



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR
AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ**

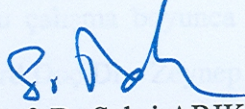
**Yük. Müh. Tolga ENSARİ
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman
Prof. Dr. Sabri ARIK
Haziran, 2009**

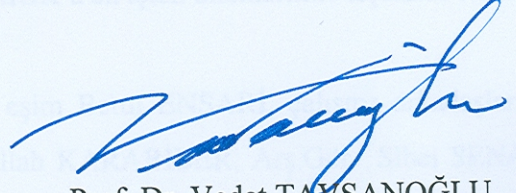
İSTANBUL

Bu çalışma 15/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı Bilgisayar Mühendisliği programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



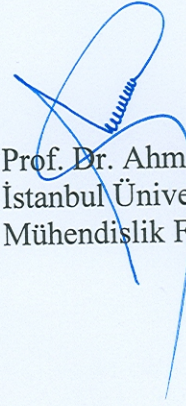
Prof. Dr. Sabri ARIK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Vedat TAVŞANOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi
Elektrik Elektronik Fakültesi



Doç. Dr. A. Halim ZAIM
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Ahmet SERTBAŞ
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Doç. Dr. Müştak Erhan YALÇIN
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Prof.Dr. Sabri ARIK'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen, çalışma arkadaşlarım Yrd.Doç.Dr. Zeynep ORMAN, Arş.Gör. Fethullah KARABİBER, Arş.Gör. Sibel SENAN KUCUR, Arş.Gör.Eylem Yücel DEMİREL, Arş.Gör.Dr. Neyir ÖZCAN SEMERCİ ve bana her zaman destek olan aileme teşekkürü borç bilirim.

Haziran, 2009

Tolga ENSARİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	5
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	9
3.1. MATRİS SINIFLARI.....	11
3.2. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE DENGE NOKTASI ANALİZİ.....	13
3.3. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ.....	14
3.3.1 Lyapunov Kararlılık Teoremi.....	15
3.3.2 Hurwitz Kararlılık Teoremi.....	16
3.3.3 LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi.....	17
4. GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ	
4.1. GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ.....	19
4.1.1 Gecikmesi Zamanla Değişen Yapay Sinir Ağlarının Kararlılık Analizleri ve Elde Edilen Yeni Kriterler.....	21
4.1.2 Karşılaştırmalar ve Sonuçlar.....	27
4.2. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ.....	29
4.2.1 Denge Noktasının Varlık ve Teklik Analizi.....	32
4.2.2 Denge Noktasının Kararlılık Analizi.....	34
4.2.3 Karşılaştırmalar ve Örnekler.....	37

4.3. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL ROBUST ÜSTEL KARARLILIĞI.....	40
4.3.1 Global Robust Üstel Kararlılık Analizi.....	43
5. BULGULAR.....	53
5.1. GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI.....	53
5.2. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI.....	53
5.3. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL ROBUST ÜSTEL KARARLILIĞI ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI.....	54
5.4. MATLAB SİMÜLASYONLARININ GERÇEKLEŞTİRİLMESİ.....	55
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	75
KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	77

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-1'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü	60
Şekil 5.2 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-1'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü.....	60
Şekil 5.3 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-2'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü.....	61
Şekil 5.4 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-2'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü.....	61
Şekil 5.5 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-3'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü.....	62
Şekil 5.6 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-3'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü	62
Şekil 5.7 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-4'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü	64
Şekil 5.8 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-4'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü	64
Şekil 5.9 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-5'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü	65
Şekil 5.10 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-5'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü	65
Şekil 5.11 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-6'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü	67
Şekil 5.12 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-6'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü	67
Şekil 5.13 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-7'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü	68
Şekil 5.14 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-7'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü	68
Şekil 5.15 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-8'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü	68

releri için sistemin çözümü	69
Şekil 5.16 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-8'deki sistem paramet- releri için sistemin çözümü	69
Şekil 5.17 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-9'daki sistem paramet- releri için sistemin çözümü	71
Şekil 5.18 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-9'daki sistem paramet- releri için sistemin çözümü	71
Şekil 5.19 : Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-10'daki sistem paramet- releri için sistemin çözümü	72
Şekil 5.20 : Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-10'daki sistem paramet- releri için sistemin çözümü	72

ÖZET

GEÇİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

Bu tez çalışmasında, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının dinamik davranışları ve kararlılık kriterleri incelenmiş, denge noktasının global kararlılığını ve üstel kararlılığını sağlayan yeni koşullar elde edilmiştir.

Özellikle, denge noktasının tek ve asimtotik kararlı olması gecikmeli yapay sinir ağlarında sıkça arzulanan bir özelliktir. Çünkü bu tür yapıya sahip sistemler özellikle karmaşık optimizasyon problemlerinin çözümünde çok etkili bir araç olmaktadır. Gecikmenin sabit olması durumunda, yapay sinir ağının istenen dinamik davranışı sergilemesi kolaylıkla sağlanabilmektedir. Ancak gecikmenin zamanla değişmesi durumunda sistemin matematiksel modeli kompleks bir yapı almakta ve analizler zorlaşmaktadır. Bu tez çalışmasında, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının tekliği ve asimtotik kararlılığını sağlayacak yeni koşullar elde edilmiş ve parametreleri üzerindeki genel kısıtlamalar oldukça esnek tutulmaya çalışılmıştır. Bu kararlılık koşulları, tanımlanan yeni Lyapunov fonksiyonlarının Lyapunov yaklaşımıyla test edilerek elde edilmiştir.

Kullanılan yapay sinir ağı modeli için bağlantı matrislerinin simetrik olmadıkları varsayılmıştır. Kullanılan nöron aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı, kesin artan ve türevi alınabilen gibi literatürde sıkça varsayılan özellikler, bu tez çalışmasında göz önüne alınmamış ve daha genel aktivasyon fonksiyonları kullanılmıştır.

Gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağları için elde edilen sonuçların özgünlüğünü göstermek için, bu sonuçlar daha önce literatürde elde edilmiş olan diğer kararlılık kriterleri ile ayrıntılı olarak karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar, hem teorik hem de uygulamalı örnekler verilerek, bu çalışmada elde edilen sonuçların birçok durumda daha önceki sonuçlara göre daha avantajlı olduğunu göstermektedir.

SUMMARY

STABILITY ANALYSIS OF NEURAL NETWORKS WITH TIME VARYING DELAYS

In this thesis, we present some sufficient conditions for the existence, uniqueness and global asymptotic and exponential stability of the equilibrium point for neural networks with constant and time varying delays. Some of these stability conditions are derived by employing new Lyapunov functionals. The obtained results establish different relationships between the network parameters of the neural system depending or independent on the delay parameters. In obtaining the stability conditions, the restrictions on the network parameters are very much relaxed. We do not use the symmetry condition on the interconnection matrices. We also do not assume the boundedness and strictly increasingness of the functions.

In order to show the novelty of our results, we compare our results with the previous stability results derived in the literature. On the other hand, to prove the effectiveness of results we give some numerical examples together with the simulation results.

1. GİRİŞ

Gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı modelleri, özellikle hareket içeren sistemlerin dinamik davranışını modellemek için yaygın olarak kullanılmıştır. Gecikmeli Hopfield sinir ağları ve hücresel sinir ağları gibi farklı matematiksel modeller ile ifade edilen yapay sinir ağı sistemleri, özellikle son yıllarda birçok mühendislik probleminin çözümünde araç olarak kullanılmaktadır [20, 21]. Bu uygulamalarda genel olarak işlenecek bilginin kararlı durum formunda olması istendiğinden denge noktasının tek ve asimtotik kararlı olması önemli bir gerekli koşuldur. Çünkü bu tür yapıya sahip sistemler özellikle karmaşık optimizasyon problemlerinin çözümünde çok etkili bir araç olmaktadır. Gecikmenin sabit olması durumunda, yapay sinir ağının istenen dinamik davranışı sergilemesi kolaylıkla sağlanabilmektedir. Ancak gecikmenin zamanla değişmesi durumunda sistemin matematiksel modeli kompleks bir yapı almakta ve analizler zorlaşmaktadır. Bu tezin amacı, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının tekliği ve asimtotik kararlılığını sağlayacak yeni koşullar elde etmektir.

Son yıllarda, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının tasarlanması önemli çalışma alanlarından biri olmuştur. Birçok araştırmacı, farklı yapay sinir ağı modellerinin denge noktası ve kararlılık özellikleri üzerine çok sayıda çalışmalar yapmış ve denge noktasının tekliği, global asimtotik kararlılığı ve üstel kararlılığı gibi kararlılığın çeşitli türleri için farklı yeterli koşullar elde etmişlerdir [3, 13, 15, 16, 25-33, 39, 41, 43, 56, 57].

Yapay sinir ağlarının kararlılık özellikleri, genelde uygulandığı problemin yapısına bağlı olarak belirlenmektedir. Yapay sinir ağları son zamanlarda, örüntü sınıflandırmada ve optimizasyon problemlerinde kullanılmaktadır. Örneğin, yapay sinir ağı, optimizasyon problemlerini çözmek için kullanıldığında, başlangıç koşullarından bağımsız, sadece tek bir denge noktası olacak şekilde tasarlanmalı ve bu denge noktası global asimtotik kararlı olmalıdır [19]. Bununla birlikte, bir yapay sinir ağı, çağrışımlı bellek olarak tasarlandığında, başlangıç koşullarına bağlı olarak birden fazla denge noktasının olması istenir.

Bu tezin amacı ise, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının, başlangıç koşullarından bağımsız ve kararlı tek bir denge noktasına yakınsaması için yapılan analizleri içermektedir.

1980'lerin başında Hopfield, bir dinamik yapay sinir ağı modeli geliştirmiş ve sistem kararlılığını analiz etmek için Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılan bir enerji fonksiyonu önermiştir. Hopfield ele aldığı yapay sinir ağında, bağlantı matrisinin simetrik ve aktivasyon fonksiyonunun da sigmoid olduğunu gözönüne alarak, bu Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevinin negatif olduğunu göstermiştir. Bu da, sistemin global kararlı olduğu anlamına gelmektedir [19]. Yani, sistemin tüm çözümleri kararlı bir denge noktasına yakınsamaktadır. Bu nedenle, yapay sinir ağlarında, simetrik bağlantı matrisinin kullanılması, sistemin global kararlılığı için yeterli bir koşuldur.

Ayrıca, simetrik olmayan bağlantı matrislerinin kullanılması, yapay sinir ağlarında limit döngülerine, yani kararlı olmayan denge noktalarına yol açabilir.

Hopfield-tipi yapay sinir ağlarında, bağlantı matrisinin simetrik olma koşulu, global kararlılığı sağladığı halde, denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığı için her zaman yeterli bir koşul olmayabilir. Yapay sinir ağlarında global asimtotik kararlılığı belirlemek için, bağlantı matrisi üzerine daha fazla kısıtlama koymak gerekir. Bu kısıtlamalar da, kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının özelliklerine bağlıdır. Bu nedenle, bu tip yapay sinir ağlarının tasarlanmasında, gözönünde bulundurulması gereken iki önemli özellik vardır :

- (i) Bağlantı matrisi üzerine getirilen koşullar,
- (ii) Aktivasyon fonksiyonunun karakteristiği.

Hopfield-tipi yapay sinir ağlarında, aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve monoton artan oldukları varsayılmaktadır. Sınırlı fonksiyonların kullanılması, bir denge noktasının varlığını garantiler. Bununla birlikte, bu varsayımlar, yapay sinir ağlarının uygulama alanlarını kısıtlamaktadır. Örneğin, sınırlı ve monoton artan fonksiyonların kullanılması, bazı optimizasyon problemlerinin çözümü için uygun değildir. Ancak sınırlı olmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması durumunda da, denge noktasının varlığı incelenmelidir.

Son zamanlarda zaman gecikmeli veya zaman gecikmesiz farklı sınıflara ait yapay sinir ağlarının denge ve kararlılık özellikleriyle elde edilen sonuçlar, işaret işleme, optimizasyon ve kontrol problemleri gibi pratik uygulamalarda çok büyük öneme sahiptir [4, 36-38]. Yapay sinir ağlarının, özellikle, paralel hesaplama, nöral kontrol, optimizasyon ve işaret işleme gibi tasar-

lanan sistemlerinde, global asimtotik kararlı denge noktası bulunmaktadır. [4, 36-51]'de sunulan referanslarda farklı sınıflara ait yapay sinir ağı modellerinde çeşitli kararlılık sonuçları sunulmuştur. Yapay sinir ağlarının istenen kararlılık özellikleri, sistemin ağ parametreleri üzerinde sınırlayıcı koşullar getirilerek saptanmıştır.

Bunun yanında, yapay sinir ağlarının donanım uygulamalarında, sistemin ağ parametreleri tasarımdaki elektronik bileşenler üzerindeki tolerans değerler üzerinde bazı değişikliklere yol açmaktadır. Bu durumda, yapay sinir ağının kararlılık özelliklerinin parametrelerde oluşabilecek küçük değişikliklerden etkilenmemesi istenir. Yani, sistem global robust kararlı olmalıdır. Literatürde ([52]-[56]) son zamanlarda, gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust kararlılığıyla ilgili sonuçlar da sunulmuştur. Gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının dinamik davranışlarının analiz edilmesi, görüntü işleme, örüntü tanıma, çağrışimli bellek tasarımı ve bazı optimizasyon problemlerinin çözümü gibi uygulama alanlarında oldukça önemli rol oynamaktadır.

Bilindiği üzere, gerçek zamanlı hesaplamalarda, sistemin hızlı bir şekilde denge noktasına yakınsaması oldukça önemlidir. Bu hesaplamaların hızını belirlemek için de genellikle üstel yakınsama hızı kullanılır. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının üstel kararlılıklarının belirlenmesi, sadece teorikte değil uygulama alanında da oldukça önemli bir özelliktir.

Yapay sinir ağları, elektronik devreler ile gerçekleştirildiğinden, kuvvetlendiricilerin sonlu anahtarlama hızları ve nöronlar arasındaki iletişim zamanı, gecikmelere yol açmaktadır [60]. Zaman gecikmeleri, osilasyonlara ve dolayısıyla ağların kararsızlığına neden olmakta ve bu şekilde sistemlerin dinamik davranışlarını etkilemektedir [22]. Bu nedenle, denge ve kararlılık özellikleri üzerinde, zamandan kaynaklanan gecikmelerin belirlenmesi, yapay sinir ağları için oldukça önemlidir.

Bu tez çalışmasının amacı, daha genel Lyapunov fonksiyonları kullanarak, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağları için, denge noktasının varlığı ve tekliği, global asimtotik ve üstel kararlılığı hakkında yeni yeterli koşullar elde etmektir.

Tezin Genel Kısımlar bölümünde, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi ile ilgili bugüne kadar yapılmış çalışmalar geniş ve basit bir şekilde incelenecektir. Tezin, Malzeme ve Yöntem bölümünde, denge noktası kriterleri belirlenmeye

çalışılırken kullanılan bazı matris sınıflarından ve matris ve vektör normlarından bahsedilecektir. Daha sonra, doğrusal olmayan sistemlerde denge noktası analizi ve bu analiz için kullanılan bazı kararlılık teoremleri verilecektir. Dördüncü bölüm olan Gecikmesi Zamanla Değişen Yapay Sinir Ağlarının Kararlılık Analizi'nde ise yapay sinir ağı modelleri ve gelişimleri hakkında bazı genel bilgilerden bahsedilecektir.

Bu bilgilerden ve daha önce elde edilmiş kararlılık koşullarından hareketle, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığının ve tekliğinin analiz edilmesinden sonra, denge noktasının kararlılığı için yeni sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Bulgular kısmında, elde edilen yeni kararlılık koşulları, literatürde daha önceden yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacak ve bu karşılaştırmalar örneklerle ve bilgisayar uygulamaları ile desteklenecektir.

2. GENEL KISIMLAR

Yapay sinir ağlarının dayandığı ilk hesaplama modelinin temeli, 1943 yılında McCulloch ve Pitts tarafından yapılan yapay nöron tanımlanması ile ortaya çıkmıştır [62]. Bu nöron, biyolojik nöronlardan esinlenerek, yapay sinir ağının temel birimi olarak gösterilmiştir. McCulloch-Pitts nöron modelinde, iki durumlu eşik seviyesine sahip nöronlarla istenilen sayısal işlevlerin gerçekleştirilebileceği gösterilmiştir. Bu model, basit sayısal işlevlerden yararlanılarak daha karmaşık hesaplamaların ve işlevlerin yapılabilmesine işaret etmiştir.

Son yıllarda yapay sinir ağları oldukça farklı pratik problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Şimdi kısaca literatürde kullanılan yapay sinir ağı modellerinin genel bir incelemesini sunacağız:

İlk olarak, Hopfield tarafından önerilen yapay sinir ağı modelini ele alalım. Gecikme parametresi olmayan bu yapay sinir ağı modelinin dinamik davranışı, aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlanmıştır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Yukarıda tanımlanan diferansiyel denklem, vektör-matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + u \quad (2.1)$$

Yukarıdaki denklemde, $x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ nöron durum vektörünü, $C = \text{diag}(c_i)$ pozitif bir diyagonal matrisi, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ nöronlar arasındaki bağlantı katsayıları matrisini, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ sabit girişi ve $g(x(t)) = [g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \dots, g_n(x_n(t))]^T$ nöron aktivasyon fonksiyonunu temsil etmektedir.

Diğer yandan, yapay sinir ağları elektrik devreler ile gerçekleştirilmek istendiğinde, kullanılan kuvvetlendiricilerin sonlu anahtarlama hızlarından ve bağlantı zamanından kaynaklanan zaman gecikmeleri meydana gelmektedir [63]. Bu zaman gecikmeleri yapay sinir ağlarının osilasyon yapmasına, kararlı hal durumundan kararsız hal durumuna geçmesine, periyodik çözümler üret-

mesine kadar farklı dinamik davranışlar göstermesine neden olur [22]. Bu yüzden gecikme parametresinin sistem denklemlerine ilave edilerek, sistemin analizinin bu duruma göre yapılması son derece önemlidir.

[22]'de Marcus ve Westerveld τ olarak tanımladıkları zaman gecikmesini (2.1) denklemine ekleyerek aşağıda verilen gecikmeli yapay sinir ağı modelini önermişlerdir:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau)) + u_i, \forall i \quad (2.2)$$

(2.2) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağı modelinin dinamik davranışını karakterize eden koşulların elde edilmesi ile ilgili literatürde oldukça fazla çalışma yapılmıştır. Bu yapay sinir ağı modelinin en önemli dinamik davranış özelliklerinden bir tanesi, sistemin belirli koşullar altında global kararlı olmasıdır. Bu da sistemin tüm çözümlerinin sabit bir denge noktasına yakınsaması anlamına gelmektedir. Özellikle bu tür yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi ile ilgili literatürde yayınlanmış önemli çalışmalar bulunmaktadır [3, 13, 15, 16, 25-33].

[23]'te Gopalsamy ve He, τ_{ij} farklı zaman gecikmelerini sistem denklemine ekleyerek (2.3) denklemini elde etmişlerdir. [23]'te önerilen yapay sinir ağı modeli şu formda olacaktır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \forall i \quad (2.3)$$

Diğer taraftan, gecikmeli hücreli yapay sinir ağı modeli olarak adlandırılan yeni bir yapay sinir ağı modeli [21]'de önerilmiş ve aşağıda gösterilen durum denkleminde tanımlanmıştır:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau)) + u \quad (2.4)$$

Joy [24]'te, hem Hopfield yapay sinir ağı modelini hem de hücreli yapay sinir ağlarının hibrit ağ modelini genelleştirerek elde ettiği gecikmeli fonksiyonel diferansiyel denklemi üzerinde çalışmıştır. [24]'te çalışılan model aşağıdaki formdadır:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \forall i \quad (2.5)$$

Gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı modeli, çeşitli mühendislik problemlerinin çözümünde, hesaplama teknolojisinde yaygın bir biçimde kullanılmıştır. Bunun için, kullanılan yapay sinir ağı modeli aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanmıştır:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

$\tau_{ij} = \tau_j$ için yukarıdaki diferansiyel denklem, aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Yukarıdaki diferansiyel denklem vektör-matris formunda yazılırsa:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau(t))) + u \quad (2.7)$$

Bu modelde, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ nöron durum vektörünü, C pozitif diyagonal bir matris, A ve B nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrislerini, $g(x(t)) = (g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \dots, g_n(x_n(t)))^T$ ve $g(x(t - \tau)) = (g_1(x_1(t - \tau_1(t))), g_2(x_2(t - \tau_2(t))), \dots, g_n(x_n(t - \tau_n(t))))^T$ gecikmesiz ve gecikmeli durumdaki nöron aktivasyonlarını ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü göstermektedir.

Yukarıda matematiksel modelleri verilmiş olan yapay sinir ağlarının dinamik davranışını analiz eden ve özellikle de kararlılığı sağlayan koşulların elde edildiği oldukça fazla sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda, çoğunlukla analizi yapılan yapay sinir ağının denge noktasının global kararlı, global asimtotik kararlı, global üstel kararlı ve robust kararlı olması gibi farklı kararlılık özellikleri çalışılmıştır.

Gecikmeli sistemlerin modellenmesinde, sabit zaman gecikmelerinin kullanılması, genellikle az sayıda hücreye sahip olan basit devreler için yeterlidir. Ancak, yapay sinir ağlarının elektronik gerçeklemesinde oluşan gecikmelerin de zamanla değişebileceği dikkate alınmalıdır. Bu nedenle, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarıyla ilgili yapılan çalışmalar, sabit gecikmeli olanlara göre daha önemli ve gerçekçidir.

Bu tez çalışmasının temel amacı, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı sistemlerinin dinamik davranışlarının analiz edilmesidir. Bu kapsamda yaptığımız ilk çalışmada, daha genel Lyapunov fonksiyonları kullanılarak gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağları için denge noktasının varlığı ve tekliği, global kararlılığı için yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen koşullar, literatürde daha önce elde edilmiş olan kararlılık koşulları ile karşılaştırılmaktadır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda, elde edilen koşulların kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının özellikleri açısından daha genel ve daha az kısıtlayıcı oldukları gösterilmiştir. Kullandığımız yapay sinir ağı modeli zamanla değişen gecikmeye sahip olduğundan ve aktivasyon fonksiyonları üzerinde yapılan kısıtlamalar daha esnek olduğundan, yapay sinir ağlarının daha geniş bir hali ele alınmış olmaktadır.

