değiştirmeler yapılarak

$$\frac{y-x}{\delta} + \frac{\overline{y}-\overline{x}}{\delta} + \frac{1}{\delta}\Big(r_2(\overline{x}, \overline{y}) - r_1(\overline{x}, \overline{y})\Big) \ \in a\big(x + \overline{x} + r_1(\overline{x}, \overline{y})\big)$$

bağıntısı elde edilir. Buradan titiz bir inceleme ile yerel çadır tanımı kullanılarak $K_a(x, \frac{y-x}{\delta})$ konisinin bir yerel çadır olduğu sonucuna ulaşılır. Şu halde $K_{\widetilde{a}}(x, y)$ konisi $(x, y) \in gph\, \widetilde{a}$ noktasında yerel çadır olduğunda $K_a(x, \frac{y-x}{\delta})$ konisi de $(x, \frac{y-x}{\delta}) \in gph\, a$ noktasında yerel çadır olur. Bu çıkarsamada tersden gidilerek $K_a(x, \frac{y-x}{\delta})$ konisi $(x, \frac{y-x}{\delta}) \in gph\, a$ noktasında yerel çadır olduğunda $K_{\widetilde{a}}(x, y)$ konisi de $(x, y) \in gph\, \widetilde{a}$ noktasında yerel çadır olduğu kolayca görülür. Sonuçta

$$K_{\widetilde{a}}(x, y) \ \text{ yerel çadırdır} \quad \Leftrightarrow \quad K_a\left(x, \frac{y-x}{\delta}\right) \ \text{ yerel çadırdır}$$

eşdeğerlik bağıntısı elde edilir. Üstelik, yerel çadır tanımı ve yukarıdaki eşdeğerlik bağıntısı nedeniyle

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in K_{\widetilde{a}}(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x, \frac{y-x}{\delta}\right) \in K_a\left(x, \frac{y-x}{\delta}\right) \tag{2.88}$$

bağıntısı da geçerlidir.

Şimdi $x^* \in \widetilde{a}^*(y^*; (x, y))$ olsun. Yerel dual dönüşüm tanımı gereği $(-x^*, y^*) \in K^*_{\widetilde{a}}(x, y)$ içermesi ve dual koni tanımı gereği

$$-\langle \overline{x}, x^* \rangle + \langle \overline{y}, y^* \rangle \geqslant 0, \quad (\overline{x}, \overline{y}) \in K_{\widetilde{a}}(x, y) \tag{2.89}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada eşitsizliğin her iki yanını $\delta > 0$ sayısı ile bölüp gerekli düzenlemeler yapılırsa ve (2.88) bağıntısı dikkate alınırsa

$$-\left\langle \overline{x}, \frac{x^*-y^*}{\delta} \right\rangle + \left\langle \frac{\overline{y}-\overline{x}}{\delta}, y^* \right\rangle \geqslant 0, \quad \left(x, \frac{y-x}{\delta}\right) \in K_a\left(x, \frac{y-x}{\delta}\right)$$

eşitsizliği ve tekrar dual koni tanımı kullanılırsa

$$\left(-\frac{x^*-y^*}{\delta}, y^*\right) \in K^*_a\left(x, \frac{y-x}{\delta}\right)$$

içermesi ve buradan da yerel dual dönüşüm gereği

$$\frac{x^* - y^*}{\delta} \in a^*\left(y^*, \left(x, \frac{y-x}{\delta}\right)\right)$$

içermesi elde edilir. Şimdi bu bağıntının her iki yanını $\delta > 0$ ile çarpılıp ve gerekli yer değişiklikleri yapılırsa

$$x^* \in y^* + \delta a^*\left(y^*, \left(x, \frac{y-x}{\delta}\right)\right)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla $x^* \in \widetilde{a}^*(y^*; (x, y))$ ise $x^* \in y^* + \delta a^*(y^*, (x, \frac{y-x}{\delta}))$ gerçeklendiği yani $a^*(y^*; (x, y)) \subseteq a^*(y^*, (x, \frac{y-x}{\delta}))$ kapsamasının gerçeklendiği gösterilmiş olur. Ters yönde gidilerek ters kapsamanın gösterilmesi güç değildir. Sonuçta $a^*(y^*; (x, y)) = a^*(y^*, (x, \frac{y-x}{\delta}))$ eşitliği elde edilir. Böylece $\widetilde{a}$ dönüşümü $a^*$ cinsinden yazılmış olur. Elde edilen bu sonuçları aşağıdaki lemma ile ifade etmek mümkündür:

**Lemma 2.84.** *$\widetilde{a}(x) = x + \delta a(x)$ küme-değerli dönüşümü için $K_{\widetilde{a}}(x, y)$ teğet yönler konisinin $(x, y) \in gph\,\widetilde{a}$ noktasında yerel çadır olması ile $a(x)$ küme-değerli dönüşümü için $K_a(x, \frac{y-x}{\delta})$ teğet yönler konisinin $(x, \frac{y-x}{\delta}) \in gph\, a$ noktasında yerel çadır olması ve aşağıdaki içermeler eşdeğerdir:*

1) $x^* \in \widetilde{a}^*(y^*; (x, y))$,
2) $x^* \in y^* + \delta a^*(y^*, (x, \frac{y-x}{\delta}))$

Şimdi bu lemmanın 1) şıkkındaki içermeyi (2.85) içermesine benzetmek amacıyla $x^* = x_\delta^*(t), y^* = x_\delta^*(t+\delta), z = (\widetilde{x}_\delta(t), \widetilde{x}_\delta(t+\delta))$ değişken dönüşümleri yapılırsa ve bu dönüşümler 1) şıkkının eşdeğeri olan 2) şıkkında yerlerine yazılırsa (2.85) içermesi

$$x_\delta^*(t) \in x_\delta^*(t+\delta) + \delta a^*\left(x_\delta^*(t+\delta); \left(\widetilde{x}_\delta(t), \frac{\widetilde{x}_\delta(t+\delta) - \widetilde{x}_\delta(t)}{\delta}\right)\right), \quad t = 0, \delta, .., 1-\delta, \tag{2.90}$$

halini alır, buradan da gerekli yer değiştirmeler yapılarak

$$-\frac{x_\delta^*(t+\delta) - x_\delta^*(t)}{\delta} \in a^*\left(x_\delta^*(t+\delta); \left(\widetilde{x}_\delta(t), \frac{\widetilde{x}_\delta(t+\delta) - \widetilde{x}_\delta(t)}{\delta}\right)\right), \quad t = 0, \delta, .., 1-\delta, \tag{2.91}$$

içermesi elde edilir. Nihayet elde edilen (2.91) bağıntısında $\delta \to 0$ için limite alarak kesikli halden sürekli hale geçiş yaparsak

$$-\dot{x}^*(t) \in a^*\Big(x^*(t), (\widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))\Big) \quad h.h. \ [0, 1]$$

diferansiyel dahil etmesi elde edilir. Öte yandan diskret yaklaşım problemindeki (2.86) ve (2.87) sınır koşulları $\delta$'ya bağlı olmadığından değişmeden aynen

$$x^*(1) + x_e^* \in \lambda \partial_x \varphi_0(\widetilde{x}(1)),$$

$$x^*(0) \in K_N^*(\widetilde{x}(0)), \quad x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}(1))$$

şeklinde kalır. Ayrıca Lemma 2.35'teki $y^* = x^*(t)$, $x = \widetilde{x}(t)$ ve $y = \dot{\widetilde{x}}(t)$ alınırsa lemma gereği $a^* \neq \emptyset$ ise $y \in a(x, y^*)$ çıkarsamasına karşılık burada

$$\dot{\widetilde{x}}(t) \in a(\widetilde{x}(t); x^*(t)) \;\; h.h. \;\; [0,1]$$

içermesi elde edilir.

