



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA UZAY HAREKETLERİ
VE
HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER**

**Handan YILDIRIM
Matematik Anabilim Dalı**

**Birinci Danışman
Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN**

**İkinci Danışman
Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**

Haziran, 2010

İSTANBUL

Bu çalışma, 28/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN (I. Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi




Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Bilecik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR
Bahçeşehir Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Yusuf AVCI
Bahçeşehir Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Doç. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu alışma, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliđi'nin 3370 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

"3-Boyutlu Lorentz Uzayında Uzay Hareketleri ve Holditch-Tipi Teoremler" başlıklı doktora tez konumu belirleyen, ikinci danışmanlığımı üstlenip doktora başladığım günden itibaren çalışmalarımı titizlikle yönlendirerek, tezimin alt yapısının kurulmasından son halini alması aşamasına kadar geçen sürede üzerimde büyük emeği olan çok değerli hocam Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU'na en içten dileklerle teşekkür ederim. Ayrıca doktora başladığım günden emekli olduğu güne kadar birinci danışmanlığımı yürüten değerli hocam Prof. Dr. Erhan GÜZEL'e ve bu süreçten sonra birinci danışmanlığımı üstlenen değerli hocam Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN'e desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Tez izleme komitesinde bulunan Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR ve Doç. Dr. Salim YÜCE hocalarım ile TÜBİTAK'tan kazanmış olduğum "Yurt Dışı Araştırma Bursu" ile üç ay süre için bulunduğum Japonya'da direktörlüğümü yapan Prof. Dr. Shyuichi IZUMIYA'ya, bilgilerini ve tecrübelerini esirgemeyerek sağladıkları katkılardan dolayı ayrı ayrı teşekkür ederim.

TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na, "2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı", "2214-Yurt Dışı Araştırma Burs Programı" ve "2223-Yurt İçi Bilimsel Etkinlikleri Destekleme Programı" kapsamlarında, doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları destekler için teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Haziran, 2010

Handan YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. E^n n -BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARI	5
2.2. E^3 DE BİR YÜZEY PARÇASININ DİK İZDÜŞÜM ALANI	17
2.3. E^n DE HAREKETLER	19
2.4. E^3 DE HACİMLER İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER	21
2.5. E^3 DE KAPALI YÖRÜNGE YÜZEYLERİNİN PARÇALARININ DİK İZDÜŞÜM ALANLARI İÇİN BİR HOLDITCH-TİPİ TEOREM	54
2.6. L^n n -BOYUTLU LORENTZ UZAYLARI	71
3. MALZEME VE YÖNTEM	77
4. BULGULAR	78
4.1. L^3 DE HAREKETLER	78
4.2. L^3 DE 3-PARAMETRELİ UZAY HAREKETİ ALTINDA SABİT UZAYDA BELİRLENEN BÖLGENİN HACMI	88
4.3. L^3 DE HACİMLER İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER	95
4.4. L^3 DE BİR YÜZEY PARÇASININ DİK İZDÜŞÜM ALANI	116

4.5. L^3 DE KAPALI YÖRÜNGE YÜZEYLERİNİN PARÇALARININ DİK İZDÜŞÜM ALANLARI İÇİN BİR HOLDITCH-TİPİ TEOREM	119
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	141
KAYNAKLAR	144
ÖZGEÇMİŞ	148

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	: Holditch Halkası	2
Şekil 2.1	: Hareketli ve sabit dik çatılar	22
Şekil 2.2	: Hareketli uzayda sabit bir üçgen	52

SEMBOL LİSTESİ

E^n	: n -boyutlu Öklid uzayı
\langle , \rangle	: Öklid iç çarpımı
$\ \ $: norm
\wedge	: dış çarpım
\times	: vektörel çarpım
\mathbb{R}	: reel sayılar cümlesi
\mathbb{R}_n^m	: \mathbb{R} üzerinde $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$O(n)$: ortogonal matrislerin cümlesi
$SO(n)$: özel ortogonal matrislerin cümlesi
L^n	: n -boyutlu Lorentz uzayı
\langle , \rangle_L	: Lorentz anlamında iç çarpım
$\ \ _L$: Lorentz anlamında norm
\times_L	: Lorentz anlamında vektörel çarpım
$O_1(n)$: Lorentz anlamında ortogonal matrislerin cümlesi
$SO_1(n)$: Lorentz anlamında özel ortogonal matrislerin cümlesi
R	: hareketli uzay
R'	: sabit uzay
R/R'	: R hareketli uzayının R' sabit uzayına göre hareketi
B_1	: E^3 de R hareketli Öklid uzayının R' sabit Öklid uzayına göre 1-parametrelili uzay hareketi
B_2	: E^3 de R hareketli Öklid uzayının R' sabit Öklid uzayına göre 2-parametrelili uzay hareketi
B_3	: E^3 de R hareketli Öklid uzayının R' sabit Öklid uzayına göre 3-parametrelili uzay hareketi
\mathcal{B}_1	: L^3 de R hareketli Lorentz uzayının R' sabit Lorentz uzayına göre 1-parametrelili uzay hareketi
\mathcal{B}_2	: L^3 de R hareketli Lorentz uzayının R' sabit Lorentz uzayına göre 2-parametrelili uzay hareketi
\mathcal{B}_3	: L^3 de R hareketli Lorentz uzayının R' sabit Lorentz uzayına göre 3-parametrelili uzay hareketi
\bar{X}_A	: R/R' uzay hareketi altında bir $X \in R$ noktasının mutlak hız vektörü

\vec{X}_R	: R/R' uzay hareketi altında bir $X \in R$ noktasının relatif hız vektörü
\vec{X}_F	: R/R' uzay hareketi altında bir $X \in R$ noktasının sürüklenme hız vektörü
G	: 3-boyutlu parametre uzayında -sınırı, bir kürenin bağlantılılık yapısına sahip, kapalı ve yönlendirilebilir bir yüzey olan- bir bölge
$R(G)$: 3-boyutlu parametre uzayının G bölgesinin, bir kürenin bağlantılılık yapısına sahip, kapalı ve yönlendirilebilir sınır yüzeyi
dJ_X	: 3-parametrelili uzay hareketi altında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi
J_X	: 3-parametrelili uzay hareketi altında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin hacmi
J_{XY}	: 3-parametrelili uzay hareketi altında $X, Y \in R$ sabit noktalarının R' de belirledikleri karışık yörünge hacmi
Ψ_X	: 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin, üzerinde tanımlı olduğu $R(G)$ parametre bölgesinin -bir çemberin bağlantılılık yapısına sahip- bir Γ alt bölgesi üzerinde tanımlı, bir parçası
$d\vec{F}'_X$: 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında Ψ_X yüzey parçasının vektörel alan elementi
\vec{F}'_X	: 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında Ψ_X yüzey parçasının alan vektörü
\vec{F}'_{XY}	: 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında $X, Y \in R$ sabit noktalarının R' de belirledikleri karışık alan vektörü
F'''_X	: 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında Ψ_X yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşümünün alanı

ÖZET

3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA UZAY HAREKETLERİ VE HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasında; L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında 3-parametrelili uzay hareketi ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, Holditch-Tipi Teoremler ve bazı sonuçlar ifade ve ispat edilmiştir.

Birinci bölümde; E^2 Öklid düzleminde klasik Holditch Teoremi ifade edildikten sonra, bu teoremle ilgili bazı önemli çalışmaların genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

Altı alt bölümden oluşan ikinci bölümde; Öklid uzayları ile ilgili bazı temel kavramlar anlatılmıştır ve E^3 3-boyutlu Öklid uzayında 3-parametrelili uzay hareketi ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, Holditch-Tipi Teoremler ve bazı sonuçlar incelenmiştir. Bunlara ek olarak, tezin orjinal bölümünde gerek duyulacak olan Lorentz uzayları ile ilgili bazı ön bilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise bu araştırmanın metodolojisi özetlenmiştir.

Tezin orjinal bölümü olan dördüncü bölüm, beş alt bölümden oluşmaktadır. Alt bölüm 4.1 de, L^3 de uzay hareketlerinin türev denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca bu uzay hareketleri altında, hız vektörleri tanımlanmıştır ve bu hız vektörleri arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Bunların yanı sıra L^3 de 1-parametrelili, 2-parametrelili ve 3-parametrelili uzay hareketleri tanımlanmıştır. Alt bölüm 4.2 de, L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında hareketli uzayın herhangi bir sabit noktası tarafından sabit uzayda belirlenen bölgenin hacim elementi ve hacim formülleri bulunmuştur. Alt bölüm 4.3 de; öncelikle bu uzay hareketi altında, hareketli uzayın doğrudan üç sabit noktası tarafından sabit uzayda belirlenen bölgelerin hacimleri arasındaki ilişki kullanılarak, Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Sonra da bu teorem, hareketli uzayın bir düzlemi üzerindeki üçü doğrudan olmayan dört sabit nokta için genelleştirilmiştir. Alt bölüm 4.4 de, L^3 de herhangi bir yüzeyin bir parçasının dik izdüşüm alanı ile ilgili bazı ön bilgiler sunulmuştur. Alt bölüm 4.5 de; öncelikle L^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, hareketli uzayın herhangi bir sabit noktası tarafından sabit uzayda çizilen kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri bulunmuştur. Sonra da bu kapalı uzay hareketi altında, hareketli uzayın doğrudan üç sabit noktası tarafından sabit uzayda çizilen kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının dik izdüşüm alanları arasındaki ilişki göz önüne alınarak, Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem ve bazı sonuçları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu tezin bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

SUMMARY

SPATIAL MOTIONS AND THE HOLDITCH-TYPE THEOREMS IN 3-DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE

In this thesis, which consists of five sections, the Holditch-Type Theorems and some corollaries under 3-parameter spatial motion and 2-parameter closed spatial motion in 3-dimensional Lorentzian space L^3 are expressed and proved.

In the first section, after the classical Holditch Theorem in Euclidean plane E^2 is expressed, a general evaluation of some important studies related with this theorem is discussed.

In the second section, which comprises of six subsections, some fundamental concepts about Euclidean spaces are explained and the Holditch-Type Theorems and some corollaries under 3-parameter spatial motion and 2-parameter closed spatial motion in 3-dimensional Euclidean space E^3 are examined. In addition to these, some preliminaries about Lorentzian spaces which will be needed in the original section of this thesis are presented.

In the third section, the methodology of this research is summerized.

