



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BEZIER VE B-SPLINE EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN
BİLGİSAYAR TASARIMLARI VE GEOMETRİK
EĞRİLİKLERİ**

Ferhat TAŞ

Matematik Anabilim Dalı

1. Danışman

Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN

2. Danışman

Yrd.Doç.Dr. Bahadır TANTAY

Kasım, 2009

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BEZIER VE B-SPLINE EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN
BİLGİSAYAR TASARIMLARI VE GEOMETRİK
EĞRİLİKLERİ**

Ferhat TAŞ

Matematik Anabilim Dalı

1. Danışman

Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN

2. Danışman

Yrd.Doç.Dr. Bahadır TANTAY

Kasım, 2009

İSTANBUL

Bu çalışma 04/12/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr. Leyla Z. AKGÜN(Danışman)
İstanbul Üniversitesi

Prof.Dr. Erhan GÜZEL
İstanbul Üniversitesi

Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

Prof.Dr. Osman GÜRSOY
Maltepe Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Hakan M. TAŞTAN
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda deneyim, düşünce ve destekleri ile her zaman yanımda olan danışman hocam Prof.Dr. Leyla Z. AKGÜN ve danışman hocam Yrd.Doç.Dr. Bahadır TANTAY' a, bilgi ve tecrübesini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN' a, değerli katkılarından dolayı sayın hocam Prof. Dr. İsmet KARACA' ya ve sabır ve desteklerini her zaman hissettiren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Kasım, 2009

Ferhat TAŞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. AFİN DÖNÜŞÜMLER	1
1.2. LİNEER İNTERPOLASYON.....	2
1.3. PARÇALI LİNEER İNTERPOLASYON	4
1.4. MENELAOS TEOREMİ	5
1.5. DÜZLEMDE BARİSENTRİK KOORDİNATLAR	6
1.6. MOZAIKLEME VE ÜÇGENLEŞTİRME	7
1.7. FONKSİYON UZAYLARI	9
2. DE CASTELJAU ALGORİTMASI.....	12
2.1. PARABOLLER	12
2.2. DE CASTELJAU ALGORİTMASI	14
2.3. BÉZIER EĞRİLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ	15
2.3.1. Afın Özelliği	15
2.3.2. Afın Parametre Dönüşümü Altında Değişmeme.....	15
2.3.3. Konveks Tekne Özelliği	16
2.3.4. Uç Nokta İnterpolasyonu	16

2.3.5. Bézier Eğrileri İle Tasarım	16
2.4. ÇİÇEKLEME	17
3. BÉZIER EĞRİLERİNİN BERNSTEIN BİÇİMLERİ	20
3.1. BERNSTEIN POLİNOMLARI	20
3.2. BÉZIER EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ	22
3.2.1. Afin Değişmezliği.....	22
3.2.2. Afin Parametre Dönüşümü Altında Sabitlik.....	22
3.2.3. Konveks Yapı Özelliği	23
3.2.4. Uç Nokta İnterpolasyonu.....	23
3.2.5. Simetri	23
3.2.6. Barisentrik Kombinasyon Altında Değişmezlik.....	23
3.2.7. Lineer Hassasiyet	24
3.2.8. Pseudo-Yerel Kontrol	24
3.3. BİR BÉZIER EĞRİSİNİN TÜREVİ.....	24
3.4. YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER.....	26
3.5. TÜREV VE DE CASTELJAU ALGORİTMASI.....	28
3.6. BÖLME.....	30
3.7. ÇİÇEKLEME VE KUTUP	32
3.8. BİR BÉZIER EĞRİSİNİN MATRİS BİÇİMİ	33
4. B-SPLINE EĞRİLERİ	34
4.1. DÜZGÜN VE DÜZGÜN OLMAYAN PARAMETRİK EĞRİLER	39
4.2. EĞRİ SÜREKLİLİĞİ	39
4.3. PARAMETRİK KÜBİK EĞRİLER	40
4.4. BİLGİSAYARDA HIZLI HESAPLAMA	41
4.5. KUADRATİK UNIFORM B-SPLINE.....	43
5. YÜZEYLER	46
5.1. BİLİNEER YAMALAR (KONTROL AĞLARI)	46
5.2. TENSÖR ÇARPIM YÜZEYLERİ	48
5.3. BÉZIER YÜZEY YAMASI	49
5.4. ÜÇGENSEL BÉZIER YÜZEY YAMALARI	50
5.5. B-SPLINE YÜZEY YAMASI	52

6. EĞRİLERDE KUTUPSAL BİÇİMLER (BLOSSOMİNG)	55
6.1. GİRİŞ (DÜZLEM EĞRİLERİ)	55
6.2. DİFERANSİYELLEME	56
6.3. DERECE YÜKSELTİLMESİ	56
6.4. DE CASTELJAU YAKLAŞIMI	58
6.5. KÜBİK EĞRİLER İÇİN KUTUPSAL FORMLAR	60
7. PARAMETRİK YÜZEYLERİN KUTUPSAL HALİ	61
7.1. PARAMETRİK YÜZEYLERE PARAMETRE EĞRİLERİ İLE YAKLAŞIM	64
8. SİMPEKSLER	67
8.1. SİMLİSİYAL KOMPEKSLER VE ÇOKYÜZLÜ	67
8.2. YÖNLÜ SİMPEKSLER	68
9. BİR EĞRİNİN TEĞETLERİNE YAKLAŞIM	70
9.1. TANIM(KAPALI KONTROL ÇOKGENİ)	70
10. ÇOKGENSEL ÇİZGİNİN EĞRİLİĞİ	71
10.1. TANIM	71
10.2. KUADRATİK BÉZIER EĞRİLERİNİN ÇOKGEN EĞRİLİĞİ	71
10.2.1. Sonuç	73
10.2.2. Sonuç	74
11. TARTIŞMA VE SONUÇ	75
KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ	77

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	: [a, b] aralığının interpolasyonu.....	3
Şekil 1.2	: Parçalı lineer interpolasyon.....	5
Şekil 1.3	: İnterpolasyon ile Menelaos teoremi	6
Şekil 1.4	: Ceva teoremi	7
Şekil 1.5	: Dirichlet mozaikleme.....	8
Şekil 1.6	: Yeni nokta ekleme	9
Şekil 1.7	: Dolunay üçgenleştirme	9
Şekil 2.1	: Tekrarlı lineer interpolasyon ile parabollerin oluşturulması	13
Şekil 2.2	: Eğri üzerindeki üç noktadaki teğetlerin kesişim noktaları.....	13
Şekil 2.3	: de Casteljou algoritması.....	14
Şekil 2.4	: Bazı Bezier eğri örnekleri	17
Şekil 3.1	: Bernstein polinomları	21
Şekil 3.2	: Bezier eğrisi ve hodograf eğrisi.....	26
Şekil 3.3	: Uç nokta türevleri	27
Şekil 3.4	: Genelleştirilmiş bölme	30
Şekil 4.1	: B-Spline eğrisi ve düğüm noktaları.....	36
Şekil 4.2	: Afin interpolasyonu.....	38
Şekil 4.3	: Geometrik süreklilik.....	39
Şekil 4.4	: Parametrik süreklilik	40
Şekil 4.5	: Uniform B-Spline ve kontrol çokgeni	43
Şekil 5.1	: Bilineer yama ve dört kontrol noktası	46
Şekil 5.2	: Bilineer yamaya u doğrultusunda interpolasyon yapılıyor.....	47
Şekil 5.3	: Bilineer yamaya v doğrultusunda interpolasyon yapılıyor	47
Şekil 5.4	: Örnek 5.2.1 deki yüzeyin resmi.....	49
Şekil 5.5	: Örnek 5.4.1 deki yüzeyin resmi.....	51
Şekil 6.1	: Örnek 6.1.1 deki eğri ve kontrol noktaları	55
Şekil 6.2	: de Casteljou diyagramı	59
Şekil 7.1	: Örnek 7.1 deki yüzey ve kontrol ağı	64
Şekil 7.2	: Örnek deki yüzey yaması, teğet düzlemi ve normali	66
Şekil 8.1	: Simpleksler	67
Şekil 8.2	: (a) Bir simplisiyal kompleks.(b) Koşullardan (ii) sağlanmadığından simplisiyal kompleks değildir	68
Şekil 8.3	: Yönlü simpleksler.....	69
Şekil 10.1	: Eğriliğe çember ve açı yaklaşımı	71
Şekil 10.2	: Örnekteki Bezier eğrisi ve kontrol çokgeni	72
Şekil 10.3	: b_1 kontrol noktasının değişiminden sonraki eğrinin şekli	73
Şekil 10.4	: Sabit eğrilikli eğri ve kontrol noktaları ile birlikte kontrol çokgeni	73

TABLO LİSTESİ

Tablo 7.1	: Yüzeyin kontrol noktaları	62
------------------	-----------------------------------	----

SEMBOL LİSTESİ

$C^k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: k kez sürekli diferansiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar
\mathbf{b}_i	: kontrol noktaları
\mathbf{a}_t	: P_1 ve P_2 noktalarının t parametresine göre interpolasyonu
\mathbf{b}_t	: P_2 ve P_3 noktalarının t parametresine göre interpolasyonu
\mathbf{a}_s	: P_1 ve P_2 noktalarının s parametresine göre interpolasyonu
\mathbf{b}_s	: P_2 ve P_3 noktalarının s parametresine göre interpolasyonu
$\text{ratio}(\mathbf{a}_t, \mathbf{c}, \mathbf{b}_t)$: c noktasının \mathbf{a}_t ve \mathbf{b}_t noktalarına göre oranı
$\text{ratio}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s)$: c noktasının \mathbf{a}_s ve \mathbf{b}_s noktalarına göre oranı
$\text{ratio}(\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_t, \mathbf{P}_2)$: \mathbf{b}_t noktasının \mathbf{b}_s ve \mathbf{P}_2 noktalarına göre oranı
$\text{ratio}(\mathbf{P}_2, \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_s)$: \mathbf{a}_t noktasının \mathbf{a}_s ve \mathbf{P}_2 noktalarına göre oranı
$\text{ratio}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s)$: c noktasının \mathbf{a}_s ve \mathbf{b}_s noktalarına göre oranı
t_i	: çiçekleme hesabındaki aralık değeri
\mathbf{b}_r^i	: de Casteljau algoritmasındaki ara nokta
Δ_i	: parametre aralıklarındaki farklar
Δ^r	: tekrarlı ileri farklar operatörü
\mathbf{P}_{ij}	: tensör çarpım yüzeyindeki kontrol noktaları
ε	: E^3 uzayının bir altuzayı
$(\mathbf{p}_0 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \mathbf{p}_r)$: \mathbf{p}_i noktası hariç bir simpleks
Lin.int	: lineer interpolasyon

ÖZET

BEZIER VE B-SPLINE EĞRİ VE YÜZEYLERİNİN BİLGİSAYAR TASARIMLARI VE GEOMETRİK EĞRİLİKLERİ

Bu tez çalışmasının ilk iki bölümünde, bilgisayar destekli geometrik tasarım için gerekli matematiksel altyapı çalışmalarına verdik.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, Bezier ve B-Spline eğrilerinin incelenmesini beşinci bölümde ise tensör çarpım yardımı ile bu özel eğriler tarafından oluşturulan yüzeyleri inceledik.

Altıncı ve yedinci bölümlerde, Bezier ve B-Spline eğrileri ve yüzeyleri için çiçekleme ile kontrol noktalarının bulunmasını sağladık. Böylece bir yüzeyin sınıflamasında ayrı bir karakterizasyon elde ettik. Ayrıca sekizinci bölümde bu yöntem ile bir yüzeyin parametre eğrilerine uygulanan çiçekleme yöntemi ile yüzeyin bir ağını elde ettik.

Sekizinci bölümde, simpleksler konusundaki sınır operatörü tanımını vererek bunu onuncu bölümde bir eğrinin kontrol noktalarına bu operatörü uygulayarak teğet yaklaşımını oluşturduk.

Çalışmamızın son bölümde, Bezier B-Spline eğrileri için oluşturulan kontrol çokgenleri üzerinde hesaplanabilir geometri de kullanılan çokgensel çizginin eğriliğini uygulayarak eğriler üzerinde yeni bir karakterizasyon elde ettik.

SUMMARY

COMPUTER DESIGNS AND GEOMETRIC CURVATURES OF BEZIER AND B-SPLINE CURVES AND SURFACES

In the first two chapters of this thesis we gave the mathematical constructions needed computer aided geometric design.

In the third and fourth chapters we examined the Bezier and B-Spline curves and in chapter fifth the surfaces which are constructed by these special curves via tensor product.

In the sixth and seventh chapter we provided to finding control points via blossom for Bezier and B-Spline curves and surfaces. Therefore we obtained a characterization in the classification of a surface. Besides in the eighthly applying to surface's parameter curves we obtained a net of a surface via blossoming method.

In the eighth we gave definition of the boundary operator in the simplexes and applying to control polygon of a curve we constructed the approximation to the tangents of a curve.

In the last part of the thesis, we obtained a characterization on the curves applying curvature of a polyline, which is used in the computational geometry, on the control polygons which are constructed for Bezier and B-Spline curves.

1. GİRİŞ

1.1. AFİN DÖNÜŞÜMLER

Bilgisayar yardımıyla tasarlayacağımız bir nesnenin konumunun ya da ölçülerinin belirlenmesinde kullanılan dönüşümlerin çoğu afin dönüşümlerdir. Afin uzayda her noktaya bir vektör karşılık gelir.

E^3 deki bir noktayı yine E^3 deki bir noktaya dönüştüren bir ϕ dönüşümü, eğer barisentrik kombinasyonları değişmez (invariant) bırakırsa bir afin dönüşümdür. Yani $\mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j$, $\sum \alpha_j = 1$, $\mathbf{x}, \mathbf{a}_j \in E^3$ olmak üzere, bir afin dönüşüm

$$\phi: \phi\mathbf{x} = \sum \alpha_j \phi\mathbf{a}_j; \phi\mathbf{x}, \phi\mathbf{a}_j \in E^3 \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır [6]. Burada \mathbf{x} herhangi bir koordinat çatısında bir nokta, $\phi\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$, A , 3×3 lük bir matris, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ bir vektördür.

$\sum \alpha_j = 1$ barisentrik kombinasyon olmak üzere;

$$\begin{aligned} \phi\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) &= A\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) + \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j A\mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \mathbf{v} \\ &= \sum \alpha_j (A\mathbf{a}_j + \mathbf{v}) \\ &= \sum \alpha_j \phi\mathbf{a}_j \end{aligned} \quad (1.2)$$

dir [6].

Afin dönüşüm örnekleri,

Birim dönüşüm. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve $A = I$, birim matris ile verilir.

Öteleme. $A = I$ ve \mathbf{v} bir öteleme vektörü ile verilir.

Ölçekleme. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve A bir köşegen matris olmak üzere köşegendeki elemanlar ölçekleme miktarını gösterir.

Dönme. Eğer herhangi bir geometrik cisim z -ekseni etrafında döndürüyorsak, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Meyillendirme. Verilen sabit bir yönde bir doğru boyunca bir nesnenin ötelenmesine

meyillendirme denir. Bir örnek olarak $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ verilebilir.

Paralel Projeksiyon. Tüm E^3 uzayı xy – düzlemine $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile

izdüşürülebilir (A burada bir ölçekleme matrisi gibidir), [6].

1.2. LİNEER İNTERPOLASYON

Bilgisayar destekli geometrik tasarımda kullandığımız hesaplamaların çoğu, lineer interpolasyonların bilinen adımlarına ya da dizilerine görünürde ayrılabilir. Bu yüzden bu temel yapı bloklarını anlamak için lineer interpolasyon gereklidir.

\mathbf{a} ve \mathbf{b} E^3 de iki farklı nokta olmak üzere, \mathbf{a} ve \mathbf{b} den geçen doğrular

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}; t \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

ile gösterilebilir [6].

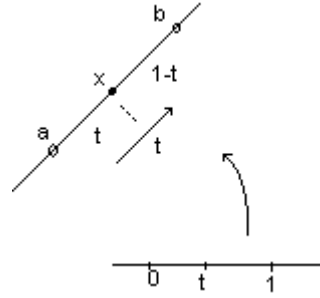
Herhangi üç nokta (ya da daha fazlası) bir doğru üzerinde ise bunlara collinear (doğrudaş) denir. ϕ , E^3 de bir afin dönüşüm olmak üzere,

$$\phi \mathbf{x} = \phi((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = (1-t)\phi \mathbf{a} + t\phi \mathbf{b} \quad (1.4)$$

dir [4]. \mathbf{a} , \mathbf{x} ve \mathbf{b} E^3 de doğrusal iseler;

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}; \quad \alpha + \beta = 1 \quad (1.5)$$

dir [4]. Burada α ve β \mathbf{x} in \mathbf{a} ve \mathbf{b} ye bağlı barisentrik koordinatlarıdır.



Şekil 1.1: $[a, b]$ aralığının interpolasyonu.

Barisentrik koordinatlar ve lineer interpolasyon arasındaki bağlantı açıktır: $\alpha = 1-t$ ve $\beta = t$ dir. Bu barisentrik koordinatların, $t \notin [0, 1]$ için her zaman pozitif olmak zorunda olmayacağını gösterir. Göz önüne alınan doğrudan noktalar \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} ile gösterilirse \mathbf{b} nin barisentrik koordinatları \mathbf{a} ve \mathbf{c} ye bağlı olur. Bu durumda,

$$\alpha = \frac{\text{Hacim}_1(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{Hacim}_1(\mathbf{a}, \mathbf{c})}, \quad \beta = \frac{\text{Hacim}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\text{Hacim}_1(\mathbf{a}, \mathbf{c})} \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilir [4]. Burada Hacim_1 1-boyutlu hacmi belirtir.

Bu konudaki diğer önemli bir içerik de oranlardır. Doğrusal üç \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} noktasının oranı:

$$\text{Oran}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\text{Hacim}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\text{Hacim}_1(\mathbf{b}, \mathbf{c})} \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer α ve β , \mathbf{b} nin barisentrik koordinatları ise;

$$\text{Oran}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\beta}{\alpha} \quad (1.8)$$

dır.

$[a, b]$ aralığı $[0, 1]$ aralığından bir afin dönüşüm ile elde edilebilir. $t \in [0, 1]$ ve $u \in [a, b]$ için;

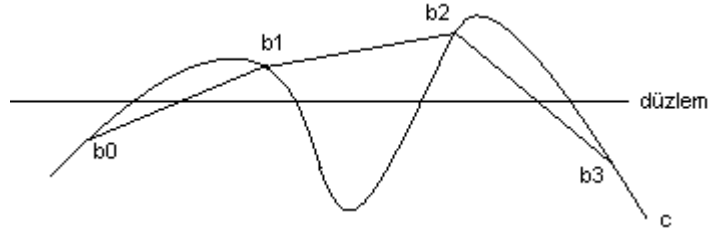
$$\begin{aligned} t = \frac{(u - a)}{(b - a)} &\Rightarrow x(t) = (1 - t)a + tb \\ &\Rightarrow x(u) = \frac{b - u}{b - a} a + \frac{u - a}{b - a} b \end{aligned} \quad (1.9)$$

şeklini alır [6].

1.3.PARÇALI LİNEER İNTERPOLASYON

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in E^3$ bir B çokgenini tanımlasın. Bu çokgen $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ nokta çiftlerini birleştiren doğruların bir dizisini içerir. O halde parçalı lineer interpolasyona PL dersek, eğer \mathbf{b}_i noktaları bir (\mathbf{c}) eğrisi üzerinde ise o zaman $B, (\mathbf{c})$ eğrisine parçalı lineer bağlıdır, denir ve $B = \text{PL}(\mathbf{c})$ dir. Parçalı lineer interpolasyon aynı zamanda bir afin dönüşüm olduğundan, $\text{PL}\phi(\mathbf{c}) = \phi\text{PL}(\mathbf{c})$ dir [6].

Şimdi sürekli bir (\mathbf{c}) eğrisi ve bunun $\text{PL}(\mathbf{c})$ parçalı lineer bağlayıcı ile bir düzlem alalım. (Geçiş)cross (\mathbf{c}) , (\mathbf{c}) eğrisinin bu düzlemde geçme sayısı ve (geçiş)cross $\text{PL}(\mathbf{c})$, parçalı lineer bağların bu düzlemde geçme sayısı olsun. O halde; $(\text{geçiş})\text{cross } \text{PL}(\mathbf{c}) \leq (\text{geçiş})\text{cross } (\mathbf{c})$ dir (Bkz. Şekil 1.2) [6].



Şekil 1.2: Parçalı lineer interpolasyon.

1.4. MENELAOS TEOREMİ

Parçalı lineer interpolasyonu çok önemli geometrik bir teoremin ispatını yapmak için kullanacağız. Şekil 1.3 e dayanarak,

$$\mathbf{a}_t = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{a}_s = (1-s)\mathbf{P}_1 + s\mathbf{P}_2,$$

$$\mathbf{b}_t = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3,$$

$$\mathbf{b}_s = (1-s)\mathbf{P}_2 + s\mathbf{P}_3.$$

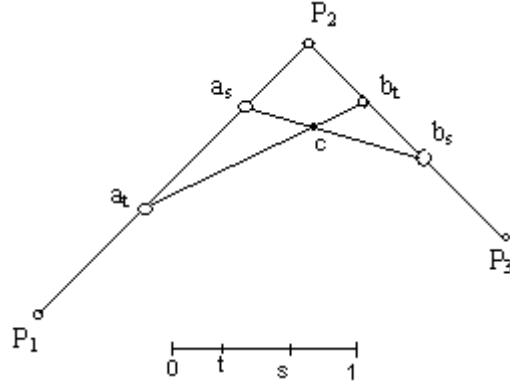
$\mathbf{a}_t\mathbf{b}_t$ ve $\mathbf{a}_s\mathbf{b}_s$ doğrularının arakesit noktası \mathbf{c} olsun. O halde

$$\text{Oran}(\mathbf{a}_t, \mathbf{c}, \mathbf{b}_t) = \frac{s}{1-s} \quad \text{ve} \quad \text{Oran}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s) = \frac{t}{1-t} \quad (1.10)$$

dir. \mathbf{c} nin $\mathbf{c} = (1-s)\mathbf{a}_t + s\mathbf{b}_t$ ve $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a}_s + t\mathbf{b}_s$ eşitliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir. Denklem (1.10) orijinal Menelaos teoreminin “Bilgisayar destekli geometrik tasarımıdır”. Ayrıca bu denklem,

$$\text{Oran}(\mathbf{b}_s, \mathbf{b}_t, \mathbf{P}_2) \cdot \text{Oran}(\mathbf{P}_2, \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_s) \cdot \text{Oran}(\mathbf{a}_s, \mathbf{c}, \mathbf{b}_s) = -1 \quad (1.11)$$

şeklinde de ifade edilebilir [6].



Şekil 1.3: İnterpolasyon ile Menelaos teoremi.

1.5. DÜZLEMDE BARİSENTRİK KOORDİNATLAR

Barisentrik koordinatları doğrusal olarak çalıştık. Şimdi de düzlemde koordinat sistemleri olarak çalışalım.

