İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# BİRLİKTE KOMPAKT KÜMELER VE ERGODİK TEORİYE UYGULAMALARI

**Dilek DEMİRKUŞ**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Birinci Danışman**
**Prof.Dr.Bedriye M. ZEREN**

**İkinci Danışman**
**Yrd.Doç.Dr.R.Tunç MISIRLIOĞLU**

**Haziran, 2010**

**İSTANBUL**

# ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında beni destekleyen ve tez çalışmama katkıları olan değerli danışman hocam Yrd.Doç.Dr.R.Tunç MISIRLIOĞLU'na en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca değerli hocam Prof.Dr.Bedriye M. ZEREN'e çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans öğrenimimi sürdürebilmem için bana maddi destek sunan Prof.Dr.Asuman ILGAZ ile ülkemizin başarılı öğrencilerine burs veren en büyük kurumlarından biri olan ve beni Yüksek Lisans Onur Ödülü ile ödüllendiren TÜRK EĞİTİM VAKFI'na en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında maddi ve manevi desteğini hiç esirgemeyen çok değerli eşim Tuncer DEMİRKUŞ'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

**Haziran, 2010** **Dilek DEMİRKUŞ**

# İÇİNDEKİLER

## SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbf{BoyX}$ | : X vektör uzayının boyutu |
| $\mathbf{B(X,Y)}$ | : X den Y e tanımlı, sınırlı ve doğrusal operatörlerin kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}'$ | : Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbf{c_o}$ | : Sıfıra yakınsayan tüm dizilerin kümesi |
| $\mathbf{co(X)}$ | : X kümesinin konveks kabuğu |
| $\mathbf{ÇekT}$ | : T operatörünün çekirdeği |
| $\mathbf{f(T)}$ | : Operatör fonksiyonu |
| $\mathbf{f(T_nx) \rightarrow f(Tx)}$ | : Zayıf yakınsaklık |
| $\mathfrak{F}(\mathbf{T})$ | : $\sigma$(T) nin bir komşuluğunda analitik olan fonksiyonların kümesi |
| $\mathbf{K(X)}$ | : X uzayında tanımlı kompakt operatörlerin kümesi |
| $\mathcal{K}$ | : Birlikte kompakt küme |
| $\boldsymbol{\ell_2}$ | : $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$ yakınsak olmak üzere tüm $\{x_n\}$ dizilerinin kümesi |
| $\mathbf{maxA}$ | : A kümesinin en büyük elemanı, maksimumu |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbf{P_{\sigma}(T)}$ | : T operatörünün spektral izdüşümü |
| $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{T})$ | : T operatörünün spektral yarıçapı |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $\mathbf{R(T)}$ | : T operatörünün değer kümesi |
| $\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{T})$ | : T operatörünün rezolvent fonksiyonu |
| $\mathbf{Rez(T)}$ | : T operatörünün rezolvent kümesi |
| $\widetilde{\mathbf{Rez}}(\mathbf{T})$ | : T operatörünün genişletilmiş rezolvent kümesi |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | : T operatörünün spektral kümesi |
| $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{T})$ | : T operatörünün spektrum kümesi |
| $\mathbf{supA}$ | : A kümesinin en küçük üst sınırı, supremumu |
| $\mathbf{T^{-1}}$ | : T operatörünün tersi |
| $\mathbf{T\|_A}$ | : T nin A ya kısıtlanışı |
| $\mathbf{\\|T\\|}$ | : T operatörünün normu |
| $\mathbf{\{T_n\}}$ | : Bir operatör dizisi |
| $\mathbf{T_n \rightarrow T}$ | : Kuvvetli yakınsaklık |
| $\mathbf{\\|T_n - T\\| \rightarrow 0}$ | : Düzgün yakınsaklık |
| $\mathbf{U_X}$ | : X uzayının kapalı birim yuvarı |
| $\mathbf{X}$ | : Kompleks Banach uzayı |
| $\mathbf{X^*}$ | : Kompleks Banach uzayının dual uzayı |
| $\overline{\mathbf{X}}$ | : X kümesinin kapanışı |

# ÖZET


**BİRLİKTE KOMPAKT KÜMELER VE ERGODİK TEORİYE UYGULAMALARI**

Bu çalışmada, birlikte kompakt kümeler ve Ergodik teoriye uygulamaları incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmaya, iki yardımcı ve diğerleri esas olmak üzere dört kısımdan oluşan ikinci bölüm temel teşkil etmektedir.

İkinci bölümün ilk kısmında, $X$ Banach uzayı olmak üzere bütün sınırlı ve doğrusal operatörlerin kümesi olan $B(X)$ uzayında; düzgün, kuvvetli ve zayıf yakınsaklık kavramları ile bu kavramlar arasındaki ilişkiler açıklanmıştır. Ayrıca; kompakt operatör, kompakt küme, dizisel kompakt küme, göreceli kompakt küme ve tam sınırlı küme gibi temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci kısımda, bir operatörün spektrumu, rezolventi ve spektral yarıçapı gibi spektral teoriyle ilgili temel bilgiler ele alınmıştır. Ayrıca, operatör fonksiyonlarından bahsedilerek spektral küme ve spektral izdüşüm kavramları da açıklanmıştır. Bu kısmın sonunda, bir operatör ailesi için ortak spektral yarıçap kavramı ve özellikleri verilerek bazı teoremler elde edilmiştir.

Üçüncü kısımda, birlikte kompakt küme kavramı ve bu kümelerin özellikleri detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Ayrıca, bu kümelerin spektral yapılarından kısmen bahsedilmiştir.

Son kısımda, birlikte kompakt kümelerin Ergodik teoriye uygulamaları çalışılmıştır. Bu kısımda J.A.Higgins'in [9] doktora tezi temel alınmıştır. Higgins'in [9] bu çalışmasından yararlanılarak spektral yarıçapın sürekliliği ile ilgili bazı önermeler kanıtlanmıştır.

# SUMMARY

## COLLECTIVELY COMPACT SETS AND THEIR APPLICATIONS TO ERGODIC THEORY

In this study, collectively compact sets and their applications to Ergodic theory have been investigated. This work consists of five chapters. However, it is based only on Chapter 2 and it consists of four sections, two of which are supplemental and the others are fundamental.

In the first section of Chapter 2, the concepts of uniform, strong, and weak convergence in $B(X)$ space, which is the set of all linear and bounded operators on a Banach space $X$ , and relations between them have been explained. Moreover, fundamental concepts such as compact operator, compact set, sequencially compact set, relatively compact set and totally bounded set have been discussed.

In the second section, some fundamental concepts related to spectral theory such as the spectrum, the resolvent and the spectral radius of an operator have been taken up. Furthermore, by mentioning functional calculus, the terms of spectral set and spectral projection have been explained. At the end of this section, the consept of joint spectral radius for a family of operators and its properties have been first given, and then some theorems have been obtained.

In the third section, collectively compact sets and their properties have been exhaustively studied. Also, the spectral properties of these families have been partially mentioned.

In the last section, applications of collectively compact sets to Ergodic theory have been studied. This section is mainly based on PhD thesis of J.A. Higgins [9]. By using the results of that work of Higgins, some propositions related to continuity of the spectral radius for some operators have been proved.

# 1. GİRİŞ

Sonlu boyutlu uzaylar üzerinde tanımlanan operatörlerin özellikleri ve spektral yapıları doğrusal cebirin konusudur. Operatör teoride sonsuz boyutlu uzaylar üzerinde tanımlanan operatörlerin özellikleri ve spektral yapılarıyla ilgilenilmektedir. Sonsuz boyutlu uzaylarda, sonlu boyutlu uzayların aksine boyutun sonsuz olmasının getirdiği pek çok zorluk vardır. Buna karşın sonsuz boyutlu uzaylarda sonlu boyutlu uzayların özelliklerinin hemen hemen tamamının geçerli olduğu bir operatör ailesi vardır. Bu aile kompakt operatör ailesidir. Bu anlamda, kompakt operatörlerle çalışmanın yararı tartışılmazdır. Kompakt operatörler yanlızca sonlu boyutlu uzayda çalışıyormuş gibi davranması bakımından değil aynı zamanda uygulamalı alanda sık sık karşılaşılmasından dolayı da önemlidir. Bu operatörlerin özellikleri ve spektral yapıları tamamen bilinmektedir. Birlikte kompakt küme kavramının kompakt operatörlerle yakından bir ilişkisi vardır. Bu ilişki, birlikte kompakt kümenin kompakt operatörlerin bir genelleştirilmesi olarak düşünülebileceğidir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken birlikte kompakt kümenin kompakt operatörlerin sınırlı bir kümesi olduğu fakat kompakt operatörlerin sınırlı bir kümesinin birlikte kompakt olmadığıdır. Bununla ilgili detaylı açıklamalar ve aksi örnekler tezin genel kısımlarının üçüncü bölümünde yer almaktadır.

Spektral teoride operatörlerin spektral yapıları konu edilir. Bu tez çalışmasının genel kısımlarının ikinci bölümünde, ihtiyaç duyulduğu kadarıyla spektral teoriden söz edilmektedir. Doğrusal ve sınırlı bir operatörün spektrumu kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesidir, bu alt kümenin alt uzay olması gerekmez. Spektrumdan alt uzay elde edebilmek için spektral küme kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Bu kavramdan yararlanarak spektral izdüşüm operatörü elde edilmekte ve elde edilen spektral izdüşümün değer bölgesi spektral alt uzay olmaktadır. Dolayısıyla, spekral alt uzay kavramının spektrumdan alt uzay elde edilmesi bakımından önemi vardır. Bu anlamda, tezin spektral teori kısmında, **Teorem 2.2.37.** ve **Teorem 2.2.39.** elde edilmiştir. Bu teoremlerde bir spektral alt uzayın varlığı kanıtlanmış ve karakterizyonu yapılmıştır.

Ergodik teoride, $\{A_n\}$ dizisi $T$ operatörünün kuvvetlerinin aritmetik ortalamasını göstermek üzere, bu dizisinin yakınsaklığı ile ilgilenilir. $\{A_n\}$ dizisinin düzgün yakınsaması halinde kuvvetli yakınsayacağı kolaylıkla görülür. Çünkü bu durum herhangi bir dizi söz konusu olduğunda da geçerlidir. Ancak bunun karşıtının genel durumda değil bazı özel diziler için örneğin $\{A_n\}$ dizisi için sağlanabildiği Higgins [9] tarafından gösterilmiştir. İşte bununla ilgili olarak bu tez çalışmasının son bölümünde Higgins'in [9] doktora tezinin birlikte kompakt kümelerin Ergodik teoriye uygulamasıyla ilgili kısmı çalışılmıştır. Higgins [9] çalışmasında, $T$ kompakt hipotezi altında $\{A_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsaması halinde düzgün yakınsayacağını göstermiştir. Öte yandan, Radjavi ve Rosenthal [10] den düzgün yakınsayan bir kompakt operatör dizisi için spektral yarıçapın sürekli olduğu bilinmektedir. Radjavi ve Rosenthal [10] ile Higgins'in [9] çalışmalarından yararlanılarak Ergodik teoride sık sık kullanılan $\{A_n\}$ dizisi için spektral yarıçapın sürekliliği **Önerme 2.4.6.** ve **Önerme 2.4.8.** de kanıtlanmıştır.

# 2. GENEL KISIMLAR

Bu tez çalışması boyunca, $X$ ve $Y$ sonsuz boyutlu kompleks normlu uzaylar olmak üzere $B(X,Y)$ ile $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ operatör normuyla donatılmış, $X$ den $Y$ ye giden tüm doğrusal ve sınırlı operatörler uzayı ve $U_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ile $X$ deki kapalı birim yuvar gösterilmektedir. Özel olarak, $X = Y$ olması durumunda $B(X,Y)$ uzayı kısaca $B(X) := B(X,X)$ ile gösterilmektedir. Ayrıca çalışma boyunca gerekli kısımlarda $B(X)$ için $X$ in Banach uzayı olduğu varsayılmaktadır.

## 2.1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, Fonksiyonel Analiz ve Operatör Teori ile ilgili gerekli temel bilgilere yer verilmektedir. Bununla ilgili olarak, [1], [2], [3] ve [4] numaralı kaynaklar temel alınmıştır.

**Tanım 2.1.1. [1, Tanım 4.9.1]** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar ve $T_n \in B(X,Y)$ olsun.
**(1)** $\{T_n\}$ dizisinin $T$ operatörüne *düzgün yakınsaması* için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ için $\|T_n - T\| \to 0$ olmasıdır.
**(2)** $\{T_n\}$ dizisinin $T$ operatörüne *kuvvetli yakınsaması* için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve $n \to \infty$ için $\|T_n x - Tx\| \to 0$ olmasıdır.
**(3)** $\{T_n\}$ dizisinin $T$ operatörüne *zayıf yakınsaması* için gerek ve yeter koşul her $x \in X$, her $f \in X^*$ ve $n \to \infty$ için $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$ olmasıdır.

Tanım 2.1.1. deki yakınsamalar limit tanımı kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.
**(1)** $\|T_n - T\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_\varepsilon$ için $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ olmasıdır.
**(2)** $\|T_n x - Tx\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$ ve her $n \geq n_0$ için $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ olmasıdır.
**(3)** $|f(T_n x) - f(Tx)| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$, her $x \in X$, her

$f \in X^*$ ve her $n \geq n_0$ için $|f(T_n x) - f(Tx)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ olmasıdır.

Bu çalışma boyunca, düzgün, kuvvetli ve zayıf yakınsaklık kavramları notasyon olarak sırasıyla; $\|T_n - T\| \to 0$, $T_n \to T$ ve $f(T_n x) \to f(Tx)$ ile gösterilecektir. Ayrıca kuvvetli yakınsaklık tanımında özel olarak $n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olması halinde kısaca her $x \in X$ ve $n \to \infty$ için $T_n x \to Tx$ ile gösterilecektir.

**Uyarı 2.1.2.** Tanım 2.1.1. de (1) ile (2) karşılaştırıldığında düzgün yakınsaklığın kuvvetli olduğu görülür. Gerçekten her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\|\|x\|$$

eşitsizliği doğru olduğundan $\{T_n\}$ dizisi $T$ operatörüne düzgün yakınsarsa $\{T_n\}$ dizisi $T$ operatörüne kuvvetli yakınsar. Fakat bunun karşıtının doğru olması gerekmez. Örneğin, $\ell_2 = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ uzayında

$$y_i = \left\{ \begin{array}{ll} x_i\,, & i = 1, 2, ..., n \\ 0\,, & i > n+1 \end{array} \right\}$$

olmak üzere $T_n : \ell_2 \to \ell_2$ $\;T_n x = y$, $\;y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ biçiminde tanımlanan operatörler gözönüne alınsın. Yakınsak bir serinin kalan teriminin limiti sıfır olduğundan her $x \in \ell_2$ için $n \to \infty$ iken

$$\|T_n x - x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \to 0$$

bulunur. Yani $T_n \to I$ bulunur. Öte yandan, $\|x\| = 1$ ve $T_n x = 0$ olacak şekilde her $x \in \ell_2$ noktası için $\|(T_n - I)x\| = \|x\| = 1$ olduğundan,

$$\|T_n - I\| = \sup\{\|(T_n - I)x\| : \|x\| \leq 1\} \geq 1$$

elde edilir. O halde $\{T_n\}$ dizisi $I$ operatörüne düzgün yakınsamaz.