The fourth section, which is the original section of this thesis, consists of five subsections. In subsection 4.1, the derivative equations of the spatial motions in L^3 are obtained. Moreover, the velocity vectors under these spatial motions are defined and some relations among these velocity vectors are given. Furthermore, 1-parameter, 2-parameter and 3-parameter spatial motions in L^3 are defined. In subsection 4.2, the formulas of volume element and volume of the region which is determined in the fixed space by any fixed point of the moving space under 3-parameter spatial motion in L^3 are found. In subsection 4.3, first of all, a Holditch-Type Theorem in the sense of Lorentzian by using the relation among the volumes of the regions which are determined in the fixed space by collinear three fixed points of the moving space and some corollaries are obtained under this spatial motion. Then, this theorem is generalized for four fixed points on a plane of the moving space three of which are noncollinear. In subsection 4.4, some preliminaries about the orthogonal projection area of a part of any surface in L^3 are presented. In subsection 4.5, firstly, the formulas of vectoral area element and area vector of a part of the closed trajectory surface which is drawn in the fixed space by any fixed point of the moving space under 2-parameter closed spatial motion in L^3 are found. Then, considering the relation among the orthogonal projection areas of the parts of the closed trajectory surfaces which are drawn in the fixed space by collinear three fixed points of the moving space, a Holditch-Type Theorem in the sense of Lorentzian and some corollaries of it are obtained under this closed spatial motion.

In the fifth section, an evaluation of this thesis is discussed.

1. GİRİŞ

Kinematik; mekaniğin kuvvet ve kütle kavramlarının hiçbir rol oynamadığı bir alt dalı olup, bir noktanın veya nokta sisteminin zamana bağlı olarak meydana getirdiği yer değiştirmelerini inceler, [1].

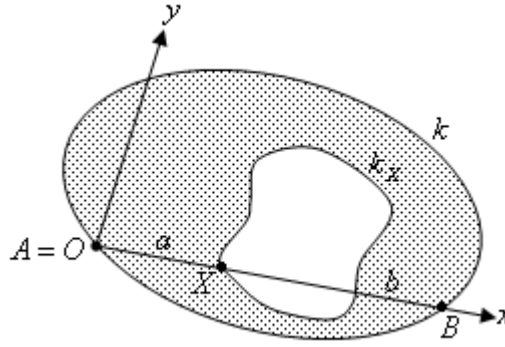
Günümüze kadar kinematik üzerine pek çok çalışma yapılmıştır [1-46] ve halen de yapılmaya devam edilmektedir. 19. yüzyılda 1-parametrelî kapalı düzlemsel hareket altında Holditch tarafından ifade edilen "Klasik Holditch Teoremi" [2] ve Steiner tarafından verilen "Steiner Alan Formülü" [3], kinematik ile ilgili yapılmış çalışmaların bilinen en temel örneklerindedir. Bu sebeple "Klasik Holditch Teoremi" [2] ve "Steiner Alan Formülü" [3], daha sonra birçok bilim adamı tarafından -düzlem, küre ve uzay kinematiğinde- farklı bakış açıları ile çalışılarak değişik metodlar ile geliştirilmiştir, [1,4-14,16,17,19-33,36-39,42,43,45,46]. Bu örneklere dair pek çok çalışma, "Geometri" nin çeşitli dallarına ilişkin bilime önemli katkılar sağlayacak düzeydeki birçok kaynağı içeren "Geometrie und ihre Anwendungen" ("Geometri ve Uygulamaları") [47] adlı kitapta da bulunmaktadır.

Holditch [2], geliştirilmişleri literatürde "Holditch-Tipi Teoremler" olarak adlandırılan ve bu tez çalışması için de temel bir unsur olan "Klasik Holditch Teoremi" ni aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

Düzlemde sabit $a + b$ uzunluklu bir AB doğru parçasının A ve B uç noktaları bir k ovali boyunca bir defa dolandırıldığında, AB doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktası ($\overline{AX} = a$, $\overline{XB} = b$) da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir k_X eğrisini çizer, (Şekil 1.1 e bakınız.). Bu k ovali ile k_X eğrisi arasında kalan "Holditch Halkası" nın F yüzey alanı,

$$F = \pi ab$$

dir. Burada F yüzey alanı, sadece X noktasının AB doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklıklarına bağlı olup, k ile k_x eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır.



Şekil 1.1: Holditch Halkası

Bu klasik Holditch Teoremi'nin uzayda çalışılan en önemli genelleştirilmişlerinden bazıları aşağıda özetlenmiştir:

1980 yılında Müller [23]; E^3 3-boyutlu Öklid uzayında 1-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge eğrisinin herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünü alarak, izdüşüm eğrisinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alan formülünü vermiştir. Ayrıca bu uzay hareketi esnasında, hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda çizdikleri kapalı yörünge eğrilerinin dik izdüşüm eğrilerinin sınırladıkları düzlemsel bölgelerin alanları arasındaki ilişkiyi kullanarak; izdüşümüne ve 1-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımladığı -hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki uzaklık sayesinde, klasik Holditch Teoremi'nin [2]; uzayda bir genelleştirilmişini ifade etmiştir. 1989 yılında da Güneş ve diğ. [31], bu teoremin iki önemli sonucunu elde etmiştir.

1948 yılında Blaschke [11]; E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda belirlediği bölgenin hacim elementi ve hacim formüllerini vermiş ve bu uzay hareketi altında, eşit hacme sahip bölgeler belirleyen hareketli uzayın bütün sabit noktalarının aynı bir kuadrik üzerinde bulunacağını ifade

etmiştir. 1979 yılında ise Müller [22]; E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi esnasında hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi kullanarak, 3-parametrelili uzay hareketine ve onunla birlikte oluşan 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımladığı -hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki- uzaklık sayesinde, klasik Holditch Teoremi'ne [2] uzayda eşdeğer olan bir Holditch-Tipi Teorem elde etmiştir. Ayrıca 1979 ve 1982 yıllarında Müller [22,26]; bu uzay hareketi altında, hareketli uzaydaki doğrudan olmayan üç sabit nokta ve bu noktalar tarafından tanımlanan düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta için bu teoremi genelleştirmiştir. Bununla birlikte bu uzay hareketi esnasında, bazı önemli sonuçlar da elde etmiştir, [26].

1987 yılında ise Müller [30]; E^3 de vektörel alan elementi ve alan vektörü kavramları yardımıyla, öncelikle 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formüllerini vermiştir. Sonra da bu kapalı uzay hareketi esnasında, hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının bir düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alanları arasındaki ilişkiyi kullanarak; izdüşüme ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımladığı -hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki- uzaklık sayesinde, klasik Holditch Teoremi'ne [2] uzayda eşdeğer olan başka bir Holditch-Tipi Teorem elde etmiştir. 1989 yılında da Güneş ve diğ. [32], bu teoremin iki önemli sonucunu ifade etmiştir.

Son yıllarda, Lorentz düzleminde ve uzayında da hareketler üzerine çalışılmaya başlanmıştır, [33-35,39-42,44-46]. Yıldırım ve diğ., Müller'in 1-parametrelili kapalı uzay hareketi altında verdiği sonuçların [23]; Lorentz uzayındaki karşılıklarını, [45] de araştırmışlardır.

Bu tez çalışmasında da E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında elde edilmiş olan Holditch-Tipi Teoremler'in ve bazı sonuçların [11,22,26,30,32]; L^3 3-boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıkları, aşağıda belirtilen dört adımda incelenmiştir:

i) L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda belirlediği bölgenin hacim elementi ve hacim formülleri bulunmuştur.

ii) E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi esnasında, hacimler ile ilgili ifade edilen Holditch-Tipi Teoremler'in ve bazı önemli sonuçların [11,22,26]; L^3 deki karşılıkları verilmiştir. Ayrıca L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, bazı önemli sonuçlar da elde edilmiştir.

iii) L^3 de vektörel alan elementi ve alan vektörü kavramları yardımıyla, 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri bulunmuştur.

iv) E^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının bir düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alanları için Müller tarafından ifade edilen Holditch-Tipi Teorem'in [30] ve bu teoremin Güneş ve diğ. tarafından elde edilen iki önemli sonucunun [32]; L^3 deki karşılıkları verilmiştir. Bunun için L^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında; hareketli uzayda ele alınan sabit noktalar tarafından sabit uzayda çizilen kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının, $\vec{e}' = \vec{e}'_3$ birim normal vektörü doğrultusunda, $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları göz önüne alınmıştır.

Tez çalışması için gerekli olan temel tanımlar ve teoremler, "Genel Kısımlar" başlığı altında ikinci bölümde; araştırmanın metodolojisi, "Malzeme ve Yöntem" başlığı altında üçüncü bölümde; araştırma konusuyla ilgili elde edilen sonuçlar, "Bulgular" başlığı altında dördüncü bölümde; elde edilen tüm sonuçların bir değerlendirilmesi ile bu sonuçların literatüre katkıları ve çalışma sonucunda ortaya çıkan açık problemler de "Tartışma ve Sonuç" başlığı altında beşinci bölümde verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, doktora tez çalışması için gerekli olan temel tanımlar ve teoremler sunulmuştur, [1,11,15,18,22,23,26,30,32,48-59].

2.1. E^n n -BOYUTLU ÖKLİD UZAYLARI

Bu alt bölümde, E^n n -boyutlu Öklid uzayları ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir, [1,48-53].

Tanım 2.1.1: A , boş olmayan bir küme ve V de bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\forall P, Q \in A$ için

$$\begin{aligned} \Phi : A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow \Phi(P, Q) = \overline{PQ} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan bir Φ dönüşümü, aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$,

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\overline{PQ} = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır, [48].

Burada A nın boyutu, $\text{boy}A = \text{boy}V$ olarak tanımlanır, [48].

Örnek 2.1.1: $V = \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall P = \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall Q = \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için Φ dönüşümü,

$$\begin{aligned} \Phi : A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow \Phi(P, Q) = \overline{PQ} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa; $A = \mathbb{R}^n$ nokta cümlesi, $V = \mathbb{R}^n$ n -boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olur. Bu afin uzaya, n -boyutlu standart reel afin uzay denir, [48].

Tanım 2.1.2: V , n -boyutlu bir reel vektör uzayı ve A da V ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. Eğer V ; bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına, n -boyutlu bir Öklid uzayı denir ve bu uzay, genellikle E^n ile gösterilir, [48].