Yukarıda yapılanları kısaca, bir diskret yaklaşım kullanarak diskret içermeli problemin optimallik koşullarından sürekli halde diferansiyel içermeli problemin optimallik koşullarının elde edilmesi şeklinde özetlenebilir. Tüm bu yapılanlar sonucunda diferansiyel içermeli problemin optimallik koşullarını veren aşağıdaki önemli teorem kanıtlanmış oldu:

**Teorem 2.85.** $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konveks sürekli fonksiyon,* $N, M \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveks kümeler,* $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *konveks, kapalı ve sınırlı küme-değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda*

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)), \quad t \in [0,1]$$

*diferansiyel dahil etmesini,* $x(0) \in N$ *ve* $x(1) \in M$ *sınır koşullarını sağlayan tüm yörüngeler içinde* $\widetilde{x}(t) \in \operatorname{intdom} a$ *gerçekleyen* $\widetilde{x}(t)$ *yörüngesinin,* $\varphi(x(1))$ *değerini minimum yapması için gerek koşul; aynı anda sıfır olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan* $\lambda_0 \geqslant 0$ *sayısının,* $x_e^*$ *vektörünün ve mutlak sürekli* $x^*(t)$ *fonksiyonunun var olmasıdır:*

$$x^*(1) + x_e^* \in \lambda_0 \partial\varphi(\widetilde{x}(1)), \tag{2.92}$$

$$x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}(1)), \tag{2.93}$$

$$x^*(0) \in K_N^*(\widetilde{x}(0)), \tag{2.94}$$

$$-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t); (\widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))) \;\; h.h. \;\; [0,1], \tag{2.95}$$

$$\dot{\widetilde{x}}(t) \in a(\widetilde{x}(t); x^*(t)) \;\; h.h. \;\; [0,1]. \tag{2.96}$$

**Sonuç 2.86.** *Teorem 2.85'nin hipotezleri geçerli olduğunda* (2.95) *ve* (2.96) *koşulları sırasıyla aşağıdaki içermelere dönüşür:*

$$-\dot{x}^*(t) \in \partial_x W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)) \tag{2.97}$$

$$\dot{\widetilde{x}}(t) \in \partial_{y^*} W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)). \tag{2.98}$$

**İspat.** Teorem 2.72'e göre eğer $z = (x, y)$ olmak üzere $y \in a(x; y^*)$ ise $a^*(y^*; z) = \partial_x W_a(x, y^*)$ geçerlidir. Öte yandan Lemma 2.73 nedeniyle

$$a(x; y^*) = \partial_{y^*} W_a(x, y^*)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda $x = \widetilde{x}(t), y = \dot{\widetilde{x}}(t), y^* = x^*(t)$ alınırsa Teorem 2.85'nin (2.95) ve (2.96) koşullarına karşılık sırasıyla (2.97) ve (2.98) içermeleri denk gelir. ∎

# 3. BULGULAR

Bu bölümde, tezin girişinde tanıtılan polihedral diskret içermeli ve polihedral diferansiyel içermeli konveks optimizasyon problemlerinin optimallik koşulları verilecektir. Öncelikle, bu koşulların verileceği teoremlerin ispatını kısaltmak ve daha anlaşılır kılmak için üç önemli lemma, ardından da temel teoremler kanıtlanacaktır. Bu teoremlerde çalışılan problemlerdeki içermeler tek bir küme-değerli dönüşüm ile verilmektedir, bu bölümün son kısmında ise bu içermelerin birden fazla küme-değerli dönüşümler ile verildiği Mayer tipindeki diskret içermeli bir problemin optimallik koşulları, bu küme-değerli dönüşümlerin bileşkeleri kullanılarak yeni bir yöntem ile verilmektir.

## 3.1 POLİHEDRAL PROBLEMLER

**Lemma 3.1.** *$A$ ve $B$, $m \times n$ matris, $d$ ise $m$ bileşenli bir sütun vektör olmak üzere $a(x) = \{y : Ax - By \leqslant d\}$ şeklinde tanımlanan $a(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ küme-değerli dönüşümü polihedral, konveks ve kapalıdır.*

**İspat.** $a(x) = \{y : Ax - By \leqslant d\}$ küme-değerli dönüşümünün garafiği $gph\, a = \{(x, y) : Ax - By \leqslant d\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ kümesidir. Dikkat edilirse $gph\, a$ kümesi $Ax - By \leqslant d$ lineer eşitsizlikler sisteminin çözüm kümesi olması nedeniyle bir polihedral kümedir ve dolayısıyla da konvekstir. $gph\, a$ kümesi konveks ve polihedral olduğundan Tanım 2.13 ve Tanım 2.15 nedeniyle $a$ dönüşümü konveks ve polihedral bir dönüşümdür. $a$ dönüşümünün kapalılığı için $gph\, a$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gph\, a$ olmak üzere $(x_k, y_k) \to (x, y)$ gerçekleyen herhangi bir $(x_k, y_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(x_k, y_k) \in gph\, a$ olduğundan $Ax_k - By_k \leqslant d$ geçerlidir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limite geçildiğinde $Ax - By \leqslant d$ yani $(x, y) \in gph\, a$ içermesi elde edilir. Dolayısıyla $gph\, a$ kümesi $\mathbb{R}^{2n}$ uzayında kapalı olup Tanım 2.16 gereği $a$ dönüşümü kapalı bir dönüşüm olur. ∎

Aşağıdaki lemmada grafiği polihedral küme olan bir dönüşüm için yerel dual dönüşüm hesaplanmaktadır.

**Lemma 3.2.** *$A$ ve $B$, $r \times n$ iki matris ve $d$ ise $r$ bileşenli bir vektör olmak üzere $a(x) = \{y : Ax - By \leqslant d\}$ polihedral dönüşümü verilsin. Bu durumda $A^*, B^*$ sırasıyla $A$ ve $B$ matrislerinin transpozeleri olmak üzere $a$ dönüşümü için $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasındaki yerel dual dönüşüm aşağıdaki biçimdedir:*

$$a^*(y^*; z_0) = \{x^* = A^*\lambda : y^* = B^*\lambda, \langle Ax_0 - By_0 - d, \lambda\rangle = 0, \lambda \geqslant 0\}. \tag{3.1}$$

**İspat.** $gph\, a = \{(x, y) : Ax - By \leqslant d\}$ olduğu bilinmektedir. Şimdi bir $z_0 = (x_0, y_0) \in gph\, a$ için

$$I_0 = \{i : A_i x_0 - B_i y_0 = d_i, i = 1, .., r\}$$

indis kümesini tanımlayalım, burada $A_i, B_i$ sırasıyla $A$ ve $B$ matrislerinin $i$-inci satırını ve $d_i$ de $d$ vektörünün $i$-inci bileşenini göstermektedir. Şimdi Tanım 2.21 yardımıyla $K_a(z_0)$ konisini belirlemek amacıyla hangi $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y})$ noktaları için $\lambda > 0$ yeteri kadar küçük olduğunda $z_0 + \lambda\overline{z} \in gph\, a$ gerçekleştiğini araştıralım. Eğer $i \in I_0$ ise $A_i x_0 - B_i y_0 = d_i$ gerçeklendiğinden

$$A_i(x_0 + \lambda\overline{x}) - B_i(y_0 + \lambda\overline{y}) = A_i x_0 - B_i y_0 + \lambda(A_i\overline{x} - B_i\overline{y}) = d_i + \lambda(A_i\overline{x} - B_i\overline{y}) \leqslant d_i$$

eşitsizliği geçerlidir, bu ise yalnızca

$$A_i\overline{x} - B_i\overline{y} \leqslant 0, \quad i \in I_0 \tag{3.2}$$

gerçekleyen $\overline{z} = (\overline{x}, \overline{y})$ noktaları için mümkündür, yok eğer $i \notin I_0$ ise

$$A_i(x_0 + \lambda\overline{x}) - B_i(y_0 + \lambda\overline{y}) = (A_i x_0 - B_i y_0) + \lambda(A_i\overline{x} - B_i\overline{y}) < d_i$$

eşitsizliği $\overline{z}$ noktasına bağlı olmaksızın yeterince küçük $\lambda > 0$ sayıları için geçerlidir. Dolayısıyla ancak ve yalnız (3.2) eşitsizliğini sağlayan $\overline{z}$ noktaları için $\lambda > 0$ yeterince küçük olduğunda $z_0 + \lambda\overline{z} \in gph\, a$ içermesi geçerli olur, kısacası Tanım 2.21 gereği

$$K_a(z_0) = \{(\overline{x}, \overline{y}) : A_i\overline{x} - B_i\overline{y} \leqslant 0,\ i \in I_0\}$$

bulunur. (3.2) eşitsizlik sisteminin

$$\langle\overline{x}, -A_i\rangle + \langle\overline{y}, B_i\rangle \geqslant 0, \quad i \in I_0 \tag{3.3}$$

sistemine denk olduğuna dikkat edilirse Teorem 2.37 nedeniyle $K_a(z_0)$ bir polihedral konidir ve bu tür koniler için dual konileri belirleyen Teorem 2.39 üstteki (3.3) sistemine uygulanırsa dual koni tanımı nedeniyle $(x^*, y^*) \in K_a^*(z_0)$ için gerek ve yeter koşulun

$$x^* = -\sum_{i \in I_0} A_i^* \lambda_i, \quad y^* = \sum_{i \in I_0} B_i^* \lambda_i, \quad \lambda_i \geqslant 0 \tag{3.4}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer $i \notin I_0$ için $\lambda_i = 0$ ve $\lambda$ olarak da bileşenleri $\lambda_i$ olan sütun vektör alınırsa dual koninin

$$K_a^*(z_0) = \{(x^*, y^*) : x^* = -A^*\lambda, y^* = B^*\lambda, \lambda \geqslant 0, \langle Ax_0 - By_0 - d, \lambda \rangle = 0\} \tag{3.5}$$

biçiminde olduğu bulunur. Nihayet (3.5) kullanılarak yerel dual dönüşümün tanımlandığı Tanım 2.22 nedeniyle aranan (3.1) eşitliği elde edilir. ∎

Şimdi polihedral bir küme üzerinde bulunan bir noktadaki teğet yönler konisine dual olan koniyi aşağıdaki lemma ile belirleyelim.