**Uyarı 2.1.3.** Tanım 2.1.1. de (2) ile (3) karşılaştırıldığında kuvvetli yakınsaklığın zayıf olduğu görülür. Gerçekten her $f \in X^*$, her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|f(T_n x) - f(Tx)| = |f(T_n x - Tx)| \leq \|f\|\|T_n x - Tx\|$$

eşitsizliği doğru olduğundan $\{T_n\}$ dizisi $T$ operatörüne kuvvetli yakınsarsa $\{T_n\}$ dizisi $T$ operatörüne zayıf yakınsar. Fakat bunun karşıtının doğru olması gerekmez. Örneğin, $T : \ell_2 \to \ell_2$ operatörü $Tx = (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ şeklinde tanımlansın. $(\ell_2)^* = \ell_2$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ kümesi $\ell_2$ uzayının standart tabanı olduğundan her $f \in (\ell_2)^*$ ve her $x \in \ell_2$ için $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i$ ve $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$ yazılabilir. Bu durumda,
$f(T^n x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i x_{i-n}$ bulunur. Elde edilen bu eşitlik kullanılarak, $n \to \infty$ için

$$|f(T^n x)| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=n+1}^{\infty} |f_i|^2 \right)^{1/2} \to 0$$

elde edilir. Yani $f(T^n x) \to 0$ bulunur. Öte yandan her $x \in \ell_2$ için,

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2$$

olduğundan $\|Tx\| = \|x\|$ elde edilir. Dolayısıyla her $x \in \ell_2$ için $\|T^n x\| = \|x\|$ elde edilir. Yani $T^n \nrightarrow 0$ bulunur.

Yukarıdaki tanımlar incelendiğinde düzgün yakınsaklığın kuvvetli yakınsaklığa, kuvvetli yakınsaklığın zayıf yakınsaklığa göre üstün olduğu görülür. Bu çalışmada daha çok düzgün yakınsaklık ve kuvvetli yakınsaklık kavramlarıyla ilgilenilecektir. Kuvvetli yakınsaklığın yetersizliği kompakt operatör aileleriyle çalışılarak giderilecektir.

**Teorem 2.1.4.** **[2, Teorem 1.3.]** **(Düzgün Sınırlılık İlkesi)** $X$ Banach uzayı ve $Y$ normlu uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{A} \subset B(X, Y)$ kümesinin noktasal sınırlı yani her $T \in \mathcal{A}$ ve her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq M_x$ olacak şekilde bir $M_x > 0$ sayısının var olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ kümesinin norm sınırlı yani her $T \in \mathcal{A}$ için $\|T\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısının var olmasıdır.

**Tanım 2.1.5.** **[3, Sayfa 4]** $X$ normlu bir uzay ve $Y \subset X$ olsun. $Y$ kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise $Y$ kümesine *kompakt* denir.
Kompakt kümelerin bilinen aşağıdaki özellikleri mevcuttur.

- Kompakt bir küme kapalı ve sınırlı bir kümedir.
- Kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri kompakttır.
- Kompakt bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de kompakttır.

**Tanım 2.1.6.** **[4, Tanım V.2.2.]** $X$ doğrusal bir vektör uzayı ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda,

$$co(Y) := \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : x_i \in Y,\ 0 \leq a_i \leq 1,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye $Y$ kümesinin *konveks kabuğu* denir.

**Yardımcı Teorem 2.1.7.** **[4, Yardımcı Teorem V.2.4.]** $X$ doğrusal bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda $\overline{co(Y)} = \overline{co}(Y)$ eşitliği sağlanır.

**Teorem 2.1.8.** **[4, Teorem V.2.6.]** **(Mazur Teoremi)** $X$ Banach uzayı ve $Y \subset X$ kompakt bir küme olsun. Bu durumda $\overline{co}(Y)$ konveks kabuğunun kapanışı kompakt bir kümedir.

**Tanım 2.1.9.** **[3, Sayfa 4]** $X$ normlu bir uzay ve $Y \subset X$ olsun. $Y$ kümesinin kapanışı kompakt bir küme ise $Y$ kümesine *göreceli kompakt* denir.

**Uyarı 2.1.10.** Tanım 2.1.5. ile Tanım 2.1.9. karşılaştırıldığında göreceli kompaktlık kavramının kompaktlık kavramına göre daha zayıf olduğu görülür. Çünkü kompakt bir küme kapalı olduğundan göreceli kompakttır. Ayrıca göreceli kompakt kümelerin alt kümeleri de göreceli kompakttır. Çünkü $X$ göreceli kompakt yani $\overline{X}$ kompakt bir küme olmak üzere $Y \subset X$ alt kümesi alındığında $\overline{Y} \subset \overline{X}$ kapsaması doğru olduğundan ve kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri de kompakt olduğundan $Y$ göreceli kompakt bulunur.

**Tanım 2.1.11.** **[3, Sayfa 4]** $X$ normlu bir uzay ve $Y \subset X$ olsun. $Y$ kümesinden alınan her dizi $X$ kümesinde yakınsak bir alt diziye sahip ise $Y$ kümesine *dizisel kompakt* denir.

**Tanım 2.1.12.** **[3, Sayfa 4]** $X$ normlu bir uzay ve $Y \subset X$ olsun. $Y$ kümesi her $\varepsilon > 0$ için sonlu bir $Y_\varepsilon \subset X$ $\varepsilon-$ağına sahipse yani her $x \in Y$ için $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in Y_\varepsilon$ varsa $Y$ kümesine *tam sınırlıdır* denir.

**Uyarı 2.1.13.** Sonlu boyutlu normlu uzaylarda tam sınırlılık kavramı ile sınırlılık kavramı eşdeğerdir. Buna karşın sonsuz boyutlu uzaylarda tam sınırlı kümeler sınırlı olup karşıtının doğru olması gerekmez. Örneğin,

$$Y = \{x = \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1\} \subset \ell_2$$

alt kümesi gözönüne alınsın. Bu durumda her $x, y \in Y$ için

$$\|x - y\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2} \leq 2$$

olduğundan $Y$ kümesi sınırlıdır. $Y$ kümesinde $e_1 = \{1, 0, 0, ...\}, e_2 = \{0, 1, 0, ...\}, ...$ noktaları seçilsin. $i \neq j$ olması durumunda $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ elde edilir. $\frac{1}{2}$ yarıçaplı açık yuvarlar gözönüne alınırsa $Y_{1/2}$ kümesinin $e_j, j \neq i$ noktalarının içinde yer almadığı $e_i$ merkezli, $\frac{1}{2}$ yarıçaplı kapalı yuvarında en az bir noktasının bulunması gerekir. Buna göre $Y_{1/2}$ sonlu bir küme olamaz. Yani $Y$ tam sınırlı değildir.

Banach uzaylarında dizisel kompaktlık, göreceli kompaktlık ve tam sınırlılık kavramları eşdeğerdir. [3, Sayfa 4]

Uyarı 2.1.2. de kuvvetli yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olmadığı gösterildi. Aşağıdaki Yardımcı Teorem, operatörlerin oluşturduğu kümenin tam sınırlı olması halinde kuvvetli yakınsaklığın düzgün olduğunu göstermektedir.

**Yardımcı Teorem 2.1.14. [3, Yardımcı Teorem 5.2.]** $T, T_n \in B(X)$ olsun. $\|T_n - T\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul $T_n \to T$ ve $\{T_n\}$ kümesinin $B(X)$ deki düzgün yakınsaklığa göre tam sınırlı olmasıdır.

**Önerme 2.1.15. [3, Önerme 1.7.]** $T, T_n \in B(X)$ ve $Y$ tam sınırlı bir küme olsun. $T_n \to T$ ise $\{T_n\}$ dizisi sınırlı ve her $x \in Y$ için $T_n x \to Tx$ dir.

**Sonuç 2.1.16.** $T, T_n \in B(X)$ ve $Y$ kompakt bir küme olsun. $T_n \to T$ ise her $x \in Y$ için $T_n x \to Tx$ dir.

**Sonuç 2.1.17.** $T, T_n \in B(X)$ ve $Y$ sınırlı bir küme olsun. Bu durumda $\|T_n - T\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $x \in Y$ için $T_n x \to Tx$ olmasıdır.

**Tanım 2.1.18. [3, Sayfa 4]** $T \in B(X)$ olmak üzere $T(U_X)$ kümesi göreceli kompakt ise $T$ operatörüne *kompakt operatör* denir. Kompakt operatörlerin kümesi $K(X)$ ile gösterilir.

Kompakt operatörlerin bilinen aşağıdaki özellikleri mevcuttur.

- Kompakt bir operatör sınırlı bir operatördür.
- Kompakt iki operatörün toplamı da kompakttır.
- Kompakt bir operatör ile sınırlı bir operatörün çarpımı kompakttır.
- Sonlu ranklı operatörler kompakttır.
- Kompakt bir operatör terslenebilir değildir.

**Önerme 2.1.19. [3, Önerme 4.4.]** $T \in B(X)$ ve $\|T^2\| < 1$ olsun. Bu durumda $(I - T)^{-1} \in B(X)$ ve $\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{\|I+T\|}{1-\|T^2\|}$ dir.

## 2.2. SPEKTRAL TEORİ

Bu bölümde, Spektral Teori ile ilgili gerekli bilgilere yer verilmektedir. Bununla ilgili olarak, [2], [5], [6] ve [7] numaralı kaynaklar temel alınmıştır.

**Tanım 2.2.1. [2, Tanım 6.1.]** $X \neq \{0\}$ kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T$ operatörü için $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists(\lambda - T)^{-1} \in B(X)\}$ ve $Rez(T) := \mathbb{C}\backslash\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\,(\lambda - T)^{-1} \in B(X)\}$ şeklinde tanımlanan kümelere sırasıyla $T$ operatörünün *spektrumu* ve *rezolvent kümesi* denir.

**Tanım 2.2.2. [2, Sayfa 238 ]** Yukarıdaki tanımın ışığında,

$R(.,T) : Rez(T) \longrightarrow B(X)$

$\lambda \longrightarrow R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$ operatör değerli fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyona *rezolvent fonksiyonu* denir.

Ayrıca $\lambda = \infty$ olması halinde $R(\lambda, T) := 0$ olarak tanımlanır ve bu durumda genişletilmiş rezolvent küme $\widetilde{Rez}(T)$ şeklinde gösterilir.

**Teorem 2.2.3. [2, Teorem 6.3.]** $T \in B(X)$ ve $|\lambda| > \|T\|$ ise $\lambda \in Rez(T)$ ve $B(X)$ deki düzgün yakınsaklığa göre $R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ dir. Ayrıca her $|\lambda| > \|T\|$ için $\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$ ve $\lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda, T) = 0$ dir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem Rezolvent fonksiyonun temel özelliklerini vermektedir.

**Yardımcı Teorem 2.2.4. [2, Yardımcı Teorem 6.4.]** Her $\lambda, \mu \in Rez(T)$ ve $T \in B(X)$ için aşağıdakiler gerçeklenir.
**(1)** $R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$
**(2)** $ST = TS$ koşulunu sağlayan bir $S \in B(X)$ varsa her $\lambda \in Rez(T)$ için,
$R(\lambda, T)S = SR(\lambda, T)$ dir. Özel olarak $R(\lambda, T)T = TR(\lambda, T)$ elde edilir.
**(3)** $R(\lambda, T) - R(\mu, T) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, T)R(\mu, T)$

**Tanım 2.2.5. [2, Tanım 6.5.]** Yardımcı Teorem 2.2.4.(3) de elde edilen eşitliğe $T$ nin *Rezolvent Özdeşliği* denir.

**Yardımcı Teorem 2.2.6. [2, Sonuç 6.7.]** Her $T \in B(X)$ için $Rez(T)$ kümesi kompleks düzlemin açık bir alt kümesidir ve rezolvent fonksiyonu $Rez(T)$ de analitiktir. Özel olarak, rezolvent fonksiyonu $Rez(T)$ de süreklidir.

**Teorem 2.2.7. [2, Teorem 6.10.]** $X \neq \{0\}$ kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $\sigma(T)$ kompleks düzlemin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir.

**Tanım 2.2.8. [2, Tanım 1.68.]** $X$ kompleks Banach uzayı, $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme ve $\lambda_0 \in \mathcal{O}$ olmak üzere $f : \mathcal{O} \to X$ fonksiyonu için,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left\| \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - x_0 \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek $x_0 \in X$ vektörü varsa $f$ fonksiyonu $\lambda_0$ noktasında *diferansiyellenebilirdir* denir. $f : \mathcal{O} \to X$ fonksiyonu bir $\lambda_0 \in \mathcal{O}$ noktasını içeren açık bir yuvarın her noktasında diferansiyellenebilir ise $f$ fonksiyonu $\lambda_0$ noktasında *analitiktir* denir.

$X \neq \{0\}$ kompleks Banach uzayında bir $T \in B(X)$ operatörü gözönüne alınsın ve kompleks düzlemde $T$ operatörünün $\sigma(T)$ spektrumunun bir komşuluğunda, yani $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin $\sigma(T)$ kümesini içine alan bir açık kümesinde analitik olan kompleks değerli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{F}(T)$ ile gösterilsin. Her $f \in \mathfrak{F}(T)$ için $f(T) \in B(X)$ olacak şekilde bir operatör karşı getirilebilir. Bu amaca uygun $f(T)$ operatörünü tanımlayabilmek için aşağıda yer alan bazı temel bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır.

**Tanım 2.2.9. [2, Tanım 6.26.]** $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ alt kümesi için $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{C}_n$ olacak şekilde sonlu sayıda, ikişer ikişer ayrık olan basit ve kapalı $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_m \subset \mathbb{C}$ eğrileri varsa $\mathcal{C}$ eğrisine *Jordan eğrisi* denir. $V$, $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesinin bir komşuluğu ve $\mathcal{C}$, $V$ de pozitif yönde yönlendirilmiş bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda $A \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ ve $\mathcal{C} = \partial W$ olacak şekilde bir $W \subset V$ açık alt kümesi varsa $\mathcal{C}$ eğrisi $A$ *yı çevreler* denir.

**Yardımcı Teorem 2.2.10. [2, Yardımcı Teorem 6.27.]** $A$ kompakt kümesinin $V$ deki her komşuluğunda $A$ yı çevreleyen bir Jordan eğrisi vardır.

Şimdi $T \in B(X)$ ve $f \in \mathfrak{F}(T)$ olsun. $\sigma(T)$ nin herhangi bir komşuluğu $V$ olmak üzere $f$, $V$ de analitik olsun. $\mathcal{C}$, $V$ de $\sigma(T)$ yi çevreleyen bir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.6. ya göre $R(\lambda, T)$ rezolvent fonksiyonu $\mathcal{C}$ üzerinde sürekli ve $f \in \mathfrak{F}(T)$ olduğundan $f(\lambda)R(\lambda, T)$ fonksiyonu $\mathcal{C}$ üzerinde süreklidir. Dolayısıyla $f(\lambda)R(\lambda, T)$ fonksiyonu $\mathcal{C}$ üzerinde Riemann integrallenebilirdir. Bu durumda $f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(\lambda)R(\lambda, T)d\lambda$ integrali tanımlanabilir. Cauchy İntegral Teoremi kullanıldığında tanımlanan integralin $\mathcal{C}$ eğrisine bağlı olmadığı görülür. Dolayısıyla $f(T)$ operatör fonksiyonu iyi tanımlıdır. Bu gözlemler sonucunda aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.2.11.** **[2, Tanım 6.28.]** $T \in B(X)$ ve sabit bir $f \in \mathfrak{F}(T)$ alınsın. $\mathcal{C}$, $f$ nin analitik olduğu bir bölgede $\sigma(T)$ yi çevreleyen bir Jordan eğrisi olmak üzere,

$$f : B(X) \to B(X)$$
$$T \to f(T) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} f(\lambda)R(\lambda,T)d\lambda$$

operatörü tanımlanabilir.