\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} noktaları bir üçgen belirtsin ve $\mathbf{p} \in E^2$ olsun. \mathbf{p} yi \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} nin bir barisentrik kombinasyonu (lineer birleşimi) olarak yazmak mümkündür. Yani $\mathbf{p} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$ olacak biçimde yazılabilir (Bkz. Şekil 1.4). Eğer bu bir barisentrik kombinasyon ise $u+v+w=1$ dir. $\mathbf{u} = (u,v,w)$ katsayıları, \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} ye bağlı olarak \mathbf{p} nin barisentrik koordinatlarıdır. Cramer kuralı ile;

$$u = \frac{\text{alan}(\mathbf{p}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, v = \frac{\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{c})}{\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, w = \frac{\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p})}{\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} \quad (1.12)$$

$$\text{alan}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

dir [6].

Alan($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$) $\neq 0$ olduğundan \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} bir doğru üzerinde değildir.

Barisentrik kombinasyonlarla olan bağlantısından dolayı, barisentrik koordinatlar afin değişmezdirler: \mathbf{p} ; \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ye bağlı olarak u , v , w barisentrik koordinatlarına sahip olsun. Bu dört noktayı bir ϕ afin dönüşümü ile başka bir dört noktanın kümesine dönüştürelim. $\phi\mathbf{p}$; $\phi\mathbf{a}$, $\phi\mathbf{b}$ ve $\phi\mathbf{c}$ ye bağlı olarak aynı u , v , w barisentrik koordinatlarına sahiptir. Başka bir teoremin ispatı da yine barisentrik koordinatların geometrik özellikleri kullanılarak yapılabilir. Bu teorem Ceva teoremidir (Bkz. Şekil 1.4):

$$\text{Ceva teoremi: } \text{Oran}(\mathbf{a}, \mathbf{p}_c, \mathbf{b}). \text{Oran}(\mathbf{b}, \mathbf{p}_a, \mathbf{c}). \text{Oran}(\mathbf{c}, \mathbf{p}_b, \mathbf{a}) = 1 \quad (1.14)$$

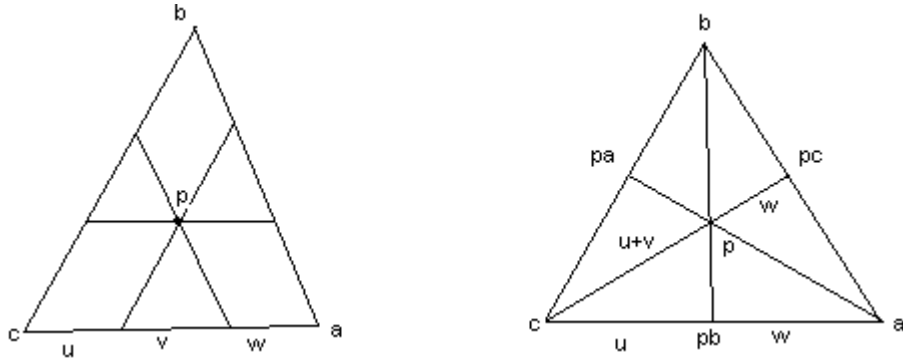
dir [6].

Barisentrik koordinatları iki değişkenli lineer interpolasyonu tanımlamak için kullanabiliriz.

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in E^3$ ise,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(u, v, w) = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3 \quad (1.15)$$

dir [6]. Burada $u + v + w = 1$ dir.



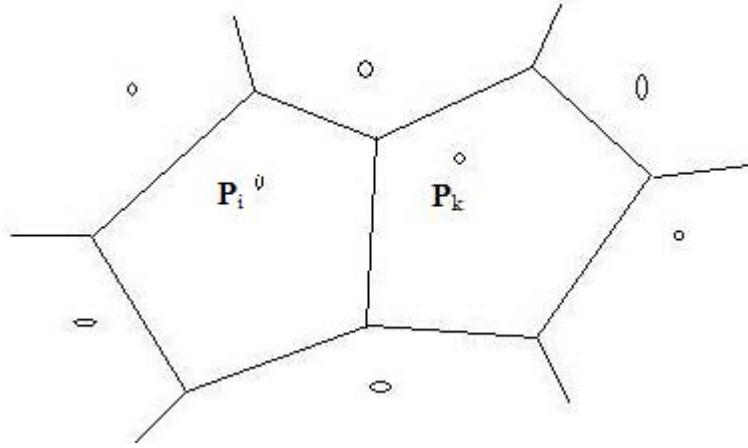
Şekil 1.4: Ceva teoremi.

1.6. MOZAIKLEME VE ÜÇGENLEŞTİRME

Doğru parçalarının dizileri ile çalışırken parçalı lineer interpolasyon konusunun içindeydik. Ancak birden fazla üçgen alınırsa, iki değişkenli parçalı lineer interpolasyon

ile karşılaşırız. Doğru parçaları açık bir yolla çokgenler oluştursa da üçgenler için düşünülen bu konu çok açık değildir; bu ise bu kısmın konusudur.

İlk olarak Dirichlet mozaikleme ile başlayalım. Bu üçgenlerle çalışmanın etkili bir yoludur. \mathbf{P}_i düzlemdaki noktalar olmak üzere, her nokta etrafında bir etki alanı inşa edelim. Farz edelim ki her bir nokta hücrenel bir telefon şebekesi için bir verici olsun ve bir araba \mathbf{P}_i noktasına doğru hareket etsin. Bu durumda, aracın telefonu en yakın vericiyi kullansın. Teknik olarak, her bir \mathbf{P}_k noktası ile bir T_k mozaigini tüm \mathbf{P} noktalarını içerecek biçimde birleştiririz (Bkz. Şekil 1.5 ve Şekil 1.6). Bu noktalar \mathbf{P}_k ya \mathbf{P}_i den daha yakındır. Bu mozaiklerin tümünün birleşimi Dirichlet mozaığıdır. İki nokta için, bunların mozaikleri aynı kenarı paylaşıyorsa bu noktalara **komşu**, denir [6].



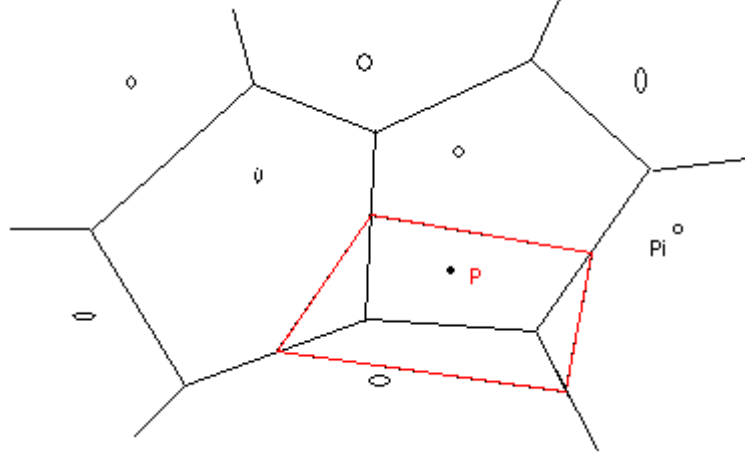
Şekil 1.5: Dirichlet mozaikleme.

Yapılmış bir Dirichlet mozaığına bir \mathbf{P}_L noktası daha eklemek istersek, önce eklenecek yeri belirlememiz gerekir. Buna T_k diyelim. Daha sonra, \mathbf{P}_L ve onun komşuları arasındaki tüm dik açıortayları çizebiliriz. Böylece T_L oluşur. T_L , \mathbf{P}_L nin komşularının mozaiklerinin parçalarının kesilmesiyle oluşturulur. A_i , T_i nin kesilmiş alanı ve A , T_L nin alanı olsun ($\sum A_i = A$).

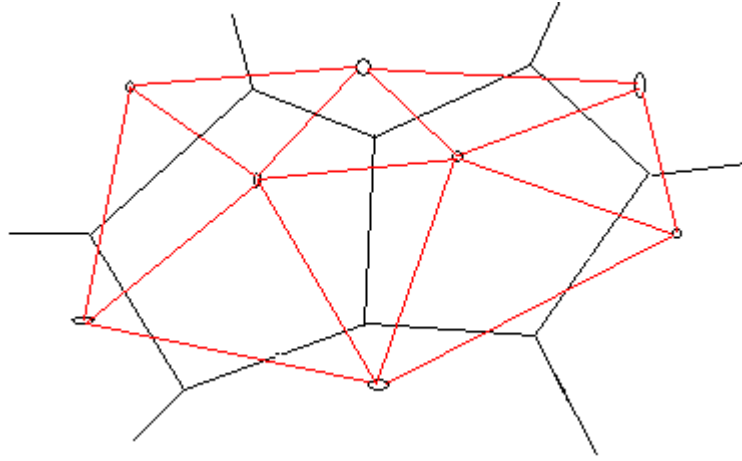
$$\mathbf{P}_L = \sum_i \frac{A_i}{A} \mathbf{P}_i \quad (1.16)$$

dir [6].

Dirichlet mozaiklemeşi başka bir temel yapı olan Dolunay üçgenleştirmesini de tanımlar. Eğer bütün komşu noktaları birbirlerine bağlarsak, nokta kümesinin konveks yapısını örten bir üçgenler kümesi elde ederiz. Bu sonsuz mozaikli noktalar birbirine bağlanmış olur ve üçgenleştirmenin sınır noktaları olurlar [6].



Şekil 1.6: Yeni nokta ekleme.



Şekil 1.7: Dolunay üçgenleştirmesi.

1.7. FONKSİYON UZAYLARI

Bu bölüm, daha sonraki çalışmalarımızda bize kolaylık sağlayacak gerekli tanımlamaları içermektedir. Her ne kadar geometride biz çalışmalarımızı

kolaylaştırmaya çalışsak da, bazen fonksiyonel analizden bazı temel başlıklar farkedilir derecede bize kolaylık sağlar.

$C[a, b]$, $[a, b]$ aralığında tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $f, g \in C[a, b]$ ve $\forall t \in [a, b]$ için

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad (1.17)$$

tanımlanabilir. Bu tanımdan, $C[a, b]$, \mathbb{R} üzerinde bir lineer uzaydır. Aynı şey $C^k[a, b]$ için de geçerlidir. Ayrıca, $\forall k$ için C^{k+1} , C^k nin bir altuzayıdır. $f_1, f_2, \dots, f_n \in C[a, b]$ gibi n tane fonksiyonun lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $\sum c_i f_i = 0, \forall t \in [a, b]$ için $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olmasıdır [6].

P^n , n . dereceden tüm polinomların uzayı olmak üzere, $p^n(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n; t \in [a, b]$ dir. Sabit bir n için, P^n in boyutu $n+1$ dir; $\forall p^n \in P^n$, $(n+1)$ tane a_0, a_1, \dots, a_n katsayıları tarafından tek türlü belirlidir. Bu \mathbb{R}^{n+1} lineer uzayının $(n+1)$ -boyutlu bir vektörü olarak yorumlanabilir. P^n için bir baz: $1, t, t^2, \dots, t^n$ tek terimli ifadeleri $n+1$ lineer bağımsız fonksiyonlar yani bazlardır [6].

$C[a, b]$ nin altuzaylarının bir başka sınıfı parçalı lineer fonksiyonlardır. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olmak üzere her $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında lineer olan sürekli bir fonksiyon bir parçalı lineer fonksiyondur. $[a, b]$ nin sabit bir kısmı üzerinde parçalı lineer fonksiyonlar bir lineer fonksiyon uzayı oluştururlar. Bu uzay için bir baz, şapka fonksiyonları ile verilir. Bir şapka fonksiyonu,

$$H_i(t) = \begin{cases} H_i(t_j) = 1, & i = j \\ H_i(t_j) = 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.18)$$

ile tanımlı bir parçalı lineer fonksiyondur. Bir parçalı lineer fonksiyon $f(t_j) = f_j$ ile

$$f(t) = \sum_{j=0}^n f_j H_j(t) \quad (1.19)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca verilen bir f fonksiyonuna bir $\mathcal{A}f$ lineer operatörünü atayabiliriz.

Eğer; $\mathcal{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{A}f + \beta \mathcal{A}g$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise $\mathcal{A}: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ lineerdir, denir,.

Örneğin, $f: \mathcal{A}f = df$ (f nin diferansiyeli) olabilir [6].

2. DE CASTELJAU ALGORİTMASI

Bu bölümde tanımlanan algoritma, basit olmasına rağmen, belki de eğri ve yüzey tasarımı için en temel algoritmadır. Bu algoritma geometriyi ve cebiri ilginç bir şekilde birleştirmiştir.

Tarihsel olarak, bu çalışmalara de Casteljau 1959 da başlamıştır. De Casteljau nun bu çalışmalarının kopyalarını 1975 de W.Boehm aldı. O zamandan beri de Casteljau nun ismi daha popüler olmaya başladı.

2.1. PARABOLLER

Bir parabolün üretimi için basit bir yapı vereceğiz. Böylece bu yolla Bézier eğrilerine ulaşmış olacağız.

$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in E^3$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_1^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dir [6]. Bu kuadratik bir denklemdir. $t \in I = [0,1]$ için ,

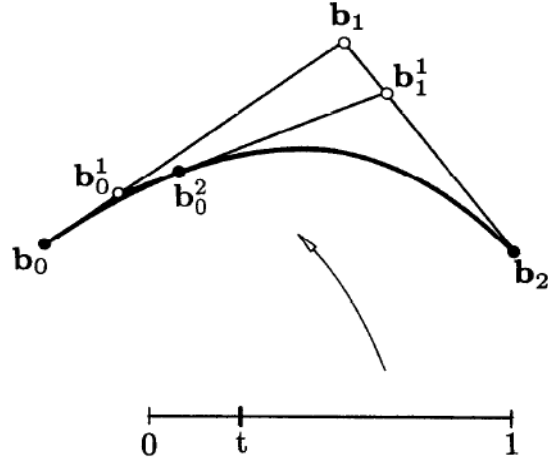
$\mathbf{b}^2(t)$ fonksiyonu $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ üçgeninin içindedir (Şekil 2.1).

Ayrıca, $\mathbf{b}^2(t)$ fonksiyonunun $t=0, t=1$ noktalarındaki değerleri, sırasıyla,

$\mathbf{b}^2(0)=\mathbf{b}_0$ ve $\mathbf{b}^2(1)=\mathbf{b}_2$ dir. Şekil 2.1 den de görüldüğü gibi,

$$\text{Oran}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) = \text{Oran}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2) = \text{Oran}(\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_0^2, \mathbf{b}_1^1) = t / (1-t) \quad (2.2)$$

eşitliği yazılır [6].

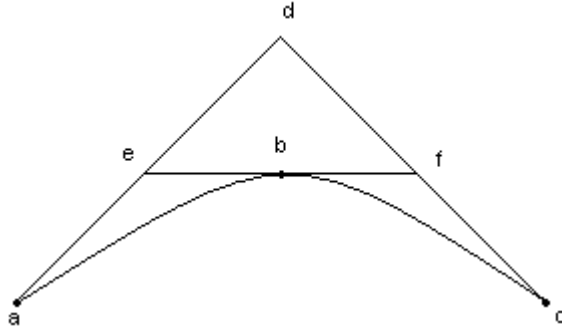


Şekil 2.1: Tekrarlı lineer interpolasyon ile parabollerin oluşturulması.

Böylece bir parabolün yapısı afin değişmezdir çünkü parçalı lineer interpolasyon afin değişmezdir. **a**, **b**, **c** paraboldeki üç farklı nokta olsun. **b** deki teğet ardışık olarak **a**, **c** teğetleriyle **e** ve **f** noktalarında kesişsinler. **a** daki ve **c** deki teğetler **d** de kesişsin. O halde

$$\text{Oran}(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{d}) = \text{Oran}(\mathbf{e}, \mathbf{b}, \mathbf{f}) = \text{Oran}(\mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{c}) \quad (2.3)$$

eşitlikleri yazılabilir (şekil 2.2) [6].



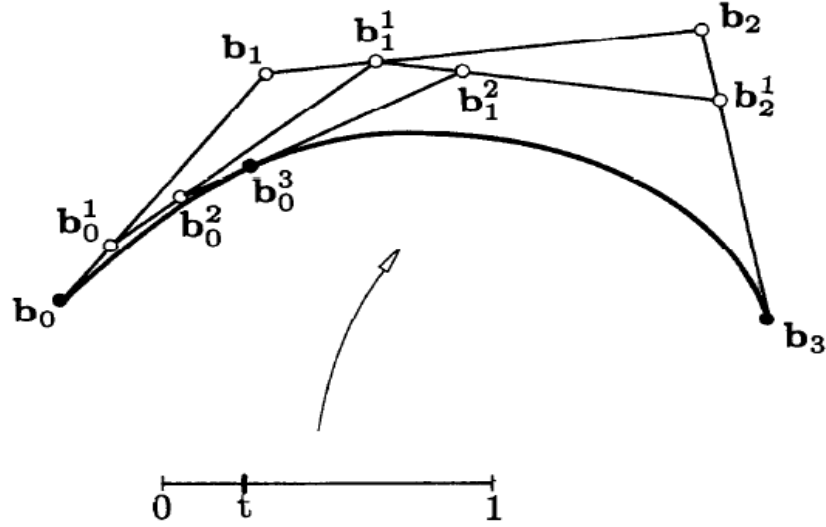
Şekil 2.2: Eğri üzerindeki üç noktadaki teğetlerin kesişim noktaları.

2.2. DE CASTELJAU ALGORİTMASI

n. dereceden herhangi bir polinom eğri $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in E^3$ ve $t \in \mathbb{R}$, olmak üzere

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \text{ ve } \mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i \quad (2.4)$$

denklemleri ile tanımlanır [4]. O halde $\mathbf{b}_0^n(t)$, t parametre değerine bağlı \mathbf{b}^n Bézier eğrisi üzerinde herhangi bir noktadır. P çokgeni $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ den elde edilir ve buna \mathbf{b}^n in Bézier çokgeni ya da kontrol çokgeni denir (şekil 2.3). Benzer olarak \mathbf{b}_i ler kontrol noktalarıdır. Kısaca $\mathbf{b}^n(t) = B[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; t] = B[P; t]$ ya da daha kısa olarak $B[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n] = BP$ ile gösterebiliriz. Bu notasyonla B ye bir lineer operatör denir. $B[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n]$ eğrisi, kontrol çokgenine Bernstein-Bézier yaklaşımıdır [6].



Şekil 2.3: de Casteljau algoritması.

$\mathbf{b}_i^r(t)$ aradeğer katsayıları, noktaların bir üçgenel dizisi ya da de Casteljau şeması olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{b}_0 \\
& \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0^1 \\
& \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1^1 \mathbf{b}_0^2 \\
& \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2^1 \mathbf{b}_1^2 \mathbf{b}_0^3
\end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Örneğin, bir düzlemsel kübik polinomda $t = 1/2$ için,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dir, [6].

2.3. BÉZIER EĞRİLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

De Casteljau algoritmaları bize Bézier eğrilerinin birçok önemli özelliğini çıkarmamızı sağlar. Bu özellikler algoritma temelli geometriden elde edilir.

2.3.1 Afin Değişmezliği

Bézier eğrileri Afin dönüşümler altında değişmezdir, yani

- (1) Önce $\mathbf{b}^n(t)$ hesaplanıp buna Afin dönüşüm uygulanması ile,
- (2) Önce kontrol çokgenine Afin dönüşüm uygulanıp, t parametresinde çokgen oluşturulması aynıdır, [6].

2.3.2 Afin Parametre Dönüşümü Altında Değişmeme

Lineer interpolasyon özelliği ile bir $a \leq u \leq b$ aralığını $t = \frac{u-a}{b-a}$ parametre değişimi ile

değiştirebiliriz. O halde,

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u) \quad (2.6)$$

olur. $[0, 1]$ aralığından $[a, b]$ aralığına geçiş bir Afin dönüşümdür, [6].

2.3.3 Konveks Tekne Özelliği

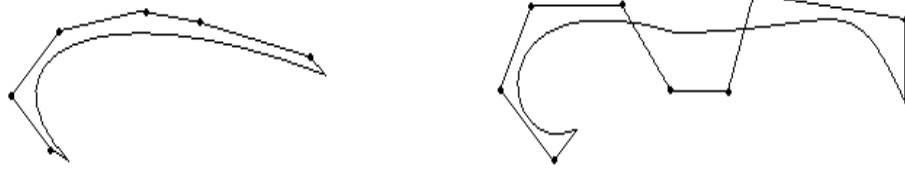
$t \in [0, 1]$ için, $\mathbf{b}^n(t)$, kontrol çokgeninin (konveks teknenin) içinde bulunur. Bu, her \mathbf{b}_i^r aradeğerinin, bir önceki \mathbf{b}_j^{r-1} in konveks bir barisentrik kombinasyonu olarak elde edildiği için olur. de Casteljau algoritmasının hiçbir adımında \mathbf{b}_i konveks yapısının dışındaki noktaları oluşturamayız. Bu özellikten dolayı bir düzlemsel kontrol çokgeni daima bir düzlemsel eğri üretir. Eğer iki Bézier eğrisinin arakesitini bilmek istiyorsak örneğin, her biri bir robot kolunun yörüngesini temsil eden iki Bézier eğrisinin kesişim noktasını bulalım. Bu yolların kesişmemesini sağlarsak, böylece, robotun pahalıya mal olabilecek çarpışmalarından kaçınmış oluruz. Gerçekte, olası bir kesişimin hesabı için daha ekonomik bir test yapabiliriz. Eğriyi, kenarları bazı koordinat sistemlerine paralel olan ve her bir eğrinin kontrol çokgenini çevreleyen olası en küçük kutu ile sınırlayabiliriz. Böyle kutulara minmax kutusu denir. Çünkü bunların yüzleri, kontrol çokgeninin minimal ve maksimal koordinatları tarafından yapılır. Açıkça, her bir kutu, kendisinin kontrol çokgenini ve ayrıca konveks yapı özelliğinden de uygun Bézier eğrisini içerir. Eğer, iki kutunun çakışmadığını (bir aşık test olarak) doğrulayabilirsek, iki eğrinin kesişmediğini garanti etmiş oluruz. Eğer iki kutu çakışıyorsa o zaman eğri üzerinde daha fazla kontrol yapmamız gerekir [6].

2.3.4 Uç Nokta İnterpolasyonu

Bézier eğrisi \mathbf{b}_0 ve \mathbf{b}_n den geçsin, bu durumda $\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n$ olur. Bir tasarım sırasında, uç noktaları en önemli iki noktadır. Bu yüzden onların üzerlerinde tam kontrole sahip olmak için bu uç noktalar gereklidir [6].

2.3.5 Bézier Eğrileri İle Tasarım

Burada da kontrol çokgeninin noktalarını interaktif olarak oynatarak, eğriyi tekrar yapılandırabiliriz (Bkz. Şekil 2.4) [6].



Şekil 2.4: Bazı Bézier eğri örnekleri.

