İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

p -ADİK ALANDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BOŞLUK SERİLERİNİN TRANSANDANTLIĞI HAKKINDA BİR İNCELEME

Fatma ÇALIŞKAN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN

Temmuz, 2009

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

p -ADİK ALANDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BOŞLUK SERİLERİNİN TRANSANDANTLIĞI HAKKINDA BİR İNCELEME

Fatma ÇALIŞKAN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN

Temmuz, 2009

İSTANBUL

Bu çalışma 07 / 07 / 2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan GÜZEL
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL
Mimar Sinan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Biriminin 2132 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Her türlü destek ve yardımlarından dolayı, çalışmanın bilimsel danışmanlığını üstlenen çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN'e içtenlikle şükranlarımı sunarım.

Tez izleme komitesindeki hocalarım sayın Prof. Dr. Erhan GÜZEL ve sayın Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL'e desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

TÜBİTAK Bilim İnsanını Destekleme Daire Başkanlığı tarafından verilen Yurt İçi Doktora Bursu sebebiyle TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Gerek akademik hayatımda ve gerekse doktora çalışmalarım aşamasında her türlü teşvik ve desteklerinden dolayı değerli aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında göstermiş olduğu sabırlı destek ve hoşgörüsü için sevgili eşime teşekkür ederim.

Temmuz, 2009 **Fatma ÇALIŞKAN**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

p-ADİK ALANDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BOŞLUK SERİLERİNİN TRANSANDANTLIĞI HAKKINDA BİR İNCELEME

Bu tez çalışmasında, p-adik alanda bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin hangi koşullar altında bazı cebirsel argümanlar için aldığı değerlerin transandantlığı ve transandant olduğu tespit edilen bu değerlerin p-adik sayıların U sınıfının hangi U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait olduğu belirlenmektedir. Bu amaç için, p-adik alanda Koksma sınıflandırmasından yararlanılarak iki teorem ispat edilmiştir.

SUMMARY

ON TRANSCENDENCE OF SOME GENERALIZED LACUNARY POWER SERIES IN p-ADIC DOMAIN

In this dissertation, transcendence of the values of some generalized lacunary power series at some algebraic arguments in p-adic domain were examined, and the values were also analyzed of which U_m^* $(m \geq 1)$ subclass of U^* class in Koksma's classification of p-adic domain should be in.

1. GİRİŞ

$\{r_n\}$ ve $\{s_n\}$ negatif olmayan tam sayıların

$$0 \le s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < s_3 \le \ldots$$

koşulunu sağlayan iki sonsuz dizisi olsun.

$$\begin{array}{lll} c_h = 0, & r_n < h < s_n & n = 1, 2, \ldots \\ c_h \neq 0, & h = r_n & n = 1, 2, \ldots \\ c_h \neq 0, & h = s_n & n = 0, 1, \ldots \end{array}$$

olacak şekilde

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$$

kuvvet serisini göz önüne alalım. Bu kuvvet serisi

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

olmak üzere

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu şekilde ifade edilen kuvvet serisine genelleştirilmiş boşluk serisi adı verilmektedir. Eğer $s_{k-1} = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ise $P_k(z) = c_{r_k} z^{r_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ şeklinde tek terimden ibaret olur ve

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{r_n} z^{r_n} \qquad (c_{r_n} \neq 0)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde ifade edilen kuvvet serisini genelleştirilmiş boşluk serisinden ayırt etmek için basit boşluk serisi adı verilmektedir.

Bu tez çalışmasında cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serileri ele alınmaktadır.

1946'da Cohn [1], rasyonel katsayılı basit boşluk serilerinin, belirli koşullar altında bazı cebirsel argümanlar için aldığı değerlerin transandant olduğunu göstermiştir. 1977'de Şenkon [2], Cohn [1]'un bu çalışmasını p-adik alana aktarmıştır. 1965'de Mahler [3], rasyonel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin bazı cebirsel argümanlar için aldığı değerlerin transandant olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra 1977'de Braune [4], cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerini ele alarak daha ileri sonuçlar vermiştir.

1980'de Zeren [5], rasyonel katsayılı basit boşluk serilerinin bazı cebirsel argümanlar için belirli koşullar altında Mahler'in U sınıfının U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait değerler aldığını göstermiş ve aynı çalışmasında cebirsel katsayılı basit boşluk serilerinin bazı rasyonel argümanlar için belirli koşullar altında Mahler'in U sınıfının U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait değerler aldığını ispat etmiştir. Yine aynı çalışmasında (Zeren [5]) elde etmiş olduğu bu sonuçları p-adik alana aktarmıştır.

1988'de Zeren [6], bu defa cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerinin bazı cebirsel argümanlar için belirli koşullar altında Mahler'in U sınıfının U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait değerler aldığını elde etmiştir.

Bu tez çalışmasında ise, p-adik alanda, rasyonel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerinin bazı cebirsel argümanlar için belirli koşullar altında p-adik sayıların U sınıfının U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait değerler aldığı ve daha sonra da cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerinin bazı rasyonel argümanlar için belirli koşullar altında p-adik sayıların U sınıfının U_m $(m \geq 1)$ alt sınıfına ait değerler aldığı gösterilmektedir. Bunun için Zeren [6]'in kompleks alanda genelleştirilmiş boşluk serileri ile ilgili olan çalışmasından büyük ölçüde yararlanılmaktadır.

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde tez konusu ile ilgili genel bir tanıtım yapılmıştır. İkinci bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar ve yardımcı teoremler ifade edilmektedir. Üçüncü bölümde p-adik alanda Koksma sınıflandırması kullanılarak önce rasyonel katsayılı cebirsel argümanlı, sonra cebirsel katsayılı rasyonel argümanlı genelleştirilmiş boşluk serilerine ait iki teorem ispat edilmekte ve bu teoremler ile ilgili örnekler verilmektedir. Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde ispat edilen teoremler ile ilgili bazı sonuçlar ve bazı öneriler verilmektedir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. KOMPLEKS SAYILARIN MAHLER VE KOKSMA SINIFLANDIRMASI

Kompleks sayılar kümesi cebirsel sayılar kümesi ile transandant sayılar kümesinin birleşimi olarak düşünülebilir. Transandant sayılar kümesinin aralarında yabancı üç kümeye ayrılması 1932'de Mahler [7] tarafından verilmiştir. Bu cins ilk sınıflandırma ise 1906'da Maillet tarafından yapılmıştır. Sonra Perna (1934) ve Morduchai-Boltovskoj (1934) da bazı sınıflandırmalar tanımlamışlardır. Fakat bunlar arasında en çok ilgiyi Mahler sınıflandırması toplamıştır.

2.1.1. Mahler Sınıflandırması[1)]

n bir doğal sayı olsun.

$$P(x)=a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n \neq 0$$

polinomunun yüksekliği

$$H(P)=\max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|, |a_0|\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $P(x)$ polinomunun derecesini de $\deg(P)$ ile gösterelim. ξ herhangi bir kompleks sayı olsun. Verilen bir n doğal sayısı ve $H\,(\geq 1)$ reel sayısı için

$$\left\{ |P(\xi)| : P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ H(P) \leq H,\ \deg(P) \leq n,\ P(\xi) \neq 0 \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin elemanları arasında $P(x)=1$ polinomu da bulunduğundan ve bu polinom için $|P(\xi)|=1$ olduğundan $P(\xi)$ değerlerinin hepsi

---

1) Bakınız [7] .

birden sıfıra eşit olamaz. Üstelik $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $H(P)\le H$ ve $\deg(P)\le n$ olduğundan bu küme sonlu sayıda eleman içerir. Elemanları reel sayılar olan bu kümenin bir minimumu vardır. Bu minimumu aşağıdaki şekilde göstereceğiz:

$$w_n(H,\xi):=\min_{\substack{P(x)\in\mathbb{Z}[x]\\ H(P)\le H\\ \deg(P)\le n\\ P(\xi)\neq 0}}\left\{\left|P(\xi)\right|\right\}.$$

Bu şekilde tanımlanan $w_n(H,\xi)$ fonksiyonu için $n\ge 1$ ve $H\ge 1$ olduğundan

$$0<w_n(H,\xi)\le 1$$

eşitsizliği doğrudur. Bu fonksiyon n sabit tutulup H değiştirildiğinde H nın monoton azalan bir fonksiyonu; H sabit tutulup n değiştirildiğinde n nin monoton azalan bir fonksiyonudur.

$w_n(H,\xi)=H^{-x}$ $(H>1)$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin bir çözümü vardır. Çünkü

$$-\log w_n(H,\xi)=x\log H$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{\log\dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H}$$

dır. Bu x i $\rho_n(H)$ ile gösterelim. $\rho_n(H)\ge 0$ dır.

$$w_n(\xi)=\overline{\lim_{H\to+\infty}}\,\rho_n(H)=\overline{\lim_{H\to+\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H}$$

diyelim. $n\ge 1$ ve $H\ge 1$ için

$$0\le w_n(\xi)\le+\infty$$

dur. Üstelik $w_n(\xi)$ fonksiyonu n in monoton artan bir fonksiyonudur.

$w_n(\xi)$ fonksiyonunu kullanarak,

$$w(\xi) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n}$$

diyelim. $n \geq 1$ için $w(\xi) \geq 0$ dır. $w(\xi)$ $(=w)$ sonlu yada sonsuz olabilir, yani

$$0 \leq w(\xi) \leq +\infty$$

dur.

1. $w_n(\xi) = +\infty$ olacak şekilde n indisleri varsa, bu indislerin minimumuna $\mu(\xi)$ $(=\mu)$ diyelim. $n < \mu$ için $w_n(\xi) < +\infty$ (sonludur), $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) = +\infty$ dur. Bu durumda ξ nin indeksi μ dür, denir.
2. Her n için $w_n(\xi) < +\infty$ ise $\mu = +\infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur, denir.

Herhangi bir ξ kompleks sayısı için $\mu(\xi)$ ve $w(\xi)$ aynı anda sonlu olamaz: İkisinin de sonlu olduğunu varsayalım. $n < \mu$ için $w_n(\xi) < +\infty$, $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) = +\infty$ dur. Öte yandan $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) \geq w_\mu(\xi)$ dır. Böylece $\frac{w_n(\xi)}{n} \geq \frac{w_\mu(\xi)}{n}$ dır. $\frac{w_\mu(\xi)}{n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ dır. O halde $w(\xi) = +\infty$ dur.

Her ξ kompleks sayısına bir (μ, w) çifti karşılık getireceğiz. Bu durumda μ ve w için aşağıdaki dört hal mümkündür:

$$\begin{aligned} w(\xi) = 0, \quad & \mu(\xi) = +\infty \text{ ise } \xi,\ A\text{ - Sayısı,} \\ 0 < w(\xi) < +\infty, \quad & \mu(\xi) = +\infty \text{ ise } \xi,\ S\text{ - Sayısı,} \\ w(\xi) = +\infty, \quad & \mu(\xi) = +\infty \text{ ise } \xi,\ T\text{ - Sayısı,} \\ w(\xi) = +\infty, \quad & \mu(\xi) < +\infty \text{ ise } \xi,\ U\text{ - Sayısı.} \end{aligned}$$

Bu şekilde bütün kompleks sayılar birbirine yabancı dört sınıfa ayrılabilir. Bu sınıflara da A-sınıfı, S-sınıfı, T-sınıfı ve U-sınıfı denir.

Bu sınıflandırmada:

1. A-sınıfı, cebirsel sayılardan oluşmaktadır, yani her cebirsel sayı bir A-sayısıdır ve karşıt olarak her A-sayısı cebirsel sayıdır[2)].

2. Cebirsel bağlı iki kompleks sayı aynı sınıfa aittir[3)].

Transandant sayıların Mahler sınıflandırmasındaki U-sınıfının boş olmadığının ispatı, U_m $(m=1,2,\ldots)$ alt sınıfına ait elemanlar verilmek suretiyle, 1953 yılında Leveque [9] tarafından verilmiştir.

Leveque [9] ve Zeren [5] tarafından verilen çalışmalar göz önüne alındığı takdirde;

$$\xi \in U_m \Leftrightarrow \mu(\xi)=m$$

dir. $\mu(\xi)=m$ in gerçekleşmesi için ise aşağıdaki iki koşul gerçeklenmelidir:

i) Her $\omega>0$ için

$$0<\left|P(\xi)\right|\leq c\,H(P)^{-\omega}$$

koşulunu sağlayan m inci dereceden tam katsayılı sonsuz sayıda $P(x)$ polinomu varsa

$$\mu(\xi)\leq m \quad (\text{ yani } \xi \in U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m)$$

dır, burada c, $H(P)$ den bağımsız pozitif sabittir.

ii) Derecesi m den küçük olan tam katsayılı tüm $P(x)$ polinomları için

$$\left|P(\xi)\right|>c'\,H(P)^{-s}$$

koşulu sağlanacak şekilde, yalnız ξ ve m e bağlı s ve $c'>0$ sabitleri varsa

$$\mu(\xi)\geq m \quad (\text{ yani } \xi \notin U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{m-1})$$

dir.

[2)] Bakınız [8] .
[3)] Bakınız [8] .

2.1.2 Koksma Sınıflandırması[4)]

α, yüksekliği $H(\alpha)$ ve derecesi $\deg(\alpha)$ ile gösterilen bir cebirsel sayı olsun. $P(x)$ ile α nın minimal polinomunu gösterirsek $H(\alpha)$ yüksekliği, $P(x)$ polinomunun $H(P)$ yüksekliğine karşılık gelir. ξ ile de herhangi bir kompleks sayıyı gösterelim. Verilen bir n doğal sayısı ve $H\,(\geq 1)$ reel sayısı için

$$w_n^*(H,\xi) := \min_{\substack{\alpha \text{ cebirsel sayı} \\ H(\alpha)\leq H \\ \deg(\alpha)\leq n \\ \alpha\neq\xi}} \left\{ \left|\xi-\alpha\right| \right\},$$

$$w_n^*(\xi) = \overline{\lim_{H\to+\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{H\,w_n^*(H,\xi)}}{\log H},$$

$$w^*(\xi) = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{w_n^*(\xi)}{n}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. ξ sayıları için $w_n^*(H,\xi) > 0$ olduğu açıktır.

1. $w_n^*(\xi) = +\infty$ olacak şekilde n indisleri varsa, bu indislerin minimumuna $\mu^*(\xi)\ (=\mu^*)$ diyelim. $n<\mu^*$ için $w_n^*(\xi) < +\infty$ (sonludur), $n \geq \mu^*$ için $w_n^*(\xi) = +\infty$ dır. Bu durumda ξ nin indeksi μ^* dır, denir.
2. Her n için $w_n^*(\xi) < +\infty$ ise $\mu^* = +\infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur, denir.

Bu sınıflandırmada da $\mu^*(\xi)$ ve $w^*(\xi)$ aynı anda sonlu olamaz.

