İSTANBUL
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR BANACH UZAYI SINIFI ÜZERİNDE, SONSUZ BOYUTLU EKONOMİLERDEKİ TALEP FONKSİYONLARININ VARLIĞININ BİR KARAKTERİZASYONU

Araş.Gör. Kadir MERSİN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Tunç MISIRLIOĞLU

İSTANBUL

Bu çalışma 31/07/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Tez Jürisi</u>

Yrd. . Doç. Dr. Tunç Mısırlıoğlu (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof Dr. Erhan Güzel
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. İ.Müfit Giresunlu
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Bedriye M. Zeren
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Erhan Çalışkan
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince danışmanlığımı yapan, gerek bilimsel, gerekse de manevi desteğini benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Tunç MISIRLIOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında her türlü hoşgörü ve desteği eksik etmeyen sevgili aileme ve en başta Fulya Çelik olmak üzere, Emrah Balcı, Sevinç Yanık, Serhat Çakar, Burkan Yıldıran, Onur Kahraman, Murat Aktaş, Mine Toktaş ve de Erdem Altuntaş 'a teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran 2009 Kadir MERSİN

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\succ$	: Kesin monoton tercih bağıntısı
$\succcurlyeq$	: Tercih bağıntısı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar uzayı
$\mathbb{R}^m$	: m-boyutlu reel sayılar uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsayan diziler uzayı
c_{00}	: Sonlu sayıda terimi sıfırdan farklı olan diziler uzayı
$B_w(f)$	: f ve w vektörlerine karşılık gelen bütçe kümesi
$x_w(f)$	: f ve w vektörlerine karşılık gelen talep eşlemesi
$x+$	: x vektörünün pozitif kısmı
x^-	: x vektörünün negatif kısmı
L^+	: L nin pozitif konisi
X^*	: X uzayının duali
$\sigma(X, X^*)$	: X in zayıf topolojisi
$\sigma(X^*, X)$	: X in zayıf* topolojisi yük
w*-lim x_α	: $\{x_\alpha\}$ ağının zayıf* limiti
$x \wedge y$	: {x,y} kümesinin infimumu
$x \vee y$	: {x,y} kümesinin supremumu
$L(X,Y)$	:X ten Y ye tüm lineer operatörler uzayı
$L_b(X,Y)$	: X ten Y ye tüm sıra sınırlı lineer operatörler uzayı

**BİR BANACH UZAYI SINIFI ÜZERİNDE
SONSUZ BOYUTLU EKONOMİLERDEKİ TALEP FONKSİYONLARININ
VARLIĞININ BİR KARAKTERİZASYONU**

ÖZET

Sıralı vektör uzaylarında (örneğin Riesz uzaylarında) ve mikro-ekonomi teorisinde birbiri ile çakışan iki önemli kavram vardır. Bunların ilki, lineer fonksiyoneller tarafından tanımlanan koni için taban kavramı ve diğeri de bütçe kümesi kavramıdır. Ekonomi teorisinde herhangi bir bütçe kümesi üzerinde bir tüketicinin tercih bağıntısının maksimizasyonu, ürünün herhangi bir ücret vektöründe tercih edilen vektörlerini gösteren talep fonksiyonunu verir. Sonlu boyutlu ekonomilerin aksine, sonsuz boyutlularda, talep fonksiyonunun varlığı henüz bilinmemektedir.

Bu çalışmada, sonsuz sayıda ürüne sahip talep fonksiyonlarının ve talep eşlemelerinin varlığına dayanarak refleksif uzayların bir karakterizasyonu üzerine çalışılmış ve bununla ilgili çeşitli örnekler ve sonuçlar sunulmuştur.

A CHARACTERIZATION FOR THE EXISTENCE OF DEMAND FUNCTIONS IN THE INFINITE DIMENSIONAL ECONOMICS ON A CLASS OF BANACH SPACES

SUMMARY

In the theory of ordered spaces (for instance in Riesz spaces) and in microeconomic theory two important notions, the notion of the base for a cone which is defined by a continuous linear functional and the notion of the budget set are equivalent. In economic theory the maximization of the preference relation of a consumer on any budget set defines the demand correspondence which at any price vector indicates the preferred vectors of goods and this is one of the fundamental notions of this theory. Contrary to the finite-dimensional economies, in the infinite-dimensional ones, the existence of the demand correspondence is not ensured.

In this work, we study on the existence of demand functions with an infinite number of commodities and on a characterization of reflexive spaces based on the existence of the demand correspondence. We also present several examples and results about this existence.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Sonlu boyutlu rekabete dayanan ekonomilerde, kesin pozitif fiyat vektörlerine karşılık gelen bütçe kümeleri daima sınırlıdır ve dolayısıyla kompakttır. Şu halde, herhangi bir sürekli tercih bağıntısı $\succeq$, maksimumunu herhangi bir bütçe kümesi üzerinde alır. Bundan dolayı, herhangi bir sürekli tercih bağıntısının tek değerli ya da küme değerli talep eşlemesi daima mevcuttur ve bu varoluş bu teorinin en temel özelliklerinden biridir. Buna karşın, sonsuz boyutlu rekabete dayalı ekonomilerde talep eşlemesinin varlığı garanti edilememektedir.

Bir X normlu uzayının kapalı bir P konisi üzerinde tanımlı $\succeq$ tercih bağıntısının, P nin sabit bütçe kümeleri üzerinde maksimumunu aldığı ya da alamadığı bilinen birçok örnekler mevcuttur. Fakat $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesinin var olduğuna dair, ki bunun anlamı her hangi bir bütçe kümesi üzerinde maksimal elemanın var olmasıdır,sürekli $\succeq$ tercih bağıntısına sahip sonsuz boyutlu P kapalı konisi örneği bilinmektedir.

Bu çalışmada, sonsuz sayıda ürüne sahip talep fonksiyonlarının varlığı üzerine çalışılmıştır. Buna bağlı olarak bu çalışmada I. A.Polyrakis'in makalesi [8] incelenmiş ve orada sunulan bazı bilgilere dayanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Sözü edilen makalede, refleksif uzaylarda (ve Banach uzaylarının bazı diğer sınıflarında) sadece iki tür kapalı konilerin sınıflarının varolduğu gösterilmiştir: Bütçe kümesi sınırlı olan ve sınırlı olmayan koniler. Bu dikotomi sonucuna dayanarak, I. A. Polyrakis, bütçe kümesi sınırlı olan kapalı konilerde talep eşlemesinin varolduğunu ve bunun üst yarı sürekli olduğunu göstermiştir. Ayrıca aynı makalede talep eşlemelerinin varlığına dayanan refleksif uzayların bir karakterizasyonu verilmiştir. Bir başka ifadeyle X refleksif uzayının bir karakterizasyonu, X in lineer fonksiyonellerinin P konisine kısıtlanışı sürekli olacak şekilde P nin tabanlarına dayanarak verilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünün ilk üç kısmında, kullanılacak olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiş olup, dördüncü kısımda koniler için tabanlar tanımlanmış ve tüm reel değerli $\boldsymbol{s}$ dizi uzayı üzerinde kesin pozitif bir lineer fonksiyonelin tanımlanamayacağı ve dolayısıyla $\boldsymbol{s}$ nin herhangi bir konisinin tabanının mevcut olmadığı gösterilmiştir. Beşinci kısımda koniler için dikotomi sonucu verilmiştir. Altıncı kısımda ise talep fonksiyonları açıklanmış ve bunların varlığına dair bazı sonuçlar verilmiştir. Bunlara dayanarak rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün uzayının sonlu boyutlu olması durumunda tüketim kümesi P kapalı konisi olan, bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesinin varlığı ispatlanmış ve bu sonuca dayanarak ürün uzayı sonsuz boyutlu X refleksif Banach uzayı ve tüketim kümesi $\sigma(X, X^*)$-kapalı koni alındığında bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesine sahip olması için **Önerme 2.7.7.** nin sağlanmasının gerektiği ispatlanmıştır. Bu bölümün sekizinci ve son kısmında lineer tercihler ve fayda fonksiyonları incelenmiştir ve fayda fonksiyonlarından yararlanarak talep eşlemesinin mevcut olmadığına dair bir örnek verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1 KAMALAR VE KONİLER

Tanım 2.1.1. [4, Tanım 1.1.] Bir vektör uzayının boştan farklı W alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $W + W \subseteq W$

(ii) Her $\alpha \geqslant 0$ için $\alpha W \subseteq W$,

Bu durumda W alt kümesine *kama(wedge)* denir. W konveks bir kümedir. Dahası W kama ise $W \cap (-W)$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.2. [4, Tanım 1.2.] Bir V vektör uzayının boştan farklı P alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $P + P \subseteq P$

(ii) Her $\alpha \geqslant 0$ için $\alpha P \subseteq P$

(iii) $P \cap (-P) = \{0\}$

Bu durumda, P alt kümesine *koni* denir. P koni ve $x \in V$ olmak üzere, $x + P$ kümesine *köşeli koni* denir.

Her koni bir kamadır fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin, her alt uzay bir kama olmasına rağmen sadece aşikar vektör uzayları konidir.

X kümesi üzerinde $\geqslant$ bağıntısı yansımalı, geçişmeli ve ters simetrik ise *sıralama bağıntısıdır.* Bu durumda X kümesine *kısmi sıralanmış küme* denir.

Bir L vektör uzayı üzerindeki $\geqslant$ sıralama bağıntısı $x, y \in L$ ve $x \geqslant y$ olmak üzere;

(i) Her $z \in L$ için $x + z \geqslant y + z$,

(ii) Her $\alpha \geqslant 0$ için $\alpha x \geqslant \alpha y$,

koşullarını sağlıyorsa bu sıralama bağıntısına *vektör sıralaması* denir. L vektör uzayına da *sıralı vektör uzayı* denir ve $(L, \geqslant)$ ile gösterilir. $(L, \geqslant)$ sıralı vektör uzayında $x \geqslant 0$ koşulunu sağlayan herhangi vektöre *pozitif vektör* denir. Bu vektörlerin oluşturduğu $L^+ = \{x \in L : x \geqslant 0\}$ kümesine de L *nin pozitif konisi* denir.

X vektör uzayının herhangi bir P konisi, X üzerinde bir vektör sıralaması tanımlar. Bu sıralama

$$x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \in P$$

özelliğine sahiptir. Benzer tanım $x \geqslant y \Leftrightarrow x \in y + P$ veya $y \in x - P$ şeklinde de verilebilir.

Vektör sıralamaları ve koniler arasında bire-bir bir eşleme vardır. Yani, X vektör uzayının her P konisi X üzerinde bir sıralama bağıntısı belirler, öyle ki bu uzayın pozitif vektörleri P nin elemanlarıdır. Eğer X uzayı üzerindeki sıralama bağıntısının P konisi tarafından üretildiğini belirtmek istersek $\geqslant_P$ şeklinde yazarız. Sadece koniler değil, kamalar da sıralama belirtirler. Bir kamanın tanımladığı sıralamaya *ön sıralama* denir ve sadece yansımalı ve geçişmeli bir bağıntı belirtir.

Lemma 2.1.3. [**4, Lemma 1.4.**] Bir vektör uzayının boştan farklı W konveks alt kümesinin kama olması için gerek ve yeter koşul $W = V + P$ olacak şekilde V vektör alt uzayının ve P konisinin var olmasıdır. Dahası, aşağıdakiler gerçeklenir:

(i) $V = W \cap (-W)$ ve $P = \{0\} \cup (W \setminus V)$ ise V vektör alt uzayı ve P konisi $W = V + P$ eşitliğini gerçekler.

(ii) V vektör alt uzayı ve P konisi $W = V + P$ ve $V \cap P = \{0\}$ eşitliğini gerçeklesin. Bu durumda $V = W \cap (-W)$ sağlanır.