2.4. ÇİÇEKLEME

Çiçekleme, Bézier eğrilerine yeni bir bakıştır. Bu prensip bağımsız olarak de Casteljau ve Ramshaw tarafından geliştirilmiştir. Burada çiçeklemeyi de Casteljau algoritmasının bir genellemesi olarak göreceğiz. (2.5) denklemindeki gibi, n sütun hesaplanmalıdır. r sütununda, t parametre değeri için yeniden bir de Casteljau adımı yapılmaz ancak yeni bir t_r değeri kullanılır. Örneğin kübik durum için;

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_0 \\
 & \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0^1[t_1] \\
 & \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1^1[t_1] \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] \\
 & \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2^1[t_1] \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

dir [6]. Sonuçta oluşan $\mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$ noktası, üç bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyondur. Bu üç değişkenli $b[., ., .]$ fonksiyonuna $b^3(t)$ nin **çiçeklemesi**, denir [4]. Eğer bu üç argümanı eşit tutarsak; $t = t_1 = t_2 = t_3$ olur ve bu takdirde orjinal eğriye dönmüş oluruz, ve $b[0, 0, 0] = \mathbf{b}_0$ ve $b[1, 1, 1] = \mathbf{b}_3$ olur [6].

$[t_1, t_2, t_3] = [0, 0, 1]$ seçilirse, (2.7) ifadesindeki noktalar;

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{b}_0 \\
 & \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \\
 & \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \\
 & \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0, 0, 1]
 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Benzer şekilde $b[0, 1, 1] = \mathbf{b}_2$ olur. Böylece orjinal Bézier noktaları, eğrinin çiçekleme hesabı ile bulunabilir.

$[t_1, t_2, t_3] = [0, 0, t]$ için,

\mathbf{b}_0

$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0$

$\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0$

$\mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0^1 = \mathbf{b}[0, 0, t]$

Genel olarak,

$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0, 0, 0]$

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0, 0, 1] \mathbf{b}[0, 0, t]$

$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[0, 1, 1] \mathbf{b}[0, t, 1] \mathbf{b}[0, t, t]$

$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}[1, 1, 1] \mathbf{b}[t, 1, 1] \mathbf{b}[t, t, 1] \mathbf{b}[t, t, t]$

olur [4].

Bézier noktalarının çiçeklemesi; $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}]$ olarak yazılır. Burada $t^{<r>}$ nin anlamı t nin r defa gözükeceğini belirtir. Örneğin,

$\mathbf{b}[0^{<1>}, t^{<2>}, 1^{<0>}] = \mathbf{b}[0, t, t]$

de Casteljau daki $\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t)$ yi yazarsak,

$\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] = (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] + t\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}]$

olur [6].

Eğri üzerindeki nokta $\mathbf{b}[t^{<n>}]$ ile verilir. Ayrıca t_i lerin sırasının değiştirilmesi çiçekleme değerini etkilemez, yani $\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3] = \mathbf{b}[t_2, t_3, t_1]$ dir [6].

Elemanlarının sırasına bağlı olmayan fonksiyonlara, **simetrik fonksiyonlar**, denir. O halde çiçekleme bir n değişkenli simetrik polinom fonksiyondur. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}^3$ e olan her simetrik n değişkenli polinom eğri bir tek çiçeklemeye sahiptir [6].

Çiçekleme başka bir özelliğe daha sahiptir. Çiçeklemenin ilk elemanı eğer iki (ya da daha fazla) sayının bir barisentrik kombinasyonu ise her bir elemanın çiçekleme değerlerini hesaplayabiliriz ve barisentrik kombinasyon formunda yazabiliriz [6]:

$$\mathbf{b}[\alpha r + \beta s, t_2, \dots, t_n] = \alpha \mathbf{b}[r, t_2, \dots, t_n] + \beta \mathbf{b}[s, t_2, \dots, t_n]; \alpha + \beta = 1 \quad (2.8)$$

Denklem (2.8) bize ieklemenin ilk elemanına göre afin olduğunu gösterir ancak çiçekleme geri kalan tüm elemanları için de afindir. Bu yüzden ieklemeye multiafin (oklu afin) denir. iekleme, de Casteljau algoritmasının tekrarlı adımlarından elde edilebileceğinden dolayı multiafindir. Bu yapı, lineer interpolasyon yani afin dönüşüm içerir [6].

3. BÉZIER EĞRİLERİNİN BERNSTEIN BİÇİMLERİ

Bézier eğrilerini tekrarlı bir algoritmadan (de Casteljau algoritması gibi) tanımlayabileceğimiz gibi, bu işlem yoğunluğundan kurtaracak şekilde açık bir gösterim şeklinde de gösterebiliriz.

3.1. BERNSTEIN POLİNOMLARI

Bézier eğrilerini Bernstein polinomları cinsinden ifade edeceğiz, ve açık formda Bernstein polinomlarını

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (3.1)$$

ile göstereceğiz. Burada $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ dir.

Bernstein polinomlarını, Bézier eğrileri ile ilişkilendirmeden önce onları biraz daha yakından inceleyelim. Tekrarlı yapısı ve $B_0^0(t) \equiv 1$ ile

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (3.2)$$

yineleme denklemini sağlar ve

$$j \notin \{0, \dots, n\} \text{ için } B_j^n(t) \equiv 0 \quad (3.3)$$

dır [6].

İspat:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

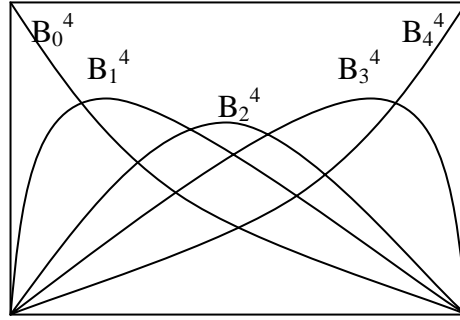
olur [6].

Diğer bir özellik ise kısmi toplamlarının birim olmasıdır, yani;

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1 \quad (3.4)$$

dir. Bu da binom teoreminden açıkça görülebilir:

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) \text{ dir [6].}$$



Şekil 3.1: Bernstein polinomları.

Şekil 3.1 deki gibi 5 adet kuartik Bernstein polinomu vardır. Dikkat edilirse B_i^n ler $[0,1]$ aralığında negatif değildir.

Şimdi Bernstein polinomlarının Bézier eğrileri için olan önemine bakalım. Aradeğer de Casteljau noktaları \mathbf{b}_i^r ler, Bernstein polinomları cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t) \quad \begin{cases} r \in \{0, \dots, n\} \\ i \in \{0, \dots, n-r\} \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.5) denkleminin önemi $r = n$ durumunda yatar. Uygun de Casteljau noktası eğri üzerindeki noktadır ve

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \quad (3.6)$$

ile verilir [6].

(3.2) nin ispatını tamamlamak için (2.4) denklemindeki tekrarlı tanımla birlikte, Bernstein polinomları için kullanılan tekrarlı yapılar (3.2) ve (3.3) kullanılarak tümevarımla ispat yapılır:

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) = (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} \mathbf{b}_j B_{j-1}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) \\ &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) = \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j \left[(1-t) B_{j-i}^{r-1}(t) + t B_{j-i-1}^{r-1}(t) \right]. \end{aligned}$$

$$B_{-1}^{n-1} = B_n^{n-1} = 0 \text{ dir.}$$

Böylece bir Bézier eğrisi

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_i(t) B_i^{n-r}(t) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir [5],[6].

İlk r basamakta de Casteljau yapısı t ye bağlıdır. O halde $\mathbf{b}_i^r(t)$ noktaları (n-r). dereceden Bézier eğrisinin kontrol noktaları olur ve t ye bağlı olarak hesaplanır [6].

3.2. BÉZIER EĞRİLERİNİN ÖZELLİKLERİ

3.2.1. Afın Değişmezliği

Barisentrik kombinasyonlar afin dönüşüm altında değişmezler. (3.4) denklemini bunun bir cebirsel sağlamasıdır [6].

3.2.2. Afın Parametre Dönüşümü Altında Sabitlik

Cebirsel olarak bu özellik;

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilebilir [6].

3.2.3. Konveks Yapı Özelliği

$t \in [0, 1]$ olduğundan, Bernstein polinomları negatif değildirler [6].

3.2.4. Uç Nokta İnterpolasyonu

Bu birim özdeşliğinin bir sonucudur.

$$\begin{aligned} B_i^n(0) &= \delta_{i,0} \\ B_i^n(1) &= \delta_{i,n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir. Burada δ , kronecker deltadır [6].

3.2.5. Simetri

Bézier noktalarının $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ya da $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0$ diye sıralanması farketmez. Sadece yönlendirme farkeder;

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t) \quad (3.10)$$

Bunu (3.1) denklemindeki birimden

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t) \quad (3.11)$$

takip eder. Böylece Bernstein polinomları t ve $1-t$ ye bağlı olarak simetriktirler [6].

3.2.6. Barisentrik Kombinasyon Altında Değişmezlik

Bézier çokgeninden Bézier eğri oluşum işlemi barisentrik kombinasyonları değişmez bırakır.

$$\alpha + \beta = 1 \text{ için, } \sum_{j=0}^n (\alpha \mathbf{b}_j + \beta \mathbf{c}_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j^n(t) \quad (3.12)$$

olur. Bunu şöyle ifade edebiliriz; eğri üzerindeki uygun noktaların ağırlıklı ortalamasını alarak ya da uygun kontrol köşelerinin ağırlıklı ortalamasını alarak iki Bézier eğrisinin ağırlıklı ortalamasını oluşturabiliriz ve eğriyi hesaplayabiliriz [6].

3.2.7. Linear Hassasiyet

$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = t$ bağıntısı kullanışlı bir bağıntıdır. Uygulamada bu bağıntı şu şekildedir:

Farzedelim \mathbf{b}_j köşe noktaları \mathbf{p} ve \mathbf{q} noktalarından geçen bir doğru üzerine düzgün bir şekilde dağıtılsın, yani;

$$\mathbf{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{p} + \frac{j}{n}\mathbf{q}; \quad j = 0, \dots, n$$

olsun. O halde bu çokgen tarafından üretilen eğri \mathbf{p} ve \mathbf{q} arasındaki doğru parçasıdır [6].

3.2.8. Pseudo-Yerel Kontrol

B_i^n Bernstein polinomları, $t = i/n$ de sadece bir maksimuma sahiptir. Böylece, eğrinin kontrol noktalarını değiştirdiğimizde eğrinin bölgesi i/n değerinde değişir [6].

3.3. BİR BÉZIER EĞRİSİNİN TÜREVİ

Bir Bernstein polinomu $B_i^n(t)$ nin türevi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_i^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} \\ &= n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] \quad [4],[8]. \end{aligned}$$

Böylece

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)] \quad (3.13)$$

olur [6],[8]. Şimdi \mathbf{b}^n Bézier eğrisinin türevini tanımlayabiliriz:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^n [\mathbf{B}_{j-1}^{n-1}(t) - \mathbf{B}_j^{n-1}(t)] \mathbf{b}_j$$

(3.3) denkleminde dolayı bu

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^n [\mathbf{B}_{j-1}^{n-1}(t)] \mathbf{b}_j - n \sum_{j=0}^{n-1} [\mathbf{B}_j^{n-1}(t)] \mathbf{b}_j$$

şeklinde basitleştirilebilir. Son olarak

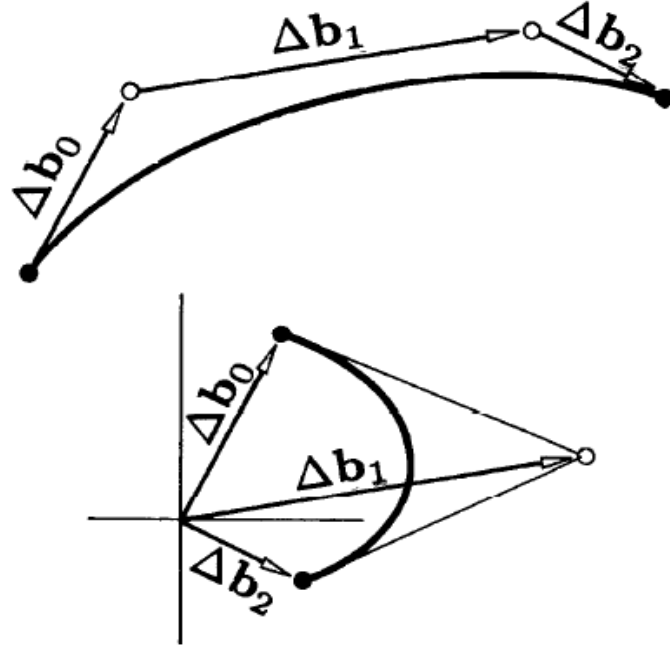
$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) \mathbf{B}_j^{n-1}(t)$$

yazabiliriz. Bu ifade $\Delta \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j$ fark operatörünün yardımı ile;

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j \mathbf{B}_j^{n-1}(t), \quad \Delta \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^3 \quad (3.14)$$

olur [6].

Böylece, orjinal kontrol çokgeninden fark operatörü ile elde edilen bir kübik Bézier eğrisinin türevi yine başka bir Bézier eğrisidir. Fakat bu türev Bézier eğrisi düzlemseldir. Bu eğrinin katsayıları noktaların farkıdır, yani vektörlerdir. Bunlar \mathbb{R}^3 ün elemanıdır. E^3 te türev eğrisi ve çokgenini göstermek için, $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_0, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_{n-1}$ noktalarını içeren E^3 te bir çokgen inşa edebiliriz (Bkz. Şekil 3.2). Bu türev eğrisine **Hodograf** denir [6], [12].



Şekil 3.2: Bézier eğrisi ve hodograf eğrisi.

3.4. YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

Yüksek mertebeden türevleri hesaplamak için (3.14) de tanımlanan ileri farklar operatörünü genelleştirelim. Buna göre Δ^r ileri fark operatörü olmak üzere;

$$\Delta^r \mathbf{b}_j = \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_j \quad (3.15)$$

olarak tanımlansın. Bu operatörün kullanımına birkaç örnek verelim:

$$\Delta^0 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$$

$$\Delta^1 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$$

$$\Delta^2 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_i$$

$$\Delta^3 \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+3} - 3\mathbf{b}_{i+2} + 3\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$$

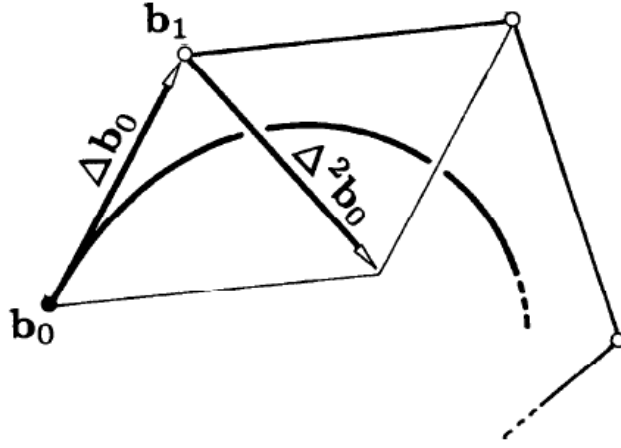
Bunun genel hali için;

$$\Delta^r \mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{r-j} \mathbf{b}_{i+j} \quad (3.16)$$

genellemesini yapabiliriz. (3.14) den de Bézier eğrilerinin r . türevi için,

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j \mathbf{B}_j^{n-r}(t) \quad (3.17)$$

formülü yazılır [6].



Şekil 3.3: Uç nokta türevleri.

(3.17) denkleminin iki önemli özel durumu $t = 0$ ve $t = 1$ ile verilir (Bkz. Şekil 3.3) ve

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0 \quad (3.18)$$

ile

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_{n-r} \quad (3.19)$$

elde edilir [6]. Böylece bir Bézier eğrisinin r . türevi sadece $r+1$ Bézier noktasına bağlıdır.

Eğer bir fonksiyonun $t = 0$ daki bütün türevleri biliniyorsa Taylor serisini üretebiliriz.

Bir polinomun Taylor serisi polinomun kendisidir. Monomial (tek türlü) form;

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \mathbf{x}^j(0) t^j$$

olur. (3.18) den faydalanarak,

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j \quad (3.20)$$

yazılabilir [6].

3.5. TÜREV VE DE CASTELJAU ALGORİTMASI

Bir Bézier eğrisinin türevi, de Casteljau algoritması tarafından üretilen aradeğer noktaları ile yazılabilir:

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t) \quad (3.21)$$

dir [6].

(3.16) denklemi toplama ve fark alma ile;

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{b}_j = \Delta \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j \quad (3.22)$$

Şeklinde daha da kısalır. Bunu kullanarak,

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{b}^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t) \quad (3.23)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \sum_{j=0}^{n-r} \mathbf{b}_j B_j^{n-r}(t) \quad (3.24)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}(t) \quad (3.25)$$

elde ederiz. Bir Bézier eğrisinin r . türevini hesaplamannın iki farklı yolu bu üç denklemden birincisini ve üçüncüsünü kullanarak yapılır. İlk yöntem için, kontrol noktalarının tüm ileri farklarını hesaplayıp, yeni bir Bézier çokgeni $((n-r)$. dereceden) yapmak ve t de hesaplamaktır [6].

İkinci yöntem ise son eşitliği kullanarak de Casteljau algoritmasının bir yan ürünü olarak r . türevi hesaplar. Eğer de Casteljau şemasındaki gibi bir üçgensel form oluşturarak bir Bézier eğrisindeki bir noktayı hesaplırsak, o zaman $\forall n-r$ için, uygun \mathbf{b}_i^{n-r} formu ($r+1$ elemanlı) bu şemada bir sütundur. t deki r . türevi elde etmek için, bu noktaların r . farkı alınır ve sonra $n!/(n-r)!$ ile çarpılır. Eğri/düzlem kesişimi gibi bazı uygulamalarda sadece eğri üzerindeki bir noktaya değil aynı zamanda 1. ya da 2. türeve ihtiyaç olabilir.

Özet olarak, her iki adımda da bir Bézier eğrisinin türevini hesaplamak için Bézier eğrisine r fark adımı ve $n-r$ ölçme adımı uygulanır. Bunların sırası farketmez.

$r = 1$ için,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{b}^n(t) = n[\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)] \quad (3.26)$$

dir. Böylece \mathbf{b}_0^{n-1} ve \mathbf{b}_1^{n-1} noktaları $\mathbf{b}^n(t)$ de tanjant vektörünü belirler [6].

Daha önce de Castejau algoritması ile $t = \frac{1}{2}$ de hesapladığımız kübik Bézier eğrisinin türevini hesaplamak için, kontrol noktalarının birinci farkları alınır ve kuadratik eğri

$t = \frac{1}{2}$ de hesaplanır (Bkz. Sy:12).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternatif olarak, $\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_0^2$ de hesaplanabilir:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir [6].

3.6. BÖLME

Bir \mathbf{b}^n Bézier eğrisi genelde $[0,1]$ aralığında tanımlandığı gibi, herhangi bir $[0,c]$ aralığında da tanımlanabilir (Bkz. Şekil 3.4). Eğrinin $[0,c]$ aralığındaki kısmı bir Bézier çokgeni tarafından tanımlanabilir. Bu Bézier çokgenini bulma Bézier eğrisinin bölünmesi ile ilgilidir.

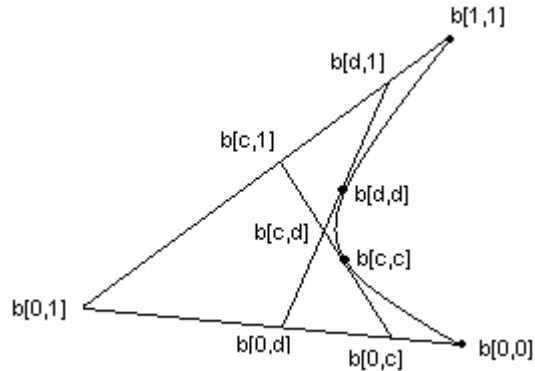
Bilinmeyen bir \mathbf{c}_i Bézier noktası, çiçekleme ile daha kolay bulunabilir. Burada $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a^{<n-i>}, b^{<i>}]$, $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir polinom eğrisinin Bézier noktalarını verir. Biz şu anda $[0, c]$ aralığı ile ilgileniyoruz ve o yüzden bizim Bézier noktalarımız:

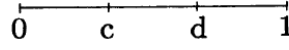
$$\mathbf{c}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, c^{<i>}]$$

dir [4]. Böylece her bir \mathbf{c}_i , c ye bağlı olarak, i de Casteljau adımı tamamlanarak elde edilir. Çiçekleme olmayan notasyonla;

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_0^j(c) \quad (3.27)$$

dir. Bu formüle Bézier eğrilerinin **bölme formülü**, denir. Böylece bu de Casteljau algoritmasının sadece $\mathbf{b}^n(c)$ noktasını değil Bézier eğrisinin $[0, c]$ aralığındaki köşelerini de sağladığını gösterir. Simetri özelliğinden, bu da şunu gösterir; $[c, 1]$ aralığına uygun kısmın kontrol köşeleri, \mathbf{b}_j^{n-j} ile verilir. Böylece, $\mathbf{b}^n(0)$ dan $\mathbf{b}^n(c)$ ye ve $\mathbf{b}^n(c)$ den $\mathbf{b}^n(1)$ e yayları tanımlayan iki alt çokgen görürüz (Bkz. Şekil 3.4) [6].





Şekil 3.4: Genelleştirilmiş bölme.

Yukarıdaki şekil, $[0,1]$ aralığının iki parametre değeri c ve d de eş zamanlı olarak bölüldüğünde çiçekleme notasyonunu gösterir.

Bir Bézier eğrisini bölmek yerine, ona dış değer biçebiliriz. Bu durumda, bir $[1,d]$ aralığını uygun d_j Bézier noktalarıyla ilişkilendirebiliriz. Bunlar

$$d_j = \mathbf{b} \left[1^{<n-j>}, d^{<j>} \right] = \mathbf{b}_{n-j}^j(d)$$

ile verilir. Bu şu şekilde söylenebilir, dış değer biçimi sabit bir nümerik işlem değildir ve d nin büyük değerlerinden kaçınılmalıdır. Bölme tekrarlanabilir. Eğriyi $t = \frac{1}{2}$ de bölebiliriz. O halde $t = \frac{1}{2}$ de ayrı ayrı parametre değerleri ile iki eğri oluşur ve böylece devam eder. k bölmeden sonra 2^k tane Bézier çokgeni elde edilir ve bunların herbiri orjinal eğrinin küçük bir eğri parçasını tanımlar. k ne kadar arttırılırsa eğriye o kadar çok yaklaşılr [6].

Şimdi bir Bézier eğrisi ile bir doğrunun kesişimini inceleyelim. Bir düzlemsel Bézier eğrisi ile bir L doğrusunun eğer varsa kesişim noktasını bulalım. Eğer eğri ve L farklı yerlerde iseler, işlemi durduracaktık ve daha fazla kesişim noktası bulmaya gerek duymayacaktık. Bunu yapmak için, kontrol çokgeninin minmax kutusunu yaratırız: minmax kutusu, kontrol çokgenini içeren ve kenarları koordinat eksenlerine paralel olan en küçük dikdörtgendir. Bu, Bézier eğrilerinin konveks yapı özelliğinden çok çabuk bulunabilir. Ayrıca biliyoruz ki bu, eğriyi de içerir. Minmax kutusunu bulunca, eğer bu L ile buluşursa saptamaya gerek yoktur; eğer değilse, biliyoruz ki kesişme yoktur. Bu teste aşikar reddetme denir. Diyelim ki, minmax kutusu L ile buluşsun. O zaman bir kesişim vardır. Şimdi eğriyi $t = \frac{1}{2}$ de bölelim ve aşikar reddetme testini her iki alt çokgene de uygulayalım. Eğer sonuç bulunamazsa tekrarlanır. Sonunda minmax kutularının boyutu o kadar küçük olacaktır ki, istenen kesişim noktaları olarak minmax kutularının merkezlerini alabiliriz [6].