**Lemma 3.3.** *$A$, $r \times n$ matris ve $p$ ise $r$ bileşenli bir sütun vektör olmak üzere $N = \{x : Ax \leqslant p\}$ polihedral kümesi verilsin. Şu halde $A$ matrisinin transpozesi $A^*$ ile gösterilmek üzere bir $x_0 \in N$ noktasındaki $K_N(x_0)$ teğet yönler konisinin duali aşağıdaki biçimdedir:*

$$K_N^*(x_0) = \{x_0^* = -A^*\lambda : \langle Ax_0 - p, \lambda \rangle = 0, \lambda \geqslant 0\}. \tag{3.6}$$

**İspat.** Gerçekten $\{x : Ax \leqslant p\}$ kümesi $Ax \leqslant p$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi olması nedeniyle polihedral ve dolayısıyla da konveks bir kümedir. Lemma 3.2'de yapılanlara benzer şekilde, bir $x_0 \in N$ için $I_0 = \{i : A_i x_0 = p_i, i = 1, .., r\}$ indis kümesini tanımlayalım. $i \in I_0$ olduğunda $\lambda \geqslant 0$ yeteri kadar küçük olmak üzere $A_i(x_0 + \lambda \overline{x}) = p_i + \lambda A_i \overline{x} \leqslant p_i$ eşitsizliği yalnızca $A_i \overline{x} \leqslant 0$, $i \in I_0$ ve dolayısıyla $\langle \overline{x}, -A_i \rangle \geqslant 0$, $\quad i \in I_0$ halinde geçerlidir, eğer $i \notin I_0$ ise $A_i(x_0 + \lambda \overline{x}) = A_i x_0 + \lambda A_i \overline{x} < p_i$ eşitsizliği $\overline{x}$ noktasına bağlı olmaksızın yeterince küçük $\lambda > 0$ sayıları için geçerlidir. Dolayısıyla $K_N(x_0) = \{\overline{x} : \langle \overline{x}, -A_i \rangle \geqslant 0, \, i \in I_0\}$ bulunur. Teorem 2.37 nedeniyle polihedral olan bu koninin, Teorem 2.39 ve dual koni tanımı nedeniyle $x^* \in K_N^*(x_0)$ için gerek ve yeter koşulun $x^* = -\sum_{i \in I_0} A_i^* \lambda_i, \quad \lambda_i \geqslant 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Eğer $i \notin I_0$ için $\lambda_i = 0$ ve $\lambda$ olarak da bileşenleri $\lambda_i$ olan sütun vektör alınırsa aranan dual koninin (3.6) biçiminde olduğu elde edilir. ∎

### 3.1.1 Polihedral Diskret Dahil Etmeli Problem

$$\sum_{t=0}^{T} g(x_t, t) \longrightarrow \min \tag{3.7}$$

$$x_{t+1} \in a(x_t) \ , \quad t = 0, 1, .., T-1 \tag{3.8}$$

$$x_0 \in N_0 \quad , \quad x_T \in M_T \tag{3.9}$$

buradaki $g$ fonksiyonları konveks, $a$ dönüşümü, $N_0$ ve $M_T$ kümeleri

- $A$ ve $B$, $m \times n$ matris, $d$ ise $m$ bileşenli bir sütun vektör,

- $N$ ve $M$ diktörtgen matris, $p$ ve $q$ ise uygun bileşenli sütun vektörler

olmak üzere

$$a(x) = \{y : Ax - By \leqslant d\} \tag{3.10}$$

$$N_0 = \{x_0 : Nx_0 \leqslant p\} \tag{3.11}$$

$$M_T = \{x_T : Mx_T \leqslant q\} \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

**Teorem 3.4.** *Bir* $\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ *yörüngesinin* (3.7)-(3.9) *probleminin bir çözümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul öyle* $x_t^*, t = 0, 1, .., T$ *ve* $x^*$ *vektörlerinin var olmasıdır ki*

$$\begin{gathered} x_t^* = A^*\lambda_t + u_t^*, \quad u_t^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_t, t), \quad x_{t+1}^* = B^*\lambda_t, \ \lambda_t \geqslant 0, \\ \langle A\widetilde{x}_t - B\widetilde{x}_{t+1} - d, \lambda_t \rangle = 0, \quad t = 0, 1, .., T-1, \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$x_T^* + x^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_T, T), \tag{3.14}$$

$$x_0^* = -N^*\gamma_0, \quad \langle N\widetilde{x}_0 - p, \gamma_0 \rangle = 0, \quad \gamma_0 \geqslant 0, \tag{3.15}$$

$$x^* = -M^*\gamma_T, \quad \langle M\widetilde{x}_T - q, \gamma_T \rangle = 0, \quad \gamma_T \geqslant 0 \tag{3.16}$$

*koşullarını sağlasın.*

**İspat.** Polihedral bir $a$ dönüşümünün $z = (x, y)$ noktasındaki yerel dual dönüşümünün belirlendiği Lemma 3.2 nedeniyle

$$a^*(y^*; z) = \{x^* = A^*\lambda : y^* = B^*\lambda, \langle Ax - By - d, \lambda \rangle = 0, \lambda \geqslant 0\} \tag{3.17}$$

biçiminde olur. Öte yandan $\widetilde{x}_0 \in N_0$ ve $\widetilde{x}_T \in M_T$ gerçeklendiğinde bu noktadaki $K_{N_0}(\widetilde{x}_0)$ ve $K_{M_T}(\widetilde{x}_T)$ teğet yönler konilerinin dual konileri Lemma 3.3 nedeniyle

$$\begin{aligned} K^*_{N_0}(\widetilde{x}_0) &= \{x_0^* = -N^*\gamma_0 : \langle N\widetilde{x}_0 - p, \gamma_0\rangle = 0, \gamma_0 \geqslant 0\}, \\ K^*_{M_T}(\widetilde{x}_T) &= \{x_T^* = -M^*\gamma_T : \langle M\widetilde{x}_T - q, \gamma_T\rangle = 0, \gamma_T \geqslant 0\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde olurlar. Şimdi bu bulgular ile birlikte Sonuç 2.82'u dolayısıyla da Teorem 2.81'i kullanalım. Sonuç 2.83 nedeniyle (2.74) bağıntısında $\lambda = 1$ olur. (2.74) bağıntısında $x^* = x_t^*$, $y^* = x_{t+1}^*$, $x = \widetilde{x}_t$, $y = \widetilde{x}_{t+1}$ alınır ve (3.17) dikkate alınırsa $x_t^* = A^*\lambda_t + u_t^*$, $u_t^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_t, t)$, $x_{t+1}^* = B^*\lambda_t$, $\langle A\widetilde{x}_t - B\widetilde{x}_{t+1} - d, \lambda_t\rangle = 0$, $\lambda \geqslant 0$ koşulları yani (3.13) koşulları elde edilir. Yine Sonuç 2.83 nedeniyle (2.75) bağıntısında $\lambda = 1$ olup, $x_e^* = x^*$ alınırsa (3.14) koşulu elde edilir. (2.76) bağıntısında $N = N_0$ alınır ve (3.18) dikkate alınırsa $x_0^* = -N^*\gamma_0$, $\langle N\widetilde{x}_0 - p, \gamma_0\rangle = 0$, $\gamma_0 \geqslant 0$ yani (3.15) koşulları elde edilir. (2.77) bağıntısında $M = M_T$ alınır ve (3.18) dikkate alınırsa $x^* = -M^*\gamma_T$, $\langle M\widetilde{x}_T - q, \gamma_T\rangle = 0$, $\gamma_T \geqslant 0$ yani (3.16) koşulları elde edilir. Böylece tüm koşullar elde edilmiş olur. $\lambda = 1 > 0$ olduğundan Teorem 2.81 nedeniyle elde edilen koşullar aynı zamanda yeter koşuldurlar. ■

### 3.1.2 Polihedral Diferansiyel Dahil Etmeli Problem

$$\varphi_0(x(1)) \longrightarrow \min \tag{3.19}$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t)), \quad t \in [0,1] \tag{3.20}$$

$$x(0) \in N_0 \quad , \quad x(1) \in M_1 \tag{3.21}$$

buradaki $a$ dönüşümü, $N_0$ ve $M_1$ kümeleri

- $A$ ve $B$, $m \times n$ matris, $d$ ise $m$ bileşenli bir sütun vektör,

- $N$ ve $M$ diktörtgen matris, $p$ ve $q$ ise uygun bileşenli sütun vektörler

olmak üzere

$$a(x) = \{y : Ax - By \leqslant d\}, \tag{3.22}$$

$$N_0 = \{x(0) : Nx(0) \leqslant p\}, \tag{3.23}$$

$$M_1 = \{x(1) : Mx(1) \leqslant q\}, \tag{3.24}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Öte yandan $\varphi_0$ fonksiyonu $x$'e göre konveks, ayrıca $x$ ve $t$'ye göre de süreklidir.