Tanım 2.1.4. [**4, Tanım 1.5.**] X vektör uzayının W kaması için $X = W - W$ eşitliği sağlanıyorsa W kamasına *üretendir* denir.

Lemma 2.1.5. [**4, Lemma 1.6.**] W kamasının X vektör uzayını üretmesi için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $y \geqslant_W x$ olacak şekilde $y \in W$ olmasıdır.

W, X vektör uzayının bir kaması olsun. Her $x \in X$ için $\lambda e \geqslant x$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı varsa $e \in W$ vektörüne *sıra-birim* denir. W sıra-birime sahipse üretendir. Dahası, $e \in W$ sıra-birim ise $\alpha > 0$ için αe ve her $x \in W$ için $e + x$ vektörleri de sıra-birimdir.

Lemma 2.1.6. [**4, Lemma 1.6.**] W, X vektör uzayının bir kaması olsun. $e \in W$ nin sıra-birim olması için gerek ve yeter koşul e nin W için iç nokta olmasıdır.

L sıralı vektör uzayı olmak üzere $x, y \in L$ için $x \leqslant y$ sağlansın. Bu durumda $[x, y] = \{z \in L : x \leqslant z \leqslant y\}$ kümesine *sıra-aralık* denir.Bu sıralı aralığı $[x, y] = (x + L^+) \cap (y - L^+)$ şeklinde de ifade edebiliriz.

Tanım 2.1.7. [**4, Tanım 1.8.**] A, L sıralı vektör uzayının her hangi bir alt kümesi olmak üzere, her $x, y \in A$ için $[x, y] \subseteq A$ koşulu sağlanırsa L vektör uzayına *sıra-konveks* denir.

L sıralı vektör uzayının bir A alt kümesinin her elemanından büyük olacak şekilde bir $x \in L$ mevcut ise A kümesine *üstten sınırlıdır* denir. Bu üst sınırların en küçüğüne *supremum* denir. Benzer şekilde A alt kümesinin her elemanından küçük olacak şekilde bir $x \in L$ mevcut ise A kümesine *alttan sınırlıdır* denir. Bu alt sınırların en büyüğüne *infimum* denir. Bir küme hem alttan hem de üstten sınırlı ise *sıra-sınırlıdır* denir.

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ sonlu kümesi için supremum ve infimum;

$$sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigvee_{i=1}^{n} x_i \;\; ; \;\; inf\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

şeklinde gösterilir. İki eleman için supremum ve infimum $sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde yazılır.

Kısmi sıralanmış bir kümenin $\{x_\alpha\}$ ağını alalım. $\alpha \geqslant \beta$ için $x_\alpha \geqslant x_\beta$ sağlanıyorsa bu ağa *artandır* denir ve $x_\alpha \uparrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \uparrow x$ ise $x_\alpha \uparrow$ ve $x = supx_\alpha$ anlamına gelir. Benzer şekilde $\alpha \geqslant \beta$ için $x_\alpha \leqslant x_\beta$ sağlanıyorsa bu ağa *azalandır* denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. $x_\alpha \downarrow x$ ise $x_\alpha \downarrow$ ve $x = infx_\alpha$ anlamına gelir.

Tanım 2.1.8. [**4, Tanım 1.14.**] L sıralı vektör uzayının boştan farklı her sonlu alt kümesi bir supremuma ve bir infimuma sahip ise L ye *Riesz uzayı* veya *vektör örgüsü* denir. Bir Riesz uzayının konisine *örgü konisi* denir. Benzer şekilde, P konisi tarafından sıralanan X vektör uzayı Riesz uzayı ise P konisine örgü konisi denir. Dolayısıyla L^+ pozitif konisinin örgü konisi olması için gerek ve yeter koşul L nin Riesz uzayı olmasıdır.

Bir sıralı vektör uzayının her üstten sınırlı artan ağı bir supremuma sahipse bu sıralı vektör uzayına *Dedekind tam* denir. Benzer şekilde, bir sıralı vektör uzayının her üstten sınırlı artan dizisi bir supremuma sahipse bu sıralı vektör uzayına σ *-Dedekind tam* denir.

X vektör uzayının pozitif konisi örgü konisi ise X üzerindeki $\geqslant$ sıralamasına *örgü sıralaması* denir.

Teorem 2.1.9. **[4,Teorem 1.16.]** X vektör uzayının P konisinin örgü konisi olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$ için $(x+P) \cap (y+P) = (z+P)$ olacak şekilde $z \in X$ elemanının mevcut olmasıdır.

Her Riesz uzayı için x ile bağlantılı olan üç vektör tanımlanabilir. x^+ vektörü x in pozitif kısmını, x^- ise negatif kısmını ve $|x|$ ise x in mutlak değerini gösterir. Bu üç vektör aşağıdaki formüller ile verilir:

$$x^+ = x \vee 0, \;\; x^- = (-x) \vee 0, \;\; |x| = x \vee (-x)$$

Teorem 2.1.10. **[4, Teorem 1.17.]** L Riesz uzayı olmak üzere, $u, v, w \in L$ için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $u + v \vee w = (u+v) \vee (u+w)$ ve $\lambda(u \vee v) = (\lambda u) \vee (\lambda v)$, $\lambda \geqslant 0$

ii) $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u-v|)$ ve $u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u-v|)$

iii) $u + v = u \vee v + u \wedge v$

iv) $u = u^+ - u^-$

Tanım 2.1.11. **[1]** L Riesz uzayı ve $A \subseteq L$ alt kümesi verilsin. $x, y \in L$ olsun. $|x| \leqslant |y|$ ve $y \in A$ için $x \in A$ oluyorsa A kümesine *katı küme* denir. Eğer buna ek olarak A bir vektör uzayı ise A ya L nin bir *ideali* denir.

Bir Riesz uzayının vektör alt uzayına da *Riesz Alt Uzayı* denir. Her ideal, bir Riesz alt uzayıdır.

S bir L Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$A = \{x \in L : \exists x_i \in S\, ve\, \lambda_i > 0\, (i = 1, \ldots, n), |x| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_i |x_i|\}$$

kümesine *S kümesi ile üretilen ideal* denir. Eğer ideal tek eleman tarafından üretilirse bu ideale *esas ideal* denir.

$A_x = \{y \in L : \exists\lambda > 0 \ni |y| \leqslant \lambda|x|\}$ kümesine x *ile üretilen ideal* denir.

$A_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-nx, nx] = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-x, x]$ dir.

Eğer $e > 0$ için $L_e = L$ oluyorsa e ye sıra-birimdir denir. Yani, her $u \in L$ ye karşılık öyle bir $\lambda > 0$ vardır ki $|u| \leqslant \lambda e$ sağlanır.

2.1.12 POZİTİF VE SIRA SINIRLI OPERATÖRLER

X ve Y vektör uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ operartörü;

(i) Her $x, y \in X$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$ koşulunu sağlıyorsa *toplanabilirdir* denir.

(ii) Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ koşulunu sağlıyorsa *homojendir* denir.

Bu iki koşulun sağlanması durumunda bu operatöre *lineer operatör* denir. $L(X, Y)$ ile X ten Y ye tüm lineer operatörler uzayını göstereceğiz. Benzer yapı sıralı vektör uzayları arasında da kurulabilir.

M ve L sıralı vektör uzayları olmak üzere $T : L \to M$ operatörü;

(i) Her $x \in L^+$ için $T(x) \geqslant 0$ sağlanıyorsa T operatörüne *pozitif* denir ve $T \geqslant 0$ ile gösterilir.

(ii) Her $x \in L^+$ için $T(x) > 0$ sağlanıyorsa T operatörüne *kesin pozitif* denir ve $T > 0$ ile gösterilir.

(iii) T operatörü L nin sıra sınırlı alt kümelerini M nin sıra sınırlı alt kümelerine götürüyorsa T operatörüne *sıra sınırlıdır* denir. L den M ye tüm sıra sınırlı operatörler uzayını $L_b(L, M)$ ile göstereceğiz. $L_b(L, M) \subseteq L(L, M)$ dir.

Lemma 2.1.13. [**4, Lemma 1.26**] L ve M sıralı vektör uzayları ve M Arşimedyan olsun. (yani $y \in M$, $x \in M^+$ ve $ny \leqslant x$ $hern = 1, 2, \ldots$ için $y \leqslant 0$ sağlansın.) Bu durumda $T : L^+ \to M^+$ toplanabilir operatörü için aşağıdakiler gerçeklenir:

(i)T operatörü L den M ye bir pozitif operatöre genişletilebilir.

(ii) T nin tüm L uzayına herhangi bir genişlemesi $L^+ - L^+$ üzerinde tek türlü belirlidir.

(iii)L^+ üreten koni ise T operatörü L den M ye bir pozitif operatöre genişletilebilir. Bu operatör tek türlü olarak belirlidir.

Tanım 2.1.14. L Riesz uzayı olmak üzere, Dedekind Tam $L_b(L, \mathbb{R})$ Riesz uzayına L nin sıra duali denir ve $L^{\sim}$ ile gösterilir.

2.2. VEKTÖR UZAYLARI

Tanım 2.2.1. τ, E vektör uzayı üzerinde bir topoloji olmak üzere,

$$E \times E \to E; (x, y) \longmapsto x + y$$

$$\mathbb{R} \times \mathrm{E} \to \mathrm{E}; (\lambda, \mathrm{x}) \longmapsto \lambda \mathrm{x}$$

fonksiyonları bu topolojide sürekli kalıyorsa τ topolojisine *lineer topoloji* denir. (E, τ) uzayına da *topolojik vektör uzayı* denir. Her τ lineer topolojisi E vektör uzayı üzerinde sıfırın bir komşuluğu için aşağıdaki koşulları sağlayan bir N tabanına sahiptir:

(i) Her $V \in N$ dengeli kümedir. Yani,

$|\lambda| \leqslant 1$, her $u \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda u \in V$ sağlanır.

(ii) Her $V \in N$ yutan kümedir. Yani,

Her$u \in E$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\lambda u \in V$ ve her $|\lambda| \leqslant \delta$ sağlanır.

(iii) Her $V \in N$ için, $W + W \subseteq V$ olacak şekilde $W \in N$ mevcuttur.

Tanım 2.2.2. $A \subseteq E$ alt kümesi için,

Her $u, v \in A$ ve $0 \leqslant \lambda < 1$ için $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$ koşulu gerçekleniyorsa, A kümesine *konveks küme* denir.

Bir vektör uzayında tanımlı bir lineer topoloji, sıfırın bir komşuluğunda tüm konveks kümeleri içeren bir tabana sahip ise bu topolojiye *yerel konveks topoloji* denir.

$\rho : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdakileri gerçeklesin;

i) Her $u \in E$ için $\rho(u) \geqslant 0$,

ii) Her $u, v \in E$ için $\rho(u+v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$,

iii) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $u \in E$ için $\rho(\lambda u) = |\lambda|\rho(u)$

Bu takdirde ρ fonksiyonuna *yarı norm* denir. E vektör uzayı üzerinde tanımlı yarı norm için $\{u \in E : \rho(u) \leqslant \epsilon, (\epsilon > 0)\}$ kümesine ρ nun sıfırdaki ϵ- *kapalı yuvarı* denir.

$V \subseteq E$ alt kümesinin yerel konveks topolojide sıfırın bir komşuluğu olması için $\{u \in E : \rho_{\alpha_m}(u) \leqslant \epsilon, m = 1 \ldots n\} \subseteq V$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ ve $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sonlu sayıda indis var olmalıdır.

A indis kümesi olmak üzere bu lineer topolojiye $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *yarı norm ailesi tarafından üretilen yerel konveks topoloji* denir.