Mahler sınıflandırmasında olduğu gibi bu sınıflandırmada da, her ξ kompleks sayısına bir (μ^*, w^*) çifti karşılık getireceğiz. Bu durumda μ^* ve w^* için aşağıdaki dört hal mümkündür:

---

4) Bakınız [10] .

$$w^*(\xi)=0\,, \quad \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ A^*\text{- Sayısı},$$
$$0<w^*(\xi)<+\infty,\ \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ S^*\text{- Sayısı},$$
$$w^*(\xi)=+\infty,\ \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ T^*\text{- Sayısı},$$
$$w^*(\xi)=+\infty,\ \mu^*(\xi)<+\infty \text{ ise } \xi,\ U^*\text{- Sayısı}.$$

O halde bütün kompleks sayılar birbirine yabancı dört sınıfa ayrılabilir; bu sınıflara da A^*-sınıfı, S^*-sınıfı, T^*-sınıfı ve U^*-sınıfı denir.

Wirsing [11] çalışmasında, Mahler'in A, S, T, U sınıfları ile Koksma'nın A^*, S^*, T^*, U^* sınıflarının denk olduğunu göstermiştir. Üstelik m bir doğal sayı olmak üzere $U_m = U_m^*$ dır [11].

2.2. p-ADİK SAYILARIN MAHLER VE KOKSMA SINIFLANDIRMASI

$\mathbb{Z}$ tam rasyonel sayılar halkasını, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismini, p sabit bir asal sayıyı, $|\ |_p$, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde tanımlı olan p-adik değerlendirmeyi ve $\mathbb{Q}_p$, p-adik sayılar cismini göstermektedir.

2.2.1. Mahler Sınıflandırması[5)]

n bir doğal sayı olsun.

$$P(x)=a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x],\ \ a_n \neq 0$$

polinomunun yüksekliği

$$H(P)=\max\left(\left|a_n\right|, \ldots, \left|a_1\right|, \left|a_0\right|\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $P(x)$ polinomunun derecesini de $\deg(P)$ ile gösterelim. ξ herhangi bir p-adik sayı olsun. Verilen bir n doğal sayısı ve $H(\geq 1)$ reel sayısı için

---

5) Bakınız [12] .

$$\left\{ \left| P(\xi) \right|_p : P(x) \in \mathbb{Z}[x],\ H(P) \leq H,\ \deg(P) \leq n,\ P(\xi) \neq 0 \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu kümenin elemanları arasında $P(x)=1$ polinomu da bulunduğundan ve bu polinom için $\left| P(\xi) \right|_p = 1$ olduğundan $P(\xi)$ değerlerinin hepsi birden sıfıra eşit olamaz. Üstelik $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $H(P) \leq H$ ve $\deg(P) \leq n$ olduğundan bu küme sonlu sayıda eleman içerir. Elemanları reel sayılar olan bu kümenin bir minimumu vardır. Bu minimumu aşağıdaki şekilde göstereceğiz:

$$w_n(H, \xi) := \min_{\substack{P(x) \in \mathbb{Z}[x] \\ H(P) \leq H \\ \deg(P) \leq n \\ P(\xi) \neq 0}} \left\{ \left| P(\xi) \right|_p \right\}.$$

Bu şekilde tanımlanan $w_n(H, \xi)$ fonksiyonu için $n \geq 1$ ve $H \geq 1$ olduğundan

$$0 < w_n(H, \xi) \leq 1$$

eşitsizliği doğrudur. Bu fonksiyon n sabit tutulup, H değiştirildiğinde H nın monoton azalan bir fonksiyonu; H sabit tutulup, n değiştirildiğinde n nin monoton azalan bir fonksiyonudur.

$w_n(H, \xi) = H^{-x}$ $(H > 1)$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin bir çözümü vardır. Çünkü,

$$-\log w_n(H, \xi) = x \log H$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H}$$

dır. Bu x i $\rho_n(H)$ ile gösterelim. $\rho_n(H) \geq 0$ dır.

$$w_n(\xi) = \overline{\lim_{H \to +\infty}}\, \rho_n(H) = \overline{\lim_{H \to +\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H}$$

diyelim. $n \geq 1$ ve $H \geq 1$ için

$$0 \leq w_n(\xi) \leq +\infty$$

dur. Üstelik $w_n(\xi)$ fonksiyonu n in monoton artan bir fonksiyonudur.

$w_n(\xi)$ fonksiyonunu kullanarak,

$$w(\xi) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n}$$

diyelim. $n \geq 1$ için $w(\xi) \geq 0$ dır. $w(\xi)$ sonlu yada sonsuz olabilir, yani

$$0 \leq w(\xi) \leq +\infty$$

olur.

1. $w_n(\xi) = +\infty$ olacak şekilde n indisleri varsa, bu indislerin minimumuna $\mu(\xi)$ $(=\mu)$ diyelim. $n < \mu$ için $w_n(\xi) < +\infty$ (sonludur), $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) = +\infty$ dır. Bu durumda ξ nin indeksi μ dür, denir.
2. Her n için $w_n(\xi) < +\infty$ ise $\mu = +\infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur, denir.

Herhangi bir ξ p-adik sayısı için $\mu(\xi)$ ve $w(\xi)$ aynı anda sonlu olamaz: İkisinin de sonlu olduğunu varsayalım. $n < \mu$ için $w_n(\xi) < +\infty$, $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) = +\infty$ dur. Öte yandan $n \geq \mu$ için $w_n(\xi) \geq w_\mu(\xi)$ dir. Böylece $\frac{w_n(\xi)}{n} \geq \frac{w_\mu(\xi)}{n}$ dır. $\frac{w_\mu(\xi)}{n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ dır. O halde $w(\xi) = +\infty$ dur.

Her ξ p-adik sayısına bir (μ, w) çifti karşılık getireceğiz. Bu durumda μ ve w için aşağıdaki dört hal mümkündür:

$$w(\xi)=0\ ,\quad \mu(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ A\text{ - Sayısı,}$$
$$0<w(\xi)<+\infty,\ \mu(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ S\text{ - Sayısı,}$$
$$w(\xi)=+\infty,\ \mu(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ T\text{ - Sayısı,}$$
$$w(\xi)=+\infty,\ \mu(\xi)<+\infty \text{ ise } \xi,\ U\text{ - Sayısı.}$$

Bu şekilde bütün p-adik sayılar birbirine yabancı dört sınıfa ayrılabilir. Bu sınıflara da A-sınıfı, S-sınıfı, T-sınıfı ve U-sınıfı denir.

Bu sınıflandırmada:

1. A-sınıf, p-adik cebirsel sayılardan oluşmaktadır, yani her p-adik cebirsel sayı bir p-adik A-sayısıdır ve karşıt olarak her p-adik A-sayısı p-adik cebirsel sayıdır[6)].
2. Cebirsel bağlı iki p-adik sayı aynı sınıfa aittir[7)].

Zeren [5] tarafından verilen çalışma göz önüne alınırsa;

$$\xi\in U_m \ \Leftrightarrow\ \mu(\xi)=m$$

dir. $\mu(\xi)=m$ in gerçekleşmesi için ise aşağıdaki iki koşul gerçeklenmelidir:

i) Her $\omega>0$ için

$$0<\left|P(\xi)\right|_p \leq c\,H(P)^{-\omega}$$

koşulunu sağlayan m inci dereceden tam katsayılı sonsuz sayıda $P(x)$ polinomu varsa

$$\mu(\xi)\leq m \qquad (\text{ yani } \xi\in U_1\cup U_2\cup\ldots\cup U_m)$$

dir, burada c, $H(P)$ den bağımsız pozitif sabittir.

ii) Derecesi m den küçük olan tam katsayılı tüm $P(x)$ polinomları için

$$\left|P(\xi)\right|_p > c'\,H(P)^{-s}$$

[6)] Bakınız [12] .
[7)] Bakınız [12] .

koşulu sağlanacak şekilde, yalnız ξ ve m e bağlı s ve $c>0$ sabitleri varsa

$$\mu(\xi)\geq m \qquad (\text{ yani } \xi\notin U_1\cup U_2\cup\ldots\cup U_{m-1})$$

dir.

2.2.2. Koksma Sınıflandırması[8)]

α, yüksekliği $H(\alpha)$ ve derecesi $\deg(\alpha)$ ile gösterilen bir cebirsel sayı olsun. $P(x)$ ile α nın minimal polinomunu gösterirsek $H(\alpha)$ yüksekliği, $P(x)$ polinomunun $H(P)$ yüksekliğine karşılık gelir. ξ ile de herhangi bir p-adik sayıyı gösterelim.

Verilen bir n doğal sayısı ve $H(\geq 1)$ reel sayısı için

$$w_n^*(H,\xi):=\min_{\substack{\alpha \,\text{cebirsel sayı} \\ H(\alpha)\leq H \\ \deg(\alpha)\leq n \\ \alpha\neq\xi}}\left\{\left|\xi-\alpha\right|_p\right\},$$

$$w_n^*(\xi)=\overline{\lim_{H\to+\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{w_n^*(H,\xi)}}{\log H},$$

$$w^*(\xi)=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{w_n^*(\xi)}{n}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. ξ p-adik sayıları için $w_n^*(H,\xi)>0$ olduğu açıktır.

1. $w_n^*(\xi)=+\infty$ olacak şekilde n indisleri varsa, bu indislerin minimumuna $\mu^*(\xi)$ $(=\mu^*)$ diyelim. $n<\mu^*$ için $w_n^*(\xi)<+\infty$ (sonludur), $n\geq\mu^*$ için $w_n^*(\xi)=+\infty$ dır. Bu durumda ξ nin indeksi μ^* dır, denir.
2. Her n için $w_n^*(\xi)<+\infty$ ise $\mu^*=+\infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur, denir.

[8)] Bakınız [13] .

Bu sınıflandırmada da $\mu^*(\xi)$ ve $w^*(\xi)$ aynı anda sonlu olamaz.

Mahler sınıflandırmasında olduğu gibi bu sınıflandırmada da, her ξ p-adik sayısına bir (μ^*, w^*) çifti karşılık getireceğiz. Bu durumda μ^* ve w^* için aşağıdaki dört hal mümkündür:

$$w^*(\xi)=0\,, \quad \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ A^*\text{- Sayısı,}$$
$$0<w^*(\xi)<+\infty,\ \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ S^*\text{- Sayısı,}$$
$$w^*(\xi)=+\infty,\ \mu^*(\xi)=+\infty \text{ ise } \xi,\ T^*\text{- Sayısı,}$$
$$w^*(\xi)=+\infty,\ \mu^*(\xi)<+\infty \text{ ise } \xi,\ U^*\text{- Sayısı.}$$

O halde bütün p-adik sayılar birbirine yabancı dört sınıfa ayrılabilir; bu sınıflara da A^*-sınıfı, S^*-sınıfı, T^*-sınıfı ve U^*-sınıfı denir.

Schlickewei [13], p-adik T-sınıfının boş olmadığını göstermiştir. p-Adik sayılar cismi üzerinde Mahler ve Koksma sınıflandırmalarının denkliği Schlickewei [13] ve Long [14] tarafından verilen çalışmalardan elde edilmektedir.

Bu tezde ispat edilecek olan teoremlerde, daha kolay sonuca varıldığı için p-adik alanda Koksma sınıflandırması kullanılacaktır.

$$\xi\in U_m^* \Leftrightarrow \mu^*(\xi)=m$$

dir. $\mu^*(\xi)=m$ in gerçekleşmesi için ise aşağıdaki iki koşul gerçeklenmelidir:

i) Her $\omega>0$ için

$$0<\left|\xi-\eta\right|_p \leq c\,H(\eta)^{-\omega}$$

koşulunu sağlayan m inci dereceden sonsuz sayıda η cebirsel sayısı varsa

$$\mu^*(\xi)\leq m \qquad (\text{ yani } \xi\in U_1^*\cup U_2^*\cup\ldots\cup U_m^*)$$

dir, burada c, $H(\eta)$ dan bağımsız pozitif sabittir.

ii) Derecesi m den küçük olan tüm β cebirsel sayıları için

$$|\xi-\beta|_p > c' H(\beta)^{-s}$$

koşulu sağlanacak şekilde, yalnız ξ ve m e bağlı s ve $c'>0$ sabitleri varsa

$$\mu^*(\xi)\geq m \qquad (\text{ yani } \xi\notin U_1^*\cup U_2^*\cup\ldots\cup U_{m-1}^*)$$

dır.

2.3. YARDIMCI TEOREMLER

Lemma 2.3.1. $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k\geq 1)$; $\mathbb{Q}_p$ cismine ait p-adik cebirsel sayılar ve $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k):\mathbb{Q}]=g$ olsun. $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ y ye göre derecesi en az bir olan tam rasyonel katsayılı bir polinom ve η da $F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)=0$ bağıntısını sağlayan bir cebirsel sayı olsun. Bu takdirde η nın derecesi $\leq dg$ dır ve η nın $H(\eta)$ yüksekliği için

$$H(\eta)\leq 3^{2dg+(l_1+\ldots+l_k)g} H^g H(\alpha_1)^{l_1 g}\ldots H(\alpha_k)^{l_k g}$$

bağıntısı gerçeklenir; burada d, F polinomunun y ye göre derecesini, H, F nin yüksekliğini, l_i $(i=1,\ldots,k)$, F nin x_i ye göre derecesini ve $H(\alpha_i)$ $(i=1,\ldots,k)$, α_i nin yüksekliğini göstermektedir.

İspat. Bakınız [15].

Lemma 2.3.2. $P(x)$ derecesi n, yüksekliği $H(P)$ ve sıfırları α_i $(i=1,\ldots,n)$ ile gösterilen tam rasyonel katsayılı bir polinom olsun. Bu takdirde $\alpha_i\neq\alpha_j$ $(i\neq j)$ olmak üzere

$$|\alpha_i-\alpha_j|_p > \frac{c}{H(P)^{n-1}}$$

dir, burada c, n e bağlı fakat $H(P)$ den bağımsız bir pozitif sabittir.

İspat. Bakınız [16].

Lemma 2.3.3. α ve β dereceleri, sırasıyla t ve k olan, eşlenik olmayan iki p-adik cebirsel sayı olsun. $M > \max(t, k)$ olmak üzere

$$|\alpha - \beta|_p > \frac{c}{H(\alpha)^{M-1} H(\beta)^M}$$

dır, burada $|\alpha|_p = p^{-h}$, $r = \min(0, h)$ olmak üzere $c = \dfrac{p^{(M-1)r - M(|h|+1)}}{(2M)!}$ dir.

İspat. Bakınız [13].

3. BULGULAR

3.1. RASYONEL KATSAYILI BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BOŞLUK SERİLERİNİN CEBİRSEL ARGÜMANLAR İÇİN ALDIĞI DEĞERLER

Teorem 3.1.1. $\{r_n\}$ ve $\{s_n\}$ negatif olmayan tam sayıların

$$0 \le s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < s_3 \le \dots$$

koşulunu sağlayan iki sonsuz dizisi olsun. $\mathbb{Q}_p$ de

$$\begin{array}{lll} c_h = 0, & r_n < h < s_n & n = 1, 2, \dots \\ c_h \ne 0, & h = r_n & n = 1, 2, \dots \\ c_h \ne 0, & h = s_n & n = 0, 1, \dots \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{gathered} F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \\ P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h, \quad c_h \in \mathbb{Q} \ (c_h = \frac{b_h}{a_h};\ a_h, b_h \in \mathbb{Z},\ a_h \ge 1, h = 0, 1, \dots) \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş boşluk serisini göz önüne alalım.