**Teorem 3.5.** *$\widetilde{x}(t)$ fonksiyonu (3.19)-(3.21) probleminin bir çözümü, ayrıca $a$ sınırlı olmak üzere $\widetilde{x}(t) \in \operatorname{int}\operatorname{dom} a$ gerçeklensin. Bu durumda aynı anda sıfır olmayan öyle bir $\lambda_0 \geqslant 0$ sayısı, $x_e^*$ vektörü ve mutlak sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonu vardır ki aşağıdaki*

$$x^*(1) + x_e^* \in \lambda_0 \partial\varphi_0(\widetilde{x}(1)), \tag{3.25}$$

$$x_e^* = -M^*\gamma_1, \quad \langle M\widetilde{x}(1) - q, \gamma_1\rangle = 0,\ \gamma_1 \geqslant 0, \tag{3.26}$$

$$x^*(0) = -N^*\gamma_0, \quad \langle N\widetilde{x}(0) - p, \gamma_0\rangle = 0,\ \gamma_0 \geqslant 0, \tag{3.27}$$

$$-\dot{x}^*(t) = A^*\lambda(t),\ x^*(t) = B^*\lambda(t),\ \langle A\widetilde{x}(t) - B\dot{\widetilde{x}}(t) - d, \lambda(t)\rangle = 0, \quad \lambda(t) \geqslant 0 \ \ h.h.\ [0,1] \tag{3.28}$$

$$\dot{\widetilde{x}}(t) \in a(\widetilde{x}(t); x^*(t)) \ \ h.h.\ [0,1] \tag{3.29}$$

*koşulları sağlanır.*

**İspat.** Lemma 3.1 nedeniyle $a$ dönüşümü konveks ve kapalıdır, ayrıca hipotez gereği sınırlı bir dönüşümdür. Şimdi Lemma 3.2 ve Lemma 3.3 yardımıyla elde edilen (3.17) ve (3.18) bağıntılarını dikkate alınarak Teorem 2.85 uygulayalım. (2.92) koşulu aynen geçerli olup (3.25) koşulu gerçeklenir. (2.93) bağıntısı $M = M_1$ ve (3.18) bağıntısı da $M_T = M_1$ ve $\widetilde{x}_T = \widetilde{x}(1)$ alınarak kullanılılırsa $x_e^* = -M^*\gamma_1, \langle M\widetilde{x}(1) - q, \gamma_1\rangle = 0,\ \gamma_1 \geqslant 0$, koşulu yani (3.26) koşulu elde edilir. Benzer biçimde (2.94) bağıntısı $N = N_0$ ve (3.18) bağıntısı da $\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}(0)$ alınarak kullanılılırsa $x^*(0) = -N^*\gamma_0, \langle N\widetilde{x}(0) - p, \gamma_0\rangle = 0,\ \gamma_0 \geqslant 0$, koşulu yani (3.27) koşulu elde edilir. (2.95) koşulu (3.17) bağıntısında $y^* = x^*(t), x = \widetilde{x}(t), y = \dot{\widetilde{x}}(t), \lambda = \lambda(t)$ değişiklikleri yapılarak dikkate alındığında $-\dot{x}^*(t) = A^*\lambda(t),\ x^*(t) = B^*\lambda(t),\ \langle A\widetilde{x}(t) - B\dot{\widetilde{x}}(t) - d, \lambda(t)\rangle = 0,\ \lambda(t) \geqslant 0\ h.h.\ [0,1]$ yani (3.28) koşulu elde edilir. (2.96) koşulu aynen geçerli olup (3.25) koşulu gerçeklenir. Böylece tüm koşullar elde edilmiş olur. ■

**Teorem 3.6.** *Theorem 3.5'nin hipotezleri altında $\widetilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ yörüngesinin optimalliği için gerekli (3.25)-(3.28) koşulları $\lambda_0 > 0$ olduğunda aynı zamanda yeter koşullardır.*

**İspat.** Kanıtlamayı genelliği bozmaksızın $\lambda_0 = 1$ olduğu durum için yapalım. $x(t)$ yörüngesi $\dot{x}(t) \in a(x(t))$ içermesini ve $x(0) \in N_0,\ x(1) \in M_1$ koşullarını sağlayan herhangi bir yörünge olsun. Öte yandan subdiferansiyel tanımından

$$\partial_x W_a(x, y^*) = \{x^* : W_a(x_1, y^*) - W_a(x, y^*) \geqslant \langle x_1 - x, x^*\rangle\} \tag{3.30}$$

$$\partial_{y^*} W_a(x, y^*) = \{u : W_a(x, y_1^*) - W_a(x, y^*) \leq \langle u, y_1^* - y^*\rangle\} \tag{3.31}$$

eşitlikleri geçerlidir. (2.26) fonksiyonunun tanımı gereği $\dot{x}(t) \in a(x(t))$ için $\langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle \geqslant W_a(x(t), x^*(t))$ geçerlidir. (3.30) dikkate alınarak ve (2.97) nedeniyle $-\dot{x}^*(t) \in a^*(x^*(t); (\widetilde{x}(t), \dot{\widetilde{x}}(t))) = \partial_x W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t))$ olduğu bilgisi kullanılarak $W_a(x(t), x^*(t)) \geqslant W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)) + \langle x(t) - \widetilde{x}(t), -\dot{x}^*(t) \rangle = W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)) - \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle + \langle \widetilde{x}(t), \dot{x}^*(t) \rangle$ bulunur. Bu ve bir önceki eşitsizlikten

$$\langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle \geqslant W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)) - \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle + \langle \widetilde{x}(t), \dot{x}^*(t) \rangle \tag{3.32}$$

eşitsizlik bapıntısı elde edilir. Şimdi iç çarpımın türev özelliklerinden, $a(x; y^*)$ fonksiyonunun (2.33) ile verilen tanımından yararlanarak (2.96) koşulu ve (3.32) eşitsizliği nedeniyle

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle x(t), x^*(t) \rangle &= \langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle + \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle \\
&\geqslant W_a(\widetilde{x}(t), x^*(t)) + \langle \widetilde{x}(t), \dot{x}^*(t) \rangle \\
&= \langle \dot{\widetilde{x}}(t), x^*(t) \rangle + \langle \widetilde{x}(t), \dot{x}^*(t) \rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle \widetilde{x}(t), x^*(t) \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $t = 0$'dan $t = 1$'e integralini alırsak, dikkat $x(t)$ mutlak sürekli olduğundan türevinin integrali kendisine eşit olup Newton-Leibnitz formülü geçerlidir,

$$\langle x(1), x^*(1) \rangle - \langle x(0), x^*(0) \rangle \geqslant \langle \widetilde{x}(1), x^*(1) \rangle - \langle \widetilde{x}(0), x^*(0) \rangle \tag{3.33}$$

bağıntısına ulaşılır. $x(1) \in M_1$ olduğundan $\widetilde{x}(1)$ noktasındaki $K_{M_1}(\widetilde{x}(1)) = con\{M_1 - \widetilde{x}(1)\}$ teğet yönler konisinin tanımı gereği $x(1) - \widetilde{x}(1) \in K_{M_1}(\widetilde{x}(1))$ içermesi gerçeklenir. Bu içerme ile beraber teoremin $x_e^* \in K_{M_1}^*(\widetilde{x}(1))$ koşulu ve (3.26) nedeniyle $x_e^* = -M^*\mu_1$ olduğu göz önüne alınarak dual koni tanımı gereği