Tanım 2.2.11. de tanımlanan fonksiyona *operatör fonksiyonu* denir. Aşağıdaki teorem bu fonksiyonun temel özelliklerini vermektedir. Bu özellikler literatürde fonksiyonel hesap olarak bilinmektedir.

**Teorem 2.2.12.** **[2, Teorem 6.29.]** $\mathfrak{F}(T)$ den $B(X)$ e $f \to f(T)$ şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki işlemlere göre cebirsel bir homomorfizmadır. Yani her $f, g \in \mathfrak{F}(T)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T), \qquad (fg)(T) = f(T)g(T)$$

dir. Ayrıca aşağıdakiler geçerlidir.

**(1)** $ST = TS$ olacak şekilde bir $S \in B(X)$ operatörü varsa her $f \in \mathfrak{F}(T)$ için $Sf(T) = f(T)S$ dir. Özel olarak, her $f \in \mathfrak{F}(T)$ için $Tf(T) = f(T)T$ dir.

**(2)** V, $\sigma(T)$ nin bir komşuluğu olmak üzere her $\lambda \in V$ için $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ ise $f \in \mathfrak{F}(T)$ ve $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ dir.

**Teorem 2.2.13.** **[2, Teorem 6.31.]** **(Spektral Tasvir Teoremi)** $T \in B(X)$ ve her $f \in \mathfrak{F}(T)$ için $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ dir. Yani, $\sigma(f(T)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ dir.

**Tanım 2.2.14.** **[2, Tanım 6.11.]** $T \in B(X)$ olmak üzere $\sigma(T)$ spektrumunu içeren $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$ kapalı yuvarının negatif olmayan en küçük reel sayısına $T$ operatörünün *spektral yarıçapı* denir ve $\rho(T)$ ile gösterilir. O halde,

$$\rho(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

**Teorem 2.2.15.** **[2, Teorem 6.12.] (Gelfand)** $T \in B(X)$ olmak üzere,

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$$

dir. Dahası, $|\lambda| > \rho(T)$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ dir.

**Tanım 2.2.16.** **[5, Tanım 1.]** $X$ normlu uzay, $T \in B(X)$ ve $x \in X$ olsun. $\rho(T, x) := \limsup_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}}$ sayısına $T$ operatörünün $x$ noktasındaki *yerel spektral yarıçapı* denir.

$\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olmak üzere $\|\mathcal{M}\| := \sup\{\|T\| : T \in \mathcal{M}\}$ kümesi tanımlanabilir. Ayrıca $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset B(X)$ olmak üzere, $\mathcal{M}\mathcal{N} := \{TS : T \in \mathcal{M}, S \in \mathcal{N}\}$ kümesi tanımlanabilir. Bu tanımdan $\mathcal{M}$ kümesinin $n$.kuvveti $\mathcal{M}^n = \mathcal{M}^{n-1}\mathcal{M}$ şeklinde ifade edilebilir. Yerel olarakta $\mathcal{M}\mathcal{V} := \{Tx : T \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{V} \subset X\}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar verilirken [6, Sayfa 386 ] den yararlanılmıştır.

**Tanım 2.2.17.** **[6, Tanım 2.1.]** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olmak üzere $\rho(\mathcal{M}) := \inf\{\|\mathcal{M}^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$ sayısına $\mathcal{M}$ ailesinin *ortak spektral yarıçapı* denir.

**Tanım 2.2.18.** **[6, Sayfa 434]** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme ve $x \in X$ olmak üzere $\rho(\mathcal{M}, x) := \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{M}^n x\|^{\frac{1}{n}}$ sayısına $\mathcal{M}$ operatörünün $x$ noktasındaki *yerel ortak spektral yarıçapı* denir.

**Yardımcı Teorem 2.2.19.** **[6, Sayfa 386]** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir.

**(1)** $\rho(\mathcal{M}) \leq \|\mathcal{M}\|$

**(2)** Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\rho(\lambda\mathcal{M}) = |\lambda|\rho(\mathcal{M})$ dir.

**Yardımcı Teorem 2.2.20.** **[6, Yardımcı Teorem 2.13.]** $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset B(X)$ sınırlı alt kümeleri ve $\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\rho(\mathcal{M} + \mathcal{N}) \leq \rho(\mathcal{M}) + \rho(\mathcal{N})$ eşitsizliği gerçeklenir.

**Yardımcı Teorem 2.2.21.** **[6, Yardımcı Teorem 13.1.]** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olmak üzere her $k > 0$ için $\rho(\mathcal{M}^k, x) \leq [\rho(\mathcal{M}, x)]^k$ dir.

**Yardımcı Teorem 2.2.22.** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olmak üzere her $a, b \in \mathbb{C}$ için $\rho(a\mathcal{M}, bx) = |a|\rho(\mathcal{M}, x)$ dir.

**İspat.** Her $a, b \in \mathbb{C}$ için
$$\begin{aligned}\rho(a\mathcal{M}, bx) &= \limsup_{n\to\infty} \|(a\mathcal{M})^n bx\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|a^n\mathcal{M}^n bx\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|a^n b\mathcal{M}^n x\|^{\frac{1}{n}} = |a|\rho(\mathcal{M}, x) \text{ dir.}\end{aligned}$$

**Yardımcı Teorem 2.2.23.** **[7, Problem 6.1.9.]** $T \in B(X)$ olmak üzere her $x \in X$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ serisi düzgün yakınsak olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{C}$ varsa $\lambda \in Rez(T)$ dir.

**İspat.** Her $x \in X$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ serisi düzgün yakınsak olduğundan her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \frac{T^{n+1}x}{\lambda^{n+1}} = 0$ bulunur. $S : X \to X$ operatörü $Sx := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ şeklinde tanımlansın. X uzayı üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{\lambda^{k+1}}$ operatörleri gözönüne alındığında her $x \in X$ için $S_n x \to Sx$ elde edilir. Düzgün Sınırlılık İlkesi kullanılarak $S \in B(X)$ bulunur. Her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}[(\lambda I - T)S]x &= \lim_{n\to\infty}\left[(\lambda I - T)\sum_{k=0}^{n}\frac{T^k}{\lambda^{k+1}}x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{T^k x}{\lambda^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{T^{k+1}x}{\lambda^{k+1}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[x - \frac{T^{n+1}x}{\lambda^{n+1}}\right] = x\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(\lambda I - T)S = I$ bulunur. Benzer şekilde $S(\lambda I - T) = I$ elde edilir. O halde $\lambda I - T$ terslenebilirdir, dolayısıyla $\lambda \in Rez(T)$ dir.

**Yardımcı Teorem 2.2.24.** **[7, Problem 6.1.10]** $T \in B(X)$ olmak üzere $\rho(T) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(T, x) = 0$ olmasıdır.

**İspat.**

**Gereklik.** $\rho(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ olsun. Her $x \in X$ için,

$$\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|T^n\|\|x\|)^{\frac{1}{n}} = \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\|x\|^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliği bulunduğundan $\rho(T) = 0$ olduğu kullanılarak $\rho(T, x) = 0$ bulunur.

**Yeterlik.** Her $x \in X$ için $\rho(T, x) = 0$ olsun. Sıfırdan farklı sabit bir $\lambda \in \mathbb{C}$ alınsın. Bu durumda limitin tanımı kullanılarak her $n \geq n_0$ için $\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} < \frac{|\lambda|}{2}$ olacak şekilde bir $n_o \in \mathbb{N}$ bulunur. Bu eşitsizlik kullanılarak her $n \geq n_0$ için $\left\|\frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{2^n}$ elde edilir. Karşılaştırma testi kullanılarak $\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}\right\|$ serisi yakınsak bulunur. Banach uzayında mutlak yakınsak seriler yakınsak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ serisi yakınsak bulunur. Yardımcı Teorem 2.2.23. kullanılarak sıfırdan farklı her $\lambda$ için $\lambda \in Rez(T)$ bulunur. Öte yandan Teorem 2.2.7. den $\sigma(T) \neq \emptyset$ bulunur. O halde $Rez(T) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ yani $\sigma(T) = \{0\}$ bulunur. Buradan $\rho(T) = 0$ elde edilir.

**Yardımcı Teorem 2.2.25. [7, Problem 6.1.11]** $T \in B(X)$ ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\sigma(T^k) = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ dir ve buradan $\rho(T^k) = [\rho(T)]^k$ elde edilir. Ayrıca $\|T^n\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(T) < 1$ olmasıdır.

**İspat.** Keyfi $A, B, C \in B(X)$ operatörleri için $CA = BC = I$ ise $A = B = C^{-1}$ olduğu gösterilsin. Gerçekten, $A = IA = (BC)A = B(CA) = BI = B$ dir. $T \in B(X)$ ve sabit bir $k \in \mathbb{N}$ alınsın. $\lambda \in \sigma(T)$ olsun. $\lambda^k \notin \sigma(T^k)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $(\lambda^k - T^k)S = S(\lambda^k - T^k) = I$ koşulunu sağlayan bir $S \in B(X)$ vardır. Buradan $\lambda^k - T^k = (\lambda - T)(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}T + ... + \lambda T^{k-2} + T^{k-1})$ eşitliği kullanılarak

$$A := (\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}T + ... + \lambda T^{k-2} + T^{k-1})S$$

ve

$$B := S(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}T + ... + \lambda T^{k-2} + T^{k-1})$$

operatörleri tanımlandığından $(\lambda - T)A = B(\lambda - T) = I$ elde edilir ki bu $\lambda \in Rez(T)$ demektir. Bu ifade $\lambda \in \sigma(T)$ olması ile çelişir. Bu durumda $\{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\} \subseteq \sigma(T^k)$ dir. Şimdi $\sigma(T^k) \subseteq \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ olduğu gösterilsin. Keyfi bir $\mu \in \sigma(T^k)$ alınsın ve $p(z) := \mu - z^k = (-1)^k(r_1 - z)(r_2 - z)...(r_k - z)$ polinomu tanımlansın. Burada $r_1, r_2, ..., r_k$ lar p polinomunun katlı köklerinide içinde barındıran köklerdir. Özel olarak $i = 1, ..., k$ olmak üzere her $i$ için $\mu = r_i^k$ sağlanır. Teorem 2.2.12.(3) kullanılarak $\mu - T^k = (-1)^k(r_1 - T)(r_2 - T)...(r_k - T)$ elde edilir. Burada $i = 1, ..., k$ olmak üzere her $i$ için $r_i - T$ terslenebilir olsaydı $\mu - T^k$ ifadesi terslenebilirdi, yani $\mu \notin \sigma(T^k)$ olurdu. Bu mümkün değildir. O halde $i = 1, ..., k$ olmak üzere en az bir tane $i$ için $r_i - T$ terslenebilir değildir, yani $i = 1, ..., k$ olmak üzere en az bir tane $i$ için $r_i \in \sigma(T)$ dir. Dolayısıyla $\mu = r_i^k$ ve buradan $\mu \in \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ elde edilir. Yani $\sigma(T^k) \subseteq \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ bulunur. $\{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\} \subseteq \sigma(T^k)$ ve $\sigma(T^k) \subseteq \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ bulunduğundan $\sigma(T^k) = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(T)\}$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}\rho(T^k) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T^k)\} \\ &= \sup\{|\mu^k| : \mu \in \sigma(T)\} \\ &= [\sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T)\}]^k = [\rho(T)]^k\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de Yardımcı Teoremin son iddiası ispatlansın. $\|T^n\| \to 0$ olsun. Bu durumda $\|T^k\| < 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. O halde,

$$\rho(T) = \inf\{\|T^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} \leq \|T^k\|^{\frac{1}{k}} < 1$$

bulunur. Tersine $\rho(T) < 1$ olsun. Bu durumda $\rho(T) < \delta < 1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçilsin. Limitin tanımı kullanılarak her $n \geq n_o$ için $\|T^n\| < \delta^n$ olacak şekilde bir $n_o \in \mathbb{N}$ bulunur. Bu durumda $\|T^n\| \to 0$ elde edilir.

**Tanım 2.2.26. [2, Sayfa 348]** $X$ Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $V$, $X$ in $T(V) \subseteq V$ olacak şekilde bir alt uzayı ise $V$ alt uzayına $T$ *altında değişmez* ya da kısaca $T$-değişmez denir. $ST = TS$ koşulunu sağlayan her $S \in B(X)$ için $S(V) \subseteq V$ ise $V$ alt uzayına $T$ *altında hiperdeğişmez* ya da kısaca $T$-hiperdeğişmez denir.

**Tanım 2.2.27. [2, Sayfa 81]** $X$ Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $V$ ve $W$, $X$ uzayının $X = V \oplus W$ olacak şekilde, $T$-değişmez, kapalı alt uzayları ise $(V, W)$ ikilisine

$T$ operatörü için *indirgenebilen ikili* denir. Kısaca $T$-indirgenebilen ikili denir. Ayrıca $(V, W)$ ikilisi $T$ operatörü için indirgenebilen ikili olacak şekilde bir $W \subset X$ kapalı alt uzayı varsa $V \subset X$ kapalı alt uzayı *$T$ ye indirgenir* denir.

**Teorem 2.2.28.** **[2, Teorem 2.22.]** $X$ Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $V \subset X$ kapalı alt uzayının $T$ ye indirgenebilmesi için gerek ve yeter koşul $TP = PT$ ve $R(P) = V$ koşullarını sağlayan bir $P \in B(X)$ izdüşüm operatörünün olmasıdır.

**Tanım 2.2.29.** **[2, Tanım 6.32.]** $X$ Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. $\sigma$, $\sigma(T)$ nin hem açık hemde kapalı bir alt kümesi ise $\sigma$ ya $T$ operatörünün *spektral kümesi* denir.

**Örnek 2.2.30.** $BoyX = 2$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$T = \begin{bmatrix} \varepsilon + 1 & 2 \\ 0 & \varepsilon - 1 \end{bmatrix}$$

operatörü tanımlansın. $BoyX = 2$ olduğundan $T$ operatörünün spektrumunu bulmak için verilen matrisin özdeğerlerini bulmak yeterli olacaktır.

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} \varepsilon + 1 - \lambda & 2 \\ 0 & \varepsilon - 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon + 1 - \lambda)(\varepsilon - 1 - \lambda) = 0$$

eşitliği kullanılarak T operatörünün özdeğerleri $\lambda = \varepsilon + 1$ veya $\lambda = \varepsilon - 1$ olarak elde edilir. Yani $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\varepsilon + 1, \varepsilon - 1\}$ bulunur. Dolayısıyla $\sigma := \{\varepsilon + 1\}$ şeklinde tanımlanan $\sigma$ kümesi $\sigma(T)$ nin kapalı bir alt kümesidir. Öte yandan,
$\sigma' = \sigma(T)\backslash\sigma = \{\varepsilon - 1\}$ kümesi de kapalı olduğundan $\sigma$, $T$ operatörünün spektral kümesidir.