Bu tezin kapsamında yaptığımız ikinci çalışmada ise, çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global kararlılıkları için sonuçlar elde edilmiştir. Yine burada elde edilen sonuçlar, literatürdeki daha önce elde edilmiş sonuçlar [52-56] ile karşılaştırılmış ve bizim sonuçlarımızın birçok durumda avantajlı olduğu örnekler ile gösterilmiştir. Bu nedenle, elde edilen sonuçlar, karşılaştırma yapılan makalelerde verilen sonuçlara bir alternatif olarak düşünülebilir.

Yine bu tez kapsamında yaptığımız üçüncü çalışma ise, çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust üstel kararlılığıdır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının varlık, teklik ve global üstel kararlılığıyla ilgilidir. Bu sonuçlar, literatürde daha önce yayınlanan bazı sonuçları genelleştirmektedir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık özelliklerini karakterize etmekte matrisler büyük önem taşır. Yapay sinir ağlarında denge noktasının kararlılığı, genel olarak, incelenen sistemin bağlantı matrisi elemanlarına uygulanan kısıtlama koşullarına dayanır. Başka bir deyişle, bağlantı matrisi üzerindeki kısıtlayıcı koşullar, dinamik yapay sinir ağı sisteminin kararlı durum davranışını belirler. Bu nedenle matris teorisi ve matris özelliklerinin incelenmesi, yapay sinir ağlarının dinamik davranışının analizinde önemli yardımcı bir araç olacaktır.

Aşağıda bu tezin kapsamı açısından önemli olduğu düşünülen matris sınıflarıyla ilişkili temel tanımlar ve bu matris sınıflarına ait bazı önemli özellikler verilecektir.

Öncelikle bu tezde kullanılan bazı temel gösterimler ifade edilecektir. Matrisler büyük harfler ile gösterilecektir. Örneğin; A, P . Bir A matrisinin evriği A^T şeklinde gösterilir. Burada üst simge T , evriği ifade eder. A^T , A matrisinin satırları ile sütunları yer değiştirilerek oluşturulur. Simetrik bir A matrisi için, $A = A^T$ 'dir. A^{-1} , A matrisinin tersini göstermektedir. λ_i , verilen herhangi bir A matrisinin i . özdeğerini gösterir. $\lambda_M(A)$ ve $\lambda_m(A)$ sırayla, A matrisinin maksimum ve minimum özdeğerlerini göstermektedir. $\det(A)$, A matrisinin determinantını ifade eder. Kesin pozitif (yarı kesin pozitif tanımlı) köşegen bir P matrisi, $P = \text{diag}(p_i) > 0$ ($P = \text{diag}(p_i \geq 0)$) ile gösterilecektir. Vektörler küçük harfler ile gösterilecektir. Örneğin; x, y . x_1, x_2, \dots, x_n sayıları, x vektörünün bileşenleridir. x 'in evriği x^T ile gösterilir ve $x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ olarak tanımlanır. x^T , bir satır vektörüdür.

Tüm n -boyutlu vektörlerin kümesi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ile gösterilir. Burada x_1, x_2, \dots, x_n gerçekte sayıdır ve n -boyutlu Öklid uzayı olarak tanımlanır, R^n şeklinde gösterilirler. Tüm gerçekte sayıları içeren tek-boyutlu Öklid uzayı R ile gösterilir.

Bir $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan reel-değerli bir fonksiyondur :

- $\forall x \in R^n$ için $\|x\| > 0$ ve sadece $x = 0$ için $\|x\| = 0$.

- $\forall x, y \in R^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\forall \alpha \in R$ ve $\forall x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Bir x vektörünün p . normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

En çok kullanılan üç vektör normu $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ ve $\|x\|_\infty$ 'dur.

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Bir $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi için en çok kullanılan üç matris normu aşağıdaki şekildedir :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = [\lambda_{max}(A^T A)]^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3.1. MATRİS SINIFLARI

Bu bölümde bazı matris sınıflarının tanımları verilmiştir :

Tanım 3.1.1

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bütün özdeğerleri sıfırdan büyük ise, bu A matrisi kesin pozitif tanımlıdır ve $A > 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.2

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bazı özdeğerleri sıfırdan büyük ve bazı özdeğerleri sıfıra eşit ise, bu A matrisi yarı kesin pozitif tanımlıdır ve $A \geq 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.3

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bütün özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ise, bu A matrisi pozitif kararlıdır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.4

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ve bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfıra eşit ise, bu A matrisi pozitif yarıkararlıdır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H_o -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H_o$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.5

Herhangi bir $A = (a_{ij})$ matrisinin elemanları $a_{ii} \geq 0$ ve $a_{ij} \leq 0$ özellikleri ile verilmiş olsun. Bu özelliklere sahip A matrisinin Z_n kümesinin bir elemanı olduğu kabul edilir.

Tanım 3.1.6

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi pozitif kararlı bir matris ise, bu durumda A matrisi tekil olmayan M-matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.7

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi pozitif yarıkararlı bir matris ise, bu durumda A matrisi M-matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K_o$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.1.8

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, kesin köşegen satır baskın bir matristir.

Tanım 3.1.9

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, köşegen satır baskın bir matristir.

Tanım 3.1.10

A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, kesin köşegen sütun baskın bir matristir.

Tanım 3.1.11

A $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa :

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n$$

bu A matrisi, köşegen sütun baskın bir matristir.

3.2 DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERDE DENGE NOKTASI ANALİZİ

Bu bölümde doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık teorisinden elde edilen bazı temel sonuçlardan sözedilmesi yararlı olacaktır.

Aşağıdaki doğrusal olmayan dinamik sistemi ele alalım :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu sistem, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum vektörü olmak üzere, basit olarak şu şekilde gösterilebilir :

$$\dot{x} = f(x)$$

$f(x^*) = 0$ koşulunu sağlayan sabit bir x^* vektörü bu dinamik sistemin denge noktasıdır. Çoğunlukla, sistemin denge noktası yakınlarındaki davranışı ile ilgilenilmektedir. Denge noktası civarındaki sistem yörüngelerinin denge noktasına yakınsaması, ayrılması ya da bu nokta etrafında osilasyon yapması gibi davranışları incelenmeye çalışılmaktadır.

$\dot{x} = f(x)$ eşitliğinin çözümünün olması ve bu çözümün de tek olması için, $f(x)$ fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koyulmalıdır. En azından bir çözümün olabilmesi için, $f(x)$ 'in tüm argümanlarının zamana göre sürekli olması yeterli bir koşuldur. Ancak, bu koşul tek başına çözümün tekliğini garanti etmez. $\dot{x} = f(x)$ sistemi analiz edilirken genel olarak fonksiyonun Lipschitz olduğu varsayılır.

Bir $f(x)$ fonksiyonu, tüm x ve y vektörleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, Lipschitz süreklidir:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonunun Jacobian'ı, tüm x değerleri için sınırlı ise, bu fonksiyon Lipschitz süreklidir [35]. Yukarıdaki eşitsizlikte, L , pozitif Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. Çözümün varlığı ve tekliği, $f(x)$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olması ile garanti edilir.

Dinamik analizleri basitleştirmek açısından, ele aldığımız sistemin denge noktasının orijinde olduğu varsayılacaktır. Daha sonraki bölümlerde göstereceğimiz şekilde, herhangi bir denge noktası değişkenleri değiştirme yolu ile orijine ötelenebilir. Aynı zamanda, $f(x)$ fonksiyonunun, $f(0) = 0$ koşulunu sağladığı varsayılacaktır.

Bir sonraki bölümde ele alınacak olan teoremler, denge noktasının kararlılığı ya da asimtotik kararlılığının belirlenmesi için kullanılmaktadır.

3.3 DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN KARARLILIK TEOREMLERİ

Doğrusal olmayan dinamik bir sistemin denge noktası x^* , herhangi bir pozitif ε için, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan pozitif bir δ varsa kararlıdır :

$t > 0$ olmak üzere,

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

Kararlı bir sistemde, tüm $x(t)$ çözümleri, denge noktasının yakın komşuluğundaki yerlerde bulunur. Bu şekilde birden fazla kararlı denge noktası olabilir.

x^* denge noktasının asimtotik kararlı olması için, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif bir δ vardır :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Asimtotik kararlılıkta, tek bir denge noktası vardır ve t sonsuza giderken, tüm $x(t)$ çözümleri bu denge noktasına yakınsamaktadır.

Doğrusal olmayan dinamik sistemler için, denge noktasının asimtotik kararlılığı enerji fonksiyonlarının yardımı ile incelenebilir. Bu tip enerji fonksiyonları aynı zamanda, Lyapunov fonksiyonları olarak da adlandırılır. Bu fonksiyonlar, 1900'lü yılların başlarında, diferansiyel eşitliklerin kararlılığını göstermek için Alexander Lyapunov tarafından ortaya atılmıştır.

3.3.1 Lyapunov Kararlılık Teoremi

Denge noktasının kararlılığı genellikle, pozitif enerji fonksiyonunun tanımlandığı ve denge noktasının kararlılık özellikleriyle ilgili bir sonuç çıkarmak için bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin incelendiği Lyapunov yöntemiyle karakterize edilir.

Teorem 3.3.1.1 (Lyapunov) [35]

$\dot{x} = f(x)$ ile verilen sistem için denge noktası $x = 0$ olsun. $V(x) : R^n \rightarrow R$ sürekli, türevi alınabilir bir fonksiyon olsun. $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi $\dot{V}(x)$ ile gösterilir ve aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir :

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x_i) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

Eğer

$$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \neq 0 \text{ ve } \dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in R^n$$

ise $x = 0$ kararlıdır. Ayrıca,

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$$

ise $x = 0$ asimtotik kararlıdır. Diğer taraftan,

$$\dot{V}(x) > 0, \forall x \neq 0$$

ise $x = 0$ kararsızdır.

Bu teoreme göre, $V(x)$ fonksiyonunun zamana göre türevi yarı negatif tanımlı olan (yani, $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$), sürekli türevi alınabilen pozitif tanımlı bir fonksiyon (yani, orijinin her

komşuluğunda $\forall x \neq 0$ olmak üzere, $V(x) > 0$ bulabilirsek denge noktası kararlıdır. Eğer $\dot{V}(x)$ kesin negatif tanımlı (yani, $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$) ise orijin asimtotik kararlıdır. Son olarak, eğer $\dot{V}(x)$ pozitif tanımlı (yani, $\dot{V}(x) > 0, \forall x \neq 0$) ise orijin kararsızdır.

Bu teorem Lyapunov'un Direkt Metodu olarak adlandırılır. Bu metodun üstünlüklerinden biri denge noktasının kararlılık özelliklerini, sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden belirlememizi sağlamasıdır. Ancak Lyapunov fonksiyonunun bulunması için bir yöntem bulunmamaktadır. Uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunabilirse, sistemin kararlılığı belirlenebilir. Bununla birlikte, herhangi bir Lyapunov fonksiyonu bulunamazsa, bu sistemin kararsız olduğu anlamına gelmemektedir.

3.3.2 Hurwitz Kararlılık Teoremi

Teorem 3.3.2.1 (Hurwitz) [35]

$x = 0$, $\dot{x} = f(x)$ ile tanımlanmış sistemin denge noktası olsun. $\dot{x} = f(x)$ sisteminin, $x = 0$ civarında lineerleştirilmiş modeli aşağıdaki ifade ile verilir :

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

Burada A , $\dot{x} = f(x)$ sisteminin Jacobian 'i olarak isimlendirilir.

$\dot{x} = f(x)$ sisteminin orijini, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmının negatif ya da sıfır olması durumunda kararlıdır.

Ayrıca A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise orijin asimtotik kararlıdır. A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif olduğunda, A matrisine kararlılık matrisi ya da Hurwitz matrisi denir.

Eğer A 'nın, reel kısmı pozitif olan en az bir özdeğeri varsa, orijinin kararsız olacağı söylenir.

Aslında yukarıdaki teoremler denge noktası için aynı asimtotik kararlılık sonucunu belirtir. Bu iki teorem arasındaki bağı bulmak için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu ele alalım :

$$V(x) = x^T P x$$

Burada P reel simetrik pozitif tanımlı bir matristir. $V(x)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki Lyapunov denklemi ile verilir:

$$\dot{V}(x) = x^T [PA + A^T P] x = -x^T Q x$$

Burada Q aşağıdaki şekilde tanımlanmış simetrik bir matristir :

$$-Q = PA + A^T P$$

Her pozitif tanımlı Q matrisi için, Lyapunov denklemini sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi varsa, A , "kararlılık matrisi"dir. Buradan, eğer Q pozitif tanımlı ise, Lyapunov kararlılık teoremine göre, $\dot{x} = f(x)$ 'in orijininin asimtotik kararlı olduğu sonucuna varabiliriz, yani, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatiftir.

Bir sonraki teorem, Lyapunov teoreminin daha genel bir ifadesi olan LaSalle'nin Değişmezlik İlkesidir. Bu teorem denge noktalarının yerel ve global asimtotik kararlılığı ile ilgilenir.

3.3.3 LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi

Teorem 3.3.3.1 (LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi) [35]

$\dot{x} = f(x)$ sistemi için denge noktası, $x = 0$ olsun. $V(x) : D \rightarrow R$, D içinde $\dot{V}(x) < 0$ şeklinde, orijinin D komşuluğunda sürekli türevi alınabilen pozitif tanımlı fonksiyon olsun.

$$S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

olsun. Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin asimtotik kararlıdır.

$\dot{x} = f(x)$ sistemi için denge noktası, $x = 0$ olsun. $V(x) : R^n \rightarrow R$ her $x \in R^n$ için $\dot{V}(x) < 0$ şeklinde, sürekli türevi alınabilen, radyal sınırlı olmayan pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun (yani, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x) \rightarrow \infty$).

$$S = \{x \in R^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

olsun. Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin global asimtotik kararlıdır.

Lyapunov teoreminden farklı olarak, LaSalle teoremi $V(x)$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olmasını gerektirmez. Bununla birlikte, radyal sınırsızlığı kontrol etmek pozitif tanımlı fonksiyonlar için daha kolaydır. Eğer fonksiyon pozitif tanımlı değilse, bu radyal sınırsızlık için yeterli olmayabilir. Örnek olarak, şu fonksiyonu düşünelim :

$$V(x) = (x_1 - x_2)^2$$

$x_1 = x_2$ için $V(x) = 0$ 'dır. Yani, $\|x\| \rightarrow \infty$ olmasına rağmen, $V(x)$ sonsuza gitmez.

Not 3.3.1

Şunu önemle belirtmek gerekir ki, $\dot{x} = f(x)$ 'in orijini yerel veya global asimtotik kararlı denge noktası ise, bu, sistemin tek denge noktası olmak zorundadır. Bu nedenle, birden çok denge noktası olan sistemler için asimtotik kararlılık söz konusu değildir. Aynı zamanda, bir denge noktasının yerel asimtotik kararlılığının, onun global asimtotik kararlılığı için gerekli olduğunu da belirtmek gerekir.

Not 3.3.2

$\dot{x} = f(x)$ 'in denge noktası olan orijin kararlı fakat asimtotik kararlı değilse, orijin sistemin tek denge noktası olmayabilir. Bu da, sistem ilk koşullara bağlı olarak kararlı denge noktalarından birine yakınsayabilir anlamına gelmektedir. Bu durumda, orijin belirli bir denge noktasına yakınsamıştır veya global kararlıdır.

4. GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

Dinamik yapay sinir ağları, son yıllarda örüntü tanıma, çağrışımlı bellek tasarımı ve optimizasyon problemlerinin çözümünde başarı ile uygulanan bir sistem olmuş ve bu tür sistemlerin dinamik davranışını analiz eden önemli çalışmalar yapılmıştır. Özellikle optimizasyon problemlerini çözmek için tasarlanan yapay sinir ağlarının sisteme dışarıdan uygulanan her giriş vektörü için, global asimtotik kararlı tek bir denge noktasına yakınsaması istenir. Bu nedenle, dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi, uygulamalı tasarımlar için kaçınılmazdır. Literatürde, dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının tekliği ve asimtotik kararlılığı kapsamlı bir biçimde çalışılmış ve bu alanda oldukça yararlı sonuçlar elde edilmiştir. [1-17]. Bu tezde, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının denge noktasının tek ve global asimtotik kararlı olması için alternatif sonuçlar sunacağız.

4.1 GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde aşağıdaki diferansiyel denklem modeli ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin kararlılık analizini gerçekleştireceğiz.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

(4.1) modeli, vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Ag(x(t)) + Bg(x(t - \tau(t))) + u \quad (4.2)$$

Bu denklemde, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ nöron durum vektörünü, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n \times n}$ sırasıyla gecikmesiz ve gecikmeli durumda nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrislerini, $C = \text{diag}(c_i > 0)$ pozitif bir diyagonal matrisi, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ sabit giriş vektörünü, $g(x(t)) = (g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \dots, g_n(x_n(t)))^T$ nöron

aktivasyonlarını ve $g(x(t - \tau)) = (g_1(x_1(t - \tau(t))), g_2(x_2(t - \tau(t))), \dots, g_n(x_n(t - \tau(t))))^T$ gecikmeli durumdaki nöron aktivasyonlarını göstermektedir.

Bu tezin önemli bir bölümünde (4.2) ile ifade edilen gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı için denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığı ile ilgili yeni yeterli koşulların elde edilmesi üzerinde durulmuştur. Yapay sinir ağlarının kararlılık analizinin gerçekleştirilmesinde önemli bir yer tutan Lyapunov Teoremleri yardımıyla, yeni Lyapunov fonksiyonları geliştirilerek (4.2) ile ifade edilen dinamik modelin denge noktasının tek ve global asimtotik kararlı olması için yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Elde edilen koşulların önemli bir özelliği sadece sistem parametrelerine bağlı olarak da ifade edilebilmeleridir. Diğer yandan, elde edilen kararlılık koşullarının sistem parametreleri ve gecikme parametresi arasında kurulan ilişkileri de içerdiğini belirtmeliyiz.

Literatürde, global asimtotik kararlılıkla ilgili elde edilen sonuçlarda, daha önce de bahsedildiği gibi, sınırlı ve monoton artan, sınırlı ve monoton olmayan, sınırsız ve eğim-sınırlı monoton olmayan fonksiyonlar gibi ([19]-[34]) farklı aktivasyon fonksiyonu sınıfları kullanılmıştır. Pratik uygulamalar açısından en fazla kullanılan iki farklı sınıf aktivasyon fonksiyonuna ait matematiksel koşullar aşağıda verilmektedir:

$$0 \leq \frac{g_j(\xi_1) - g_j(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

$$0 < \frac{g_j(\xi_1) - g_j(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

$\xi_1, \xi_2 \in R$, $\xi_1 \neq \xi_2$ ve σ_j pozitif bir sabittir.

Burada da görüldüğü gibi, (4.3) koşulunu sağlayan aktivasyon fonksiyonları, artan aktivasyon fonksiyonlarıdır. Buna karşın, (4.4) koşulunu sağlayan fonksiyonlar kesin artan fonksiyonlardır. Bu nedenle, (4.3) koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı, (4.4) durumunu sağlayan fonksiyonların sınıfından daha geniştir.

Bu çalışmada, (4.3) koşulunu sağlayan aktivasyon fonksiyonlarını kullanarak, (4.2) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin denge noktasının global asimtotik kararlı olmasını

sağlayan yeni yeterli koşullar elde edeceğiz.

$x^* = [x_1^* \ x_2^* \ \dots x_n^*]^T$, (4.2) ile tanımlanan sistemin denge noktası olarak isimlendirilir ve aşağıdaki denklemi sağlar:

$$-Cx^* + Ag(x^*) + Bg(x^*) + u = 0$$

(4.2) sisteminin denge noktası x^* 'ın kararlılık özelliklerini araştırmak yerine, basit bir dönüşüm ile denge noktası sadece orijin olan ve x^* ile aynı kararlılık özelliklerine sahip olan yeni bir sistem elde edebiliriz.

$z(\cdot) = x(\cdot) - x^*$ dönüşümü uygulandığında (4.2) sistemi, aşağıdaki sisteme dönüştürülebilir:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(z_j(t - \tau_j(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu sistem, vektör-matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Cz(t) + Af(z(t)) + Bf(z(t - \tau(t))) \quad (4.5)$$

burada, $z(\cdot) = [z_1(\cdot), z_2(\cdot), \dots, z_n(\cdot)]^T$ dönüştürülmüş sistemin durum vektörüdür. Ayrıca

$$f_j(z_j) = g_j(z_j + x_j^*) - g_j(x_j^*), \quad f_j(0) = 0, \quad \forall j$$

olarak elde edilir. $f_j(\cdot)$ fonksiyonu $g_j(\cdot)$ fonksiyonu ile aynı karakteristik özelliklere sahiptir, yani:

$$0 \leq \frac{f_j(\xi_1) - f_j(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq \sigma_j, \quad \xi_1, \xi_2 \in R, \quad \xi_1 \neq \xi_2 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

4.1.1 GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZLERİ VE ELDE EDİLEN YENİ KRİTERLER

Bu bölümde, (4.5) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı sisteminin denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığıyla ilgili yeni yeterli koşullar sunulacaktır.