$$\langle x(1) - \widetilde{x}(1), x_e^* \rangle = \langle x(1) - \widetilde{x}(1), -M^*\mu_1 \rangle \geqslant 0 \tag{3.34}$$

eşitsizliğinin gereçeklendiği anlaşılır. Benzer biçimde $x(0) \in N_0$ olduğundan $\widetilde{x}(0)$ noktasındaki $K_{N_0}(\widetilde{x}(0)) = con\{N_0 - \widetilde{x}(0)\}$ teğet yönler konisinin tanımı gereği $x(0) - \widetilde{x}(0) \in K_{N_0}(\widetilde{x}(0))$ içermesi gerçeklenir. Bu içerme ile beraber teoremin $x^*(0) \in K_{N_0}^*(\widetilde{x}(0))$ koşulu göz önüne alınarak dual koni tanımı gereği

$$\langle x(0) - \widetilde{x}(0), x^*(0) \rangle = \langle x(0), x^*(0) \rangle - \langle \widetilde{x}(0), x^*(0) \rangle \geqslant 0 \tag{3.35}$$

eşitsizlgi geçerlidir. Şimdi bulduğumuz bu (3.35) eşitsizliği (3.33) bağıntısında kullanılırsa $\langle x(1), x^*(1) \rangle \geqslant \langle \widetilde{x}(1), x^*(1) \rangle$ eşitsizliği buradan da (3.28) nedeniyle $x^*(1) =$

$B^*\lambda(1)$ olduğu göz önüne alınarsa

$$\langle x(1) - \widetilde{x}(1), B^*\lambda(1)\rangle \geqslant 0 \tag{3.36}$$

eşitsizliği bulunur. Nihayet $x^*(1) + x_e^* = B^*\lambda(1) - M^*\mu_1 \in \partial\varphi_0(\widetilde{x}(1))$ koşulu, subdiferansiyel tanımı, (3.34) ve (3.36) eşitsizlik bağıntıları nedeniyle

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x(1)) - \varphi_0(\widetilde{x}(1)) &\geqslant \langle x(1) - \widetilde{x}(1), B^*\lambda(1) - M^*\mu_1\rangle \\
&= \langle x(1) - \widetilde{x}(1), B^*\lambda(1)\rangle + \langle x(1) - \widetilde{x}(1), -M^*\mu_1\rangle \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

eşitsizliği ve dolayısıyla da $\widetilde{x}(t), t \in [0,1]$ yörüngesinin optimal olduğunu gösteren $\varphi_0(x(1)) \geqslant \varphi_0(\widetilde{x}(1))$ eşitsizliği elde edilmiş olur. ∎

## 3.2 YENİ YÖNTEM

### 3.2.1 Bileşke Yöntemi

Aşağıdaki konveks diskret içermeli optimizasyon problemi göz önüne alalım:

$$g(x_T) \to \min \tag{3.37}$$

$$x_{t+1} \in a_t(x_t),\ t = 0, 1, ..., T-1 \tag{3.38}$$

$$x_0 \in N,\ x_T \in M \tag{3.39}$$

burada, herbir $t = 0, 1, ..., T-1$ için $X^t = \mathbb{R}^n$ ve $a_t : X^t \to X^{t+1}$ konveks küme-değerli dönüşüm, $g$ bir konveks fonksiyon, $N \subseteq X^0$ ve $M \subseteq X^T$ konveks kümelerdir.

**Tanım 3.1.** *$a_1 : X \to X^1$ ve $a_2 : X^1 \to Y$ biçiminde tanımlı iki küme-değerli dönüşüm için $a_2 \circ a_1 : X \to Y$ bileşke küme-değerli dönüşümü*

$$\begin{aligned}
(a_2 \circ a_1)(x) &= \{y \in Y : y \in a_2(x_1),\ x_1 \in a_1(x)\} \\
&= \bigcup_{x_1 \in a_1(x)} a_2(x_1)
\end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanır.*

Şimdi (3.38) içermesindeki $a_0, a_1, ..., a_{T-1}$ küme-değerli dönüşümlerinin bileşkelerini $a^T : X^0 \to X^T$ ile gösterelim, yani $a^T \equiv a_{T-1} \circ a_{T-2} \circ ... \circ a_1 \circ a_0$ olsun. Bu durumda (3.37)-(3.39) problemi aşağıdaki probleme denk olur:

$$g(x_T) \to \min \tag{3.40}$$

$$x_T \in a^T(x_0), \tag{3.41}$$

$$x_0 \in N,\ x_T \in M\ . \tag{3.42}$$

Öte yandan, küme-değerli dönüşümlerin grafik tanımı yardımıyla bileşke dönüşümün grafiği aşağıdaki gibi tanımlanmakatadır:

**Tanım 3.2.** *$a_1 : X \to X^1$ ve $a_2 : X^1 \to Y$ olmak üzere $a_2 \circ a_1 : X \to Y$ bileşke küme-değerli dönüşümünün grafiği*

$$gph(a_2 \circ a_1) = \{(x, y) : (x, x_1) \in gph\, a_1,\ (x_1, y) \in gph\, a_2\}$$

*şeklinde tanımlanır.*

**Teorem 3.7.** (3.37)-(3.39) *problemindeki $g(x_T)$ konveks fonksiyonu $\widetilde{x}_T$ noktasında minimum değerine sahip olsun. Bu durumda aynı anda sıfır olamayan öyle bir $\lambda \in \{0, 1\}$ sayısı, $x_0^*, x_T^*$ ve $x_e^*$ vektörleri vardır ki aşağıdaki koşulları sağlar:*

$$x_0^* \in (a^T)^*(x_T^*; (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)), \tag{3.43}$$

$$x_T^* + x_e^* \in \lambda \partial g(\widetilde{x}_T), \tag{3.44}$$

$$x_0^* \in K_N^*(\widetilde{x}_0), \quad x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T) \tag{3.45}$$

*Üstelik, eğer $\lambda = 1$ ise bu koşullar aynı zamanda yeter koşullardır.*

**İspat.** $z = (x_0, x_T)$ ve $f(z) = g(x_T)$ olarak tanımlanırsa (3.37)-(3.39) problemi

$$f(z) \to \min \tag{3.46}$$

$$z \in gph\, a^T \cap (N \times X^T) \cap (X^0 \times M) \tag{3.47}$$

problemine dönüşür. Öte yandan $g(\widetilde{x}_T)$ değeri $\widetilde{x}_0$'a bağlı olmadığından $f$ fonksiyonunun $\widetilde{z} = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)$ noktasındaki subdiferansiyeli

$$\partial f(\widetilde{z}) = \{0\} \times \partial g(\widetilde{x}_T) \tag{3.48}$$

formunda, yani

$$\partial f(\widetilde{z}) = \{z^* = (\widetilde{x}_0^*, \widetilde{x}_T^*) : \widetilde{x}_0^* = 0,\ \widetilde{x}_T^* \in \partial g(\widetilde{x}_T)\} \tag{3.49}$$

şeklinde bir kümedir. Teğet yönler konisinin tanımı ve tüm uzayın teğet yönler konisinin kendisi olduğu dikkate alınırsa $gph\ a^T,\ N \times X^T,\ X^0 \times M$ kümelerinin $\widetilde{z}$ noktasındaki teğet yönler konileri sırasıyla $K_{a^T}(\widetilde{z})$, $K_N(\widetilde{x}_0) \times X^T$, $X^0 \times K_M(\widetilde{x}_T)$ olur.