$\sigma$, $T \in B(X)$ operatörünün boş kümeden farklı bir spektral kümesi olmak üzere $\sigma'$ de boş kümeden farklı olsun. Eğer $2\delta = d(\sigma, \sigma') > 0$ ise $\sigma \subseteq V_\sigma$, $\sigma' \subseteq V_{\sigma'}$ ve $V_\sigma \cap V_{\sigma'} = \emptyset$ koşullarını sağlayan $V_\sigma = \bigcup_{\lambda \in \sigma} B(\lambda, \delta)$ ve $V_{\sigma'} = \bigcup_{\lambda \in \sigma'} B(\lambda, \delta)$ şeklinde boş kümeden farklı açık kümeler vardır. Yani $\sigma$ ve $\sigma'$ nün sırasıyla $V_\sigma$ ve $V_{\sigma'}$ şeklinde ayrık komşulukları vardır. Bu durumda $V_\sigma \cup V_{\sigma'}$ kümesi $\sigma(T)$ nin bir komşuluğudur. O halde,

$f_\sigma, f_{\sigma'} : V_\sigma \cup V_{\sigma'} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları,

$$f_\sigma(\lambda) = \begin{cases} 1\,, & \lambda \in V_\sigma \\ 0\,, & \lambda \in V_{\sigma'} \end{cases} \qquad\qquad f_{\sigma'}(\lambda) = \begin{cases} 0\,, & \lambda \in V_\sigma \\ 1\,, & \lambda \in V_{\sigma'} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda,
$(f_\sigma)^2 = f_\sigma, (f_{\sigma'})^2 = f_{\sigma'}, f_\sigma f_{\sigma'} = 0$ ve $f_\sigma + f_{\sigma'} = 1$ eşitlikleri elde edilir. Buradan Teorem 2.2.12.(3) kullanılarak,
$[f_\sigma(T)]^2 = f_\sigma(T), [f_{\sigma'}(T)]^2 = f_{\sigma'}(T), f_\sigma(T)f_{\sigma'}(T) = 0$ ve $f_\sigma(T) + f_{\sigma'}(T) = I$ eşitlikleri bulunur. Bu durumda $f_\sigma(T)$ ve $f_{\sigma'}(T)$ operatör fonksiyonları, değer bölgeleri sırasıyla $R(f_\sigma(T))$, $R(f_{\sigma'}(T))$ olmak üzere $X = R(f_\sigma(T)) \oplus R(f_{\sigma'}(T))$ olacak şekilde sınırlı izdüşümlerdir. Ayrıca Spektral Tasvir Teoremi kullanılarak,
$\sigma(f_\sigma(T)) = f_\sigma(\sigma(T)) = \{0, 1\}$ ve $\sigma(f_{\sigma'}(T)) = f_{\sigma'}(\sigma(T)) = \{0, 1\}$ elde edilir. Yani $f_\sigma(T)$ ve $f_{\sigma'}(T)$ izdüşümleri aşikar olmayan izdüşümlerdir. Teorem 2.2.12.(1) kullanıldığında $Tf_\sigma(T) = f_\sigma(T)T$ ve $Tf_{\sigma'}(T) = f_{\sigma'}(T)T$ elde edilir. Bu durumda Teorem 2.2.28. kullanılarak, $(R(f_\sigma(T)), R(f_{\sigma'}(T)))$ indirgenebilen ikilisi bulunur.

**Tanım 2.2.31.** **[2, Tanım 6.33.]** Yukarıda elde edilen $f_\sigma(T)$ ye $\sigma$ ile ilişkili olan *spektral izdüşüm* denir ve $P_\sigma(T)$ ile gösterilir. Ayrıca özel olarak $\sigma = \sigma(T)$ ve $\sigma = \emptyset$ ise sırasıyla $P_{\sigma(T)}(T) = I$ ve $P_\emptyset = 0$ dir.

**Örnek 2.2.32.** $T$ operatörü Örnek 2.2.30. gibi tanımlansın. $E$ ve $F$ operatörleri sırasıyla

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon+1 & 2 \\ 0 & \varepsilon-1 \end{bmatrix} = (\varepsilon+1)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\varepsilon-1)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden $T = (\varepsilon+1)E + (\varepsilon-1)F$ elde edilir. Burada $E^2 = E,\ F^2 = F,\ EF = 0$ ve $E + F = I$ olduğundan $E$ ve $F$ birbirini tamamlayan spektral izdüşümlerdir. Dolayısıyla, $E = E_\sigma(T)$ operatörü $\sigma = \sigma_\varepsilon(T) = \{\varepsilon + 1\}$ spektral kümesi için spektral izdüşümdür.

**Tanım 2.2.33.** **[3, Sayfa 73]** $P_\sigma(T)$, $\sigma$ spektral kümesi ile ilişkili spektral izdüşüm olmak üzere $P_\sigma(T)$ nin değer bölgesine yani $R(P_\sigma(T))$ kümesine $\sigma$ spektral kümesi ile ilişkili *spektral alt uzay* denir.

Aşağıdaki teorem spektral izdüşümün temel özelliğini vermektedir.

**Teorem 2.2.34.** **[2, Teorem 6.34.]** $X$ Banach uzayı, $T \in B(X)$ ve $\sigma$, T operatörünün aşikar olmayan bir spektral kümesi olsun. Bu durumda $T$ operatörü için $\sigma(T|_{Y_\sigma}) = \sigma$ ve $\sigma(T|_{Z_\sigma}) = \sigma(T)\backslash\sigma$ olacak şekilde bir tek $(Y_\sigma, Z_\sigma)$ indirgenebilen ikili vardır. Dahası, $P_\sigma(T)$ spektral izdüşümü $X$ in $Z_\sigma$ boyunca $Y_\sigma$ üzerine izdüşümüdür.

**Yardımcı Teorem 2.2.35.** **[7, Problem 6.4.13.]** $\sigma$, $T \in B(X)$ operatörünün spektral kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir.
**(1)** $0 \notin \sigma$ ise $P_\sigma(T) = TS = ST$ olacak şekilde bir $S \in B(X)$ vardır.
**(2)** $0 \in \sigma$ ise $P_\sigma(T) = I + TS = I + ST$ olacak şekilde bir $S \in B(X)$ vardır.

**İspat.** Teorem 2.2.34. e göre $T$ operatörü için $\sigma(T|_{Y_\sigma}) = \sigma$ ve $\sigma(T|_{Z_\sigma}) = \sigma(T)\backslash\sigma$ olacak şekilde bir tek $(Y_\sigma, Z_\sigma)$ indirgenebilen ikili vardır ve $P_\sigma(T)$ spektral izdüşümü $X$ in $Z_\sigma$ boyunca $Y_\sigma$ üzerine izdüşümüdür. Bu durumda $R(P_\sigma(T)) = Y_\sigma$ ve $Çek(P_\sigma(T)) = Y_\sigma^\perp = Z_\sigma$ dir.
**(1)** $0 \notin \sigma$ ise $T|_{Y_\sigma} : Y_\sigma \to Y_\sigma$ terslenebilirdir. Çünkü aksi durumda $0 \in \sigma$ bulunur. O halde $R := (T|_{Y_\sigma})^{-1} : Y_\sigma \to Y_\sigma$ operatörü tanımlanabilir. $S = RP_\sigma(T) \in B(X)$ operatörü gözönüne alınsın. Her $x = y_\sigma + z_\sigma \in Y_\sigma \oplus Z_\sigma = X$ için,

$$TSx = TRP_\sigma(T)(y_\sigma + z_\sigma) = TRy_\sigma = y_\sigma = P_\sigma(T)x$$

$$STx = RP_\sigma(T)T(y_\sigma + z_\sigma) = RP_\sigma(T)(Ty_\sigma + Tz_\sigma) = RTy_\sigma = y_\sigma = P_\sigma(T)x$$

eşitlikleri elde edilir. Yani $P_\sigma(T) = TS = ST$ dir.
**(2)** $0 \in \sigma$ ise $0 \notin \sigma(T)\backslash\sigma =: \sigma'$ dir. Yardımcı Teroem 2.2.35. (1) den,

$$P_{\sigma'}(T) = I - P_\sigma(T) = RT = TR$$

$\exists R \in B(X)$ bulunur. O halde $S = -R$ alınarak, $P_\sigma(T) = I + TS = I + ST$ elde edilir.

**Yardımcı Teorem 2.2.36.** **[7, Problem 6.4.14.]** $\sigma$, $T \in B(X)$ operatörünün spektral kümesi olsun. $\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ ve $\sigma(T)\backslash\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\}$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $T$ operatörünün spektral izdüşümünün değer bölgesi $R(P_\sigma(T)) = \{x \in X : \frac{T^n x}{r^n} \to 0\}$ ile verilir.

**İspat.** $\sigma$, $T \in B(X)$ operatörünün spektral kümesi ve $\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ ve $\sigma(T)\backslash\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\}$ olacak şekilde bir $r > 0$ olsun. Teorem 2.2.34. e göre $Y_\sigma := R(P_\sigma(T))$ olmak üzere $(Y_\sigma, Z_\sigma)$, $T$-indirgenebilen ikilisi vardır. $\sigma = \sigma(T|_{Y_\sigma})$ den $\rho(T|_{Y_\sigma}) < r$ elde edilir. Yani $\rho(\frac{1}{r}T|_{Y_\sigma}) < 1$ dir. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.2.25. kullanılarak her $x \in Y_\sigma$ için $\frac{(T|_{Y_\sigma})^n x}{r^n} \to 0$ bulunur. Dolayısıyla $Y_\sigma \subseteq \{x \in X : \frac{T^n x}{r^n} \to 0\}$ kapsaması elde edilir. Tersine, $\frac{T^n x}{r^n} \to 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ alınsın. Limit tanımı kullanılarak her $n \geq n_o$ için $\left\|\frac{T^n x}{r^n}\right\| < 1$ koşulunu sağlayan bir $n_o \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $n \geq n_o$ için $\|T^n x\|^{\frac{1}{n}} < r$ elde edilir. Buradan $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n x\|} \leq r$ elde edilir. Dolayısıyla, $|\lambda| > r$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ kuvvet serisi yakınsaktır. Şimdi $\sigma(T)\backslash\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > R\}$ ve $A := \{\lambda \in \mathbb{C} : r < |\lambda| < R\}$ koşullarını sağlayan bir $R > r$ seçilsin. Buna göre $A \cap \sigma(T) = \emptyset$ ve her $\lambda \in A$ için,

$$
\begin{aligned}
(\lambda - T)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} &= (\lambda - T)\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} \\
&= \lim_{m\to\infty}(\lambda - T)\sum_{n=0}^{m} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(x - \frac{T^{m+1}x}{\lambda^{m+1}}\right) = x
\end{aligned}
$$

elde edilir. $A \subseteq Rez(T)$ olduğundan her $\lambda \in A$ için $\lambda - T$ operatörü bire-birdir ve bundan dolayı her $\lambda \in A$ için $R(\lambda, T)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x}{\lambda^{n+1}}$ dir. Bu serinin rezidüsü kullanılarak,

$$
x = T^0 x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_R} R(\lambda, T)x\,d\lambda = \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_R} R(\lambda, T)\,d\lambda\right] x = P_\sigma(T)x \in Y_\sigma
$$

elde edilir. Yani $\{x \in X : \frac{T^n x}{r^n} \to 0\} \subseteq Y_\sigma$ kapsaması gerçeklenir ve eşitlik elde edilir.

Aşağıdaki teorem Shulman ve Turovskii [6, Yardımcı Teorem 13.2.] den yararlanılarak oluşturulmuştur.

**Teorem 2.2.37.** $T \in B(X)$ ve $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir alt küme olsun. Ayrıca $t \geq 0$ olmak üzere $Q_{\mathcal{M}}(t) := \{x \in X : \rho(\mathcal{M}, x) \leq t\}$ ve $Q_T(t) := \{x \in X : \rho(T, x) \leq t\}$ kümeleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdakiler gerçeklenir.

**(1)** $Q_{\mathcal{M}}(t)$ kümesi $\mathcal{M}$-hiperdeğişmez alt uzaydır.

**(2)** $k > 0$ olmak üzere her $T \in \mathcal{M}^k$ için $Q_{\mathcal{M}}(t) \subset Q_T(t^k)$ dir.

**İspat.**

**(1)** Öncelikle $Q_{\mathcal{M}}(t)$ kümesinin $X$ uzayının bir alt uzayı olduğu gösterilsin. Gerçekten, $x, y \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ ise $\rho(\mathcal{M}, x) \leq t$ ve $\rho(\mathcal{M}, y) \leq t$ dir. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda her $n \geq n_o$ için,

$$\|\mathcal{M}^n x\| \leq (\rho(\mathcal{M}, x) + \varepsilon)^n \leq (t + \varepsilon)^n$$

ve

$$\|\mathcal{M}^n y\| \leq (\rho(\mathcal{M}, y) + \varepsilon)^n \leq (t + \varepsilon)^n$$

olacak şekilde bir $n_o \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq n_o$ için,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M}^n \left( \frac{x+y}{2} \right) \right\| &\leq \frac{1}{2} \{ (\rho(\mathcal{M}, x) + \varepsilon)^n + (\rho(\mathcal{M}, y) + \varepsilon)^n \} \\ &\leq \max\{ (\rho(\mathcal{M}, x) + \varepsilon)^n, (\rho(\mathcal{M}, y) + \varepsilon)^n \} \\ &= (\max\{\rho(\mathcal{M}, x), \rho(\mathcal{M}, y)\} + \varepsilon)^n \leq (t + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik ve Yardımcı Teorem 2.2.22. kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için,

$$\rho(\mathcal{M}, x + y) = \rho(\mathcal{M}, \frac{x+y}{2}) = \limsup_{n \to \infty} \left\| \mathcal{M}^n \left( \frac{x+y}{2} \right) \right\|^{\frac{1}{n}} \leq t + \varepsilon$$

bulunur. Yani $x + y \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ elde edilir. Ayrıca keyfi bir $\alpha \in \mathbb{F}$ için Yardımcı Teorem 2.2.22. kullanılarak $\rho(\mathcal{M}, \alpha x) = \rho(\mathcal{M}, x) \leq t$ elde edildiğinden $\alpha x \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ elde edilir. Dolayısıyla $Q_{\mathcal{M}}(t)$ kümesi $X$ uzayının bir alt uzayıdır.

Şimdi $Q_{\mathcal{M}}(t)$ alt uzayının $\mathcal{M}$-hiperdeğişmez olduğu gösterilsin. Bu amaçla, $x \in Q_{\mathcal{M}}(t)$, $T \in \mathcal{M}$ ve $S \in \mathcal{M}' := \{R \in B(X) : TR = RT, \forall T \in \mathcal{M}\}$ alınsın. Bu durumda,

$$\rho(\mathcal{M}, Tx) = \limsup_{n \to \infty} \|\mathcal{M}^n T x\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \to \infty} \|\mathcal{M}^{n+1} x\|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \to \infty} (\|\mathcal{M}^{n+1} x\|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}}$$

eşitsizliğinden $Tx \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ elde edilir. Yani $Q_{\mathcal{M}}(t)$ alt uzayı $\mathcal{M}$-değişmezdir.

$$\rho(\mathcal{M}, Sx) = \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{M}^n Sx\|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \|S\mathcal{M}^n x\|^{\frac{1}{n}}$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} \|S\|^{\frac{1}{n}} \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{M}^n x\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(\mathcal{M}, x) \leq t$$

eşitsizliğinden $Sx \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ elde edilir. Yani $Q_{\mathcal{M}}(t)$ alt uzayı $\mathcal{M}$-hiperdeğişmezdir.