Tanım 2.1.3: \mathbb{R}^n n -boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle , \rangle (\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma, \mathbb{R}^n de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu \mathbb{R}^n vektör uzayı ile birleşen \mathbb{R}^n afin uzayına da n -boyutlu standart Öklid uzayı denir ve bu uzay, E^n ile gösterilir, [48].

Tanım 2.1.4: E^n , n -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleştirilmiş bir Öklid uzayı ve $\| \cdot \|$ da V üzerinde tanımlı norm olmak üzere; $\forall X, Y \in E^n$ için

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow d(X, Y) = \|\overline{XY}\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna, E^n de uzaklık fonksiyonu ve $\|\overline{XY}\|$ reel sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir. Ayrıca d uzaklık fonksiyonu bir metrik olup, bu metrik; Öklid metriği olarak adlandırılır, [48].

Tanım 2.1.5: V_1 ve V_2 , iki vektör uzayı; A_1 ve A_2 , sırasıyla, bu vektör uzayları ile birleştirilmiş iki afin uzay ve f de

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

şeklinde bir dönüşüm olsun. O takdirde $\forall P, Q \in A_1$ için

$$\begin{aligned} \psi_P : V_1 &\rightarrow V_2 \\ \overrightarrow{PQ} &\rightarrow \psi_P(\overrightarrow{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ψ_P dönüşümüne, f ile birleşen bir dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_P dönüşümü lineer ise f dönüşümüne, bir afin dönüşüm denir, [48].

Tanım 2.1.6: E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu reel iç çarpım uzayları ile birleştirilmiş birer Öklid uzayı olsun. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü, $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V_1$ için

$$\langle \overline{\psi(\vec{\alpha})}, \overline{\psi(\vec{\beta})} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa; f ye, bir izometri denir, [48].

Teorem 2.1.1: $f : E_1^n \rightarrow E_2^n$ dönüşümü, bir izometri ise

i) $\forall A, B \in E_1^n$ için $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ dir,

ii) f , bire-bir ve üzerinedir,

iii) E_1^n ve E_2^n Öklid uzaylarındaki dik koordinat sistemleri, sırasıyla, $\{x_1, \dots, x_n\}$ ve $\{y_1, \dots, y_n\}$ ile gösterilirse; f izometrisi, $A = [a_{ij}] \in O(n)$ ve $C = [c_i] \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir, [48].

Tanım 2.1.7: U , E^n de bir açık alt cümle ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; boştan farklı bir

$$M = \{X \in U \subset E^n \mid f(X) = c = \text{sabit}\}$$

cümlesine, $\forall P \in M$ için $\nabla f|_P \neq \vec{0}$ olmak üzere, E^n de bir $(n-1)$ -yüzey denir. E^2 de bir 1-yüzeye, düzlemsel eğri; E^3 de bir 2-yüzeye de sadece yüzey denir. Ayrıca $n > 3$ olması halinde, E^n de bir $(n-1)$ -yüzeye de bir hiperyüzey denir, [49].

Tanım 2.1.8: A , V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için (P, \vec{v}) sıralı ikilisine, A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir, [50].

A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi,

$$T_P A = \{(P, \vec{v}) = \vec{v}_P \mid \vec{v} \in V, P \in A\}$$

ile gösterilir. $T_p A$ da, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \oplus : T_p A \times T_p A &\rightarrow T_p A \\ (\vec{v}_p, \vec{u}_p) &\rightarrow \vec{v}_p \oplus \vec{u}_p = (\vec{v} + \vec{u})_p \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_p A &\rightarrow T_p A \\ (\lambda, \vec{v}_p) &\rightarrow \lambda \odot \vec{v}_p = (\lambda \vec{v})_p \end{aligned}$$

şeklinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlansın. Bu işlemler ile birlikte $\{T_p A, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı, reel bir vektör uzayıdır. Burada \mathbb{R} , A nın birleştiği V vektör uzayının cisimidir, [50].

Tanım 2.1.9: $\{T_p A, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve bu uzay, kısaca $T_p A$ ile gösterilir, [50].

Özel olarak, A afin uzayı yerine E^n Öklid uzayı alınırsa; $T_p E^n$ tanjant uzayından bahsedilir, [50].

Tanım 2.1.10: $P \in E^n$ noktasında tanımlı olan $T_p E^n$ tanjant uzayının dual uzayına, $P \in E^n$ noktasında E^n nin kotanjan uzayı denir ve bu uzay,

$$T_p^* E^n = \left\{ \phi_p \mid \phi_p : T_p E^n \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Her $\phi_p \in T_p^* E^n$ vektörüne de E^n nin P noktasındaki bir kotanjan vektörü veya kovektörü denir, [51].

Tanım 2.1.11: Bir $\phi: E^n \rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_P^* E^n$ dönüşümü için

$$\begin{aligned} \pi: \bigcup_{P \in E^n} T_P^* E^n &\rightarrow E^n \\ \phi_P &\rightarrow \pi(\phi_P) = P \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan π dönüşümü ile $\pi \circ \phi = I: E^n \rightarrow E^n$ bağıntısı sağlanıyor ise ϕ ye, E^n üzerinde bir 1-form denir, [51].

Teorem 2.1.2: E^n üzerindeki koordinat fonksiyonları, x_1, \dots, x_n olmak üzere; dx_1, \dots, dx_n 1-formları, E^n üzerindeki 1-formların vektör uzayının bir bazını oluşturur, [51].

Teorem 2.1.3: Bir $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, diferansiyellenebilir ise df 1-formu için

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

bağıntısı mevcuttur, [51].

Tanım 2.1.12: \mathbb{R} cismi üzerinde r tane vektör uzayı V_1, \dots, V_r olsun. Bir

$$f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$ için $\vec{u}_i, \vec{v}_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, a\vec{u}_i + b\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_r) &= a f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_r) \\ &+ b f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise f ye, bir r -lineer fonksiyon denir, [50].

r -lineer fonksiyonların cümlesi, $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R})$ ile gösterilir, [50].

Tanım 2.1.13: $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V_1 \times \dots \times V_r \text{ } r\text{-lineer } \mathbb{R}\}$ cümlesinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri, $\forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) \in V_1 \times \dots \times V_r$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için, sırasıyla,

$$(f_1 + f_2)(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = f_1(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) + f_2(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$$

ve

$$(\lambda f)(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = \lambda f(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$$

şeklinde tanımlanırsa; bu cümle, bu iki işleme göre \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına, V_1^*, \dots, V_r^* dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve bu uzay,

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına da r . dereceden bir tensör denir. O halde r . dereceden bir tensör, bir r -lineer fonksiyondur. Eğer

$$V_1 = \dots = V_r = V$$

ise $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-tane}}$ uzayına, kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r . dereceden kovaryant bir tensör denir. $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-tane}}$ uzayı, kısaca $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir, [50].

Örnek 2.1.2: Bir V reel vektör uzayının duali olan V^* in elemanları, 1. dereceden kovaryant tensörlerdir. Çünkü

$$T^1(V) = \otimes^1 V^* = V^* = \{f \mid f : V \text{ lineer } \mathbb{R}\}, [50].$$

Örnek 2.1.3: Bir V reel vektör uzayı üzerinde tanımlanan bir iç çarpım fonksiyonu, 2. dereceden kovaryant bir tensördür, [50].

Örnek 2.1.4: \mathbb{R}^n üzerinde tanımlanan determinant fonksiyonu, n . dereceden kovaryant bir tensördür, [50].

Tanım 2.1.14: Bir $\mathcal{L}\left(\underbrace{V, \dots, V}_{r\text{-tane}}; \mathbb{R}\right)$ kovaryant tensör uzayında, V yerine dual uzayı V^* alınır; $(V^*)^*$ uzayı, V vektör uzayına izomorf olduğundan;

$$\mathcal{L}\left(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{r\text{-tane}}; \mathbb{R}\right) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-tane}} = \otimes^r V = T_r(V^*)$$

şeklinde yazılan V^* üzerindeki r -lineer fonksiyonların vektör uzayına, kontravaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r . dereceden kontravaryant bir tensör denir, [50].

Örnek 2.1.5: Bir V vektör uzayının elemanları, 1. dereceden kontravaryant tensörlerdir. Yani,

$$T_1(V^*) = \otimes^1 V = V = \{f \mid f : V^* \text{ lineer } \mathbb{R}\}$$

yazılabilir, [50].

Tanım 2.1.15: V , sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı ve V^* da V nin dual uzayı olsun.

$$\mathcal{L}(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V^r \times V^{*s} \text{ (r+s)-lineer } \mathbb{R}\}$$

cümlesi, Tanım 2.1.13 de verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya, r . dereceden kovaryant ve s . dereceden kontravaryant bir tensör

uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da (r, s) - tipinde bir tensör adı verilir. Bu uzay,

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V)$$

veya

$$T_s^r(V)$$

şeklinde gösterilir, [50].

Örnek 2.1.6: Reel sayılar, 0. dereceden kovaryant ve 0. dereceden kontravaryant olan $(0, 0)$ - tipindeki tensörlerdir, [50].

Tanım 2.1.16: $f \in \otimes^n(V^*)$ ve $g \in \otimes^m(V^*)$ olmak üzere; f ile g nin tensörel çarpımı $f \otimes g$, $\forall(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in V^n$ ve $\forall(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) \in V^m$ için

$$(f \otimes g)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) = f(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) g(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$$

şeklinde tanımlanır. $f \otimes g$ nin $(n + m)$. dereceden bir tensör olduğu açıktır, [50].

Tensörel çarpım, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $(f_1 + f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_3,$

ii) $f_1 \otimes (f_2 + f_3) = f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes f_3,$

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda f_1) \otimes f_2 = f_1 \otimes (\lambda f_2) = \lambda(f_1 \otimes f_2),$

iv) $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3),$ [50].

Tanım 2.1.17: $\sigma \in S_2$ ve $f \in \otimes^2 V^*$ olmak üzere, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ için

$$(\sigma f)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = f(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)})$$

dir. Bu durumda $\forall \sigma \in S_2$ için $\sigma f = s(\sigma)f$ ise f ye, 2. dereceden kovaryant alterne bir tensör denir. Burada $S_2, \{1,2\}$ cümlesinin permütasyonlarının grubudur, [50].