Bu teğet yönler konilerinin dual konileri, tüm uzayın dual teğet yönler konisinin sıfır vektörü olduğu göz önüne alınarak sırasıyla

$$(K_{a^T}(\widetilde{z}))^* = K^*_{a^T}(\widetilde{z}), \tag{3.50}$$

$$(K_N(\widetilde{x}_0) \times X^T)^* = K^*_N(\widetilde{x}_0) \times X^T \tag{3.51}$$

$$(X^0 \times K_M(\widetilde{x}_T))^* = X^0 \times K^*_M(\widetilde{x}_T) \tag{3.52}$$

olarak hesaplanır. (3.48)-(3.52) ifadeleri dikkate alınarak (3.46)-(3.47) problemine Teorem 2.77 uygulanırsa, $\widetilde{z}$ noktasının $f$ fonksiyonuna $gph\, a^T \cap (N \times X^T) \cap (X^0 \times M)$ kümesinde minimum değer verebilmesi için gerek koşulun, aynı anda sıfır olmayan öyle bir $\lambda \in \{0, 1\}$ sayısı, $x^*_0$, $x^*_e$, $(x^{1*}_0, x^{1*}_T)$ vektörlerinin

$$\lambda(0, \widetilde{x}^*_T) = (x^{1*}_0, x^{1*}_T) + (x^*_0, 0) + (0, x^*_e) \tag{3.53}$$

$$\widetilde{x}^*_T \in \partial g(\widetilde{x}_T),\ (x^{1*}_0, x^{1*}_T) \in K^*_{a^T}(\widetilde{z}) \tag{3.54}$$

$$x^*_0 \in K^*_N(\widetilde{x}_0),\ x^*_e \in K^*_M(\widetilde{x}_T)\ . \tag{3.55}$$

koşullarını gerçekleyecek biçimde var olması gerektiği elde edilir. (3.53) eşitliğinden $\lambda\widetilde{x}^*_T = x^{1*}_T + x^*_e$ ve $x^{1*}_0 + x^*_0 = 0$ bu eşitliklerden de $x^{1*}_T = \lambda\widetilde{x}^*_T - x^*_e$ ve $x^{1*}_0 = -x^*_0$ bağıntıları elde edilir, bu eşitlikler (3.54)'daki ikinci içermede yerlerine yazıldığında

$$(-x^*_0, \lambda\widetilde{x}^*_T - x^*_e) \in K^*_{a^T}(\widetilde{z})$$

bulunur. Şimdi yerel dual dönüşüm tanımının verildiği Tanım 2.22 nedeniyle

$$x^*_0 \in (a^T)^*(\lambda\widetilde{x}^*_T - x^*_e; \widetilde{z})$$

içermesi geçerlidir. Şimdi $x^*_T = \lambda\widetilde{x}^*_T - x^*_e$ tanımlaması yapılırsa

$$x^*_T + x^*_e = \lambda\widetilde{x}^*_T$$

eşitliği ve (3.54)'deki $\widetilde{x}^*_T \in \partial g(\widetilde{x}_T)$ içermesi göz önüne alındığında

$$x^*_T + x^*_e \in \lambda\partial g(\widetilde{x}_T)$$

içermesi elde edilir. Böylece istenenler elde edilmiş olur. ■

Aşağıdaki teorem ile $(a^T)^*$ dual dönüşümü ve $a^*_t,\ t = 0, 1, 2, ..., T-1$ dönüşümleri arasındaki ilişki verilmektedir.

**Teorem 3.8.** *Aşağıdaki koşullardan birini sağlayan* $\bar{x}_t^0 \in X^t$, $t = 0, 1, .., T-1$ *noktaları var olsun:*

$$(a) \ \ (\bar{x}_t^0, \bar{x}_{t+1}^0) \in ri\, gph\ a_t,\ t = 0, 1, 2, ..., T-1$$
$$(b) \ \ (\bar{x}_t^0, \bar{x}_{t+1}^0) \in int\, gph\ a_t,\ t = 0, 1, 2, ..., T-2 \ \ ve\ (\bar{x}_{T-1}^0, \bar{x}_T^0) \in gph\ a_{T-1}$$

*Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:*

$$(a^T)^*(x_T^*; (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)) = \{x_0^* : x_0^* \in a_0^*(x_1^*, (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1)), .., x_{T-1}^* \in a_{T-1}^*(x_T^*, (\widetilde{x}_{T-1}, \widetilde{x}_T))\}$$

*ya da kısaca*

$$(a^T)^*(\cdot, (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T)) = a_0^*(\cdot, (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1)) \circ \cdots \circ a_{T-1}^*(\cdot, (\widetilde{x}_{T-1}, \widetilde{x}_T)) \ .$$

**İspat.** Teoremin ispatını $a_t \circ a_{t-1}$ için yapmak yeterlidir. Yerel dual dönüşüm ve dual koni tanımları nedeniyle

$$x_{t-1}^* \in (a_t \circ a_{t-1})^*(x_{t+1}^*, (\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_{t+1}))$$

içermesi ile

$$-\langle \bar{x}_{t-1}, x_{t-1}^* \rangle + \langle \bar{x}_{t+1}, x_{t+1}^* \rangle \geqslant 0, \quad (\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_{t+1}) \in K_{a_t \circ a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_{t+1}) \qquad (3.56)$$

bağıntısı eşdeğerdir, burada $K_{a_t \circ a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_{t+1})$ konisi $(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_{t+1}) \in gph(a_t \circ a_{t-1})$ noktasındaki teğet yönler konisidir. Öte yandan $(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_{t+1}) \in gph(a_t \circ a_{t-1})$ içermesi $\widetilde{x}_t \in X^t$ olmak üzere $(x_{t-1}, \widetilde{x}_t) \in gph\ a_{t-1}$ ve $(x_t, \widetilde{x}_{t+1}) \in gph\ a_t$ içermelerini gerektirir. Şimdi $(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \in X^{t-1} \times X^t \times X^{t+1}$ noktasında verilen aşağıdaki iki koni göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned} K_{a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) &= \{(\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) : (\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t) \in K_{a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t)\} \\ &= K_{a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t) \times X^{t+1} \ , \\ K_{a_t}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) &= \{(\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) : (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \in K_{a_t}(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})\} \\ &= X^{t-1} \times K_{a_t}(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \ . \end{aligned}$$

Böylece (3.56) bağıntısı

$$-\langle \bar{x}_{t-1}, x_{t-1}^* \rangle + \langle \bar{x}_t, 0 \rangle + \langle \bar{x}_{t+1}, x_{t+1}^* \rangle \geqslant 0 \ , \qquad (3.57)$$

$$(\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t) \in K_{a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t) \ \ , \ \ (\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}) \in K_{a_t}(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \qquad (3.58)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda Teorem 2.32 ve Teorem 2.64 nedeniyle

$$\begin{aligned}(-x_{t-1}^*, 0, x_{t+1}^*) &\in [K_{a_{t-1}}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \cap K_{a_t}(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})]^* \\ &= K_{a_{t-1}}^*(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) + K_{a_t}^*(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \\ &= K_{a_{t-1}}^*(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t) \times \{0\} + \{0\} \times K_{a_t}^*(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})\end{aligned}$$

içermesi geçerlidir. Tüm bu yapılanlardan sonra $(-x_{t-1}^*, 0, x_{t+1}^*)$ vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$-x_{t-1}^* = -x_{t-1}^{1*}, \quad 0 = x_t^{1*} - x_t^{2*}, \quad x_{t+1}^* = x_{t+1}^{2*}, \tag{3.59}$$

$$(-x_{t-1}^{1*}, x_t^{1*}) \in K_{a_{t-1}}^*(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t) \ , \ (-x_t^{2*}, x_{t+1}^{2*}) \in K_{a_t}^*(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}) \tag{3.60}$$

Bu son iki ifade ise yerel dual dönüşüm tanımı göz önüne alındığında

$$x_{t-1}^* = x_{t-1}^{1*}, \quad x_{t-1}^{1*} \in a_{t-1}^*(x_t^{1*}, (\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{x}_t)), \quad x_t^{1*} \in a_t^*(x_{t+1}^*, (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}))$$

bağıntısı ile eşdeğerdir. Daha sonra $a_{t-1} \circ a_t$ bileşke dönüşümü $a_t$ ve $a_{t+2} \circ a_{t+1}$ dönüşümü de $a_{t+1}$ ile gösterilerek bir indirgeme bağıntısı elde edilir ve bu indirgeme bağıntısı yardımıyla yukarıda $a_t \circ a_{t-1}$ için yapılan ispat tekrar edilerek istenen elde edilmiş olur. ∎

**Teorem 3.9.** *$a_t$, $t = 0, 1, ..., T-1$ küme-değerli dönüşümler polihedral olduğunda Teorem 3.8, (a) ve (b) koşulları olmaksızın geçerlidir.*

**İspat.** Teorem 3.8'in ispatında kullanılan Teorem 2.32 ve Teorem 2.64 yerine Teorem 2.44 kullanılması yeterlidir. ∎

**Teorem 3.10.** *Teorem 3.8'in koşulları altında $\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^T$ yörüngesinin (3.37)-(3.39) probleminin optimal yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, aynı anda sıfır olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $x_e^*$, $x_t^*$, $t = 0, ..., T$ vektörlerinin var olmasıdır:*

$$x_t^* \in a_t^*(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})), \ t = 0, ..., T-1 \tag{3.61}$$

$$x_T^* + x_e^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_T), \quad x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T), \quad x_0^* \in K_N^*(\widetilde{x}_0) \ .$$

**İspat.** Teorem 3.8 nedeniyle $x_0^* \in (a^T)^*(x_T^*; (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_T))$ ve $x_t^* \in a_t^*(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}))$, $t = 0, ..., T-1$ içermelerinin eşdeğer oldukları dikkate alınarak Teorem 3.7 uygulanırsa isten elde edilir. ∎