**(2)** $x \in Q_{\mathcal{M}}(t)$ ve $T \in \mathcal{M}^k$ alınsın. Bu durumda $T = T_1T_2...T_k$ olacak şekilde $T_1, T_2, ..., T_k \in \mathcal{M}$ vardır. $\mathcal{F}_0 := \{T_1, T_2, ..., T_k\}$ tanımlandığında $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ olur. $S \in \mathcal{M}$ alınsın. Bu durumda $\mathcal{F}_0^k \subset (\mathcal{F}_0 \cup S)^k$ kapsaması gerçeklenir. Bu kapsama kullanılarak $\rho(T, x) \leq \rho((\mathcal{F}_0 \cup S)^k, x) \leq \rho(\mathcal{F}_0 \cup S, x)^k \leq t^k$ eşitsizliği elde edilir, yani $x \in Q_T(t^k)$ dir.

**Uyarı 2.2.38.** $\sigma$, $T \in B(X)$ operatörünün aşikar olmayan bir spektral kümesi olsun. Bu durumda Teorem 2.2.34. e göre $T$ operatörü için $\sigma(T|_{Y_\sigma}) = \sigma$ ve $\sigma(T|_{Z_\sigma}) = \sigma(T)\backslash\sigma$ olacak şekilde bir tek $(Y_\sigma, Z_\sigma)$ indirgenebilen ikili vardır ve dahası $P_\sigma(T)$ spektral izdüşümü $X$ in $Z_\sigma$ boyunca $Y_\sigma$ üzerine izdüşümüdür. Bu durumda,
$R(P_\sigma(T)) = Y_\sigma$ ve $Çek(P_\sigma(T)) = Z_\sigma$ dir. $P_\sigma(T)$ izdüşüm operatörü olduğundan $ÇekP_\sigma(T) = Z_\sigma$ eşitliğinden $R(I - P_\sigma(T)) = Z_\sigma$ elde edilir. Ayrıca,
$\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ ve $\sigma(T)\backslash\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\}$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\rho(T)$ nin tanımı ve $\sigma(T|_{Y_\sigma}) = \sigma$ eşitliği kullanılarak $\rho(T|_{Y_\sigma}) < r$ elde edilir. Ayrıca $0 \in \sigma$ olduğundan $0 \notin \sigma(T)\backslash\sigma$ bulunur. Bu durumda $T|_{Z_\sigma} : Z_\sigma \to Z_\sigma$ operatörü terslenebilirdir. Dolayısıyla,

$$\rho((T|_{Z_\sigma})^{-1}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma((T|_{Z_\sigma})^{-1})\} = \max\{|\lambda^{-1}| : \lambda \in \sigma(T|_{Z_\sigma})\} < \tfrac{1}{r}$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.39.** $T \in B(X)$ operatörü için $\sigma$ bir spektral küme olsun. Ayrıca $\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ ve $\sigma(T)\backslash\sigma \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r\}$ olacak şekilde bir $r > 0$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.37. deki notasyonlar kullanılarak aşağıdakiler gerçeklenir.

**(1)** $Q_T(r) = R(P_\sigma(T))$ eşitliği sağlanır. Yani $Q_T(r)$ spektral alt uzaydır.

**(2)** $|\lambda| < r$ ise $Çek(T - \lambda I) \subset Q_T(r)$ dir.

**(3)** $|\lambda| > r$ ise $Q_T(r) \subset R(T - \lambda I)$ dir.

**(4)** $|\lambda| = r$ ise $\lambda \in Rez(T)$ dir.

**İspat.**

**(1)** $0 \in \sigma$ olduğundan $0 \notin \sigma(T)\backslash\sigma$ dir. $\sigma(T)\backslash\sigma$ kümesi $I - P_\sigma(T)$ spektral izdüşümüyle ilgili olan bir spektral kümedir. Yardımcı Teorem 2.2.35.(1) göre,

$$I - P_\sigma(T) = TR = RT$$

olacak şekilde bir $R \in B(X)$ vardır. Uyarı 2.2.38. den $\rho(TP_\sigma(T)) < r$ ve $\rho(R) < \frac{1}{r}$ elde edilir. Keyfi bir $x \in R(P_\sigma(T))$ alındığında,

$\rho(T,x) = \rho(T, P_\sigma(T)x) = \rho(TP_\sigma(T), x) < r$ olduğundan $x \in Q_T(r)$ bulunur. Yani $R(P_\sigma(T)) \subseteq Q_T(r)$ dir. Tersine $x \in Q_T(r)$ alınsın. Bu durumda

$$I - P_\sigma(T) = (I - P_\sigma(T))^n = (RT)^n = R^nT^n$$

eşitliğinden,

$$\rho(I - P_\sigma(T), x) = \limsup_{n\to\infty} \|(I - P_\sigma(T))x\|^{1/n} \leq \rho(R)\rho(T,x) < \frac{1}{r}r = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $(I - P_\sigma(T))x = 0$ bulunur, yani $x \in R(P_\sigma(T))$ dir. Sonuç olarak hem $R(P_\sigma(T)) \subseteq Q_T(r)$ hem de $Q_T(r) \subseteq R(P_\sigma(T))$ geçerli olduğundan eşitlik elde edilir.

**(2)** Keyfi bir $x \in \c{C}ek(T - \lambda I)$ alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $T^nx = \lambda^nx$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlik ve hipotez kullanılarak $\rho(T,x) = |\lambda| < r$ bulunur. Yani $x \in Q_T(r)$ dir.

**(3)** Keyfi bir $x \in Q_T(r)$ alındığında $\rho(T,x) = \limsup_{n\to\infty} \|T^nx\|^{1/n} \leq r$ elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik ve hipotez kullanılarak $\limsup_{n\to\infty} \left\|\frac{T^nx}{\lambda^{n+1}}\right\|^{1/n} < 1$ bulunur. Dolayısıyla, $x = (T - \lambda I)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^nx}{\lambda^{n+1}}$ bulunur, yani $x \in R(T - \lambda I)$ dir.

**(4)** $\lambda \notin Rez(T)$ ise $\lambda \in \sigma(T) = \sigma \cup (\sigma(T)\backslash\sigma)$ dir. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma$ yada $\lambda \in \sigma(T)\backslash\sigma$ dir. Yani $|\lambda| < r$ yada $|\lambda| > r$ dir. Sonuç olarak, $|\lambda| \neq r$ bulunur.

## 2.3.BİRLİKTE KOMPAKT KÜMELER

*İkinci tür bir lineer Fredolm integral denklemi,*

$$g(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy = f(x)$$

şeklindedir; burada $g(x)$ bilinmeyen, $k(x,y)$ ve $f(x)$ ise bilinen fonksiyonlardır. $x$ ve $y$, reel değişkenler olup $(a,b)$ aralığında değerler almaktadır. $\lambda$ ise sayısal bir değerdir.

$k(x,y)$ fonksiyonu, integral denklemin *çekirdeği* olarak adlandırılır. $k(x,y)$ çekirdeği $(x,y)$ düzleminin bir $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ karesinin üzerinde tanımlanmıştır ve süreklidir. Yukarıdaki integral denklemde $f(x)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit değilse bu denklem *homojen olmayan integral denklem* olarak adlandırılır. Eğer $f(x)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfır ise yukarıdaki denklem

$$g(x) - \lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy = 0$$

şeklini alır ve bu denklem *homojen integral denklem* olarak adlandırılır. Ayrıca, ikinci tür bir lineer Fredolm integral denkleminde özel olarak $g(x)$ bilinmeyen fonksiyonu yanlızca integral içinde ise yani

$$\lambda \int_a^b k(x,y)g(y)dy = f(x)$$

şeklinde ise bu integral denklem *birinci tür bir lineer Fredolm integral denklemi* olarak adlandırılır. Fredolm integral denklemlerine ardışık çekirdekler yöntemiyle yaklaşık çözümler bulmak mümkündür.

$K : C[a,b] \to C[a,b]$ operatörü,

$$(K(g))(x) = \int_a^b k(x,y)g(y)dy$$

şeklinde tanımlansın. Yani bilinmeyen bir fonksiyon içeren bir integrale bir operatör gözüyle bakılabilir. Bundan yararlanılarak sırasıyla ikinci tür lineer Fredolm integral denklemi ve birinci tür lineer Fredolm integral denklemi,

$$(I - K_n)g_n = f, \;\; K_n g_n = f$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $K_n$ operatörleri $C[a,b]$ üzerinde tanımlıdır.

Anselone ve Moore

**(1)** $(I - K_n)^{-1} \in B(X)$

**(2)** $(I - K)^{-1} \in B(X)$

**(3)** $(I - K_n)^{-1} \to (I - K)^{-1}$

koşullarının hangi durumda sağlandığını araştırdılar. Araştırmalarının sonunda,

$$\bigcup_n \{K_n g : \|g\| \leq 1\} \subset C[a,b]$$

kümesinin göreceli kompakt olması gerektiğini fark ettiler. İşte bu ayrıntı birlikte kompakt küme kavramının doğmasına sebep oldu.

Normlu uzaylarda birlikte kompakt küme kavramı ilk kez 1964 yılında, Anselone P.M. ve Moore R.H. tarafından, "Approximate solutions of Integral and Operator Equations" adlı makalede ortaya atılmıştır. Birlikte kompakt kümelerin temel özellikleri 1968 yılında, Anselone P.M. ve Palmer T.W. tarafından, "Collectively Compact Sets of Linear Operators" adlı makalede çalışılmıştır. Bu kümelerin spektral özellikleri aynı yıl, Anselone P.M. ve Palmer T.W. tarafından, "Spectral Properties of Collectively Compact Sets of Linear Operators" ve "Spectral Analysis of Collectively Compact, Strongly Convergent Operator Sequences" adlı makalelerde işlenmiştir. Birlikte kompakt kümelerin normlu uzaylardan topolojik uzaylara genelleştirilmesi 1971 yılında, Higgins J.A. tarafından "Collectively Compact Sets of Linear Operators" adlı doktora tezinde çalışılmıştır.

**Tanım 2.3.1.** **[3, Sayfa 4]** $\mathcal{K} \subset B(X)$ alt kümesi operatörlerin bir ailesi olmak üzere, $\mathcal{K}(U_X) = \{Kx : K \in \mathcal{K},\ x \in U_X\}$ kümesi göreceli kompakt ise $\mathcal{K}$ ailesine *birlikte kompakt* denir.

**Uyarı 2.3.2.** Tanım 2.1.18. ile Tanım 2.3.1. karşılaştırıldığında birlikte kompakt küme kavramının aslında kompakt operatör kavramının bir genelleştirilmesi olduğu düşünülebilir. Birlikte kompakt kümenin her elemanın kompakt olduğu fakat kompakt operatörlerden oluşan her kümenin birlikte kompakt olmadığı birazdan anlaşılacaktır.

**Örnek 2.3.3.** **[3, Örnek 5.4.]** $X = \ell_2$ uzayında $x = (x_1, x_2, ...)$, $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ olmak üzere,

$$\mathcal{K} = \{K_n \in B(\ell_2) : K_n x = x_n e_1,\ \ n = 1, 2, ...\}$$

kümesi gözönüne alınsın. Bu durumda $\mathcal{K}(U_X) = \{K_n x : K_n \in \mathcal{K},\ x \in U_X\}$ olup, $Boy\mathcal{K}(U_X) = 1 < \infty$ ve $\mathcal{K}(U_X)$ sınırlı olduğundan $\mathcal{K}(U_X)$ tam sınırlı olur. Dolayısıyla $\mathcal{K}$ birlikte kompakttır.

**Örnek 2.3.4.** **[3, Örnek 5.1.]** $X = \ell_2$ Hilbert uzayı ve $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesi $\ell_2$ için ortonormal bir taban olsun.

$E_\alpha : \ell_2 \longrightarrow \text{Span}\{\varphi_\alpha\} \subset \ell_2$

$x \longrightarrow E_\alpha x =< x, \varphi_\alpha > \varphi_\alpha$ şeklinde dik izdüşümler tanımlansın. Bu operatörlerin kümesi $\mathcal{M} := \{E_\alpha : \alpha \in A\}$ ile gösterilsin. $\|\varphi_\alpha\| = 1$ olduğundan her $\alpha \in A$ için $\varphi_\alpha = E_\alpha e_\alpha \in \mathcal{M}(U_X)$ dir. Öte yandan,

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\|^2 =< \varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta >= \|\varphi_\alpha\|^2 - < \varphi_\alpha, \varphi_\beta > - < \varphi_\beta, \varphi_\alpha > + \|\varphi_\beta\|^2$$

eşitliğinden $\alpha \neq \beta$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ için $\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}$ elde edilir. Yani $\mathcal{M}(U_X)$ tam sınırlı değildir ve tanım gereği $\mathcal{M}$ birlikte kompakt bir küme olamaz.

**Birlikte Kompakt Kümenin Özellikleri:**

**Özellik 2.3.5.** **[3, Sayfa 58]** $\mathcal{K} \subset B(X)$ birlikte kompakt bir küme ise $\lambda \in \mathbb{F}$ olmak üzere $\lambda\mathcal{K}$ birlikte kompakttır.

**İspat.** $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan $\mathcal{K}(U_X)$ göreceli kompakt bir kümedir. Yani $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kompakt bir kümedir. Bu durumda $\lambda \in \mathbb{F}$ olmak üzere $\lambda\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi de kompakttır. Öte yandan $\overline{\lambda\mathcal{K}(U_X)} = \lambda\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ eşitliği bulunduğundan $\overline{\lambda\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakt ve dolayısıyla Tanım 2.3.1. kullanılarak $\lambda\mathcal{K}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**Özellik 2.3.6.** **[3, Sayfa 58]** $\mathcal{K} \subset B(X)$ birlikte kompakt bir küme ve $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ ise $\mathcal{M}$ birlikte kompakt bir kümedir.

**İspat.** $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan $\mathcal{K}(U_X)$ göreceli kompakt bir kümedir. $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ kapsaması gerçeklendiğinden $\mathcal{M}(U_X) \subset \mathcal{K}(U_X)$ elde edilir. $\mathcal{K}(U_X)$ göreceli kompakt bir küme olduğundan $\mathcal{M}(U_X)$ göreceli kompakt bir küme olur. Çünkü kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri kompakttır. $\mathcal{M}(U_X)$ göreceli kompakt bir küme olduğundan Tanım 2.3.1. kullanılarak $\mathcal{M}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**Özellik 2.3.7.** **[3, Sayfa 58]** $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n \subset B(X)$ birlikte kompakt kümeler ise $\mathcal{K} := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ birlikte kompakt bir kümedir.

**İspat.** $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n$ birlikte kompakt kümeler olduğundan sırasıyla $\mathcal{K}_1(U_X), \mathcal{K}_2(U_X), ..., \mathcal{K}_n(U_X)$ kümeleri göreceli kompakttır. Dolayısıyla bu kümeler dizisel kompakt bulunur. Şimdi $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i(U_X)$ kümesinin dizisel kompakt olduğu gösterilsin. Keyfi bir $\{x_m\} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i(U_X)$ dizisi alınsın. O halde en az bir $i$ $(i = 1, ..., n)$ için $\{x_m\} \subset \mathcal{K}_i(U_X)$ olur. Her $i$ $(i = 1, ..., n)$ için $\mathcal{K}_i(U_X)$ kümeleri dizisel kompakt olduğundan, en az bir $i$ $(i = 1, ..., n)$ için $x_{m_k} \to x$ koşulunu sağlayan bir $\{x_{m_k}\} \subset \{x_m\} \subset \mathcal{K}_i(U_X)$ alt dizisi vardır. Şu halde $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i(U_X)$ kümesi dizisel kompakt bulunur. Yani $\overline{\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i(U_X)}$ kümesi kompakt bulunur. Öte yandan,

$$\overline{\mathcal{K}(U_X)} = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i\right)(U_X)} = \overline{\bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i(U_X)}$$

eşitliği bulunduğundan $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kompakt yani $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi göreceli kompakt bulunur. Tanım 2.3.1. kullanılarak $\mathcal{K}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**Özellik 2.3.8. [3, Sayfa 58]** $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n \subset B(X)$ birlikte kompakt kümeler ise $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + ... + \mathcal{K}_n$ birlikte kompakt bir kümedir.