3.7. ÇİÇEKLEME VE KUTUP

Bir t_1 parametre değerine bağlı ilk de Casteljau adımından sonra, $\mathbf{b}_0^1(t_1), \mathbf{b}_1^1(t_1), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(t_1)$ sonucu $(n-1)$. dereceden bir $\mathbf{p}_1(t)$ eğrisinin bir kontrol çokgeni olarak yorumlanabilir. Çiçekleme terminolojisine göre bu; $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{b}[t_1, t^{<n-1>}]$ ile yazılır. Ayrıca söz konusu eğri (3.26) denklemi kullanılarak yazılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1}]B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [(1-t_1)\mathbf{b}_i + t_1\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i^1(t)]B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t)B_i^{n-1}(t) \\ &= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i]B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1(t)B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Böylece

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{b}(t) + \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) \quad (3.28)$$

olur [6].

Burada \mathbf{p}_1 polinomu t_1 e bağlı $\mathbf{b}(t)$ nin ilk kutbudur. Yani herhangi bir $\mathbf{b}(t)$ noktasındaki teğet $\mathbf{p}_1(t)$ de, $\mathbf{p}_1(t)$ kutbu ile kesişir. Dikkat edilirse bu sadece düzlemsel eğriler için değil uzay eğrileri için de geçerlidir [6].

Özel olarak kübik eğri için, şu sonuç çıkarılabilir; \mathbf{p}_1 kutbu, $\mathbf{b}(t_1)$ deki kübiğinin oskülör düzleminde. Eğer, bu oskülör düzlemle kübiğin bütün teğetlerini kesiştirirsek, kutbun dışına çıkarız. Üç farklı t_1, t_2, t_3 parametresi için, çiçekleme değeri $\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3]$ uygun oskülör düzlemlerinin kesişimidir, sonucuna ulaşabiliriz.

Başka bir özel durum $\mathbf{b}[0, t^{<n-1>}]$: bu $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ ile tanımlı polinomdur. Benzer olarak $\mathbf{b}[1, t^{<n-1>}] \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ile tanımlanır [6].

Kutupların oluşturduğu işlemlerin tekrarı ile ikinci bir kutup $\mathbf{p}_{1,2}(t) = \mathbf{b}[t_1, t_2, t^{<n-2>}]$ elde edilir. Sonuç olarak n. kutba varılır. Bu da zaten $\mathbf{b}[t_1, \dots, t_n]$ yani $\mathbf{b}(t)$ nin çiçeğidir. Kübik için tekrarlı olarak bir eğrinin çiçeklemesi aşağıdaki gibi üretilebilir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}[t_1, t_2, t_3] &= (1-t_1)\mathbf{b}[0, t_2, t_3] + t_1\mathbf{b}[1, t_2, t_3] \\
&= (1-t_1)[(1-t_2)\mathbf{b}[0, 0, t_3] + t_2\mathbf{b}[0, 1, t_3]] + t_1[(1-t_2)\mathbf{b}[0, 1, t_3] + t_2\mathbf{b}[1, 1, t_3]] \\
&= \mathbf{b}[0, 0, 0](1-t_1)(1-t_2)(1-t_3) \\
&\quad + \mathbf{b}[0, 0, 1][(1-t_1)(1-t_2)t_3 + (1-t_1)t_2(1-t_3) + t_1(1-t_2)(1-t_3)] \\
&\quad + \mathbf{b}[0, 1, 1][t_1t_2(1-t_3) + t_1(1-t_2)t_3 + (1-t_1)t_2t_3] + \mathbf{b}[1, 1, 1]t_1t_2t_3.
\end{aligned}$$

Bir çiçekleme olması için fonksiyonun hem simetrik hem de çoklu afin olması gerekir [6].

3.8. BİR BÉZIER EĞRİSİNİN MATRİS BİÇİMİ

Bir Bézier eğrisinin matris biçimi şu şekilde verilebilir:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j C_j(t) = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n] \begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Burada

$$\begin{bmatrix} c_0(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \cdots & M_{0n} \\ M_{10} & M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n0} & M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

dır. Yani (3.29) daki ifade $M = \{m_{ij}\}$ matrisi olmak üzere, $C_i(t)$ baz polinomları ve t^i tek türlü (monomial) bazı arasındaki dönüşümü tanımlıyor. Eğer C_i ler Bernstein polinomları iseler, yani $C_i = B_i^n$ ise, M matrisi (3.10) un bir sonucu olarak $m_{ij} =$

$$(-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} \text{ dir. Kükük durum için; } \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir [6].}$$

4. B-SPLINE EĞRİLERİ

Eğrinin herbir parçası global çokgenlerin bazı küçük altçokgenleri tarafından kontrol edilir ve düzgün biçimde birleştirilir. Bunu yapabilmek için $[r, s]$ aralığı yerine birbirine komşu birçok parametre aralığı alınır. Örneğin; $[1,2]$, $[2,3]$, ... gibi. Eğer kübik parçalarda çalışılacaksa, bu aralıkların herbiri için dört kontrol noktasına ihtiyaç vardır. Kübik eğri parçası şu şekilde belirlenir; $F[1,2]$, $F[2,3]$, $F[3,5]$, $F[5,6]$, $F[6,9]$. Şimdi bu kübik eğri parçalarının birleştirilmesi istendiğinden, $F[1,2]$ nin 4. kontrol noktası ile $F[2,3]$ ün ilk kontrol noktası aynı olmak zorundadır. Aynı şekilde diğer aralıkların birleşiminde de aynı kural geçerlidir. Genelde bu (2, 3, 5, 6) kavşak noktalarında daha iyi bir süreklilik istenir. Bir an için komşu aralıkların bir dizisi olan (... , $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,5]$, $[5,6]$, $[6,9]$, ...) ile çalışıldığını düşünelim. Eğer bu aralıkları ..., 1, 2, 3, 5, 6, 9, ... şeklinde ifade edilirse daha ekonomik verilerle çalışmış olur. İşte bu diziyeye **düğüm dizisi**, denir [7].

Bu bir birleşimin sürekliliğinin derecesini düşürmek için bir yol olduğundan, bunun aralıkları daraltmak için kullanışlı olacağı görülür. Bu, bir düğümün birden fazla gözükmesi ile bir düğüm dizisinde görülebilir. Örneğin, eğer $[3,5]$ aralığı $[3,3]$ e daraltılırsa yukarıdaki dizi; ..., 1, 2, 3, 3, 6, 9, ... olur. Bununla birlikte diğer aralıklar da benzer şekilde daraltılabilir. Örneğin ..., 1, 3, 3, 3, 6, 9, ... gibi [7].

Bir düğümün ardışık meydana gelişlerinin sayısı onun çokluğudur. Böylece yukarıdaki dizide 3 ün çokluğu üçtür. Diziyi biraz uzatmayla ..., 1, 3, 3, 3, 6, 9, 10, 12, 15, ... gibi birçok aralığa daraltılabilir ve birçok çoklu düğümler elde edilebilir. $[10, 12] \rightarrow [10, 10]$: ..., 1, 3, 3, 3, 6, 9, 10, 10, 15, ... olur [7].

Düğüm çokluğu 1 olan düğümlere **basit düğüm**, 1 den fazla olanlara (multiplicity) **çoklu düğüm**, denir. Ayrıca düğüm çokluğu, m. dereceden eğri parçaları için, $(m+1)$ i geçmez [7].

Şimdiki problem, istenilen her bir birleşim noktasındaki sürekliliğin derecesini belirtilebilmesi için bir yöntem ve Bézier kontrol noktalarından daha uygun kontrol noktaları bulmaktır. Bunun cevabını de Boor noktaları verir. Verilen komşu aralıkları

indeksli halde yazalım; ..., 1, 2, 3, 5, 6, 9, Bu $F[1,2]$, $F[2,3]$, $F[3,5]$, $F[5,6]$, $F[6,9]$ ifadelerini kısaca F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 olarak gösterelim. Tabii bu arada ..., 1, 3, 3, 3, 6, 9, 10, 10, 15, 16, ... çoklu düğümlerine dikkat etmeliyiz. Bunu ayırt etmek için tekrarlı düğümlerin son sıradaki sıra numarasını indeks olarak kullanacağız. Örneğin;

..., 1, 3, 3, 3, 6, 9, 10, 10, 15, 16, ... de olduğu gibi [7].
 F_1 F_4 F_5 F_6 F_8 F_9 F_{10}

Şimdi de de Boor noktalarını tanıtalım. De Boor noktaları için bir çok gösterim şekli vardır. Daha matematiksel gösterimi, bir $[u_i, u_{i+1}]$ aralığında herbir F_i eğri parçası ve söz konusu f_i kutupsal formunu alırsak ve C^n sürekliliğini u_{i+1} de f_i ve f_{i+1} kutupsal formlarında yerine koyarsak koşulları sağlarız. Eğer tüm eğri parçalarının derecesi $\leq m$ (yani en fazla m tane çoklu düğüm var demek) ise $\langle u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m} \rangle$ formunda m uzunluğunda ardışık düğümlerin dizisi elde edilir. Her $i \in [k, k+m]$ için f_i kutupsal formunun u_i düğümü ile başlayan $[u_i, u_{i+1}]$ aralığının $f_i(u_{k+1}, \dots, u_{k+m})$ değeri sabittir ve elde edilen de Boor noktası \mathbf{d}_k ile gösterilir. O halde, $u_k < u_{k+1}$ koşulunu sağlayan u_k düğümü, $2m$ uzunluğunda ardışıklı düğümlerin dizisi; $\langle u_{k-m+1}, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m} \rangle$ dir. Buradan $\langle u_{k-m+i+1}, \dots, u_{k+i} \rangle$ $m+1$ ardışıklı düğümlerin herbir dizisi m uzunluğundadır. Bu diziler $[u_k, u_{k+1}]$ orta aralığı ile ilişkili F_k eğri parçası için $m+1$ tane de Boor kontrol noktası tanımlar. Gerçekten, eğer f_k , F_k nın kutupsal biçimi ise bu de Boor noktaları $0 \leq i \leq m$ aralığında $\mathbf{d}_{k+i} = f_k(u_{k-m+i+1}, \dots, u_{k+i})$ kutupsal formudur. Örneğin, ..., 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, ... düğüm dizisi için;

eğer $m = 3$, $k = 5$ ve $u_k = u_5 = 6$ ise; $\langle 3, 5, 6, 8, 9, 11 \rangle$ 6 düğüm içerir ve böylece $u_{k+1} = u_6 = 8$, orta aralık $[6, 8]$ dir ve ayrıca $u_{k-m+1} = u_3 = 3$ ve $u_{k+m} = u_8 = 11$ dir. $u_k < u_{k+1}$ olduğundan, $\langle u_{k-m+1}, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m} \rangle$ dizisi artandır ve böylece de Casteljau algoritmasına uygulamak mümkündür. Buna **de Boor algoritması**, denir ve bu algoritma ile F_k eğrisi üzerindeki noktaları hesaplarız. Daha genel olarak $[u_k, u_{k+1}]$ deki parametre değerleri için f_k kutupsal değerleri hesaplanır. Bu aşağıdaki 6 düğümün artan dizisi ile gösterilir; $\langle 3, 5, 6, 8, 9, 11 \rangle$. Eğer u_k bir basit düğümse, o halde ardışık düğümlerin $m+1$ dizisi $\langle u_{k-m+i+1}, \dots, u_{k+i} \rangle$ şeklindedir [7].

Şimdi elimizde eğri parçaları olduğunu unutalım. Bunun yerine, eğri parçalarının maksimum derecesini m yapalım ve artan olsunlar. Ayrıca bir bi-sonsuz düğüm dizisi $\langle u_j \rangle$; ..., u_j , ..., u_{j+k} , ... şeklinde ve sadece basit düğümleri içeren bir dizi olsun. Bundan

başka $\langle \mathbf{d}_i \rangle$ bir bi-sonsuz dizi; ..., \mathbf{d}_i , ..., \mathbf{d}_{i+1} , ... farklı kontrol noktaları olsun. Farzedelim, kontrol noktalarından $\langle \mathbf{d}_i \rangle$, $\langle \mathbf{d}_j \rangle$ düğüm dizisine bir bire bir ve örten fonksiyon olsun öyle ki; her kontrol noktası \mathbf{d}_i için, eğer \mathbf{d}_i bir u_{k+1} düğümüne dönüşüyorsa o halde \mathbf{d}_{i+1} de u_{k+2} düğümüne dönüşür. Ardışık kontrol noktaları ardışık düğümlere dönüştüğünden, burada açıkça bir afin bire bir ve örten dönüşümü $[u_{k+1}, u_{k+m+1}]$ aralığını $(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1})$ doğru parçası üzerine;

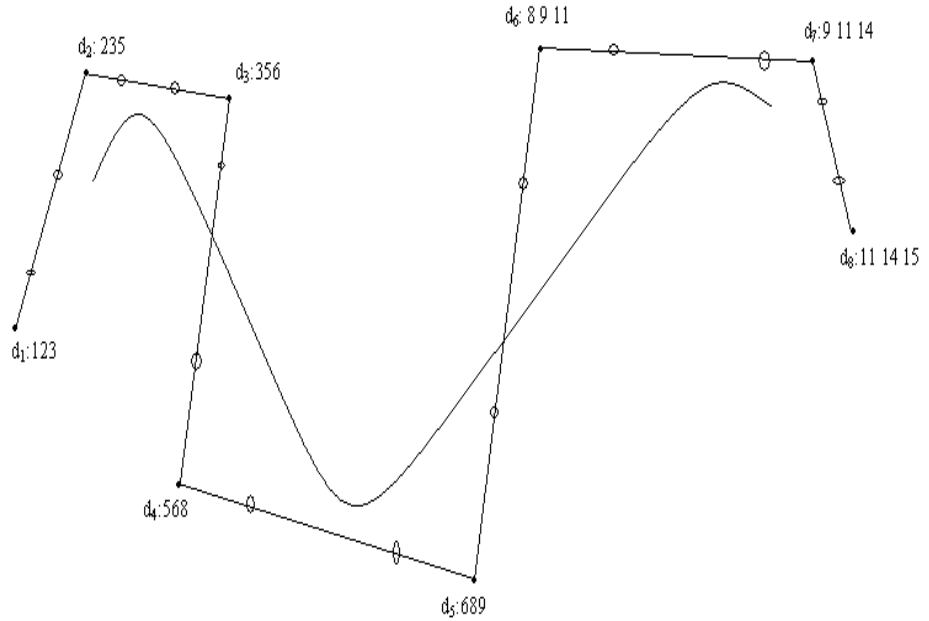
$$u \mapsto \frac{u_{k+m+1} - u}{u_{k+m+1} - u_{k+1}} \mathbf{d}_i + \frac{u - u_{k+1}}{u_{k+m+1} - u_{k+1}} \mathbf{d}_{i+1}, \quad u \in [u_{k+1}, u_{k+m+1}] \quad (4.1)$$

ile belirlenir [7]. Böylece, kontrol çokgeninin her bir $(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1})$ doğru parçasının m parçaya bölündüğünü görebiliriz. Örneğin, $m = 3$ için verilen aşağıdaki düğüm dizisi, ..., 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, ...

ve verilen aşağıdaki kontrol noktalarının dizisi için,

..., $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4, \mathbf{d}_5, \mathbf{d}_6, \mathbf{d}_7, \mathbf{d}_8, \dots$, dir.

Şekil 4.1 de bir kübik spline parçası ve bu spline in $[1, 5]$ aralığı $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ üzerine, $[2, 6]$ aralığı $(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$ üzerine, ..., $[9, 15]$ aralığı $(\mathbf{d}_7, \mathbf{d}_8)$ üzerine dönüşür [7].



Şekil 4.1: B-Spline eğrisi ve düğüm noktaları.

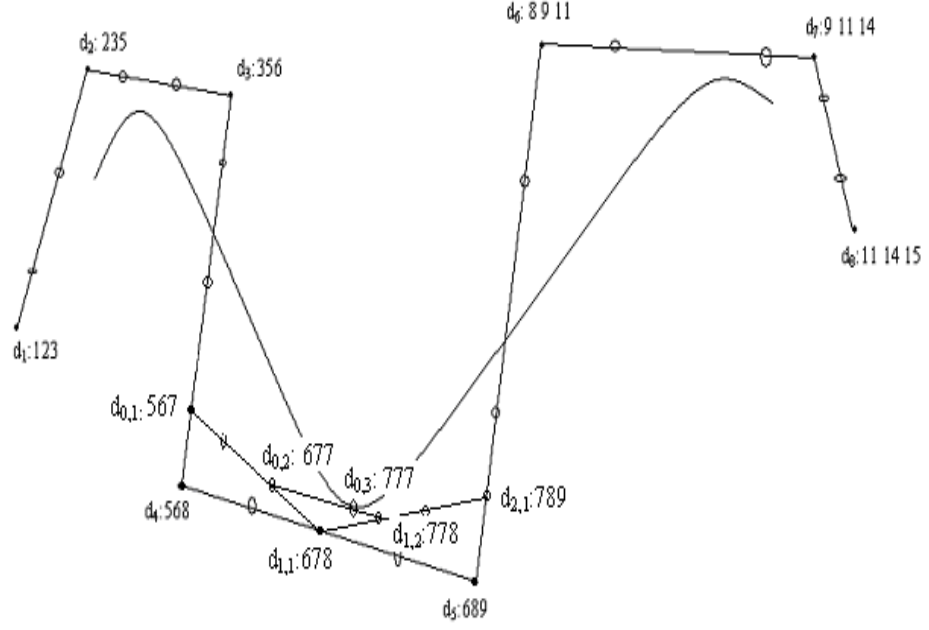
$k = 5$ ve $u_k = u_5 = 6$ için dizi, $\langle 3,5,6,8,9,11 \rangle$ dizisi orta aralığı $[6,8]$ olan, $(\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4)$, $(\mathbf{d}_4, \mathbf{d}_5)$ ve $(\mathbf{d}_5, \mathbf{d}_6)$ doğru parçaları ile eşleşir. $(\mathbf{d}_4, \mathbf{d}_5)$ doğru parçası $[5,9]$ aralığının afin görüntüsüdür [7].

Böylece kontrol çokgeni üzerindeki m ardışık doğru parçası $(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1}), \dots, (\mathbf{d}_{i+m-1}, \mathbf{d}_{i+m})$ ya da denk olarak $m+1$ ardışık kontrol noktası $\mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_{i+m}$ $2m$ düğümlerinin bir dizisi $\langle u_{k+1}, \dots, u_{k+2m} \rangle$ ile eşleşir. Örneğin, $(\mathbf{d}_3, \mathbf{d}_4)$ ve $(\mathbf{d}_4, \mathbf{d}_5)$ doğru parçalarının her ikisinde $[5,8]$ aralığının görüntüsünü içerir [7].

Verilen $2m$ düğümlü bir $\langle u_{k+1}, \dots, u_{k+2m} \rangle$ dizide $[u_{k+1}, u_{k+m+1}]$ orta aralığındaki herhangi bir t değeri için, $m+1$ kontrol noktası $\mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_{i+m}$ ile belirlenen eğri parçası üzerindeki bir nokta tekrarlı bir afin interpolasyon ile

$$t \mapsto \frac{u_{k+m+j+1} - t}{u_{k+m+j+1} - u_{k+j+1}} \mathbf{d}_{i+j} + \frac{t - u_{k+j+1}}{u_{k+m+j+1} - u_{k+j+1}} \mathbf{d}_{i+j+1} \quad (4.2)$$

şeklinde hesaplanır. Bu dönüşüm ile, $[u_{k+j+1}, u_{k+m+j+1}]$ aralığı $(\mathbf{d}_{i+j}, \mathbf{d}_{i+j+1})$ doğru parçası üzerine dönüşür. Bu da bize $\mathbf{d}_{j,1}$ noktasını verir. O halde yeni kontrol çokgenini $\mathbf{d}_{0,1}, \mathbf{d}_{1,1}, \dots, \mathbf{d}_{m-1,1}$ yi m nokta ile belirleriz. Ayrıca $[u_{k+j+2}, u_{k+m+j+1}]$ aralığının herbirini afin olarak $(\mathbf{d}_{j,1}, \mathbf{d}_{j+1,1})$ doğru parçasına dönüştürebilir ve $t \in [u_{k+m}, u_{k+m+1}]$ için, $(\mathbf{d}_{j,1}, \mathbf{d}_{j+1,1})$ de bir $\mathbf{d}_{j,2}$ noktasını elde ederiz. Bu şekilde devam edilirse, yeni bir kontrol çokgeni elde ederiz: $\mathbf{d}_{0,2}, \mathbf{d}_{1,2}, \dots, \mathbf{d}_{m-1,2}$. Her defasında, şimdiki kontrol çokgeninin bir doğru parçası üzerine afin dönüşen ardışık aralıkların sayısı bir azalır ve bu seferde kullanılan en soldaki aralığın başlangıç düğümü bir önceki seferde kullanılan en soldaki aralığın başlangıç düğümünün bir ardılıdır. Yani, m seferde, sadece orta aralığa $[u_{k+m}, u_{k+m+1}]$ sahip olacağız. m seferde elde edilen $\mathbf{d}_{0,m}$ noktası eğri parçasındaki bir noktadır [7].



Şekil 4.2: Kübik spline eğrisinin $t=7$ değerine uygun oluşturulan noktası.

Şekil 4.2 de, $t = 7$ için nokta hesabı yapılıyor. Bu noktalar kutupsal değerler olarak da gösterilebilir. Örneğin; $\mathbf{d}_{0,1}$: 567, $\mathbf{d}_{1,1}$: 678, $\mathbf{d}_{2,1}$: 789, $\mathbf{d}_{0,2}$: 677, $\mathbf{d}_{1,2}$: 778 ve $\mathbf{d}_{0,3}$: 777 dir.

$\mathbf{d}_{0,1}$ için seçilen interpolasyon oranı: $\frac{7-3}{8-3} = \frac{4}{5}$ dir. Buna göre;

$\mathbf{d}_{1,1}$: $\frac{7-5}{9-5} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{d}_{2,1}$: $\frac{7-6}{11-6} = \frac{1}{5}$, $\mathbf{d}_{0,2}$: $\frac{7-6}{8-5} = \frac{2}{3}$, $\mathbf{d}_{1,2}$: $\frac{7-6}{9-6} = \frac{1}{3}$, $\mathbf{d}_{0,3}$: $\frac{7-6}{8-6} = \frac{1}{2}$ olur.