Tanım 2.2.3. (E, τ) topolojik vektör uzayında tüm τ- sürekli fonksiyonları E^* ile gösterelim. Bu durumda, E^* a (E, τ) topolojik vektör uzayının *topolojik duali* denir.

Bu durumda, E vektör uzayı üzerinde tanımlı $\{\rho_f : f \in E^*\}$, $\rho_f(u) = |f(u)|$, $u \in E$, yarı norm ailesi tarafından üretilen yerel konveks topolojiye $\sigma(E, E^*)$ *-zayıf topolojisi* denir. $\sigma(E, E^*)$ -zayıf topolojisi E üzerindeki her $f \in E^*$ fonksiyonelinin sürekli olduğu en küçük yerel konveks topolojidir.

Benzer şekilde, $\{\rho_u : u \in E\}$, $\rho_u(f) = |f(u)|$, $f \in E^*$ yarınorm ailesi tarafından üretilen yerel konveks topolojiye $\sigma(E^*, E)$ *zayıf* topolojisi* denir.

Teorem 2.2.4.(James Teoremi)[4, Teorem 8.30.] Bir Banach uzayının boştan farklı zayıf kapalı ve sınırlı alt kümesinin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul her lineer, sürekli fonksiyonelin bu küme üzerinde maksimumunu almasıdır.

Teorem 2.2.5. [7, Teorem 2.14] X normlu uzay olmak üzere $\{x^*_\alpha\} \in X^*$ ağı zayıf* yakınsak ise $\|w^* - \lim_\alpha \{x^*_\alpha\}\| \leqslant \liminf_\alpha \|\{x^*_\alpha\}\|$ sağlanır.

Teorem 2.2.6. [7, Teorem 2.15] X normlu uzay, $\|.\|_a$ normu X^* üzerinde X^* ın orijinal normuna eşdeğer olsun ve $\{x^*_\alpha\} \in X^*$ zayıf* yakınsak ağı için $\|w^* - \lim_\alpha \{x^*_a\}\|_a \leqslant \liminf_\alpha \|\{x^*_\alpha\}\|_a$ sağlansın. Bu durumda X üzerinde X in orijinal normuna eş değer olacak şekilde $\|.\|_b$ normu vardır, öyle ki $\|.\|_a$, $(X, \|.\|_b)^*$ üzerinde dual normdur.

Tanım 2.2.7. X ve X^* vektör uzayları olmak üzere, $X \times X^*$ den $\mathbb{R}$ içine

$(x, x^*) \to \langle x, x^* \rangle$ bilineer fonksiyonu

i) $\langle x, x^* \rangle = 0 \ \forall x^* \in X^* \Rightarrow x = 0$

ii) $\langle x, x^* \rangle = 0 \ \forall x \in X \Rightarrow x^* = 0$

koşullarını sağlarsa, $\langle X, X^* \rangle$ ikilisine *dual ikili* denir.

τ yerel konveks topolojisi $(X, \tau)^* = X^*$ koşulunu sağlıyorsa, $\langle X, X^* \rangle$ dual ikilisi ile *uyumludur* denir.

Teorem 2.2.8. (Ayırma Teoremi) [1, Teorem 2.3.3.] $\langle X, X^* \rangle$ dual ikili, A ve B boştan farklı, ayrık konveks kümeler olsun. X üzerinde uyumlu, yerel konveks topolojide A veya B kümelerinden birinin içi boş değil ise her $a \in A$ ve her $b \in B$ için

$$\langle a, x^* \rangle \geqslant \langle b, x^* \rangle$$

olacak şekilde $x^* \in X^*$ mevcuttur.

Tanım 2.2.9 $A \subseteq X$, X vektör uzayının alt kümesi olmak üzere,

$$A^0 = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle \geqslant -1, her x \in A\}$$

kümesine *A kümesinin X deki kutbu* denir. Benzer şekilde, $A \subseteq X^*$ için A nın X^* daki kutbu;

$$A^0 = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle \geqslant -1, her x^* \in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.10 E Riesz uzayı ve E' , $E^\sim$ sıra dualinin ideali olsun ve E nin noktalarını ayırsın. Yani,

Her $x \neq 0$ için $T(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $T \in E^\sim$ mevcut olsun.

Eğer,

$$\langle x, x' \rangle = x'(x); \ her x \in E, \ her x' \in E'$$

gerçekleniyorsa $\langle E, E' \rangle$ dual ikilisine *Riesz Dual İkilisi* denir. Örneğin, $\langle l_p, l_q \rangle$ ikilisi $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için Riesz Dual ikilisidir.

E, $E^{\sim}$ sıra dualinin Riesz Alt uzayı ise $\langle E, E' \rangle$ dual ikilisine *örgü dual ikilisi* denir.

2.3 DEĞİŞİM EKONOMİSİ

Bu kısımda rekabete dayalı değişim ekonomileri için bir takım ön bilgiler verilmektedir. Buradaki örneklerde geçen çarpım, $p.x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.p_k$, $p = (p_1, p_2, \ldots), x = (x_1, x_2, \ldots)$, şeklindedir.

Tanım 2.3.1. X kümesi üzerinde $\succeq$ *bağıntısı* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili bağıntıdır.

i) Her $x \in X$ için $x \succeq x$,

ii) Her $x, y, z \in X$ için $x \succeq y$ ve $y \succeq z$ ise $x \succeq z$

iii) Her $x, y \in P$ için ya $x \succeq y$ ya da $y \succeq x$

Tanım 2.3.2. $\langle X, X^* \rangle$ dual ikilisi için X ürün uzayını; X^* ise fiyat uzayını temsil etsin. m tane müşteri için değişim ekonomisi;

$\mathcal{E} = (\langle X, X^* \rangle, (X_1, \succeq_1, \omega_1), \ldots, (X_m, \succeq_m, \omega_m))$ şeklinde tanımlanır. Burada her "i" müşterisi için $X_i \subseteq X$ onun tüketim kümesi, $\succeq_i$ tercih bağıntısı ve $\omega_i \in X_i$ başlangıç miktarı, yani hali hazırda sahip oldukları mal miktarlarıdır.

Toplam mal miktarını ω ile gösterirsek $\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$ eşitliği geçerlidir. Değişim ekonomisinde hisse; $(x_1, \ldots, x_m)$ vektörüdür. Her i müşterisi için $x_i \in X_i$ ve $\omega = \sum_{i=1}^{m} x_i$ sağlanır.

Değişim ekonomisinin çeşitlerini aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

(i) $\langle L, L' \rangle$ Riesz dual ikilisi ve her tüketicinin tüketim kümesi L^+ pozitif konisi ise bu ekonomiye *Riesz Ekonomisi* denir.

$\langle l_2, l_2 \rangle$ ikilisi Riesz dual ikilisidir. Tüketim konisini l_2^+ alırsak bu ikili bir Riesz Ekonomisi belirler.

(ii) $\langle L, L' \rangle$ örgü dual ikilisi ve her tüketicinin tüketim kümesi L^+ pozitif konisi ise bu ekonomiye *Örgü Ekonomisi* denir.

(iii) $\langle L, X^* \rangle$ ikilisinde sadece ürün uzayı Riesz uzayı ve her tüketicinin tüketim kümesi L^+ pozitif konisi ise bu ekonomiye *Riesz Ürün Ekonomisi* denir

(iv) $\langle X, L' \rangle$ ikilisinde sadece fiyat uzayı Riesz uzayı ve her tüketicinin tüketim kümesi L^+ pozitif konisi ise bu ekonomiye *Riesz Fiyat Ekonomisi* denir.

Tanım 2.3.3. Değişim ekonomisinde $\mathbb{R}^m_+$ tüketim kümesi olmak üzere $p \in \mathbb{R}^m$ fiyatı için tanımlı bütçe kümesi

$$B_\omega(p) = \{x \in \mathbb{R}^m_+ : \mathrm{p.x} \leqslant \mathrm{p}.\omega\}$$

şeklinde verilir. $p.\omega$ pozitif sayısına *refah sevitesi* denir ve w ile gösterilir. Fiyat vektörünün bileşenleri negatif değildir. p fiyat vektörüne karşılık gelen bütçe kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $p > 0$ olmasıdır.

Gerçekten, p fiyat vektörünün belirlediği bütçe kümesinin sınırlı olduğunu kabul edelim, bu durumda bu vektörün tüm bileşenlerinin pozitif olduğunu göstermemiz gerekir. Bazı i indisleri için $p_i = 0$ olsun. bu durumda $n.e_i \in B_\omega(p)(i = 1 \dots m)$ dir. Çünkü $p.e_i = 0$ bu durumda bütçe kümesi sınırsızdır sonucu çıkar. Tersine, $p > 0$ olsun. Bu durumda $\omega \in \mathbb{R}^m$ alalım. $r = min\{p_1 \dots p_m\}$ olsun. $x \in B_\omega(p)$ ise

$$0 \leqslant p_i.x_i \leqslant \sum_{k=1}^{m} x_k.p_k = p.x \leqslant p\omega \Rightarrow 0 \leqslant x_i \leqslant \frac{p.x}{p_i} \leqslant \frac{p.\omega}{r} \leqslant \infty$$

Dolayısıyla bütçe kümesi sınırlıdır.

Bütçe kümesi kapalı olduğundan $p > 0$ olması kümenin kompaktlığını sağlar.

2.4 KONİLER İÇİN TABANLAR

Tanım 2.4.1. [8] X normlu uzay, X^* bu uzayın norm duali olsun. X in boştan farklı bir konveks P alt kümesi için:

i) $P + P \subseteq P$

ii) Her $\lambda \geqslant 0$ için $\lambda P \subseteq P$

iii) $P \cap (-P) = 0$

koşulları sağlansın. Bu durumda P alt kümesine X in bir konisi denir.
$X = P - P$ ise P konisine X i üreten koni denir. $P^0 = \{f \in X^* : f(x) > 0; x \in P\} \subseteq X^*$ konisine de P nin X^* daki dual konisi diyceğiz.

X, P konisi tarafından sıralansın. Yani $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$ gerçeklensin. Bu durumda $x < y$ için $[x, y] = \{z \in X : x < z < y\}$ kümesine sıra-aralık denir. $x \in P$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} n[-x, x] = X$ ise x, X için bir sıra-birimdir.

Tanım 2.4.2. [**8**] X^* , P^0 tarafından sıralansın. Bu durumda her $x \in P$ için $f(x) \geqslant 0$ sağlanırsa f fonksiyoneline P üzerinde pozitiftir denir. Her $x \in P$ ve $x \neq 0$ için $f(x) > 0$ sağlanırsa f fonksiyoneline P üzerinde kesin pozitiftir (ya da kesin monoton) denir.

Her $x \in P$ için $f(x) > \alpha \parallel x \parallel$ olacak şekilde $\alpha > 0$ sabiti varsa, f lineer fonksiyoneline P üzerinde düzgün monoton denir.

Tanım 2.4.3. [**8**] B, P konisinin konveks alt kümesi olsun. Her $x \in P$ ve $x \neq 0$ için $\frac{x}{f(x)} \in B$ olacak şekilde $f(x) > 0$ tek türlü belirli reel sayısı mevcut ise B kümesine P konisinin bir tabanı denir. Buradaki f fonksiyoneli P üzerinde toplanabilir ve pozitif homojendir. Yani her $x, y \in P$ ve her $\lambda, \mu \geqslant 0$ için,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

dir.