$\otimes^2 V^* = T^2(V)$ uzayının kovaryant alterne tensörlerinin cümlesi,

$$\wedge^2 V^* = \{f \mid \sigma f = s(\sigma)f, \sigma \in S_2, f \in \otimes^2 V^*\}$$

ile gösterilir ve $\wedge^2 V^*, \otimes^2 V^*$ uzayının bir alt uzayıdır, [50].

Tanım 2.1.18: Bir

$$A_2 : \otimes^2 V^* \xrightarrow{\text{lineer}} \otimes^2 V^*$$

dönüşümü, $\forall f \in \otimes^2 V^*$ için

$$A_2(f) = \sum_{\sigma \in S_2} s(\sigma) \sigma f$$

şeklinde tanımlanırsa; A_2 dönüşümüne, $\otimes^2 V^*$ vektör uzayı üzerinde bir alterneleyen operatör denir, [50].

Teorem 2.1.4: $\forall f \in \otimes^2 V^*$ için $A_2(f) \in \wedge^2 V^*$ dir, [50].

Tanım 2.1.19: $\forall f, g \in T^1(V)$ için

$$\begin{aligned} \wedge : T^1(V) \times T^1(V) &\rightarrow \wedge^2 V^* \\ (f, g) &\rightarrow \wedge(f, g) = f \wedge g = A_2(f \otimes g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı \wedge fonksiyonuna, dış çarpım fonksiyonu ve $f \wedge g$ alterne tensörüne de f ile g tensörlerinin dış çarpımı denir, [50].

Dış çarpımın özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 2.1.5: $f, g, h \in T^1(V)$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in V \times V$ için

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= f(\bar{x}_1)g(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_2)g(\bar{x}_1) \\ &= (f \otimes g)(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - (g \otimes f)(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ &= (f \otimes g - g \otimes f)(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{aligned}$$

ii) $f \wedge f = 0$,

iii) $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$,

iv) $f \wedge g = -g \wedge f$,

v) $(af) \wedge g = f \wedge (ag) = a(f \wedge g)$, [50].

Tanım 2.1.20: $\xi = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ ve $\eta = \sum_{i=1}^n b_i dx_i$, n -değişkenli iki 1-form olsun. O takdirde

$$\xi \wedge \eta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j$$

ifadesine, ξ ve η 1-formlarının dış çarpımı denir. Burada $\xi \wedge \eta$ çarpımı, bir 2-formdur, [1,52].

Tanım 2.1.21: n -değişkenli bir $\xi = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ 1-formunun dış türevi, $d\xi$ ile gösterilir

ve

$$d\xi = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

şeklinde tanımlanır, [1,51,52].

Dış türev aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) f , bir skaler fonksiyon (0-form) ve ξ , bir 1-form olmak üzere;

$$d(f\xi) = df \wedge \xi + f d\xi$$

eşitliği geçerlidir.

ii) ξ ve η , iki 1-form olmak üzere;

$$d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta - \xi \wedge d\eta$$

eşitliği geçerlidir.

iii) ξ , herhangi bir diferansiyel form ise $d(d\xi) = 0$ dır.

iv) $\xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_j$, $1 \leq i \leq k$, 1-formları verilsin. Buna göre

$$\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_k = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \dots & a_{kj_k} \end{vmatrix} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eşitliği geçerli olur, [1,51,52].

Teorem 2.1.6: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ gibi k tane 1-formun lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_k = 0$ olmasıdır, [1,53].

2.2. E^3 DE BİR YÜZEY PARÇASININ DİK İZDÜŞÜM ALANI

Bu alt bölümde; E^3 de, yüzeylerin diferansiyel geometrisine ilişkin bilgiler göz önünde bulundurularak, bir yüzey parçasının herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümünün alanı ile ilgili temel kavramlar verilmiştir, [1,30].

Ψ ; E^3 de u ve v parametreleri üzerinde tanımlı olan bir yüzeyin, bu parametrelerin bölgesinin -bir çemberin bağlantılılık yapısına sahip- bir Γ alt bölgesi üzerinde tanımlı, bir parçası ve $X = X(u, v)$ de bu Ψ yüzey parçası üzerinde bir nokta olsun. $x_i(u, v)$, $1 \leq i \leq 3$, koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan;

$$g_{11} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle, \quad g_{12} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle \quad \text{ve} \quad g_{22} = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle$$

olmak üzere,

$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^2 = W^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

yazılabilir, [1,30].

Tanım 2.2.1: Γ bölgesi üzerinde

$$dF = W \, du \wedge dv \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan dF ifadesine, Ψ yüzey parçasının bir X noktasındaki skaler alan elementi denir, [1,30].

Tanım 2.2.2: Ψ yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için

$$\vec{n} = \frac{1}{W} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanan vektöre, Ψ nin X noktasındaki birim normal vektörü denir. Burada " \times " sembolü, vektörler arasındaki vektörel çarpımı göstermektedir, [1,30].

Tanım 2.2.3: Ψ yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} d\vec{x} \hat{\times} d\vec{x} \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanan vektöre, Ψ nin vektörel alan elementi denir. Burada " $\hat{\times}$ " işlemi, vektörler arasındaki vektörel çarpımı ve 1-formlar arasındaki dış çarpımı göstermektedir. Ayrıca $d\vec{F}$ vektörü; X noktasında Ψ nin normalini doğrultusunda olup, normu bu noktada Ψ nin skaler alan elementinden ibarettir, [1,30].

Eğer $d\vec{x} = \vec{x}_u du + \vec{x}_v dv$, (2.2.1) ve (2.2.2) denklemleri; (2.2.3) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} d\vec{x} \hat{\times} d\vec{x} = \vec{n} dF \quad (2.2.4)$$

yazılabilir, [1,30].

Tanım 2.2.4: Γ bölgesi üzerinde,

$$\vec{F} = \iint_{\Gamma} d\vec{F} \quad (2.2.5)$$

şeklinde tanımlanan vektöre; Ψ yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için Ψ nin alan vektörü denir, [30].

Şimdi, Ψ yüzey parçasının $d\vec{F}$ vektörel alan elementinin ve \vec{F} alan vektörünün birim normal vektörü \vec{e} olan bir π düzlemi üzerine dik izdüşümlerini alalım, [30]:

$d\vec{F}$ vektörel alan elementinin \vec{e} birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşümü, dF^n ile gösterilirse; (2.2.4) denkleminde

$$dF^n = \langle \vec{e}, d\vec{F} \rangle = \langle \vec{e}, \vec{n} \rangle dF$$

yazılabilir, [30].

Eğer π , başlangıç noktasından geçen bir düzlem ise özel olarak $\vec{e} = \vec{e}_3$ alınabilir. O halde Ψ yüzey parçasının herhangi bir X noktasının dik izdüşümü, X^n ile gösterilirse; bu izdüşüm noktasının \vec{x}^n ile gösterilen $\overrightarrow{OX^n} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ konum vektörü için

$$\vec{x}^n = \vec{x} - \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle \vec{e}$$

yazılabilir. Buna göre Ψ yüzey parçasının dik izdüşümünün X^n noktasındaki $d\vec{F}^n$ ile gösterilecek olan vektörel alan elementi için (2.2.3) denkleminde, $d\vec{x}^n = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2$ ve $dF^n = dx_1 \wedge dx_2$ denklemleri göz önüne alınırsa

$$d\vec{F}^n = \frac{1}{2} d\vec{x}^n \hat{\times} d\vec{x}^n = \vec{e} dx_1 \wedge dx_2 = \vec{e} dF^n$$

bulunur.

Ψ yüzey parçasının birim normal vektörü \vec{e} olan bir π düzlemi üzerine dik izdüşümü, Ψ^n ile gösterilsin. Ayrıca Ψ nin \vec{F} alan vektörünün \vec{e} birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşümü, F^n ile gösterilirse

$$F^n = \langle \vec{e}, \vec{F} \rangle \quad (2.2.6)$$

yazılabilir. Burada F^n ye, Ψ^n nin alanı adı verilir, [30].

2.3. E^n DE HAREKETLER

Bu alt bölümde, E^n de hareketler ile ilgili temel kavramlar verilmiştir, [18,48,49].

Tanım 2.3.1: f , E^n de bir izometri olsun. E^n deki bir $\{x_1, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrissel ifadesi, $A \in O(n)$ ve $C, X, X' \in \mathbb{R}^n_1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

formundadır. Bu şekilde tanımlı olan f izometrisine, E^n de bir hareket adı verilir. f hareketine, $\det A = 1$ ise direkt hareket; $\det A = -1$ ise karşıt hareket denir, [48,49].

Tanım 2.3.2: Bir $f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa; f ye, O noktası etrafında E^n nin bir dönmesi adı verilir. Bu durumda E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi, $\{x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere; O noktası etrafındaki bir f dönmesi,

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX$$

şeklinde ifade edilir. Burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}^n_1$ dir. Eğer hareket, direkt hareket ise f ye direkt dönme; karşıt hareket ise f ye karşıt dönme denir, [48,49].

Tanım 2.3.3: $f : E^n \rightarrow E^n$, bir izometri olsun. $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + C$ olacak şekilde bir tek $C = (c_1, \dots, c_n) \in E^n$ noktası varsa, f ye E^n nin C ile belirlenen bir ötelemesi denir. O takdirde başlangıç noktası O olan bir $\{x_1, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre bir f ötelemesi,

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = X + C$$

şeklinde ifade edilir, [48,49].

Tanım 2.3.4: E^n deki bir direkt hareketin,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde, dönmeye karşılık gelen $A \in SO(n)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}^n$, matrisleri; $A = A(t)$ ve $C = C(t)$ olacak şekilde reel bir t parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise harekete, E^n nin bir 1-parametrelili hareketi denir. Bu 1-parametrelili hareketin t parametresi, genellikle zaman olarak ele alınmaktadır, [18,49].

Tanım 2.3.5: E^n nin bir 1-parametrelili hareketini belirleyen $A \in SO(n)$ ve $C \in \mathbb{R}^n$, matrisleri,

$$A(t+T) = A(t) \text{ ve } C(t+T) = C(t)$$

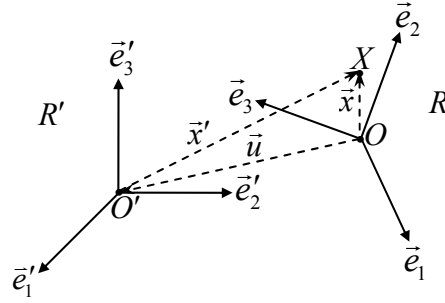
olacak şekilde periyodiklerse; bu harekete, 1-parametrelili kapalı hareket; aksi halde 1-parametrelili açık hareket denir, [49].