**İspat.** $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, ..., \mathcal{K}_n$ birlikte kompakt kümeler olduğundan sırasıyla $\mathcal{K}_1(U_X), \mathcal{K}_2(U_X), ..., \mathcal{K}_n(U_X)$ kümeleri göreceli kompakttır. Dolayısıyla bu kümeler dizisel kompakt bulunur. Şimdi $\mathcal{K}(U_X)$ kümesinin dizisel kompakt olduğu gösterilsin. Bu amaçla keyfi bir $\{x_m\} \subset \mathcal{K}(U_X)$ dizisi alınsın. Bu durumda

$$x_m = y_{1_m} + y_{2_m} + ... + y_{n_m} \quad \ni \quad \{y_{1_m}\} \subset \mathcal{K}_1(U_X), \{y_{2_m}\} \subset \mathcal{K}_2(U_X), ..., \{y_{n_m}\} \subset \mathcal{K}_n(U_X)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathcal{K}_1(U_X), \mathcal{K}_2(U_X), ..., \mathcal{K}_n(U_X)$ kümeleri dizisel kompakt olduğundan aşağıdaki şekilde alt diziler mevcuttur.

$$\begin{array}{cccc}
\exists \{y_{1_{m_k}}\} \subset \{y_{1_m}\} & \ni & y_{1_{m_k}} \to y_1 \\
\exists \{y_{2_{m_k}}\} \subset \{y_{2_m}\} & \ni & y_{2_{m_k}} \to y_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \\
\exists \{y_{n_{m_k}}\} \subset \{y_{n_m}\} & \ni & y_{n_{m_k}} \to y_n
\end{array}$$

O halde keyfi bir $\{x_m\} \subset \mathcal{K}(U_X)$ dizisi için $y_{1_{m_k}} + y_{2_{m_k}} + ... + y_{n_{m_k}} \to y_1 + y_2 + ... + y_n$ koşulunu sağlayan bir $\{y_{1_{m_k}} + y_{2_{m_k}} + ... + y_{n_{m_k}}\} \subset \{x_m\} = \{y_{1_m} + y_{2_m} + ... + y_{n_m}\}$ alt dizisi vardır. Yani $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi dizisel kompakt bulunur. Yani $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir kümedir.

Birlikte kompakt kümelerin yukarıdaki temel özelliklerinden başka özellikleri de vardır. Bunu aşağıdaki önerme vermektedir.

**Önerme 2.3.9.** [3, **Önerme 4.2.**] $\mathcal{K} \subset B(X)$ birlikte kompakt bir küme olsun.

**(1)** $\Lambda$ skalerlerin sınırlı bir kümesi ise $\Lambda\mathcal{K} = \{\lambda K : \lambda \in \Lambda, K \in \mathcal{K}\}$ kümesi birlikte kompakttır.

**(2)** $\mathcal{M} \subset B(X)$ sınırlı bir küme ise $\mathcal{K}\mathcal{M} = \{KM : K \in \mathcal{K}, M \in \mathcal{M}\}$ kümesi birlikte kompakttır.

**(3)** $\mathcal{N} \subset B(X)$ göreceli kompakt bir küme ise $\mathcal{N}\mathcal{K} = \{NK : N \in \mathcal{N}, K \in \mathcal{K}\}$ kümesi birlikte kompakttır.

**(4)** $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme ise $\mathcal{K}$ nın düzgün kapanışı $\overline{\mathcal{K}}$ ve $\mathcal{K}$ nın kuvvetli kapanışı $\overline{\mathcal{K}}^k$ birlikte kompakt kümelerdir.

**(5)** $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme ise $co(\mathcal{K})$ konveks kabuğu da birlikte kompakt bir kümedir.

**(6)** Her $b < \infty$ ve her $J \leq \infty$ için

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j K_j : K_j \in \mathcal{K}, \sum_{j=1}^{J} |\lambda_j| \leq b \right\}$$

kümesi birlikte kompakttır.

**İspat.**

**(1)** $\Lambda$ sınırlı bir küme olduğundan $r := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$ vardır. Bu durumda $\Lambda\mathcal{K}(U_X) \subset r\mathcal{K}(U_X)$ kapsaması geçerlidir. O halde $\overline{\Lambda\mathcal{K}(U_X)} \subset \overline{r\mathcal{K}(U_X)}$ kapsaması geçerlidir. $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kompakt ve dolayısıyla $\overline{r\mathcal{K}(U_X)} = r\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakt bulunur. Kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri kompakt olduğundan $\overline{\Lambda\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakt dolayısıyla $\Lambda\mathcal{K}$ birlikte kompakttır.

**(2)** $\mathcal{M}$ sınırlı bir küme olduğundan $r := \sup\{\|T\| : T \in \mathcal{M}\}$ vardır. Bu durumda $\mathcal{K}\mathcal{M}(U_X) \subset r\mathcal{K}(U_X)$ kapsaması geçerlidir. O halde $\overline{\mathcal{K}\mathcal{M}(U_X)} \subset \overline{r\mathcal{K}(U_X)}$ kapsaması geçerlidir. $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kompakt ve dolayısıyla $\overline{r\mathcal{K}(U_X)} = r\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakt bulunur. Kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri kompakt olduğundan $\overline{\mathcal{KM}(U_X)}$ kümesi kompakt dolayısıyla $\mathcal{KM}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**(3)** $f : \overline{\mathcal{N}} \times \overline{\mathcal{K}(U_X)} \to X$

$(N, x) \to f(N, x) := Nx$ fonksiyonu tanımlansın. $\mathcal{N}$ göreceli kompakt ve $\mathcal{K}$ birlikte kompakt olduğundan sırasıyla $\overline{\mathcal{N}}$ ve $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümeleri kompakttır. Dolayısıyla $\overline{\mathcal{N}} \times \overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakttır. Öte yandan $f$ fonksiyonu sürekli olduğundan $f(\overline{\mathcal{N}} \times \overline{\mathcal{K}(U_X)})$ kümesi kompakt bulunur. Kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri kompakt olduğundan $\mathcal{NK}(U_X) = f(\mathcal{N} \times \mathcal{K}(U_X)) \subset f(\overline{\mathcal{N}} \times \overline{\mathcal{K}(U_X)})$ kapsaması kullanılarak $\overline{\mathcal{NK}(U_X)}$ kümesi kompakt bulunur. Tanım 2.3.1. kullanılarak $\mathcal{NK}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**(4)** Uyarı 2.1.2. ye göre düzgün yakınsama kuvvetli olduğundan $\overline{\mathcal{K}} \subset \overline{\mathcal{K}}^k$ kapsaması gerçeklenir. Dolayısıyla $\overline{\mathcal{K}}(U_X) \subset \overline{\mathcal{K}}^k(U_X)$ kapsaması doğrudur. Şimdi $\overline{\mathcal{K}}^k(U_X) \subset \overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kapsamasının gerçeklendiği gösterilsin. Keyfi bir $Kx \in \overline{\mathcal{K}}^k(U_X)$ alınsın. Bu durumda $K \in \overline{\mathcal{K}}^k$ ve $x \in U_X$ dir. $K \in \overline{\mathcal{K}}^k$ ifadesinden $K_m \to K$ koşulunu sağlayan bir $\{K_m\} \subset \mathcal{K}$ dizisi elde edilir. Yani $x \in U_X$ için $\lim_{m\to\infty} K_m x = Kx \in \overline{\mathcal{K}(U_X)}$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{\mathcal{K}}(U_X) \subset \overline{\mathcal{K}}^k(U_X) \subset \overline{\mathcal{K}(U_X)}$ elde edilir. Hipotez gereği $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kümesi kompakt ve kompakt bir kümenin kapalı alt kümeleri de kompakt olacağından $\overline{\overline{\mathcal{K}}(U_X)}$ ve $\overline{\overline{\mathcal{K}}^k(U_X)}$ kümeleri kompakt bulunur. Tanım 2.3.1. kullanılarak $\overline{\mathcal{K}}$ ve $\overline{\mathcal{K}}^k$ kümeleri birlikte kompakt olur.

**(5)** Öncelikle $[co(\mathcal{K})](U_X) \subset co[\mathcal{K}(U_X)]$ kapsamasının doğruluğu ispatlansın. Keyfi bir $Kx \in [co(\mathcal{K})](U_X)$ alınsın. Bu durumda $K \in co(\mathcal{K})$ ve $x \in U_X$ dir. Konveks kabuğun tanımı gereği

$$K = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_i, \quad K_i \in \mathcal{K}, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad m \in \mathbb{N}$$

yazılabilir. Öte yandan $U_X \subset co(U_X)$ kapsamasından $x \in U_X$ için $x \in co(U_X)$ olur. Yine konveks kabuğun tanımı kullanılarak,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad x_j \in U_X, \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Buradan

$$Kx = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\lambda_j)(K_i x_j)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i\lambda_j) = \alpha_1\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + \alpha_2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + ... + \alpha_m\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$$

bulunur. Yani $Kx \in co[\mathcal{K}(U_X)]$ elde edilir. $[co(\mathcal{K})](U_X) \subset co[\mathcal{K}(U_X)]$ kapsaması gerçeklendiğinden $\overline{[co(\mathcal{K})](U_X)} \subset \overline{co[\mathcal{K}(U_X)]}$ bulunur. Burada $\mathcal{K}(U_X) \subset \overline{\mathcal{K}(U_X)}$ olduğundan $\overline{co[\mathcal{K}(U_X)]} \subset \overline{co[\overline{\mathcal{K}(U_X)}]}$ kapsaması bulunur. Sonuç olarak,

$$\overline{[co(\mathcal{K})](U_X)} \subset \overline{co[\mathcal{K}(U_X)]} \subset \overline{co[\overline{\mathcal{K}(U_X)}]}$$

kapsamaları elde edilir. Öte yandan $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan $\overline{\mathcal{K}(U_X)}$ kompakttır. Mazur Teoremi kullanılarak $\overline{co}\,[\overline{\mathcal{K}(U_X)}]$ kümesi kompakt bulunur. Yardımcı Teorem 2.1.7. kullanılarak $\overline{co}\,[\overline{\mathcal{K}(U_X)}] = \overline{co\,[\overline{\mathcal{K}(U_X)}]}$ kümesi kompakt bulunur. Kompakt bir kümenin kapalı alt kümesi kompakt olacağından $\overline{[co(\mathcal{K})](U_X)}$ kümesi kompakt dolayısıyla Tanım 2.3.1. kullanılarak $co(\mathcal{K})$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**(6)** $J < \infty$ olsun. $\Lambda := \{\lambda : |\lambda| \leq b < \infty\}$ kümesi tanımlansın. $\Lambda$ kümesi sınırlı bir kümedir. $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan Önerme 2.3.9.(1) kullanılarak $\Lambda\mathcal{K}$ kümesi birlikte kompakt bulunur. Önerme 2.3.9.(5) kullanılarak $co(\Lambda\mathcal{K})$ kümesi yani

$$\left\{\sum_{j=1}^{J}\lambda_j K_j : K_j \in \mathcal{K}, \sum_{j=1}^{J}|\lambda_j| \leq b\right\}$$

kümesi birlikte kompakt bulunur.

$J = \infty$ durumunda $\lim_{J\to\infty}\sum_{j=1}^{J}\lambda_j K_j \in \overline{\Lambda\mathcal{K}}$ bulunur. Öte yandan Önerme 2.3.9.(4) göre $\overline{\Lambda\mathcal{K}}$ kümesi birlikte kompakttır. Sonuç olarak istenen elde edilir.

**Önerme 2.3.10. [3, Sayfa 82]** Birlikte kompakt her küme kompakt operatörlerin sınırlı bir kümesidir.

**İspat.** Keyfi bir $K \in \mathcal{K}$ alınsın ve $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Tanım 2.3.1. göre $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi göreceli kompakttır. $K(U_X) \subset \mathcal{K}(U_X)$ olduğundan $K(U_X)$ göreceli kompakt bulunur. Buradan Tanım 2.1.18. kullanılarak $K$ operatörü kompakt bulunur. Yani $\mathcal{K}$ kümesi kompakt operatörlerden oluşmaktadır. Ayrıca $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi tam sınırlır. Tam sınırlı kümeler sınırlı olduğundan $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi sınırlı bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{K}$ kümesi sınırlı bulunur.

**Uyarı 2.3.11.** Yukarıdaki önermenin karşıtının doğru olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

**Örnek 2.3.12.** **[3, Örnek 5.1.]** $X = \ell_2$ Hilbert uzayı ve $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\}$ kümesi $\ell_2$ için ortonormal bir taban olsun.

$E_\alpha : \ell_2 \longrightarrow \text{Span}\{\varphi_\alpha\} \subset \ell_2$

$x \longrightarrow E_\alpha x =< x, \varphi_\alpha > \varphi_\alpha$ şeklinde dik izdüşümler tanımlansın.

$\|E_\alpha x\| = \| < x, \varphi_\alpha > \varphi_\alpha\| = | < x, \varphi_\alpha > | \|\varphi_\alpha\| \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|E_\alpha\| \leq 1$

Özel olarak, $x = \varphi_\alpha$ alınırsa, $\|E_\alpha\| = 1$ bulunur. Öte yandan, $BoyR(E_\alpha) = 1 < \infty$ olduğundan $E_\alpha$ operatörleri kompakttır. Bu durumda $\mathcal{M} := \{E_\alpha : \alpha \in A\}$ şeklinde tanımlanan küme kompakt operatörlerin sınırlı bir kümesidir. Buna karşın Örnek 2.3.4. kullanılarak $\mathcal{M}$ kümesinin birlikte kompakt bir küme olmadığı görülür.

**Önerme 2.3.13.** **[3, Önerme 5.3.]** $\mathcal{K} \subset B(X)$ kompakt operatörlerin tam sınırlı bir kümesi ise $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir kümedir.

**İspat.** $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mathcal{K}$ tam sınırlı olduğundan her $K \in \mathcal{K}$ için $\|K - K_\varepsilon\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $K_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$ vardır. Bu durumda her $x \in U_X$ için

$$\|Kx - K_\varepsilon x\| = \|(K - K_\varepsilon)x\| \leq \sup\{\|(K - K_\varepsilon)x\| : \|x\| \leq 1\} = \|K - K_\varepsilon\| < \varepsilon$$

elde edilir. $\mathcal{K}_\varepsilon$ kompakt operatörlerin sonlu bir kümesi olduğundan $\mathcal{K}(U_X)$ tam sınırlı bir küme ve dolayısıyla $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi göreceli kompakt bulunur. Tanım 2.3.1. göre $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir kümedir.