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|_p} < +\infty \tag{3.1.2}$$

olsun. Ayrıca $A_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$[9)] olmak üzere

9) $[a_0, a_1, \dots, a_n]$; $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayılarının en küçük ortak katını göstermektedir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}=+\infty \tag{3.1.3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{r_n}{s_{n-1}}:=\tau<+\infty \tag{3.1.4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log A_n}{n}:=\sigma<+\infty \tag{3.1.5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|b_n|}{n}:=\omega<+\infty \tag{3.1.6}$$

ve α derecesi m olan $\left|\overline{\alpha}\right|_p=\max\left|\alpha^{(i)}\right|_p$ [10] olmak üzere $0<\left|\overline{\alpha}\right|_p<R$ ($R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|_p}}$) koşulunu sağlayan bir cebirsel sayı olsun. O halde p-adik alanda $F(\alpha)\in U_t$ dir, burada t, sonsuz sayıda $F_n(\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\alpha)$ kısmi toplamlarının derecelerinin maksimumudur ve $t\leq[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=m$ dir. Ayrıca sonsuz sayıda n için $P_n(\alpha)\neq 0$ dır.

İspat. 1°) (3.1.1) in yakınsaklık yarıçapı (3.1.2) koşulundan dolayı $\geq R$ dır. Çünkü $\sum_{h=0}^{\infty}|c_h|_p z^h$ serisi $\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h$ serisinin bir majorantıdır.

2°) Şimdi, $F(\alpha)=\beta$ yı ele alalım.

$$\beta_n=\sum_{k=0}^{n-1}P_k(\alpha)=\sum_{v=s_0}^{r_n}c_v\alpha^v \tag{3.1.7}$$

$$\rho_n=\sum_{k=n}^{\infty}P_k(\alpha)=\sum_{v=s_n}^{\infty}c_v\alpha^v \tag{3.1.8}$$

olmak üzere

$$\beta=\beta_n+\rho_n \tag{3.1.9}$$

şeklinde yazılabilir.

---

[10] $\alpha^{(i)}$ ($i=1,\ldots,m$), α nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerini göstermektedir.

Şimdi β_n in $H(\beta_n)$ yüksekliğini üstten sınırlayacağız. (3.1.7) nin her iki yanı A_{r_n} ile çarpılırsa

$$A_{r_n}\beta_n - \sum_{\nu=s_0}^{r_n} A_{r_n} c_\nu \alpha^\nu = 0 \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Burada $A_{r_n} = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{r_n}\right]$, $c_\nu = \dfrac{b_\nu}{a_\nu}$ $(\nu = s_0, \ldots, r_n)$, $c_\nu \in \mathbb{Q}$ olduğu için $A_{r_n} c_\nu$ $(\nu = s_0, \ldots, r_n)$ tam rasyonel sayıdır.

$$P(y,x) = A_{r_n} y - \sum_{\nu=s_0}^{r_n} A_{r_n} c_\nu x^\nu \tag{3.1.11}$$

polinomu göz önüne alınsın. Bu polinomda $y=\beta_n$, $x=\alpha$ konulduğunda (3.1.10) eşitliğinin sol tarafı elde edilir.

(3.1.4) ve (3.1.5) den, $\tau_1 > \tau$ ve $\sigma_1 > \sigma$ olmak üzere $n > N_0$ $(N_0 = N_0(\tau_1, \sigma_1))$ için

$$\frac{r_n}{s_{n-1}} < \tau_1, \qquad (3.1.4') \qquad \text{ve} \qquad \frac{\log A_{r_n}}{r_n} < \sigma_1, \qquad (3.1.5')$$

dır. (3.1.6) dan $\omega_1 > \omega$ olmak üzere yeterli derecede büyük n ler için $\dfrac{\log|b_n|}{n} < \omega_1$ dır, buradan yeterli derecede büyük n ler için $|b_n| < B^n$ yazılabilir, burada $\omega_1 > \omega \geq 0$ olduğundan $B > 1$ dir. Üstelik

$$|b_n| \leq K B^n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3.1.6'}$$

olacak şekilde $K > 1$ sayısı vardır.

O halde P polinomunun $H(P) = H$ yüksekliği için (3.1.11) ve $(3.1.6')$ den

$$H=\max_{0\le v\le r_n}(\left|A_{r_n}\right|,\left|A_{r_n}c_v\right|)=\max_{0\le v\le r_n}(A_{r_n},A_{r_n}\frac{\left|b_v\right|}{a_v})$$
$$\le A_{r_n}\max_{0\le v\le r_n}(1,\left|b_v\right|)\le A_{r_n}\max_{0\le v\le r_n}(1,K\,B^{v})$$
$$\le A_{r_n}\,B^{r_n}\max(1,K)=A_{r_n}\,B^{r_n}K \qquad (3.1.12)$$

elde edilir.

(3.1.11) e Lemma 2.3.1 i uygulayalım. Burada $l=r_n$, $g=m$, $d=1$ olur ve (3.1.12) ile $(3.1.5')$ kullanılarak

$$H(\beta_n)\le 3^{2m+r_n m}H^m H(\alpha)^{r_n m}$$
$$\le 3^{2m+r_n m}(A_{r_n}B^{r_n}K)^m H(\alpha)^{r_n m}$$
$$\le 3^{2m+r_n m}(e^{\sigma_1 r_n}B^{r_n}K)^m H(\alpha)^{r_n m}$$
$$=\left[(3e^{\sigma_1}B\,H(\alpha))^{r_n}3^2K\right]^m \qquad (3.1.13)$$

elde edilir. Buradan da $c_0=\left[3^3e^{\sigma_1}B\,H(\alpha)\,K\right]^m$ olmak üzere

$$H(\beta_n)\le c_0^{r_n} \quad (n>N_0) \qquad (3.1.14)$$

olur, $\sigma_1>\sigma\ge 0$, $B>1$ ve $K>1$ olduğundan $c_0>1$ dır.

3°) Şimdi $\left|\beta-\beta_n\right|_p=\left|\rho_n\right|_p$ yi üsten sınırlayacağız.

$R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right|_p}}$ yi göz önüne alalım ve $0<R<+\infty$ olsun. Yeterli derecede büyük n ler için ε yeterli derecede küçük pozitif sayı olmak üzere

$$\sqrt[n]{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p}<\frac{1}{R-\varepsilon}$$

dır, böylece

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p < \frac{1}{(R-\varepsilon)^n}$$

olur. Hatta her n için

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p \le \frac{M_1}{(R-\varepsilon)^n} \qquad (n=0,\,1,\ldots) \tag{3.1.15}$$

olacak şekilde $M_1>0$ sayısı vardır. ε pozitif sayısı yeterli derecede küçük seçilirse $R-\varepsilon>\left|\overline{\alpha}\right|_p$ sağlanır (örneğin $\varepsilon=\dfrac{R-\left|\overline{\alpha}\right|_p}{2}$ alınabilir). Bu durumda $\dfrac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{R-\varepsilon}<1$ dir.

(3.1.8) ve (3.1.15) den

$$\begin{aligned}
|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p = \left|\sum_{v=s_n}^{\infty}\frac{b_v}{a_v}\alpha^v\right|_p &\le \max_{v\ge s_n}\left\{\left|\frac{b_v}{a_v}\alpha^v\right|_p\right\} \\
&\le \max_{v\ge s_n}\left\{\left|\frac{b_v}{a_v}\right|_p \left|\overline{\alpha}\right|_p^v\right\} \le \max_{v\ge s_n}\left\{\frac{M_1}{(R-\varepsilon)^v}\left|\overline{\alpha}\right|_p^v\right\} \\
&= M_1 \max_{v\ge s_n}\left\{\left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{R-\varepsilon}\right)^v\right\} = M_1\left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{R-\varepsilon}\right)^{s_n}
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

elde edilir.

$R=+\infty$ ise $\rho>\left|\overline{\alpha}\right|_p$ olacak şekilde keyfi herhangi bir ρ sayısı seçilebilir. Çünkü $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}\rho^n$ serisi yakınsaktır ve bir M_2 (>0) sayısı vardır, öyleki

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\rho^n\right|_p \le M_2 \quad (n=0,\,1,\ldots)$$

yani

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p \le \frac{M_2}{\rho^n} \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{3.1.17}$$

olur. Burada $\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho}<1$ dır.

(3.1.8) ve (3.1.17) den

$$\begin{aligned}
|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p &= \left|\sum_{v=s_n}^{\infty}\frac{b_v}{a_v}\alpha^v\right|_p \le \max_{v\ge s_n}\left\{\left|\frac{b_v}{a_v}\alpha^v\right|_p\right\} \\
&\le \max_{v\ge s_n}\left\{\left|\frac{b_v}{a_v}\right|_p \left|\overline{\alpha}\right|_p^v\right\} \le \max_{v\ge s_n}\left\{\frac{M_2}{\rho^v}\left|\overline{\alpha}\right|_p^v\right\} \\
&= M_2 \max_{v\ge s_n}\left\{\left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho}\right)^v\right\} = M_2\left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho}\right)^{s_n}
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

elde edilir. Bu durumda $\max(M_1, M_2)=c_1$ ve $\min(\rho, R-\varepsilon)=\rho^*$ alınırsa, (3.1.15) ile (3.1.17) den

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p \le \frac{c_1}{(\rho^*)^n} \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{3.1.19}$$

ve (3.1.16) ile (3.1.18) den

$$|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p \le c_1\left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho^*}\right)^{s_n} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.1.20}$$

olur. (3.1.20) de $\frac{\rho^*}{\left|\overline{\alpha}\right|_p}=c_2$ $(c_2>1)$ alınırsa

$$|\beta-\beta_n|_p \le \frac{c_1}{c_2^{s_n}} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{3.1.21}$$

elde edilir. (3.1.14) ve (3.1.21) den

$$|\beta-\beta_n|_p \leq \frac{c_1}{e^{\log c_2^{s_n}}} = \frac{c_1}{e^{(s_n \log c_2)(\frac{r_n \log c_0}{r_n \log c_0})}} = \frac{c_1}{e^{(r_n \log c_0)(\frac{s_n \log c_2}{r_n \log c_0})}}$$

$$= \frac{c_1}{(c_0^{r_n})^{\frac{s_n}{r_n}c_3}} \leq \frac{c_1}{(H(\beta_n))^{\frac{s_n}{r_n}c_3}} \qquad (n > N_0) \qquad (3.1.22)$$

elde edilir, burada $c_3 = \dfrac{\log c_2}{\log c_0}$ dır, $c_0 > 1$ ve $c_2 > 1$ olduğundan $\log c_0 > 0$ ve $\log c_2 > 0$ olup böylece $c_3 > 0$ dır. Bu durumda (3.1.3) den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} c_3 = +\infty \qquad (3.1.23)$$

olur.

4°) Şimdi, β_n cebirsel sayısının $\{H(\beta_n)\}$ yükseklik dizisini ve $\{d(\beta_n)\}$ derece dizisini inceleyelim. Bu diziler aşağıdaki A, B, C özelliklerini sağlar.

A) $\{H(\beta_n)\}$ dizisi üstten sınırsızdır.

İspat. $\{H(\beta_n)\}$ dizisi üstten sınırlı olmuş olsaydı, β_n cebirsel sayısının derecesi m ile üstten sınırlı olduğundan $\{\beta_n\}$ cebirsel sayı dizisi yalnız sonlu sayıda birbirinden farklı eleman içerecekti. Fakat $\{\beta_n\}$ dizisi sonsuz sayıda birbirinden farklı eleman içerir: Sonsuz sayıda sıfırdan farklı $P_k(\alpha)$ olduğundan sonsuz sayıda n için

$$|\beta_{n+1}-\beta_n|_p = \left|\sum_{k=0}^{n} P_k(\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\alpha)\right|_p = |P_n(\alpha)|_p \neq 0$$

dır. Bu durumda $\{\beta_n\}$ dizisinde en azından birbirinden farklı iki eleman vardır. Eğer $\{\beta_n\}$ yalnız sonlu sayıda birbirinden farklı eleman içermiş olsaydı, bu takdirde her durumda ya $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p = 0$ olurdu, ya da $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p \geq k$ olacak şekilde bir k pozitif sabiti bulunabilirdi (birbirinden farklı sonlu sayıdaki β_n değerleri $v_1, \ldots, v_p \ (p \geq 2)$

olsaydı, $k=\min\limits_{\substack{r,s=1,\ldots,p\\ r\neq s}}\left|v_r-v_s\right|_p$ alınabilirdi). $F(\alpha)=\sum\limits_{h=0}^{\infty}c_h\,\alpha^h=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(\alpha)$ serisi yakınsak olduğundan yeterli derecede büyük n ler için $\left|\beta_{n+1}-\beta_n\right|_p=\left|P_n(\alpha)\right|_p$ yeterli derecede küçük bırakılabilir. Bundan dolayı sonsuz sayıda n için $\left|P_n(\alpha)\right|_p\neq 0$ olduğundan yeterli derecede büyük bir $\bar{n}$ için $0<\left|P_{\bar{n}}(\alpha)\right|_p<k$ yani $0<\left|\beta_{\bar{n}+1}-\beta_{\bar{n}}\right|_p<k$ olur. Fakat bu durum $n=\bar{n}$ için $\left|\beta_{n+1}-\beta_n\right|_p$ ye ait yukarıdaki koşul ile çelişir. Bundan dolayı $\{\beta_n\}$ dizisi sonsuz sayıda birbirinden farklı eleman içerir.

B) $\{d(\beta_n)\}$ dizisi belirli bir n den itibaren bir sabit dizidir.

İspat. İki farklı durum vardır:

a) Eğer belirli bir n den itibaren daima $d(\beta_n)=1$ oluyorsa, B) özelliği kendiliğinden sağlanır.

b) Sonsuz sayıda n için $d(\beta_n)>1$ durumunda; $i\neq j$ olmak üzere sabit bir (i,j) çifti ve yeterli derecede büyük bir n için $\beta_n^{\{i\}}\neq\beta_n^{\{j\}}$ ise $\beta_{n+1}^{\{i\}}\neq\beta_{n+1}^{\{j\}}$ olduğunu gösterelim[11)]: (3.1.7) den

$$\beta_{n+1}=\beta_n+\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}\alpha^{s_n}+\ldots+\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}\alpha^{r_{n+1}} \tag{3.1.24}$$

dır, buradan

$$\beta_{n+1}^{\{i\}}=\beta_n^{\{i\}}+\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}(\alpha^{\{i\}})^{s_n}+\ldots+\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}(\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}}$$

$$\beta_{n+1}^{\{j\}}=\beta_n^{\{j\}}+\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}(\alpha^{\{j\}})^{s_n}+\ldots+\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}(\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}}$$

olur, buradan da

$$\left|\beta_{n+1}^{\{i\}}-\beta_{n+1}^{\{j\}}\right|_p=\left|(\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}})+\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}((\alpha^{\{i\}})^{s_n}-(\alpha^{\{j\}})^{s_n})+\ldots+\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}((\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}}-(\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}})\right|_p \tag{3.1.25}$$

11) $\zeta^{\{i\}}$ $(i=1,\ldots,m)$, $\zeta\in\mathbb{Q}(\alpha)$ nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerini göstermektedir.

dir. Burada

$$\left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p > \left| \frac{b_{s_n}}{a_{s_n}} ((\alpha^{\{i\}})^{s_n} - (\alpha^{\{j\}})^{s_n}) + \ldots + \frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}} ((\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}} - (\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}}) \right|_p \qquad (3.1.26)$$

ise

$$\left| \beta_{n+1}^{\{i\}} - \beta_{n+1}^{\{j\}} \right|_p = \left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p \qquad (3.1.27)$$

dır.