2.4. E^3 DE HACİMLER İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER

Bu alt bölümde; E^3 3-boyutlu Öklid uzayında hareketler ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, Holditch-Tipi Teoremler ve bazı önemli sonuçlar ifade edilmiştir, [1,11,15,22,23,26,30]. Ayrıca bu uzay hareketi esnasında, bazı yeni sonuçlar da elde edilmiştir.

R ve R' , E^3 3-boyutlu Öklid uzayında birbiri üzerinde hareket edebilen, sırasıyla, hareketli ve sabit Öklid uzayları olsun. Bu uzaylarda, sırasıyla, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve

$\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ dik çatıları tespit edilsin, (Şekil 2.1 e bakınız.). Bu iki dik çatı, sırasıyla, R ve R' uzaylarının temsilcileri olarak kabul edilirse; R uzayının R' uzayına göre hareketi, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatısına göre hareketi olarak düşünülmektedir. Bu hareket, genellikle R/R' ile gösterilmektedir. Burada R ve R' uzayları, aynı şekilde yönlendirilmektedir.



Şekil 2.1: Hareketli ve sabit dik çatılar

Tanım 2.4.1: R/R' hareketinde $\overline{OO'}$ vektörüne, hareketin öteleme vektörü denir ve bu vektör,

$$\overline{OO'} = \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

ile gösterilir, [1,15,23].

Eğer $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ ortonormal bazları, matris formunda, sırasıyla,

$$E = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \text{ ve } E' = \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirse; $A \in SO(3)$ olmak üzere,

$$E = AE' \quad \text{veya} \quad E' = A^T E \quad (2.4.1)$$

yazılabilir. $A \in SO(3)$ olduğundan,

$$A A^T = A^T A = I_3 \quad (2.4.2)$$

bağıntıları geçerlidir. (2.4.1) deki ilk denklemin diferansiyeli alınırsa,

$$dE = dA E' + A dE'$$

elde edilir. Bu denklemden, (2.4.1) deki ikinci denklem ve $dE' = 0$ olması göz önüne alınırsa

$$dE = dA (A^T E) = (dA A^T) E$$

bulunur. Burada $dA A^T = \Omega$ alınırsa,

$$dE = \Omega E \quad (2.4.3)$$

yazılabilir. Ayrıca (2.4.2) deki $A A^T = I_3$ denkleminin diferansiyeli alınırsa,

$$dA A^T + A dA^T = 0$$

ve dolayısıyla

$$dA A^T + (dA A^T)^T = 0$$

elde edilir. O halde Ω matrisi için

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

veya

$$\Omega^T = -\Omega$$

bağıntıları bulunur. Bu ise Ω nin anti-simetrik bir matris olduğunu gösterir. Eğer Ω matrisi,

$$\Omega = [\omega_{ij}] \in \mathbb{R}_3^3$$

ile gösterilirse; Ω , anti-simetrik bir matris olduğu için $\omega_{ii} = 0$ ve $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $i \neq j$ bulunur. Ayrıca ω_{ij} ,

$$\omega_{ij} = -\omega_{kj}, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

ile gösterilirse; Ω matrisi için

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Tanım 2.4.2: Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenleri ile tanımlanan

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \vec{e}_i$$

vektörüne, R/R' hareketinin dönme vektörü adı verilir, [15,22,23,26].

Eğer Ω matrisi için verilen son eşitlik, (2.4.3) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{bmatrix} d\vec{e}_1 \\ d\vec{e}_2 \\ d\vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$d\vec{e}_i = \omega_j \vec{e}_k - \omega_k \vec{e}_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.4.4)$$

elde edilir, [11,22,26,30]. Ayrıca $d\vec{e}_i$ için verilen bu denklem, $\vec{\omega}$ dönme vektörü kullanılarak

$$d\vec{e}_i = \vec{e}_i \times \vec{\omega} \quad (2.4.4')$$

şeklinde de ifade edilebilir, [11,22,26,30].

Eğer (2.4.4) denkleminin dış türevi alınırsa,

$$\vec{0} = d(d\vec{e}_i) = d\vec{e}_k \wedge \omega_j + \vec{e}_k d\omega_j - d\vec{e}_j \wedge \omega_k - \vec{e}_j d\omega_k$$

bulunur. Burada da (2.4.4) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (\omega_i \vec{e}_j - \omega_j \vec{e}_i) \wedge \omega_j + d\omega_j \vec{e}_k - (\omega_k \vec{e}_i - \omega_i \vec{e}_k) \wedge \omega_k - d\omega_k \vec{e}_j \\ &= \omega_i \wedge \omega_j \vec{e}_j - \omega_j \wedge \omega_i \vec{e}_i + d\omega_j \vec{e}_k - \omega_k \wedge \omega_i \vec{e}_i + \omega_i \wedge \omega_k \vec{e}_k - d\omega_k \vec{e}_j \end{aligned}$$

veya

$$\vec{0} = (\omega_i \wedge \omega_j - d\omega_k) \vec{e}_j + (d\omega_j + \omega_i \wedge \omega_k) \vec{e}_k$$

elde edilir. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, lineer bağımsız olduğu için bu son denklemden

$$\omega_i \wedge \omega_j - d\omega_k = 0, \quad d\omega_j + \omega_i \wedge \omega_k = 0$$

veya

$$d\omega_k = \omega_i \wedge \omega_j, \quad d\omega_j = \omega_k \wedge \omega_i$$

yazılabilir. O takdirde R/R' hareketinin dönme vektörünün bileşenleri için integrallenebilme koşulları,

$$d\omega_i = \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.4.5)$$

şeklinde bulunur, [11,22,26,30].

Diğer taraftan, $\overline{O'O} = -\vec{u} = -u_1 \vec{e}_1 - u_2 \vec{e}_2 - u_3 \vec{e}_3$ vektörünün diferansiyeli alınır ve (2.4.4) denklemi kullanılırsa;

$$\sigma_i = -du_i - u_j \omega_k + u_k \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.4.6)$$

ve $-d\vec{u} = \vec{\sigma}'$ olmak üzere,

$$\vec{\sigma}' = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 \quad (2.4.7)$$

elde edilir, [22,26,30].

Tanım 2.4.3: (2.4.4) (veya (2.4.4')) ve (2.4.7) denklemlerine, R/R' hareketinin türev denklemleri denir, [11,22,26,30].

Eğer (2.4.7) denkleminin dış türevi alınır ve sonra da (2.4.4) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= d\vec{\sigma}' \\ &= d\vec{e}_1 \wedge \sigma_1 + \vec{e}_1 d\sigma_1 + d\vec{e}_2 \wedge \sigma_2 + \vec{e}_2 d\sigma_2 + d\vec{e}_3 \wedge \sigma_3 + \vec{e}_3 d\sigma_3 \\ &= (\omega_2 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_2) \wedge \sigma_1 + d\sigma_1 \vec{e}_1 + (\omega_3 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_3) \wedge \sigma_2 + d\sigma_2 \vec{e}_2 \\ &\quad + (\omega_1 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_1) \wedge \sigma_3 + d\sigma_3 \vec{e}_3 \\ &= \omega_2 \wedge \sigma_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \wedge \sigma_1 \vec{e}_2 + d\sigma_1 \vec{e}_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 \vec{e}_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 \vec{e}_3 + d\sigma_2 \vec{e}_2 \\ &\quad + \omega_1 \wedge \sigma_3 \vec{e}_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3 \vec{e}_1 + d\sigma_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$\vec{0} = (d\sigma_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3) \vec{e}_1 + (d\sigma_2 - \omega_3 \wedge \sigma_1 + \omega_1 \wedge \sigma_3) \vec{e}_2 \\ + (d\sigma_3 + \omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2) \vec{e}_3$$

yazılabilir. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, lineer bağımsız olduğu için bu son denklemden

$$d\sigma_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3 = 0,$$

$$d\sigma_2 - \omega_3 \wedge \sigma_1 + \omega_1 \wedge \sigma_3 = 0,$$

$$d\sigma_3 + \omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 = 0$$

veya

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \omega_3 - \sigma_3 \wedge \omega_2,$$

$$d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \omega_1 - \sigma_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1$$

bulunur. Böylece R/R' hareketinin öteleme vektörü ile ilgili olarak elde edilen bu integrallenebilme koşulları, kısaca

$$d\sigma_i = \sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.4.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir, [11,22,26,30].

Şimdi, R/R' hareketi altında, R hareketli uzayında ele alınan herhangi bir noktanın R' sabit uzayını temsil eden dik çatının başlangıç noktasına göre konum vektörünün değişimini inceleyelim:

R hareketli uzayındaki herhangi bir X noktasının $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının başlangıç noktasına göre konum vektörü, $\overline{OX} = \vec{x}$ ile gösterilirse

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\overline{O'X} = \overline{O'O} + \overline{OX}$$

vektörel denklemi için (Şekil 2.1 e bakınız.) X noktasının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatisının başlangıç noktasına göre konum vektörü, $\overline{O'X} = \vec{x}'$ ile gösterilirse; $\overline{O'O} = -\vec{u}$ olduğundan,

$$\vec{x}' = -\vec{u} + \vec{x}$$

yazılabilir. O halde \vec{x}' konum vektörünün değişimi olan $d\vec{x}'$,

$$d\vec{x}' = -d\vec{u} + d\vec{x}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde, (2.4.7) ve (2.4.4) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\vec{x}' &= \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 + dx_1 \vec{e}_1 + x_1 d\vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + x_2 d\vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 + x_3 d\vec{e}_3 \\ &= \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 + (x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3 \\ &\quad + dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} d\vec{x}' &= (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3 \\ &\quad + dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

elde edilir.

Buna göre [1,15] göz önünde bulundurularak, E^3 de hareketler altında hız vektörleri için aşağıdaki tanımlar ve teorem ifade edilebilir:

Tanım 2.4.4: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının R' sabit uzayında ve R hareketli uzayında sahip olduğu hız vektörlerine, sırasıyla, mutlak ve relatif hız vektörleri denir ve bu hız vektörleri, sırasıyla,

$$\vec{X}_A = d\vec{x}'$$

ve

$$\vec{X}_R = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3$$

ile gösterilir, [15].

Tanım 2.4.5: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak hız vektörü ile relatif hız vektörü arasındaki farka, sürüklenme hız vektörü denir ve bu hız vektörü,

$$\vec{X}_F = (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3$$

ile gösterilir, [15].