Teorem 4.1.1.1:

(4.5) denklemini ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için (4.3) koşulu ve τ zaman gecikmesi için $\tau_j(t) = \tau(t)$ $j = 1, 2, \dots, n$ ve $\tau'(t) \leq \eta < 1$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\Omega = -2DC\Sigma^{-1} + DA + A^T D + \beta B^T P B + \beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1} DP^{-1} D < 0$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi, pozitif diyagonal bir D matrisi ve pozitif bir β sabiti mevcut ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini sistemin tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

İspat 4.1.1.1:

Bu teoremi iki aşamada ispat edeceğiz. Önce denge noktasının tek olduğunu, daha sonra da global asimtotik kararlı olduğunu göstereceğiz. Denge noktasının tekliğini ispatlamak için (4.5) sistemine ait denge denklemini göz önüne alalım:

$$-Cz^* + Af(z^*) + Bf(z^*) = 0 \quad (4.6)$$

burada z^* (4.5) sisteminin denge noktasıdır. (4.6) denkleminde, eğer $f(z^*) = 0$ olursa $z^* = 0$ olacağı açıktır. $f(z^*) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (4.6) denkleminin her iki tarafını $2f^T(z^*)D$ ile çarptıktan sonra elde edilecek sonuca $\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z^*)DP^{-1}Df(z^*)$ terimini ilave eder ve çıkarırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} & -2f^T(z^*)DCz^* + 2f^T(z^*)DAf(z^*) + 2f^T(z^*)DBf(z^*) \\ & -\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z^*)DP^{-1}Df(z^*) + \beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z^*)DP^{-1}Df(z^*) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

burada β pozitif bir sabit, D pozitif diyagonal bir matris ve P pozitif tanımlı bir matristir. Aktivasyon fonksiyonlarının (4.3) ile verilen koşulu sağlamaları nedeniyle aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$|f_j(z_j)| \leq \sigma_j |z_j|, \quad \forall z_j \in R, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

(4.8) denklemini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$2f^T(z^*)DCz^* \geq 2f^T(z^*)DC\Sigma^{-1}f(z^*) \quad (4.9)$$

Literatürde bilindiği üzere herhangi Q_1, Q_2 ve Q_3 matrisleri için $Q_3 = Q_3^T$ koşuluyla aşağıda verilen eşitsizlik sağlanmaktadır [18]:

$$-Q_2^T Q_3^{-1} Q_2 + Q_2^T Q_1 + Q_1^T Q_2 \leq Q_1^T Q_3 Q_1$$

Buna göre, $Q_3 = \beta(1 - \tau'(t))P$, $Q_2 = D$ ve $Q_1 = B$ olarak seçilirse ve $0 \leq \tau'(t) < 1$ koşulu kullanılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} & -\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1} f^T(z^*) DP^{-1} Df(z^*) + 2f^T(z^*(t)) DBf(z^*) \\ & \leq \beta(1 - \tau'(t)) f^T(z^*) B^T P B f(z^*) \\ & \leq \beta f^T(z^*) B^T P B f(z^*) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) denklemleri (4.7) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} & -2f^T(z^*) DA \Sigma^{-1} f(z^*) + 2f^T(zx^*) DW_o f(z^*) + \beta f^T(z^*) W_1^T P W_1 f(z^*) \\ & + \beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1} f^T(z^*) DP^{-1} Df(z^*) \geq 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki formda da yazılabilir:

$$f^T(z^*) \Omega f(z^*) \geq 0, \quad \forall f(z^*) \neq 0 \quad (4.11)$$

Diğer yandan Ω negatif tanımlı bir matris olduğu için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f^T(z^*) \Omega f(z^*) < 0, \quad \forall f(z^*) \neq 0 \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12) denklemleri arasındaki çelişki, $f(z^*) \neq 0$, (4.5) sisteminin denge noktası olmadığını ispatlar ve Teorem 4.1.1.1'de verilen koşullar altında $z^* = 0$ noktasının tek denge noktası olduğu sonucuna ulaşılır. (Burada, $f(z^*) \neq 0$, olması $z^* \neq 0$ sonucunu doğurmaktadır.) Böylece, denge noktasının tekliği ispatlanmış oldu.

(4.5) sistemine ait orijinin global asimtotik kararlı olduğunu ispat etmek için aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov-Krasovskii tipi fonksiyonu kullanacağız:

$$\begin{aligned} V(z(t)) &= z^T(t) C z(t) + 2\alpha \sum_{i=1}^n d_i \int_0^{z_i(t)} f_i(s) ds \\ &+ \alpha \beta \int_{t-\tau(t)}^t f^T(z(\zeta)) B^T P B f(z(\zeta)) d\zeta \\ &+ \frac{1}{1-\eta} \int_{t-\tau(t)}^t f^T(z(\zeta)) (\gamma I + B^T B) f(z(\zeta)) d\zeta \end{aligned}$$

Burada, $P = P^T > 0$, $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve α , β ve γ pozitif sabit reel sayılardır.

$V(z(t))$ ile verilen Lyapunov fonksiyonun, (4.5) sisteminin çözümü boyunca zamana bağlı türevini aldıktan sonra oluşan ifadeye, $\alpha\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z(t))DP^{-1}Df(z(t))$ terimini bir kez ekleyip, bir kez çıkardıktan sonra aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) = & -z^T(t)C^2z(t) - z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CAf(z(t)) \\
& + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) - 2\alpha f^T(z(t))DCz(t) \\
& + 2\alpha f^T(z(t))DAf(z(t)) + 2\alpha f^T(z(t))DBf(z(t - \tau(t))) \\
& + \alpha\beta f^T(z(t))B^T PBf(z(t)) \\
& + \frac{1}{1 - \eta} f^T(z(t))(\gamma I + B^T B)f(z(t)) \\
& - \alpha\beta(1 - \tau'(t))f^T(z(t - \tau(t)))B^T PBf(z(t - \tau(t))) \\
& - \frac{1 - \tau'(t)}{1 - \eta} f^T(z(t - \tau(t))) (\gamma I + B^T B)f(z(t - \tau(t))) \\
& + \alpha\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z(t))DP^{-1}Df(z(t)) \\
& - \alpha\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z(t))DP^{-1}Df(z(t))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazmamız mümkün:

$$-z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CAf(z(t)) \leq f^T(z(t))A^T Af(z(t)) \tag{4.14}$$

$$-z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) \leq f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha\beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1}f^T(z(t))DP^{-1}Df(z(t)) + 2\alpha f^T(z(t))DBf(z(t - \tau(t))) \\
& \leq \alpha\beta(1 - \tau'(t))f^T(z(t - \tau(t)))B^T PBf(z(t - \tau(t)))
\end{aligned} \tag{4.16}$$

(4.9) denkleminde yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$-2\alpha f^T(z(t))DCz(t) \leq -2\alpha f^T(z(t))DC\Sigma^{-1}f(z(t)) \tag{4.17}$$

(4.14)-(4.17) denklemlerini (4.13)'te yerlerine yazarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & f^T(z(t))A^T Af(z(t)) \\
& + f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \\
& - 2\alpha f^T(z(t))DC\Sigma^{-1}f(z(t)) \\
& + 2\alpha f^T(z(t))DAf(z(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha\beta(1-\tau'(t))f^T(z(t-\tau(t)))B^T P B f(z(t-\tau(t))) \\
& -\alpha\beta(1-\tau'(t))f^T(z(t-\tau(t)))B^T P B f(z(t-\tau(t))) \\
& +\alpha\beta f^T(z(t))B^T P B f(z(t)) \\
& +\frac{1}{1-\eta}f^T(z(t))(\gamma I+B^T B)f(z(t)) \\
& -\frac{1-\tau'(t)}{1-\eta}f^T(z(t-\tau(t))) (\gamma I+B^T B)f(z(t-\tau(t))) \\
& +\alpha\beta^{-1}(1-\tau'(t))^{-1}f^T(z(t))D P^{-1}D f(z(t))
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Ayrıca,

$$\frac{1-\tau'(t)}{1-\eta} \geq 1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\tau'(t)}{1-\eta}f^T(z(t-\tau(t))) (\gamma I+B^T B)f(z(t-\tau(t))) \\
& \quad +f^T(z(t-\tau(t)))B^T B f(z(t-\tau(t))) \leq 0
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu nedenle (4.18) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq f^T(z(t))A^T A f(z(t)) \\
& +\frac{1}{1-\eta}f^T(z(t))(\gamma I+B^T B)f(z(t)) \\
& -2\alpha f^T(z(t))D C \Sigma^{-1} f(z(t)) + 2\alpha f^T(z(t))D A f(z(t)) \\
& +\alpha\beta f^T(z(t))B^T P B f(z(t)) \\
& +\alpha\beta^{-1}(1-\tau'(t))^{-1}f^T(z(t))D P^{-1}D f(z(t))
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq f^T(z(t))(A^T A + \frac{1}{1-\eta}B^T B + \frac{\gamma}{1-\eta}I)f(z(t)) \\
& +\alpha f^T(z(t))[-2D C \Sigma^{-1} + D A + A^T D + \beta B^T P B \\
& +\beta^{-1}(1-\tau'(t))^{-1}D P^{-1}D]f(z(t)) \\
& = f^T(z(t))(A^T A + \frac{1}{1-\eta}B^T B + \frac{\gamma}{1-\eta}I)f(z(t)) - \alpha f^T(z(t))(-\Omega)f(z(t)) \\
& \leq \lambda_M(A^T A + \frac{1}{1-\eta}B^T B + \frac{\gamma}{1-\eta}I)\|f(z(t))\|_2^2 - \alpha\lambda_m(-\Omega)\|f(z(t))\|_2^2
\end{aligned}$$

Burada,

$$\alpha > \frac{\lambda_M(A^T A + \frac{1}{1-\eta}B^T B + \frac{\gamma}{1-\eta}I)}{\lambda_m(-\Omega)} > 0$$

olarak seçilirse, $\forall f(z(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ sonucu elde edilir. Dikkat edilmelidir ki $f(z(t)) \neq 0$ olması, $z(t) \neq 0$ anlamına gelmektedir. Şimdi de $f(z(t)) = 0$ ve $z(t) \neq 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıda gösterilen formda olacaktır:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq -z^T(t)C^2z(t) - z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - \frac{1 - \tau'(t)}{1 - \eta} f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \\ &\leq -z^T(t)C^2z(t) - z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) denkleminde $B^T P B \geq 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha > 0$ olduğu için $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq -z^T(t)C^2z(t) - z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - \frac{1 - \tau'(t)}{1 - \eta} f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \\ &\leq -z^T(t)C^2z(t) - z^T(t)C^2z(t) + 2z^T(t)CBf(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - f^T(z(t - \tau(t)))B^T Bf(z(t - \tau(t))) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.15) eşitsizliği, (4.20) denkleminde kullanılırsa $\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)C^2z(t)$ olur. C matrisi de pozitif diyagonal bir matris olduğu için $\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)C^2z(t) < 0$, $\forall z(t) \neq 0$ sonucuna ulaşabiliriz. Şimdi de $f(z(t)) = z(t) = 0$ durumunu ele alalım, bu durumda $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki formda olacaktır:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -\alpha\beta(1 - \tau(t)')f^T(z(t - \tau(t)))B^T P Bf(z(t - \tau(t))) \\ &\quad - \frac{1 - \tau'(t)}{1 - \eta} f^T(z(t - \tau(t)))(\gamma I + B^T B)f(z(t - \tau(t))) \end{aligned}$$

Buradan da kolayca görüldüğü gibi, $\dot{V}(z(t)) < 0$, $\forall f(z(t - \tau(t))) \neq 0$ olacaktır. Böylece, $\dot{V}(z(t)) = 0$ durumunun ancak ve ancak $f(z(t)) = z(t) = f(z(t - \tau(t))) = 0$ için sağlandığını ispatlamış olduk, aksi takdirde $\dot{V}(z(t)) < 0$ dir. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Böylece Lyapunov Teoremi'ne göre, (4.5) sisteminin orijini global asimtotik kararlıdır.

4.1.2 KARŞILAŞTIRMALAR ve SONUÇLAR

Bu bölümde, elde ettiğimiz sonuçları daha önce literatürde yayınlanmış sonuçlarla bir karşılaştırmasını yapacağız. Öncelikle, [34]'deki Teorem-4'te elde edilen sonuçlar ile ilgili bir düzeltme yapmak gerekmektedir.

Teorem 4.1.2.1:

(4.5) denklemini ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonu için (4.4) koşulu sağlansın. Eğer,

$$\Omega^* = -2DC + DA + A^T D + \beta B^T P B + \beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1} D P^{-1} D < 0$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi, pozitif diyagonal bir D matrisi ve pozitif bir β sabiti mevcut ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini asimtotik kararlıdır.

[34] numaralı referans ile verilen makalenin yazarları, yukarıdaki sonucun ispatı için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu kullanmışlardır:

$$V(z(t)) = 2 \sum_{i=1}^n d_i \int_0^{z_i(t)} f_i(s) ds + \beta \int_{t-\tau(t)}^t f^T(z(\zeta)) B^T P B f(z(\zeta)) d\zeta$$

Bu fonksiyonun, (4.5) sisteminin çözümleri boyunca zamana bağlı türevi alınınca,

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2f^T(z(t))DCz(t) + 2f^T(z(t))DAf(z(t)) \\ &\quad + 2f^T(z(t))DBf(z(t-\tau(t))) + \beta f^T(z(t))B^T P B f(z(t)) \\ &\quad - \beta(1 - \tau'(t))f^T(z(t-\tau(t)))B^T P B f(z(t-\tau(t))) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

olarak bulunur. [34] numaralı referanstaki yazarların elde ettikleri sonuç ise $\dot{V}(z(t))$ 'nin aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda elde edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq -2f^T(z(t))DCf(z(t)) + 2f^T(z(t))DAf(z(t)) \\ &\quad + 2f^T(z(t))DBf(z(t-\tau(t))) + \beta f^T(z(t))B^T P B f(z(t)) \\ &\quad - \beta(1 - \tau'(t))f^T(z(t-\tau(t)))B^T P B f(z(t-\tau(t))) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.21) eşitliğinden (4.22) eşitsizliğini elde edebilmek için, ancak ve ancak $|f_i(z_i(t))| \leq |z_i(t)|$ koşulunun sağlanması gerekir. Bu durumda ise aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f^T(z(t))DCz(t) \geq f^T(z(t))DCf(z(t))$$

Diğer taraftan, (4.4) koşulunun kabulü altında:

$$\begin{aligned} f^T(z(t))DCz(t) &= \sum_{i=1}^n d_i c_i |f_i(z_i(t))| |z_i(t)| \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{d_i c_i}{\sigma_i} f_i^2(z_i(t)) \end{aligned}$$

olacaktır, bu durumda:

$$f^T(z(t))DCz(t) \geq f^T(z(t))DC\Sigma^{-1}f(z(t))$$

olmasını gerektirmektedir. Burada $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i > 0)$ olarak tanımlanmıştır. Buna göre, [34]'deki yazarlar, yazım hatası yaparak Σ^{-1} ifadesini (4.22) denklemine eklememişlerdir. Şimdi bu düzeltmeyi de yaparak [34]'deki Teorem 4'ü, yani Teorem 4.1.2.1'i tekrar aşağıdaki gibi ifade edeceğiz:

Teorem 4.1.2.2 [34]: (4.5) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için (4.4) koşulu ve τ zaman gecikmesi için $\tau_j(t) = \tau(t)$ ve $\tau'(t) \leq \eta < 1$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\Omega^* = -2DC\Sigma^{-1} + DA + A^T D + \beta B^T P B + \beta^{-1}(1 - \tau'(t))^{-1} D P^{-1} D < 0$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir P matrisi, pozitif diyagonal bir D matrisi ve pozitif bir β sabiti mevcut ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini asimtotik kararlıdır.

Sonuç-1 :

Teorem 4.1.1.1 ve Teorem 4.1.2.2'de, (4.5) sisteminin ağ parametrelerinin kısıtlayıcı koşulları aynıdır. Bununla birlikte, bizim elde ettiğimiz sonuçların [34]'te elde edilen sonuçlardan daha avantajlı olduğu yapılan şu analizle belirtilmiştir: Teorem 4.1.1.1 aktivasyon fonksiyonlarının

(4.4) koşulunu sağlamasıyla, denge noktasının sadece asimtotik kararlı olduğunu ispatlamaktadır. Teorem 4.1.1.1 ise, aktivasyon fonksiyonlarının (4.3) koşulunu sağlamasıyla, denge noktasının global asimtotik kararlı olduğunu ispatlamaktadır. Global asimtotik kararlılık, asimtotik kararlılığı gerektirdiği için (fakat bunun tersi her zaman doğru olmayabilir), ve (4.3) koşulunu sağlayan fonksiyonların, (4.4) koşulunu sağlayan fonksiyonlardan daha geniş bir sınıf oluşturduğu için, Teorem 4.1.1.1’de bulduğumuz sonuçlar, Teorem 4.1.2.2’de elde edilen sonuçların genelleştirilmiş halidir.

Sonuç-2 :

Bulduğumuz sonuçlar, kullandığımız yapay sinir ağı modeli zamanla değişen gecikmeye sahip olduğundan ve aktivasyon fonksiyonları üzerinde yapılan kısıtlamalar daha esnek olduğundan dolayı, yapay sinir ağlarının daha geniş bir hali ele alınmış olmaktadır. Bu nedenle, bulduğumuz koşullardan yeni kararlılık sonuçları türetebiliriz. Türetilen bu koşullar, [19]-[34] arasında sunulan koşullara alternatif kararlılık sonuçları olabilecektir. Teorem- 4.1.2.2’de verilen sonuçlarla, literatürde önceden sunulmuş olan koşullar arasındaki karşılaştırmalar [34]’te yapılmıştır. Teorem 4.1.1.1 ve Teorem 4.1.2.2 ifadeleri birebir aynı olduğu için, [20]’de yapılan karşılaştırmalar aynı zamanda bizim bulduğumuz sonuçlar için de geçerlidir.

4.2 ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının global asimtotik kararlılığı için yeni yeterli koşullar sunacağız. Kullanacağımız yapay sinir ağı modeli, aşağıda gösterilen diferansiyel denklemle temsil edilecektir:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.23)$$

Yukarıdaki modelde, n nöronların sayısını, $x_i(t)$ ise t zamanında i . nöron durumunu, $f_i(\cdot)$ ve $g_i(\cdot)$ nonlineer çıkış fonksiyonlarını (aynı zamanda aktivasyon fonksiyonları olarak da adlandırılır), a_{ij} ve b_{ij} sırasıyla t ve $t - \tau_j(t)$ zamanlarında j . ve i . nöronlar arasındaki bağlantı şiddetini, $\tau_j(t)$ zaman gecikmesini, u_i i . nöronun dış sabit girişini ve c_i ise i . nöron için yüklenme oranını göstermektedir.

(4.23) denklemiyle verilen yapay sinir ağı sistemi için başlangıç koşulları şu şekilde olacaktır:

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad \tau = \max_{1 \leq j \leq n} \tau_j(t)$$

bu denklemde $\varphi(\cdot)$, $[-\tau, 0]$ üzerinde süreklidir. Eğer $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ (1) sisteminin çözümü vektörel olursa, $t > 0$ için $x(t) = x(t, \varphi)$ ve $t \in [-\tau, 0]$ için $x(\theta) = \varphi(\theta)$ olacaktır.

(4.23) sistemi, vektör-matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bg(x(t - \tau(t))) + u \quad (4.24)$$

bu denklemde, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T$, $g(x(t - \tau)) = (g_1(x_1(t - \tau_1(t))), g_2(x_2(t - \tau_2(t))), \dots, g_n(x_n(t - \tau_n(t))))^T$ ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ dir.

Yapay sinir ağlarının denge noktasının dinamik özelliklerinin belirlenmesindeki en önemli parametrelerden biri, tasarımda kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının özellikleridir. Global asimtotik kararlı denge noktasının varlığı ile ilgili olarak, aktivasyon fonksiyonları için yapılan bazı çalışmalar altında çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Literatürde elde edilen sonuçlarda, kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının sürekli ve türevi alınabilir, monoton artan ve sınırlı olduğu kabulü yapılmıştır ([1]-[3]). [4]'te yapılan çalışmada belirtildiği gibi, yapay sinir ağlarının bazı uygulamalarında sınırlı olmayan ve artmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması gerekebilmektedir. [5]'te yapılan çalışmada, kullanılan yapay sinir ağındaki aktivasyon fonksiyonu, sınırlı ve Lipschitz özelliğine sahip aktivasyon fonksiyonu olduğu kabulü yapılmıştır.

Diğer bir çalışmada [6], yazarlar yapay sinir ağını global Lipschitz özelliğine sahip aktivasyon fonksiyonu içerecek şekilde ele alarak incelemiştir. Bu aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı, kesin artan ve türevi alınabilir olması gerekmektedir. Bu kabul altında yapay sinir ağında daha çok aktivasyon fonksiyonu kullanılabilir. Matematiksel olarak, $f_i(\cdot)$ ve $g_i(\cdot)$ fonksiyonlarının global Lipschitz olması için, k_i ve ℓ_i pozitif sabit katsayılar olmak üzere, aşağıdaki koşulların sağlanması gerekmektedir:

$$|f_i(\xi_1) - f_i(\xi_2)| \leq k_i |\xi_1 - \xi_2|, |g_i(\xi_1) - g_i(\xi_2)| \leq l_i |\xi_1 - \xi_2| \quad (4.25)$$

$\forall \xi_1, \xi_2 \in R$ ve $\xi_1 \neq \xi_2, i = 1, 2, \dots, n$.

Tezin bu aşamasında, (4.23) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli için kararlılık analizi, aktivasyon fonksiyonlarının (4.25) koşulunu sağlaması durumu için yapılacaktır.

(4.24) denklemi ile ilgili aşağıdaki ifadeyi yazalım:

$$H(x) = -Cx + Af(x) + Bg(x) + u \quad (4.26)$$

(4.26) eşitliği skaler formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$h_i(x) = -c_i x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j) + u_i, \forall i \quad (4.27)$$

burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$, $g(x) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n))^T$ ve $H(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T$.

x , (4.24) sisteminin global asimtotik kararlı denge noktası olması için, $H(x) = 0$ denkleminin tek olması gerekmektedir. $H(x) = 0$ 'ın tek olması için $H : R^n \rightarrow R^n$ 'nin homeomorfizm özelliğini sağlaması gerekmektedir. Aşağıdaki sonuçlar, yapay sinir ağının denge noktasının varlık ve tekliği için faydalı olacaktır.

Tanım 1 [4] :

C^0 'ın elemanı olan ve $H : R^n \rightarrow R^n$ 'ye tanımlı olan bir H operatörünün kendi üzerinde homeomorfizm olması için H operatörünün birebir ve örten olması ve tersi H^{-1} 'in de C^0 kümesine ait olması gerekir.