**Uyarı 2.3.14.** Yukarıdaki önermenin karşıtının doğru olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

**Örnek 2.3.15.** **[3, Örnek 5.4.]** $X = \ell_2$ uzayında $x = (x_1, x_2, ...)$, $e_1 = (1, 0, 0, ...)$ olmak üzere,

$$\mathcal{K} = \{K_n \in B(\ell_2) : K_n x = x_n e_1, \;\; n = 1, 2, ...\}$$

kümesi gözönüne alınsın. Örnek 2.3.3. e göre $\mathcal{K}$ kümesi birlikte kompakttır. Fakat $\mathcal{K}$ kümesi tam sınırlı değildir. Çünkü $\|K_n - K_m\| = \sqrt{2}$ olduğundan $\{K_n\}$ dizisinin herhangi bir alt dizisinin terimleri $\sqrt{2}$ den küçük ve eşittir. Bu durumda hiçbir alt dizisi Cauchy olamaz. Dolayısıyla hiçbir alt dizisi yakınsak olamaz. Yani $\mathcal{K}$ kümesi dizisel kompakt değildir. Yani $\mathcal{K}$ kümesi tam sınırlı değildir.

**Önerme 2.3.16. [3, Önerme 1.8.]** $T, T_n \in B(X)$ ve $T_n \to T$ ise her $K \in K(X)$ için $\|(T_n - T)K\| \to 0$. Burada $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olmak üzere $K \in \mathcal{K}$ alındığında yakınsama düzgün olur.

**İspat.** $T_n \to T$ ve $x \in U_X$ olsun. Keyfi bir $K \in K(X)$ için, kompakt operatörün tanımı gereği, $K(U_X)$ göreceli kompakttır. Dolayısıyla $K(U_X)$ kümesi tam sınırlı bulunur. Önerme 2.1.15. kullanılarak $\|(T_n - T)Kx\| \to 0$ elde edilir. Öte yandan $U_X$ sınırlı olduğundan Sonuç 2.1.17. kullanılarak $\|(T_n - T)K\| \to 0$ bulunur. $\mathcal{K}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Bu durumda Tanım 2.3.1. kullanılarak $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi göreceli kompakt bulunur. Yani $\mathcal{K}(U_X)$ kümesi tam sınırlıdır. $K \in \mathcal{K}$ olduğundan $x \in U_X$ için $Kx \in \mathcal{K}(U_X)$ bulunur. Bu durumda Önerme 2.1.15. kullanılarak istenen elde edilir.

**Sonuç 2.3.17. [3, Sonuç 1.9.]** $T, T_n \in B(X)$, $T_n \to T$ ve $\{T_n\}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Bu durumda, $\|(T_n - T)T\| \to 0$ ve $\|(T_n - T)T_n\| \to 0$ dir.

**İspat.** $\{T_n\}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan Önerme 2.3.10. kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n$ operatörleri kompakt bulunur. Önerme 2.3.16. kullanılarak, $\|(T_n - T)T_n\| \to 0$ elde edilir. Öte yandan,

$$T(U_X) \subset \overline{\{T_n x : x \in U_X\}} = \overline{\{T_n\}(U_X)}$$

olduğundan $T$ operatörü kompakt bulunur. Şu halde Önerme 2.3.16. tekrar uygulanarak, $\|(T_n - T)T\| \to 0$ elde edilir.

**Önerme 2.3.18.** **[8, Önerme 3.2.]** $T_n \to T$ ve $\mathcal{M} \subset B(X)$ kümesi tam sınırlı olsun. Bu durumda her $M \in \mathcal{M}$ için $T_n M \to TM$ dir.

**Yardımcı Teorem 2.3.19.** **[8, Yardımcı Teorem 5.1.]** Her $T \in B(X)$ ve her $\Lambda \subset \widetilde{Rez}(T)$ kapalı alt kümesi için $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kompakt bir kümedir.

**Yardımcı Teorem 2.3.20.** **[8, Yardımcı Teorem 5.2.]** $T_n \to T$ ve $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Bu durumda her $\lambda \in \widetilde{Rez}(T)$ için

$$\|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\| \to 0$$

dir. Burada $\Lambda \subset \widetilde{Rez}(T)$ kapalı bir alt küme alındığında her $\lambda \in \Lambda$ için yakınsama düzgün olur.

**İspat.** Her $\lambda \in \widetilde{Rez}(T), n \geq 1$ için $K_n := (\lambda - T)^{-1}(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}$ tanımlansın. $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt bir küme olduğundan Önerme 2.3.10. kullanılarak her $n \geq 1$ için $T_n - T$ operatörleri kompakt bulunur. Öte yandan, $\lambda \in \widetilde{Rez}(T)$ olduğundan $(\lambda - T)^{-1} \in B(X)$ dir. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $K_n$ operatörleri kompakttır. $T_n \to T$ ve her $n \geq 1$ için $K_n$ operatörleri kompakt olduğundan Önerme 2.3.16. e göre $\|(T_n - T)K_n\| \to 0$ bulunur. Yani $\|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\| \to 0$ elde edilir. Şimdi $\Lambda \subset \widetilde{Rez}(T)$ kapalı bir alt kümesinde keyfi bir $\lambda \in \Lambda$ alınsın. Bu durumda, Yardımcı Teorem 2.3.19. dan dolayı $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi kompakt bir kümedir. O halde $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi göreceli kompakt ve sınırlı bir küme olur. Bu durumda Önerme 2.3.9.(2) ve (3)kullanılarak,

$$\mathcal{K} := \{(\lambda - T)^{-1}(T_n - T)(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda,\, n \geq 1\}$$

kümesi birlikte kompakt bulunur. $T_n \to T$ ve $K_n \in \mathcal{K}$ olduğundan Önerme 2.3.16. kullanılarak yakınsama düzgün bulunur.

**Teorem 2.3.21.** **[3, Teorem 4.7.]** Her $n \in \mathbb{N}$ için $T, T_n \in B(X)$, $T_n \to T$ ve $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Her $\Lambda \subset \widetilde{Rez}(T)$ kapalı kümesi için aşağıdakiler doğrudur.

**(1)** Her $n \geq N$ için $\Lambda \subset \widetilde{Rez}(T_n)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

**(2)** $\{(\lambda - T_n)^{-1} : \lambda \in \Lambda, n \geq N\}$ kümesi sınırlı bir kümedir.

**(3)** Her $x \in X$ için $(\lambda - T_n)^{-1}x \longrightarrow (\lambda - T)^{-1}x$ yakınsaması her $\lambda \in \Lambda$ için düzgündür.

**(4)** $\{(\lambda - T_n)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda, n \geq N\}$ kümesi birlikte kompakttır.

**(5)** Her $n \geq N$ için $f : \Lambda \to B(X)$ $f(\lambda) = (\lambda - T_n)^{-1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar $\Lambda$ kümesi üzerinde eşsüreklidir.

**İspat.**

**(1)** Her $\lambda \in Rez(T)$ için $\lambda - T_n = [I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}](\lambda - T)$ şeklinde yazılabilir. Yardımcı Teorem 2.3.20. kullanılarak her $\lambda \in \Lambda$ için $\|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\| \longrightarrow 0$ bulunur. Limitin tanımı gereği her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için $\|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\| \leq \frac{1}{2}$ dir. Önerme 2.1.19. kullanılarak her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için,
$[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^{-1} \in B(X)$ ve

$$\left\|[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^{-1}\right\| \leq \frac{\|I + (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}\|}{1 - \|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\|}$$

bulunur. Şu halde $(\lambda - T)$ ve $[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]$ operatörleri terslenebilir olduğundan $\lambda - T_n = [I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}](\lambda - T)$ eşitliği kullanılarak

$$(\lambda - T_n)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Yani $\lambda \in Rez(T_n)$ bulunur.

**(2)** $\{T_n - T\}$ kümesi birlikte kompakt olduğundan Önerme 2.3.10. gereği $\{T_n - T\}$ kümesi sınırlıdır. Öte yandan kompakt kümeler sınırlı olduğundan Yardımcı Teorem 2.3.19. kullanılarak $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi sınırlı bulunur. Yukarıda elde edilen (1) den $(\lambda - T_n)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^{-1}$ eşitliği bulunur. Bu durumda

$$\left\|[I - (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^{-1}\right\| \leq \frac{\|I + (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}\|}{1 - \|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\|}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\|(\lambda - T_n)^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - T)^{-1}\|\|I + (T_n - T)(\lambda - T)^{-1}\|}{1 - \|[(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}]^2\|}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{(\lambda - T_n)^{-1} : \lambda \in \Lambda, n \geq N\}$ kümesi sınırlı bir kümedir.

**(3)** Keyfi bir $\lambda \in \Lambda \subset \widetilde{Rez}(T)$ için (1) den her $n \geq N$ için $\lambda \in \Lambda \subset \widetilde{Rez}(T_n)$ bulunur. Yani keyfi bir $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için

$$(\lambda - T_n)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - T_n)^{-1}(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}$$

eşitliği vardır. Öte yandan (2) den her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için $\|(\lambda - T_n)^{-1}\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı vardır. Buradan her $x \in X$ için

$$\|(\lambda - T_n)^{-1}x - (\lambda - T)^{-1}x\| = \|(\lambda - T_n)^{-1}(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}x\| \leq M\|(T_n - T)(\lambda - T)^{-1}x\|$$

elde edilir. Önerme 2.3.18. ve Yardımcı Teorem 2.3.19. kullanılarak istenen bulunur.

**(4)** Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için

$$(\lambda - T_n)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - T)^{-1}(T_n - T)(\lambda - T_n)^{-1}$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 2.3.19. a göre $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi kompakttır. Kompakt kümeler göreceli kompakt olduğundan $\{(\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda\}$ kümesi göreceli kompakttır. Öte yandan (2) den dolayı $\{(\lambda - T_n)^{-1} : \lambda \in \Lambda, n \geq N\}$ kümesi sınırlı ve hipotez gereği $\{T_n - T\}$ birlikte kompakttır. O halde yukarıdaki eşitlik ve Önerme 2.3.9.(2) ve (3) kullanılarak $\{(\lambda - T_n)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} : \lambda \in \Lambda, n \geq N\}$ kümesi birlikte kompakt bulunur.

**(5)** Her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için $\|(\lambda - T_n)^{-1}\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı vardır. Her $\lambda, \mu \in \Lambda$ ve her $n \geq N$ için resolvent özdeşliği kullanılarak $(\lambda - T_n)^{-1} - (\mu - T_n)^{-1} = -(\lambda - \mu)(\lambda - T_n)^{-1}(\mu - T_n)^{-1}$ elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak $\|(\lambda - T_n)^{-1} - (\mu - T_n)^{-1}\| \leq M^2|\lambda - \mu|$ eşitsizliği elde edilir ki bu durumda $f$ fonksiyonları eşsürekli olur.

Aşağıdaki teorem Teorem 2.3.20. nin bir sonucudur.

**Teorem 2.3.21. [3, Teorem 4.8.]** Her $n \in \mathbb{N}$ için $T, T_n \in B(X)$, $T_n \to T$ ve $\{T_n - T\}$ birlikte kompakt bir küme olsun. Her $\sigma(T) \subset \Omega$ açık kümesi ve her $n \geq N$ için $\sigma(T_n) \subset \Omega$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

## 2.4. BİRLİKTE KOMPAKT KÜMELERİN ERGODİK TEORİYE UYGULAMASI

Bu bölümde $X$ kompleks Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olmak üzere, $\{A_n\}$ dizisi

$$A_n := \frac{1}{n}(I + T + T^2 + ... + T^{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i, \;\; n \in \mathbb{N}$$

şeklinde yani $T$ operatörünün derecelerinin aritmetik ortalaması olarak tanımlansın. Bu ortalama literatürde *Cesàro Ortalaması* olarakta bilinir. $T \in B(X)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n$ operatörü sınırlı ve doğrusal bir operatördür. Ergodik teoride $\{A_n\}$ dizisinin yakınsaklığıyla ilgilenilmektedir. $\{A_n\}$ dizi ile pek çok uygulamalı alanda karşılaşıldığından, böyle bir dizinin hangi koşullar altında yakınsak olduğu merak edilmiştir. Bu konuyla ilgili bazı araştırmalar yapılmıştır. Örneğin Higgins'in [9] çalışmasında $T$ kompakt ve $\{T^n\}$ dizisi düzgün sınırlı alınarak $\{A_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsadığı ve sonrasında da düzgün yakınsadığı gösterilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde görüldüğü üzere birlikte kompakt küme kompakt operatörlerden oluşmaktadır. Bu bakış açısıyla $\{I, T, T^2, ..., T^n\}$ kümesine bakıldığında $T$ kompakt hipotezi altında $\{T, T^2, ..., T^n\}$ kümesinin elemanlarının kompakt olduğu görülmektedir. Ancak sonsuz boyutlu uzaylarda $I$ birim operatör kompakt olmadığından, $\{I, T, T^2, ..., T^n\}$ kümesi kompakt operatörlerden oluşmamaktadır. Bu durumda birlikte kompakt küme kavramı uygulanamamaktadır. Bu yüzden Higgins [9] çalışmasında $\{T^n\}$ kümesine $I$ birim operatörü dahil etmemiştir. Yani $\{A_n\}$ dizisini

$$A_n := \frac{1}{n}(T + T^2 + ... + T^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i, \quad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlamıştır. Sonuç olarak Ergodik Teoride $\{A_n\}$ dizisinin yakınsaklığıyla ilgilenildiğinden $I$ birim operatörü dahil edip-etmeme durumu yakınsaklığın sonucunu etkilememektedir. Higgins [9] çalışmasında $T$ kompakt ve $\{T^n\}$ dizisi düzgün sınırlı hipotezi altında $\{T^n\}$ kümesinin birlikte kompakt olduğunu göstermiştir. Daha sonra $\{A_n\} \subset co\{T^n\}$ kapsamasını ve birlikte kompakt kümelerin özelliklerini kullanarak $\{A_n\}$ kümesinin birlikte kompakt olduğunu göstermiştir ve bundan yararlanarak $\{A_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsadığını ve sonrasında da düzgün yakınsadığını ispat etmiştir. Ayrıca çalışmasında $T$ kompakt hipotezini zayıflatarak aynı güçlü sonuçları elde etmiştir. İşte bu bölümde Higgins'in [9] çalışmasında elde ettiği bazı teoremler kullanılarak $\{A_n\}$ dizisi için spektral yarıçapın sürekliliği kanıtlanmıştır.

**Teorem 2.4.1. [9, Teorem 3.2.5.]** $T \in B(X)$ kompakt ve $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i$ olsun. Bu durumda $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ varsa $\|A_n - A\| \to 0$ dir.

**Tanım 2.4.2.** **[2, Sayfa 272]** $T \in B(X)$ için $T^N$ kompakt olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $T$ ye *kuvveti kompakt* denir.

**Uyarı 2.4.3.** $T$ kompakt ise $T$ kuvveti kompakttır. Fakat bunun karşıtının doğru olması gerekmez. Örneğin, $X = c_0$ ve $T : X \to X$ operatörü,
$T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, ...)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$T^2(x) = T(T(x)) = T(0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, ...) = (0, 0, ...)$$

yani $T^2 = 0$ elde edilir. O halde $T^2$ operatörü kompakttır yani $T$ operatörü kuvveti kompakttır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $T(e_{2n-1}) = e_{2n}$ dir. Öte yandan,
$e_n = (0, 0, ..., 0, n, 0, ...)$ olmak üzere $e_n \in c_0$ dir ve $n, k \in \mathbb{N}$ için $\|e_{n+k} - e_n\| = 1$ olduğundan $\{e_n\}$ dizisinin herhangi bir alt dizisinin terimleri 1 den küçük ve eşittir. O halde $\{e_n\}$ dizisinin hiçbir alt dizisi Cauchy olamaz. Dolayısıyla $\{e_n\}$ dizisinin hiç bir alt dizisi yakınsak olamaz. Bu durumda $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi göreceli kompakt değildir. Öte yandan $\{T(e_{2n-1}) : n \in \mathbb{N}\} = \{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq T(U_X)$ kapsaması geçerli olduğundan $T(U_X)$ kümesi göreceli kompakt olamaz. Kompakt operatörün tanımı gereği $T$ kompakt değildir.