Gerçekten; Her $x \in P; x \neq 0$ için $f(x) > 0$ reel sayısı vardır öyle ki $\frac{x}{f(x)} \in B$ ve benzer şekilde her $y \in P; y \neq 0$ için $f(y) > 0$ reel sayısı vardır, öyle ki $\frac{y}{f(y)} \in B$ asağlanı. z = x+y dersek, $z \in P; z \neq 0$ için $\frac{z}{f(z)} \in B$ gerçeklenir. $0 < \frac{f(x)}{f(x)+f(y)} \leqslant 1$ olduğundan, B nin konveksliğini kullanırsak $\frac{f(x)}{f(x)+f(y)} . \frac{x}{f(x)} + (1 - \frac{f(x)}{f(x)+f(y)}) . \frac{y}{f(y)} \in B$ ve dolayısıyla $\frac{x+y}{f(x)+f(y)} \in B$ dir. f tek türlü belirli olduğundan $f(x) + f(y) = f(x + y)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ olduğu görülebilir. Ayrıca $f(x) - f(y) = f(x - y)$ formülü ile $f; P - P$ üzerine genişletilebilir. Gerçekten; $u, v, u', v' \in P$ için $u - v = u' - v'$ olsun. Bu durumda,

$u + v' = v + u'$
$\Rightarrow f(u) + f(v') = f(v) + f(u')$
$\Rightarrow f(u) - f(v) = f(u') - f(v')$
$\Rightarrow u - v = u' - v'$ olduğundan $f(u) - f(v) = f(u') - f(v') = f(u - v)$ sağlanır.

Teorem 2.4.4.[8] Bir koninin tabana sahip olması için gerek ve yeter koşul bu koni üzerinde kesin pozitif bir lineer fonksiyonelin tanımlanabilmesidir.

Dahası, $f : X \to \mathbb{R}$lineer fonksiyoneli, $P \subseteq X$ konisi üzerinde kesin pozitif olmak üzere, $\alpha > 0$ için $B = \{x \in P : f(x) = \alpha\}$ kümesi P konisi için bir tabandır.

İspat: B konveks kümesinin, P konisi için bir taban olduğunu kabul edelim ve $f : P \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlayalım. $f(0) = 0$ ve $x > 0$ için $f(x)$ fonksiyonu P üzerinde kesin pozitiftir. f nin toplanabilir olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla f fonksiyoneli X üzerine genişletilebilir. Tersine, $f(\frac{\alpha x}{f(x)}) = \alpha$ olduğundan $\frac{\alpha x}{f(x)} \in B$ $\forall x \in P; x \neq 0$. Tabanın tanımı gereği f tek türlü belirli olmalı. f tek türlü belirli olmasın. Bu durumda Her $x \in P, x \neq 0$ için $f, g > 0$ pozitif fonksiyonelleri vardır, öyle ki $\frac{x}{f(x)}, \frac{x}{g(x)} \in B$ sağlanır. $\frac{x}{f(x)}.f(x) = \frac{x}{g(x)}.g(x) = x$, $\frac{x}{f(x)} = b_1; \frac{x}{g(x)} = b_2$ dersek, her $x \in P \backslash \{0\}$ için
$f(x) = \frac{f(x)}{\alpha}.f(b_1) = f(\frac{f(x).b_1}{\alpha}) = f(\frac{b_2.g(x)}{\alpha}) = \frac{g(x)}{\alpha}.f(b_2) = g(x)$ buradan her $x \in P \backslash \{0\}$ için $f(x) = g(x)$ sonucu çıkar ve dolayısıyla f tek türlü belirlidir.
$B = \{x \in P : f(x) = \alpha\}$ kümesi P konisi için bir tabandır.

Sonuç 2.4.5.[8] $B = \{x \in P : f(x) = 1\}$ kümesi, P konisi için bir tabandır. B ye f fonksiyoneli tarafından tanımlanan taban denir. Eğer f sürekli ise bu durumda

(i) $0 \notin \overline{B}$

(ii) P konisi kapalı ise B de kapalıdır.

Yukarıdaki iki özellik Jameson'un "*Ordered Linear Spaces*" kitabından alınmıştır.

Çeşitli uzaylardaki koniler için pozitif lineer fonksiyonelleri aşağıdaki gibi verebiliriz:

(i) l_∞ için $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$

(ii) l_1 için $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

Her koninin bir tabana sahip olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 2.4.6. Tüm reel değerli dizi uzayı $\boldsymbol{s}$ üzerinde kesin pozitif bir lineer fonksiyonel tanımlanamaz ve dolayısıyla $\boldsymbol{s}$ nin herhangi bir konisinin tabanı mevcut değildir.

Çözüm: $f : \boldsymbol{s} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonelinin kesin pozitif olduğunu kabul edersek, $f(e_n) = \alpha_n$ ve $\alpha = \{\frac{n}{\alpha_n}\}$ aldığımızda; $(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, ...) \leqslant (\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}, \frac{3}{\alpha_3}, ...)$

$\Rightarrow f((\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, ...)) \leqslant f(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{2}{\alpha_2}, \frac{3}{\alpha_3}, ...)$

$\Rightarrow f((\frac{1}{f(e_1)}, \frac{1}{f(e_2)}, \frac{1}{f(e_3)}, ...)) \leqslant f(\alpha)$

$\Rightarrow f(\frac{1}{f(e_1)}.(1, 0, 0, ...) + \frac{1}{f(e_2)}.(0, 1, 0, ...) + ...) \leqslant f(\alpha)$

$\Rightarrow \frac{f(e_1)}{f(e_1)} + \frac{f(e_2)}{f(e_2)} + ... \leqslant f(\alpha)$

$\Rightarrow n \leqslant f(\alpha)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; s üzerinde kesin pozitif lineer fonksiyonel tanımlanamaz, dolayısıyla s nin herhangi bir konisinin tabanı mevcut olamaz.

$B \subseteq P$, P konisinin bir tabanı olsun. Eğer $0 \notin \overline{B}$ ve B sınırlı ise P ye *iyi-tabanlıdır* denir. P iyi-tabanlı ise f tarafından tanımlanmış taban da sınırlıdır.

Teorem 2.4.7. [6, Önerme 3.8.13.] X normlu uzay ve $P \subseteq X$ koni olsun.

Her $x, y \in P$ için $\|x + y\| \geqslant \|x\| + \alpha\|y\|$ koşulunu sağlayan bir $\alpha > 0$ sabiti bulunabiliyorsa P konisi iyi-tabanlıdır.
Bir koninin hem sınırlı hem de sınırsız tabana sahip olabileceğini aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.4.8.[8] $l_1^+ = \{x \in l_1 : x_i \geqslant 0\} \subseteq l_1$ konisini ele alırsak. Bu koni hem sınırlı hem de sınırsız tabana sahiptir.

Çözüm: $y \in l_\infty,\ y_i > 0\ \forall i$ alalım. Bu durumda; $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i x_i$ fonksiyonelinin l_1^+ pozitif konisi için belirttiği taban $B = \{x \in l_1^+ : f(x) = 1\}$ dır. $\{y_{i_k}\} \subseteq y_i$ alt dizisini incelersek. $\{y_{i_k}\} \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$ ise B sınırsızdır. Çünkü, her k için $f(\frac{e_{i_k}}{y_{i_k}}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_{i_k} \frac{e_{i_k}}{y_{i_k}} = 1$, $\frac{e_{i_k}}{y_{i_k}} \in B$, $\Rightarrow \|\frac{e_{i_k}}{y_{i_k}}\| = \frac{1}{y_{i_k}} \rightarrow \infty\ (k \rightarrow \infty)$
Her i için, $y_i \geqslant \alpha > 0$ $1 = f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i x_i \geqslant \alpha\|x\|$,$\forall x \in B$ olduğundan B sınırlıdır.

Örnek 2.4.9.[8] $l_p^+ = \{x \in l_p : x_i \geqslant 0\} \subseteq l_p$ konisini ele alırsak. Bu koni sınırsız bir tabana sahiptir. Çünkü, f lineer fonksiyonelinin tanımladığı $B = \{x \in l_p^+ : f(x) = 1\}$ tabanını göz önüne alırsak, $\forall n$ için $\frac{e_n}{y_n} \in B$ sağlanır.

Önerme 2.4.10.[8] B, P konisinin f fonksiyoneli tarafından tanımlanan tabanı olsun. B nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonelinin düzgün monoton olmasıdır.

İspat: Her $x \in B$ için $\|x\| \leqslant M$;$M > 0$ olsun. $\forall x \in P \backslash \{0\}$ $\|\frac{x}{f(x)}\| \leqslant M$, dolayısıyla $\|x\| \leqslant Mf(x)$, $\forall x \in P$; koşulu sağlanır. f, düzgün monotondur. Tersine, $f(x) \geqslant \alpha\|x\|$, $\forall x \in P$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in B$ için, $1 = f(x) \geqslant \alpha\|x\| \Rightarrow B$ sınırlıdır.

Önerme 2.4.11.[8] X normlu uzay ve $P \subseteq X$ kapalı konisi sonlu boyutlu olsun. Bu durumda P nin her tabanı sınırlıdır.

İspat: B, P konisinin f fonksiyoneli tarafından tanımlanan bir tabanı olsun. $x_n \in B$ için $\|x_n\| \to \infty$ olsaydı, $f(\frac{x_n}{\|x_n\|}) \to 0$ olurdu. P sonlu boyutlu olduğundan birim yuvarı kompakttır, dolayısıyla $y_{n_k} \subseteq \{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ alt dizisi vardır, öyle ki $y_{n_k} \to y_0 \in P$ ve $\|y_0\| = 1 \Rightarrow f(y_0) = 0$. Fakat f kesin pozitif olduğundan bu bir çelişkidir.

2.5 KONİLER İÇİN DİKOTOMİ SONUCU

İki zıt uçtan birini seçme durumuna dikotomi denir. Örneğin sıcak kavramını bilmezseniz soğuk kavramını bilemezsiniz. Gece kavramı yoksa kafanızda gündüz kavramı da olmaz. Koniler için dikotomi ise tabanının sınırlı olup olmaması ile ilgilidir. Daha önce verdiğimiz örnekte bir koninin hem sınırlı hem de sınırsız tabana sahip olma durumu olduğunu gördük. Peki ne zaman sadece sınırlı veya sınırsız tabana sahip olur? Bu sorunun cevabı Teorem 2.5.2. de verilmektedir.

Tanım 2.5.1. [8] E ve F, lineer uzaylar olmak üzere; $\langle .,. \rangle : E \times F \to \mathbb{R}$ üzerine bilineer tasviri ile verilen, E ve F uzaylarının noktalarına ayıran $\langle E, F \rangle$ çiftine *Dual İkili* denir. $\langle x, y \rangle = y(x)$ şeklinde gösterilir. $P \subseteq E$ alt kümesi bir koni olsun. Bu durumda P nin F deki dual konisini $P^0 = \{y \in F : y(x) \geqslant 0, her x \in P\}$ konisi ile göstereceğiz. $y \in F$, P üzerinde kesin pozitif lineer fonksiyonel olmak üzere; $B = \{x \in P : y(x) = 1\}$ kümesi P konisi için bir tabandır.

Teorem 2.5.2.[8] $\langle X, Y\rangle$ dual ikili olsun. Eğer X normlu uzay ve P, X in $\sigma(X,Y)$ -kapalı koni olsun. P nin bir $f \in Y$ vektörü tarafından tanımlanan taban sınırlı ise bu koninin tüm tabanları sınırlı; sınırsız ise tüm tabanları sınırsızdır.