Kural 1 [4] :

C^0 kümesine ait ve tersi alınabilir $H : R^n \rightarrow R^n$ operatörünün homeomorfizm olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir:

$$\|x\| \rightarrow \infty \text{ iken } \|H(x)\| \rightarrow \infty$$

Kural 2 :

(4.24) ile ifade edilen yapay sinir ağı modelinin en az bir denge noktasının var olması ve bu denge noktasının tek olması için $H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u$ ile tanımlanan operatörün aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekir:

(i) $H(x) \neq H(y)$, bütün $x \neq y$ için ,

(ii) $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$

4.2.1 DENGE NOKTASININ VARLIK ve TEKLİK ANALİZİ

Bu bölümde, (4.24) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin tek bir denge noktasının olması için yeni yeterli koşullar elde edeceğiz.

Teorem 4.2.1.1 :

(4.24) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde (4.25) eşitsizliği sağlansın. Eğer,

$$\gamma_i = 2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2} A\|_2^2 - \ell_i^2 \|P^{-1/2} B\|_2^2 > 0, \forall i$$

koşulunu sağlayan pozitif diyagonal bir $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ matrisi ve pozitif diyagonal bir $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ matrisi varsa bu yapay sinir ağının her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

İspat 4.2.1.1 :

$H(x) = -Cx + Af(x) + Bg(x) + u$ ifadesi için,

$$H(x) - H(y) = -C(x - y) + A(f(x) - f(y)) + B(g(x) - g(y)) \quad (4.28)$$

olarak elde edilir.

(4.28) denkleminin her iki tarafını $2(x - y)^T$ ile çarptıktan sonra, elde edilen ifadeye $(x -$

$y)^T(D + P)(x - y)$ terimini ekleyip çıkardığımızda, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T(H(x) - H(y)) &= -2(x - y)^T C(x - y) + 2(x - y)^T A(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(x - y)^T B(g(x) - g(y)) + (x - y)^T (D + P)(x - y) \\ &\quad - (x - y)^T D(x - y) - (x - y)^T P(x - y) \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} -(x - y)^T D(x - y) + 2(x - y)^T A(f(x) - f(y)) &\leq (f(x) - f(y))^T A^T D^{-1/2} D^{-1/2} A(f(x) - f(y)) \\ -(x - y)^T P(x - y) + 2(x - y)^T B(g(x) - g(y)) &\leq (g(x) - g(y))^T B^T P^{-1/2} P^{-1/2} B(g(x) - g(y)) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden yararlanarak, aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T(H(x) - H(y)) &\leq -\sum_{i=1}^n (2c_i - d_i - p_i)(x_i - y_i)^2 \\ &\quad + (f(x) - f(y))^T A^T D^{-1/2} D^{-1/2} A(f(x) - f(y)) \\ &\quad + (g(x) - g(y))^T B^T P^{-1/2} P^{-1/2} B(g(x) - g(y)) \\ &\leq -\sum_{i=1}^n (2c_i - d_i - p_i)(x_i - y_i)^2 \\ &\quad + \|D^{-1/2} A\|_2^2 \sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\ &\quad + \|P^{-1/2} B\|_2^2 \sum_{i=1}^n (g_i(x_i) - g_i(y_i))^2 \\ &\leq -\sum_{i=1}^n (2c_i - d_i - p_i)(x_i - y_i)^2 + \|D^{-1/2} A\|_2^2 \sum_{i=1}^n k_i^2 (x_i - y_i)^2 \\ &\quad + \|P^{-1/2} B\|_2^2 \sum_{i=1}^n \ell_i^2 (x_i - y_i)^2 \\ &= -\sum_{i=1}^n (2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2} A\|_2^2 - \ell_i^2 \|P^{-1/2} B\|_2^2)(x_i - y_i)^2 \\ &= -\sum_{i=1}^n \gamma_i (x_i - y_i)^2 \leq -\gamma_m (x - y)^T (x - y) \leq 0 \end{aligned}$$

burada, $\gamma_m = \min\{\gamma_i\}$ 'dir.

$$2(x - y)^T(H(x) - H(y)) \leq -\gamma_m (x - y)^T (x - y) \leq 0$$

sonucundan yararlanarak, aşağıdaki norm eşitsizliğini yazabiliriz:

$$\gamma_m \|x - y\|_2^2 \leq 2\|x - y\|_\infty \|H(x) - H(y)\|_1 \leq 2\|x - y\|_2 \|H(x) - H(y)\|_1$$

buradan da aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\gamma_m \|x - y\|_2 \leq 2 \|H(x) - H(y)\|_1 \quad (4.29)$$

bu durumda, $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ olacaktır. Böylece, $\|x\| \rightarrow \infty$ için $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olacaktır. Diğer yandan $y = 0$ için (4.29) eşitsizliği aşağıdaki formda olacaktır:

$$\gamma_m \|x - 0\|_2 \leq 2 \|H(x) - H(0)\|_1 \leq 2 \|H(x)\|_1 + 2 \|H(0)\|_1$$

bu ifadeye göre, $2 \|H(x)\|_1 \geq \gamma_m \|x\|_2 - 2 \|H(0)\|_1$ olacaktır. $\|H(0)\|_1$ sonlu bir ifade olduğundan, $\|x\| \rightarrow \infty$ için $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olmaktadır.

4.2.2 DENGE NOKTASININ KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, (4.23) ile tanımlanan yapay sinir ağı sisteminin, global asimtotik kararlı olması için bazı yeterli koşullar türetilenektir. Öncelikle, (4.23) sistemini basitleştirmek için $z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümünü uygulayarak, (4.23) sistemini aşağıdaki modele dönüştürebiliriz:

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \psi_j(z_j(t - \tau_j(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.30)$$

burada,

$$\phi_i(z_i(t)) = f_i(z_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\psi_i(z_i(t - \tau_j(t))) = g_i(z_i(t - \tau_j(t)) + x_i^*) - g_i(x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olacaktır.

ϕ_i ve ψ_i fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığı kolayca ispatlanabilir:

$$|\phi_i(z_i)| \leq k_i |z_i|, \quad \text{ve} \quad \phi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$|\psi_i(z_i)| \leq \ell_i |z_i|, \quad \text{ve} \quad \psi_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(4.23) sistemindeki x^* 'ın denge noktasının kararlılık özelliklerini belirlemek için, dönüştürülmüş sistem olan (4.30) sisteminin orijininin kararlılığını incelemek yeterli olacaktır.

(4.30)'daki yapay sinir ağı modeli aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + A\Phi(z(t)) + B\Psi(z(t - \tau(t))) \quad (4.31)$$

burada, $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$, $\Phi(z(t)) = (\phi_1(z_1(t)), \phi_2(z_2(t)), \dots, \phi_n(z_n(t)))^T$, $\Psi(z(t - \tau)) = (\psi_1(z_1(t - \tau_1(t))), \psi_2(z_2(t - \tau_2(t))), \dots, \psi_n(z_n(t - \tau_n(t))))^T$ 'dir.

Şimdi de aşağıdaki teoremleri ispatlayalım:

Teorem 4.2.2.1 :

(4.23) denklemini ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için (4.25) koşulu ve $\dot{\tau}_j(t) \leq \mu < 1$ $j = 1, 2, \dots, n$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\gamma_i^* = 2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2}A\|_2^2 - \frac{1}{1-\mu} \ell_i^2 \|P^{-1/2}B\|_2^2 > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ matrisi ve pozitif tanımlı bir $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ matrisi mevcut ise bu durumda (4.23) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global asimtotik kararlıdır.

İspat 4.2.2.1 :

$0 \leq \mu < 1$ koşulu dikkate alındığında, aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\begin{aligned} & 2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2}A\|_2^2 - \ell_i^2 \|P^{-1/2}B\|_2^2 \\ & \geq 2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2}A\|_2^2 - \frac{1}{1-\mu} \ell_i^2 \|P^{-1/2}B\|_2^2 > 0 \end{aligned}$$

Bu nedenle, denge noktasının tekliği Teorem 4.2.1.1'in doğrudan bir sonucudur. Denge noktasının global asimtotik kararlılığını ispatlamak için, aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu kullanacağız:

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + \frac{\|P^{-1/2}B\|_2^2}{1-\mu} \sum_{j=1}^n \int_{t-\tau_j(t)}^t \psi_j^2(z_j(\xi)) d\xi$$

$V(z(t))$ 'nin zamana bağlı türevi alınıp, $z^T(t)(D+P)z(t)$ terimi eklenip çıkarıldığında, şu ifade elde edilecektir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)A\Phi(z(t)) + 2z^T(t)B\Psi(z(t-\tau)) \\
&\quad + \frac{1}{1-\mu} \|P^{-1/2}B\|_2^2 \Psi^T(z(t))\Psi(z(t)) + z^T(t)(D+P)z(t) \\
&\quad - \|P^{-1/2}B\|_2^2 \sum_{j=1}^n \frac{1-\dot{\tau}_j(t)}{1-\mu} \psi_j^2(z_j(t-\tau_j)) - z^T D(t)z(t) - z^T(t)Pz(t) \\
&\leq -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)A\Phi(z(t)) + 2z^T(t)B\Psi(z(t-\tau)) \\
&\quad + \frac{1}{1-\mu} \|P^{-1/2}B\|_2^2 \Psi^T(z(t))\Psi(z(t)) + z^T(t)(D+P)z(t) \\
&\quad - \|P^{-1/2}B\|_2^2 \Psi^T(z(t-\tau))\Psi(z(t-\tau)) - z^T D(t)z(t) - z^T(t)Pz(t)
\end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
-z^T(t)Dz(t) + 2z^T(t)A\Phi(z(t)) &\leq \|D^{-1/2}A\|_2^2 \Phi^T(z(t))\Phi(z(t)) \\
&\quad - z^T(t)Pz(t) + 2z^T(t)B\Psi(z(t-\tau)) \\
&\leq \|P^{-1/2}B\|_2^2 \Psi^T(z(t-\tau))\Psi(z(t-\tau))
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlik ışığında, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq -z^T(t)(2C - D - P)z(t) + \|D^{-1/2}A\|_2^2 \Phi^T(z(t))\Phi(z(t)) \\
&\quad + \frac{1}{1-\mu} \|P^{-1/2}B\|_2^2 \Psi^T(z(t))\Psi(z(t)) \\
&\leq -z^T(t)(2C - D - P)z(t) + \|D^{-1/2}A\|_2^2 z^T(t)K^2 z(t) \\
&\quad + \frac{1}{1-\mu} \|P^{-1/2}B\|_2^2 z^T(t)L^2 z(t) \\
&= -\sum_{i=1}^n \gamma_i^* z_i^2(t)
\end{aligned}$$

Açıkça görüleceği gibi, bütün $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ 'nin negatif tanımlı olmaktadır. Şimdi de $z(t) = 0$ ($\Phi(z(t)) = \Psi(z(t)) = 0$) durumunu ele alalım. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayacaktır:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -\|P^{-1/2}B\|_2^2 \sum_{j=1}^n \frac{1-\dot{\tau}_j(t)}{1-\mu} \psi_j^2(z_j(t-\tau_j)) \\
&\leq -\|P^{-1/2}B\|_2^2 \sum_{j=1}^n \psi_j^2(z_j(t-\tau_j))
\end{aligned}$$

Açıkça görülüyor ki, bütün $\Psi(z(t-\tau)) \neq 0$ için, $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmaktadır. Bu yüzden, sadece ve sadece $z(t) = \Phi(z(t)) = \Psi(z(t)) = 0$ durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$ olmaktadır. Böylece, (4.30)'un orijini veya buna denk olarak (4.23) sisteminin denge noktası global asimtotik kararlıdır.

Teorem 4.2.2.2 :

(4.31) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için (4.25) koşulu ve $\tau_j(t) = \tau$ $j = 1, 2, \dots, n$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\gamma_i = 2c_i - d_i - p_i - k_i^2 \|D^{-1/2}A\|_2^2 - \ell_i^2 \|P^{-1/2}B\|_2^2 > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan pozitif tanımlı bir $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ matrisi, pozitif tanımlı bir $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ matrisi mevcut ise (4.31) ile tanımlanan yapay sinir ağının orijini tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

İspat 4.2.2.2 :

Teorem 4.2.2.2'nin ispatı, $\tau_j(t) = \tau$ sabit olduğunda, $\mu = 0$ gerçeğiyle ispatlanır.

4.2.3 KARŞILAŞTIRMALAR ve ÖRNEKLER

Bu bölümde, elde ettiğimiz sonuçları, literatürde daha önce yayınlanmış sonuçlarla karşılaştıracamız. Öncelikle daha önce literatürdeki kararlılık sonuçlarını burada bir kez daha yeniden ifade edelim:

Teorem 4.2.3.1 [6] :

(4.30) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için (4.25) koşulu ve $\dot{\tau}_j(t) \leq \mu < 1$ $j = 1, 2, \dots, n$ sağlansın. Eğer,

$$r_i c_i - \sum_{j=1}^n r_j |a_{ij}| k_j - \sum_{j=1}^n r_j \frac{1}{1-\mu} |b_{ij}| \ell_j > 0, i = 1, \dots, n.$$

koşulunu sağlayan $r_i > 0$ pozitif sabitleri mevcut ise (4.30) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini sistemin tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

Bu teorem, kısaca $(C - |A|K - \frac{1}{1-\mu}|B|L)$ matrisinin non-singular M-matris olması koşulunu gerektirmektedir. sağlıyordu. (Non-singular M-matris, diyagonal elemanları pozitif olan, diğer elemanları pozitif olmayan ve bütün özdeğerlerinin reel kısmı pozitif olan matristir [18]).

Teorem 4.2.3.2 [6] :

(4.30) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için (4.25)

koşulu ve $\tau_j(t) = \tau$ 'nin sabit olması koşulu sağlansın. Eğer, $(C - |A|K - |B|L)$ matrisi non-singular M-matris ise (4.30) ile tanımlanan yapay sinir ağının orijini sistemin tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

Teorem 4.2.3.3 [7] :

(4.30) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için (4.25) koşulu ve $\tau_j(t) = \tau$ $j = 1, 2, \dots, n$ koşulu sağlansın. Eğer, $(C - \hat{A}K - |B|L)$ matrisi non-singular M-matris ise bu durumda (4.30) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini sistemin tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

Teorem 4.2.3.4 [8] :

(4.30) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için (4.25) koşulu ve $\tau_j(t) = \tau$ $j = 1, 2, \dots, n$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{m=1}^{L_1} p_m |a_{ij}|^{\frac{r\alpha_{ij}}{p_m}} k_j^{r\xi_{ij}} + k_i^{r\xi_{ji}^*} |a_{ji}|^{r\alpha_{ji}^*} + \sum_{m=1}^{L_2} q_m |b_{ij}|^{\frac{r\beta_{ij}}{q_m}} \ell_j^{r\eta_{ij}} + \ell_i^{r\eta_{ji}^*} |b_{ji}|^{r\beta_{ji}^*} \right) < r c_i, \quad \forall i$$

koşulunu sağlayan $p_m > 0$ ($m = 1, 2, \dots, L_1$), $q_m > 0$ ($k = 1, 2, \dots, L_2$), $\alpha_{ij}, \alpha_{ij}^*, \beta_{ij}, \beta_{ij}^*, \xi_{ij}, \xi_{ij}^*, \eta_{ij}, \eta_{ij}^* \in R$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sabitleri mevcut ise bu durumda (4.30) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini sistemin tek denge noktasıdır ve global asimtotik kararlıdır.

Burada, $\alpha_{ij}, \alpha_{ij}^*, \beta_{ij}, \beta_{ij}^*, \xi_{ij}, \xi_{ij}^*, \eta_{ij}, \eta_{ij}^* \in R$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sabitlerdir ve $L_1\alpha_{ij} + \alpha_{ij}^* = 1$, $L_2\beta_{ij} + \beta_{ij}^* = 1$, $L_1\xi_{ij} + \xi_{ij}^* = 1$, $L_2\eta_{ij} + \eta_{ij}^* = 1$, ve $r = \sum_{m=1}^{L_1} p_m + 1 = \sum_{m=1}^{L_2} q_m + 1$ olacaktır.

Elde ettiğimiz sonuçlarla ilgili olarak aşağıdaki örnekler verilmiştir:

Örnek 1 :

(4.23) denklemiyle verilen yapay sinir ağı modelinin, ağ parametreleri aşağıdaki gibi olsun:

$$A = B = \begin{bmatrix} p & p & p & p \\ p & -p & p & -p \\ -p & -p & p & p \\ -p & p & p & -p \end{bmatrix}, \quad C = K = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

burada, p reel bir sayı olup, $p > 0$ 'dır. Teorem 4.2.3.1'in sonucunu bu örneğe uyguladığımızda, kararlılık koşulu şu şekilde elde edilmektedir: $p < \frac{1}{12}$

Şimdi de $D = P = \frac{1}{2}I$ olsun. Buna göre, Teorem 4.2.2.1'de elde edilen koşullar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\gamma_i^* = 2 - d_i - p_i - \|D^{-1/2}A\|_2^2 - 2\|P^{-1/2}B\|_2^2 > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Bu örneğe ait ağ parametreler için, $\|D^{-1/2}A\|_2^2 = \|P^{-1/2}B\|_2^2 = 8p^2$ elde edilir. Bu durumda,

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma_3^* = \gamma_4^* = 1 - 24p^2 > 0$$

olacak ve buradan $p < \frac{1}{2\sqrt{6}}$ elde edilecektir.

Böylece, Teorem 4.2.2.1, Teorem 4.2.3.1'e göre ağ parametreleri için daha az kısıtlayıcı koşullar içermiş olmaktadır.

Şimdi de $\tau_j(t) = \tau$ pozitif sabit olsun. Bu durumda Teorem 4.2.3.2'ye göre $p < \frac{1}{8}$ ve Teorem 4.2.3.3'e göre $p < \frac{1}{6}$ olmaktadır.

Eğer, $D = P = \frac{1}{2}I$ alınırsa, aynı ağ parametreler için, Teorem 4.2.2.2'de elde edilen koşullar, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\gamma_i^* = 1 - \|D^{-1/2}A\|_2^2 - \|P^{-1/2}B\|_2^2 > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma_3^* = \gamma_4^* = 1 - 16p^2 > 0$ olarak hesaplanıp, kararlılık koşulundan $p < \frac{1}{4}$ elde edilir. Böylece, zaman gecikmesinin sabit olduğu durumda, bizim bulduğumuz koşullar [6] ve [7]'de bulunan koşullardan daha az kısıtlayıcı olmaktadır.

Örnek 2 :

Bu örnekte, (4.23)'te verilen yapay sinir ağı modeli için, aşağıda verilen değerleri kullanalım:

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, K = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mu = 0, C = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

burada, c pozitif bir sabittir. Eğer, $D = P = I$ alınırsa, $\|D^{-1/2}A\|_2^2 = \|P^{-1/2}B\|_2^2 = 4$ elde edilir. Böylece, Teorem 4.2.2.2'e göre,

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma_3^* = \gamma_4^* = 2c - 10 > 0$$

olacak ve kararlılık koşulu $c > 5$ olarak bulunacaktır. Bir önceki ağ parametreleri için, Teorem 4.2.3.4'teki koşullara göre:

$$\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{m=1}^{L_1} p_m + 1 + \sum_{m=1}^{L_2} q_m + 1 \right) < rc$$

olacaktır.

$$r = \sum_{m=1}^{L_1} p_m + 1 = \sum_{m=1}^{L_2} q_m + 1$$

olduğundan,

$$\sum_{j=1}^4 2r < rc$$

olarak bulunacak ve buradan kararlılık koşulu için, $c > 8$ olacaktır. Böylece, eğer $5 < c < 8$ olursa, bu durumda Teorem 4.2.2.2 uygulanabilecek ama Teorem 4.2.3.4 bu koşulu sağlamadığından uygulanamayacaktır.

4.3 ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SINIR AĞLARININ GLOBAL ROBUST ÜSTEL KARARLILIĞI

Tez kapsamında yapılan bu çalışma, çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının denge noktasının varlık, teklik ve global robust kararlılığını incelemektedir. Bu tür yapay sinir ağlarının global robust üstel kararlılığı için yeni yeterli koşullar sunulmuş, bu koşulların zaman gecikmesinin türevi ve ağ parametreleri arasındaki ilişkiye dayandığı gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar, literatürde daha önce elde edilmiş sonuçların genelleştirilmesi olarak gösterilmiştir.

Son zamanlarda, zaman gecikmeli veya zaman gecikmesiz farklı sınıflara ait yapay sinir ağlarının denge ve kararlılık özellikleri ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. Yapay sinir ağlarına ait bu özellikler, işaret işleme, optimizasyon ve kontrol problemleri gibi pratik uygulamalarda çok

büyük öneme sahiptir. ([4], [36]-[38]) Yapay sinir ağlarının, özellikle, paralel hesaplama, nöral kontrol, optimizasyon ve işaret işleme gibi tasarlanan yapay sinir ağlarında, global asimtotik kararlı tek denge noktası bulunmaktadır. [4] ve [36]-[51]'deki referanslarda farklı sınıflara ait yapay sinir ağları modellerinde çeşitli kararlılık sonuçları sunulmuştur. Yapay sinir ağlarının istenen kararlılık özellikleri, sistemin ağ parametreleri üzerinde sınırlayıcı koşullar getirilerek saptanmıştır. Bunun yanında, yapay sinir ağlarının donanım uygulamalarında, sistemin ağ parametreleri tasarımdaki elektronik bileşenler üzerindeki tolerans değerler üzerinde bazı değişikliklere yol açmaktadır.

Bazı durumlarda, yapay sinir ağının kararlılık özelliklerinin parametrelerde oluşabilecek küçük değişikliklerden etkilenmemesi istenir. Yani, sistem global robust kararlı olmalıdır. Literatürde ([52]-[56]) son zamanlarda, gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust kararlılığıyla ilgili sonuçlar da sunulmuştur. Bu çalışmada, gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust üstel kararlılığıyla ilgili yeni yeterli koşullar sunacağız. Gecikmeli yapay sinir ağının dinamik davranışı, aşağıdaki diferansiyel denklemlerle modelleneyecektir:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.32)$$

Yukarıdaki modelde, n nöronların sayısını, $x_i(t)$ t zamanı için i . nöron durumunu, $f_i(\cdot)$ non-lineer çıkış fonksiyonunu (aynı zamanda aktivasyon fonksiyonu olarak da adlandırılır), a_{ij} ve b_{ij} , t zamanında j . ve i . nöron arasındaki bağlantı ağırlıklarını, u_i i . nöronun dış sabit girişini, τ_{ij} j . nöron ile i . nöron arasındaki işaretin iletilmesindeki zaman gecikmesini ve c_i ise i . nöron için yakınsama hızını göstermektedir.