Şimdi (3.1.26) nın yeterli derecede büyük n ler için geçerli olduğunu gösterelim. β_n in derecesi q ile gösterilirse $2 \le q \le m$ dır. Lemma 2.3.2 den $i \ne j$ olmak üzere $\beta_n^{\{i\}} \ne \beta_n^{\{j\}}$ eşlenik sayıları için

$$\left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p > \frac{c_4}{H(\beta_n)^{q-1}}$$

dır, burada c_4, $H(\beta_n)$ e bağlı olmayan bir pozitif sabittir. $m \ge q$ ve $H(\beta_n) \ge 1$ olduğundan $H(\beta_n)^{m-1} \ge H(\beta_n)^{q-1}$ dir, böylece

$$\left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p > \frac{c_4}{H(\beta_n)^{m-1}} \qquad (3.1.28)$$

elde edilir. (3.1.14) ve (3.1.28) den,

$$\left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p > \frac{c_4}{c_0^{r_n(m-1)}} \quad (n > N_0) \qquad (3.1.29)$$

olur.

Şimdi (3.1.26) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimi göz önüne alalım. (3.1.19) dan, p-adik değerlendirmenin özelliğinden ve $\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho^*} < 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}((\alpha^{\{i\}})^{s_n}-(\alpha^{\{j\}})^{s_n})+\ldots+\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}((\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}}-(\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}}) \right|_p \\
&\quad \le \max\left\{ \left|\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}\right|_p \left|(\alpha^{\{i\}})^{s_n}-(\alpha^{\{j\}})^{s_n}\right|_p, \ldots, \left|\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}\right|_p \left|(\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}}-(\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}}\right|_p \right\} \\
&\quad \le \max\left\{ \left|\frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}\right|_p \left|\overline{\alpha}\right|_p^{s_n}, \ldots, \left|\frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}\right|_p \left|\overline{\alpha}\right|_p^{r_{n+1}} \right\} \\
&\quad \le \max\left\{ \frac{c_1}{(\rho^*)^{s_n}}\left|\overline{\alpha}\right|_p^{s_n}, \ldots, \frac{c_1}{(\rho^*)^{r_{n+1}}}\left|\overline{\alpha}\right|_p^{r_{n+1}} \right\} \\
&\quad = c_1 \max\left\{ \left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho^*}\right)^{s_n}, \ldots, \left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho^*}\right)^{r_{n+1}} \right\} \\
&\quad = c_1 \left(\frac{\left|\overline{\alpha}\right|_p}{\rho^*}\right)^{s_n} = \frac{c_1}{c_2^{s_n}} \qquad (3.1.30)
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada $c_2 = \dfrac{\rho^*}{\left|\overline{\alpha}\right|_p}\ (>1)$ dir.

Yeterli derecede büyük bir n_0 için

$$
\frac{c_1}{c_2^{s_n}} < \frac{c_4}{c_0^{r_n(m-1)}} \qquad (n > n_0) \qquad (3.1.31)
$$

dır. Çünkü (3.1.31) eşitsizliğinden

$$
\log c_1 - s_n \log c_2 < \log c_4 - r_n\,(m-1)\log c_0
$$

dır, buradan

$$
\frac{\log c_1}{r_n} + (m-1)\log c_0 < \frac{\log c_4}{r_n} + \frac{s_n}{r_n}\log c_2
$$

olur. $c_0 > 1$ ve $c_2 > 1$ olduğundan $\log c_0 > 0$ ve $\log c_2 > 0$ dır. Ayrıca (3.1.3) den $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} \log c_2 = +\infty$ dur. O halde bu son eşitsizliğin sol tarafı $(m-1)\log c_0$ değerine, sağ tarafı $+\infty$ a yakınsar. Böylece yeterli derecede büyük n ler için (3.1.31) eşitsizliği sağlanır.

(3.1.29), (3.1.30) ve (3.1.31) den yeterli derecede büyük n ler için

$$\left|\beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}}\right|_p > \frac{c_4}{c_0^{r_n(m-1)}} > \frac{c_1}{c_2^{s_n}} \geq \left| \frac{b_{s_n}}{a_{s_n}}((\alpha^{\{i\}})^{s_n} - (\alpha^{\{j\}})^{s_n}) + \ldots + \frac{b_{r_{n+1}}}{a_{r_{n+1}}}((\alpha^{\{i\}})^{r_{n+1}} - (\alpha^{\{j\}})^{r_{n+1}}) \right|_p$$

dır. O halde yeterli derecede büyük n ler için (3.1.26) eşitsizliği sağlanır. Bu durumda, yeterli derecede büyük bir n den büyük olan tüm n ler için $\beta_n^{\{i\}} \neq \beta_n^{\{j\}}$ dır. Bunu sağlayan n indisleri kesin olarak vardır, çünkü b) hipotezinden en azından bir (i, j) indeks çifti ve sonsuz sayıda n için $\beta_n^{\{i\}} \neq \beta_n^{\{j\}}$ dır. Bu durum tüm (i, j) indeks çiftleri için de geçerli olabilir. Böylece yeterli derecede büyük bir N_1 için

$$d(\beta_{N_1}) \leq d(\beta_{N_1+1}) \leq d(\beta_{N_1+2}) \leq \ldots$$

olur. Ayrıca $d(\beta_n) \leq m$ olduğundan doğal sayıların bu artan dizisi $N_2 \geq N_1$ olmak üzere yeterli derecede büyük bir N_2 için

$$d(\beta_{N_2}) = d(\beta_{N_2+1}) = d(\beta_{N_2+2}) = \ldots$$

dır. Eğer bu ortak değer t ile gösterilirse

$$d(\beta_n) = t, \quad n \geq N_2 \tag{3.1.32}$$

dir.

C) $\{\beta_n\}$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt dizisi seçilebilir:

0) $\beta_{n_j} \neq \beta \quad (j = 1, 2, \ldots)$.

1) $\left\{ H(\beta_{n_j}) \right\}$ doğal sayıların monoton artan bir dizisidir, böylece $+\infty$ a yakınsayan bir dizidir.

2) $\left\{ d(\beta_{n_j}) \right\}$ bir sabit dizidir.

İspat. İspat A) ve B) özelliklerinden elde edilir; $d(\beta_{n_j})$ nin sabit değeri t dir.

5°) Şimdi β nın bir U^* sayısı olduğunu gösterelim. Burada C) de tanımlanan $\left\{ \beta_{n_j} \right\}$ alt dizisini kullanacağız.

$H_{n_j} = H(\beta_{n_j})$ alınırsa C)-0) ve (3.1.22) den

$$w_t^*(H_{n_j},\beta) := \min_{\substack{\deg(\eta)\le t \\ H(\eta)\le H_{n_j} \\ \eta\ne\beta}} \left\{ |\beta-\eta|_p \right\}$$

$$\le \left|\beta-\beta_{n_j}\right|_p < \frac{1}{H_{n_j}^{\frac{s_{n_j}}{r_{n_j}}c_3}} \quad , \qquad n_j > \max(N_0, N_2) \tag{3.1.33}$$

elde edilir. (3.1.33) den

$$\frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}} > \frac{s_{n_j}}{r_{n_j}} c_3 \tag{3.1.34}$$

olur. Buradan (3.1.23) ile

$$\lim_{n_j\to\infty} \frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}} = +\infty \tag{3.1.35}$$

dur, sonuç olarak

$$w_t^*(\beta) = \overline{\lim_{H_{n_j}\to\infty}} \frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}} = +\infty \tag{3.1.36}$$

olur. O halde $\mu^*(\beta)$ nın tanımından

$$\mu^*(\beta)\leq t \qquad (3.1.37)$$

dir, bu β nın bir U^* sayısı olduğunu gösterir.

6°) Şimdi $\mu^*(\beta)=t$ olduğunu gösterelim.

a) $t=1$ ise (3.1.37) den $\mu^*(\beta)\leq 1$ olur. $\mu^*(\beta)$ bir doğal sayı olduğundan $\mu^*(\beta)=1$ olur. Bu durumda $\beta\in U_1^*$ dır.

b) $t>1$ ise

$$w_{t-1}^*(\beta)<+\infty \qquad (3.1.38)$$

olduğunu gösterelim.

γ, t den daha küçük dereceli herhangi bir cebirsel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} &|\beta_l-\gamma|_p=|\beta_l-\beta+\beta-\gamma|_p\leq|\beta_l-\beta|_p+|\beta-\gamma|_p \\ &\Rightarrow |\beta-\gamma|_p\geq|\beta_l-\gamma|_p-|\beta_l-\beta|_p \end{aligned} \qquad (3.1.39)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Burada $|\beta_l-\gamma|_p$ için bir alt sınır ve $|\beta_l-\beta|_p$ için bir üst sınır bulmak istiyoruz. β_l nin yüksekliği $H(\beta_l)$ ile; γ nın yüksekliği ve derecesi de, sırasıyla, $H(\gamma)$ ve s ile gösterilsin. s için $1\leq s\leq t-1$ eşitsizliği geçerlidir. $l\geq N_2$ için β_l nin derecesi tam olarak t dir. O halde β_l ($l\geq N_2$) ve γ eşlenik cebirsel sayı değildir. Bu durumda Lemma 2.3.3 den $M>t$ olmak üzere

$$|\beta_l-\gamma|_p>\frac{c_5}{H(\beta_l)^{M-1}H(\gamma)^M} \qquad (3.1.40)$$

dir, burada c_5, γ dan bağımsız bir pozitif sabittir. (3.1.14) ve (3.1.40) dan $l>\max(N_0, N_2)$ olmak üzere

$$|\beta_l-\gamma|_p>\frac{c_5}{H(\gamma)^M c_0^{r_l(M-1)}}$$

dır. $c_0 > 1$ ve $(3.1.4')$ den $r_n < s_{n-1}\tau_1 \quad (n > N_0)$ olduğundan $c_0^{r_n} < c_0^{s_{n-1}\tau_1}$ olur. Böylece $l > \max(N_0, N_2)$ için

$$|\beta_l - \gamma|_p > \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} \tag{3.1.41}$$

dır. (3.1.21), (3.1.39) ve (3.1.41) den

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{c_2^{s_l}}$$

elde edilir. Burada $c_2^{s_l} = e^{s_l \log c_2} = e^{s_l \log c_0 (\frac{\log c_2}{\log c_0})} = c_0^{s_l c_3} \quad (c_3 = \dfrac{\log c_2}{\log c_0},\ c_3 > 0)$ olduğundan

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{c_0^{s_l c_3}} \tag{3.1.42}$$

olur.

Şimdi,

$$\lambda > 1 \tag{3.1.43}$$

olacak şekilde bir λ sayısı alınsın (λ nın değeri daha sonra açıklanacaktır). $\{s_n\}$ ve $\{r_n\}$ dizilerinin tanımından $s_{n-1} \leq r_n$ olduğundan ve (3.1.3) den

$$\frac{s_n}{r_n} \leq \frac{s_n}{s_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{r_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} = +\infty$$

dır. Bu durumda

$$\mu > \lambda \tag{3.1.44}$$

olacak şekilde seçilen μ sayısı için bir $N_3 \in \mathbb{N}$ vardır, öyleki $n > N_3$ için

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} > \mu \qquad (3.1.45)$$

dır (μ nün değeri daha sonra açıklanacaktır).

Şimdi

$$H_0 = \max\left(c_0^{s_{N_0}} \, , \, c_0^{s_{N_2}} \, , \, c_0^{s_{N_3}} \, , \left(\frac{2\,c_1}{c_5} \right)^{1/c_3} \right) \qquad (3.1.46)$$

olmak üzere

$$H\,(\gamma) > H_0 \qquad (3.1.47)$$

koşulunu sağlayan herhangi bir γ cebirsel sayısı için

$$c_0^{s_{n-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_n} \qquad (3.1.48)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizliği sağlayan yalnız bir tane n indisi vardır: $c_0 > 1$ ve $\{ s_l \}$ monoton artan olduğundan $\lim\limits_{l \to \infty} c_0^{s_l} = +\infty$ olur. Bundan dolayı $c_0^{s_l} > H\,(\gamma)$ olacak şekilde sonsuz sayıda l indisi vardır, (3.1.46) ve (3.1.47) den $c_0^{s_l} \leq H\,(\gamma)$ olacak şekilde de l indisleri vardır, fakat $\lim\limits_{l \to \infty} c_0^{s_l} = +\infty$ olduğundan bu l indisleri sonlu sayıdadır. Sonlu sayıdaki bu l indislerinin maksimumu $n-1$ alınabilir. Bu durumda $c_0^{s_{n-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_n}$ olur ($H\,(\gamma) < c_0^{s_n}$ dir, aksi olsaydı, yani $H\,(\gamma) \geq c_0^{s_n}$ olsaydı, bu durum $n-1$ in maksimum olması ile çelişki oluştururdu, dolayısıyla $H\,(\gamma) < c_0^{s_n}$ dır). Şimdi (3.1.48) eşitsizliğini sağlayan bir tek n indisi olduğunu gösterelim: (3.1.48) in iki çözümü n_1 ve n_2 ise

$$\left.\begin{matrix} c_0^{s_{n_1-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_{n_1}} \\ c_0^{s_{n_2-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_{n_2}} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} c_0^{s_{n_1-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_{n_2}} & \Rightarrow n_1 - 1 < n_2 & \Rightarrow n_1 \leq n_2 \\ c_0^{s_{n_2-1}} \leq H\,(\gamma) < c_0^{s_{n_1}} & \Rightarrow n_2 - 1 < n_1 & \Rightarrow n_2 \leq n_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; n_1 = n_2$$

elde edilir.

(3.1.46), (3.1.47) ve (3.1.48) den

$$\left.\begin{array}{l} H(\gamma) > H_0 \\ c_0^{s_n} > H(\gamma) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_0^{s_n} > \max\left(c_0^{s_{N_0}} , c_0^{s_{N_2}} , c_0^{s_{N_3}} \right)$$

olur, $c_0 > 1$ ve $\{ s_n \}$ dizisi monoton artan olduğundan

$$s_n > \max (s_{N_0} , s_{N_2} , s_{N_3}) \quad \Rightarrow \quad n > \max (N_0 , N_2 , N_3) \tag{3.1.49}$$

dır.