Şimdi çoklu düğümleri kullanmak için bir önceki örneğe dönelim. ...,1,2,3,5,6,8,9,11,14,15,..., düğüm dizisi ve ..., \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 , \mathbf{d}_4 , \mathbf{d}_5 , \mathbf{d}_6 , \mathbf{d}_7 , \mathbf{d}_8 , ..., kontrol noktalarının dizisi idi. Bu kontrol noktalarının 5 eğri parçası tanımladığını ve bunların [3,5], [5,6], [6,8], [8,9], [9,11] oldukları görülebilir. Eğer bu aralıkların herhangi birini 'sıkıştırırsak' örneğin, [5,6] \rightarrow [5,5] gibi, o zaman bu aralığa uygun eğri parçasını bir noktaya büzmüş oluruz ve sonuç olarak [3,5] ve [5,8] aralıklarına ait eğri parçalarının arasındaki birleşimin sürekliliğinin derecesi daha düşük olacaktır. Eğer [5,8] aralığı da boş bir aralığa büzülürse, bu sefer de [3,5] ve [5,9] aralıklarına uygun eğri parçaları daha düşük süreklilikle birleşecektirler. Ayrıca 5 düğümü bir üçlü düğüm (çoklu düğüm) olur. Bu halde bir C^1 sürekliliğine (teğet sürekliliği) sahip olamayabiliriz. Ekstrem olarak bir aralığı daha ([5,9]) sıkıştırırsak, 5 parametre değerinde bir süreksizliğe daha sahip oluruz ve [3,5] ve [5,11] e ait eğri parçaları 5 düğümü ile ilgili noktada birleşmeyebilirler [7].

4.1. DÜZGÜN VE DÜZGÜN OLMAYAN PARAMETRİK EĞRİLER

Bir eğriye belli aralıklarda yaklaşabiliriz. Peki bu aralıkları nasıl seçebiliriz?

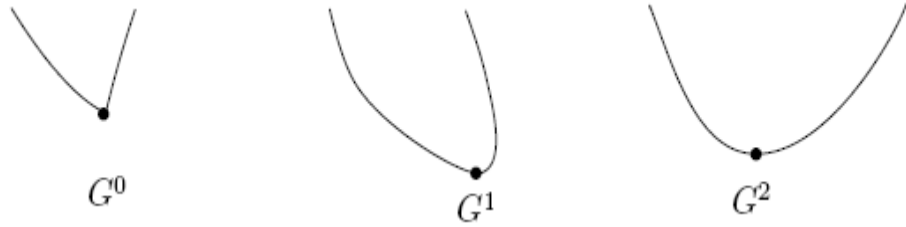
Bu probleme iki türlü yaklaşımla cevap verebiliriz;

- (1) Her bir nokta için t birer artar,
- (2) t farklı değerlerle artar.

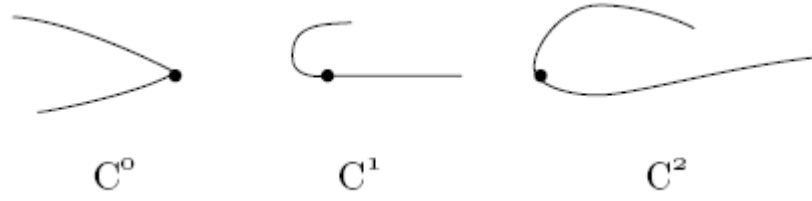
İlk yaklaşım bir düzgün parametrik eğri oluşturur, sonraki ise düzgün olmayandır. Yani noktalar sabit ve düzgün aralıklandırılırsa düzgün, eğer bu aralıklar çok farklı bir şekilde oluşturulursa buna düzgün olmayan denir. Eğer boşluklar düzgün değilse, \mathbf{P}_i noktasındaki t değerinin artışı $|\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}|$ kadardır. Bir $\mathbf{P}(s)$ eğrisinin $\mathbf{P}'(s)$ teğet vektörü birimdir (s yay parametresi) [9].

4.2. EĞRİ SÜREKLİLİĞİ

Uygulamada, bir eğrinin tamamı genelde doğru parçalarından oluşur. Yani her bir parçanın nasıl bağlanması gerektiğinin anlaşılmasında önemlidir. İki tür eğri sürekliliği vardır; geometrik ve parametrik. Eğer iki ardışık parça bir noktada birleşiyorsa, tüm eğri için G^0 geometrik sürekliliğine sahiptir diyebiliriz. Buna ek olarak eğer iki parçanın teğet vektörlerinin yönleri bu noktada aynı ise, o halde bu noktada eğri G^1 geometrik sürekliliğine sahip olur. İki parça birbiri ile düzgün bağlanır. Genel olarak, bir eğri bir birleşme noktasında G^n geometrik sürekliliğine sahipse iki parçanın ilk n türevlerinin her çifti aynı doğrultudadır (Bkz. Şekil 4.3). Eğer aynı türevler bu noktada aynı değere sahipse, eğri bu noktada C^n parametrik sürekliliğe sahiptir (Bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.3: Geometrik süreklilik.



Şekil 4.4: Parametrik süreklilik.

Bir C^k sürekliliği G^k sürekliliğinden daha kapsamlıdır, ancak bir fark vardır. Bir noktada bağlantılı iki parçanın her ikisinde de $(0,0,0)$ teğet vektörlerine sahip olduğunu düşünürsek, bu teğet vektörünün yönü belli olmadığından G^1 sürekliliğine sahiptir diyemeyiz, ancak C^1 sürekliliğine sahiptir [9].

Süreklilik iki tip olduğundan parametre değişimi zorunludur. Verilen bir $\mathbf{P}(t)$ eğri parçası $(0 \leq t \leq 1)$ için $T = t^2$ değişimi ile $\mathbf{Q}(T) = \mathbf{Q}(t^2)$, $(0 \leq T \leq 1)$ yani eğri parçası $\mathbf{P}(t)$ nin şekli ile aynıdır. Aynı iki eğri aynı teğetlere sahip olmak zorundadır. Yine de, hesaplanan teğet vektörlerinin değeri farklıdır çünkü;

$$\frac{d\mathbf{Q}(t^2)}{dt} = 2t \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt} = 2t \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \text{ dir [9].}$$

Bundan dolayı farzedilen eğri sürekliliğindeki teğet vektörlerinin yön ve değerlerini ayırırız. Örneğin, iki doğrusal $\mathbf{P}(t) = (8t, 6t)$ ve $\mathbf{Q}(t) = (4(t+2), 3(t+2))$ parça, ilk önce $(0,0) \rightarrow (8,6)$ ya sonrada $(8,6) \rightarrow (12,9)$ a gider. Bunların teğetleri; $\mathbf{P}'(t) = (8,6)$, $\mathbf{Q}'(t) = (4,3)$ dür. Parçalar, $(8,6)$ da düzgün bir şekilde bağlanır, fakat bu noktadaki teğetleri farklıdır. Böylece tüm eğri G^1 sürekliliğine sahip ancak C^1 sürekliliğine sahip değildir. Bundan başka bir düzgün eğrinin her noktasıyla birleşen başka bir doğal vektör eğrilik vektörüdür. Teğet ve eğrilik vektörleri her yerde sürekli olan bir eğri, G^2 sürekli dir [9].

4.3. PARAMETRİK KÜBİK EĞRİLER

Parametrik eğriler bilgisayar grafiklerinde polinom olarak kullanılır. Örneğin bir doğruyu $\mathbf{P}_1(t) = \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_0$ şeklinde yazabiliriz. Bir parametrik kübik eğri bir uzay

eğrisidir ve $\mathbf{P}_3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{A}_i t^i$ ile gösterilir. Genel olarak da

$$\mathbf{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{A}_i t^i \quad (4.3)$$

yazabiliriz [9].

4.4. BİLGİSAYARDA HIZLI HESAPLAMA

Bu kısımda ileri farklar yöntemini kullanacağız. Bir eğri t nin 0 dan 1 e Δ adımıyla artışında bir loopta (kapalı yol) çizilebilir. $i+1$ tekrarla bir $\mathbf{P}([i+1] \Delta)$ noktası hesaplanır ve bir önceki $\mathbf{P}(i\Delta)$ ile kısa bir doğrusal parça ile bağlanır [9].

İleri farkların esası bir $d\mathbf{P}$ niceliğini t nin her değeri için,

$\mathbf{P}(t+\Delta) = \mathbf{P}(t) + d\mathbf{P}$ ile bulmaktır. Buna göre

$\mathbf{P}(0+\Delta) = \mathbf{P}(0) + d\mathbf{P}$,

$\mathbf{P}(2\Delta) = \mathbf{P}(\Delta) + d\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + 2d\mathbf{P}$,

.

.

.

$\mathbf{P}([i+1] \Delta) = \mathbf{P}(i\Delta) + d\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + (i+1)d\mathbf{P}$ olur.

Buradaki $d\mathbf{P}$ değerini Taylor serileri yöntemiyle bulabiliriz;

$$f(t + \Delta) = f(t) + f'(t)\Delta + \frac{f''(t)\Delta^2}{2!} + \frac{f'''(t)\Delta^3}{3!} + \dots \quad (4.4)$$

Genel olarak bir parametrik kübik eğri $\mathbf{P}(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ denklemi ile verilir ve birinci, ikinci, üçüncü mertebeden türevleri sıfırdan farklıdır. $\mathbf{P}(t)$ den

$\mathbf{P}'(t) = 3at^2 + 2bt + c$, $\mathbf{P}''(t) = 6at + 2b$, $\mathbf{P}'''(t) = 6a$

olarak elde edilir.

Böylece $\mathbf{P}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$ fonksiyonunun herhangi bir t noktasındaki Taylor serisi;

$$\begin{aligned} d\mathbf{P} &= \mathbf{P}(t + \Delta) - \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(t)\Delta + \frac{\mathbf{P}''(t)\Delta^2}{2} + \frac{\mathbf{P}'''(t)\Delta^3}{6} \\ &= 3\mathbf{a}t^2\Delta + 2\mathbf{b}t\Delta + \mathbf{c}\Delta + 3\mathbf{a}t^2\Delta^2 + \mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{a}\Delta^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak bulunur [9]. Ancak burada $d\mathbf{P}$, t ye bağlı olduğundan bilgisayarda daha fazla zaman kaybetmemize neden olur. O halde ileri farklar yöntemine Taylor serileri yardımı ile devam edersek, $dd\mathbf{P}(t)$ yi hesaplarız. Buna göre;

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}(t+\Delta) &= d\mathbf{P}(t) + dd\mathbf{P}(t) = d\mathbf{P}(t) + d\mathbf{P}'(t)\Delta + (d\mathbf{P}''(t) \Delta^2) / 2, \\ \Rightarrow dd\mathbf{P}(t) &= d\mathbf{P}'(t)\Delta + \frac{d\mathbf{P}''(t)\Delta^2}{2} = (6\mathbf{a}t\Delta + 2\mathbf{b}\Delta + 3\mathbf{a}\Delta^2)\Delta + \frac{6\mathbf{a}\Delta\Delta^2}{2} \\ &= 6\mathbf{a}t\Delta^2 + 2\mathbf{b}\Delta^2 + 6\mathbf{a}\Delta^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Ancak hala t ye bağlıyız. O halde t den kurtulana kadar bu yönteme devam edersek;

$dd\mathbf{P}(t+\Delta) = dd\mathbf{P}(t) + ddd\mathbf{P} = dd\mathbf{P}(t) + dd\mathbf{P}'(t) \Delta \Rightarrow ddd\mathbf{P} = dd\mathbf{P}'(t) \Delta = 6\mathbf{a}\Delta^3$ elde edilir ve böylece t den bağımsız bir ifade bulunur. Yani sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \\ d\mathbf{P}(t) &= 3\mathbf{a}t^2\Delta + 2\mathbf{b}t\Delta + \mathbf{c}\Delta + 3\mathbf{a}t^2\Delta^2 + \mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{a}\Delta^3, \\ dd\mathbf{P}(t) &= 6\mathbf{a}t\Delta^2 + 2\mathbf{b}\Delta^2 + 6\mathbf{a}\Delta^3, \\ ddd\mathbf{P} &= 6\mathbf{a}\Delta^3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur.

$t = 0$ için ise;

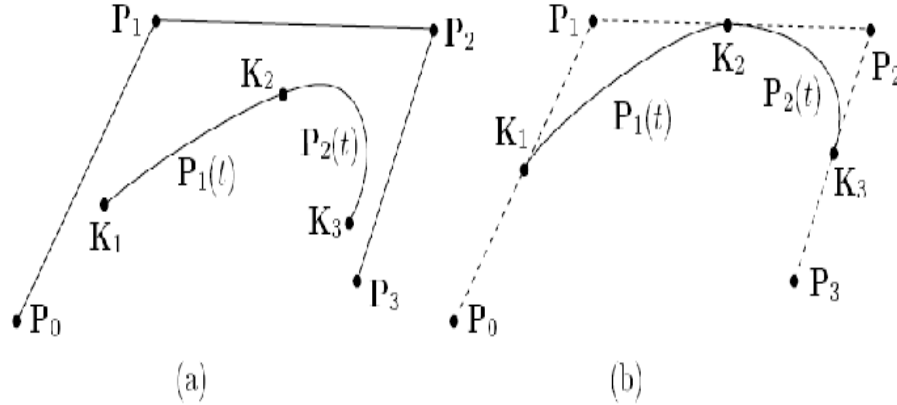
$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{d}, d\mathbf{P}(0) = \mathbf{a}\Delta^3 + \mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{c}\Delta, dd\mathbf{P}(0) = 6\mathbf{a}\Delta^3 + 2\mathbf{b}\Delta^2, ddd\mathbf{P} = 6\mathbf{a}\Delta^3,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\Delta) &= \mathbf{a}\Delta^3 + \mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{c}\Delta + \mathbf{d} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{dP}(0), \\
\mathbf{dP}(\Delta) &= \mathbf{a}\Delta^3 + 2\mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{c}\Delta + 3\mathbf{a}\Delta^3 + \mathbf{b}\Delta^2 + \mathbf{a}\Delta^3 = \mathbf{dP}(0) + \mathbf{ddP}(0), \\
&\dots \\
\mathbf{P}([i+1]\Delta) &= \mathbf{P}(i\Delta) + \mathbf{dP}(i\Delta), \\
\mathbf{dP}([i+1]\Delta) &= \mathbf{dP}(i\Delta) + \mathbf{ddP}(i\Delta), \\
\mathbf{ddP}([i+1]\Delta) &= \mathbf{ddP}(i\Delta) + \mathbf{dddP}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir [9].

4.5. KUADRATİK DÜZGÜN B-SPLINE

(n + 1) tane kontrol noktası ($\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$) ile bir spline eğrisi oluşturmak istiyoruz. Burada her bir $\mathbf{P}_i(t)$ parçası $\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$ noktalarına bağlı olarak bir kuadratik parametrik polinomdur. Parçalar C^1 sürekliliğine ve yerel kontrole sahip olmalıdır. Tüm bunları sağlayacak şekilde $\mathbf{P}_i(t)$ parçasının başlangıç noktası \mathbf{K}_i ve bitiş noktası da \mathbf{K}_{i+1} olsun. Bunlara aynı zamanda birleşim noktaları da denir [9].



Şekil 4.5: Düzgün B-Spline ve kontrol çokgeni.

$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ve \mathbf{P}_3 kontrol noktalarıyla belirli iki kuadratik parça $\mathbf{P}_1(t)$ ve $\mathbf{P}_2(t)$ olsun. İlk parça $\mathbf{K}_1 \rightarrow \mathbf{K}_2$, ikincisi $\mathbf{K}_2 \rightarrow \mathbf{K}_3$ giden parçalardır. Dikkat edilirse her bir parça için üç kontrol noktası vardır. Böylece lokal (yerel) kontrol sağlanmış olur.

İki parça için genel notasyonu kullanırsak;

$$\mathbf{P}_i(t) = (t^2, t, 1) \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (4.9)$$

bulunur. Burada M 3x3 tipinde elemanları hesaplanmış bir taban matrisidir. Öte yandan a(t), b(t) ve c(t) gibi üç fonksiyon tanımlarsak;

$$\begin{aligned} (t^2, t, 1) \mathbf{M} &= (t^2, t, 1) \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \dots, c_2 t^2 + c_1 t + c_0) \\ &= (a(t), b(t), c(t)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur [9].

M matrisinin 9 elemanını şu şekilde saptayabiliriz;

1) İki parça ortak bir noktada birleşir ve bu noktadaki teğet vektörleri aynı olur;

$$\mathbf{P}_1(1) = \mathbf{P}_2(0), \quad \mathbf{P}'_1(1) = \mathbf{P}'_2(0)$$

$$(4.9) \text{ denkleminde : } a(1)\mathbf{P}_0 + b(1)\mathbf{P}_1 + c(1)\mathbf{P}_2 = a(0)\mathbf{P}_1 + b(0)\mathbf{P}_2 + c(0)\mathbf{P}_3,$$

$$a'(1)\mathbf{P}_0 + b'(1)\mathbf{P}_1 + c'(1)\mathbf{P}_2 = a'(0)\mathbf{P}_1 + b'(0)\mathbf{P}_2 + c'(0)\mathbf{P}_3 \text{ olur.}$$

\mathbf{P}'_i kontrol noktaları keyfi olabileceğinden;

$$a(1) = 0, \quad a'(1) = 0, \quad \leftrightarrow P_0$$

$$b(1) = a(0), \quad b'(1) = a'(0), \quad \leftrightarrow P_1$$

$$c(1) = b(0), \quad c'(1) = b'(0), \quad \leftrightarrow P_2$$

$$0 = c(0), \quad 0 = c'(0), \quad \leftrightarrow P_3$$

$$\Rightarrow a_2 + a_1 + a_0 = 0, \quad 2a_2 + a_1 = 0,$$

$$b_2 + b_1 + b_0 = a_0, \quad 2b_2 + b_1 = 0,$$

$$c_2 + c_1 + c_0 = b_0, \quad 2c_2 + c_1 = 0,$$

$$0 = c_0, \quad 0 = c_1$$

şeklinde 9 bilinmeyenli 8 denklem elde edilir.

2) Tüm eğri kullanılan koordinat sisteminden bağımsız olabilir. Ayrıca burada her bir parçanın ağırlık fonksiyonları barisentriktir; yani

$$a(t) + b(t) + c(t) = 1 \text{ dir. Buradan,}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0$$

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0$$

$$a_0 + b_0 + c_0 = 1.$$

bulunur. Böylece 3 denklem daha elde ettik. Bu denklemlerin çözümünden;

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = 1, b_2 = -1, c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_i(t) = \frac{1}{2}(t^2, t, 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \end{pmatrix} \text{ olur [9].}$$

Şimdi \mathbf{K}_i ve \mathbf{K}_{i+1} noktaları için:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i(0) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{P}_i), \mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{P}_i(1) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1}) \text{ olur.}$$

Böylece spline parçası kontrol noktalarının orta noktalarından başlayıp orta noktalarında biter. Teğet vektör ise,

$$\mathbf{P}'_i(t) = \frac{1}{2}(2t, 1, 0) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_{i+1} \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$\mathbf{P}'(0) = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1} \text{ ve } \mathbf{P}'(1) = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i \text{ dir.}$$

Eğrimiz kuadratik olduğundan, ikinci türev sabittir ve,

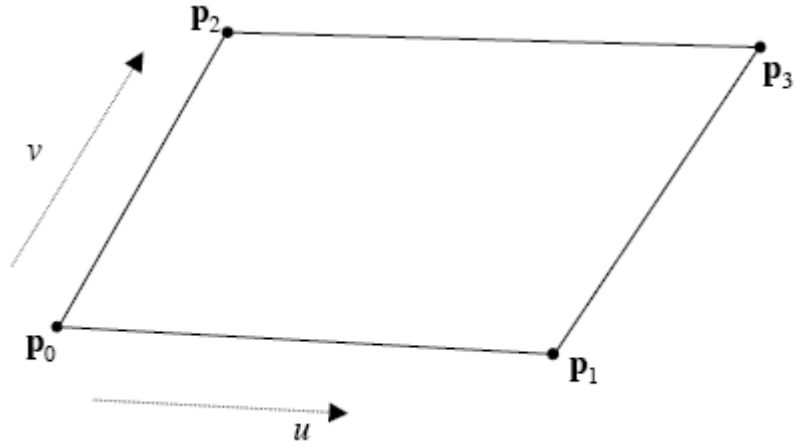
$$\mathbf{P}''(t) = \mathbf{P}_{i-1} - 2\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_{i+1} \text{ dir [9].}$$

5. YÜZEYLER

Kapalı, bağlantılı bileşik bir yüzey katı bir şekli gösterir. Bu yüzey, yüzey yamalarının oluşumudur. Yüzey tasarımı estetik, aerodinamik, ergonomi gibi birçok alanda etkili olabilir.

5.1. BİLİNEER YAMALAR (KONTROL AĞLARI)

Bilineer yama P_0 , P_1 , P_2 ve P_3 gibi dört kontrol noktası tarafından belirlenir. Yama üzerindeki $X(u, v)$ noktasını iki adımda belirleriz:

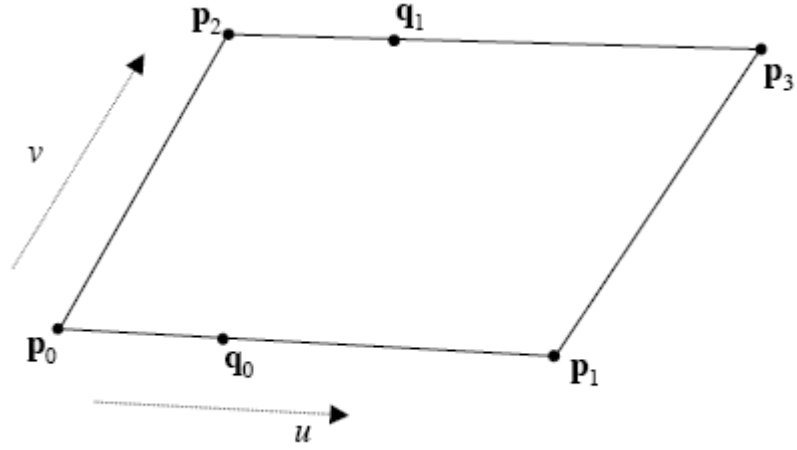


Şekil 5.1: Bilineer yama ve dört kontrol noktası.

1. Adım:

$$q_0 = \text{lineer interpolasyon}(u, P_0, P_1)$$

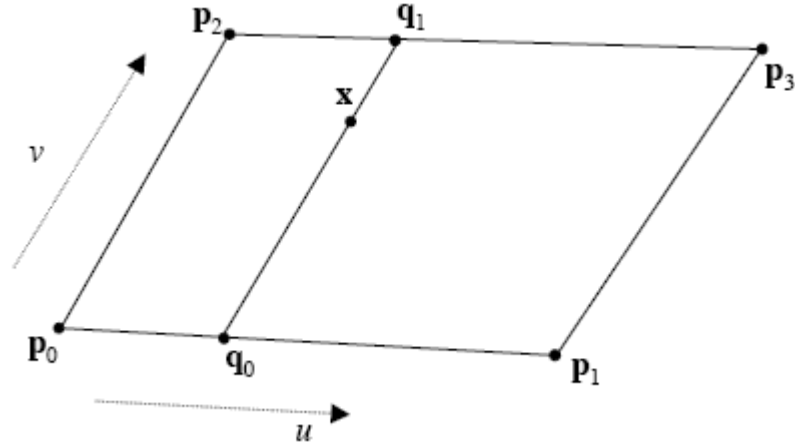
$$q_1 = \text{lineer interpolasyon}(u, P_2, P_3)$$



Şekil 5.2: Bilineer yamaya u doğrultusunda interpolasyon yapılıyor.