(4.32) denklemleriyle verilen yapay sinir ağ sistemi için başlangıç koşulları şu şekilde olacaktır:

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad \tau = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{\tau_{ij}(t)\}$$

burada, $\varphi(\cdot)$, $[-\tau, 0]$ üzerinde süreklidir. Eğer, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ (1) sisteminin vektörel çözümü olursa, $t > 0$ ve $x(\theta) = \varphi(\theta)$ ve $t \in [-\tau, 0]$ için $x(t) = x(t, \varphi)$ olacaktır.

a_{ij} , b_{ij} ve c_i için aşağıdaki tanım aralıkları kullanılacaktır:

$$C_I := \{C = \text{diag}(c_i) : 0 < \underline{C} \leq C \leq \overline{C}, \text{ i.e., } 0 < \underline{c}_i \leq c_i \leq \overline{c}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.33)$$

$$A_I := \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, \text{ i.e., } \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$B_I := \{B = (b_{ij}) : \underline{B} \leq B \leq \overline{B}, \text{ i.e., } \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \overline{b}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

(4.32) denkleminde, global üstel kararlılık için yapılacak yeterli koşulların türetmeleri için aşağıda bazı basit tanımlar verilecektir.

Tanım 1 [54]:

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ denge noktası için, $k > 0$ ve $M > 0$ sabitleri varsa ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa, global üstel kararlıdır.

$$\|x(t) - x^*\| \leq M \|\varphi - x^*\| e^{-kt}, \forall t \geq 0$$

Tanım 2 [54]:

(4.32)'de tanımlanan yapay sinir ağının, (4.33)'teki parametrik değerler itibariyle, eğer sistemin tek $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ denge noktası ise ve bütün $C \in C_I$, $A \in A_I$ ve $B \in B_I$ için global üstel kararlı ise, global üstel robust kararlıdır.

Burada, (4.32) için aşağıdaki map tanımlanırsa:

$$H(x) = -Cx + Ag(x) + Bg(x) + u \quad (4.34)$$

burada, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times n}$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ve $g(x) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n))^T$ 'dir.

(4.34) denklemini skaler formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$h_i(x) = -c_i x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

burada, $H(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T$ 'dir.

Kural 1:

(4.32)'de tanımlanan yapay sinir ağı sistemi için, $H(x), R^n$ 'de homeomorfizm ise, u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

4.3.1 GLOBAL ROBUST ÜSTEL KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde, (4.32)'deki sistemin denge noktasının global robust üstel kararlı olmasını sağlayan yeni yeterli koşullar sunacağız.

Teorem 4.3.1.1:

(4.32) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde $|g_i(x) - g_i(y)| \leq L_i |x - y|$, $i = 1, 2, \dots, n$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\beta_i = \alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini sistemin tek denge noktasıdır.

burada, $a_{ji}^* = \max\{|\underline{a}_{ji}|, |\bar{a}_{ji}|\}$, $b_{ji}^* = \max\{|\underline{b}_{ji}|, |\bar{b}_{ji}|\}$ 'dir.

İspat 4.3.1.1:

Denge noktasının varlığını ve tekliğini ispatlamak için, sadece (4.34) ile tanımlanan $H(x)$ 'in R^n 'de homeomorfizm olması gereklidir. $x, y \in R^n$, $x \neq y$ olacak şekilde iki vektör seçelim.

Bu durumda:

$$\begin{aligned} h_i(x) - h_i(y) &= -c_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(g_j(x_j) - g_j(y_j)) \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{ij}(g_j(x_j) - g_j(y_j)), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.36)$$

$g(x) = g(y)$ için (4.36) aşağıdaki formu alır:

$$h_i(x) - h_i(y) = -c_i(x_i - y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ya da eşdeğer olarak:

$$H(x) - H(y) = C(x - y)$$

C pozitif diyagonal bir matris olduğundan, $x - y \neq 0$ durumunda $H(x) - H(y) \neq 0$ olacaktır. Şimdi de $g(x) \neq g(y)$ olsun. (4.36) denkleminin her iki tarafını $\alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)$ ile çarptığımızda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &= -\alpha_i c_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(x_i - y_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(g_j(x_j) - g_j(y_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(g_j(x_j) - g_j(y_j)) \\ &= -\alpha_i c_i |x_i - y_i| + \sum_{j=1}^n \alpha_i a_{ij} \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(g_j(x_j) - g_j(y_j)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \alpha_i b_{ij} \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(g_j(x_j) - g_j(y_j)), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

buradan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &\leq -\alpha_i c_i |x_i - y_i| + \sum_{j=1}^n \alpha_i |a_{ij}| |g_j(x_j) - g_j(y_j)| \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \alpha_i |b_{ij}| |g_j(x_j) - g_j(y_j)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.37)$$

Aktivasyon fonksiyonları için $|g_i(x_i) - g_i(y_i)| \leq L_i |x_i - y_i|$ koşulunu (4.37) denkleminde kullanılacak olursak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &\leq -\frac{\alpha_i c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(y_i)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i (|a_{ij}| + |b_{ij}|) |g_j(x_j) - g_j(y_j)| \\ &\leq -\frac{\alpha_i c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(y_i)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i (a_{ij}^* + b_{ij}^*) |g_j(x_j) - g_j(y_j)| \end{aligned} \quad (4.38)$$

(4.38)'in doğrudan bir sonucu aşağıdaki eşitsizliktir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i)(h_i(x) - h_i(y)) &\leq -\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i (a_{ij}^* + b_{ij}^*) |g_j(x_j) - g_j(y_j)| \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i (a_{ji}^* + b_{ji}^*) |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \\
& = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) \right) |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \\
& = - \sum_{i=1}^n \beta_i |g_i(x_i) - g_i(y_i)|
\end{aligned}$$

buradan,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \leq \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i - y_i) (h_i(x) - h_i(y)) \right| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |h_i(x) - h_i(y)| \quad (4.39)$$

$\beta_m = \min\{\beta_i\} > 0$ ve $\alpha_M = \max\{\alpha_i\} > 0$ olarak seçilirse, (4.39) aşağıdaki formu alır:

$$\beta_m \sum_{i=1}^n |g_i(x_i) - g_i(y_i)| \leq \alpha_M \sum_{i=1}^n |h_i(x) - h_i(y)|$$

buradan yola çıkarak,

$$\beta_m \|g(x) - g(y)\|_1 \leq \alpha_M \|H(x) - H(y)\|_1$$

$g(x) \neq g(y)$ olduğundan $H(x) \neq H(y)$ sonucunu elde ederiz.

Şimdi de $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olduğunu ispatlayalım. $H(x) = Y(x) + u$ olsun, bu durumda $Y(x)$ bileşenleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y_i(x) = -c_i x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.40)$$

(4.40) denkleminin her iki tarafını $\alpha_i \operatorname{sgn}(x_i)$ çarptığımızda aşağıdaki sonuç elde edilecektir:

$$\begin{aligned}
\alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) y_i(x) & = -\alpha_i c_i \operatorname{sgn}(x_i) x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) g_j(x_j) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) g_j(x_j) \\
& \leq -\alpha_i c_i |x_i| + \sum_{j=1}^n \alpha_i |a_{ij}| |g_j(x_j)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i |b_{ij}| |g_j(x_j)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.41)
\end{aligned}$$

$|g_i(x_i) - g_i(0)| \leq L_i |x_i|$ koşulunu kullanarak (4.41) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) (y_i(x)) \leq -\frac{\alpha_i c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(0)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i a_{ij}^* |g_j(x_j)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i b_{ij}^* |g_j(x_j)|, \quad \forall i$$

buradan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) y_i(x) \leq \sum_{i=1}^n -\alpha_i \frac{c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(0)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) |g_i(x_i)| \quad (4.42)$$

$-\frac{c_i}{L_i} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğu için aşağıdaki eşitsizlik sağlanacaktır:

$$-\frac{c_i}{L_i} |g_i(x_i) - g_i(0)| \leq -\frac{c_i}{L_i} |g_i(x_i)| + \frac{c_i}{L_i} |g_i(0)|$$

Yukarıdaki ifade (4.42) ile birleştirilip yazıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) y_i(x) &\leq -\sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) \right\} |g_i(x_i)| + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{c_i}{L_i} |g_i(0)| \\ &= -\sum_{i=1}^n \beta_i |g_i(x_i)| + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{c_i}{L_i} |g_i(0)| \end{aligned}$$

buradan, aşağıdaki eşitsizliği türetebiliriz:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \operatorname{sgn}(x_i) (y_i(x)) - \sum_{i=1}^n \gamma_i |g_i(0)| \leq -\sum_{i=1}^n \beta_i |g_i(x_i)|$$

burada, $\gamma_i = \alpha_i \frac{c_i}{L_i}$ 'dir. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i |g_i(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i(x)| + \sum_{i=1}^n \gamma_i |g_i(0)|$$

$\beta_m = \min\{\beta_i\}$, $\alpha_M = \max\{\alpha_i\}$ ve $\gamma_M = \max\{\gamma_i\}$ olsun. Böylece, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\beta_m \sum_{i=1}^n |g_i(x_i)| \leq \alpha_M \sum_{i=1}^n |y_i(x)| + \gamma_M \sum_{i=1}^n |g_i(0)|$$

Ya da eşdeğer olarak,

$$\beta_m \|g(x)\|_1 \leq \alpha_M \|Y(x)\|_1 + \gamma_M \|g(0)\|_1$$

Yukarıdaki eşitsizliği kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\|Y(x)\|_1 \geq \frac{\beta_m}{\alpha_M} \|g(x)\|_1 - \frac{\gamma_M}{\alpha_M} \|g(0)\|_1$$

$g(0)$ sabit bir vektör olduğundan, $\|g(x)\| \rightarrow \infty$ iken $\|Y(x)\| \rightarrow \infty$ olacaktır. Diğer taraftan, $\|Y(x)\| \rightarrow \infty$ olması, u sabit vektörü için $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olmasını sağlayacaktır. Böylece, denge noktasının varlık ve tekliliğinin ispatı tamamlanmış olmaktadır.

Şimdi de denge noktasının global üstel kararlılığını inceleyeceğiz. x^* (4.32) sisteminin denge noktasını temsil etsin. $z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümü (4.32)'de kullanılırsa aşağıdaki sistem elde edilecektir:

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(z_j(t - \tau_{ij}(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.43)$$

bu denklemden $f_i(z_i(\cdot)) = g_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - g_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacaktır. f_i fonksiyonlarının, g_i fonksiyonlarının sağladığı koşulları sağlayacağı kolayca görülebilir. $|f_i(z_i)| \leq L_i |z_i|$, ve $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacaktır. Aynı zamanda, $-\tau \leq \theta \leq 0$ için, $z(\theta) = \phi(\theta) = \varphi(\theta) - x^*$ dir.

Teorem 4.3.1.2:

(4.43) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için $|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|$, $i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve zaman gecikmeleri için $\dot{\tau}_{ij}(t) \leq \ell_{ij} < 1$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\delta_i = \alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(a_{ji}^* + \frac{b_{ji}^*}{1 - \ell_{ij}} \right) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.43) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global üstel kararlıdır.

burada, $a_{ji}^* = \max\{|a_{ji}|, |\bar{a}_{ji}|\}$, $b_{ji}^* = \max\{|b_{ji}|, |\bar{b}_{ji}|\}$ dir.

İspat 4.3.1.2:

(4.43) sistemi için, aşağıda gösterilen Lyapunov fonksiyonunu kullanalım:

$$V(z(t)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{kt} |z_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t e^{k(\xi+\tau)} |f_j(z_j(\xi))| d\xi$$

burada, $k > 0$ olup, bir sabittir. $V(z(t))$ 'nin zamana bağlı türevi alınır:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq e^{kt} \left\{ \sum_{i=1}^n k\alpha_i |z_i(t)| - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i |z_i(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i |a_{ij}| |f_j(z_j(t))| \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i |b_{ij}| |f_j(z_j(t - \tau_{ij}(t)))| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{k\tau} \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{k(\tau - \tau_{ij}(t))} \alpha_i \frac{1 - \hat{\tau}_{ij}(t)}{1 - \ell_{ij}} |b_{ij}| |f_j(z_j(t - \tau_{ij}(t)))| \right\}
\end{aligned}$$

$\tau - \tau_{ij}(t) \geq 0$ ve $\frac{1 - \hat{\tau}_{ij}(t)}{1 - \ell_{ij}} \geq 1$ için $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{V}(z(t)) \leq e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i (k - c_i) |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i |a_{ij}| |f_j(z_j(t))| + \sum_{j=1}^n e^{k\tau} \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| \right\}$$

$e^{k\tau} = 1 + \epsilon$ olacak şekilde yeterince küçük k ve ϵ sabitlerini seçelim. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ 'nin aldığı form aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i (k - c_i) |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i |a_{ij}| |f_j(z_j(t))| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| + \epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| \right\} \\
&\leq e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i (k - \underline{c}_i) |z_i(t)| + \sum_{j=1}^n \alpha_i a_{ij}^* |f_j(z_j(t))| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{b_{ij}^*}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| + \epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{b_{ij}^*}{1 - \ell_{ij}} |f_j(z_j(t))| \right\}
\end{aligned}$$

$|f_i(z_i)| \leq L_i |z_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ile birlikte $k < \underline{c}_i, \forall i$ olarak alınırsa, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi yazılabilecektir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i \left(\frac{k - \underline{c}_i}{L_i} \right) |f_i(z_i(t))| + \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ji}^* |f_i(z_i(t))| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{b_{ji}^*}{1 - \ell_{ij}} |f_i(z_i(t))| + \epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{b_{ji}^*}{1 - \ell_{ij}} |f_i(z_i(t))| \right\} \\
&= e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ -\delta_i |f_i(z_i(t))| + \frac{\alpha_i k}{L_i} |f_i(z_i(t))| + \epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{b_{ji}^*}{1 - \ell_{ij}} |f_i(z_i(t))| \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq -e^{kt} \sum_{i=1}^n \left\{ \delta_m - \frac{\alpha_M k}{L_m} - \epsilon n \alpha_M \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \right\} |f_i(z_i(t))|$$

burada $\delta_m = \min\{\delta_i\}$, $b_M^* = \max\{b_{ji}^*\}$ ve $\ell_M = \max\{\ell_{ij}\}$ 'dir. Ayrıca, $0 < k < \underline{c}_i$ ve $\epsilon > 0$ olacak şekilde aşağıdaki gibi sabitler her zaman bulunabilir.

$$\frac{\alpha_M k}{L_m} + \epsilon n \alpha_M \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} < \delta_m$$

buradan, bütün $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olacağı açıktır. Diğer taraftan, $\dot{V}(z(t)) < 0$ olması durumunda:

$$V(z(t)) \leq V(z(0)) \quad (4.44)$$

olacaktır.

Ayrıca aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} V(z(0)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i |z_i(0)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} \int_{-\tau_{ij}(t)}^0 e^{k(\xi+\tau)} |f_j(z_j(\xi))| d\xi \\ &\leq \alpha_M \|\phi\|_1 + \alpha_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{|b_{ij}|}{1 - \ell_{ij}} L_j |\phi_j| e^{k\tau} \int_{-\tau_{ij}(t)}^0 e^{k\xi} d\xi \\ &\leq \alpha_M \|\phi\|_1 + \alpha_M b_M L_M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\phi_i| \frac{1}{k} (1 - e^{-k\tau_{ij}(t)}) \\ &\leq \left(\alpha_M + \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \frac{n \alpha_M L_M}{k} (1 - e^{-k\tau}) \right) \|\phi\|_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tanımladığımız Lyapunov fonksiyonu, aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$V(z(t)) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{kt} |z_i(t)| \geq \alpha_m e^{kt} \sum_{i=1}^n |z_i(t)| = \alpha_m e^{kt} \|z(t)\|_1 \quad (4.46)$$

(4.44) - (4.46) denklemlerinden aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$\alpha_m e^{kt} \|z(t)\|_1 \leq \left(\alpha_M + \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \frac{n \alpha_M L_M}{k} (1 - e^{-k\tau}) \right) \|\phi\|_1$$

buradan,

$$\|z(t)\|_1 \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\alpha_M + \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \frac{n \alpha_M L_M}{k} (1 - e^{-k\tau}) \right) \|\phi\|_1 e^{-kt}$$

veya buna denk olarak,

$$\|x(t) - x^*\| \leq \frac{1}{\alpha_m} \left(\alpha_M + \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \frac{n\alpha_M L_M}{k} (1 - e^{-k\tau}) \right) \|\varphi - x^*\| e^{-kt}$$

Böylece,

$$\|x(t) - x^*\| \leq M \|\varphi - x^*\| e^{-kt}$$

her $t \geq 0$ için:

$$M = \frac{1}{\alpha_m} \left(\alpha_M + \frac{b_M^*}{1 - \ell_M} \frac{n\alpha_M L_M}{k} (1 - e^{-k\tau}) \right) \geq 1$$

Bu nedenle, Tanım 1'den yola çıkarak (4.43) ile tanımlanan sistemin orijini veya buna denk olarak (4.32) sisteminin x^* denge noktası global üstel kararlıdır.

Teorem 4.3.1.2'nin sonucu, $0 \leq \ell_{ij} < 1$ için, denge noktasının var olduğu ve tek olduğu anlamına gelmektedir. Buna göre,

$$\alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > \alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(a_{ji}^* + \frac{b_{ji}^*}{1 - \ell_{ij}} \right) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu yüzden, denge noktasının varlığı ve tekliliği, Teorem 4.4.2.1'in sonucu olmaktadır.

Teorem 4.3.1.3:

(4.32) denklemi ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için $|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|$, $i = 1, 2, \dots, n$ ve zaman gecikmeleri için $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) koşulu sağlansın. Eğer,

$$\alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global robust üstel kararlı olacaktır.

İspat 4.3.1.3:

Sabit τ_{ij} gecikmesi için, $\dot{\tau}_{ij}(t) = 0$ olacaktır. $\ell_{ij} = 0, \forall i, j$ Teorem 4.3.1.3'ün ispatı anlamına gelir. Denge noktasının varlığı ve tekliği, Teorem 4.3.1.1'in bir sonucu olmaktadır.

Teorem 4.3.1.1'de elde ettiğimiz sonuçlar, daha önce literatürde türetilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmayı tam olarak yapabilmek için, önceki sonuçları tekrar ifade edeceğiz.

Teorem 4.3.1.4 [52]:

(4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için $|f_i(x)| \leq M_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve $0 < \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq L_i, i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağının orijini global üstel robust kararlı olacaktır.

Teorem 4.3.1.5 [53]:

(4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için $|f_i(x)| \leq M_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve $0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq L_i, i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve zaman gecikmesi için $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$2\alpha_i c_i - \sum_{j=1}^n (\alpha_i L_j^{2r_1} a_{ij}^* + \alpha_j L_i^{2(1-r_1)} a_{ji}^* + \alpha_i L_j^{2r_2} b_{ij}^* + \alpha_j L_i^{2(1-r_2)} b_{ji}^*) > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri ve $r_1 \in [0, 1]$ ve $r_2 \in [0, 1]$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global üstel robust kararlı olacaktır.

Teorem 4.3.1.6 [54]:

(4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için $|f_i(x)| \leq M_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve $0 < \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq L_i, i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve zaman gecikmesi için $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\alpha_i \left(\frac{c_i}{L_i} - \bar{a}_{ii} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j a_{ji}^* - \sum_{j=1}^n \alpha_j b_{ji}^* > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global üstel robust kararlı olacaktır.

Teorem 4.3.1.7 [55]:

(4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için

$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|, \quad i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve zaman gecikmesi için $\tau_{ij}(t) = \tau_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\alpha_i c_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j L_j (a_{ij}^* + b_{ij}^*) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise bu durumda (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global üstel robust kararlı olacaktır.

burada $a_{ij}^* = \max\{|a_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}, b_{ij}^* = \max\{|b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$ 'dir.

Teorem 4.3.1.8 [56]:

(4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde aktivasyon fonksiyonları için

$|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|, \quad i = 1, 2, \dots, n$ koşulu ve zaman gecikmesi için $\tau_{ij}(t) = \tau_j, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ koşulu sağlansın. Eğer,

$$\beta_i = \alpha_i \frac{c_i}{L_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri mevcut ise (4.32) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global üstel robust kararlı olacaktır.

5. BULGULAR

5.1. GECİKMESİ ZAMANLA DEĞİŞEN YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Teorem 4.1.1.1 ve Teorem 4.1.2.2’de, (4.5) sisteminin ağ parametrelerinin kısıtlayıcı koşulları aynıdır. Bununla birlikte, bizim elde ettiğimiz sonuçların [34]’te elde edilen sonuçlardan daha avantajlı olduğu yapılan şu analizle belirtilmiştir: Teorem 4.1.1.1 aktivasyon fonksiyonlarının (4.4) koşulunu sağlamasıyla, denge noktasının sadece asimtotik kararlı olduğunu ispatlamaktadır. Teorem 4.1.1.1 ise, aktivasyon fonksiyonlarının (4.3) koşulunu sağlamasıyla, denge noktasının global asimtotik kararlı olduğunu ispatlamaktadır. Global asimtotik kararlılık, asimtotik kararlılığı gerektirdiği için (fakat bunun tersi her zaman doğru olmayabilir), ve (4.3) koşulunu sağlayan fonksiyonların, (4.4) koşulunu sağlayan fonksiyonlardan daha geniş bir sınıf oluşturduğu için, Teorem 4.1.1.1’de bulduğumuz sonuçlar, Teorem 4.1.2.2’de elde edilen sonuçların genelleştirilmiş halidir.

Bulduğumuz sonuçlar, kullandığımız yapay sinir ağı modeli zamanla değişen gecikmeye sahip olduğundan ve aktivasyon fonksiyonları üzerinde yapılan kısıtlamalar daha esnek olduğundan dolayı, yapay sinir ağlarının daha geniş bir hali ele alınmış olmaktadır. Bu nedenle, bulduğumuz koşullardan yeni kararlılık sonuçları türetebiliriz. Türetilen bu koşullar, [19]-[34] arasında sunulan koşullara alternatif kararlılık sonuçları olabilecektir. Teorem- 4.1.2.2’de verilen sonuçlarla, literatürde önceden sunulmuş olan koşullar arasındaki karşılaştırmalar [34]’te yapılmıştır. Teorem 4.1.1.1 ve Teorem 4.1.2.2 ifadeleri birebir aynı olduğu için, [20]’de yapılan karşılaştırmalar aynı zamanda bizim bulduğumuz sonuçlar için de geçerlidir.