(3.1.44), (3.1.45) ve (3.1.49) dan

$$s_{n-1} < \frac{s_n}{\lambda} \tag{3.1.50}$$

olur. Üstelik (3.1.43) den $\frac{1}{\lambda} < 1$ olduğundan

$$\frac{s_n}{\lambda} < s_n \tag{3.1.51}$$

dır. Bu durumda $\left[c_0^{s_{n-1}} , c_0^{s_n} \right)$ aralığı $\left[c_0^{s_{n-1}} , c_0^{s_n/\lambda} \right)$ ve $\left[c_0^{s_n/\lambda} , c_0^{s_n} \right)$ olacak şekilde iki alt aralığa bölünür. O halde (3.1.48) koşulunu sağlayan $H(\gamma)$ aşağıdaki iki alt aralıktan birine aittir:

I) $c_0^{s_{n-1}} \leq H(\gamma) < c_0^{s_n/\lambda}$,

II) $c_0^{s_n/\lambda} \leq H(\gamma) < c_0^{s_n}$.

I). Durum (3.1.42) de $l = n$ alınıp I) deki eşitsizlikler kullanılarak

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M + \tau_1 (M-1)}} - \frac{c_1}{H(\gamma)^{\lambda c_3}} \tag{3.1.52}$$

elde edilir.

$$\lambda := \frac{M+\tau_1(M-1)}{c_3}+1 \tag{3.1.53}$$

alınırsa

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{1}{H(\gamma)^{M+\tau_1(M-1)}}\left\{c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}\right\};\ \ H(\gamma)>H_0 \tag{3.1.54}$$

olur. (3.1.46) ve (3.1.47) den

$$H(\gamma)>\left(\frac{2c_1}{c_5}\right)^{1/c_3} \Rightarrow \frac{c_5}{2}-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}>0 \Rightarrow c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}>\frac{c_5}{2}>0 \tag{3.1.55}$$

dır. Bu durumda (3.1.54) ve (3.1.55) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^{M+\tau_1(M-1)}}\ \ ;\ \ H(\gamma)>H_0 \tag{3.1.56}$$

elde edilir.

II). Durum (3.1.42) de $l=n+1$ alınıp II) deki eşitsizlikler kullanılarak

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}-\frac{c_1}{H(\gamma)^{\frac{s_{n+1}}{s_n}c_3}} \tag{3.1.57}$$

olur, burada (3.1.45) in kullanılmasıyla

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}-\frac{c_1}{H(\gamma)^{\mu c_3}} \tag{3.1.58}$$

elde edilir.

$$\mu := \frac{M+\lambda\tau_1(M-1)}{c_3}+1 \tag{3.1.59}$$

seçilirse, (3.1.58) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{1}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}\left\{c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}\right\};\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.1.60}$$

elde edilir. (3.1.55) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}\ ;\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.1.61}$$

bulunur.

(3.1.43) den $M+\lambda\tau_1(M-1)>M+\tau_1(M-1)$ olduğundan I) durumunda da (3.1.61) geçerli olur. O halde $x=M+\lambda\tau_1(M-1)$ alınırsa her iki durumda da

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^x}\ ;\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.1.62}$$

elde edilir ($M>t$ olduğundan $x>t$ dir).

5°) de β nın bir U^* sayısı olduğu gösterildiğinden β cebirsel sayı değildir, böylece γ cebirsel sayı olduğundan $\gamma\neq\beta$ dır. O halde $s\leq t-1$ ve $H(\gamma)\leq H_0$ olacak şekildeki tüm γ lar için

$$w_{t-1}^*(H_0,\beta)=\min_{\substack{s\leq t-1\\ H(\gamma)\leq H_0\\ \gamma\neq\beta}}\left\{|\beta-\gamma|_p\right\}\leq|\beta-\gamma|_p \tag{3.1.63}$$

dir. $H(\gamma)\geq 1$ ve $x>t\geq 2$ olduğundan $H(\gamma)^x\geq 1$ dir, böylece $\frac{1}{H(\gamma)^x}\leq 1$ olur. Bu durumda (3.1.63) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq w_{t-1}^*(H_0,\beta)\geq\frac{w_{t-1}^*(H_0,\beta)}{H(\gamma)^x};\quad s\leq t-1,\quad H(\gamma)\leq H_0 \tag{3.1.64}$$

dır. O halde, (3.1.62) ve (3.1.64) den

$$c_6 = \min\left(\frac{c_5}{2},\ w_{t-1}^{*}(H_0, \beta) \right) \tag{3.1.65}$$

alınırsa, $s \leq t-1$ ve $H(\gamma)=1,\ 2, \ldots$ için

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_6}{H(\gamma)^x} \tag{3.1.66}$$

elde edilir. (3.1.66) dan $s \leq t-1$ ve H herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $H(\gamma) \leq H$ olacak şekildeki tüm γ cebirsel sayıları için

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_6}{H(\gamma)^x} \geq \frac{c_6}{H^x} \tag{3.1.67}$$

olur ve

$$w_{t-1}^{*}(H, \beta) = \min_{\substack{s \leq t-1 \\ H(\gamma) \leq H \\ \gamma \neq \beta}} \left\{ |\beta - \gamma|_p \right\} \tag{3.1.68}$$

olduğundan,

$$w_{t-1}^{*}(H, \beta) \geq \frac{c_6}{H^x} \qquad \text{tüm } H \text{ lar için} \tag{3.1.69}$$

elde edilir. (3.1.69) dan

$$\frac{-\log(w_{t-1}^{*}(H, \beta))}{\log H} \leq x - \frac{\log c_6}{\log H} \tag{3.1.70}$$

dır, buradan da

$$w_{t-1}^{*}(\beta) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{-\log(w_{t-1}^{*}(H, \beta))}{\log H} \leq x \tag{3.1.71}$$

elde edilir. O halde $\mu^{*}(\beta)$ nın tanımından

$$\mu^{*}(\beta) > t-1 \qquad \text{yani} \qquad \mu^{*}(\beta) \geq t \tag{3.1.72}$$

dır.

(3.1.37) ve (3.1.72) den

$$\mu^*(\beta)=t,\ t>1 \tag{3.1.73}$$

dır. Diğer bir deyişle $\beta\in U_t^*$ dır. O halde 6)-a) ve b) durumlarının her ikisinde de $\beta\in U_t^*$ olur, böylece $\beta\in U_t$ dir.

3.2. CEBİRSEL KATSAYILI BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ BOŞLUK SERİLERİNİN RASYONEL ARGÜMANLAR İÇİN ALDIĞI DEĞERLER

Teorem 3.2.1 $\{r_n\}$ ve $\{s_n\}$ negatif olmayan tam sayıların

$$0\le s_0\le r_1<s_1\le r_2<s_2\le r_3<s_3\le\ldots$$

koşulunu sağlayan iki sonsuz dizisi olsun. $\mathbb{Q}_p$ de

$$\begin{array}{lll} c_h=0, & r_n<h<s_n & n=1,2,\ldots \\ c_h\neq 0, & h=r_n & n=1,2,\ldots \\ c_h\neq 0, & h=s_n & n=0,1,\ldots \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F(z)&=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z) \\ P_k(z)&=\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}}c_h z^h, \qquad c_h\in \mathrm{K},\ \mathrm{K}=\mathbb{Q}(\theta),\ [\mathrm{K}:\mathbb{Q}]=c \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş boşluk serisini göz önüne alalım.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|c_n^{\{j\}}\right|_p}<+\infty \quad (j=1,\ldots,c) \tag{3.2.2}$$

olsun[12]. Ayrıca a_n, $a_n c_n$ tam cebirsel sayı olacak şekildeki uygun bir doğal sayı ve $A_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$[13] olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty \tag{3.2.3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{r_n}{s_{n-1}} := \tau < +\infty \tag{3.2.4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log A_n}{n} := \sigma < +\infty \tag{3.2.5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log H(c_n)}{n} := \omega < +\infty \tag{3.2.6}$$

olsun. O halde p-adik alanda; $R = \min\limits_{1\le j\le c} \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| c_n^{\{j\}} \right|_p}}$ olmak üzere $0 < \left| \alpha \right|_p < R$

koşulunu sağlayan $z = \alpha$ rasyonel sayısı için $F(\alpha) \in U_t$ dir, burada t, sonsuz sayıda $F_n(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P_k(\alpha)$ kısmi toplamlarının derecelerinin maksimumudur ve $t \le [\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] = c$ dir. Ayrıca sonsuz sayıda n için $P_n(\alpha) \ne 0$ dır.

İspat. 1°) (3.2.1) in yakınsaklık yarıçapı (3.2.2) koşulundan dolayı $\ge R$ dir. Çünkü $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \left| c_h \right|_p z^h$ serisi $\sum\limits_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ serisinin bir majorantıdır.

2°) Şimdi, $F(\alpha) = \beta$ yı ele alalım. Burada $\alpha = \dfrac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \ge 1$ dir.

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\frac{b}{a}\right) = \sum_{v=s_0}^{r_n} c_v(\theta)\left(\frac{b}{a}\right)^v \tag{3.2.7}$$

$$\rho_n = \sum_{k=n}^{\infty} P_k\left(\frac{b}{a}\right) = \sum_{v=s_n}^{\infty} c_v(\theta)\left(\frac{b}{a}\right)^v \tag{3.2.8}$$

olmak üzere

---

[12] $c_n^{\{j\}}$ $(j=1, \dots, c)$, $c_n \in K$ nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerini göstermektedir.

[13] $[a_0, a_1, \dots, a_n]$; $a_0, a_1, \dots, a_n$ tam sayılarının en küçük ortak katını göstermektedir.

$$\beta = \beta_n + \rho_n \tag{3.2.9}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi β_n in $H(\beta_n)$ yüksekliğini üstten sınırlayacağız. (3.2.7) nin her iki yanı A_{r_n} ile çarpılırsa

$$A_{r_n}\,\beta_n - \sum_{\nu=s_0}^{r_n} A_{r_n}\, c_\nu(\theta)\left(\frac{b}{a}\right)^\nu = 0 \tag{3.2.10}$$

elde edilir. Burada a_n, $a_n\, c_n(\theta)$ tam cebirsel sayı olacak şekildeki uygun bir doğal sayı olmak üzere $A_{r_n} = \left[\, a_0, a_1, \ldots, a_{r_n} \right]$ olduğu için $A_{r_n}\, c_\nu(\theta)$ $(\nu = s_0, \ldots, r_n)$ tam cebirsel sayıdır ve $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ nın bir elemanıdır[14)]. Bundan dolayı, $D = \left|\Delta^2(1, \theta, \ldots, \theta^{c-1})\right|$, $\xi_0^{(\nu)}, \xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_{c-1}^{(\nu)}$ tam rasyonel sayıları için

$$A_{r_n}\, c_\nu(\theta) = \frac{\xi_0^{(\nu)}}{D} + \frac{\xi_1^{(\nu)}}{D}\theta + \ldots + \frac{\xi_{c-1}^{(\nu)}}{D}\theta^{c-1} \tag{3.2.11}$$

olur, burada $D \geq 1$ dir.

(3.2.10) ve (3.2.11) den

$$D\, A_{r_n}\, \beta_n - \sum_{\mu=0}^{c-1} \sum_{\nu=s_0}^{r_n} \xi_\mu^{(\nu)}\, \theta^\mu \left(\frac{b}{a}\right)^\nu = 0 \tag{3.2.12}$$

dır, burada $D\, A_{r_n}$ ve $\xi_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, c-1)$ tam rasyonel sayılardır.

$$P(y, x_1, x_2) = D\, A_{r_n}\, y - \sum_{\mu=0}^{c-1} \sum_{\nu=s_0}^{r_n} \xi_\mu^{(\nu)}\, x_1^\mu\, x_2^\nu \tag{3.2.13}$$

polinomu göz önüne alınsın. Bu polinomda $y = \beta_n$, $x_1 = \theta$, $x_2 = \dfrac{b}{a}$ konulduğunda (3.2.12) eşitliğinin sol tarafı elde edilir.

---

14) θ, tam cebirsel sayı olarak alınmaktadır.

Şimdi $\left|\xi_{\mu}^{(v)}\right|$ büyüklüğünü belirlemek istiyoruz.

$$D\,A_{r_n}\,c_v\,(\theta)=\delta \tag{3.2.14}$$

alalım. Bu durumda, (3.2.11) den

$$\delta=\xi_0^{(v)}+\xi_1^{(v)}\,\theta+\ldots+\xi_{c-1}^{(v)}\,\theta^{c-1}$$

olur. Buradan θ nın eşlenikleri için

$$\delta^{\{j\}}=\xi_0^{(v)}+\xi_1^{(v)}\,\theta^{\{j\}}+\ldots+\xi_{c-1}^{(v)}\,(\theta^{\{j\}})^{c-1} \quad (j=1,\,\ldots,c) \tag{3.2.15}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\xi_{\mu}^{(v)}=\sum_{j=1}^{c}\frac{\Delta_{\mu_j}}{\Delta}\,\delta^{\{j\}} \quad (\mu=0,1,\,\ldots,c-1) \tag{3.2.16}$$

dır, burada Δ ve Δ_{μ_j} yalnız θ ve θ nın eşleniklerine bağlı fakat δ ya (dolayısıyla n ve v ye) bağlı değildir.

(3.2.14) den D ve A_{r_n} tam rasyonel sayılar olduğundan

$$\left|\overline{\delta}\right|=\left|\overline{D\,A_{r_n}\,c_v}\right|\leq\left|\overline{D}\right|\,\left|\overline{A_{r_n}}\right|\left|\overline{c_v}\right|=D\,A_{r_n}\left|\overline{c_v}\right| \tag{3.2.17}$$

olur. Bu durumda (3.2.16) ve (3.2.17) den

$$\begin{aligned}\left|\,\xi_{\mu}^{(v)}\,\right|&=\left|\sum_{j=1}^{c}\frac{\Delta_{\mu_j}}{\Delta}\,\delta^{\{j\}}\right|\leq\sum_{j=1}^{c}\left|\frac{\Delta_{\mu_j}}{\Delta}\right|\left|\overline{\delta}\right|\\&\leq\sum_{j=1}^{c}\left|\frac{\Delta_{\mu_j}}{\Delta}\right|D\,A_{r_n}\left|\overline{c_v}\right|\\&=\hat{C}(\mathrm{K})\,A_{r_n}\left|\overline{c_v}\right| \qquad (\mu=0,1,\,\ldots,c-1)\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

elde edilir, burada $\hat{C}(\mathrm{K})$ yalnız K sayı cismine bağlı bir pozitif sabittir.