2.Adım:

$\mathbf{x} = \text{linear interpolasyon}(v, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$



Şekil 5.3: Bilineer yamaya v doğrultusunda interpolasyon yapılıyor.

O halde yüzey üzerindeki bir $\mathbf{X}(u, v)$ noktası için, lin.int. lineer interpolasyonun kısaltması olmak üzere:

$\mathbf{X}(u, v) = \text{linear interpolasyon}(v, \text{lin.int.}(u, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1), \text{lin.int.}(u, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3))$ olur.

Bunun da denklemi şu şekildedir;

$$\mathbf{X}(u, v) = (1-u)(1-v)\mathbf{P}_0 + u(1-v)\mathbf{P}_1 + (1-u)v\mathbf{P}_2 + uv\mathbf{P}_3 \quad (5.1)$$

ya da polinom cinsinden,

$$\mathbf{X}(u, v) = (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)uv + (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)u + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)v + \mathbf{P}_0 \text{ dir.}$$

5.2. TENSÖR ÇARPIM YÜZEYLERİ

F ve G tek değişkenli fonksiyonların kümesi olsun. Yani,

$$F = \{f_i(u)\}_{i=0}^m, G = \{g_j(v)\}_{j=0}^n, u \in U \text{ ve } v \in V \text{ olarak tanımlansın.}$$

$$\mathbf{X}(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_{ij} f_i(u) g_j(v) \text{ yüzeyine } \mathbf{tensör \ çarpım \ yüzeyi} \text{ denir ve } U \times V \text{ üzerinde}$$

tanımlıdır. Örneğin $m = n = 2$ için yüzeye bi-küadratik, $m = n = 3$ için bi-kübik denir [11].

Örnek 5.2.1:

$F(u) = \{f_0(u) f_1(u)\} = \{(1-u) u\}$ ve $G(v) = \{g_0(v) g_1(v) g_2(v)\} = \{(1-v)^2 \ 2v(1-v) \ v^2\}$ olsun. O halde tensör çarpım yüzeyinin denklemi [11]:

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{P}_{00} f_0 g_0 + \mathbf{P}_{01} f_0 g_1 + \mathbf{P}_{02} f_0 g_2 + \mathbf{P}_{10} f_1 g_0 + \mathbf{P}_{11} f_1 g_1 + \mathbf{P}_{12} f_1 g_2 \text{ olur.}$$

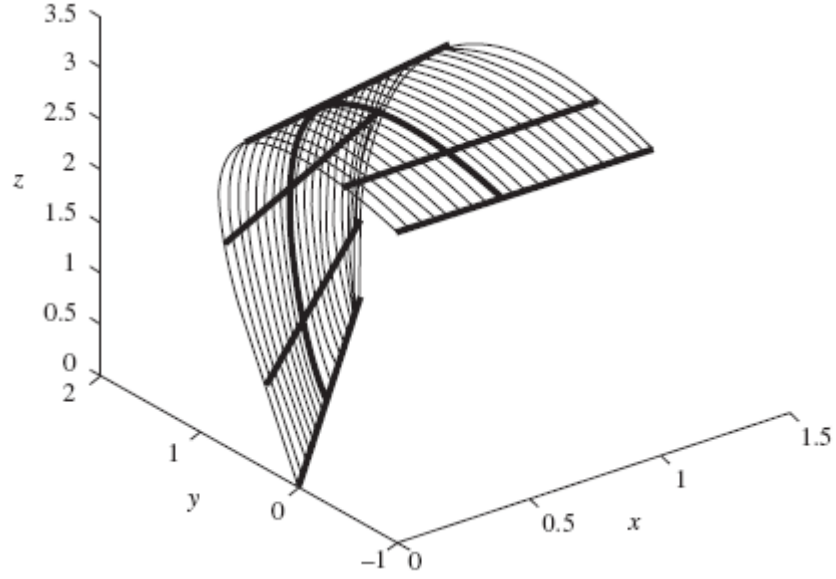
Kontrol noktaları şu şekilde verilsin:

$$\mathbf{P}_{00} = [0, 0, 0], \mathbf{P}_{10} = [1, 2, 0], \mathbf{P}_{01} = [0, 2, 4], \mathbf{P}_{11} = [1, 2, 4], \mathbf{P}_{02} = [0, -1, 3], \mathbf{P}_{12} = [1, -1, 3]$$

O halde yüzeyin matris denklemi [11]:

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (0, 2, 4) & (0, -1, 3) \\ (1, 2, 0) & (1, 2, 4) & (1, -1, 3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir ve resmi (şekil 5.4) de gösterilmiştir.



Şekil 5.4: Örnek 5.2.1 deki yüzeyin resmi.

5.3. BÉZIER YÜZEY YAMASI

Bir tensör çarpım Bézier yüzey yaması şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (5.2)$$

Herhangi bir $u = u_0$ değeri için $\mathbf{B}(u_0, v)$ n. dereceden bir Bézier eğrisi belirtir. Aynı şekilde $v = v_0$ için de $\mathbf{B}(u, v_0)$ m. dereceden bir Bézier eğrisi belirtir.

Genel olarak bir Bézier yüzeyi;

$$\begin{bmatrix} (1-u)^m & mu(1-u)^{m-1} & \dots & u^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \dots & \mathbf{P}_{0n} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{m0} & \mathbf{P}_{m1} & \dots & \mathbf{P}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^n \\ n(1-v)^{n-1}v \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ v^n \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

şekinde ifade edilir. Örneğin, bi-kübik Bézier yaması için; $m = n = 3$ dür. Bu yamanın denklemi de (5.3) formülünden

$$\mathbf{B}(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \dots & \mathbf{P}_{03} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{P}_{30} & \dots & \mathbf{P}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir [2], [11].

5.4. ÜÇGENSEL BÉZIER YÜZEY YAMALARI

Genelde, bir yüzey yaması bitişik yamaların sınırları boyunca süreklilik şartlarını sağlayacak şekilde dikdörtgensel ya da üçgensel yamaların bir kümesi tarafından oluşturulur.

Üçgensel bir yamayı oluşturmak için u, v, w gibi toplamları 1 olan üç parametreden yararlanacağız. 3 parametre ve bir denklem ile yine bi-parametrik yama elde ederiz. Bir üçgensel yama, üçgensel biçimde ayarlanan \mathbf{P}_{ijk} kontrol noktalarının bir kümesi ile tanımlanır. Her bir kontrol noktası 3-boyutludur ve n değeri kullanıcının seçimine bağlıdır. $0 \leq i, j, k \leq n$ ve $i + j + k = n$ dir. Büyük bir n değeri yamaya daha ayrıntılı yaklaşmamızı sağlar ancak bu hesaplama yükünü artırır. Kontrol noktalarının sayısı = $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ dir [11].



$i = 0$ ise üçgenin sol kısmında, $j = 0$ ise üçgenin tabanında ve $k = 0$ ise üçgenin sağındasınızdır. Üçgenin her bir kenarında $n+1$ nokta vardır. Yüzey yaması şu şekilde tanımlanır;

$$\mathbf{X}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{P}_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad u + v + w = 1, \quad i + j + k = n. \quad (5.4)$$

Üç sınırlı eğrisi $[u = 0, v, w = (1-v)]$, $[u = (1-w), v = 0, w]$ ve $[u, v = (1-u), w = 0]$ ile verilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(v) &= \sum_{j+k=n} \mathbf{B}_{0,j,k} \frac{n!}{j!k!} v^j(1-v)^k = \sum_{j=0}^n \mathbf{B}_{0,j,n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} v^j(1-v)^{n-j} \\ \mathbf{B}(u) &= \sum_{i+j=n} \mathbf{B}_{i,j,0} \frac{n!}{i!j!} u^i(1-u)^j = \sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{i,n-i,0} \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i(1-u)^{n-i} \\ \mathbf{B}(w) &= \sum_{i+k=n} \mathbf{B}_{i,0,k} \frac{n!}{i!k!} w^k(1-v)^i = \sum_{k=0}^n \mathbf{B}_{n-k,0,k} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k(1-w)^{n-k} \end{aligned} \quad (5.5)$$

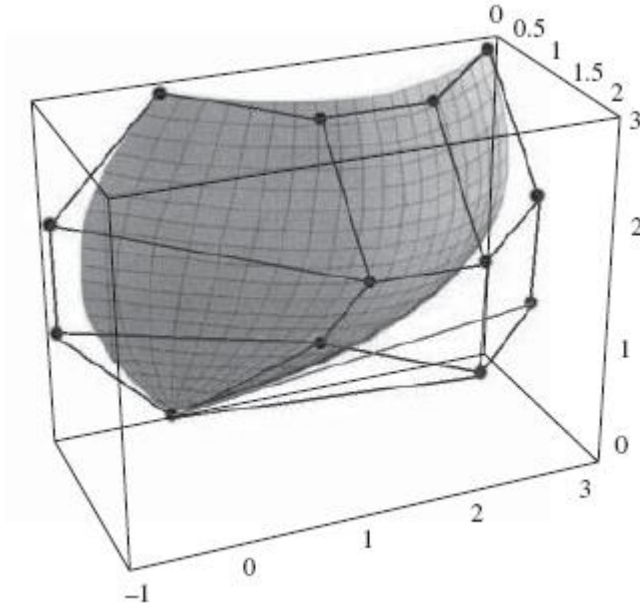
elde edilir [11].

Örnek 5.4.1:

Aşağıdaki kontrol noktaları ile bir üçgensel bi-kübik Bézier yaması elde edelim.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{00} &= \{0, 0, 3\}, \quad \mathbf{P}_{10} = \{1, 1, 3\}, \quad \mathbf{P}_{20} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathbf{P}_{30} = \{0, 3, 3\}, \\ \mathbf{P}_{01} &= \{0, -1, 2\}, \quad \mathbf{P}_{11} = \{2, 1, 2\}, \quad \mathbf{P}_{21} = \{2, 2, 2\}, \quad \mathbf{P}_{31} = \{1, 3, 2\}, \\ \mathbf{P}_{02} &= \{0, -1, 1\}, \quad \mathbf{P}_{12} = \{1, 1, 1\}, \quad \mathbf{P}_{22} = \{2, 2, 1\}, \quad \mathbf{P}_{32} = \{1, 3, 1\}, \\ \mathbf{P}_{03} &= \{0, 0, 0\}, \quad \mathbf{P}_{13} = \{0, 0, 0\}, \quad \mathbf{P}_{23} = \{0, 0, 0\}, \quad \mathbf{P}_{33} = \{0, 0, 0\} \end{aligned}$$

Bu kontrol noktalarını Bézier yama denkleminde yerine koyarsak (Şekil 5.5) elde edilir.



Şekil 5.5: Örnek 5.4.1 deki yüzeyin resmi.

5.5. B-SPLINE YÜZEY YAMASI

Bir tensör çarpım B-Spline yüzeyinin formu şu şekildedir;

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{N}_{i,k}(\mathbf{u}) \mathbf{M}_{j,l}(\mathbf{w}) \quad [1], [2]. \quad (5.6)$$

Burada, $\mathbf{N}_{i,k}(\mathbf{u})$ ve $\mathbf{M}_{j,l}(\mathbf{w})$ ler B-Spline baz fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar;

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{i,1}(\mathbf{u}) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq \mathbf{u} \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \\ \mathbf{N}_{i,k}(\mathbf{u}) &= \frac{(\mathbf{u} - x_i) \mathbf{N}_{i,k-1}(\mathbf{u})}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - \mathbf{u}) \mathbf{N}_{i+1,k-1}(\mathbf{u})}{x_{i+k} - x_{i+1}} \\ \mathbf{M}_{j,1}(\mathbf{w}) &= \begin{cases} 1 & \text{if } y_j \leq \mathbf{w} \leq y_{j+1} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \\ \mathbf{M}_{j,l}(\mathbf{w}) &= \frac{(\mathbf{w} - y_j) \mathbf{M}_{j,l-1}(\mathbf{w})}{y_{j+1} - y_j} + \frac{(y_{j+1} - \mathbf{w}) \mathbf{M}_{j+1,l-1}(\mathbf{w})}{y_{j+1} - y_{j+1}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

dır. Burada x_i ve y_j ler düğüm vektörlerinin elemanlarıdır. $\mathbf{B}_{i,j}$ ler de kontrol köşeleridir. Dört kenarlı yüzey yaması için tanımlanacak çokgen ağı topolojik olarak dörtgen olmak zorundadır. n ve m indeksleri tanımlanan u ve w doğrultusundaki çokgen köşelerinin sayısından bir eksik olur [1].

B-Spline eğrilerinde olduğu gibi bir B-Spline yüzeyinin şekli ve karakteri $[\mathbf{X}]$ ve $[\mathbf{Y}]$ düğüm vektörleri ile gösterilsin. Her iki yöndeki düğüm vektörünün aynı tipi yaygın olarak kullanılsa da burada gerekli değildir. Örneğin, bir parametre yönü için bir açık düğüm vektörü ve ona uygun B-Spline baz fonksiyonu ve yine diğer yön için bir periyodik düğüm vektörü ve ona uygun B-Spline baz fonksiyonu kullanılabilir. Pratik bir örnek olarak dik kesit alanı değişken bir silindir yüzeyi verilebilir [1].

B-Spline baz fonksiyonları hem sınır eğrilerini tanımladığından hem de yüzeyin içini karıştırdığından şu özelliklerini yazabiliriz;

- * Her bir parametrik yöndeki yüzeyin maksimum mertebesi o yönde tanımlanan çokgen köşelerinin sayısına eşittir.
- * Her bir parametrik yöndeki yüzeyin sürekliliği her bir yöndeki yüzeyin mertebesinden iki azdır; örneğin, u ve w yönlerindeki süreklilikler sırasıyla C^{k-2} ve C^{l-2} dir.
- * Yüzey bir afin dönüşüm altında değişmezdir; yani, yüzey tanımlanan çokgen ağının dönüşümü ile dönüştürülür.
- * B-Spline yüzeyleri için değişken azalımı özelliği henüz bilinmiyor.
- * Tek bir çokgen ağı köşesinin etkisi $\pm k/2, \pm 1/2$ ile sınırlandırılmıştır.
- * Eğer tanımlanan çokgen ağı köşelerinin sayısı her bir parametrik yöndeki mertebeye eşit ve hiç bir iç düğüm değeri yoksa o zaman B-Spline yüzeyi bir Bézier yüzeyi olur.
- * Eğer üçgenleştirilirse, yüzeye yaklaşımlar düzlemsel olur.
- * Yüzey, çokgenin konveks teknesinin içinde bulunur [1].

Örnek 5.5.1:

Örneğin B-Spline yüzeyi şu 4x4 lük çokgen ağı ile belirtilsin;

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{B}_{1,1}[-15 & 0 & 15] & \mathbf{B}_{1,2}[-5 & 5 & 15] & \mathbf{B}_{1,3}[5 & 5 & 15] & \mathbf{B}_{1,4}[15 & 0 & 15] \\
 \mathbf{B}_{2,1}[-15 & 5 & 5] & \mathbf{B}_{2,2}[-5 & 10 & 5] & \mathbf{B}_{2,3}[5 & 10 & 5] & \mathbf{B}_{2,4}[15 & 5 & 5] \\
 \mathbf{B}_{3,1}[-15 & 5 & -5] & \mathbf{B}_{3,2}[-5 & 10 & -5] & \mathbf{B}_{3,3}[5 & 10 & -5] & \mathbf{B}_{3,4}[15 & 5 & -5] \\
 \mathbf{B}_{4,1}[-15 & 0 & -15] & \mathbf{B}_{4,2}[-5 & 5 & -15] & \mathbf{B}_{4,3}[5 & 5 & -15] & \mathbf{B}_{4,4}[15 & 0 & -15]
 \end{array}$$

Yüzey u doğrultusunda ($k = 4$) 4. mertebeden ve w ($l = 3$) doğrultusunda 3. derecedendir. Böylece, iki alt yamanın birleşimidir; birisi $0 \leq u \leq 1, 0 \leq w \leq 1$ dir ve diğeri $0 \leq u \leq 1, 1 \leq w \leq 2$ dir. Şimdi yüzey üzerinde $u = \frac{1}{2}$, $w = 1$ noktasını belirleyelim.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(u, w) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{B}_{i,j} N_{i,4}(u) M_{j,3}(w) \\
 &= N_{1,4}(\mathbf{B}_{1,1} M_{1,3} + \mathbf{B}_{1,2} M_{2,3} + \mathbf{B}_{1,3} M_{3,3} + \mathbf{B}_{1,4} M_{4,3}) \\
 &\quad + N_{2,4}(\mathbf{B}_{2,1} M_{1,3} + \mathbf{B}_{2,2} M_{2,3} + \mathbf{B}_{2,3} M_{3,3} + \mathbf{B}_{2,4} M_{4,3}) \\
 &\quad + N_{3,4}(\mathbf{B}_{3,1} M_{1,3} + \mathbf{B}_{3,2} M_{2,3} + \mathbf{B}_{3,3} M_{3,3} + \mathbf{B}_{3,4} M_{4,3}) \\
 &\quad + N_{4,4}(\mathbf{B}_{4,1} M_{1,3} + \mathbf{B}_{4,2} M_{2,3} + \mathbf{B}_{4,3} M_{3,3} + \mathbf{B}_{4,4} M_{4,3})
 \end{aligned}$$

Burada, u yönündeki düğüm vektörü $[\mathbf{X}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ dir.

O halde $N_{i,k}$ lar şu şekildedir. Böylece;

$$N_{1,4}(1/2) = (1-u)^3 = (1/2)^3 = \frac{1}{8}$$

$$N_{2,4}(1/2) = 3u(1-u)^2 = \frac{3}{8}$$

$$N_{3,4}(1/2) = 3u^2(1-u) = \frac{3}{8}$$

$$N_{4,4}(1/2) = u^3 = \frac{1}{8}$$

olur. Benzer şekilde w doğrultusundaki düğüm vektörü $[\mathbf{Y}] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$ dir. O halde $M_{j,1}$ ler şu şekildedir:

$$M_{1,3}(1) = 0$$

$$M_{2,3}(1) = \frac{(2-w)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$M_{3,3}(1) = \frac{(2-w)(3w-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$M_{4,3}(1) = (w-1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Böylece } S(1/2,1) &= \frac{1}{16}(\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{B}_{1,3}) + \frac{3}{16}(\mathbf{B}_{2,2} + \mathbf{B}_{2,3}) + \frac{3}{16}(\mathbf{B}_{3,2} + \mathbf{B}_{3,3}) + \frac{1}{16}(\mathbf{B}_{4,2} + \mathbf{B}_{4,3}) \\ &= [0 \ 35/4 \ 0] \text{ olur.} \end{aligned}$$

6. EĞRİLERDE KUTUPSAL BİÇİMLER (BLOSSOMİNG)

6.1. GİRİŞ (DÜZLEM EĞRİLERİ)

Çiçekleme (Blossoming) eğri üzerindeki noktaların hesabı yada kontrol noktalarının lineer tekrarlı interpolasyonu ile yeni kontrol noktalarının hesabıdır. Çiçekleme, n. dereceden bir polinomu simetrik bir n-afin dönüşüme dönüştürür.

Örneğin,

$F = ax + b$ şeklindeki lineer bir polinomun çiçeklemesi;

$f = ax_0 + b$ dir.

$G = ax^2 + bx + c$ şeklindeki bir kuadratik polinomun çiçeklemesi; $g = ax_0x_1 + b(x_0 + x_1)/2 + c$ dir [4].

Örnek 6.1.1:

$y = 3x^2 + 2x + 5$ için çiçekleme yoluyla kontrol noktalarını bulalım.

$F_0(t) = t$, $F_1(t) = 3t^2 + 2t + 5$, $F_2(t) = 0$ olarak alırsak,

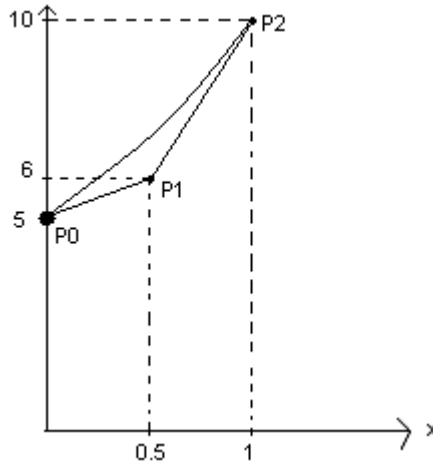
$f_0(t_0, t_1) = (t_0 + t_1) / 2$, $f_1(t_0, t_1) = 3.t_0.t_1 + 2[(t_0 + t_1) / 2] + 5$, $f_2(t_0, t_1) = 0$ olur ki bu da F nin çiçeği olur (Bkz. Şekil 6.1).

Sonra 2-afin dönüşüm kontrol noktalarını buluruz.

$P_0 = (f_0(0,0), f_1(0,0), f_2(0,0)) = (0,0,5,0)$,

$P_1 = (f_0(0,1), f_1(0,1), f_2(0,1)) = (0,5,6,0)$,

$P_2 = (f_0(1,1), f_1(1,1), f_2(1,1)) = (1,0,10,0)$,



Şekil 6.1: Örnek 6.1.1 deki eğri ve kontrol noktaları.

6.2. DİFERANSİYELLEME

Simetrik n-afin dönüşümün B çiçeği ile n. dereceden bir $\mathbf{B}(t)$ polinomunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{B}(t + h\vec{1}) - \mathbf{B}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b((t + h\vec{1})^n) - b(t^n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(t^n) + n * b(t^{n-1}h\vec{1}) + n * (n-1) / 2 * b(t^{n-2}h^2\vec{1}) + \dots + b(h^n\vec{1}) - b(t^n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n * b(t^{n-1}h\vec{1})}{h} = n * b(t^{n-1}\vec{1}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

tekrarlı olarak,

$$\mathbf{B}^{(q)}(t) = n(n-1)\dots(n-q+1)b[t^{n-q}\vec{1}^q] \quad (6.2)$$

olur [4].

Örnek 6.2.1: Önce $y = x^2$ nin $x = 0.5$ noktasındaki parametrik türevine bakalım; $F_0(t) = t \rightarrow x$, $F_1(t) = t^2 \rightarrow y$, $F_2(t) = 0 \rightarrow z$ ise,

$$F'(0.5) = (1, 2t, 0)_{t=0.5} = (1, 1, 0).$$

$F(F_0, F_1, F_2)$ çiçeklemesi ile;

$f_0(t_0, t_1) = (t_0 + t_1) / 2$, $f_1(t_0, t_1) = t_0 \cdot t_1$, $f_2(t_0, t_1) = 0$ olur. Denklem (6.2) den çoklu-afin dönüşümün türevini alırsak,

$$2f_0(0.5, \vec{1}) = 2f_0(0.5, 1-0) = 2f_0(0.5, 1) - 2f_0(0.5, 0) = 1.0,$$

$$2f_1(0.5, \vec{1}) = 2f_1(0.5, 1-0) = 2f_1(0.5, 1) - 2f_1(0.5, 0) = 1.0,$$

$$2f_2(0.5, \vec{1}) = 2f_2(0.5, 1-0) = 2f_2(0.5, 1) - 2f_2(0.5, 0) = 0.0$$

bulunur; bu ise yukarıdaki sonuçla aynıdır.