İspat: P, X in $\sigma(X,Y)$ -kapalı konisi olsun. f ve g sırasıyla B sınırlı tabanını ve K sınırsız tabanını tanımlasın. B sınırlı olduğundan f düzgün monotondur. Yani her $x \in P$ için $f(x) \geqslant \alpha\|x\|$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sabiti vardır. P, $\sigma(X,Y)$ -kapalı koni olduğundan B sınırlı tabanı $\sigma(X,Y)$ -kapalıdır. Dolayısıyla $\sigma(X,Y)$ -kompakttır. B konveks olduğundan zayıf kapanışı ile kapanışı çakışır. Dolayısıyla B kompakttır ve g, B üzerinde minimum değerini alır. Çünkü, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli sınırlıdır dolayısıyla süreklidir. Bu durumda her $z \in B$ için $x, y \in B$ vardır, öyle ki $g(x) \leqslant z \leqslant g(y)$ sağlanır. $g(x) = m > 0$, g nin $x \in B$ noktasında aldığu minimum değer olsun. B taban olduğundan, $\forall x \in P\backslash\{0\}$, $\frac{x}{f(x)} \in B \Rightarrow g(\frac{x}{f(x)}) \geqslant m \Rightarrow g(x) \geqslant mf(x) \geqslant m\alpha\|x\| \Rightarrow g$ düzgün monotondur sonucu çıkar. Fakat K sınırsız olduğundan g düzgün monoton olamaz.

Sonuç 2.5.3.[8] X^*, X normlu uzayının duali olmak üzere, $P \subseteq X^*$ konisi $\sigma(X^*, X)$-kapalı olsun. Bu durumda $x \in X$ vektörü tarafından tanımlanan taban sınırlı ise bu koninin tüm tabanları sınırlı; sınırsız ise tüm tabanları sınırsızdır.

Sonuç 2.5.4.[8] X Refleksif Banach uzayı ve $P \subseteq X$ kapalı koni olsun. Bu durumda P nin $x^* \in X^*$ tarafından tanımlanan tabanı sınırlı ise bu koninin tüm tabanları sınırlı; sınırsız ise tüm tabanları sınırsızdır.

Örnek 2.5.5.[8] Her normlu X uzayı; sürekli bir lineer fonksiyonel tarafından tanımlanan sınırlı bir tabana sahip olan, sonsuz boyutlu bir kapalı koniye sahiptir. Gerçekten, her $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ için $P = \{\lambda x : \lambda \geqslant 0, \|x - x_0\| \leqslant \frac{\|x_0\|}{2}\}$ kümesi, X in bir kapalı konisidir. $B = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant \frac{\|x_0\|}{2}\}$ kümesi ile sıfırı ayıran $f \in X^*$ lineer fonksiyoneli sınırlı bir taban belirler. Çünkü, $0 \notin \overline{B}$ ve B sınırlı olduğundan f sınırlı taban belirler.

2.6 REFLEKSİFLİĞİN BİR KARAKTERİZASYONU

Teorem 2.6.1. **[9, Teorem 5.41]** l_p refleksif ise $1 < p < \infty$ dur.

Teorem 2.6.2. **[9, Teorem 5.43.]** Bir Banach uzayının refleksif olması için gerek ve yeter koşul dualinin refleksif olmasıdır.

Tanım 2.6.3. X normlu uzay olmak üzere, $x, y \in X$; $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $x \neq y$ için $\|x + y\| < 2$ sağlanıyorsa X uzayına *kesin konvekstir* denir.

Teorem 2.6.4. **[7, 5.11.]** X normlu uzayının kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul $x_1, x_2 \in X$ ve $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ ise bu vektörlerden birinin diğerinin negatif olmayan bir katı olmasıdır.

Tanım 2.6.5. X normlu uzay olmak üzere, $\forall x \in X \ \exists! f \in X^* \ni f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$ koşulu sağlanıyorsa X uzayına *düzgündür* denir.

Önerme 2.6.6. **[7, Önerme 5.4.5.]** X^* kesin konveks ise X düzgündür.

ispat: Eğer X düzgün değil ise bu durumda $\|x\| = 1, x \in X$ olacak şekilde bir eleman bulabiliriz. Öyle ki $f \neq g \in X^*$ için $f(x) = g(x)$ sağlanabilir. Bu durumda $\|f + g\| \leqslant 2$ ve $(f + g)(x) = 2$ koşulları sağlanacağından $\|f + g\| = 2$ sonucu çıkar ki bu kesin konvekslikle çelişir.

Teorem 2.6.7. **[7]** X normlu uzay olmak üzere, X refleksif ve düzgün ise X^* kesin konvekstir.

ispat: X refleksif ve düzgün olsun. $\|x^*\| = \|y^*\| = \|\frac{x^*+y^*}{2}\| = 1$ olacak şekilde $x^*, y^* \in X^*$ alalım. Bu durumda $\exists x^{**} \in X^{**}$, $x^{**}(x^* + y^*) = \|x^* + y^*\| = 2$, $\|x^{**}\| = 1$ *(i)*

X refleksif olduğundan $x \in X$ için $x^{**}(z^*) = z^*(x)$, $\forall z^* \in X^*$; $\|x^{**}\| = \|x\| = 1$ geçerlidir. $u = x^*(x), v = y^*(x)$ alalım. Bu durumda *(i)* den $u + v = (x^* + y^*)(x) = x^{**}(x^* + y^*) = 2$ olur.

Fakat $|u| \leqslant \|x^*\|\|x\| = 1, |v| \leqslant \|y^*\|\|x\| = 1$ ve $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$ olduğundan, $4 + |u - v|^2 \leqslant 2 + 2 \Rightarrow u = v = \frac{(u+v)}{2} = 1$. Dolayısıyla $x^*(x) = 1 = \|x\| = y^*(x)$, $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ sağlanır. X düzgün ve $x \neq 0$ olduğundan $x^* = y^*$. O halde $\|\frac{x^*+y^*}{2}\| < 1$ olmalıdır. Buradan X^* kesin konvekstir sonucu çıkar.

Örnek 2.6.8. [7, Örnek 5.4.13.] Düzgün bir Banach uzayının refleksif olması gerekmez.

Çözüm: $T : l_2 \to c_0$, $T(\{\alpha_n\}) = \{\alpha_n\}$ tanımlansın. Bu durumda T bire bir, sınırlı lineer operatördür. Normu 1 dir ve $T(l_2)$ c_{00} vektör uzayını içerdiğinden c_0 da yoğundur. Dolayısıyla T nin eşleniği olan $T^* : c_0^* \to l_2^*$ içine operatörü bire bir ve zayıf* sürekli sınırlıdır ve $\|T^*\| = 1$ dir. $\|x^*\|_a = \|x^*\| + \|T^*x^*\|$, $\forall x^* \in c_0^*$ olsun. Bu durumda $\|x^*\| \leqslant \|x^*\|_a \leqslant 2\|x^*\|$ olduğundan $\|.\|_a$ normu c_0^* üzerindeki orijinal norma eş değerdir demektir.

$x_1^*, x_2^* \in c_0^*$ için $\|x_1^* + x_2^*\|_a = \|x_1^*\|_a + \|x_2^*\|_a$ olsun. Bu durumda $\|Tx_1^* + Tx_2^*\| = \|Tx_1^*\| + \|Tx_2^*\|$ gerçeklenir. l_2^* nin kesin konveksliğinden Tx_1^* ve Tx_2^* vektörlerinden biri diğerinin negatif olmayan bir katıdır. T^* bire bir olduğundan Teorem 2.6.4 den x_1^* ve x_2^* vektörlerinden biri diğerinin negatif olmayan katıdır. Dolayısıyla $\|.\|_a$ normu kesin konveks normdur.

l_2^* ve c_0^* orijinal normlarının zayıf* alt yarı sürekli olmasından ve T^* ın zayıf* dan zayıf* a sürekliliğinden $\{x_\alpha^*\} \in c_0^*$ yakınsak ağı için $\|w^* - \lim_\alpha x_\alpha^*\|_a \leqslant \liminf_\alpha \|x_\alpha^*\|_a$ sağlanır. Bu durumda teorem Teorem 2.2.6. dan c_0 üzerindeki orijinal norma eş değer bir $\|.\|_b$ normu vardır. Öyle ki $\|.\|_a$ normu $(c_0, \|.\|_b)^*$ uzayı üzerinde dual normdur. $\|.\|_a$ normu kesin konveks norm olduğundan $(c_0, \|.\|_b)$ Banach uzayı düzgündür fakat c_0 uzayına izomorf olduğundan refleksif değildir.

Teorem 2.6.9.[8] P, X normlu uzayının kapalı konisi olsun. Eğer,

(i) her $g \in X^*$ fonksiyoneli, X^* ın bir elemanı tarafından tanımlanan P konisinin üzerinde maksimumunu alırsa,

Ya da

(ii) $P^0 - P^0 = X^*$ ve P üzerinde tanımlı herhangi bir $g \in X^*$ pozitif lineer fonksiyoneli X^* nin herhangi bir elemanı ile tanımlı P nin herhangi tabanında maksimumunu alırsa, X^* bir elemanı tarafından tanımlanan P konisinin her hangi bir tabanı sınırlıdır.

İspat: B kümesi P konisinin $f \in X^*$ fonksiyoneli tarafından tanımlanan tabanı olsun. Bu durum da (i) durumunun gerçeklendiğini gösterelim.

Her $g \in X^*$ için $x' \in B$ vektöründe g fonksiyoneli maksimumunu alır. Benzer şekilde her $-g$ fonksiyoneli de $x'' \in B$ gibi bir vektörde maksimumunu alır. Dolayısıyla her $x \in B$ için $g(x'') \leqslant g(x) \leqslant g(x')$

$\Rightarrow$ Her $x \in P \backslash \{0\}$ için, $g(x'') \leqslant g(\frac{x}{f(x)}) \leqslant g(x')$

$\Rightarrow f(x)g(x'') \leqslant g(x) \leqslant g(x')f(x)$

$\Rightarrow g(x'')f \leqslant g \leqslant g(x')f$

$\Rightarrow f \in X^*$ sıra-birimidir. Yani, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n[-f, f] = X^*$ dir. $[-f, f]$ aralığı kapalı, konveks ve yutandır. 0, $[-f, f]$ için bir iç noktadır. Dolayısıyla f fonksiyoneli, $f + [-f, f] = [0, 2f]$ için bir iç noktadır. f sıra birimi olduğundan, P^0 için bir iç noktadır.

Şimdi B nin sınırlı olduğunu gösterelim. V, $f + V \subseteq P^0$ olacak şekilde X^* için 0 merkezli kapalı yuvarı temsil etsin. Her $x \in B$ ve her $h \in V$ için $(f + h)(x) \geqslant 0$ ve f B tabanını tanımladığından her $x \in B$ için $f(x) = 1$ ve dolayısıyla $h(x) \geqslant -1$.Sonuç olarak, B, Vnin X teki kutbu tarafından kapsanır. Sınırlıdır.

(ii) durumu için incelersek, $g \in X^*$ pozitif fonksiyoneli $x' \in B$ elemanın da makismumunu alır. Her $x \in B$ için, $0 \leqslant g(x) \leqslant g(x')$ dir.

$\Rightarrow 0 \leqslant g(\frac{x}{f(x)}) \leqslant g(x') \; \forall x \in P \backslash \{0\}$

$\Rightarrow 0 \leqslant g(x) \leqslant g(x')f(x)$

$\Rightarrow 0 \leqslant g \leqslant g(x')f$

P^0 üreten koni olduğundan, f, X^* ın sıra birimidir. Geri kalan kısım yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.6.10.[8] Bir X Banach Uzayının refleksif olmaması için gerek ve yeter koşul, l_1 in pozitif konisinin X içine gömülebilir olmasıdır.