Böylece düzlemsel hareketler altında hız vektörleri arasında verilen ilişkiye [1] benzer olarak, uzayda aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.1: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasında

$$\vec{X}_A = \vec{X}_F + \vec{X}_R$$

bağıntısı geçerlidir, [15].

Eğer R/R' hareketi esnasında bir $X \in R$ noktası, sabit ise $\vec{X}_R = \vec{0}$ olacağından;

$$\vec{X}_A = \vec{X}_F$$

elde edilir, [15]. Bu sonuca göre herhangi bir $X \in R$ sabit noktası için (2.4.4) denklemi göz önüne alınır, $d\vec{x}$ için

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= x_1 d\vec{e}_1 + x_2 d\vec{e}_2 + x_3 d\vec{e}_3 \\ &= x_1 (\omega_2 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_2) + x_2 (\omega_3 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_3) + x_3 (\omega_1 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_1) \\ &= (x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3 \\ &= \vec{x} \times \vec{\omega} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla (2.4.9) denklemi göz önüne alınır da $d\vec{x}'$ için

$$d\vec{x}' = \vec{\sigma}' + \vec{x} \times \vec{\omega} \quad (2.4.10)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\tau_i = \sigma_i + x_j \omega_k - x_k \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.4.11)$$

denirse; (2.4.10) denklemi,

$$d\vec{x}' = \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2 + \tau_3 \vec{e}_3 \quad (2.4.12)$$

şeklinde yeniden yazılabilir, [11,22,26,30].

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında, E^3 de bir R/R' hareketi; $i, 1 \leq i \leq 3$, hareketin parametre sayısı olmak üzere; kısaca B_i ile gösterilecektir.

Tanım 2.4.6: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq 3$, vektörleri; reel bir t parametresinin (genellikle zaman olarak alınır) diferansiyellenebilir fonksiyonları ise $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatısına göre hareketi olarak kabul edilen R hareketli uzayının R' sabit uzayına göre hareketine, 1-parametreliliği uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca B_1 ile gösterilir, [11,15,23].

Tanım 2.4.7: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve \vec{e}_i , $1 \leq i \leq 3$, vektörleri; t_1 ve t_2 reel parametrelerinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise harekete, 2-parametrelili uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca B_2 ile gösterilir, [11,22,26,30].

Tanım 2.4.8: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve \vec{e}_i , $1 \leq i \leq 3$, vektörleri; t_1 , t_2 ve t_3 reel parametrelerinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise harekete, 3-parametrelili uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca B_3 ile gösterilir, [11,22,26,30].

B_3 hareketi esnasında, Ω matrisinin ω_i bileşenleri ve $-d\vec{u} = \vec{\sigma}'$ vektörünün (2.4.6) da verilen σ_i bileşenleri; t_1 , t_2 ve t_3 reel parametrelerinin lineer diferansiyel formlarıdır. Ayrıca 3-boyutlu parametre uzayında (t_i parametrelerinin uzayında) ele alınan bir G bölgesinin sınırı -bir kürenin bağlantılılık yapısına sahip- kapalı ve yönlendirilebilir bir $R(G)$ yüzeyi olmak üzere; kendimizi bu G bölgesine karşılık gelen bir B_3 hareketine kısıtlarsak, $R(G)$ ye de bu B_3 hareketi ile birlikte oluşan kapalı bir B_2 hareketi karşılık gelir. Bu kapalı B_2 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir nokta, R' sabit uzayında kapalı bir yörünge yüzeyi çizer ve bu kapalı yörünge yüzeyi, B_3 hareketi esnasında bu noktanın R' de belirlediği bölgenin sınırınıdır, [1,11,22,26,30].

Tanım 2.4.9: B_3 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir X noktasının R' sabit uzayında belirlediği bölgenin hacim elementi; $\tau_1 = \sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2$, $\tau_2 = \sigma_2 + x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3$ ve $\tau_3 = \sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1$ olmak üzere, (2.4.12) denklemini göz önüne alınarak

$$dJ_X = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \quad (2.4.13)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanılarak elde edilen

$$J_X = \int_G dJ_X \quad (2.4.14)$$

ifadesine de bu bölgenin hacmi denir, [11,22,26].

Bu tanıma göre; B_3 hareketi esnasında $O \in R$ başlangıç noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (2.4.11) ve (2.4.13) denklemlerinden,

$$dJ_O = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \quad (2.4.15)$$

elde edilir. O halde (2.4.14) ve (2.4.15) denklemlerinden, $O \in R$ noktasının R' de belirlediği bölgenin hacmi için

$$J_O = \int_G \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \quad (2.4.16)$$

bulunur. Ayrıca B_3 hareketi altında sabit bir $X \in R$ noktasının R' de belirlediği bölgenin dJ_X hacim elementi için (2.4.11) ve (2.4.13) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} dJ_X &= \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \\ &= (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \wedge (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \wedge (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \\ &= [(\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \wedge (\sigma_2 + x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3)] \wedge (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \\ &= \left[\begin{array}{l} \sigma_1 \wedge \sigma_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 x_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 x_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 x_2 \\ + \omega_3 \wedge \omega_1 x_2 x_3 - \omega_2 \wedge \sigma_2 x_3 - \omega_2 \wedge \omega_1 x_3^2 + \omega_2 \wedge \omega_3 x_3 x_1 \end{array} \right] \\ &\quad \wedge (\sigma_3 + x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \\ &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_1 - \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_3 \\ &\quad + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3 x_1 - \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_3 x_2 - \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3 x_1 \\ &\quad - \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 x_1^2 + \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_1 x_2 + \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 x_2 \\ &\quad + \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_2 x_1 - \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_2^2 + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_2 x_3 \\ &\quad + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_2 x_3 x_1 - \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_2^2 x_3 - \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 x_3 \\ &\quad - \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_3 x_1 + \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_3 x_2 - \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_3^2 \\ &\quad - \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 x_1 + \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_3^2 x_2 + \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3 x_3 x_1 \\ &\quad + \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 x_3 x_1^2 - \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_3 x_1 x_2 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
dJ_X &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 x_1^2 + \sigma_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_2^2 + \sigma_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 \\
&+ (-\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) x_1 x_2 \\
&+ (-\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1) x_2 x_3 \\
&+ (-\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2) x_3 x_1 \\
&+ (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3) x_1 \\
&+ (\sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1) x_2 \\
&+ (\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2) x_3
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

elde edilir. dJ_X hacim elementi, kısaca

$$\begin{aligned}
dJ_X &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k x_i^2 \\
&+ \sum_{i=1}^3 (-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) x_i x_j \\
&+ \sum_{i=1}^3 (\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) x_i,
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. Eğer (2.4.17) denklemi, (2.4.14) denkleminde kullanılırsa; B_3 hareketi esnasında, $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacmi için

$$J_X = \int_G \left(\begin{array}{l} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 x_1^2 + \sigma_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_2^2 \\ + \sigma_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 + (-\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) x_1 x_2 \\ + (-\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1) x_2 x_3 \\ + (-\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2) x_3 x_1 \\ + (\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3) x_1 \\ + (\sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1) x_2 \\ + (\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2) x_3 \end{array} \right) \quad (2.4.19)$$

bulunur. Ayrıca (2.4.18) denklemi, (2.4.14) denklemine kullanılır ve

$$A_i = \int_G \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

alınırsa; (2.4.19) denklemi ile verilen J_X hacmi, kısaca

$$J_X = \int_G \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^3 \int_G (-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) x_i x_j \\ + \sum_{i=1}^3 \int_G (\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) x_i, \quad (2.4.20)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. Dolayısıyla B_3 hareketi altında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacmi, x_i bileşenlerine göre bir kuadratik polinomdur.

Eğer $\sigma_j \wedge \sigma_k$ 2-formunun diferansiyeli alınırsa,

$$d(\sigma_j \wedge \sigma_k) = d\sigma_j \wedge \sigma_k - \sigma_j \wedge d\sigma_k$$

ve burada da (2.4.8) denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(\sigma_j \wedge \sigma_k) &= (\sigma_k \wedge \omega_i - \sigma_i \wedge \omega_k) \wedge \sigma_k - \sigma_j \wedge (\sigma_i \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge \omega_i) \\ &= \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \sigma_k - \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \sigma_k - \sigma_j \wedge \sigma_i \wedge \omega_j + \sigma_j \wedge \sigma_j \wedge \omega_i \end{aligned}$$

veya

$$d(\sigma_j \wedge \sigma_k) = \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k$$

elde edilir. 3-boyutlu parametre uzayının (t_i parametrelerinin uzayının) G bölgesinin sınırı $R(G)$ olmak üzere; G bölgesi üzerinde tanımlı olan bir $d\varphi$ 3-formu için

$$\int_G d\varphi = \int_{R(G)} \varphi$$

şeklinde verilen Stokes Formülü'nün kullanılmasıyla [1,11,22,26], $d(\sigma_j \wedge \sigma_k)$ 3-formu için

$$\int_G (\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) = \int_{R(G)} \sigma_j \wedge \sigma_k \quad (2.4.21)$$

bulunur. Benzer şekilde $\sigma_i \wedge \omega_j$ 2-formunun diferansiyeli alınırsa,

$$d(\sigma_i \wedge \omega_j) = d\sigma_i \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge d\omega_j$$

ve burada da (2.4.5) ve (2.4.8) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(\sigma_i \wedge \omega_j) &= (\sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j) \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge (\omega_k \wedge \omega_i) \\ &= \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_j - \sigma_k \wedge \omega_j \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \omega_i \end{aligned}$$

veya

$$d(\sigma_i \wedge \omega_j) = \sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k$$

elde edilir. Burada Stokes Formülü'nün kullanılmasıyla da

$$\int_G (\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) = \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \omega_j \quad (2.4.22)$$

bulunur. Buna göre B_3 hareketi esnasında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacim formülü için elde edilen (2.4.20) ile verilen kuadratik polinomda, lineer ve karışık kuadratik terimlerin katsayıları sıfır olacak şekilde uygun bir hareketli koordinat sistemi seçilirse; (2.4.21) ve (2.4.22) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\int_G (\sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) = \int_{R(G)} \sigma_j \wedge \sigma_k = 0$$

ve

$$\int_G (\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) = \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \omega_j = 0$$

yazılabilir. O takdirde (2.4.16) ve (2.4.20) denklemlerinden, J_X hacmi için

$$J_X = J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 \quad (2.4.23)$$

elde edilir. Burada A_i katsayıları,

$$A_i = \int_G \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k = \frac{1}{2} \left(\int_{R(G)} \sigma_j \wedge \omega_j + \int_{R(G)} \sigma_k \wedge \omega_k \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