5.2. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL KARARLILIK ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, Bölüm 4.2’de elde ettiğimiz çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde elde edilen sonuçları, literatürde daha önce yayınlanmış sonuçlarla karşılaştıracamız.

Elde ettiğimiz bu sonuçlarla ilgili olarak Bölüm 4.2.3'te örnekler verilmiştir. Örnek-2'de kullanılan değerlere göre, c parametresiyle ilgili olarak, kararlılık koşulu için, $c > 8$ olacaktır. Böylece, eğer $5 < c < 8$ olursa, bu durumda Teorem 4.2.2.2 uygulanabilecek ama Teorem 4.2.3.4 bu koşulu sağlamadığından uygulanamayacaktır.

Böylece, elde ettiğimiz kararlılık sonuçlarının, daha genel ve daha iyi olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, denge noktasının, denge ve kararlılık analizi, yapay sinir ağı modelinin ağ parametreleriyle gecikme parametresinden bağımsız olarak ilişki kurulması üzerinde durulmuştur. Bununla birlikte, sonuçlar, aktivasyon fonksiyonlarının sürekli ve diferansiyeli alınabilir olmasını, sınırlı ve monoton artan olmasını gerektirmemektedir.

5.3. ÇOKLU ZAMAN GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ GLOBAL ROBUST ÜSTEL KARARLILIĞI ANALİZİNDE ELDE EDİLEN SONUÇLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, tez kapasamında yapılan çalışma olan çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust üstel kararlılık analizinde elde edilen sonuçları, literatürde daha önce yayınlanmış sonuçlarla karşılaştıracamız.

(4.32)'deki yapay sinir ağı sistemi için, $\bar{a}_{ii} > 0$ ve $L_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.3.1.3 - 4.3.1.8 aynı ağ parametreleri için kısıtlamaları sağlamaktadır. Teorem 4.3.1.3'te, aktivasyon fonksiyonları üzerindeki kısıtlamalar daha az kısıtlayıcı olduğu için, Teorem 4.3.1.3'teki sonuçlar Teorem 4.3.1.4 - 4.3.1.7'deki sonuçları kapsamaktadır. Diğer taraftan, kullandığımız yapay sinir ağı modelinin gecikmeleri zamana bağlı olduğu için, bu çalışmada elde ettiğimiz sonuçlar [52]-[56] arasında elde edilen sonuçlardan daha genel olmaktadır.

Bu çalışmanın temel katkısı, elde edilen sonuçların, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarına ait; varlık, teklik ve global üstel kararlılık sonuçlarının sunulmasıdır. Denge noktasının denge ve kararlılık analizi, yapay sinir ağının ağ parametreleri arasında ilişki kurularak incelenmiştir. Yapılan analizlerde, aktivasyon fonksiyonları simetrik olmayan bağlantı katsayılarıyla ele alınmış, türevi alınabilir ve monoton olarak seçilmiştir.

5.4 MATLAB SİMÜLASYONLARININ GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Örnek 5.1:

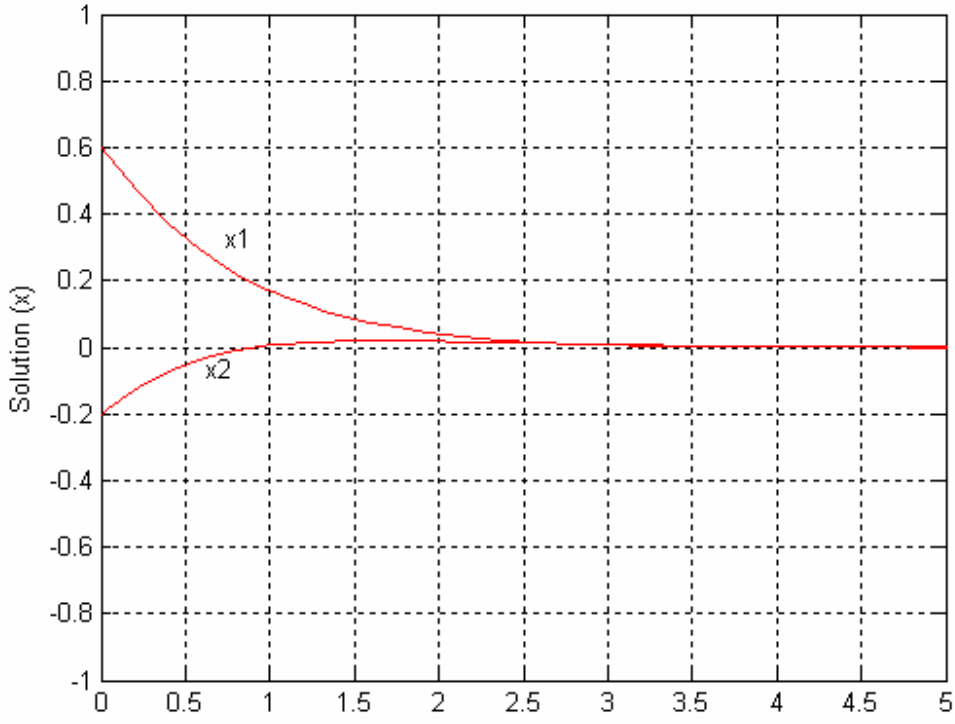
Teorem 4.1.1.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/10 & 1/10 \\ -1/10 & -1/10 \end{bmatrix}$$

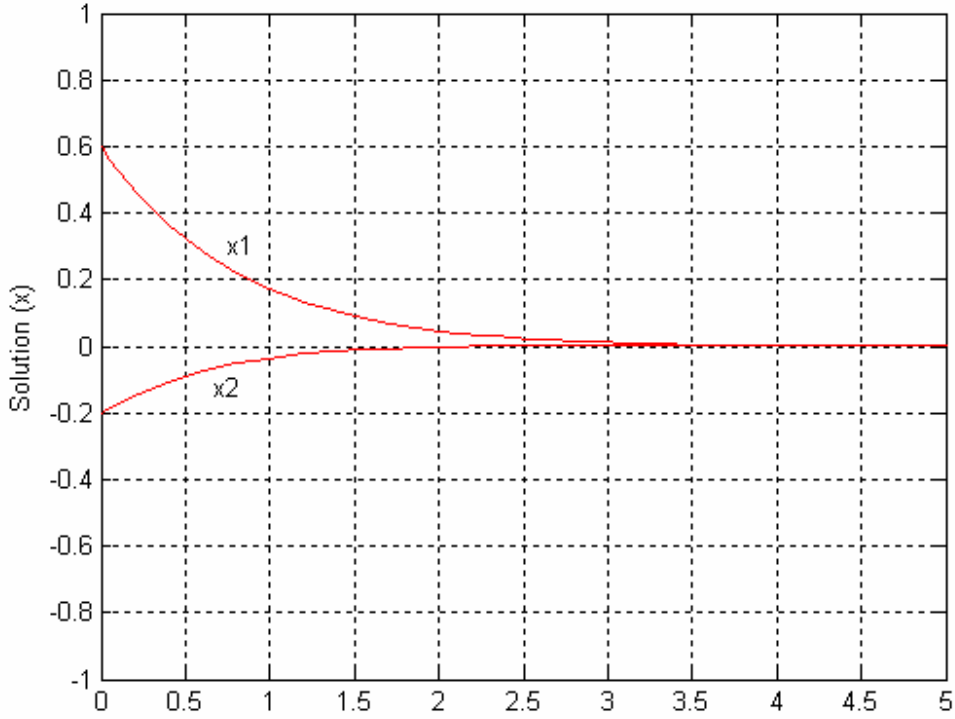
Gecikme: $\tau = 0.4$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.6]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.1: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-1'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.2: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-1'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.2:

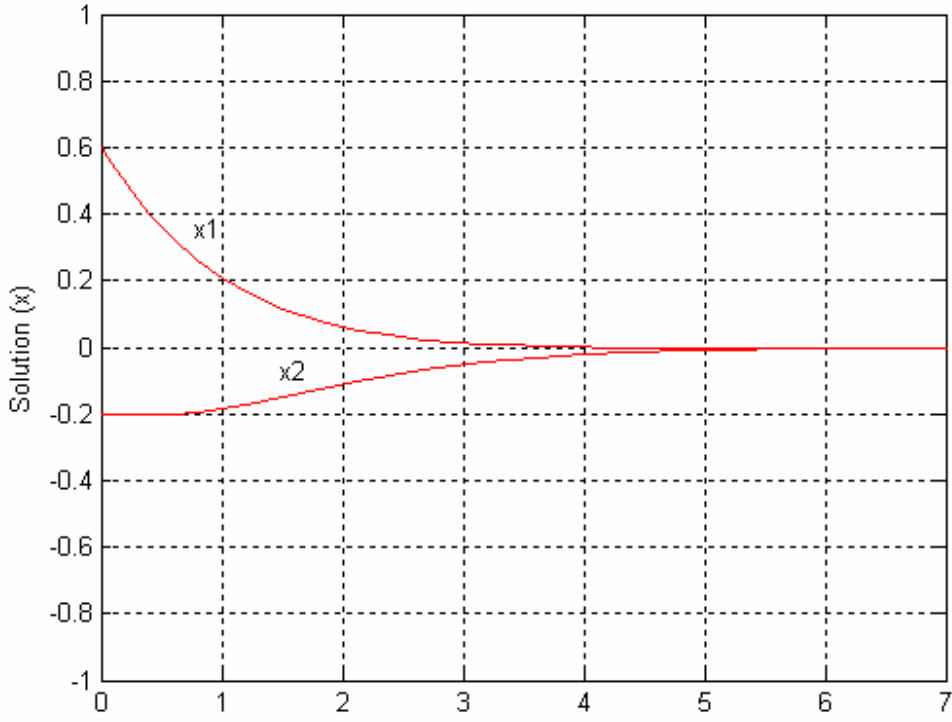
Teorem 4.1.1.1'de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/10 \\ 1/20 & 1/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/4 \\ 1/10 & -1/8 \end{bmatrix}$$

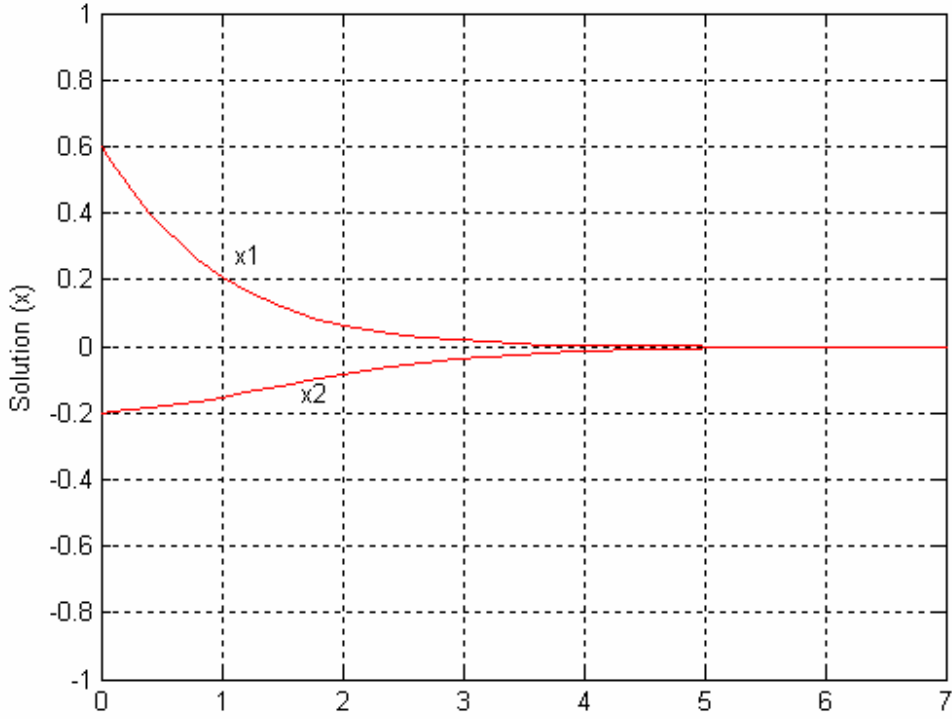
Gecikme: $\tau = 0.4$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.6]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.3: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-2'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.4: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-2'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.3:

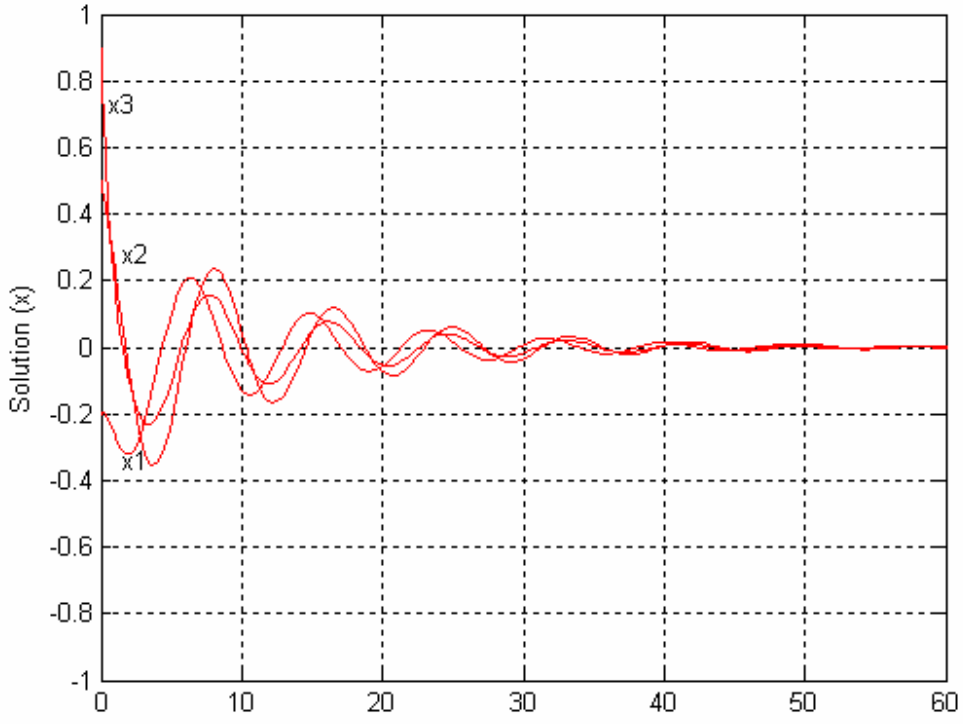
Teorem 4.1.2.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

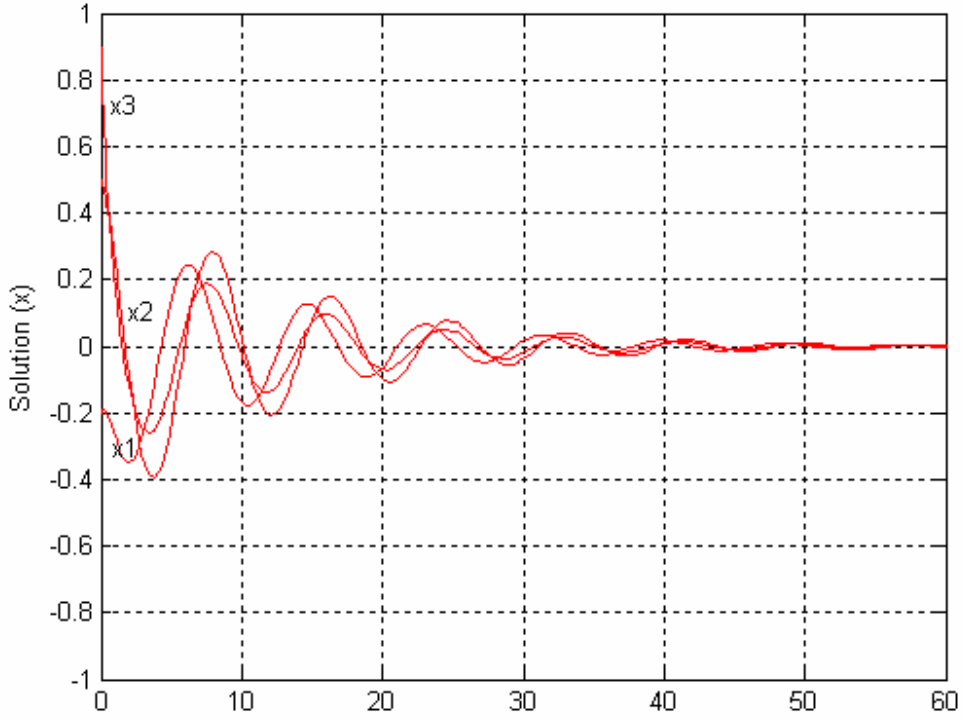
Gecikme: $\tau = 0.1$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.5: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-3'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.6: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-3'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.4 :

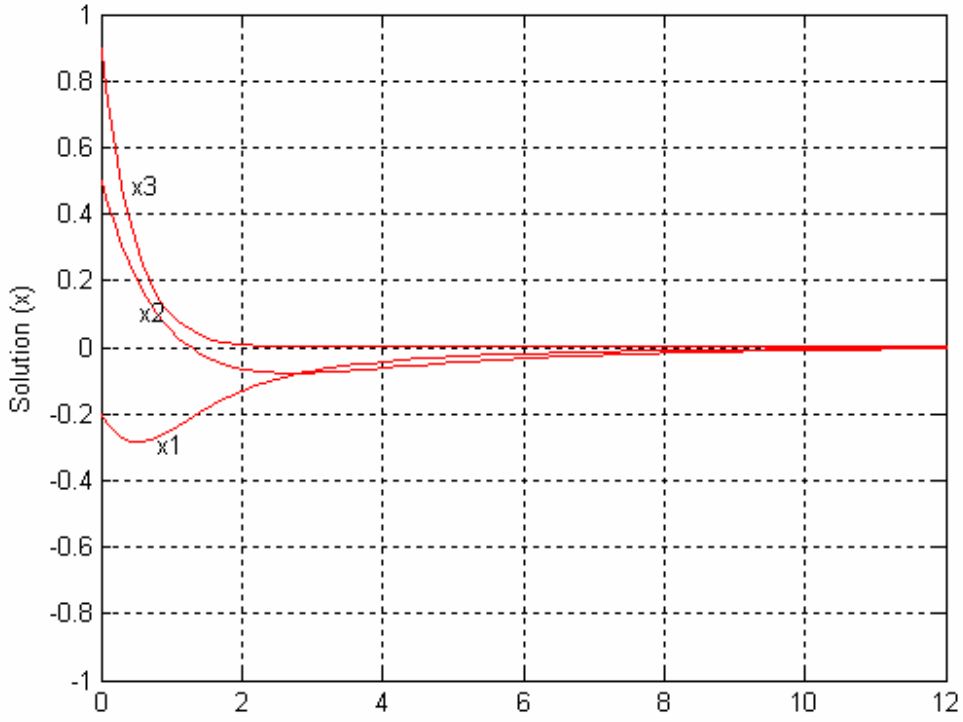
Teorem-4.1.2.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/8 & 1/5 & 1/6 \\ 1/10 & 1/2 & -1/2 \\ 1/5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/15 & -1 \\ 1/2 & -1/5 & 1/9 \\ -1/5 & -1 & -1/8 \end{bmatrix}$$

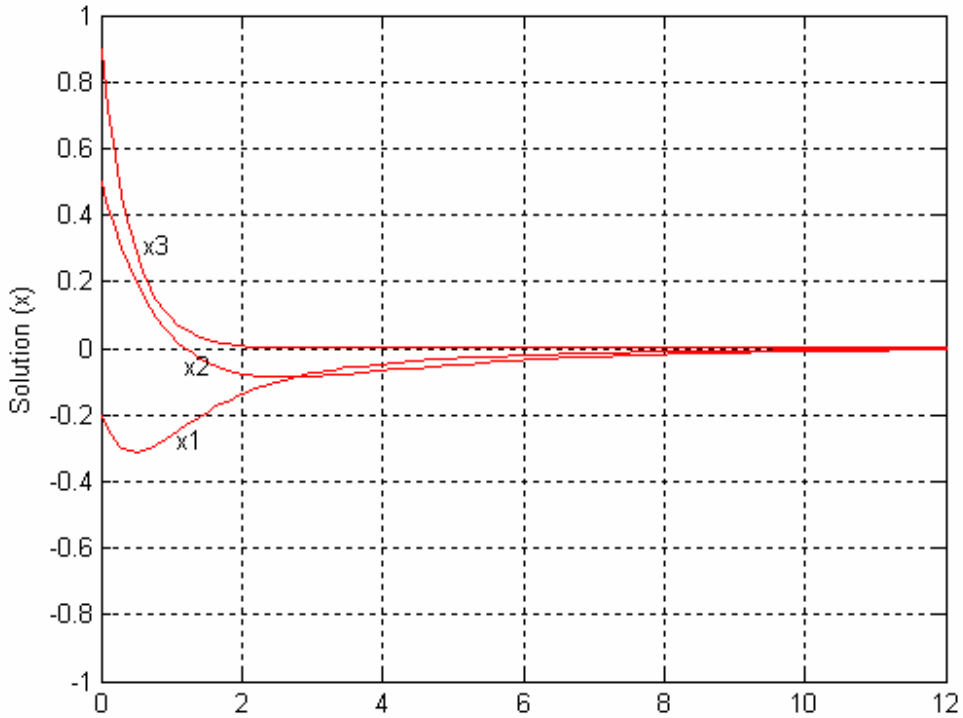
Gecikme: $\tau = 0.1$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.7: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-4'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.8: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-4'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.5 :