Not: P ve Q sırası ile X ve E normlu uzaylarının konileri olsun. P den Q üzerine toplanabilir, pozitif homojen, bire-bir, sürekli ve tersi sürekli olan bir tasfir tanımlanabilirse; P konisi E normlu uzayı içine gömülebilir denir. T bu koşulu sağlasın. $A = sup\{\|Tx\| : x \in P, \|x\| \leqslant 1\}$, $B = sup\{\|T^{-1}y\| : x \in Q, \|y\| \leqslant 1\}$ olmak üzere T ve T^{-1} sürekli olduğundan her $x \in P$ için $\frac{1}{B}\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant A\|x\|$, bağıntısı sağlanır. T operatörünü $T(x - y) = T(x) - T(y)$, $\forall x, y \in P$ alarak $P - P$ den $Q - Q$ üzerine bire-bir operatöre genişletebliriz. Buradaki T operatörü

$P - P$ üzerinde iyi tanımlıdır. Gerçekten, $x - y = x' - y'$ için $x + x' = y + y'$ $\Rightarrow T(x + x') = T(y + y')$; T nin toplanabilirliğinden $T(x - y) = T(x') - T(y')$

Aşağıdaki tanım [8, Tanım 10] da verilmektedir.

Tanım 2.6.11. X normlu uzayının herhangi bir kapalı konisi için aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa X normlu uzayı, **(*)** özelliğine sahiptir denir.

(i) P konisi, X^* ın elemanı tarafından tanımlı sınırlı tabana sahip değil; ya da

(ii) X in P üzerinde kesin pozitif ve P ye kısıtlanışı, P nin indirgenmiş topolojisinde sürekli olan her fonksiyoneli, X^* in bir elemanı ile tanımlı P nin herhangi bir tabanı üzerinde maksimumunu alır.

Teorem 2.6.12.[8] X Banach uzayı olmak üzere, X in refleksif olması için gerek ve yeter koşul, X in, **(*)** özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: X refleksif olsun. P, X in kapalı konisi olsun. P, X^* ın bir elemanı tarafından tanımlanan sınırlı bir tabana sahipse P nin her tabanı, dikotomi sonucundan dolayı sınırlıdır. Dolayısıyla P nin her tabanı zayıf kompakttır. James Teoreminden [Teorem 2.2.4.], herhangi bir kesin pozitif, lineer, P ye kısıtlanışı sürekli lineer fonksiyonel; X^* ın bir elemanı tarafından tanımlı her tabanında maksimumunu alır. Buradan X^*, **(*)** özelliğine sahiptir.

Tersine,

X , **(*)** özelliğine sahip fakat refleksif olmasın. Bu durumda l_1 in pozitif konisinden X in P kapalı konisi üzerine bir T izomorfisi tanımlayabiliriz.
$Tx = Tx^+ - Tx^-$, $x \in l_1$, $\forall x \in l_1$ için T nin l_1 üzerindeki genişlemesi olsun ve bu tasfiri de T ile gösterelim. Bu durumda T süreklidir. Çünkü

$$\|T(x)\| = \|T(x^+) - T(x^-)\| \leqslant \|T(x^+)\| + \|T(x^-)\| \leqslant A(\|x^+\| + \|x^-\|) = A\|x\|$$

eşitsizliği her $x \in l_1$ için sağlanır.

l_1^+, kapalı ve sınırlı bir C tabanına sahiptir.

$\Rightarrow T(C)$, P için kapalı ve sınırlı bir tabandır.

$\Rightarrow T(C)$ ve $\{0\}$ ı ayıran bir $g \in X^*$ bulunabilir.

$\Rightarrow g$, P üzerinde kesin pozitiftir ve P konisi için bir K tabanı tanımlar.

$T(C)$ sınırlı olduğundan g nin tanımladığı taban da sınırlıdır.

$T^* : X^* \to l_\infty$ T nin eşleniği olsun. Her $h \in X^*$ ve her $\eta \in l_1$ için $T^*(h)(\eta)$, süreklidir.

$T^*(g) = \xi = (\xi_i)$ olsun. Bu durumda $T(\xi) = g$ olduğundan, ξ, l_1^+ üzerinde kesin pozitiftir.

D, l_1^+ konisinin ξ tarafından tanımlanan tabanı olsun. Bu durumda $T(D) = K$ gerçeklenir. K sınırlı olduğundan D sınırlı olacaktır.

O halde örnek 2.4.8. de olduğu gibi her i için $\xi_i \geqslant \alpha > 0$ gerçeklenmelidir. Çünkü (ξ_i) 0 a yakınsayan bir alt diziye sahip olsaydı ξ, sınırsız taban tanımlardı.

$r \in l_\infty$ $r_i = \xi_i \frac{i}{1+i}$ $\forall i$ alalım. Bu durumda

$r(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_i x_i$, $x \in l_1$ fonksiyoneli D üzerinde maksimuma sahip olamaz. Gerçekten,

Her $\eta \in D$ için $r(\eta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \frac{i}{1+i} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_i \eta_i = \xi(\eta) = 1$ olduğundan 1 üst sınırdır ve maksimumdur. Çünkü, e_i standart taban olmak üzere her i için, $\frac{e_i}{\xi_i} \in D$, $r(\frac{e_i}{\xi_i}) = \frac{i}{i+1} \to 1$ dir. Dolayısıyla r maksimumunu alamaz.

$\Phi : P - P \to \mathbb{R}$, $\Phi(T(\eta)) = r(\eta)$, $\eta \in l_1$ ile tanımlanmış olsun. r kesin pozitif olduğundan Φ P üzerinde kesin pozitiftir. Φ, X uzayına genişletilebilir.

$T : l_1^+ \to P$ üzerine izomorfi olduğundan Φ nin P ye kısıtlanışı süreklidir.

Şimdi Φ nin K üzerinde $T(t)$ noktasında maksimumunu aldığını varsayalım. Bu durumda $t \in D$ olur ve buradan r nin D üzerinde t noktasında maksimumunu alır sonucu çıkar ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Φ maksimumunu alamaz yani X **(*)** özelliğine sahip değildir ki bu bizim kabulümüzle çelişir.

2.7 TALEP FONKSİYONLARI

Tanım 2.7.1. Rekabete dayalı değişim ekonomiisinde X ürün uzayı ve X^* fiyat uzayı olmak üzere, ürün-fiyat dualitesini $\langle X, X^* \rangle$ olarak alacağız. Burada X normlu uzay, X^* da topolojik duali simgelemektedir. X in P konisi ile tüketim kümesini göstereceğiz. P üzerinde kesin pozitif, sürekli lineer fonksiyonele ise fiyat vektörü diyeceğiz. $w > 0$ refah seviyesi olmak üzere;

$B_w(f) = \{x \in P : f(x) \leqslant w\}$ kümesine f *ve* w *ya karşılık gelen bütçe kümesi* denir. $L = \{x \in P : f(x) = w\}$ kümesine de $B_w(f)$ in *bütçe sınırı* denir. P konisinin bütçe kümesi ile f sürekli fonksiyonelinin tanımladığı tabanı arasında birebir eşleme vardır.

Gerçekten, $L = \{x \in P : f(x) = w\}$ kümesinin P için, $g = \frac{f}{w}$ tarafından tanımlanan bir taban olduğu açıktır. Tersine, $K = \{x \in P : f(x) = 1\}$ kümesi P konisinin bir tabanıdır. $K \subseteq B_1(f)$ dir ve bu küme $B_1(f)$ kümesine karşılık gelir. Dolayısıyla her bütçe kümesi bir lineer, sürekli fonksiyonel tarafından tanımlanan P konisi için bir taban belirler.

Sonuç olarak; P konisi için bir taban varsa bütçe kümesi; bütçe kümesi varsa bir taban tanımlayabiliriz. Dolayısıyla sürekli, lineer fonksiyonel tarafından tanımlanan tabanlar ile bütçe kümelerini özdeşleştirebiliriz.

Sonuç 2.7.2. E, F lineer topolojik vektör uzayları; P^0, P nin dual konisi olmak üzere $\langle E, F\rangle$ ürün-fiyat dualitesini alalım. $P \subseteq E$ ve $P^0 \subseteq F$, kapalı konileri de tüketim kümesi olsun. Bu durumda $f \in P^0$, ki P üzerinde kesin pozitif lineer bir fonksiyoneldir, *fiyat vektörüdür* .

Tanım 2.7.3. E ve F sırası ile P ve P^0 konileri ile sıralansın ve P üzerinde refleksif, transitif ve tam $\succeq$ tercih bağıntısı tanımlansın. Yani, $x, y, z \in P$ için

i) $x \succeq x$

ii) $x \succeq y$ ve $y \succeq z$ ise $x \succeq z$

iii) $\forall x, y \in P$ için ya $x \succeq y$ ya da $y \succeq x$

sağlansın. Her $x \in P$ için,

$\{y \in P : y \succeq x\}$ kümesi P nin indirgediği topolojide kapalı ise $\succeq$ *tercih bağıntısı üst yarı süreklidir* denir.

Benzer şekilde, $\{y \in P : x \succeq y\}$ kümesi P nin indirgediği topolojide kapalı ise $\succeq$ *tercih bağıntısı alt yarı süreklidir* denir. Tercih bağıntısı $\succeq$ hem üst yarı sürekli hem de alt yarı sürekli ise süreklidir.

$\forall x, y \in P$ $y - x \in P$ için $x \succ y$ sağlanırsa $\succeq$ kesin monotondur denir.

Tanım 2.7.4. $w > 0$ ve P üzerinde kesin pozitif $f \in P^0$ lineer fonksiyonelini alalım.

$\mathbf{x}_\omega(f) = \{x \in B_w(f) : x \succeq y,\ her y \in B_w(f)\}$ kümesine *Talep Kümesi* denir.

Eğer bu küme boş değilse $f \to \mathbf{x}_w(f)$ eşlemesine $\succeq$ *nin talep eşlemesi* denir. Yani;

Talep eşlemesinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{x}_w(f) \neq \emptyset$ olmasıdır. Burada $\mathbf{x}_w$, küme değerli bir fonksiyondur.

Talep kümesi tek elemanlı ise bu eşlemeye *talep fonksiyonu* denir.

Araujo, uzayın refleksifliği ile talep fonksiyonları arasındaki ilişkiye [5] de değinmiştir. Bu makalede değinilen konuları özetlersek;

1) Eğer B ürün uzayı üzerinde mevcut olan talep fonksiyonu C^1 in elemanı ise B ye bir iç çarpım yapısı verilebilir. Örneğin, $B = L_p, (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ve B ürün uzayı üzerinde mevcut olan talep fonksiyonu C^1 in elemanı ise $p = 2$ dir. Başka bir değişle ürün uzayı, iç çarpım tarafından doğrulan eş değer bir norm ile verilemiyorsa (yani ürün uzayı, örneğin L_p için $p \neq 2$ ise)bu ürün uzayı üzerinde, tüketim kümesinin içinde maksimumunu alan kesin yarı-konkav ve duali üzerinde sürekli türevlenebilen talep fonksiyonunun ortaya çıkardığı fayda fonksiyonu bulunamaz.

2) Talep fonksiyonu daima fiyatların ve uygun gelirlerin oluşturduğu yoğun küme için tanımlıdır.

3) Eğer tüm p fiyat vektörleri için tanımlı talep fonksiyonu mevcut ise ürün uzayı refleksiftir. Örneğin ürün uzayı L_p ve talep fonksiyonu mevcut ise $1 < p < \infty$ dir.

Şimdei talep eşlemelerinin var olduğu durumlar için bir ön teorem verelim.

Teorem 2.7.5.[1, Teorem 1.2.2] Kompakt bir topolojik uzay üzerinde tanımlı üst-yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının tüm maksimal elemanlarının kümesi boştan farklı ve kompakttır.

ispat: X, kompakt topolojik uzay ve $\succeq$, üst-yarı sürekli olsun.Bu durumda, $\forall x \in X$, $C_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ kümesi kapalıdır. Dolayısıyla C_x kompakttır.