şeklinde de ifade edilebilir, [11,22,26]. Gerçekten, $\sigma_j \wedge \omega_j$ ve $\sigma_k \wedge \omega_k$ 2-formlarının diferansiyelleri alınırsa, sırasıyla,

$$d(\sigma_j \wedge \omega_j) = d\sigma_j \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge d\omega_j,$$

$$d(\sigma_k \wedge \omega_k) = d\sigma_k \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge d\omega_k$$

ve bu denklemlerde de (2.4.5) ve (2.4.8) denklemleri kullanılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} d(\sigma_j \wedge \omega_j) &= (\sigma_k \wedge \omega_i - \sigma_i \wedge \omega_k) \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge (\omega_k \wedge \omega_i) \\ &= \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(\sigma_k \wedge \omega_k) &= (\sigma_i \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge \omega_i) \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge (\omega_i \wedge \omega_j) \\ &= \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$d(\sigma_j \wedge \omega_j) + d(\sigma_k \wedge \omega_k) = 2\sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k$$

yazılabilir. Burada G bölgesi üzerinden integral alınır ve Stokes Formülü kullanılırsa,

$$\int_G \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k = \frac{1}{2} \left(\int_{R(G)} \sigma_j \wedge \omega_j + \int_{R(G)} \sigma_k \wedge \omega_k \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

ve böylece A_i , $1 \leq i \leq 3$, katsayıları elde edilir.

Dolayısıyla (2.4.23) denlemi ile verilen J_X hacmi için aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.2: B_3 hareketi altında eşit J_X hacimli bölgeler belirleyen hareketli uzayın bütün sabit noktaları, bir Φ_X kuadriği üzerinde bulunur, [11,26].

Şimdi, B_3 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan doğrudan üç sabit noktanın R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim, [22,26]:

$X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, R de iki farklı sabit nokta ve $Z = (z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Bu Z noktasının bileşenleri için

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (2.4.24)$$

yazılabilir. O halde B_3 hareketi altında Z noktasının R' de belirlediği bölgenin J_Z hacmi için (2.4.23) ve (2.4.24) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} J_Z &= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i z_i^2 \\ &= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i (\lambda x_i + \mu y_i)^2 \\ &= J_O + \lambda^2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 \sum_{i=1}^3 A_i y_i^2 \\ &= J_O + \lambda^2 (J_X - J_O) + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 (J_Y - J_O) \\ &= \lambda^2 J_X + \left((1 - (\lambda + \mu)^2) + 2\lambda\mu \right) J_O + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 J_Y \end{aligned}$$

veya

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu \left(J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i \right) + \mu^2 J_Y$$

bulunur. Burada $J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i$ ifadesi, J_{XY} ile gösterilirse;

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu J_{XY} + \mu^2 J_Y \quad (2.4.25)$$

elde edilir.

Tanım 2.4.10: B_3 hareketi esnasında,

$$J_{XY} = J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i \quad (2.4.26)$$

olarak tanımlanan J_{XY} ifadesine, sabit $X, Y \in R$ noktalarının R' de belirledikleri karışık yörünge hacmi denir, [22,26].

Bu tanıma göre, $J_{XY} = J_{YX}$ ve $J_{XX} = J_X$ olduğu açıktır. Ayrıca (2.4.23) ve (2.4.26) denklemlerinden,

$$J_X - 2J_{XY} + J_Y = \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \quad (2.4.27)$$

yazılabilir. Buna göre B_3 hareketi altında, Z noktasının R' de belirlediği bölgenin J_Z hacmi için (2.4.25) denkleminde; (2.4.27) ve $\lambda + \mu = 1$ denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} J_Z &= \lambda^2 J_X + \lambda \mu \left(J_X + J_Y - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \right) + \mu^2 J_Y \\ &= \lambda^2 J_X + \lambda \mu J_X + \lambda \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 + \mu^2 J_Y \\ &= \lambda (\lambda + \mu) J_X + \mu (\lambda + \mu) J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \\ &= \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

O halde B_3 hareketi esnasında, J_X , J_Y ve J_Z hacimleri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.3: X ve Y noktaları, R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. B_3 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasında

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \quad (2.4.28)$$

bağıntısı geçerlidir, [22,26].

B_3 hareketine ve onunla birlikte oluşan kapalı B_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki $D(X, Y)$ uzaklığının karesi

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (2.4.29)$$

ile tanımlanırsa [22,26]; (2.4.28) denklemi,

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (2.4.30)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

XY doğru parçasının yönlendirilmesiyle,

$$D(X, Y) = -D(Y, X)$$

alınır. Ayrıca B_3 hareketine ve onunla birlikte oluşan kapalı B_2 hareketine göre tanımlanan uzaklık göz önüne alınarak; X , Y ve Z noktaları doğrudan oldukları için

$$D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$$

ve (2.4.24) deki denklemlerde bulunan λ ve μ kullanılarak da

$$\lambda D(X,Y) = D(Z,Y) \text{ ve } \mu D(X,Y) = D(X,Z) \quad (2.4.31)$$

yazılabilir. Burada $D(X,Y) \neq 0$ ise λ ve μ , sırasıyla,

$$\lambda = \frac{D(Z,Y)}{D(X,Y)} \text{ ve } \mu = \frac{D(X,Z)}{D(X,Y)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (2.4.30) denkleminde, J_Z hacmi için

$$J_Z = \frac{1}{D(X,Y)} [D(Z,Y)J_X + D(X,Z)J_Y] - \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y)$$

yazılabilir, [22,26].

Şimdi, B_3 hareketi esnasında XY doğru parçasının uç noktalarının R' de aynı bir bölgeyi belirlediklerini kabul edelim. O takdirde $J_X = J_Y$ olur. Buna göre (2.4.31) ve $\lambda + \mu = 1$ denklemleri, (2.4.30) denkleminde kullanılırsa; J_X ile J_Z hacimleri arasındaki fark için

$$J_X - J_Z = \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y) \quad (2.4.32)$$

elde edilir, [22].

Böylece klasik Holditch Teoremi'nin [2]; E^3 de hacimler için bir genelleştirilmiş olan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.4: X ve Y , R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. XY doğru parçası, B_3 hareketi altında öyle hareket ettirilsin ki; X ve Y noktaları R' sabit uzayında aynı bir bölgeyi belirlerlerken, Z noktası da R' de farklı bir bölgeyi belirlesin. O takdirde bu iki bölgenin hacimleri arasındaki fark, yalnızca B_3 ve kapalı B_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X,Z)$ ve $D(Z,Y)$ uzaklıklarına bağlıdır, [22].

Şimdi, B_3 hareketi esnasında R' sabit uzayında belirlenen karışık yörünge hacminin geometrik yorumu için aynı Φ_X kuadriğinin farklı X ve Y noktalarından yola çıkalım. Bu durumda Φ_X ile Φ_Y çakışır ve $J_X = J_Y$ olur. Eğer $P = (p_i)$ noktası, X ve Y noktalarına göre Z noktasının harmonik eşleniği ise

$$p_i = \lambda' x_i + \mu' y_i, \quad \lambda' + \mu' = 1$$

ve bununla birlikte $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$, $\lambda + \mu = 1$ olduğu için $\mu \lambda' + \mu' \lambda = 0$ yazılabilir, [54]. O halde P ve Z noktalarının R' de belirledikleri J_{PZ} karışık yörünge hacminin

geometrik yorumunu ifade edebilmek için $\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i$ toplamı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i &= \sum_{i=1}^3 A_i (\lambda' x_i + \mu' y_i) (\lambda x_i + \mu y_i) \\ &= \lambda' \lambda \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu' \mu \sum_{i=1}^3 A_i y_i^2 \\ &= \lambda' \lambda (J_X - J_O) + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) (J_{XY} - J_O) + \mu' \mu (J_Y - J_O) \\ &= \lambda' \lambda J_X - \lambda' \lambda J_O + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_{XY} - (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_O + \mu' \mu J_Y - \mu' \mu J_O \\ &= \lambda' \lambda J_X - \lambda' \lambda J_O + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) \left(\frac{J_X + J_Y - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2}{2} \right) \\ &\quad - (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_O + \mu' \mu J_Y - \mu' \mu J_O \\ &= (\lambda' \lambda + \lambda' \mu + \mu' \lambda + \mu' \mu) J_X - (\lambda' \lambda + \lambda' \mu + \mu' \lambda + \mu' \mu) J_O \\ &= (\lambda' + \mu') (\lambda + \mu) J_X - (\lambda' + \mu') (\lambda + \mu) J_O \end{aligned}$$

veya

$$\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i = J_X - J_O$$

elde edilir. Diğer taraftan, P ve Z noktaları için (2.4.26) denkleminde

$$\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i = J_{PZ} - J_O$$

bulunur. Bu son iki denklemin sol tarafları eşit olduğu için

$$J_{PZ} = J_X$$

elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.5: B_3 hareketi altında R hareketli uzayının P ve Z noktaları, Φ_X kuadriğine göre bir eşlenik nokta çifti ve J_{PZ} de bu noktaların R' sabit uzayında belirledikleri karışık yörünge hacmi olsun. Bu durumda J_{PZ} hacmi ile Φ_X kuadriğinin noktalarının belirledikleri bölgelerin J_X hacmi eşittir, [26].

Şimdi de X ve Y noktalarını, Φ_X kuadriğinin bir doğurunu üzerinde seçelim (Bu halde Φ_X kuadriği için düzlem, silindir, koni ve tek kanatlı hiperboloid örnek verilebilir.). O takdirde (2.4.24) deki denklemler yardımıyla belirlenen Z noktası da Φ_X kuadriği üzerinde bulunur. Buna göre $J_X = J_Y = J_Z$ olur. Bu sonuç ve $\lambda + \mu = 1$ denklemi, (2.4.30) denkleminde göz önüne alınırsa;

$$D(X, Y) = 0$$

koşulu elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.6: R hareketli uzayının X ve Y noktaları, Φ_X kuadriğinin bir doğurunu üzerinde bulunuyorlarsa; bu noktalar arasındaki B_3 ve kapalı B_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X, Y)$ uzaklığı sıfır olur, [26].