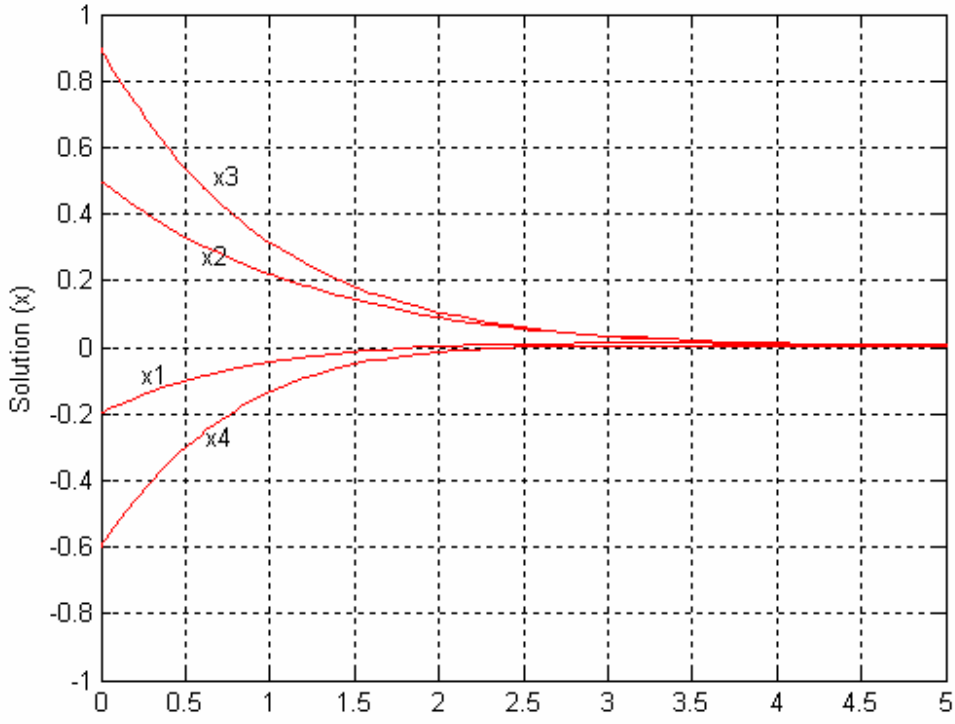
Teorem 4.2.1.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} +1/14 & +1/14 & +1/14 & +1/14 \\ +1/14 & -1/14 & +1/14 & -1/14 \\ -1/14 & -1/14 & +1/14 & +1/14 \\ -1/14 & +1/14 & +1/14 & -1/14 \end{bmatrix}$$

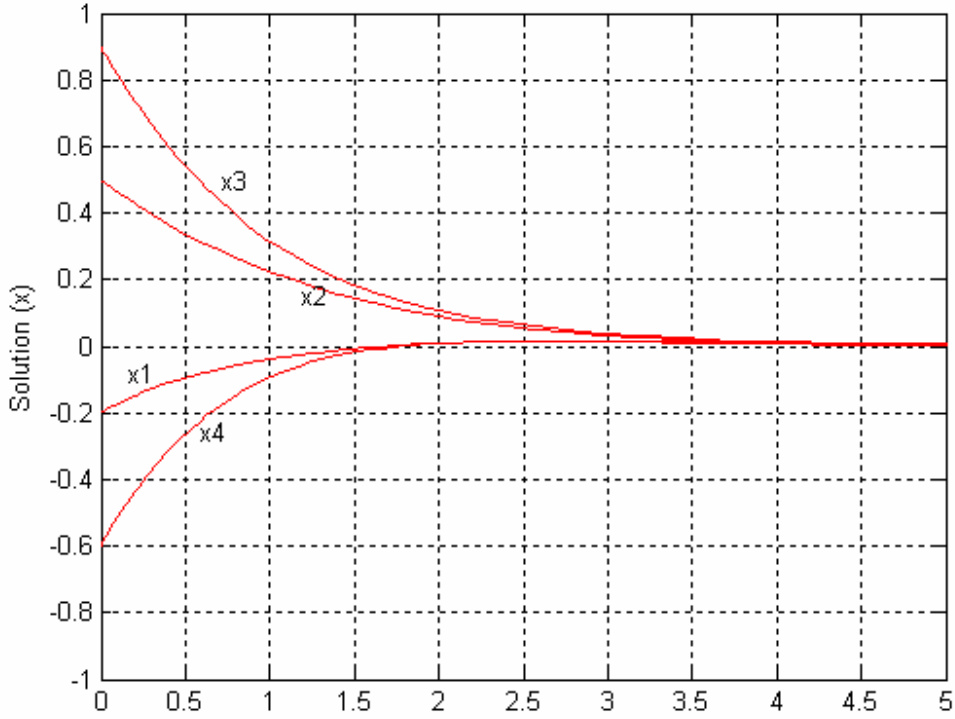
Gecikme: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.6$, $\tau_3 = 0.01$, $\tau_4 = 0.8$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9 \quad -0.6]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.9: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-5'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.10: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-5'teki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.6 :

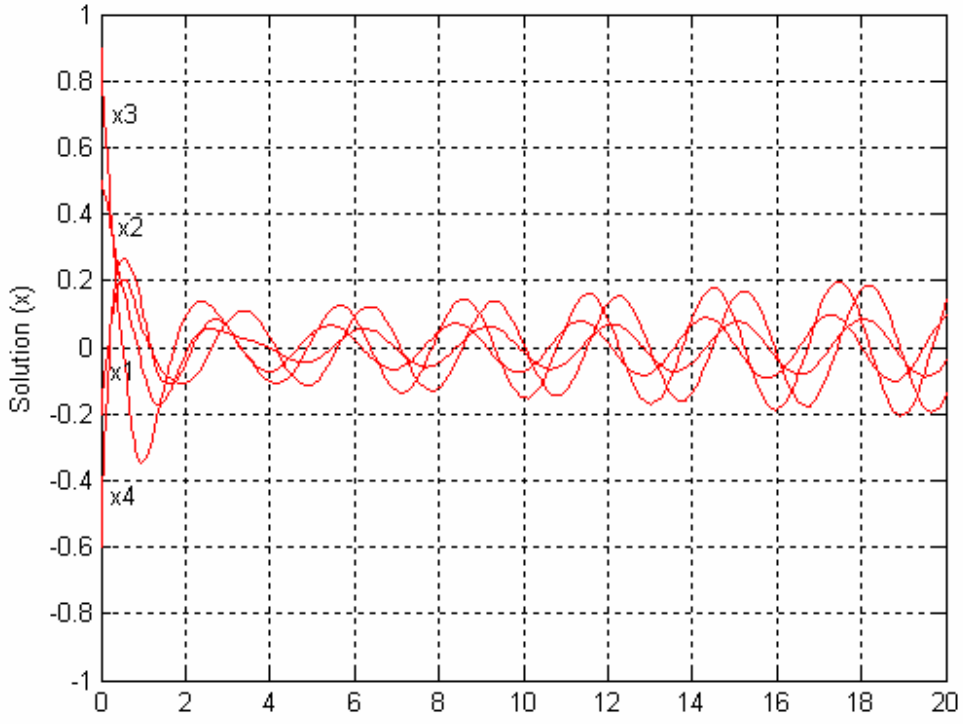
Teorem 4.2.1.1'de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

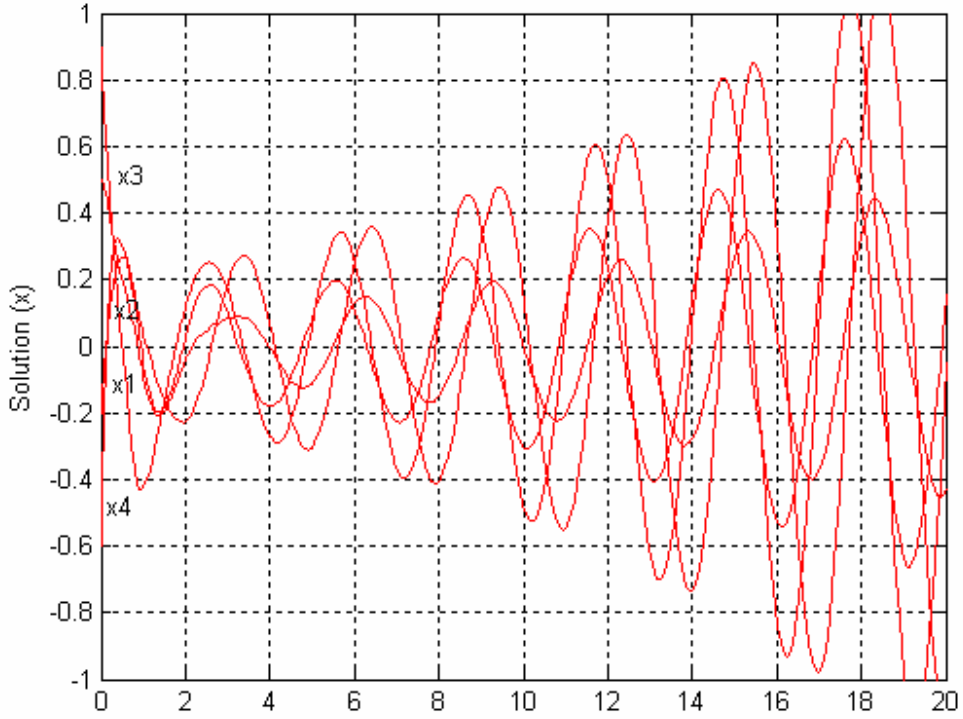
Gecikme: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.6$, $\tau_3 = 0.01$, $\tau_4 = 0.8$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9 \quad -0.6]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.11: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-6'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.12: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-6'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.7 :

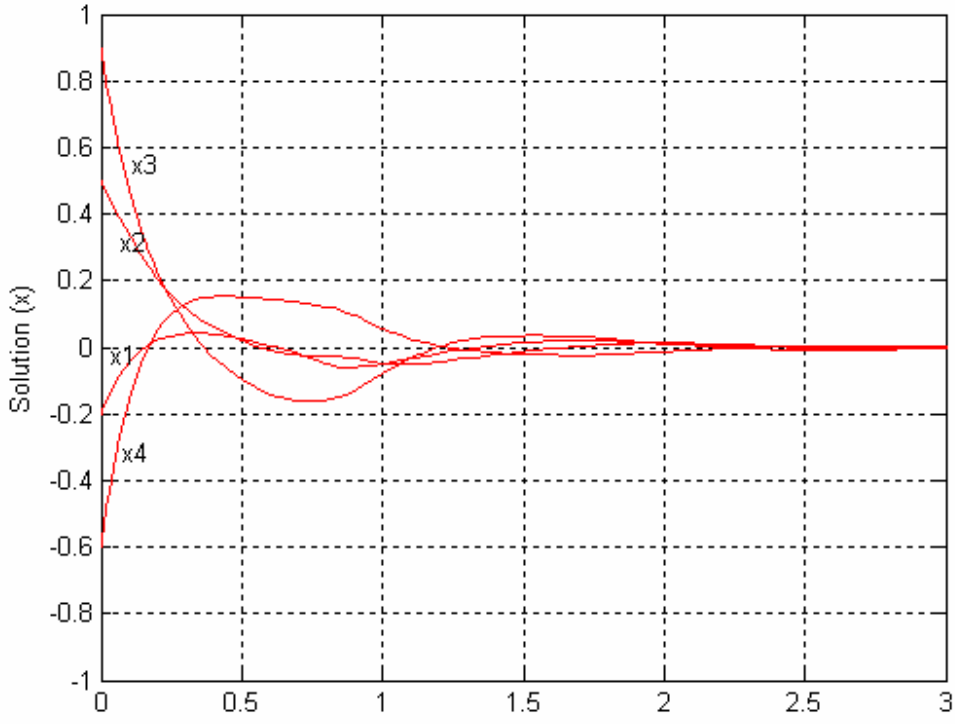
Teorem 4.2.1.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A = B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

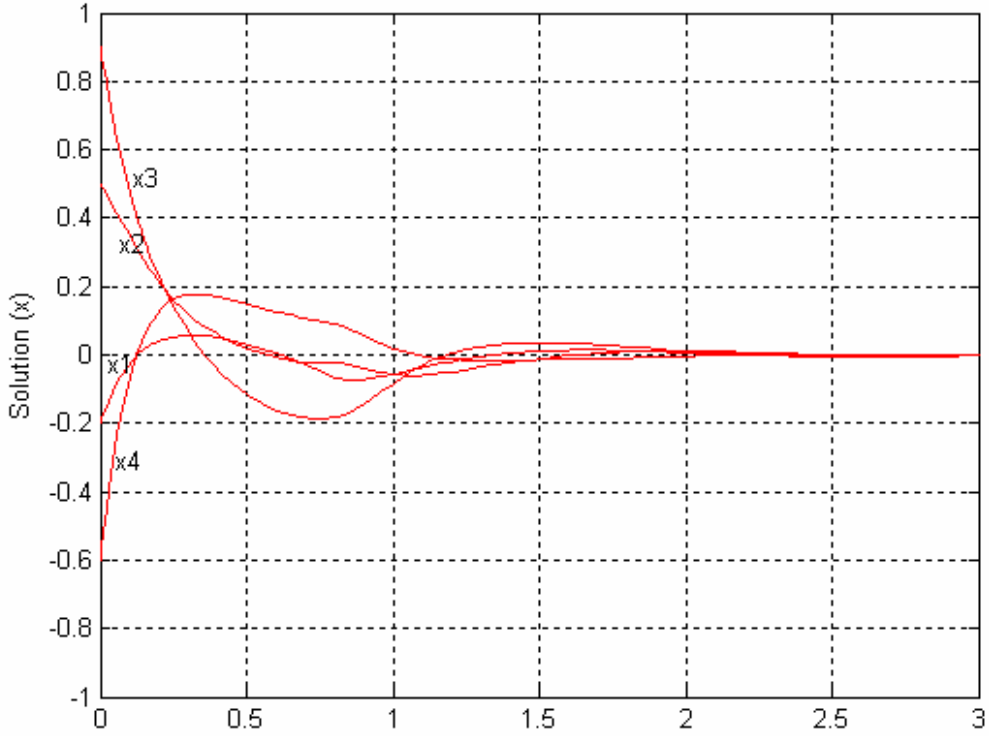
Gecikme: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.6$, $\tau_3 = 0.01$, $\tau_4 = 0.8$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9 \quad -0.6]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar :



Şekil 5.13: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-7'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.14: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-7'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.8 :

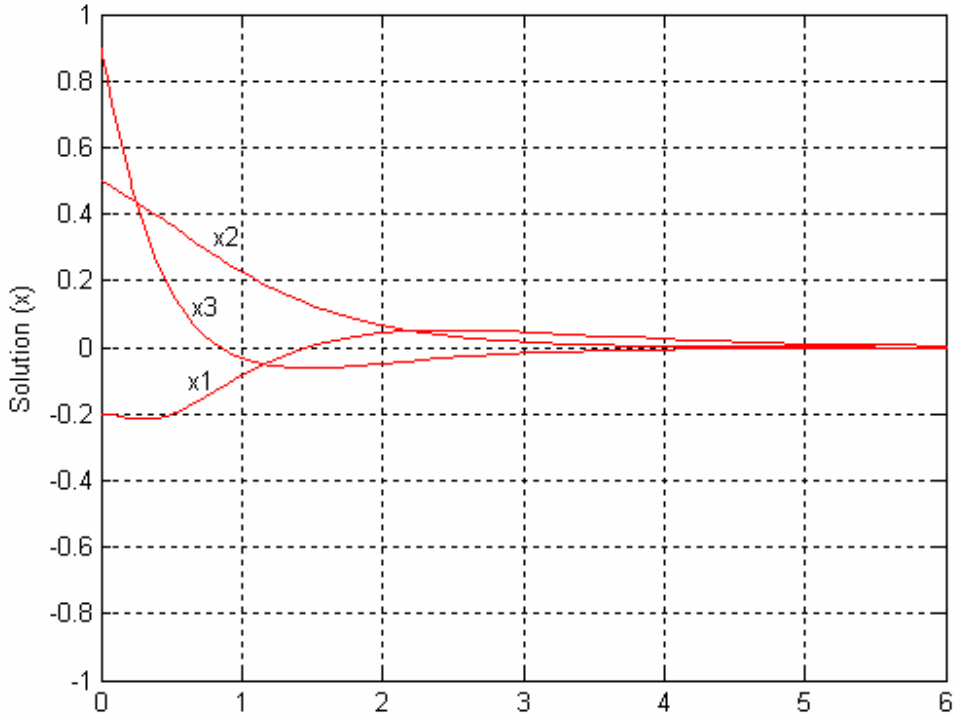
Teorem 4.3.1.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/6 \\ -1/10 & 1/5 & 1/4 \\ 1/9 & 1/8 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/5 & -1 \\ 1/10 & -1/5 & 1/9 \\ -1/4 & -1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

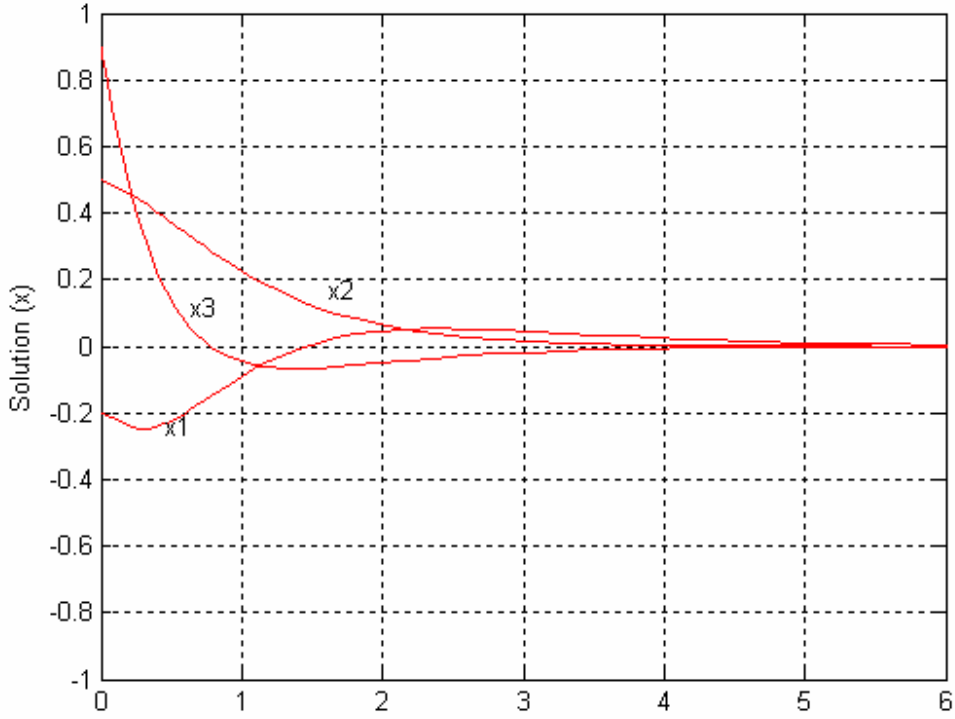
Gecikme: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.6$, $\tau_3 = 0.01$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \ 0.5 \ 0.9]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar:



Şekil 5.15: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-8'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.16: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek8'deki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.9 :

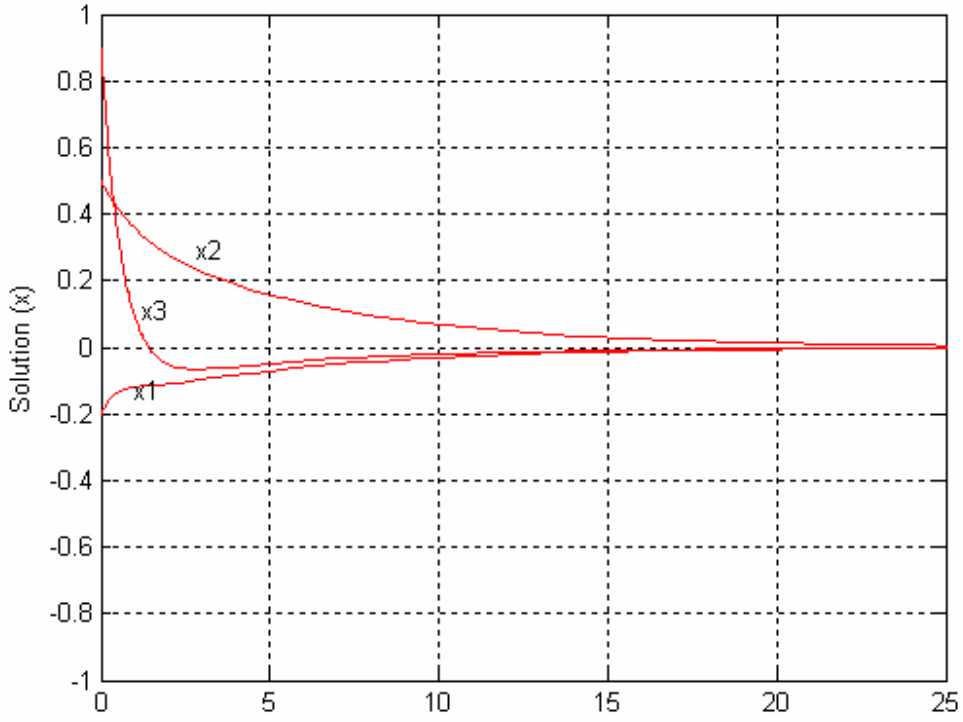
Teorem 4.3.1.1’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/7 & 1/3 \\ -1 & 1/5 & -1/4 \\ -1/3 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/2 & -1/9 \\ 1/10 & 1/5 & 1/6 \\ -1/2 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