**Teorem 2.4.4.** **[9, Teorem 3.2.9.]** $T \in B(X)$ kuvveti kompakt ve $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i$ olsun. Bu durumda $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ varsa $\|A_n - A\| \to 0$ dir.

**Teorem 2.4.5.** **[10, Sonuç 7.2.12.]** $\{K_n\}$ dizisi $\|K_n - K\| \to 0$ olacak şekilde kompakt operatörlerin bir dizisi ise $\rho(K_n) \to \rho(K)$ dir.

**Önerme 2.4.6.** $T \in B(X)$ kompakt ve $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i$ olsun. Bu durumda $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ varsa $\rho(A_n) \to \rho(A)$ dir.

**İspat.** $T \in B(X)$ kompakt bir operatör olsun. Bu durumda $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i$ şeklinde tanımlanan $\{A_n\}$ dizisi kompakt operatörlerin bir dizisidir. Hipotez gereği $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ olduğundan Teorem 2.4.1. kullanılarak $\|A_n - A\| \to 0$ bulunur. $\{A_n\}$ dizisi kompakt operatörlerin bir dizi ve $\|A_n - A\| \to 0$ olduğundan Teorem 2.4.5. den $\rho(A_n) \to \rho(A)$ elde edilir.

**Uyarı 2.4.7.** Uyarı 2.4.3. gözönüne alındığında Önerme 2.4.6. daki hipotez daha da zayıflatılarak aynı sonuç elde edilebilir. Bunu aşağıdaki önerme göstermektedir.

**Önerme 2.4.8.** $T \in B(X)$ kuvveti kompakt ve $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i$ olsun. Bu durumda $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ varsa $\rho(A_n) \to \rho(A)$ dir.

**İspat.** $T^N$, $N \in \mathbb{N}$ kompakt olsun. Her $n \geq N$ için $B_n := \frac{1}{n}(T + T^2 + ... + T^{N-1})$ ve $C_n := \frac{1}{n}(T^N + T^{N+1} + ... + T^n)$ dizileri tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = B_n + C_n$ yazılabilir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için $B_nC_n = C_nB_n$ olduğu gözlenir. $\|B_n\| \to 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.19. (1) kullanılarak $\rho(B_n) \leq \|B_n\| \to 0$ elde edilir. $T \in B(X)$ kuvveti kompakt bir operatör olduğundan $\{C_n\}$ dizisi kompakt operatörlerin bir dizisidir. Öte yandan hipotez gereği $A_n \to A$ olacak şekilde bir $A \in B(X)$ varolduğundan Teorem 2.4.4. kullanılarak $\|A_n - A\| \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|C_n - A\| = \|A_n - B_n - A\| \leq \|A_n - A\| + \|B_n\| \to 0$$

elde edilir. Yani $\|C_n - A\| \to 0$ bulunur. Teorem 2.4.5. den $\rho(C_n) \to \rho(A)$ elde edilir. Öte yandan Yardımcı Teorem 2.2.20. kullanılarak,

$$\begin{aligned}|\rho(A_n) - \rho(A)| = |\rho(B_n + C_n) - \rho(A)| &\leq |\rho(B_n) + \rho(C_n) - \rho(A)| \\ &\leq |\rho(B_n)| + |\rho(C_n) - \rho(A)| \to 0\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\rho(A_n) \to \rho(A)$ dir.

**Uyarı 2.4.9.** Ergodik teoride kullanılan aritmetik ortalama için spektral yarıçapın sürekliliği gösterildi. Ayrıca $T \in B(X)$ kuvveti kompakt bir operatör olması durumunda yukarıda tanımlanan $\{B_n\}$ dizisinin kompakt operatörlerin bir ailesi olması gerekmez. Dolayısıyla $\{A_n\}$ dizisinin kompakt operatörlerin bir ailesi olması gerekmez. Buna rağmen Teorem 2.4.5. sağlandı. Burada dikkat edilmesi gereken durum $\{B_n\}$ dizisindeki $T$ lerin kuvvetlerinin sonlu tane olmasıdır. Yani bu olumsuzluktan yakınsaklık etkilenmemektedir.

# 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışması oluşturulurken temel matematik bilgisinin yanı sıra operatör teori, fonksiyonel analiz, ergodik teori gibi matematiğin önemli alanlarından yararlanılmıştır. Tezin araştırma aşamasında çeşitli kitap, makale ve tez gibi dökümanlardan faydalanılmıştır. Faydalanılan bu eserler detaylı bir şekilde tezin kaynaklar bölümünde yer almaktadır.

Çalışma boyunca operatör aileleriyle çalışıldığından yöntem olarak operatör teori teknikleri kullanılmıştır.

# 4. BULGULAR

Bu bölümde tez çalışması sırasında elde edilen bazı önemli bulgulara yer verilmiştir. Tezin iki yardımcı ve iki temel bölüm olmak üzere dört bölümden oluştuğu görülmektedir. Birinci bölümde gerekli olan temel bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde spektral teoriye ihtiyaç duyulduğu kadarıyla yer verilmiş ve bazı önemli teoremler elde edilmiştir. Bu bölümün araştırma aşamasında özelikle Shulman ve Turovskii [6, Yardımcı Teorem 13.2] den yararlanılarak **Teorem 2.2.37.** oluşturulmuş ve kanıtlanmıştır. Ayrıca Abramovich ve Aliprantis [7] yazarlarına ait kitaptaki problemlerden ve elde edilen Teorem 2.2.37. den yararlanılarak **Teorem 2.2.39** oluşturulmuş ve kanıtlanmıştır. Bu teoremle bir spektral kümeyle ilgili spektral izdüşümün değer bölgesinin aslında Teorem 2.2.37. de elde edilen $Q_T(t)$ alt uzayı ile çakıştığı dolayısıyla $Q_T(t)$ nin spektral alt uzay olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca Teorem 2.3.39 da, belli bir $\lambda$ parametresi için trikotomi(üçseçki) özelliğinden yararlanılarak $Q_T(t)$ spektral alt uzayının bir karakterizasyonu yapılmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde birlikte kompakt kümelerle ilgili önemli özellikler ve teoremler detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Son bölümde ise birlikte kompakt kümelerin ergodik teoriye uygulamasıyla ilgili Higgins'in[9] çalışmasına yer verilmiştir. Tez çalışması boyunca kuvvetli ve düzgün yakınsaklık arasında köprü kurulmuştur. Uyarı 2.1.2. den anlaşılacağı üzere düzgün yakınsaklıktan kuvvetli yakınsaklığa geçiş doğal olarak sağlanmaktadır fakat karşıtının sınırlı ve doğrusal olan herhangi bir operatör ailesi için doğru olması gerekmez. Higgins çalışmasında, $\{A_n\}$ dizisi $T$ operatörünün kuvvetlerinin aritmetik ortalamasını göstermek üzere, bu dizi için kuvvetli yakınsaklığın düzgün olduğunu göstermiştir. Radjavi ve Rosenthal [10, Sonuç 7.2.12.] den düzgün yakınsayan bir kompakt operatör dizisi için spektral yarıçapın sürekli olduğu bilinmektedir. Tez çalışmasında, $\{A_n\}$ dizisi $T$ operatörünün kuvvetlerinin aritmetik ortalamasını göstermek üzere, bu dizi için spektral yarıçapın sürekliliği merak edilmiş ve araştırılmıştır. Öncelikle $T$ kompakt bir operatör olmak üzere $\{A_n\}$ dizisi için spektral yarıçapın sürekliliği

**Önerme 2.4.6.** te kanıtlanmıştır. Daha sonra bir adım öteye gidilerek, $T$ nin kompakt bir operatör olması hipotezi yerine daha zayıf bir hipotez olan $T$ kuvveti kompakt bir operatör olması durumunda da $\{A_n\}$ dizisi için spektral yarıçapın sürekliliği **Önerme 2.4.8.** de kanıtlanmıştır. Bu önermelerle Ergodik teoride sık sık karşılaşılan $\{A_n\}$ dizisi için spektral yarıçapın sürekliliği gösterilmiştir.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sonsuz boyutlu uzaylarda kompakt operatörlerle çalışıldığında, sonlu boyutlu uzaylarda elde edilen bilgilere çok yakın bilgiler elde edilmektedir. Örneğin sonlu boyutlu uzaylarda alınan bir operatörün spektrumu ile nokta spektrumu aynıdır, yani $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ dir. Öte yandan sonsuz boyutlu uzaylarda, $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ olduğu bilinmektedir. Sonsuz boyutlu uzayda kompakt bir operatör alındığında, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ olmaktadır, yani sonsuz boyutlu bir uzayda çalışılmasına rağmen kompakt operatörler sayesinde uzay sonlu boyutluymuş gibi davranmaktadır. Kompakt operatörlere ait özellikler ve spektral yapıları tamamen bilinmektedir. Birlikte kompakt küme kavramı aslında kompakt bir operatörün genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Ancak burada dikkat edilmesi gereken birlikte kompakt kümenin kompakt operatörlerden oluştuğu fakat kompakt operatörlerden oluşan sınırlı bir kümenin birlikte kompakt olmadığıdır.

Tez çalışmasının ilk bölümünde, temel kavramların yanı sıra $X$ Banach uzayı olmak üzere $B(X)$ uzayındaki temel yakınsaklıklar ve bu yakınsaklıklar arasındaki ilişkiler karşıt örnekler verilerek açıklanmıştır. Uyarı 2.1.2. de görüldüğü üzere düzgün yakınsaklıktan kuvvetli yakınsaklığa geçiş çok kolay bir şekilde sağlanmaktadır. Tez boyunca özellikle kuvvetli yakınsaklığın ne zaman düzgün olduğu üzerinde durulmuş ve kuvvetli yakınsaklığın bu eksikliği kompakt operatör aileleriyle giderilmeye çalışılmıştır. Özellikle son bölümdeki Higgins'in [9] çalışmasında, $\{A_n\}$ dizisi $T$ operatörünün kuvvetlerinin aritmetik ortalamasını göstermek üzere, bu dizi için kuvvetli yakınsaklığın düzgün olduğu gösterilmiştir. Yani bazı özel durumlarda kuvvetli yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğu görülmektedir.

Çalışmanın spektral teori kısmında, temel bilgilerin yanı sıra spektral küme, spektral izdüşüm ve spektral alt uzay kavramlarına değinilmiştir. Bilindiği üzere bir operatörün spektrumu kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesidir, yani bir başka bakış açısıyla bir alt uzay değildir. Dolayısıyla spektrumun alt kümeleri alt uzay olmak zorunda değildir. Spektrumun alt kümelerine alt uzay gözüyle bakabilmek için spektral küme kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Çünkü spektral küme yardımıyla spektral izdüşüm operatörü elde edilmekte ve spektral izdüşümün değer bölgesi bir alt uzay olmaktadır. Spektrumdan yararlanılarak elde edilen bu alt uzaya spektral alt uzay denilmektedir. Sonuç olarak bu alt uzaydan yararlanılarak, uzayın ayrışımı sözkonusu olmaktadır. Dolayısıyla spektral alt uzayın önemi artmaktadır. Tezin ikinci bölümünün sonunda, "Spektral bir alt uzay elde edilebilinir mi? Elde edilmesi halinde bu alt uzayın bir karakterizasyonunu yapmak mümkün müdür?" sorularına yanıt aranmış ve bu sorular elde edilen iki teoremle yanıtlanmıştır.

Tez çalışmasının son bölümünde, birlikte kompakt kümelerin Ergodik teoriye uygulamasına yer verilmiştir. Higgins [9] tarafından yapılan bu uygulamayla hem birlikte kompakt kümelerin somutlaştırılması sağlanmış hemde Ergodik teoriye yeni bir bakış açısı kazandırılmıştır. $\{A_n\}$ dizisi $T$ operatörünün kuvvetlerinin aritmetik ortalamasını göstermek üzere, bu dizi Ergodik teoride yaygın olarak kullanılmaktadır. Higgins [9] tarafından bu dizinin kuvvetli ve düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Higgins'in [9] bu çalışmasından yararlanılarak, "$\{A_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsaması halinde spektral yarıçap sürekli midir?" sorusu sorulmuş ve bu soruya bir önerme ile yanıt verilmiştir. Daha sonra $T$ nin kompakt olması hipotezi yerine $T$ nin kuvveti kompakt olması hipotezi getirilerek, bu durumda da aynı soruya bir başka önerme ile yanıt verilmiştir. Sonuç olarak bu önermelerle ikinci, üçüncü ve son bölüm arasında bir ilişki kurularak tezin bir uyum içinde olması sağlanmıştır.

## KAYNAKLAR


[**1**] KREYSZİG, E., 1989, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, The United States of America, ISBN 0-471-50731-8

[**2**] ABRAMOVİCH, Y.A., ve ALİPRANTİS, C.D., 2002, *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society, The United States of America, ISBN 0-8218-2146-6

[**3**] ANSELONE, P.M., 1971, *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*, Prentice-Hall, The United States of America, ISBN 13-140673-6

[**4**] DUNFORD, N., ve SCHWARTZ, J.T., 1958, *Linear Operators Part I*, Interscience Publishers, New York, ISBN 57-10545

[**5**] DANEŠ, J., 1984, On Local Spectral Radius, *Časopis Pro Pěstováni Matematiky*, No.2, 177-187

[**6**] SHULMAN, V.S., ve TUROVSKİİ, Y.V., 2000, Joint Spectral Radius, Operator Semigroups, and a Problem of W. Wojtyński, *Journal of Functional Analysis*, Vol. 177, 383-441

[**7**] ABRAMOVİCH, Y.A., ve ALİPRANTİS, C.D., 2002, *Problems in Operator Theory*, American Mathematical Society, The United States of America, ISBN 0-8 218-2147-4

[**8**] ANSELONE, P.M., ve PALMER, T.W., 1968, Spectral Analysis Of Collectively Compact, Strongly Convergent Operator Sequences, *Pasific Journal Of Mathematics*, Vol. 25, No. 3, 423-431

[**9**] HIGGINS, J.A., 1971, *Collectively Compact Sets of Linear Operators*, Thesis (PhD), New Mexico State University

[**10**] RADJAVİ, H., ve ROSENTHAL, P., 2000, *Simultaneous Triangularization*, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-98467-4

## ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Ankara'da doğdu. 1988-1996 yılları arasında, ilköğretimini Karlıyazı Köyü'nde; 1996-1999 yılları arasında, ortaöğretimini Ardahan'ın bir ilçesi olan Göle'de, 100.Yıl Lisesi'nde tamamladı. İlköğretimini ve ortaöğretimini birincilikle bitirdi. 1999 yılında üniversite sınavını kazanarak İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenimini sürdürdü. Bu bölümü, 1999-2003 yılları arasında, üçüncülükle bitirdi. Bazı imkansızlıklardan dolayı öğrenimine bir süre ara verdi. Daha sonra 2007 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans hayatına başladı ve devam etmektedir.