**Teorem 3.11.** *Teorem 3.10'nin koşulları geçerli ve* $x_t \in X^t$ *için* $a_t(x_t)$ $, t = 0, 1, ..., T$ *küme-değerli dönüşümü kapalı olsun. Bu durumda* $\{\widetilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ *yörüngesinin* (3.37)-(3.39) *probleminin optimal yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, aynı anda sıfır olmayan ve aşağıdaki koşulları sağlayan* $x_e^*$, $x_t^*$, $t = 0, ..., T$ *vektörlerinin var olmasıdır:*

$$\widetilde{x}_{t+1} \in \partial_{y^*} W_{a_t}(\widetilde{x}_t, x_{t+1}^*), \quad x_t^* \in \partial_x W_{a_t}(\widetilde{x}_t, x_{t+1}^*),\ t = 0, 1, ..., T-1 \tag{3.62}$$

$$x_T^* + x_e^* \in \partial_x g(\widetilde{x}_T), \quad x_e^* \in K_M^*(\widetilde{x}_T), \quad x_0^* \in K_N^*(\widetilde{x}_0)\ . \tag{3.63}$$

**İspat.** (2.26) ve (2.33) nedeniyle

$$W_a(x, y^*) = \inf_y \{\langle y, y^* \rangle : y \in a(x)\}$$

$$a(x; y^*) = \{y \in a(x) : \langle y, y^* \rangle = W_a(x, y^*)\}$$

eşitlikleri, Teorem 2.72 nedeniyle de

$$a^*(y^*; z) = \begin{cases} \emptyset & , \ y \notin a(x, y^*) \\ \partial_x W_a(x, y^*) & , \ y \in a(x, y^*) \end{cases}$$

geçerli idi. Öte yandan (3.62) nedeniyle $a_t^*(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})) \neq \emptyset$ geçerlidir. Tüm bunlar dikkate alındığında

$$a_t^*(x_{t+1}^*; (\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1})) = \partial_x W_{a_t}(\widetilde{x}_t, x_{t+1}^*), \tag{3.64}$$

$$\widetilde{x}_{t+1} \in a_t(\widetilde{x}_t, x_{t+1}^*) \tag{3.65}$$

yazabiliriz. Açıktır ki $-W_a(x, y^*) = \sup_y \{- < y, y^* >: y \in a(x)\}$ geçerlidir. Öte yandan $-W_a(x, y^*)$ fonksiyonu $y^*$'a göre konvekstir ve Lemma 2.73 nedeniyle

$$\partial_{y^*}(-W_a(x, y^*)) = -a(x; y^*)$$

geçerlidir. $-W_a(x, y^*)$ konveks olduğundan $W_a(x, \cdot)$ fonksiyonu $y^*$'a göre konkav bir fonksiyondur. Subdiferansiyel ve konkavlık tanımından

$$\partial_{y^*}(W_a(x, y^*)) = -\partial_{y^*}(-W_a(x, y^*))$$

ve böylece

$$\partial_{y^*}(W_a(x, y^*)) = a(x; y^*)$$

eşitliği geçerli olur. Bu durumda, (3.65) içermesi

$$\widetilde{x}_{t+1} \in \partial_{y^*} W_{a_t}(\widetilde{x}_t, x_{t+1}^*) \tag{3.66}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuçta (3.64)-(3.66) içermeleri (3.62) bağıntısında yerine yazılırsa istenen elde edilmiş olur. ∎

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}^n$ uzayında konveks programlamaya ait aşağıdaki diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon probleminin optimalliği için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Üzerinde çalışılan ekstremal problemlerin optimallik koşullarına Pschenichnyi'nin yerel dual dönüşüm metodu kullanılarak ulaşılmıştır [18]. Özel olarak, ele alınan problemlerde kümeler, küme-değerli dönüşümler polihedraldir.

**Diskret İçermeli Problem:**

$$\sum_{t=0}^{T} g(x_t, t) \longrightarrow \min \tag{4.1}$$

$$x_{t+1} \in a(x_t)\ , \quad t = 0, 1, .., T-1 \tag{4.2}$$

$$x_0 \in N_0 \quad , \quad x_T \in M_T \tag{4.3}$$

**Diferansiyel İçermeli Problem:**

$$\varphi_0(x(1)) \longrightarrow \min \tag{4.4}$$

$$\dot{x}(t) \in a(x(t))\ , \quad t \in [0, 1] \tag{4.5}$$

$$x(0) \in N_0 \quad , \quad x(1) \in M_1. \tag{4.6}$$

Diskret İçermeli Problem, (4.3) sınır koşullarını ve (4.2) diskret içermesini sağlayan tüm uygun $(x_1, , x_2, .., x_T)$ yörüngeleri arasından (4.1)'de verilen $\sum_{t=0}^{T} g(x_t, t)$ fonksiyonuna $x_T$ noktasında minimum değer veren yörüngenin bulunmasından ibarettir. Dolayısıyla, konveks yapılı diskret sistemlerle kontrol edilen optimizasyon problemleri ve ekonomik dinamiklerin modellerinin ekstremal problemleri Diskret İçermeli Problem'in özel halleri olarak göz önüne alınabilirler.

Yukarıda da belitildiği gibi bu tez çalışmasında Diferansiyel İçermeli Problem özel olarak Mayer tipinde bir problemdir, (4.4)'teki fonksiyonel $\int_0^1 g(x(t), t)dt + \varphi_0(x(1))$

şeklinde bir Bolza fonksiyoneli ile yer değiştirilip elde edilen diferansiyel içermeli konveks optimizasyon probleminin optimalliği ayrı bir problem olarak incelenebilir.

Bilindiği gibi her konveks optimizayon problemine karşılık bir dual problem karşılık gelmektedir. Yukarıda incelenen optimizasyon problemleri konveks bir yapıya sahip olduklarından doğal olarak dual problemin nasıl bir yapıya sahip olduğu, dual ve direkt problemin birbirlerine hangi koşullar altında bağlı olduklarını veren dualite ilişkisinin ne olduğu, dual problemin çözümünün varlığını hangi koşulların garanti ettiği ve dual problemin çözümünün direkt problemin optimalliği için gerek ve yeter koşullar ile bağlantısının ne olduğu soruları ortaya çıkmaktadır. Bu konulardaki dual problemin oluşturulması ve dual ilişkilerin belirlenmesi hakkındaki Mahmudov'un [20, 25] çalışmaları incelendiğinde infimal konvolüsyon kavramı kullanılarak bu sorulara yanıt bulunabileceği öngörülmektedir.

Son olarak, birden fazla küme-değerli dönüşüm ile tanımlanmış diskret içermeli bir konveks optimizasyon probleminin optimallik koşullarını belirlemek için onların bileşkeleri kullanılarak yeni bir yöntem verilmiştir. Bu yöntem [47]'de konveks durum için ve konveks olmayan genel durum için de [43]'de Mahmudov ve Değer tarafından geliştirilmiştir.

# KAYNAKLAR


[1] ROCKAFELLAR, R. T. and WETS, J. B., 1998, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 3-540-62772-3.

[2] BRUNT, B. V., 2003, *The Calculus of Variations*, Universitext, Springer, New York, USA, 0-387-40247-0.

[3] MORDUKHOVICH, B. S., 2005, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 3-540-25437-4.

[4] MORDUKHOVICH, B. S., 2005, *Variational Analysis and Generalized Differentiation II: Applications*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 3-540-25438-2.

[5] DANTZIG, G. B. and THAPA, M. N., 1997, *Linear Programming 1. Introduction*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York, USA, 0-387-94833-3.

[6] EISELT, H. A. and SANDBLOM, C. L., 2007, *Linear Programming and its Applications*, Springer, Berlin, 978-3-540-73670-7.

[7] MATOUŠEK, J. and GÄRTNER, B., 2006, *Understanding and Using Linear Programming*, Universitext, Springer, Berlin, 3-540-30697-8.

[8] ALEKSEEV, V. M., TIKHOMIROV, V. M., and FOMIN, S. V., 1987, *Optimal control*, Plenum Press, New York, USA, 0-306-10996-4.

[9] VINTER, R. B., 2000, *Optimal Control*, Birkhäuser, Boston, USA, 3-7643-4075-4.

[10] CHEN, P. and ISLAM, S. M. N., 2004, *Optimal Control Models in Finance: A New Computational Approach*, Applied Optimization Vol.95, Springer, USA, 0-387-23569-8.

[11] SETHI, S. P. and THOMPSON, G. L., 2000, *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, 2nd ed.*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA, 0-7923-8608-6.