(3.2.4) ve (3.2.5) den, $\tau_1>\tau$ ve $\sigma_1>\sigma$ olmak üzere $n>N_0$ $(N_0=N_0(\tau_1\,,\,\sigma_1))$ için

$$\frac{r_n}{s_{n-1}} < \tau_1 , \qquad (3.2.4') \qquad \text{ve} \qquad \frac{\log A_{r_n}}{r_n} < \sigma_1 , \qquad (3.2.5')$$

dir. (3.2.6) dan $\omega_1 > \omega$ olmak üzere yeterli derecede büyük n ler için $\frac{\log H(c_n)}{n} < \omega_1$ dir, buradan yeterli derecede büyük n ler için $H(c_n) < B^n$ yazılabilir, burada $\omega_1 > \omega \geq 0$ olduğundan $B > 1$ dir. Üstelik

$$H(c_n) \leq K B^n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (3.2.6')$$

olacak şekilde $K > 1$ sayısı vardır. $\left|\overline{c_n}\right| \leq 2H(c_n)$ olduğundan ve $(3.2.6')$ den

$$\left|\overline{c_n}\right| \leq 2H(c_n) \leq 2K B^n \quad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (3.2.6'')$$

elde edilir.

O halde P polinomunun $H(P) = H$ yüksekliği için (3.2.13), (3.2.18) ve $(3.2.6'')$ den

$$\begin{aligned} H &= \max_{\mu, v}(\left|D A_{r_n}\right|, \left|\xi_\mu^{(v)}\right|) \leq \max_v (D A_{r_n}, \hat{C}(\mathrm{K}) A_{r_n} \left|\overline{c_v}\right|) \\ &= A_{r_n} \max_v (D, \hat{C}(\mathrm{K}) \left|\overline{c_v}\right|) \leq A_{r_n} \max (D, \hat{C}(\mathrm{K})) \max_{0 \leq v \leq r_n} (1, \left|\overline{c_v}\right|) \\ &\leq A_{r_n} \max (D, \hat{C}(\mathrm{K})) 2K B^{r_n} = C(\mathrm{K}) A_{r_n} B^{r_n} \qquad (3.2.19) \end{aligned}$$

elde edilir, burada $C(\mathrm{K}) = \max(D, \hat{C}(\mathrm{K}))2K$ olmak üzere K sayı cismine ait bir pozitif sabittir. Üstelik $D \geq 1$ ve $K > 1$ olduğundan $C(\mathrm{K}) > 1$ dir.

(3.2.13) e Lemma 2.3.1 i uygulayalım. Burada $l_1 = c - 1$, $l_2 = r_n$, $g = c$, $d = 1$ olur. O halde (3.2.19) ve $(3.2.5')$ kullanılarak

$$\begin{aligned} H(\beta_n) &\leq 3^{2c + (c - 1 + r_n)c} H^c H(\theta)^{(c-1)c} H(\alpha)^{r_n c} \\ &\leq 3^{(c+1+r_n)c} (C(\mathrm{K}) A_{r_n} B^{r_n})^c H(\theta)^{(c-1)c} H(\alpha)^{r_n c} \\ &\leq 3^{(c+1+r_n)c} (C(\mathrm{K}))^c e^{\sigma_1 r_n c} B^{r_n c} H(\theta)^{(c-1)c} H(\alpha)^{r_n c} \\ &= \left[(3 e^{\sigma_1} B H(\alpha))^{r_n} 3^{c+1} C(\mathrm{K}) H(\theta)^{(c-1)} \right]^c \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $c_0=\left[\,3^{c+2}e^{\sigma_1}B\,H(\alpha)\,C(\mathrm{K})\,H(\theta)^{(c-1)}\right]^{c}$ olmak üzere

$$H(\beta_n)\le c_0^{r_n}\quad (n>N_0) \tag{3.2.20}$$

olur, $\sigma_1>\sigma\ge 0$, $B>1$ ve $C(\mathrm{K})>1$ olduğundan $c_0>1$ dir.

3°) Şimdi $|\beta-\beta_n|_p=|\rho_n|_p$ yi üsten sınırlayacağız.

$R=\min\limits_{1\le j\le c}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n^{\{j\}}|_p}}$ yi göz önüne alalım ve $0<R<+\infty$ olsun. $\rho_j=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n^{\{j\}}|_p}}$ $(j=1,\dots,c)$ alınırsa $R=\min\limits_{1\le j\le c}\rho_j$ olur. Bu durumda $R\le\rho_j$ $(j=1,\dots,c)$ dir. Yeterli derecede büyük n ler için ε yeterli derecede küçük pozitif sayı olmak üzere

$$\sqrt[n]{|c_n^{\{j\}}|_p}<\frac{1}{\rho_j-\varepsilon}\le\frac{1}{R-\varepsilon}\quad (j=1,\dots,c)$$

dir, böylece

$$|c_n^{\{j\}}|_p<\frac{1}{(R-\varepsilon)^n}\quad (j=1,\dots,c)$$

olur. Hatta her n için

$$|c_n^{\{j\}}|_p\le\frac{M_1}{(R-\varepsilon)^n}\quad (j=1,\dots,c)\ (n=0,1,\dots) \tag{3.2.21}$$

olacak şekilde $M_1>0$ sayısı vardır. ε pozitif sayısı yeterli derecede küçük seçilirse $R-\varepsilon>|\alpha|_p$ sağlanır (örneğin $\varepsilon=\dfrac{R-|\alpha|_p}{2}$ alınabilir). Bu durumda $\dfrac{|\alpha|_p}{R-\varepsilon}<1$ dir. (3.2.8) ve (3.2.21) den

$$
\begin{aligned}
|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p &= \left| \sum_{v=s_n}^{\infty} c_v \left(\frac{b}{a}\right)^v \right|_p \le \max_{v\ge s_n} \left\{ |c_v|_p \left|\frac{b}{a}\right|_p^v \right\} \\
&\le \max_{v\ge s_n} \left\{ \frac{M_1}{(R-\varepsilon)^v} \left|\frac{b}{a}\right|_p^v \right\} \\
&= M_1 \max_{v\ge s_n} \left\{ \left(\frac{|\alpha|_p}{R-\varepsilon} \right)^v \right\} = M_1 \left(\frac{|\overline{\alpha}|_p}{R-\varepsilon} \right)^{s_n} \quad (n=1,\, 2,\, \ldots) \qquad (3.2.22)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$R=+\infty$ ise $\rho>|\alpha|_p$ olacak şekilde keyfi herhangi bir ρ sayısı seçilebilir. Çünkü $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\{j\}} \rho^n$ $(j=1,\, \ldots,\, c)$ serisi yakınsaktır ve böylece

$$
\left| c_n^{\{j\}} \right|_p \le \frac{M_2}{\rho^n} \quad (j=1,\, \ldots,\, c) \ (n=0,\, 1, \ldots) \qquad (3.2.23)
$$

olacak şekilde bir M_2 (>0) sayısı vardır. Burada $\dfrac{|\alpha|_p}{\rho}<1$ dir.

(3.2.8) ve (3.2.23) den

$$
\begin{aligned}
|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p &= \left| \sum_{v=s_n}^{\infty} c_v \left(\frac{b}{a}\right)^v \right|_p \le \max_{v\ge s_n} \left\{ |c_v|_p \left|\frac{b}{a}\right|_p^v \right\} \\
&\le \max_{v\ge s_n} \left\{ \frac{M_2}{\rho^v} \left|\frac{b}{a}\right|_p^v \right\} = M_2 \max_{v\ge s_n} \left\{ \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho} \right)^v \right\} \\
&= M_2 \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho} \right)^{s_n} \qquad (n=1,\, 2,\, \ldots) \qquad (3.2.24)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda $\max(M_1,\, M_2)=c_1$ ve $\min(\rho,\, R-\varepsilon)=\rho^*$ alınırsa, (3.2.21) ile (3.2.23) den

$$
\left| c_n^{\{j\}} \right|_p \le \frac{c_1}{(\rho^*)^n} \quad (j=1,\ldots,\, c) \ (n=0,\, 1,\ldots) \qquad (3.2.25)
$$

ve (3.2.22) ile (3.2.24) den

$$|\beta-\beta_n|_p = |\rho_n|_p \leq c_1 \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho^*}\right)^{s_n} \quad (n=1,\, 2,\, \ldots) \tag{3.2.26}$$

dır. (3.2.26) da $\dfrac{\rho^*}{|\alpha|_p}=c_2 \;\; (c_2>1)$ alınırsa

$$|\beta-\beta_n|_p \leq \frac{c_1}{c_2^{s_n}} \quad (n=1,\, 2,\, \ldots) \tag{3.2.27}$$

olur. (3.2.20) ve (3.2.27) den

$$\begin{aligned} |\beta-\beta_n|_p &\leq \frac{c_1}{e^{\log c_2^{s_n}}} = \frac{c_1}{e^{(s_n \log c_2)(\frac{r_n \log c_0}{r_n \log c_0})}} = \frac{c_1}{e^{(r_n \log c_0)(\frac{s_n \log c_2}{r_n \log c_0})}} \\ &= \frac{c_1}{(c_0^{r_n})^{\frac{s_n}{r_n}c_3}} \leq \frac{c_1}{(H(\beta_n))^{\frac{s_n}{r_n}c_3}} \qquad (n>N_0) \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

elde edilir, burada $c_3=\dfrac{\log c_2}{\log c_0}$ dır, $c_0>1$ ve $c_2>1$ olduğundan $\log c_0>0$ ve $\log c_2>0$ olup böylece $c_3>0$ dır. O halde (3.2.3) den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} c_3 = +\infty \tag{3.2.29}$$

dur.

4°) Şimdi, β_n in $\{H(\beta_n)\}$ yükseklik dizisini ve $\{d(\beta_n)\}$ derece dizisini inceleyelim. Bu diziler aşağıdaki A, B, C özelliklerini sağlar.

A) $\{H(\beta_n)\}$ dizisi üstten sınırsızdır.

İspat. $\{H(\beta_n)\}$ dizisi üstten sınırlı olmuş olsaydı, β_n cebirsel sayısının derecesi c ile üstten sınırlı olduğundan $\{\beta_n\}$ cebirsel sayı dizisi yalnız sonlu sayıda birbirinden farklı eleman içerecekti. Fakat $\{\beta_n\}$ dizisi sonsuz sayıda birbirinden farklı eleman içerir: Sonsuz sayıda sıfırdan farklı $P_k(\alpha)$ olduğundan sonsuz sayıda n için

$$|\beta_{n+1}-\beta_n|_p = \left|\sum_{k=0}^{n} P_k(\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\alpha)\right|_p = |P_n(\alpha)|_p \neq 0$$

dır. Bu durumda $\{\beta_n\}$ dizisinde en azından birbirinden farklı iki eleman vardır. Eğer $\{\beta_n\}$ yalnız sonlu sayıda birbirinden farklı eleman içermiş olsaydı, bu takdirde her durumda ya $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p=0$ olurdu, ya da $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p \geq k$ olacak şekilde bir k pozitif sabiti bulunabilirdi (birbirinden farklı sonlu sayıdaki β_n değerleri $v_1, \ldots, v_p$ $(p \geq 2)$ olsaydı, $k = \min\limits_{\substack{r,s=1,\ldots,p \\ r\neq s}} |v_r - v_s|_p$ alınabilirdi). $F(\alpha) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h \alpha^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\alpha)$ serisi yakınsak olduğundan yeterli derecede büyük n ler için $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p = |P_n(\alpha)|_p$ yeterli derecede küçük bırakılabilir. Bundan dolayı sonsuz sayıda n için $|P_n(\alpha)|_p \neq 0$ olduğundan yeterli derecede büyük bir $\bar{n}$ için $0 < |P_{\bar{n}}(\alpha)|_p < k$ yani $0 < |\beta_{\bar{n}+1} - \beta_{\bar{n}}|_p < k$ olur. Fakat bu durum $n=\bar{n}$ için $|\beta_{n+1}-\beta_n|_p$ ye ait yukarıdaki koşul ile çelişir. Bundan dolayı $\{\beta_n\}$ dizisi sonsuz sayıda birbirinden farklı eleman içerir.

B) $\{d(\beta_n)\}$ dizisi belirli bir n den itibaren bir sabit dizidir.

İspat. İki farklı durum vardır:

a) Eğer belirli bir n den itibaren daima $d(\beta_n)=1$ oluyorsa, B) özelliği kendiliğinden sağlanır.

b) Sonsuz sayıda n için $d(\beta_n)>1$ durumunda; $i \neq j$ olmak üzere sabit bir (i,j) çifti ve yeterli derecede büyük bir n için $\beta_n^{\{i\}} \neq \beta_n^{\{j\}}$ ise $\beta_{n+1}^{\{i\}} \neq \beta_{n+1}^{\{j\}}$ olduğunu gösterelim[15)]: (3.2.7) den

---

[15)] $\zeta^{\{i\}}$ $(i=1,\ldots,c)$, $\zeta \in \mathbb{Q}(\theta)$ nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerini göstermektedir.

$$\beta_{n+1}=\beta_n+c_{s_n}\,(\frac{b}{a})^{s_n}+\ldots+c_{r_{n+1}}\,(\frac{b}{a})^{r_{n+1}} \tag{3.2.30}$$

dir, buradan

$$\beta_{n+1}^{\{i\}}=\beta_n^{\{i\}}+c_{s_n}^{\{i\}}\,(\frac{b}{a})^{s_n}+\ldots+c_{r_{n+1}}^{\{i\}}\,(\frac{b}{a})^{r_{n+1}}$$

$$\beta_{n+1}^{\{j\}}=\beta_n^{\{j\}}+c_{s_n}^{\{j\}}\,(\frac{b}{a})^{s_n}+\ldots+c_{r_{n+1}}^{\{j\}}\,(\frac{b}{a})^{r_{n+1}}$$

olur, buradan da

$$\left|\beta_{n+1}^{\{i\}}-\beta_{n+1}^{\{j\}}\right|_p=\left|(\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}})+(\frac{b}{a})^{s_n}(c_{s_n}^{\{i\}}-c_{s_n}^{\{j\}})+\ldots+(\frac{b}{a})^{r_{n+1}}(c_{r_{n+1}}^{\{i\}}-c_{r_{n+1}}^{\{j\}})\right|_p \tag{3.2.31}$$

dir. Burada

$$\left|\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}}\right|_p>\left|(\frac{b}{a})^{s_n}(c_{s_n}^{\{i\}}-c_{s_n}^{\{j\}})+\ldots+(\frac{b}{a})^{r_{n+1}}(c_{r_{n+1}}^{\{i\}}-c_{r_{n+1}}^{\{j\}})\right|_p \tag{3.2.32}$$

ise

$$\left|\beta_{n+1}^{\{i\}}-\beta_{n+1}^{\{j\}}\right|_p=\left|\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}}\right|_p \tag{3.2.33}$$

dir.