6.3. DERECE YÜKSELTİLMESİ

Çiçeklemeyi kullanarak, bir polinomun derecesinin yükseltilmesi ileri doğrudur ve herhangi bir miktar derece yükseltilmesi bir adımda yapılabilir.

Burada amaç, verilen herhangi n. dereceden F polinomunun çiçeği olan f n-afin dönüşümünden, bir simetrik (n+d)-afin dönüşüm olan g yi (6.3) denklemindeki gibi tanımlamaktır [4].

$$g(t_1, \dots, t_{n+d}) = \frac{\sum_{\{k_1, \dots, k_n\} \subset \{1, 2, \dots, n+d\}} f(t_{k_1}, \dots, t_{k_n})}{\binom{n+d}{n}} \quad (6.3)$$

$g(t_1, \dots, t_{n+d})$ nin G köşegenleştirilmesi, istediğimiz derecesi yükseltilmiş polinomdur. Yani, $(\forall x) G(x) = F(x)$ ve $G(x)$ F nin derecesinden d kadar fazladır. Bu gerçekten doğrudur, çünkü

(1) $g(t_1, \dots, t_{n+d})$ $n+d$ değişkenli,

(2) $g(t_1, \dots, t_{n+d})$ simetriktir çünkü d değişkenlerinin her kombinasyonu $d+n$ değişkenlerinin dışındadır.

(3) $\binom{n+d}{n}$ afin dönüşümlerinin bir afin kombinasyonundan dolayı $g(t_1, \dots, t_{n+d})$ afindir.

(4) Köşegenleştirirken, (6.3) denklemindeki bütün $\binom{n+d}{n}$ terimleri, orijinal afin dönüşümün köşegenleştirilmesiyle aynıdır. $\binom{n+d}{n}$ tarafından bölünen, iki köşegenleştirme tamamen aynıdır [4].

Örnek 6.3.1: (Birinci derece bir polinomu kübik polinom derecesine yükseltme)

$F(t) = f(t) = t$ olsun, $A^1 \rightarrow A^1$ e. Farzedelim, onlar $F(0) = 0$ ve $F(1) = 1$ kontrol noktaları ile tanımlansın. 3-afin g dönüşümünün tanımı, $[0,1]^3$ tanım bölgesi ve

$$g(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1) + f(t_2) + f(t_3)}{3}$$

ile belirlidir. g nin kontrol noktaları, $g(0,0,0) = 0.0$, $g(0,0,1) = 1.0/3$, $g(0,1,1) = 2.0/3$, $g(1,1,1) = 1.0$ ve bu, bu dört kontrol noktasının gerçekte lineer olan bir kübiği belirttiği açıktır.

Örnek 6.3.2: (Bir kuadriği bir kuartik Bézier eğriye yükseltme)

3 kontrol noktası p_0, p_1, p_2 tarafından tanımlanan bir kuadrik Bézier eğrisi verilsin. Yani çiçekler;

$f(0,0) = p_0$, $f(0,1) = p_1$, $f(1,1) = p_2$ olsun.

$$g(t_0, t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_0, t_1) + f(t_0, t_2) + f(t_0, t_3) + f(t_1, t_2) + f(t_1, t_3) + f(t_2, t_3)}{\binom{4}{2}}$$

Böylece derece kuartik eğriye yükselir. Bu eğrinin kontrol noktaları sırasıyla;

$g(0,0,0,0) = 6p_0/6 = p_0$, $g(0,0,0,1) = (3p_0+3p_1)/6 = (p_0+p_1)/2$, $g(0,0,1,1) = (p_0+4p_1+p_2)/6$, $g(0,1,1,1) = (3p_1+3p_2)/6 = (p_1+p_2)/2$, $g(1,1,1,1) = 6p_2/6 = p_2$.

Örnek 6.3.3:

$y = x^2$ eğrisini $[0, 1]$ de kuartik eğriye yükseltelim,

$f(0,0) = p_0 = (0, 0, 0)$, $f(0, 1) = p_1 = (0.5, 0, 0)$, $f(1,1) = p_2 = (1, 1, 0)$ dır.

$$g(t_0, t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_0, t_1) + f(t_0, t_2) + f(t_0, t_3) + f(t_1, t_2) + f(t_1, t_3) + f(t_2, t_3)}{\binom{4}{2}} \text{ olduğundan;}$$

$$g(0,0,0,0) = (0,0,0), \quad g(0,0,0,1) = (0.25, 0, 0), \quad g(0,0,1,1) = (0.5, 1/6, 0), \quad g(0,1,1,1) = (0.75, 0.5, 0), \quad g(1,1,1,1) = (1, 1, 0) \text{ bulunur.}$$

6.4. DE CASTELJAU YAKLAŞIMI

2. dereceden F fonksiyonunun $f: A^2 \rightarrow A^3$ kutupsal biçimi, $b_0 = f(r,r)$, $b_1 = f(r,s)$ ve $b_2 = f(s,s)$ ile verilsin. Verilen $\forall t \in A$ için, F polinom eğrisi üzerindeki $F(t) = f(t,t)$ noktasının geometrik olarak nasıl inşa edildiğini göstereceğiz. $f(t,t)$ şu şekilde hesap edilir;

$$t = (1-\lambda)r + \lambda s \text{ olsun.}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ f(r,r) & & \\ & f(r,t) & \\ f(r,s) & & f(t,t) \\ & f(t,s) & \\ f(s,s) & & \end{array}$$

Algoritma iki aşama içerir. İlk kısımda, iki nokta hesaplanır;

$$f(r,t) = f(r, (1-\lambda)r + \lambda s) = (1-\lambda)f(r,r) + \lambda f(r,s)$$

ve

$$f(t,s) = f((1-\lambda)r + \lambda s, s) = (1-\lambda)f(r,s) + \lambda f(s,s)$$

$f(r,t)$, $f(r,r)$ ve $f(r,s)$ noktalarından ve $f(t,s)$, $f(r,s)$ ve $f(s,s)$ noktalarından hesap edilirken, lineer interpolasyon ile interpolasyon oranı;

$$\lambda = \frac{t-r}{s-r} \text{ dir.}$$

Simetriden dolayı, $f(r,t) = f(t,r)$ dir.

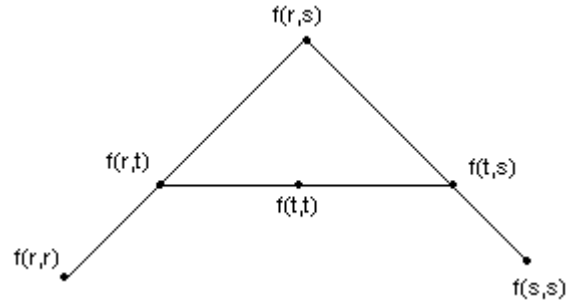
İkinci aşamada ise,

$f(t,t) = f(t, (1-\lambda)r + \lambda s) = (1-\lambda)f(t,r) + \lambda f(t,s)$ noktasını ilk aşamada hesaplanan $f(t,r)$ ve $f(t,s)$ noktalarından hesaplarız ve interpolasyon oranı;

$$\lambda = \frac{t-r}{s-r} \text{ dır.}$$

Böylece, üç lineer interpolasyon adımı ile, eğri üzerindeki $F(t)$ noktasını elde ederiz. Dikkat edilirse, $f(r,r) = F(r)$ ve $f(s,s) = F(s)$ eğri üzerindedir fakat, $f(r,s)$ değildir.

Eğer $r \leq \lambda \leq s$ ise o zaman sadece konveks kombinasyonlar oluşturulabilir. Geometrik olarak, ilki $(f(r,r), f(r,s))$ ve $(f(r,s), f(s,s))$ doğru parçalarını ve ikincisi de $(f(t,r), f(t,s))$ doğru parçasını içeren iki çokkenarın içerdiği bir diyagramdaki algoritma istenen $f(t,t)$ noktası ile λ tarafından tanımlanır. Algoritma ile verilen herbir çokkenar bir “kabuk” olarak adlandırılır ve sonuç diyagramına, de Casteljau diyagramı, denir. İlk çokkenar, eğrinin bir kontrol çokgeni olarak bilinir. Dikkat edilirse kabuklar düzgünce yerleşmiştir. Aslında, t , $[r,s]$ aralığının dışında ise, yine iki çokkenar ve bir de Casteljau algoritması elde ederiz ancak kabuklar düzgün yerleşmez [7].



Şekil 6.2: de Casteljau diyagramı.

Şimdi $f(t_1, t_2)$ değerinin nasıl elde edildiğini açıklayalım;

Bunun için bir parabolün iki teğetinin kesişimine yakından bakmamız gerekir.

Farzedelimki, parabol;

$x(t) = at, y(t) = bt^2$ şeklinde verilsin. Parabolün $(x(t), y(t))$ noktasındaki teğet denklemi;

$x'(t)(y - y(t)) - y'(t)(x - x(t)) = 0$ yani

$$a(y - bt^2) - 2bt(x - at) = 0$$

$$\Rightarrow ay - 2bt_x + abt^2 = 0$$

olur. İki teğetin arakesitini bulmak için denkleme $t = t_1$ ve $t = t_2$ değeri vererek elde edilen lineer denklemler çözülür;

$$\left. \begin{array}{l} ay - 2bt_1x + abt_1^2 = 0 \\ ay - 2bt_2x + abt_2^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = a \frac{t_1 + t_2}{2} \text{ ve } y = bt_1t_2 \quad (6.4)$$

elde edilir. Böylece parabolün iki teğetinin kesişiminin koordinatları kutupsal biçimde ifade edilmiş oldu [7].

6.5. KÜBİK EĞRİLER İÇİN KUTUPSAL FORMLAR

$H = ax^3 + bx^2 + cx + d$ şeklindeki bir kübik polinomun çiçeklemesi:

$h = ax_0x_1x_2 + b(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)/3 + c(x_0 + x_1 + x_2)/3 + d$ dir [7].

Örnek 6.5.1:

$\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ kübik eğrisinin kutupsal formunu bulmaya çalışalım.

$F_1(t) = 3t - t^3$, $F_2(t) = 3t^2$ ve $F_3(t) = 3t + t^3$ olur. Bunların çiçeklemesi de,

$f_1(t_0, t_1, t_2) = t_0 + t_1 + t_2 - t_0t_1t_2$, $f_2(t_0, t_1, t_2) = t_0t_1 + t_0t_2 + t_1t_2$

ve $f_3(t_0, t_1, t_2) = t_0 + t_1 + t_2 + t_0t_1t_2$ olur. O halde kontrol noktaları şu şekildedir;

$\mathbf{P}_0(0, 0, 0)$, $\mathbf{P}_1(1, 0, 1)$, $\mathbf{P}_2(2, 1, 2)$ ve $\mathbf{P}_3(2, 3, 4)$.

Buradan da anlaşılacağı üzere bir kübik eğrinin dört kontrol noktası vardır. Yani eğrinin derecesi n ise onun $(n+1)$ kontrol noktası olur. $t = 0$ için \mathbf{P}_0 ve $t = 1$ için \mathbf{P}_3 noktalarını elde ederiz. Yani bulunan kontrol noktalarındaki ilk ve son noktalar eğri üzerindedir. Ayrıca, $t = 0$ daki teğet vektörü $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ ve $t = 1$ deki teğet vektörü $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ dür [7].

7. POLİNOM YÜZEYLERİN KUTUPSAL HALİ

Afin çizgisini (doğrusunu) A ile gösterelim. Böylece afin düzlemi A^2 olur. ε , $n \geq 3$ olmak üzere sonlu boyutlu herhangi bir afin uzay olsun ve ε için bir afin çatı

$(\Omega_1, (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n))$ olsun. Bir polinom yüzeyi $F: A^2 \rightarrow \varepsilon$ bir fonksiyondur, öyle ki

her $u, v \in \mathbf{R}$ dır. Öyleyse,

$$F(0 + u\vec{i}_1, v\vec{i}_2) = \Omega_1 + F_1(u, v)\vec{e}_1 + \dots + F_n(u, v)\vec{e}_n \text{ olur.}$$

$$F(U, V) = f(\underbrace{u, u, \dots, u}_p, \underbrace{v, v, \dots, v}_q) = f(\underbrace{(u, v), \dots, (u, v)}_m) \quad \text{ve} \quad f: (A)^p \times (A)^q \rightarrow \varepsilon \text{ olacak}$$

şekilde bir yüzey olsun.

$$F_1(U, V) = U^2 + V^2 + UV + 2U + V - 1,$$

$$\text{Örneğin; } F_2(U, V) = U - V + 1,$$

$$F_3(U, V) = UV + U + V + 1.$$

olsun.

F nin $f(u_1, u_2, v_1, v_2)$ polar formunu bulmak için, ayrı ayrı U ya ve V ye göre kutuplama yapacağız:

U ya göre kutuplama \rightarrow

$$f_1^u(u_1, u_2, V) = u_1 u_2 + V^2 + \frac{u_1 + u_2}{2} V + u_1 + u_2 + V - 1,$$

$$f_2^u(u_1, u_2, V) = \frac{u_1 + u_2}{2} - V + 1,$$

$$f_3^u(u_1, u_2, V) = \frac{u_1 + u_2}{2} V + \frac{u_1 + u_2}{2} + V + 1$$

V ye göre kutuplama \rightarrow

$$f_1(u_1, u_2, v_1, v_2) = u_1 u_2 + v_1 v_2 + \frac{(u_1 + u_2)(v_1 + v_2)}{4} + u_1 + u_2 + \frac{v_1 + v_2}{2} - 1,$$

$$f_2(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{v_1 + v_2}{2} + 1,$$

$$f_3(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{(u_1 + u_2)(v_1 + v_2)}{4} + \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2} - 1$$

dir [7].

Şimdi her $\bar{u} \in A$ noktasını $(\bar{0}, \bar{1})$ afin bazı ve bir barisentrik kombinasyon ile $\bar{u} = u = (1-u)\bar{0} + u\bar{1}$ şeklinde yazabiliriz.

$$f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2) = f_i((1-u_1)\bar{0} + u_1\bar{1}, (1-u_2)\bar{0} + u_2\bar{1}, (1-v_1)\bar{0} + v_1\bar{1}, (1-v_2)\bar{0} + v_2\bar{1})$$

çoklu afin ve simetriyi \bar{u}_1, \bar{u}_2 ve \bar{v}_1, \bar{v}_2 de kullanarak eğrilerde olduğu gibi, $f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ bir barisentrik kombinasyon ile $b_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 2$ dokuz kontrol noktası elde edilir.

O halde 27 kutup değeri $f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ kutup argümanlarının kümesini $\{\bar{0}, \bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{1}\}, \{\bar{1}, \bar{1}\}$ kümeleri değerleri ile bulabiliriz. Benzer şekilde $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ için de yapılır.

$f_i(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$ yi $\mathbf{b}_{u_1+u_2, v_1+v_2}^i$ şeklinde gösterirsek,

$\mathbf{b}_{u_1+u_2, v_1+v_2}$ kontrol noktasının koordinatları; $(\mathbf{b}_{u_1+u_2, v_1+v_2}^1, \mathbf{b}_{u_1+u_2, v_1+v_2}^2, \mathbf{b}_{u_1+u_2, v_1+v_2}^3)$ olur.

$i = u_1 + u_2, j = v_1 + v_2$ alarak;

Tablo 7.1: Yüzeyin kontrol noktaları.

$b_{i,j}^1$	\bar{v}_1, \bar{v}_2	$\bar{0}, \bar{0}$	$\bar{0}, \bar{1}$	$\bar{1}, \bar{1}$
\bar{u}_1, \bar{u}_2				
$\bar{0}, \bar{0}$		-1	-1/2	1
$\bar{0}, \bar{1}$		0	3/4	5/2
$\bar{1}, \bar{1}$		2	3	5

$b_{i,j}^1$	\bar{v}_1, \bar{v}_2	$\bar{0}, \bar{0}$	$\bar{0}, \bar{1}$	$\bar{1}, \bar{1}$
\bar{u}_1, \bar{u}_2				
$\bar{0}, \bar{0}$		1	1/2	0
$\bar{0}, \bar{1}$		3/2	1	1/2
$\bar{1}, \bar{1}$		2	3/2	1

$b_{i,j}^1$	\bar{v}_1, \bar{v}_2	$\bar{0}, \bar{0}$	$\bar{0}, \bar{1}$	$\bar{1}, \bar{1}$
\bar{u}_1, \bar{u}_2				
$\bar{0}, \bar{0}$		1	3/2	2
$\bar{0}, \bar{1}$		3/2	9/4	3
$\bar{1}, \bar{1}$		2	3	4

ve dokuz kontrol noktası $b_{i,j}$ şu koordinatlara sahiptir:

$b_{i,j}^1$	j	0	1	2
i				
0		(-1,1,1)	(-1/2,1/2,3/2)	(1,0,2)
1		(0,3/2,3/2)	(3/4,1,9/4)	(5/2,1/2,3)
2		(2,2,2)	(3,3/2,3)	(5,1,4)

Dikkat edilirse, yüzey $f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), f(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), f(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$ ve $f(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ kutup değerlerine uygun $b_{0,0}, b_{2,0}, b_{0,2}$ ve $b_{2,2}$ kontrol noktalarını içerir ancak diğer beş nokta yüzey üzerinde değildir [7].

Örnek 7.1:

$$F_1(U, V) = U - \frac{U^3}{3} + UV^2, F_2(U, V) = V - \frac{V^3}{3} + U^2V, F_3(U, V) = U^2 - V^2$$

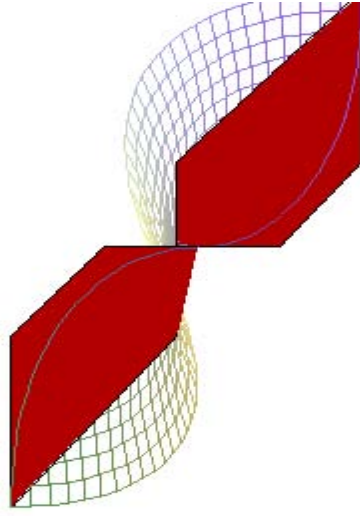
$$\Rightarrow f_1((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3} - \frac{u_1 u_2 u_3}{3} + \frac{u_1 v_2 v_3 + u_2 v_1 v_3 + u_3 v_1 v_2}{3},$$

$$\Rightarrow f_2((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} - \frac{v_1 v_2 v_3}{3} + \frac{v_1 u_2 u_3 + v_2 u_1 u_3 + v_3 u_1 u_2}{3},$$

$$\Rightarrow f_3((u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3)) = \frac{u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2}{3} - \frac{v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_3 v_2}{3}$$

olur. $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ ve (u_3, v_3) (1,0), (0,1) ve (0,0) arasında değiştiğinde, 10 kontrol noktası elde ederiz. Bu noktalar şu formda gösterilir;

		$f(r,r,r)$	
		$(2/3,0,1)$	
		$f(r,r,t)$	$f(r,r,s)$
		$(2/3,0,1/3)$	$(2/3,2/3,1/3)$
	$f(r,t,t)$	$f(r,s,t)$	$f(r,s,s)$
	$(1/3,0,0)$	$(1/3,1/3,0)$	$(2/3,2/3,-1/3)$
$f(t,t,t)$	$f(s,t,t)$	$f(s,s,t)$	$f(s,s,s)$
$(0,0,0)$	$(0,1/3,0)$	$(0,2/3,-1/3)$	$(0,2/3,-1)$



Şekil 7.1: Örnek 7.1 deki yüzey ve kontrol ağı.

7.1. PARAMETRİK YÜZEYLERE PARAMETRE EĞRİLERİ İLE YAKLAŞIM

Bir $\mathbf{S}(u,v)$ yüzeyinin parametre eğrileri;

$u = u_0$ sabit olmak üzere $\mathbf{S}(u_0, v) = \boldsymbol{\alpha}(v)$ ve $v = v_0$ sabit olmak üzere $\mathbf{S}(u, v_0) = \boldsymbol{\beta}(u)$ eğrileridir. Yüze, yüzey üzerinde kesişen parametre eğrileri ile yaklaşırsak, yüzey üzerinde bulduğumuz kontrol noktalarındaki teğet düzlemlere ulaşılmış olacağız.

Örneğin, bir $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ şeklinde parametrik denklemlerle yüzeyi ele alalım.

bu yüzeyin parametre eğrileri sırasıyla;

$$\varphi(u, 0) = (u, 0, u^2) = \alpha(u) \text{ ve } \varphi(0, v) = (0, v, v^2) = \beta(v)$$

gibi kuadratik eğrileri olur.

Bu eğrilere kutupsallaştırma işlemi uygularsak oluşacak kontrol noktaları:

$$\alpha \text{ eğrisi için; } \mathbf{P}_0 = (0,0,0), \mathbf{P}_1 = (1/2,0,0) \text{ ve } \mathbf{P}_2 = (1,0,1)$$

ve

$$\beta \text{ eğrisi için; } \mathbf{R}_0 = (0,0,0), \mathbf{R}_1 = (0,1/2,0) \text{ ve } \mathbf{R}_2 = (0,1,1) \text{ dir.}$$

Görüldüğü üzere \mathbf{P}_0 ve \mathbf{R}_0 noktaları aynıdır, yani eğriler bu noktada kesişirler. Şimdi bu parametre eğrilerinin kesiştiği noktadaki yüzeyin normalini bulmak istersek;

Öncelikle yüzey üzerindeki eğrilerin kesiştiği nokta $\mathbf{N} = \varphi(0,0) = (0,0,0)$ dir.