$x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ alalım. $\succeq$ bağıntısı tam sıralama olduğundan $x_1 \succeq x_2 \ldots \succeq x_n$ kabul edebiliriz. Bu durumda

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_{x_i} = C_{x_1} \neq \emptyset \Rightarrow \{C_x : x \in X\}$, sonlu kesişim özelliğine sahiptir. X kompakt olduğundan tüm maksimal elemanlar kümesi $\bigcap\limits_{x \in X} C_x \neq \emptyset$

Bu teorem bize kompakt bütçe kümeleri üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesine sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla sonlu boyutlu ürün uzayları üzerinde talep fonksiyonunun varlığına dair aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.7.6. Tüketim kümesi P kapalı konisi ile verilen rekabete dayalı değişim ekonomisinde $\langle X, X^* \rangle$ ürün-fiyat ikilisi olmak üzere, X, sonlu boyutlu normlu uzay ve X^* duali olsun. Bu durumda üst-yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısı için daima talep eşlemesi mevcuttur.

İspat: $P \subseteq X$ kapalı konisi tüketim kümesi olsun. Bu durumda Önerme 2.4.11. den P, f sürekli lineer fonksiyoneli tarafından tanımlanan sınırlı bir tabana sahiptir. f sürekli olduğundan bu taban kapalı dolayısıyla uzay sonlu boyutlu olduğundan kompakttır. Dolayısıyla $B_w(f)$ bütçe kümesi kompakttır. Teoremden 2.7.5. den, maksimal eleman mevcuttur. Talep kümesi boş değildir.

Sonlu boyutlu ürün uzayları için talep eşlemesinin varlığı garanti altına alınabilmektedir fakat ürün uzayının sonsuz boyutlu olması durumda çeşitli koşullar eklemek gerekmektedir. Bu koşullardan birini ürün uzayının refleksif olduğu durum için verelim.

Önerme 2.7.7. X refleksif Banach uzayı olmak üzere, rekabete dayalı değişim ekonomisi için $\langle X, X^* \rangle$, ürün - fiyat ikilisi ve $P \subseteq X$, $\sigma(X, X^*)$- kapalı tüketim kümesi olsun. Eğer,

her $x, y \in P$ için $\|x + y\| \geqslant \|x\| + \alpha\|y\|$ koşulunu sağlayan bir $\alpha > 0$ sabiti bulunabiliyorsa , üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısı için talep eşlemesi vardır.

İspat: Bu koşulun gerçeklenmesi P konisinin iyi - tabanlı olması anlamına gelir. Dolayısıyla sınırlı bir tabana sahiptir. P, $\sigma(X, X^*)$ -kapalı olduğundan dikotomi sonucu vardır. Bütün tabanlar sınırlı ve dolayısıyla f sürekli fonksiyoneli tarafından tanımlanan taban da sınırlıdır ki bu fonksiyonel fiyat vektörü ile çakışır. Bütçe kümesi sınırlıdır. Ayrıca P $\sigma(X, X^*)$ -kapalı olduğundan sürekli fonksiyonel tarafından tanımlanan taban da kapalıdır, dolayısıyla bütçe kümesi sınırlı ve $\sigma(X, X^*)$ -kapalı olduğundan $\sigma(X, X^*)$ -kompakttır. $\succeq$ üst yarı sürekli olduğundan maksimal eleman vardır. $x_w(f) \neq \emptyset$

Tanım 2.7.8. Her $x \in P$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\|y - x\| < \epsilon$ ve $y \succ x$ olacak şekilde bir $y \in P$ mevcutsa $\succeq$ tercih bağıntısı yerel doyurulmamıştır (locally non-satiated) denir. $\succeq$ kesin monoton veya her $x \in P$ ve her $\lambda > 0$ için , $x + \lambda u \succ x$ koşulunu sağlayan bir $u \in P$ varsa yerel doyurulmamıştır.

Teorem 2.7.9.[8] $\langle E, F\rangle$ dual ikilisi ile ürün-fiyat ikilisi gösterilsin. $P \subseteq E$ konisi de tüketim kümesi olsun. Bu durumda P üzerinde tanımlanan $\succeq$ tercih bağıntısı için,

(i) E normlu uzay, $F \subseteq E^*$ ve $\succeq$ yerel doyurulmamış ise $p(x) = w \ \forall x \in \mathbf{x}_w(p)$

(ii) P, $\sigma(E, F)$- kapalı ve $\succeq$, $\sigma(E, F)$ üst- yarı sürekli ise $\mathbf{x}_w(p)$ talep kümesi $\sigma(E, F)$- kapalıdır.

İspat: (i) $\succeq$ yerel doyurulmamış ve $x \in \mathbf{x}_w(p)$ olsun. Eğer $p(x) < w$ olsaydı, E nin x merkezli ve ρ yarıçaplı bir U yuvarı mevcut olurdu, öyle ki

$H = \{z \in E : p(z) < w\}$ açık yarı-uzayı tarafından kapsanırdı. $\succeq$ yerel doyurulmamış olduğundan öyle bir $y \in B_w(p)$ vardır ki

$y \in P \cap U$, $y \succ x$ olurdu ki bu bizim $y \in B_w(p)$ olması ile çelişirdi. Dolayısıyla $p(x) = w$

(ii) $(z_a)_{a \in A}$, $\mathbf{x}_w(p)$ nin bir ağı olsun ve bu ağ; E nin $\sigma(E, F)$- topolojisinde z_0 a yakınsasın. Bu durumda $B_w(p)$ bütçe kümesi $\sigma(E, F)$- kapalı olduğundan $z_0 \in B_w(p)$ dir.

Her $x \in B_w(p)$ için $z_a \succeq x$ olur ve $\succeq$ tercih bağıntısının üst yarı sürekliliğinden $(z_0) \succeq x$ sağlanır ki buradan z_0, her $x \in B_w(p)$ için maksimaldir sonucu çıkar. Yani $z_0 \in \mathbf{x}_w(p)$ sağlanır.

Teorem 2.7.10.[8] Rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün-fiyat iklisi X normlu uzay olmak üzere $\langle X, Y\rangle$ dual sistemiyle verilsin ve tüketim kümesi olarak da $\sigma(X, Y)$- kapalı P konisi verilsin. Eğer, X in birim yuvarı olan U_X in pozitif kısmı $\sigma(X,Y)$- kompakt ve P, norm sınırlı bütçe kümesine sahip ise P nin her $\sigma(X,Y)$ üst-yarı sürekli $\succeq$ bağıntısı için talep eşlemesi mevcuttur.

İspat P, sınırlı bütçe kümesine sahip olduğundan $y \in Y$ tarafından tanımlanan taban da sınırlıdır. Dikotomi sonucundan Y nin her hangi bir elemanı tarafından tanımlanan taban ve dolayısıyla da tüm tabanları sınırlıdır. P nin kapalılığından bütçe kümesinin de kapalı olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla bütçe kümesi $\sigma(X,Y)$ kompakttır. Teorem 2.7.5. den $\succeq$ bağıntısı bütçe kümesi üzerinde daima bir maksimuma sahiptir. Bu durumda talep kümesi boş değildir. Talep eşlemesi vardır.

Sonuç 2.7.11.[8] Rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün-fiyat ikilisi X normlu uzay ve X^* dual uzayı olmak üzere $\langle X^*, X\rangle$ dual ikilisiyle verilsin. Eğer tüketim kümesi olan X^* ın P konisi zayıf-yıldız kapalı ve sahip olduğu bütçe kümesi sınırlı ise P üzerindeki her zayıf-yıldız üst yarı sürekli tercih bağıntısı için talep eşlemesi mevcuttur.

İspat: $\langle E, F\rangle$ dual ikilisinde $E = X^*$ ve $F = X$ alırsak E nin $\sigma(E,F)$ topolojisi, X^* ın zayıf- yıldız topolojisi olur. Sonuç doğrudur.

Sonuç 2.7.12.[8] Rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün-fiyat ikilisi X refleksif Banach uzayı ve X^* dual uzayı olmak üzere $\langle X, X^*\rangle$ dual sistemiyle verilsin. Eğer tüketim kümesi olan X ın P konisi kapalı ve sahip olduğu bütçe kümesi sınırlı ise P üzerindeki her zayıf üst yarı sürekli tercih bağıntısı için talep eşlemesi mevcuttur.

2.8 LİNEER TERCİHLER

Tanım 2.8.1. X normlu uzay ve P, X in kapalı konisi olsun. $\succeq$ tercih bağıntısı $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tarafından tanımlansın. Yani her $x, y \in P$ için,

$$x \succeq y \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

sağlansın. Bu durumda bu f fonksiyonuna *fayda fonksiyonu* denir. $\succeq$ tercih bağıntısına da *P üzerinde f fayda fonksiyonu tarafından tanımlanan tercih bağıntısı denir.* $\succeq$ bağıntısının sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f|_P$ nin P üzerinde indirgenmiş topolojiye göre sürekli olmasıdır. Tercih bağıntısının sürekliliğinin, fayda fonksiyonu f nin X üzerindeki sürekliliğini gerektirmediğini aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 2.8.2.

$f(x) = x$ fonksiyonun göz önüne alalım. Bu durumda $x \succeq y \Leftrightarrow x \geqslant y$ sağlanacaktır.

$$u(x) = \begin{cases} x \ ; & x < 0 \\ x+1 \ ; & x \geqslant 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $u : R \to R$ fonksiyonu sürekli değildir fakat

$u(x) \geqslant u(y) \Leftrightarrow x \geqslant y \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(y) \Leftrightarrow x \succeq y$ sağlanır.

Yani sürekli olmayan bir fonksiyon, sürekli tercih belirtebilir. Eğer $\succeq$ tercih bağıntısı bir g fonksiyoneli tarafından da tanımlanıyorsa

$$f(x) \geqslant f(y) \Leftrightarrow g(x) \geqslant g(y)$$

koşulu sağlanır ve $f|_P = g|_P$ dir.

Tanım 2.8.3. $f : X \to \mathbb{R}$ fayda fonksiyonu verilsin. Eğer bu fonksiyon lineer ise bunun tanımladığı tercih bağıntısına *lineer tercih bağıntısı* denir.

Teorem 2.8.4.[8] Rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün-fiyat dualitesinde X normlu uzay ve X^* dual uzayı olmak üzere $\langle X, X^* \rangle$ dual sistemiyle verilsin. Tüketim kümesi olan X ın P konisi kapalı olsun. Eğer $P^0 - P^0 = X^*$ ve P üzerinde pozitif olan $g \in X^*$ vektörünün tanımladığı her $\succeq$ tercih bağıntısı için talep eşlemesi varsa P nin her bütçe kümesi sınırlıdır.

İspat: $B = \{x \in P : f(x) = 1\}, f \in X^*$ olsun. Teorem 2.6.9. dan $\forall g \in P^0$, B üzerinde maksimumunu alırsa bütçe kümesi sınırlıdır. Gerçekten; $\succeq$ talep eşlemesi mevcut olduğundan

$\mathbf{x}_w(f) = \{x \in B_w(f) : x \succeq y, \forall y \in B_w(f)\} \neq \emptyset$; $w = 1$ için g, $B_1(f)$ üzerinde maksimumunu alır. Gerçekten,

$g \in X^*$ vektörünün tanımladığı tercih bağıntısı için talep eşlemesi mevcut olduğundan $\mathbf{x}_w(f) = \{x \in B_w(f) : x \succeq y, hery \in B_w(f)\}$ kümesi boştan farklıdır. Başka bir değişle $x \in B_w(f)$ maksimal elemandır. Dolayısıyla her

$y \in B_w(f)$ için $g(x) \geqslant g(y)$ sağlanır. Bunun anlamı g nin $B_w(f)$ üzerinde maksimumunu almasıdır.

g, P üzerinde pozitif olduğundan

$\lambda g(z_0) > 0$, $\lambda > 0$, $z_0 \in P$

$\Rightarrow$ Her $x \in P$ için $g(x) + \lambda g(z_0) > g(x)$

$\Rightarrow x + \lambda z_0 \succ x$

$\Rightarrow \succeq$ tercih bağıntısı $u \in P$ sabit olmak üzere, her $x \in P$ için $x + \lambda u \succ x$ koşulunu sağlar, yerel doyurulmamıştır.