Şimdi (3.2.32) nin yeterli derecede büyük n ler için geçerli olduğunu gösterelim. β_n in derecesi q ile gösterilirse $2\leq q\leq c$ dir. Lemma 2.3.2 den $i\neq j$ olmak üzere $\beta_n^{\{i\}}\neq\beta_n^{\{j\}}$ eşlenik sayıları için

$$\left|\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}}\right|_p>\frac{c_4}{H(\beta_n)^{q-1}}$$

dır, burada c_4, $H(\beta_n)$ e bağlı olmayan bir pozitif sabittir. $c\geq q$ ve $H(\beta_n)\geq 1$ olduğundan $H(\beta_n)^{c-1}\geq H(\beta_n)^{q-1}$ dır, böylece

$$\left|\beta_n^{\{i\}}-\beta_n^{\{j\}}\right|_p>\frac{c_4}{H(\beta_n)^{c-1}} \tag{3.2.34}$$

elde edilir. (3.2.20) ve (3.2.34) den,

$$\left| \beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}} \right|_p > \frac{c_4}{c_0^{r_n(c-1)}} \qquad (n > N_0) \tag{3.2.35}$$

olur.

Şimdi (3.2.32) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimi göz önüne alalım. (3.2.25) den, p - adik değerlendirmenin özelliğinden ve $\frac{|\alpha|_p}{\rho^*} < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left| (\frac{b}{a})^{s_n} (c_{s_n}^{\{i\}} - c_{s_n}^{\{j\}}) + \ldots + (\frac{b}{a})^{r_{n+1}} (c_{r_{n+1}}^{\{i\}} - c_{r_{n+1}}^{\{j\}}) \right|_p \\
&\le \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|_p^{s_n} \left| c_{s_n}^{\{i\}} - c_{s_n}^{\{j\}} \right|_p , \ldots, \left| \frac{b}{a} \right|_p^{r_{n+1}} \left| c_{r_{n+1}}^{\{i\}} - c_{r_{n+1}}^{\{j\}} \right|_p \right\} \\
&\le \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|_p^{s_n} (\max (\left| c_{s_n}^{\{i\}} \right|_p , \left| c_{s_n}^{\{j\}} \right|_p)), \ldots, \left| \frac{b}{a} \right|_p^{r_{n+1}} (\max (\left| c_{r_{n+1}}^{\{i\}} \right|_p , \left| c_{r_{n+1}}^{\{j\}} \right|_p)) \right\} \\
&\le \max \left\{ \left| \frac{b}{a} \right|_p^{s_n} \frac{c_1}{(\rho^*)^{s_n}} , \ldots, \left| \frac{b}{a} \right|_p^{r_{n+1}} \frac{c_1}{(\rho^*)^{r_{n+1}}} \right\} \\
&= c_1 \max \left\{ \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho^*} \right)^{s_n} , \ldots, \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho^*} \right)^{r_{n+1}} \right\} \\
&= c_1 \left(\frac{|\alpha|_p}{\rho^*} \right)^{s_n} = \frac{c_1}{c_2^{s_n}}
\end{aligned} \tag{3.2.36}$$

elde edilir, burada $c_2 = \frac{\rho^*}{|\alpha|_p}$ (>1) dir.

Yeterli derecede büyük bir n_0 için

$$\frac{c_1}{c_2^{s_n}} < \frac{c_4}{c_0^{r_n(c-1)}} \qquad (n > n_0) \tag{3.2.37}$$

dır. Çünkü (3.2.37) eşitsizliğinden

$$\log c_1 - s_n \log c_2 < \log c_4 - r_n\,(c-1)\log c_0$$

dır, buradan

$$\frac{\log c_1}{r_n} + (c-1)\log c_0 < \frac{\log c_4}{r_n} + \frac{s_n}{r_n}\log c_2$$

olur. $c_0 > 1$ ve $c_2 > 1$ olduğundan $\log c_0 > 0$ ve $\log c_2 > 0$ dır. Ayrıca (3.2.3) den $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n}\log c_2 = +\infty$ elde edilir. O halde bu son eşitsizliğin sol tarafı $(c-1)\log c_0$ değerine, sağ tarafı $+\infty$ a yakınsar. Böylece yeterli derecede büyük n ler için (3.2.37) eşitsizliği sağlanır.

(3.2.35), (3.2.36) ve (3.2.37) den yeterli derecede büyük n ler için

$$\left|\beta_n^{\{i\}} - \beta_n^{\{j\}}\right|_p > \frac{c_4}{c_0^{r_n(c-1)}} > \frac{c_1}{c_2^{s_n}} \geq \left|(\frac{b}{a})^{s_n}(c_{s_n}^{\{i\}} - c_{s_n}^{\{j\}}) + \ldots + (\frac{b}{a})^{r_{n+1}}(c_{r_{n+1}}^{\{i\}} - c_{r_{n+1}}^{\{j\}})\right|_p$$

dır. O halde yeterli derecede büyük n ler için (3.2.32) eşitsizliği sağlanır. Bu durumda, yeterli derecede büyük bir n den büyük olan tüm n ler için $\beta_n^{\{i\}} \neq \beta_n^{\{j\}}$ dir. Bunu sağlayan n indisleri kesin olarak vardır, çünkü b) nin hipotezinden en azından bir (i, j) indeks çifti ve sonsuz sayıda n için $\beta_n^{\{i\}} \neq \beta_n^{\{j\}}$ dir. Bu durum tüm (i, j) indeks çiftleri için de geçerli olabilir. Böylece yeterli derecede büyük bir N_1 için

$$d(\beta_{N_1}) \leq d(\beta_{N_1+1}) \leq d(\beta_{N_1+2}) \leq \ldots$$

olur. Ayrıca $d(\beta_n) \leq c$ olduğundan doğal sayıların bu artan dizisi $N_2 \geq N_1$ olmak üzere yeterli derecede büyük bir N_2 için

$$d(\beta_{N_2}) = d(\beta_{N_2+1}) = d(\beta_{N_2+2}) = \ldots$$

dır. Eğer bu ortak değer t ile gösterilirse

$$d(\beta_n) = t, \quad n \geq N_2 \tag{3.2.38}$$

olur.

C) $\{\beta_n\}$ dizisinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt dizisi seçilebilir:

0) $\beta_{n_j} \neq \beta \quad (j=1,2,\ldots)$.

1) $\left\{H(\beta_{n_j})\right\}$ doğal sayıların monoton artan bir dizisidir, böylece $+\infty$ a yakınsayan bir dizidir.

2) $\left\{d(\beta_{n_j})\right\}$ bir sabit dizidir.

İspat. İspat A) ve B) özelliklerinden elde edilir; $d(\beta_{n_j})$ nin sabit değeri t dır.

5°) Şimdi β nın bir U^* sayısı olduğunu gösterelim. Burada C) de tanımlanan $\left\{\beta_{n_j}\right\}$ alt dizisini kullanacağız.

$H_{n_j} = H(\beta_{n_j})$ alınırsa C)-0) ve (3.2.28) den

$$w_t^*(H_{n_j},\beta) := \min_{\substack{\deg(\eta)\le t \\ H(\eta)\le H_{n_j} \\ \eta\neq\beta}} \left\{|\beta-\eta|_p\right\}$$

$$\le \left|\beta-\beta_{n_j}\right|_p < \frac{1}{H_{n_j}^{\frac{s_{n_j}}{r_{n_j}}c_3}} \quad , \quad n_j > \max(N_0, N_2) \tag{3.2.39}$$

elde edilir. (3.2.39) dan

$$\frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}} > \frac{s_{n_j}}{r_{n_j}} c_3 \tag{3.2.40}$$

olur. (3.2.29) ve (3.2.40) dan

$$\lim_{n_j\to\infty} \frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}} = +\infty \tag{3.2.41}$$

dur, sonuç olarak

$$w_t^*(\beta)=\overline{\lim_{H_{n_j}\to\infty}}\frac{-\log(w_t^*(H_{n_j},\beta))}{\log H_{n_j}}=+\infty \tag{3.2.42}$$

olur. O halde $\mu^*(\beta)$ nın tanımından

$$\mu^*(\beta)\leq t \tag{3.2.43}$$

dir, bu β nın bir U^* sayısı olduğunu gösterir.

6°) Şimdi $\mu^*(\beta)=t$ olduğunu gösterelim.

a) $t=1$ ise (3.2.43) den $\mu^*(\beta)\leq 1$ olur. $\mu^*(\beta)$ bir doğal sayı olduğundan $\mu^*(\beta)=1$ olur. Bu durumda $\beta\in U_1^*$ dır.

b) $t>1$ ise

$$w_{t-1}^*(\beta)<+\infty \tag{3.2.44}$$

olduğunu gösterelim.

γ, t den daha küçük dereceli herhangi bir cebirsel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}&|\beta_l-\gamma|_p=|\beta_l-\beta+\beta-\gamma|_p\leq|\beta_l-\beta|_p+|\beta-\gamma|_p\\ \Rightarrow\quad &|\beta-\gamma|_p\geq|\beta_l-\gamma|_p-|\beta_l-\beta|_p\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Burada $|\beta_l-\gamma|_p$ için bir alt sınır ve $|\beta_l-\beta|_p$ için bir üst sınır bulmak istiyoruz. β_l nin yüksekliği $H(\beta_l)$ ile; γ nın yüksekliği ve derecesi de, sırasıyla, $H(\gamma)$ ve s ile gösterilsin. s için $1\leq s\leq t-1$ eşitsizliği geçerlidir. $l\geq N_2$ için β_l nin derecesi tam olarak t dir. O halde β_l ($l\geq N_2$) ve γ eşlenik cebirsel sayı değildir. Bu durumda Lemma 2.3.3 den $M>t$ olmak üzere

$$|\beta_l-\gamma|_p>\frac{c_5}{H(\beta_l)^{M-1}H(\gamma)^M} \tag{3.2.46}$$

dir, burada c_5, γ dan bağımsız bir pozitif sabittir. (3.2.20) ve (3.2.46) den $l > \max(N_0, N_2)$ olmak üzere

$$|\beta_l - \gamma|_p > \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{r_l(M-1)}}$$

dır. $c_0 > 1$ ve $(3.2.4')$ den $r_n < s_{n-1}\tau_1 \quad (n > N_0)$ olduğundan $c_0^{r_n} < c_0^{s_{n-1}\tau_1}$ olur. Böylece $l > \max(N_0, N_2)$ için

$$|\beta_l - \gamma|_p > \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} \tag{3.2.47}$$

dır. (3.2.27), (3.2.45) ve (3.2.47) den

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{c_2^{s_l}}$$

elde edilir. Burada $c_2^{s_l} = e^{s_l \log c_2} = e^{s_l \log c_0 (\frac{\log c_2}{\log c_0})} = c_0^{s_l c_3}$ $\left(c_3 = \dfrac{\log c_2}{\log c_0},\ c_3 > 0\right)$ olduğundan

$$|\beta - \gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^M \, c_0^{s_{l-1}\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{c_0^{s_l c_3}} \tag{3.2.48}$$

olur.

Şimdi,

$$\lambda > 1 \tag{3.2.49}$$

olacak şekilde bir λ sayısı alınsın (λ nın değeri daha sonra açıklanacaktır). $\{s_n\}$ ve $\{r_n\}$ dizilerinin tanımından $s_{n-1} \leq r_n$ olduğundan ve (3.2.3) den

$$\frac{s_n}{r_n} \leq \frac{s_n}{s_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{r_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} = +\infty$$

dır. Bu durumda

$$\mu > \lambda \tag{3.2.50}$$

olacak şekilde seçilen μ sayısı için bir $N_3 \in \mathbb{N}$ vardır, öyleki $n > N_3$ için

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} > \mu \tag{3.2.51}$$

dır (μ nün değeri daha sonra açıklanacaktır).

Şimdi

$$H_0 = \max\left(c_0^{s_{N_0}} \, , \, c_0^{s_{N_2}} \, , \, c_0^{s_{N_3}} \, , \left(\frac{2c_1}{c_5}\right)^{1/c_3} \right) \tag{3.2.52}$$

alarak

$$H(\gamma) > H_0 \tag{3.2.53}$$

koşulunu sağlayan herhangi bir γ cebirsel sayısı için

$$c_0^{s_{n-1}} \leq H(\gamma) < c_0^{s_n} \tag{3.2.54}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizliği sağlayan yalnız bir tane n indisi vardır: $c_0 > 1$ ve $\{ s_l \}$ monoton artan olduğundan $\lim_{l \to \infty} c_0^{s_l} = +\infty$ dur. Bundan dolayı $c_0^{s_l} > H(\gamma)$ olacak şekilde sonsuz sayıda l indisi vardır, (3.2.52) ve (3.2.53) den $c_0^{s_l} \leq H(\gamma)$ olacak şekilde de l indisleri vardır, fakat $\lim_{l \to \infty} c_0^{s_l} = +\infty$ olduğundan bu l indisleri sonlu sayıdadır. Sonlu sayıdaki bu l indislerinin maksimumu $n-1$ alınabilir. Bu durumda $c_0^{s_{n-1}} \leq H(\gamma) < c_0^{s_n}$ olur ($H(\gamma) < c_0^{s_n}$ dır, aksi olsaydı, yani $H(\gamma) \geq c_0^{s_n}$ olsaydı, bu durum $n-1$ in maksimum olması ile çelişki oluştururdu, dolayısıyla $H(\gamma) < c_0^{s_n}$ dir). Şimdi (3.2.54) eşitsizliğini sağlayan bir tek n indisi olduğunu gösterelim: (3.2.54) ün iki çözümü n_1 ve n_2 olsa,

$$\left.\begin{array}{l} c_0^{s_{n_1}-1} \le H(\gamma) < c_0^{s_{n_1}} \\ c_0^{s_{n_2}-1} \le H(\gamma) < c_0^{s_{n_2}} \end{array}\right\} \begin{array}{lll} c_0^{s_{n_1}-1} \le H(\gamma) < c_0^{s_{n_2}} & \Rightarrow n_1 - 1 < n_2 & \Rightarrow n_1 \le n_2 \\ c_0^{s_{n_2}-1} \le H(\gamma) < c_0^{s_{n_1}} & \Rightarrow n_2 - 1 < n_1 & \Rightarrow n_2 \le n_1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow n_1 = n_2$$

elde edilir.

(3.2.52), (3.2.53) ve (3.2.54) den

$$\left.\begin{array}{l} H(\gamma) > H_0 \\ c_0^{s_n} > H(\gamma) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_0^{s_n} > \max\left(c_0^{s_{N_0}} \, , \, c_0^{s_{N_2}} \, , \, c_0^{s_{N_3}} \right)$$

olur, $c_0 > 1$ ve $\{ s_n \}$ dizisi monoton artan olduğundan

$$s_n > \max(s_{N_0}, s_{N_2}, s_{N_3}) \quad \Rightarrow \quad n > \max(N_0, N_2, N_3) \tag{3.2.55}$$

dır.

(3.2.50), (3.2.51) ve (3.2.55) den

$$s_{n-1} < \frac{s_n}{\lambda} \tag{3.2.56}$$

olur. Üstelik (3.2.49) dan $\frac{1}{\lambda} < 1$ olduğundan

$$\frac{s_n}{\lambda} < s_n \tag{3.2.57}$$

dır. Bu durumda $\left[c_0^{s_{n-1}} , c_0^{s_n} \right)$ aralığı $\left[c_0^{s_{n-1}} , c_0^{s_n/\lambda} \right)$ ve $\left[c_0^{s_n/\lambda} , c_0^{s_n} \right)$ olacak şekilde iki alt aralığa bölünür. O halde (3.2.54) koşulunu sağlayan $H(\gamma)$ aşağıdaki iki alt aralıktan birine aittir:

I) $c_0^{s_{n-1}} \le H(\gamma) < c_0^{s_n/\lambda}$,

II) $c_0^{s_n/\lambda} \le H(\gamma) < c_0^{s_n}$.