Yüzeyin parametrik denklemlerinden, sırasıyla, u ve v ye göre kısmi türev alınırsa;

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_u(u, v) = (1, 0, 2u) \\ \varphi_v(u, v) = (0, 1, 2v) \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1) = \lambda \vec{n}(u, v)$$

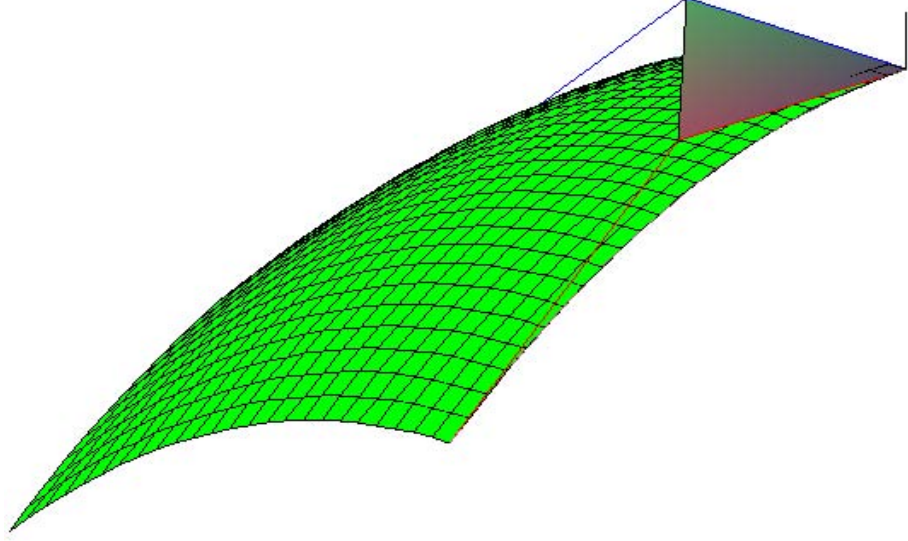
$$\Rightarrow \vec{n}_N = (0,0,1) \text{ bulunur.}$$

Şimdi de kontrol noktaları ile yüzeyin bu noktadaki normalini hesap edelim;

$\mathbf{R}_0 = \mathbf{P}_0$ olduğundan, $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$ vektörü ile $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ vektörünün vektörel çarpımı;

$$\overrightarrow{\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1} \wedge \overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1/4) \text{ vektörünü verir ve bunun } \mathbf{N} = (0,0,0)$$

noktasında bulduğumuz normal vektörü ile çakıştığını görebiliriz. Böylece yüzey üzerindeki normal vektörünü kontrol noktalarının yardımı ile bularak bir kez daha diferansiyel operatöründen kurtulmuş oluyoruz. Ayrıca bu işlemi yüzeyin tanımlı olduğu aralıkların tümünde çok küçük aralıklarla tanımlarsak bu yüzeyin üçgenleştirilmesi olur ve bilgisayar grafiklerine aktarımında büyük kolaylık sağlar. Bununla birlikte bulunan bu çokyüzlü yüzeye homeomorftur.



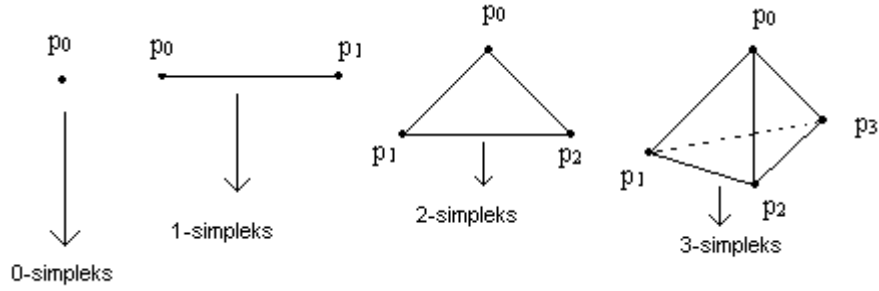
Şekil 7.2: Örnekteki yüzey yaması, teğet düzlemi ve normali.

8. SİMPLİKSİLER

Simpleksler, bir çokyüzlünün yapı bloklarıdır. Bir 0-simpleks $\langle \mathbf{p}_0 \rangle$ bir nokta ya da bir köşedir. Bir 1-simpleks $\langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \rangle$ bir doğru ya da bir kenardır. Bir 2-simpleks $\langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle$ içi de dahil olmak üzere bir üçgensel yapıdır. Bir 3-simpleks $\langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \rangle$ bir katı dörtyüzlüdür. Dikkat edilirse, bir r -simpleks bir r -boyutlu nesneyi gösterir. \mathbf{p}_i köşeleri lineer bağımsız olmak zorundadır, yani hiçbir $(r-1)$ - boyutlu hiperdüzlem bütün $(r+1)$ noktayı içermez. $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_r$ noktaları \mathbb{R}^m de geometrik olarak bağımsız olsunlar ($m \geq r$). Bir r -simpleks şu şekilde yazılabilir;

$$\sigma_r = \langle \mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_r \rangle = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} = \sum_{i=0}^r c_i \mathbf{p}_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^r c_i = 1 \right\}$$

(c_0, \dots, c_r) lere barisentrik koordinatlar denir [3], [13].



Şekil 8.1: Simpleksler.

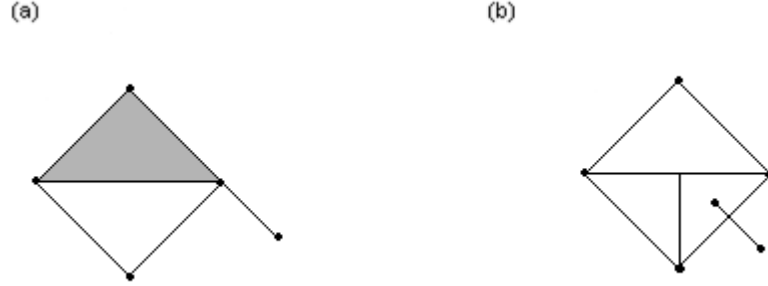
8.1. SİMLİSİYAL KOMPLEKSLER VE ÇOKYÜZLÜ

K , \mathbb{R}^m deki simplekslerin sonlu sayıdaki bir kümesi olsun. Eğer bu simpleksler birbirine ‘güzelce’ tutturulduysa, K bir simplisiyal komplekstir. Buradaki ‘güzelce’ nin anlamı:

- (i) K daki bir simpleksin keyfi bir yüzü K ya aittir, yani, eğer $\sigma \in K$ ve $\sigma' \leq \sigma$ ise $\sigma' \in K$ dir.
- (ii) Eğer σ ve σ' K nin iki simpleksi ise, $\sigma \cap \sigma'$ kesişimi ya boş kümedir yada σ ve σ' nün bir yüzüdür.

$$\text{Yani, } \sigma, \sigma' \in K \Rightarrow \sigma \cap \sigma' = \emptyset \text{ veya } \begin{cases} \sigma \cap \sigma' \leq \sigma \\ \text{ve} \\ \sigma \cap \sigma' \leq \sigma' \end{cases} \text{ dir.}$$

Örneğin, aşağıdaki (a) şekli bir simplisiyal komplekstir, ancak (b) şekli değildir [3].



Şekil 8.2: (a) Bir simplisiyal kompleks. (b) Koşullardan (ii) sağlanmadığından simplisiyal kompleks değildir.

Örnek 8.1.1: σ_r bir r -simpleks ve $K \equiv \{\sigma' \mid \sigma' \leq \sigma_r\}$ σ_r nin yüzlerinin kümesi olsun. K bir r -boyutlu simplisiyal komplekstir.

Örneğin, $\sigma_3 = \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \rangle$ olsun. O halde,

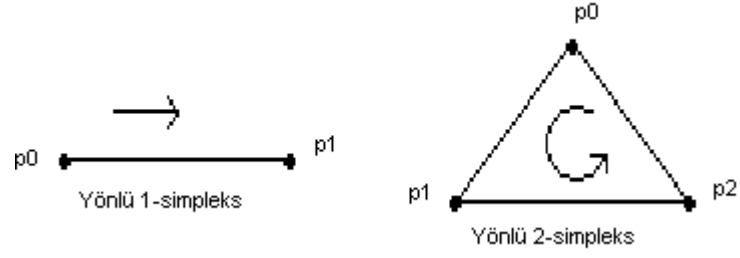
$$K = \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_2 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle, \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \rangle, \langle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \rangle\}.$$

dir [3], [13].

8.2. YÖNLÜ SİMPLEKSLER

$r \geq 1$ için r -simplekslerin yönünü tayin edebiliriz. Bir yönsüz simpleksi $\langle \dots \rangle$ ile gösterirken, yönlü simpleksleri (\dots) ile göstereceğiz.

Bir yönlü 1-simpleks $\sigma_1 = (\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1)$: $\mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{p}_1$ yönlü bir doğru parçasıdır. O halde: $(\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1) = -(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_0)$ dir. Yani $(\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1) + (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_0) = 0$ dir [3], [13].



Şekil 8.3: Yönlü simpleksler.

Benzer olarak bir yönlü 2-simpleks bir üçgensel bölgedir.

$$(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_2\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1) = (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{p}_0) = -(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1) = -(\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_0) = -(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2) \text{ dir.}$$

Şimdi de σ_r r-simpleksinin $\partial_r\sigma_r$ ile sınırını tanımlayalım. ∂_r , σ_r de işleyen ve onun sınırını belirten bir operatördür. Bir 0-simpleks sınırsızdır ve $\partial_0\mathbf{p}_0 = 0$ dir. Bir 1-simpleks için; $\partial_1(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ olur. Bir 2-simpleks için; $\partial_2(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) - (\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2) + (\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1)$ olur [3], [13].

O halde genel manada ∂_r operatörünü yazmak istersek;

$$\partial_r\sigma_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\cdots\hat{\mathbf{p}}_i\cdots\mathbf{p}_r) = [1 \quad -1 \quad \dots \quad (-1)^r] \begin{bmatrix} (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_r) \\ (\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_r) \\ \vdots \\ (\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\cdots\mathbf{p}_{r-1}) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

dir.

9. BİR EĞRİNİN TEĞETLERİNE YAKLAŞIM

9.1. TANIM(KAPALI KONTROL ÇOKGENİ):

F, 2. dereceden bir eğri ise, F nin 3 kontrol noktası vardır. Buna göre, bu noktaların oluşturduğu kapalı konveks çokgen, $(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)$ olur. Bu çokgen bir yönlü simpleks belirtir.

Bu yönlü simplekse sınır operatörünü uygulamak sureti ile bu eğrinin \mathbf{B}_0 ve \mathbf{B}_1 deki teğet vektörlerini elde ederiz. Yani Blossom işleminin tersi bir uygulama olur.

Bir 2. derece α eğrimiz olsun. Bu eğrinin çiçeklemesi $(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)$ noktalarından oluşsun. O halde sınır operatörünü uygulayarak:

$$\partial_2(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) = \underbrace{(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)}_{\alpha'(\mathbf{B}_2)} - (\mathbf{B}_0\mathbf{B}_2) + \underbrace{(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1)}_{\alpha'(\mathbf{B}_0)} \quad (9.1)$$

elde ederiz. Yani sınır operatörünün uygulanması ile elde edilen ilk ve son yönlü simpleksler sınır operatörünün uygulandığı yönlü simpleksin içinde bulunan eğrinin ilk ve son noktasındaki teğetleridir.

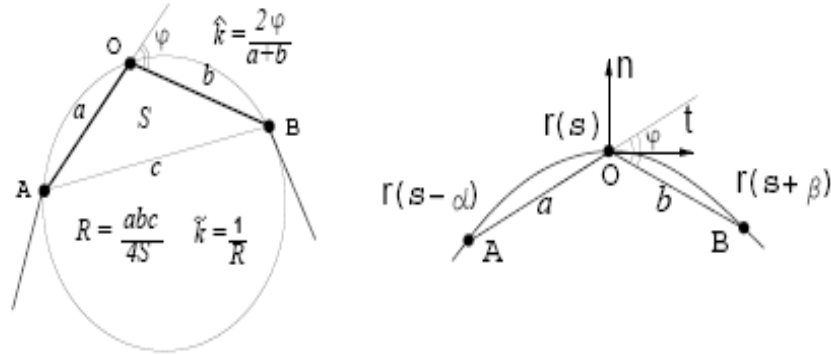
10. ÇOKGENSEL ÇİZGİNİN EĞRİLİĞİ

10.1. TANIM:

G , E^2 de yönlü bir çokgenel çizgi olsun ve \mathbf{p} de G nin iç köşelerinden biri olsun. Uzunlukları sırasıyla N_1 ve N_2 ve \mathbf{p} noktasına bitişik olan k_1 ve k_2 kenarlarının bu noktadaki aralarındaki açı $\angle(\mathbf{p}) \in [0, \pi)$ olsun. G nin \mathbf{p} noktasındaki $c(\mathbf{p})$ eğriliği şu şekilde belirlidir [3];

$$c(\mathbf{p}) = \frac{2(\pi - \angle(\mathbf{p}))}{N_1 + N_2} \quad (10.1)$$

Dikkat edilirse burada açı ne kadar büyürse o kadar eğrilik azalır, aynen eğrilerde olduğu gibi. Bir eğriye çokgenler yardımıyla yaklaşırsak, bu çokgenlerin eğriliği ne kadar az ise eğrinin eğriliği de o kadar azdır. Bunun yanı sıra, $\angle(\mathbf{p}) = \pi$ olduğunda bu iki çizgi doğrusal olarak \mathbf{p} noktasında birleşirler [3].



Şekil 10.1: Eğriliğe çember ve açı yaklaşımı.

10.2. KUADRATİK BÉZIER EĞRİLERİNİN ÇOKGEN EĞRİLİĞİ

Bir kuadratik Bézier eğrisini \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 gibi üç nokta ve Bernstein polinomlarının yardımıyla şu şekilde tanımlamıştık;

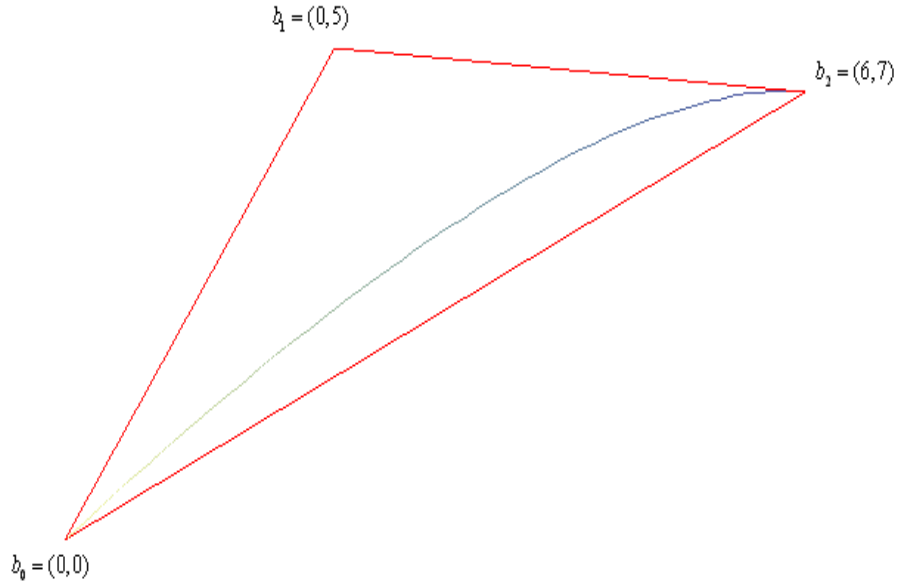
$$\alpha(t) = (1-t)^2 \mathbf{p}_0 + (1-t)t \mathbf{p}_1 + t^2 \mathbf{p}_2.$$

Örneğin, $\mathbf{p}_0 = (0,0,0)$, $\mathbf{p}_1 = (0,5,0)$ ve $\mathbf{p}_2 = (6,7,0)$ olsun. Şu halde denklem:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}(t) &= (1-t)^2(0,0,0) + (1-t)t(0,5,0) + t^2(6,7,0) \\ &= (6t^2, 2t^2 + 5t, 0)\end{aligned}$$

olur.

Buradaki amacımız eğri dışındaki kontrol noktasının değişimi ile eğrinin şeklinin dolayısıyla eğriliğinin değişimini, Bézier çokgeninin eğriliği ile değişimini incelemek. Şimdi burada $(\mathbf{p}_0 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)$ yönlü simpleksi ile \mathbf{p}_1 deki çokgen eğriliğini hesaplarsak, yaklaşık olarak $c(\mathbf{p}_1) = 0.220$ dir.



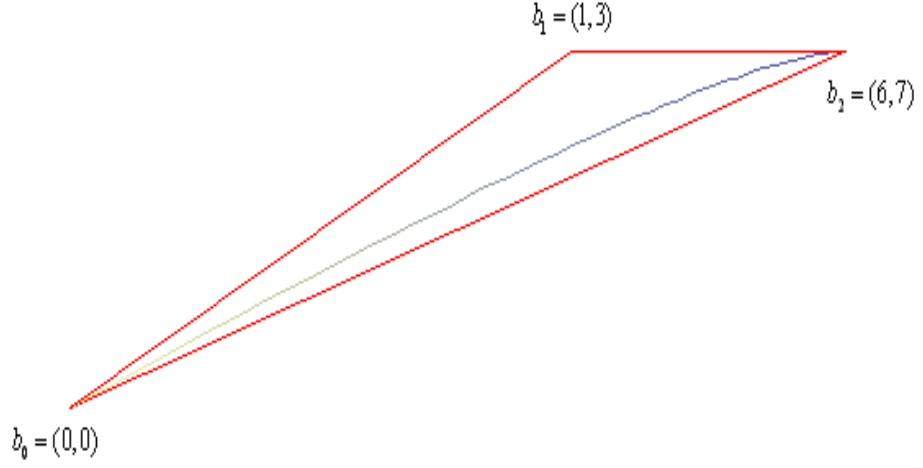
Şekil 10.2: Örnekteki Bézier eğrisi ve kontrol çokgeni.

Eğrinin üzerinde olmayan kontrol noktasını değiştirirsek;

$$\mathbf{p}_0 = (0,0,0), \mathbf{p}_1 = (1,3,0) \text{ ve } \mathbf{p}_2 = (6,7,0).$$

O halde eğrinin denklemi;

$$\boldsymbol{\beta}(t) = (5t^2 + t, 4t^2 + 3t, 0) \text{ olur. } \mathbf{p}_1 \text{ deki çokgen eğriliği ise yaklaşık olarak } c(\mathbf{p}_1) = 0.120 \text{ dır.}$$



Şekil 10.3: b_1 kontrol noktasının değişiminden sonraki eğrinin şekli.

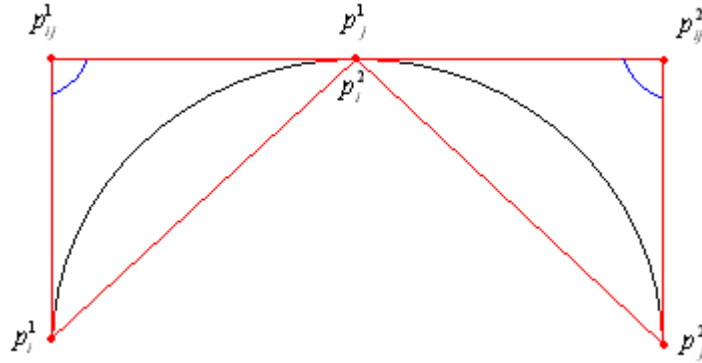
Şu halde çokgen eğriliği, eğrinin eğriliği hakkında bilgi verir. Şekillerden de görüleceği üzere eğrinin eğriliği arttıkça çokgen eğriliği de artış gösterir. Bunu zaten formüldeki açının değişimi ile görmek mümkündür.

10.2.1. Sonuç:

Sabit eğrilikli düzlemsel $\alpha(s)$ eğrisi üzerinde sabit aralıklarda alınan $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{ij}, \mathbf{p}_j)$ kontrol noktalarının oluşturduğu Bézier çokgenlerinin eğri üzerinde olmayan noktadaki $(c(\mathbf{p}_{ij}))$ geometrik eğriliği de sabit olur.

İspat: $\frac{d\theta}{ds} = k_1(s) = \text{sabit}$ ise k_1 eğrilik fonksiyonu s parametresinden bağımsızdır.

$\frac{d\theta}{ds} = k_1 \Rightarrow d\theta = k_1 \cdot ds$ olduğundan $d\theta$ da sabit olur. Ayrıca s parametresini de sabit seçtiğimizden N_1 ve N_2 uzunlukları da sabit olur.



Şekil 10.4: Sabit eğrilikli eğri ve kontrol noktaları ile birlikte kontrol çokgeni.

10.2.2. Sonuç:

Bir düzlemsel $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliğinin uç noktadaki teğetlerinin kesim noktasındaki çizgisel eğriliğe eşit olması için gerek ve yeter şart $ds = \frac{a+b}{2}$ olmasıdır. Burada a ve b sırasıyla eğrinin ardışık iki noktasındaki ardışık türevlerinin kesişimlerinin bu noktalara olan uzaklığıdır.

İspat:

$$\frac{d\theta}{ds} = k_1(s) = \frac{2d\theta}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = ds \text{ olur. Bu da istenendir.}$$

11. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada geometrik tasarım için gerekli olan bazı tanımlamalarla birlikte eğri ve yüzey tasarımları hakkında geniş bilgi verildi. Ayrıca bu çalışmada Bézier ve B-spline eğri ve yüzeylerinin geniş bir incelemesine yer verildi. Bunun yanı sıra diferansiyel geometride kullanılan teğet vektör, eğrilik vektörleri gibi tanımlamaların türev operatöründen kurtarılarak bilgisayara aktarımının kolaylaştırılması için çiçekleme yöntemi kullanıldı. Ayrıca topolojideki simpleks tanımı ile teğet yaklaşımları oluşturuldu.

Bézier çokgenleri üzerinde çokgen eğriliği tanımlandı ve bu sayede yeni bir sınıflandırma ile eğriler üzerinde yeni bir yaklaşım oluşturuldu.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. ADAMS, J.A. and ROGERS, D.F., 1990, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw Hill, USA.
2. ANAND, V.B., 1992, *Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers*, John Wiley & Sons, Inc.,
3. BOISSONNAT, J.D. and TEILLAUD, M., 2006, *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*, Springer, New York, 3-540-33258-8.
4. CHEN, X., *An Introduction to Blossoming of Bsplines*, School of Computing, University of Utah, Salt Lake City, UT 84112.
5. EGERSTEDT, M.B. and MARTIN, C.F., October 2004, *A Note on the Connection Between Bezier Curves and Linear Optimal Control*, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 49, NO. 10
6. FARIN, G., 1990, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design, A Practical Guide*, Academic Press Inc., USA, 0-12-249054-1.
7. GALLIER, J., 1999, *Curves and Surfaces in Geometric Modeling, Theory and Algorithms*, Morgan Kauffman, USA
8. MARSH, D., 2005, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer, USA, 1-85233-801-6.
9. SALOMON, D., 2006, *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, USA, 0-387-28452-4
10. SAXENA, A. and SAHAY, B., 2005, *Computer Aided Engineering Design*, Springer-Anamaya Publisher, India, 1-4020-2555-6.
11. SEDERBERG, T.W., 2007, *Computer Aided Geometric Design*.
12. TANTAY, B., 1998, *Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım ve Hareket Geometrisi*, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü.
13. WARD, T., 2001, *Topology Lecture Notes*, UEA.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında İzmir’ de doğdu. İlkokulu, İzmir Kuyumcu Hacı Abdullah Altınçubuk İlkokulunda okudu. Daha sonra İzmir Piri Reis ilköğretim Okulunda ilköğretimimi tamamladı. Lise eğitimini de İzmir Karşıyaka Havva Özişbakan Lisesi’ nde tamamladıktan sonra 2001 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’ ne girdi. Bir sene hazırlık(ingilizce) eğitimi aldı ve 2006 yılında Teorik Ağırlıklı Matematik’ den “iyi” dereceyle mezun oldu. 2006 – 2007 Güz ve Bahar dönemlerinde Geometri anabilim dalında özel öğrenci statüsünde, 2007 den itibaren ise resmi olarak yüksek lisans programına kayıt oldu. 2009 Ocak da İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim dalında araştırma görevliliğine atandı. Halen aynı göreve devam etmektedir.