Teorem 2.7.9. dan $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbf{x}_1(g)$ ve dolayısıyla g, B üzerinde maksimumunu alır.

Teorem 2.8.5.[8] Rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün-fiyat ikilisi X Banach uzayı ve X^* dual uzayı olmak üzere $\langle X, X^* \rangle$ dual sistemiyle verilsin. X in refleksi olması için gerek ve yeter koşul X in sınırlı bütçe kümesine sahip her kapalı P konisi (tüketim kümesi) için ve P nin her kesin monoton, lineer, sürekli $\succeq$ tercih bağıntısı için talep eşlemesinin mevcut olmasıdır.

İspat: P üzerinde her hangi bir kesin monoton, liner, sürekli $\succeq$ tercih bağıntısı için talep eşlemesinin mevcut olması demek, P üzerinde pozitif ve P ye kısıtlanışı sürekli olan her $f \in X^*$ fonksiyoneli, P konisinin herhangi lineer sürekli fonksiyonel tarafından tanımlanan her tabanında maksimumunu alır. Çünkü

$\succeq$ sürekli $\Rightarrow f|_P$ sürekli

$\Rightarrow$ Her $y \in B_w(f)$ için $x \succeq y$

$\Rightarrow f|_P(x) \geqslant f|_P(y)$

$\Rightarrow f|_P$, P nin her tabanında maksimumunu alır.

Dolayısıyla X **(*)** özelliğine sahiptir. Teorem 2.6.12. den X refleksiftir.

Rekabete dayalı değişim ekonomisinde talep eşlemesinin varlığı her zaman garanti edilememektedir. Aşağıdaki örnek bize bunu gösterir.

Örnek 2.8.6. $\langle l_2, l_2 \rangle$ Riesz ekonomisinde tüketim kümesi l_2^+ pozitif konisi olsun. Fayda fonksiyonu $u : l_2 \to \mathbb{R}$, $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{\frac{k}{2}}.\sqrt{x_k}$ şeklinde verilsin. $\omega = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \ldots)$ başlangıç miktarı ve $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots)$ fiyat vektörü için bütçe kümesi $B_w(p) = \{x \in l_2^+ : p(x) \leqslant p(w) = 1\}$ olsun. Yani bunun anlamı $p(w) > 0$ refah seviyesidir. $(p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.p_k)$

Bu durumda u ile temsil edilen tercih bağıntısı maksimal elemana sahip olamaz. Dolayısıyla talep eşlemesi mevcut değildir.

Çözüm:

$p.\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}.\frac{1}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1$

$x_n = (0, 0, \ldots, 2^n, 0, \ldots) \in l_2^+$ vektörü bütçe kümesine aittir. Çünkü,

$p(x_n) = 2^n.\frac{1}{2^n} = 1 = p(\omega)$ sağlanır.

Fakat $u(x_n) = (\frac{2}{3})^{\frac{n}{2}}.\sqrt{2^n} = (\frac{4}{3})^{\frac{n}{2}} \to \infty$ $(n \to \infty)$ olduğundan bütçe kümesi maksimal elemana sahip değildir. Bu durumda $\succeq$ tercih bağıntısı için talep eşlemesi yoktur. $\mathbf{x}_\omega(p) = \emptyset$

Araujo'nun makalesinde değindiği talep fonksiyonu ile refleksiflik arasındaki ilişkiyi hatırlarsak, talep fonksiyonunun varlığı uzayın refleksifliğini sağlıyordu. Ancak yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi uzayın refleksif olması talep fonksiyonlarının varlığını garantilemez.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışma boyunca konilerin tabana sahip olması durumunda bu tabanın sınırlı mı yoksa sınırsız mı olduğu araştırılmış ve koninin kapalı olmaması durumunda her iksine birden sahip olabildiği görülmüştür. Bu durumu ortadan kaldırmak için çalışılan koniler kapalı alınarak **dikotomi** yöntemi kullanılmıştır.

Kelime anlamı olarak dikotomi, iki zıt uçtan birinin seçilmesi anlamına gelmektedir. Örneğin sıcak ve soğuk kavaramlarından birini seçebilmek için kavramlardan sadece tekini bilmemiz yeterlidir. Benzer örnek koniler içinde verilmiştir. Kapalı koninin tabanının olması durumunda bu tabanın birinin sınırlı olması, sahip olduğu tüm tabanların sınırlı olduğunu göstermektedir. Biz de bu yönteme dayanarak bütçe kümesinin sınırlılığını ve dolayısıyla da talep eşlemesinin varlığını inceledik.

4. BULGULAR

Çalışmamızın yedinci kısmında talep fonksiyonları açıklanmış ve bunların varlığına dair bazı sonuçlar verilmiştir. Bunlara dayanarak rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün uzayının sonlu boyutlu olması durumunda tüketim kümesi P kapalı konisi olan bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesinin varlığı ispatlanmış ve bu sonuca dayanarak ürün uzayı sonsuz boyutlu X refleksif Banach uzayı ve tüketim kümesi $\sigma(X, X^*)$-kapalı koni alındığında bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesine sahip olması için **Önerme 2.7.7.** nin sağlanmasının gerektiği ispatlanmıştır. Bu bölümün sekizinci ve son kısmında lineer tercihler ve fayda fonksiyonları incelenmiştir. Fayda fonksiyonlarından yararlanarak talep eşlemesinin mevcut olmadığına dair bir örnek verilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın ikinci bölümünün ilk üç kısmında, kullanılacak olan temel kavramlar ve tanımlar verilmiş olup, dördüncü kısımda koniler için tabanlar tanımlanmış ve tüm reel değerli $\boldsymbol{s}$ dizi uzayı üzerinde kesin pozitif bir lineer fonksiyonelin tanımlanamayacağı ve dolayısıyla $\boldsymbol{s}$ nin her hangi bir konisinin tabanının mevcut olmadığı gösterilmiştir. Beşinci kısımda koniler için dikotomi sonucu verilmiştir. Altıncı kısımda talep fonksiyonları açıklanmış ve bunların varlığına dair bazı sonuçlar verilmiştir. Bunlara dayanarak rekabete dayalı değişim ekonomisinde ürün uzayının sonlu boyutlu olması durumunda tüketim kümesi P kapalı konisi olan bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesinin varlığı ispatlanmış ve bu sonuca dayanarak ürün uzayı sonsuz boyutlu X refleksif Banach uzayı ve tüketim kümesi $\sigma(X, X^*)$-kapalı koni alındığında bütçe kümesi üzerinde üst yarı sürekli $\succeq$ tercih bağıntısının talep eşlemesine sahip olması için $\exists\alpha > 0 \; \|x + y\| \geqslant \|x\| + \alpha\|y\| \; \forall x, y \in P$ koşulunun sağlanmasının gerektiği ispatlanmıştır. Bu bölümün sekizinci ve son kısmında lineer tercihler ve fayda fonksiyonları incelenmiştir. Fayda fonksiyonlarından yararlanarak talep eşlemesinin mevcut olmadığına dair bir örnek verilmiştir.

Çalışmamızın rekabete dayalı değişim ekonomisi ile ilgili olan kısımında Taylor-Foguel teoreminin uygulanması fikri ortaya çıkmıştır. Taylor, 1939 yılında X^* dual uzayının kesin konveks olması durumunda her $f \in M^*$ için aynı normun tek bir $F \in X^*$ genişlemesi olduğunu, ayrıca X refleksif ise tersinin de doğruluğunu ispatlamıştır. Foguel, 1958 yılında refleksiflik koşulunu düşürmüş, kesin konveks duale sahip X normlu uzayının her alt uzayında sürekli lineer fonksiyonelin tek bir genişlemesi olduğunu göstermiştir. X in konveksliğinin X^* nün düzgün olmasını sağladığına değinmiştik. Ayrıca refleksiflik ve düzgünlük koşulunun sağlanması uzayın dualinin kesin konveksliğini sağlamaktadır. Yani, X refleksif ve düzgün ise X^* kesin konveks koşulu sağlanmaktadır. Bu koşulun sağlanması bize tek bir fonksiyonelin genişlemesinden bahsettiğinden bu fonksiyonelin kesin pozitif olması durumunda bir koni tabanı belirler ki bu taban bizim çalışacağımız bütçe kümesidir. Başka bir deyişle ürün uzayının refleksif olması bize talep eşlemesinin varlığını garanti etmezken, bu özelliğe düzgünlüğü de ilave etmemiz fiyat uzayının kesin konveksliğini sağlayacağından bu fiyat vektörünün tanımladığı bütçe kümesi üzerinde talep eşlemesinin varlığını inceleme şansı verebilir. Bütçe kümesinin sınırlılığını garanti etmemiz durumunda talep eşlemesinin varlığından da söz edebiliriz. Buradan şu soruyu sorabiliriz: "Çalışmamızda değindiğimiz **(*)** özelliğine benzer bir karakterizasyon bu koşul için de sağlanabilir mi?" Bu şartın sağlanması bize talep eşlemesinin varlığını garanti edebilir. Çünkü **(*)** özelliğindeki koşullardan biri fonksiyonelin taban üzerinde maksimumunu almasından bahsetmektedir. Başka bir tabir ile talep eşlemesinin varlığından söz etmektedir.

Normunu alan fonksiyoneller kümesi $NA = X^*$ olması için gerek ve yeter koşul X Banach uzayının refleksif olmasıdır.(James teoremi) bu durumda benzer bir karakterizasyonun kurulması, normunu alan fonksiyonel tarafından tanımlanan bütçe kümesi üzerinde talep fonksiyonlarının varlığını incelememizi kolaylaştırabilir.

KAYNAKLAR

[1] ALIPRANTIS, C.D. , BROWN, D.J. ve BURKINSHAW, O., 1990, *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
[2] ALIPRANTIS, C.D. ve BURKINSHAW, O., 2003, *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*,Second Edition, American Mathematical Society Mathematical Surveys and Monographs Vol.105
[3] ALIPRANTIS, C.D., 1996, *Problems in Equilibrium Thory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
[4] ALIPRANTIS, C.D., 2007,*Cones and Duality*, American Mathematical Society Graduate Studies in Mathematics vol.84
[5] ARAUJO, A., 1988, The non-existence of smooth demand in general Banach spaces, *Journal of Mathematical Economics*, 17, 309-319
[6] JAMESON, O. , 1978, *Ordered Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics,Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
[7] MEGGINSON, R.E., 1998, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New YORK, Inc. North Holland Publishing Co., Amsterdam.
[8] POLYRAKIS, I.A., 2008, Demand function and reflexivity, *J. Math. Anal. Appl.* 338, 695 704
[9] RYNNE, B.P. ve YOUNGSTON, M.A., 2008, *Linear Functional Anaysis*,Second Edition, Springer-Verlag, London
[10] SEVILLA, M.J. ve MORENO, J.P., 1998, A note on norm attaining functional, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, no.7, 1989-1997

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında İstanbulda doğdum. 2001 yılında Bahçelievler Lisesi'nden mezun olup aynı yıl İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde eğitime başladım. 2006 yılında mezun oldum. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansa başladım. 2006 yılından bu yana İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmalarıma devam etmekteyim.