I). Durum (3.2.48) de $l=n$ alınıp I) deki eşitsizlikler kullanılarak

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M+\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{H(\gamma)^{\lambda c_3}} \tag{3.2.58}$$

elde edilir.

$$\lambda := \frac{M+\tau_1(M-1)}{c_3}+1 \tag{3.2.59}$$

alınırsa

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{1}{H(\gamma)^{M+\tau_1(M-1)}}\left\{c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}\right\};\;\; H(\gamma)>H_0 \tag{3.2.60}$$

olur. (3.2.52) ve (3.2.53) den

$$H(\gamma)>\left(\frac{2c_1}{c_5}\right)^{1/c_3} \;\Rightarrow\; \frac{c_5}{2}-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}>0 \;\Rightarrow\; c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}>\frac{c_5}{2}>0 \tag{3.2.61}$$

dır. Bu durumda (3.2.60) ve (3.2.61) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^{M+\tau_1(M-1)}}\;;\;\; H(\gamma)>H_0 \tag{3.2.62}$$

elde edilir.

II). Durum (3.2.48) de $l=n+1$ alınıp II) deki eşitsizlikler kullanılarak

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{H(\gamma)^{\frac{s_{n+1}}{s_n}c_3}} \tag{3.2.63}$$

olur, burada (3.2.51) in kullanılmasıyla

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}} - \frac{c_1}{H(\gamma)^{\mu c_3}} \tag{3.2.64}$$

elde edilir.

$$\mu := \frac{M+\lambda\tau_1(M-1)}{c_3}+1 \tag{3.2.65}$$

alınırsa, (3.2.64) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{1}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}\left\{c_5-\frac{c_1}{H(\gamma)^{c_3}}\right\}\ ;\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.2.66}$$

elde edilir. (3.2.61) den

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^{M+\lambda\tau_1(M-1)}}\ ;\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.2.67}$$

bulunur.

(3.2.49) dan $M+\lambda\tau_1(M-1)>M+\tau_1(M-1)$ olduğundan I) durumunda da (3.2.67) geçerli olur. O halde $x=M+\lambda\tau_1(M-1)$ alınırsa her iki durumda da

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_5/2}{H(\gamma)^{x}}\ ;\ H(\gamma)>H_0 \tag{3.2.68}$$

elde edilir ($M>t$ olduğundan $x>t$ dir).

5°) de β nın bir U^* sayısı olduğu gösterildiğinden β cebirsel sayı değildir, böylece γ cebirsel sayı olduğundan $\gamma\neq\beta$ dır. O halde $s\leq t-1$ ve $H(\gamma)\leq H_0$ olacak şekildeki tüm γ lar için

$$w_{t-1}^*(H_0,\beta)=\min_{\substack{s\leq t-1\\ H(\gamma)\leq H_0\\ \gamma\neq\beta}}\left\{|\beta-\gamma|_p\right\}\leq|\beta-\gamma|_p \tag{3.2.69}$$

dir. $H(\gamma)\geq 1$ ve $x>t\geq 2$ olduğundan $H(\gamma)^x\geq 1$ dır, böylece $\frac{1}{H(\gamma)^x}\leq 1$ olur. Bu durumda (3.2.69) dan,

$$|\beta-\gamma|_p \geq w_{t-1}^*(H_0,\beta) \geq \frac{w_{t-1}^*(H_0,\beta)}{H(\gamma)^x}\,; \quad s \leq t-1,\ H(\gamma) \leq H_0 \tag{3.2.70}$$

dır. O halde, (3.2.68) ve (3.2.70) den

$$c_6 = \min\left(\frac{c_5}{2},\ w_{t-1}^*(H_0,\beta)\right) \tag{3.2.71}$$

alınırsa, $s \leq t-1$ ve $H(\gamma)=1,\ 2,\ldots$ için

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_6}{H(\gamma)^x} \tag{3.2.72}$$

elde edilir. (3.2.72) den $s \leq t-1$ ve H herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $H(\gamma) \leq H$ olacak şekildeki tüm γ cebirsel sayıları için

$$|\beta-\gamma|_p \geq \frac{c_6}{H(\gamma)^x} \geq \frac{c_6}{H^x} \tag{3.2.73}$$

olur ve

$$w_{t-1}^*(H,\beta) = \min_{\substack{s \leq t-1 \\ H(\gamma)\leq H \\ \gamma\neq\beta}} \left\{ |\beta-\gamma|_p \right\} \tag{3.2.74}$$

olduğundan,

$$w_{t-1}^*(H,\beta) \geq \frac{c_6}{H^x}\,; \quad \text{tüm } H \text{ lar için} \tag{3.2.75}$$

elde edilir. (3.2.75) den

$$\frac{-\log(w_{t-1}^*(H,\beta))}{\log H} \leq x - \frac{\log c_6}{\log H} \tag{3.2.76}$$

dır, buradan da

$$w_{t-1}^*(\beta) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{-\log(w_{t-1}^*(H,\beta))}{\log H} \leq x \tag{3.2.77}$$

elde edilir. O halde $\mu^*(\beta)$ nın tanımından

$$\mu^*(\beta) > t-1 \quad \text{yani} \quad \mu^*(\beta) \geq t \tag{3.2.78}$$

dir.

(3.2.43) ve (3.2.78) den

$$\mu^*(\beta) = t,\ t > 1 \tag{3.2.79}$$

dir. Diğer bir deyişle $\beta \in U_t^*$ dır. O halde 6)-a) ve b) durumlarının her ikisinde de $\beta \in U_t^*$ olur, böylece $\beta \in U_t$ dir.

3.3. ÖRNEKLER

Örnek 3.3.1. Teorem 3.1.1'deki c_h katsayılarının tümü rasyonel sayı ise $A_n = 1$, Teorem 3.2.1'deki c_h katsayıların tümü tam cebirsel sayı ise $A_n = 1$ olur. Bu durumda Teorem 3.1.1'deki (3.1.5) ve Teorem 3.2.1'deki (3.2.5) koşulu kendiliğinden sağlanır.

Örnek 3.3.2. p sabit bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}_p$ de,

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$$

$$P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} z^h, \qquad \begin{array}{l} s_k = (k+1)^k \ \ ,\ k = 0, 1, \ldots \\ r_k = (k+1)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots \end{array}$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş boşluk serisini göz önüne alalım. Burada

$(k+1)^{k-1} < (k+1)^k$ olduğundan $r_k < s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$k+1 < k+2$ olduğundan $(k+1)^k < (k+2)^k$ olup $s_k \leq r_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$

dır. Ayrıca $A_n = 1$ ve $R = 1$ dir. Üstelik

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{(n+1)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{r_n}{s_{n-1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(1+\frac{1}{n})^{n-1}=e<+\infty$$

olup Teorem 3.2.1'nin koşulları sağlanır. O halde $\alpha=p\ (\in\mathbb{Q})$ alınırsa

$$|\,p\,|_p=\frac{1}{p}<R$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}F(p)&=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}}p^h\right)\\&=p+(p^2+p^3)+(p^9+p^{10}+\ldots+p^{16})+\ldots\end{aligned}$$

olmak üzere $F(p)\in U_1$ dir.

Örnek 3.3.3. p sabit bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}_p$ de,

$$F(z)=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z)$$

$$P_k(z)=\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}}c_h z^h,\qquad c_h=\begin{cases}0\ , & r_n<h<s_n\,,n=1,2,\ldots\\ \sqrt{p}\ , & \text{diğer durumlarda}\end{cases}\ ,\quad \begin{aligned}s_k&=(k+1)^k\ ,\ k=0,1,\ldots\\ r_k&=(k+1)^{k-1},\ k=1,2,\ldots\end{aligned}$$

şeklinde verilen genelleştirilmiş boşluk serisini göz önüne alalım. Burada

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|p^{1/2}\right|_p}}=1$$

dir. Üstelik Teorem 3.2.1'in diğer koşulları sağlanır. O halde $\alpha=p\ (\in\mathbb{Q})$ alınırsa

$$|\,p\,|_p=\frac{1}{p}<R$$

olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} \sqrt{p}\, p^h\right) \\
&= \sqrt{p}\, p + (\sqrt{p}\, p^2 + \sqrt{p}\, p^3) + (\sqrt{p}\, p^9 + \sqrt{p}\, p^{10} + \ldots + \sqrt{p}\, p^{16}) + \ldots \\
&= p^{3/2} + (p^{5/2} + p^{7/2}) + (p^{19/2} + p^{21/2} + \ldots + p^{33/2}) + \ldots
\end{aligned}
$$

olmak üzere $F(p) \in U_t \quad (t \le 2)$ dir, burada yeterli derecede büyük n ler için $\deg(\beta_n) = t$ dir ($\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(p)$).

$$
\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(p) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} \sqrt{p}\, p^h\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} p^{(1+2h)/2}\right)
$$

dır. h pozitif tam sayı olduğundan $\frac{1+2h}{2}$ daima tam sayı olmayan bir pozitif rasyonel sayıdır. O halde, p sabit bir asal sayı olduğundan, $P_k(p) \notin \mathbb{Q}$ dur, böylece $P_k(p) \in \mathbb{Q}^+(\sqrt{p}) \setminus \mathbb{Q} \quad (k = 0, 1, \ldots)$ dır. $\beta_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(p)$ olduğundan $\beta_n \in \mathbb{Q}^+(\sqrt{p}) \setminus \mathbb{Q}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olur. O halde $\deg(\beta_n) = 2$ olup $F(p) \in U_2$ elde edilir.

Örnek 3.3.4. Yakınsaklık dairesi üzerindeki cebirsel sayılar için teorem doğru olmayabilir. Örneğin, p sabit bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}_p$ de

$$
F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k!+k} z^{k!}
$$

alınırsa,

$$
R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k!]{\left| p^{k!+k} \right|_p}} = p
$$

dır ve Teorem 3.1.1'in koşulları sağlanır. Bu durumda $\alpha = \frac{1}{p}$ alınırsa $|\alpha|_p = \left|\frac{1}{p}\right|_p = p = R$ olur. Böylece

$$F(\frac{1}{p}) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k!+k} (\frac{1}{p})^{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$$

elde edilir. O halde $F(\frac{1}{p})$ cebirseldir. Bundan dolayı, daima, $|\alpha|_p < R$ $(R < +\infty)$ alınmalıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.2.1 de ifade edilen $\{r_n\}$ ve $\{s_n\}$ negatif olmayan tam sayı dizileri için

$$s_{n-1}=r_n \quad (n=1,\,2,\,\ldots)$$

alınırsa basit boşluk serisi elde edilir ve

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{r_n} z^{r_n} \quad (c_{r_n}\neq 0), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=+\infty$$

olur. O halde aşağıdaki ifadeler elde edilir:

i) Teorem 3.1.1'de göz önüne alınan derecesi m olan α cebirsel argümanının eşlenikleri için

$$\left|\alpha^{\{i\}}\right|_p \neq \left|\alpha^{\{j\}}\right|_p \quad (i\neq j,\ 1\leq i,\, j\leq m)$$

olursa Zeren [5] tarafından verilen teorem elde edilmektedir[16)].

ii) Derecesi c olan sonsuz çokluktaki c_h cebirsel katsayısı ile Teorem 3.2.1, Zeren [5] tarafından verilen teoreme karşılık gelmektedir[17)].

Bu çalışmanın ardından hem Teorem 3.1.1 hem de Teorem 3.2.1 i özel hal olarak içeren tek bir teorem verilip verilemeceği araştırılabilir.

---

16) Bakınız [5]; §2, Teorem 1.
17) Bakınız [5] §2, Teorem 2.

Diğer bir araştırma konusu; $\mathbb{Q}$ daki p-adik değerlendirme sonlu genişlemelere uzatılabiliyor, fakat p-adik değerlendirmenin sonlu olmayan genişlemelere uzatılmasının nasıl olduğudur. Bu sorunun cevabı verildikten sonra bu sonlu olmayan genişleme üzerinde Mahler sınıflandırmasının nasıl olduğu araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **COHN, H.**, 1946, Note on almost algebraic numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52, 1042-1045.

[2] **ŞENKON, H.**, 1977, p-adik alanda bazı kuvvet serilerinin değerlerinin transandantlığı, *Silivri'de yapılan 2. yurtiçi matematikçiler toplantısı bildiri kitabı,* 15-21.

[3] **MAHLER, K.**, 1965, Arithmetic Properties of Lacunary Power Series with Integral Coefficients, *Journal of the Australian Math. Soc.*, 5, 56-64.

[4] **BRAUNE, E.**, 1977, Über arithmetische Eigenschaften von Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, *Monatshefte für Math.*, 84, 1-11.

[5] **ZEREN, B. M.**, 1980, Über einige komplexe und p-adische Lückenreihen mit Werte aus den Mahlerschen Unterklassen U_m, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 45, 89-130.

[6] **ZEREN, B. M.**, 1988, Über die natur der transzendenz der Werte einer art verallgemeinerter Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten für algebraische Argument, *Bull. Tech. Univ. Istanbul,* 41, 569-588.

[7] **MAHLER, K.**, 1932, Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus I, *J. Reine angew. Math.*, 166, 118-136.

[8] **SCHNEIDER, T.**, 1957, *Einführung in die Transzendenten Zahlen*, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg.

[9] **LEVEQUE, W. J.**, 1953, Mahler's U-Numbers, *J. London Math. Soc.*, 28, 220-229.

[10] **KOKSMA, J. F.**, 1939, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durc algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.*, 48, 176-189.

[11] **WIRSING, E.**, 1961, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J. reine angew. Math.*, 206, 67-77.

[12] **MAHLER, K.**, 1961, Über eine Klassen-Einteilung der p-Adischen Zahlen, *Mathematica Leiden*, 3, 177-185.

[13] **SCHLICKEWEI, H. P.**, 1981, p-Adic T Numbers do Exist, *Acta Arith.*, XXXIX, 181-191.

[14] **LONG, X. X.**, 1989, On Mahler’s Classification of p-adic Numbers, *Pure Apply. Math.*, 5, 73-80.

[15] **İÇEN, O.Ş.**, 1973, Anhang zu den Arbeiten “Über die Funktionswerte der p-adisch elliptischen Funktionen I und II”, *İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A*, 38, 25-35.

[16] **MORRISON, J. F.**, 1978, Approximation of p-Adic Numbers by Algebraic Numbers of Bounded Degree, *J. Number Theory*, 10, 334-350.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Çankırı'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2001 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olup, aynı yıl içerisinde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Aralık 2001'de Celal Bayar Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Eylül 2003'de yüksek lisans eğitimini tamamladı. Nisan 2005'de İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Halen İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir. Evlidir.