[12] NEITTAANMÄKI, P. and TIBA, D., 1994, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms and Applications*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, USA, 0-8247-9081-2.

[13] NEITTAANMÄKI, P., SPREKELS, J., and TIBA, D., 2005, *Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, USA, 0-387-27235-6.

[14] MAKAROV, V. L. and RUBINOV, A. M., 1970, Superlinear Point Set Mappings and Models of Economic Dynamics, *Usp. Mat. Nauk*, 25 (5), 125–169, [Rusça].

[15] PSHENICHNYI, B. N., 1971, *Necessary Conditions for Extremum*, Pure and Applied Mathematics, CRC, USA, 0-824-71556-X.

[16] DZYUBA, N. N. and PSHENICHNYI, B. N., 1975, Discrete Maximum Principle, *Kibernetika*, 2, 46–49, [Rusça].

[17] PSHENICHNYI, B. N., 1976, Necessary Conditions of the Extremum for Differential Inclusions, *Kibernetika*, 6, 60–73, [Rusça].

[18] PSHENICHNYI, B. N., 1980, *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauk, Moscow [Rusça].

[19] MAKHMUDOV, E. N., 1983, Abstract Models of Economic Dynamics Described by Convex Discrete Inclusions with Aftereffect, *Izv. Akad. Nauk Azerbaijan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk*, 4 (1), 121–125 [Rusça].

[20] MAHMUDOV, E. N. and PSHENICHNYI, B. N., 1993, An Optimality Principle for Discrete and Differential Inclusions with Distributed Parameters of Parabolic Type, and Duality, *Izv. Russ. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 57 (2), 91–112 [Rusça].

[21] MAHMUDOV, E. N., 2005, The optimality principle for discrete and first order partial differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.*, 308 (2), 605–619.

[22] MAHMUDOV, E. N., 2006, Necessary and Sufficient Conditions for Discrete and Differential Inclusions of Elliptic Type, *J. Math. Anal. Appl.*, 323 (2), 768–789.

[23] MAHMUDOV, E. N., 2006, Optimization of Discrete and Differential Inclusions of Goursat-Darboux Type with State Constraints, *Advances in Difference Equations*, 2006, Article ID 41962, 16 pages, doi:10.1155/ADE/2006/41962.

[24] MAHMUDOV, E. N., 2007, Locally Adjoint Mappings and Optimization of the First Boundary Value Problem for Hyperbolic Type Discrete and Differential Inclusions, *Nonlinear Analysis*, 67 (10), 2966–2981.

[25] MAHMUDOV, E. N., 2008, Sufficient conditions for optimality for differential inclusions of parabolic type and duality, *Journal of Global Optimization*, 41 (1), 31–42.

[26] MAKHMUDOV, E. N. and PSHENICHNYI, B. N., 1979, Polyhedral Mappings, *Izv.Akad.Nauk. AzSSR, Ser.Fiz.-Tekhn.Mat.Nauk*, 2, 10–15 [Rusça].

[27] MAHMUDOV, E. N., 1979, The Optimality Principle for Polyhedral Differential Inclusions and Linear Problems of Optimal Control on Linear Manifolds, *Akad. Nauk AzSSR Dokl.*, 35 (1), 3–8 [Rusça].

[28] MAKHMUDOV, E. N., 1988, A Polyhedral Optimization Problem for Polyhedral Discrete and Differential Inclusions, and Duality, *Kibernetika*, 3, 45–52, [Rusça].

[29] AZIMOV, A. Y., 2008, Duality for Set-valued Multiobjective Optimization Problems. I. Mathematical Programming, *J. Optim. Theory Appl.*, 137 (1), 61–74.

[30] AZIMOV, A. Y., 2008, Duality for Set-valued Multiobjective Optimization Problems. II. Optimal Control, *J. Optim. Theory Appl.*, 137 (1), 75–88.

[31] FRANKOWSKA, H., 1987, The Maximum Principle for an Optimal Solution to a Differential Inclusion with and Points Constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 25 (1), 145–157.

[32] AUBIN, J.-P. and FRANKOWSKA, H., 1990, *Set-valued Analysis*, Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser, Boston, USA, 3-7643-3478-9.

[33] SMIRNOV, G. V., 1991, Discrete Approximations and Optimal Solutions to Differential Inclusions, *Cybernetics*, 27, 101–107.

[34] CELLINA, A. and ORNELAS, A., 2003, Existence of Solutions to Differential Inclusions and to Time Optimal Control Problems in the Autonomous Case, *SIAM J. Control Optimization*, 42 (1), 260–265.

[35] AUBIN, J. P. and CELLINA, A., 1984, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 0-387-13105-1.

[36] ROCKAFELLAR, R. T., 1970, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 0-691-08069-0.

[37] WEBSTER, R., 1994, *Convexity*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, USA, 0-19-853147-8.

[38] BORWEIN, J. M. and LEWIS, A. S., 2005, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, USA, 0-387-29570-4.

[39] BERKOVITZ, L. D., 2002, *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$, John Willey & Sons, New York, USA, 0-471-35281-0.

[40] BERTSEKAS, D. P., NEDIC, A., and ÖZDAĞLAR, A. E., 2003, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Massachusetts, USA, 1-886-52945-0.

[41] BOYD, S. and VANDENBERGHE, L., 2004, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, USA, 0-521-83378-7.

[42] GIORGI, G., GUERRAGGIO, A., and THIERFELDER, J., 2004, *Mathematics of Optimization: Smooth and Nonsmooth Case*, Elsevier Science, The Netherlands, 0-444-50550-4.

[43] MAHMUDOV, E. N. and DEĞER, Ö., 2005, On an Optimization Problem Described by Multivalued Mappings and Duality, *Appl. Comput. Math.*, 4 (2), 192–199.

[44] DAHL, G., 1997, *An Introduction to Convexity, Polyhedral Theory and Combinatorial Optimization [online]*, Kompendium 67 in 330, University of Oslo Department of Informatics, Oslo, http://heim.ifi.uio.no/ geird/kombopt.pdf [Ziyaret Tarihi: 7 Mayıs 2009].

[45] ALEXANDROV, A. D., 2005, *Convex Polyhedra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, USA, 3-540-23158-7.

[46] SMIRNOV, G. V., 2002, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Vol.41, Rhode Island, USA, 0-8218-2977-7.

[47] MAHMUDOV, E. N. and DEĞER, Ö., 2005, Necessary and Sufficient Conditions for Optimality in Discrete Inclusions Described by Convex Multivalued Mappings and Duality, *İstanb. Üniv. Fen Fak. Mat. Fiz. Astron. Derg. (N.S.)*, 1, 105–114.

[48] BOLTYANSKII, V. G., 1975, The Method of Tents in the Theory of Extremal Problems, *Russian Math. Surveys*, 30 (3), 1–54.

[49] FILIPPOV, A. F., 1967, Classical Solutions of Differential Equations with Multivalued Right-Hand Sides, *SIAM J. Control*, 5, 609–621.

# ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında serhat şehrimiz Kars'ın Susuz ilçesinin İncesu köyünde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi babamın memuriyeti nedeniyle taşındığımız İstanbul'da, sırasıyla Kadıköy Arifpaşa İlkokulu, Halkalı Ortaokulu ve Sefaköy Lisesi'nde tamamladım. 1998 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldum. Aynı sene İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladım ve İ.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandım. 2000 yılının Haziran ayında, aynı bölümden mezun olduğum matematik öğretmeni Müge Değer ile evlendim. Ocak 2002'de "Diskret ve Diferansiyel Dahil Etmelerde Optimallik İçin Gerek ve Yeter Koşullar" adlı yüksek lisans tezimi Prof.Dr. Elimhan Mahmudov danışmanlığında tamamladım. Siirt'te kısa dönem yaptığım askerlik görevimi Mart 2003'te tamamladım. 2004 yılında kızım Özge Değer dünyaya geldi. Aynı sene İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimime başladım.

2007 yılından beri İ.Ü. Fen Fakültesi ve 2001 yılından beri de Matematik Bölümü web sayfalarını hazırlıyor ve yönetiyorum. Bilgisayar, internet ve teknolojiye yakın ilgi duymaktayım. İleri seviyede LaTeX, orta seviyede Html ve başlangıç seviyesinde Php yazılım dillerini bilmekteyim. Fırsat buldukça resim, spor, kitap ciltleme sanatı ile meşgul olmaktayım, ayrıca İ.Ü. Matematik Bölümü görsel arşivi, elektronik kitap arşivi, yakın tarih sinema film arşivine sahibim ve ingilizce bilmekteyim.