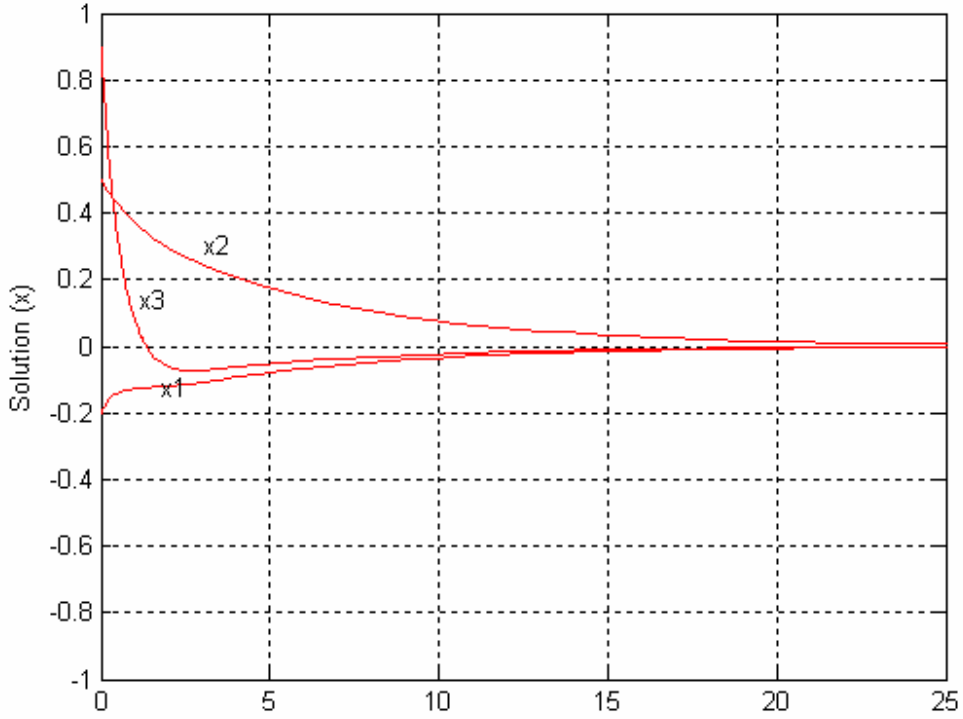
Gecikme: $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.6$, $\tau_3 = 0.01$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \ 0.5 \ 0.9]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar:



Şekil 5.17: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-9'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.18: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-9'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü

Örnek 5.10 :

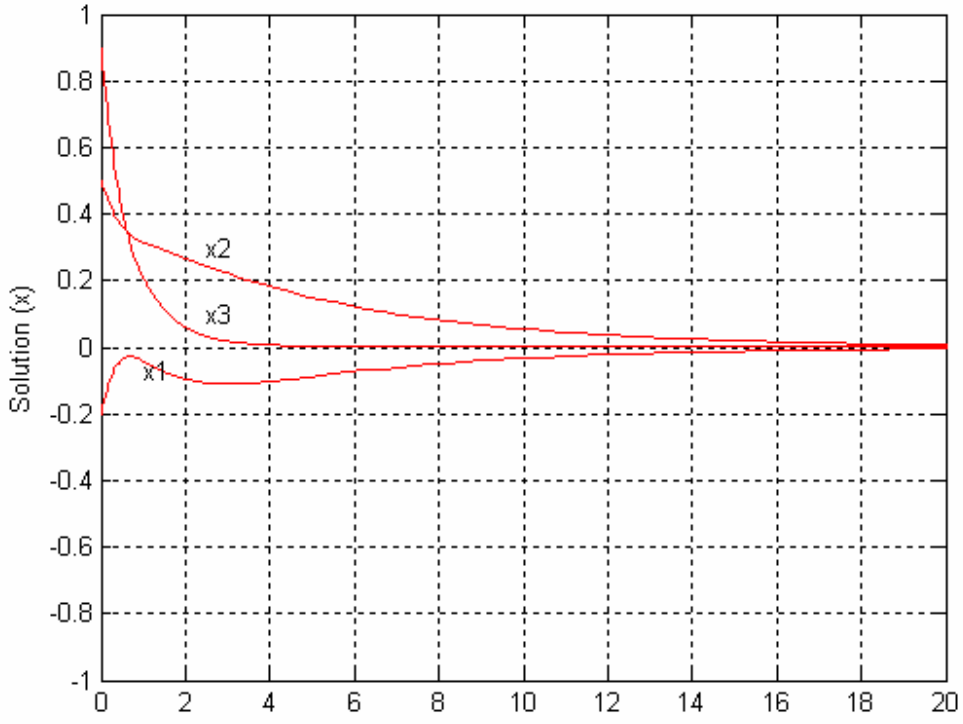
Teorem 4.3.1.2’de verilen gecikmeli yapay sinir ağı modeli için sistem parametreleri,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/6 & 1 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/3 & 1/6 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/2 & -1/9 \\ 1/10 & 1/4 & 1/6 \\ -1/10 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

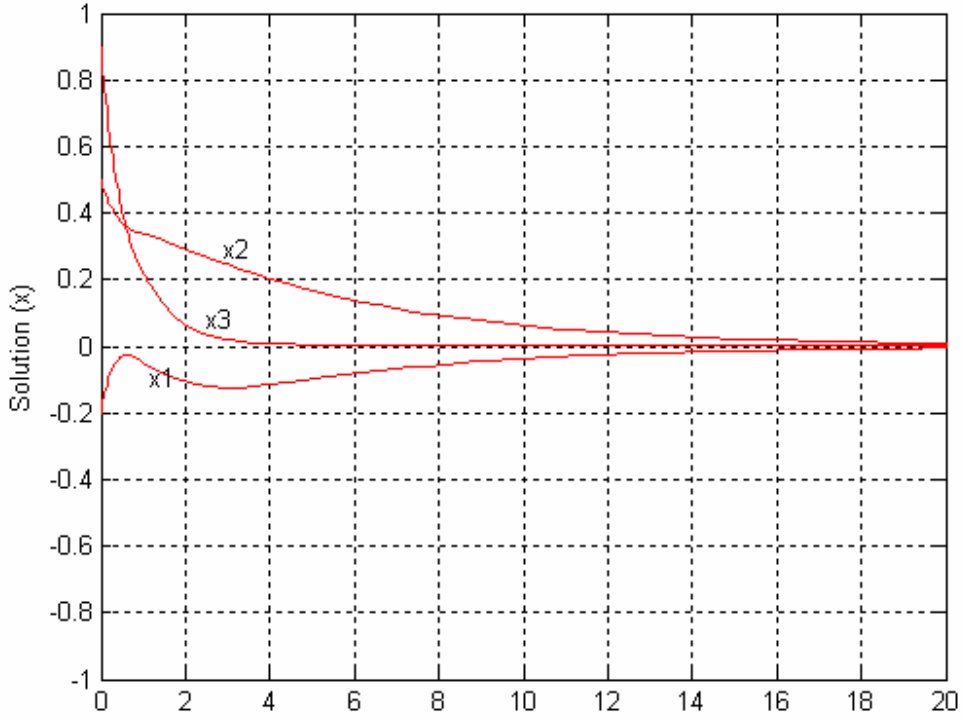
Gecikme: $\tau = \cos(t)$

Başlangıç koşulu: $[-0.2 \quad 0.5 \quad 0.9]$

şeklinde tanımlandığında, elde edilen simülasyonlar:



Şekil 5.19: Sigmoid aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-10'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü



Şekil 5.20: Piecewise aktivasyon fonksiyonu kullanarak Örnek-10'daki sistem parametreleri için sistemin çözümü

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının dinamik davranışları ve kararlılık kriterleri incelenmiştir. Global ve üstel kararlılık kriterleri elde edilip, bu kararlılık kriterlerinin simülasyonları MATLAB 6.5 versiyonu kullanılarak gerçekleştirilmiş ve bulgularımız desteklenmiştir. Bu sonuçlar, literatürde daha önce elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağlarının farklı özellikteki aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı durumlar için, denge noktasının varlığı, tekliği, global asimptotik ve üstel kararlılığı için yeni koşullar elde edilmiştir. Elde edilen kararlılık koşulları incelenen yapay sinir ağının sistem parametreleri arasındaki ilişkilere dayanmaktadır. İncelenen yapay sinir ağı modeli gecikme parametresi de içerdiğinden dolayı, yapılan analizlerde gecikme parametresinin kararlılık koşulları üzerindeki etkileri de incelenmiştir. Gecikmenin sabit olduğu durumlarda elde edilen kararlılık koşulları gecikme parametrelerinden bağımsız olarak ifade edilebilmişlerdir. Gecikme parametrelerinin zamanla değiştiği durumlarda ise, kararlılık koşulları, Lyapunov teoremleri kullanıldığında gecikmeye bağlı olarak, gecikmeden bağımsız olarak elde edilmiştir.

Bu tezin literatüre katkısı, kullanılan yapay sinir ağı modelinin denge noktası davranışını karakterize eden koşulların analiz edilmesidir. Bu analiz yapılırken denge noktasının varlığı ve tekliği ile denge noktasının kararlılık analizleri ayrı ayrı yapılmıştır. Çünkü denge noktasının varlığı ve tekliğini sağlayan koşullar bazen denge noktasının kararlılığını sağlamayabilir ya da kararlılığı sağlayan koşullar denge noktasının tekliğini garanti etmeyebilir. Bu nedenle, bu tezde yapılan çalışmalardan elde edilen koşulların önce denge noktasının varlığı ve tekliğini daha sonra da aynı koşulların denge noktasının kararlılığını sağladığı ispatlanmıştır.

Son yıllarda, gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı modelinin kararlılık analizi ile ilgili oldukça fazla makale yayınlanmış ve bu çalışmalarda yapay sinir ağı sisteminin denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik ve üstel kararlılığı ile ilgili yeterli koşullar sunulmuştur. Bu çalışmaların çoğunda kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının sınırlı ve gecikme

parametrelerinin sabit oldukları varsayılmıştır. Yine bazı çalışmalarda aktivasyon fonksiyonlarının türevi alınabilir ve kesin artan oldukları kabul edilmiştir. Bizim elde ettiğimiz bazı sonuçlarda aktivasyon fonksiyonları ve gecikme parametreleri üzerinde yukarıda belirtilen kısıtlamalar kaldırılmıştır. Bu nedenle de elde ettiğimiz sonuçlar, literatürde daha önce verilmiş olan kararlılık koşullarına göre daha genel olmaktadır. Diğer yandan, elde ettiğimiz kararlılık sonuçlarının test edilmesi de literatürde daha önce verilmiş olan sonuçlar ile kıyaslandığında daha kolaydır. Çünkü sistem parametrelerine dışardan ilave edilen bazı özel parametrelerin bulunması özellikle birçok durumda son derece kolaydır. Elde edilen sonuçların kolayca test edilebildiğini ve geniş bir yapay sinir ağı modeline uyarlanabileceğini göstermek açısından, hem farklı aktivasyon fonksiyonlarının hem de farklı gecikme parametrelerinin kullanıldığı sayısal örnekleri içeren ve elde edilen sonuçların yorumlanmasına yardımcı olacak simülasyonlarda yapılmıştır.

Gecikmesi zamanlar değişen yapay sinir ağı modelinin daha genel bir yapıda olması ve birçok pratik problemin çözümünde kullanılması nedeni ile, dinamik davranışını karakterize eden çalışmaların devam edeceği açıktır. Bu alanda, bundan sonra yapılacak çalışmalarda özellikle daha genel karakteristik özelliklere sahip doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması ile birlikte, gecikme parametrelerinin sistem davranışı üzerindeki etkilerini en aza indirebilecek çalışmalar özel bir öneme sahip olacaktır. Ancak bu tür sonuçların elde edilebilmesi için de Lyapunov fonksiyonları analiz edilerek yeni Lyapunov fonksiyonlarının bulunması da ayrı bir araştırma konusu olarak önem arzedecektir.

KAYNAKLAR

- [1] S. Arik, "Global asymptotic stability of a class of dynamical neural networks", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, no. 4, pp. 568-571, Apr. 2000.
- [2] S. Arik, V. Tavsanolu, "Equilibrium analysis of delayed CNNs", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, no.2, pp. 168-171, Feb. 1998.
- [3] S. Arik, V. Tavsanoglu, "On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, no.4, pp. 571-574, Apr. 2000.
- [4] M. Forti and A. Tesi, "New conditions for global stability of neural networks with applications to linear and quadratic programming problems", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 42, no.7, pp. 354-365, Jul. 1995.
- [5] J. Cao, "Exponential stability and periodic oscillatory solution in BAM networks with delays", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 13, no.2, pp. 457-463, Mar. 2002.
- [6] J. Cao and J. Wang, "Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 50, no.1, pp. 34-44, Jan. 2003.
- [7] H. Lu, F. L. Chung, and Z. He, "Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed neural networks", *Neural Networks*, vol.17, pp. 437-544, 2004.
- [8] Q. Zhang, R. Ma, C. Wang, and J. Xu, "On the global stability of delayed neural networks", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no.5, pp. 794-797, May 2003.
- [9] T.Chen, "Global convergence of delayed dynamical systems", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 12, no.6, pp. 1532-1536, Nov. 2001.

- [10] T. Chen, "Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks", *Neural Networks*, vol. 14, pp. 977-980, 2001.
- [11] C. Feng and R. Plamondon, "On the stability analysis of delayed neural network systems", *Neural Networks*, vol. 14, pp. 1181-1188, 2001.
- [12] S. Hu and J. Wang, "Global asymptotic stability and global exponential stability of continuous-time recurrent neural networks", *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 5, pp. 802-807, May 2002.
- [13] T. L. Liao and F. C. Wang, "Global stability for cellular neural networks with time delay", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, no.6, pp. 1481-1485, Nov. 2000.
- [14] S. Mohamad, "Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks", *Physica D*, vol. 159, pp. 233-251, 2001.
- [15] N. Takahashi, "A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 47, no.6, pp. 793-799, Jun. 2000.
- [16] Z. Yi, P. A. Heng, and K. S. Leung, "Convergence analysis of delayed cellular neural networks with unbounded delay", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 48, no.6, pp. 680-687, Jun. 2001.
- [17] J. Zhang and Y. Yang, "Global stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with time delay", *Int. J. Circuit Theory Appl.*, vol. 29, pp. 185-196, 2001.
- [18] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1991.
- [19] J.J. Hopfield, "Neuron with response have collective computational properties like those of two state neurons", *Proc. Nat. Acad. Sci. I*, vol. 81, no. 5, pp. 3088-3092, 1984.
- [20] T. Roska, C.W. Wu, and L.O. Chua, "Stability of cellular neural networks with dominant

nonlinear and delay-type template”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 40, pp. 270-272, April 1993.

[21] T. Roska, C.W. Wu, M. Balsi and L.O. Chua , ”Stability and dynamics of delay-type general and cellular neural networks”, *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 487-490, June 1992.

[22] C.M. Marcus and R.M. Westerveld , ”Stability of analogy neural networks with delay”, *Phys. Rev. A*, vol. 39, no.2, pp. 347-359, 1989.

[23] K. Gopalsamy and X. He, ”Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays”, *Physica D*, vol. 76, pp. 344-358, 1994.

[24] M. Joy, ”On the global convergence of a class of differential equations with applications in neural networks”, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, vol. 232, pp. 61-81, 1999.

[25] M. Gilli and P.P. Civalleri and L. Pandolfi, ”On stability of cellular neural networks with delay”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 40, pp. 157-164, March 1993.

[26] X. F. Liao, K.W. Wong and J. Yu , ”Novel Stability Conditions for Cellular Neural Networks with Time Delay”, *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.11, no. 7, pp.1853-1864, 2001.

[27] J. Cao, ”Global Stability Conditions for delayed CNNs”, *IEEE Trans. on Circuits and Syst. I*, vol. 48, no.11, pp. 1330-1333, November 2001.

[28] S. Arik , ”An improved global stability result for delayed cellular neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 49, pp. 1211-1214, August 2002.

[29] Z. Yi, P. A. Heng and P. Vadakkepat, ”Absolute periodicity and absolute stability of delayed neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 49, pp. 256-261, February 2002.

[30] J. Zhang, ”Absolutely exponential stability in delayed cellular neural networks”, *Internat-*

tional Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 30, no.4, pp. 395-409, July-August 2002.

[31] H. Huang, J. Cao and J. Wang, "Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays", *Physics Letters A*, vol. 298, pp. 393-404, June 2002.

[32] X. F. Liao and J. B. Yu, "Robust stability for interval hopfield neural networks with time delay", *IEEE Trans. Neural Networks*. vol. 9, pp. 1042-1045, 1998.

[33] X. F. Liao, K.W. Wong, Z. Wu and G. Chen, "Novel robust stability for interval-delayed hopfield neural networks", *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, vol. 48, pp. 1355-1359, November 2001.

[34] X. Liao, G. Chen and E. N. Sanchez, "LMI-based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks", *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, vol. 49, pp. 1033-1039, July 2002.

[35] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Mcmillan Publishing Company, New York, 1988.

[36] Y.H.Chen and S.C. Fang, "Neurocomputing with time delay analysis for solving complex quadratic programming problems", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, pp. 230-240, 2000.

[37] R.Fantacci, M.Forti , M.Marini and L.Pancani , "Cellular neural network approach to a class of communication problems", *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, vol. 46, pp. 1457-1467, 1999.

[38] K.Wang and A.N. Michel, "On the stability of family of nonlinear time varying systems", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 43, no. 7, pp. 517-531, July 1996.

[39] S. Hu and J.Wang, "Absolute exponential stability of a class of continuous-time recurrent neural networks", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 14, no.1, pp.35-45, January 2003.

[40] S. Hu and J. Wang "Global exponential stability of continuous-time interval neural net-

works”, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 49, no. 9, pp.1334-1347, September 2002.

[41] E. Yücel and S. Arik, ”New exponential stability results for delayed neural networks with time varying delays”, *Physica D*, vol. 191, pp. 314 -322, 2004.

[42] S. Ruan and R.S. Filfil, ”Dynamics of a two-neuron system with discrete and distributed delays, *Physica D*, vol. 191, pp. 323-342, 2004.

[43] J.D.Cao, ”Periodic -Solutions and Exponential stability in delayed Cellular Neural Networks”, *Physical Review E*, vol.60, no.3, pp.3244-3248, 1999.

[44] S. Arik and V. Tavsanoğlu, ”On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol .47, no.5, pp.571-574, April 2000.

[45] T-L Liao and F-C . Wang, ”Global stability for cellular neural networks with time delay”, *IEEE Trans. On Neural Networks*, vol. 11 pp. 1481-1485, November 2000.

[46] N. Takahashi, ”A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 47, pp. 793-799, June 2000.

[47] Z .yi and K.K. Tan, ”Dynamic stability conditions for lotka-volterra recurrent neural networks with delays”, *Physical Review E*, vol. 66, 011910, 2002.

[48] Z.Yi P.A. Heng and K.S. Leung, ”Convergence Analysis of Delayed Cellular Neural Networks with Unbounded Delay”, *IEEE Trans. On Circuits and Syst. I*, vol. 48, pp. 680-687 , June 2001.

[49] X. Liao, G. Chen and E. N. Sanchez , ”LMI- based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks”, *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 49 pp. 1033-1039 , July 2002.

[50] K. Gopalsamy and X. He, ”Delay-dependent stability in bi-directional associative memory networks”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 5, pp. 998-1002, 1994.

- [51] J. Wei and M.Y. Li, "Global existence of periodic solutions in a tri-neuron network model with delays", *Physica D*, vol. 50, pp. 34-44, January 2003.
- [52] X. F. Liao and J. Yu, "Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.9, pp. 1042-1045, September 1998.
- [53] X. F. Liao, K. W. Wong, Z. Wu and G. Chen, "Novel robust stability for interval-delayed Hopfield network", *IEEE Trans. Circuits and Syst. I*, vol. 48, pp. 1355-1359, November 2001.
- [54] J. Cao and T. Chen, "Global exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 22, pp. 957-963, November 2004.
- [55] A. Chen, J. Cao and L. Huang, "Global robust stability of delayed neural networks with a class of general activation functions", *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 69, pp. 688-700, December 2004.
- [56] C. Sun and C. B. Feng, "On robust exponential periodicity of interval neural networks with delays", *Neural Processing Letters*, vol. 20, pp. 53-61, August 2004.
- [57] T. Ensari, S. Arik, "Global Robust Exponential Stability of Neural Networks with Multiple Time Varying Delays", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, Supplementary, Special Issue on Advances in Neural Networks - Theory and Applications, Part I*, Vol.14(S1) page 6-12, August 2007.
- [58] T. Ensari, S. Arik, "Global Stability Analysis of Neural Networks with Multiple Time Varying Delays", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pp. 1781-1785, November 2005.
- [59] T. Ensari, S. Arik, "Global Stability of A Class of Neural Networks With Time Varying Delay", *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II - Express Briefs*, Vol. 52, No: 3, pp. 126-130, March 2005.

- [60] S. Arik and Z. Orman, "Global stability analysis of Cohen-Grossberg neural networks with time varying delays", *Physics Letters A*, vol. 341, no : 5-6, pp. 410-421, June 2005.
- [61] N.Ozcan, Arik S. "An analysis of global robust stability of neural networks with discrete time delays", *Physics Letters A*, Vol.359, No.5, 445-450, 2006.
- [62] McCULLOCH, W.S. ve PITTS, W., 1943, A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133, 1943, Reprinted in Anderson and Rosenberg , 1988.
- [63] CIVALLERI, P.P., GILLI, M., and PANDOLFI, L., 1993, On Stability of Cellular Neural Networks with Delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 40 (3), 157-165.
- [64] Z.Orman and S.Arik, "New Results for Global Stability of Cohen-Grossberg Neural Networks with Discrete Time Delays", *Lecture Notes in Computer Science*, vol.4232, Springer 2006, ISBN 3-540-46479-4, pp.570-579, October 2006.
- [65]N. Ozcan, S. Arik, "Global Robust Stability Analysis of Neural Networks with Multiple Time Delays", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers*, Vol.53, No.1, 166-176, 2006.
- [66]N. Ozcan, S. Arik, V. Tavsanoğlu, "On the Existence of Stable Equilibrium Points in Cellular Neural Networks", *Journal of Circuits, Systems and Computers*, Vol.12, No.4, 461-471, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Tolga ENSARİ 24.07.1979 tarihinde Mardin’de doğdu. İlköğrenimini Atatürk İlkokulu ve Dumlupınar İlkokulu’nda, orta ve lise öğrenimini ise Emlak Bankası Ortaokulu ve Atakent Lisesi’nde tamamladı. 1996 yılında Atakent Lisesi’nden mezun olduktan sonra, aynı sene İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü’nde lisans öğrenimine başladı. 2000 yılında lisans öğrenimini bitirdikten sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Savunma Teknolojileri Anabilim Dalı-Bilişim Teknolojileri Programı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Bu dönemde Kasım 2001’den itibaren İstanbul Üniversitesi’nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2003 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak, aynı yıl içerisinde İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programı’nda doktora öğrenimine başladı. Halen Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü bünyesinde Araştırma Görevliliğine devam eden Tolga ENSARİ, yapay sinir ağları üzerinde çalışmalarını sürdürmektedir.

Tolga Ensari