Şimdi, M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Kabul edelim ki B_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; X ve Y noktaları da R hareketli uzayının Φ_M den farklı olan, sırasıyla, Φ_X ve Φ_Y kuadriklerinin üzerinde bulunsunlar. Ayrıca J_M ile J_X hacimleri arasındaki fark, J ve J_M ile J_Y hacimleri arasındaki fark da J' ile gösterilsin. O takdirde yukarıdaki koşullar altında, J ve J' için (2.4.32) denkleminde, sırasıyla,

$$J = J_M - J_X = \varepsilon D(M, X)D(X, N)$$

ve

$$J' = J_M - J_Y = \varepsilon D(M, Y)D(Y, N)$$

yazılabilir. Burada J/J' oranı hesaplanırsa,

$$J/J' = \frac{D(M, X)D(X, N)}{D(M, Y)D(Y, N)}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)} \quad (2.4.33)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan açıkça görüleceği gibi J/J' oranı, yalnızca MN doğru parçası üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişlerine bağlıdır ve $X \neq Y$ olduğundan,

$$\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \neq 1$$

dir. Ayrıca (2.4.33) eşitliğindeki

$$\frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)}$$

oranı; M , N , Y ve X noktalarının çifte oranıdır, [54]. Eğer (MN, YX) ile gösterilen bu çifte oran [54], kısaca ℓ ile gösterilirse; (2.4.33) eşitliği ile verilen J/J' oranı, ℓ çifte oranına bağlı olarak

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.4.7: J/J' oranı; M , N , X ve Y noktalarının yalnızca rölatif durumlarına bağlıdır.

Yukarıdaki teoremin özel bir hali olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.4.1: M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Kabul edelim ki B_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R' sabit uzayında J_M hacimli aynı bir bölgeyi belirlerlerken; X ve Y noktaları da R' de hacimleri J_M den farklı olan, sırasıyla, J_X ve J_Y hacimli bölgeler belirlesinler. Ayrıca J_M ile J_X hacimleri arasındaki fark, J ve J_M ile J_Y hacimleri arasındaki fark da J' ile gösterilsin. O takdirde J/J' oranı için $\ell = (MN, YX)$ olmak üzere,

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

eşitliği geçerli olur.

Şimdi, M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Kabul edelim ki MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca B_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu koşullar altında bazı irdelemeler yapılarak, aşağıdaki sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili teoremler verilebilir:

Yukarıdaki koşullar ve B_3 ile kapalı B_2 hareketlerine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, (2.4.32) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğruduş nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$J_M - J_X = \varepsilon_1 D(M, X)D(X, N), \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

ve

$$J_A - J_X = \varepsilon_2 D(A, X)D(X, B), \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

yazılabilir. O halde aşağıdaki iki durum sözkonusudur:

i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$J_M - J_X = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$J_A - J_X = \varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$J_M - J_A = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B)] \quad (2.4.34)$$

elde edilir. Eğer $\Phi_M = \Phi_A$ ise $J_M = J_A$ olur ve böylece (2.4.34) denkleminden

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (2.4.34) denklemden

$$J_M - J_A = 0$$

ve dolayısıyla

$$J_M = J_A$$

elde edilir. Bu ise B_3 hareketi esnasında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları demektir.

ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$J_M - J_X = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$J_A - J_X = -\varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$J_M - J_A = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B)] \quad (2.4.35)$$

elde edilir. Eğer $\Phi_M = \Phi_A$ ise $J_M = J_A$ olur ve böylece (2.4.35) denklemden

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (2.4.35) denklemden

$$J_M - J_A = 0$$

ve dolayısıyla

$$J_M = J_A$$

elde edilir. Bu ise B_3 hareketi altında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları demektir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.4.8: M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Kabul edelim ki MN ve AB doğru parçaları, B_3 ve kapalı B_2 hareketlerine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca B_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket esnasında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları için gerek ve yeter koşul aşağıdaki bağıntılardan yalnızca birinin gerçekleşmesidir:

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

ya da

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0.$$

Şimdi de kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Eğer B_3 hareketi altında, R de; M ve N noktalarının üzerinde bulunduğu Φ_M kuadriği, A ve B noktalarının üzerinde bulunduğu Φ_A kuadriği ve X noktasının üzerinde bulunduğu Φ_X kuadriği aynı ise $J_M = J_A = J_X$ olur. Buna göre

(2.4.32) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğruduş nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$D(M, X)D(X, N) = 0$$

ve

$$D(A, X)D(X, B) = 0$$

elde edilir. Eğer bu son iki denklem geçerli ise de (2.4.32) denklemi göz önünde bulundurularak, sırasıyla,

$$J_M - J_X = 0$$

ve

$$J_A - J_X = 0$$

veya

$$J_M = J_X$$

ve

$$J_A = J_X$$

elde edilir. Bu ise B_3 hareketi esnasında, M , N , A , B ve X noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A = \Phi_X$) üzerinde bulunmaları demektir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.4.9: Kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca B_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket altında, M , N , A , B ve X noktalarının R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A = \Phi_X$) üzerinde bulunmaları için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır.

Yukarıdaki teorem, Teorem 2.4.6 göz önünde bulundurularak, aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

Teorem 2.4.10: Kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca B_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket esnasında, MN ve AB doğru parçalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) bir X noktasında kesişen iki doğurunu olmaları için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır.

Şimdi, R hareketli uzayında ele alınan doğrudan olmayan üç sabit noktanın ve bu noktaların tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit noktanın, B_3 hareketi altında

R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim, [22,26]:

$X_1 = (x_i)$, $X_2 = (y_i)$ ve $X_3 = (z_i)$, R de doğrudan olmayan üç sabit nokta ve $Q = (q_i)$ de X_1 , X_2 ve X_3 noktalarının tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta olsun. Bu durumda Q noktasının bileşenleri için

$$q_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (2.4.36)$$

yazılabilir.

B_3 hareketi esnasında, Q noktasının R' de belirlediği bölgenin J_Q hacmi; (2.4.23), (2.4.26) ve (2.4.36) denklemlerinin kullanılmasıyla, X_1 , X_2 ve X_3 noktalarına bağlı olarak

$$J_Q = \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + 2\lambda_1 \lambda_2 J_{X_1 X_2} + 2\lambda_1 \lambda_3 J_{X_1 X_3} + 2\lambda_2 \lambda_3 J_{X_2 X_3}$$

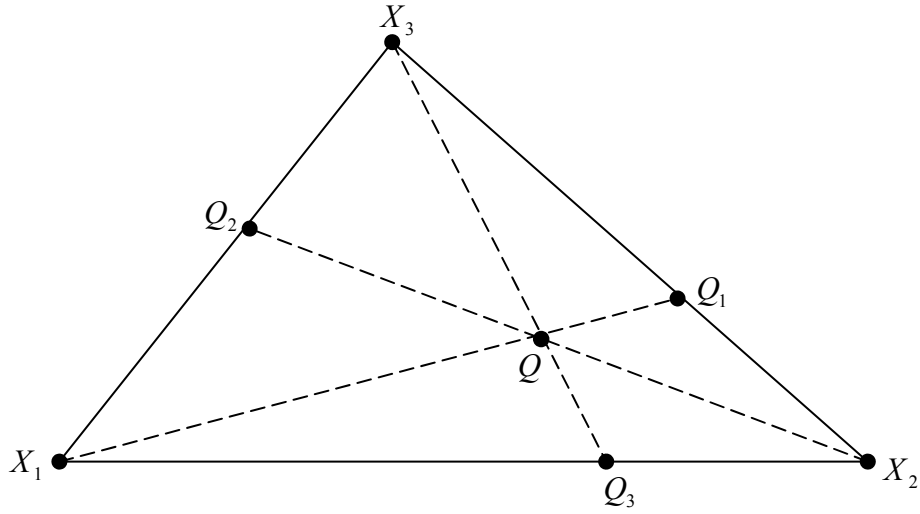
şeklinde bulunur. Eğer bu denklemde, (2.4.27), (2.4.29) ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ denklemleri kullanılırsa; J_Q hacmi,

$$J_Q = \lambda_1 J_{X_1} + \lambda_2 J_{X_2} + \lambda_3 J_{X_3} - \left\{ \varepsilon_{12} \lambda_1 \lambda_2 D^2(X_1, X_2) + \varepsilon_{13} \lambda_1 \lambda_3 D^2(X_1, X_3) + \varepsilon_{23} \lambda_2 \lambda_3 D^2(X_2, X_3) \right\} \quad (2.4.37)$$

şeklinde de ifade edilebilir, [22,26]. Eğer Q_i noktaları, $X_i Q$ ve $X_j X_k$, $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, doğru parçalarının kesişim noktaları olarak alınırsa; mümkün olan tüm uzaklıkların sıfırdan farklı olmaları kabulü altında, λ_i , $1 \leq i \leq 3$, için

$$\lambda_i = \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} = \frac{D(X_j, Q)}{D(X_j, Q_j)} \frac{D(X_k, Q_j)}{D(X_k, X_i)} = \frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \frac{D(Q_k, X_j)}{D(X_i, X_j)} \quad (2.4.38)$$

yazılabilir [22], (Şekil 2.2 ye bakınız.).



Şekil 2.2: Hareketli uzayda sabit bir üçgen

(2.4.38) de λ_i , $1 \leq i \leq 3$, için verilen eşitlikler, (2.4.37) denkleminde göz önüne alınırsa;

J_Q hacmi için

$$J_Q = \sum_{i=1}^3 \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} J_{X_i} - \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k),$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, bulunur. Eğer X_1 , X_2 ve X_3 noktaları, B_3 hareketi altında R' de aynı bir bölgeyi belirlerlerse; $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{X_3}$ olur. Buna göre J_Q hacmi için verilen son denklemde, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ denklemi göz önüne alınırsa; J_{X_1} ile J_Q hacimleri arasındaki fark için

$$J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k), \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

elde edilir, [22].

Böylece Teorem 2.4.4 ün genelleştirilmiş olan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.11: R hareketli uzayında X_1 , X_2 ve X_3 köşe noktalarına sahip bir üçgen göz önüne alalım. Kabul edelim ki B_3 hareketi esnasında üçgenin köşe noktaları, R' sabit uzayında aynı bir bölgeyi belirlerlerken; bu noktaların tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit Q noktası da R' de farklı bir bölgeyi belirlesin. O takdirde bu iki bölgenin hacimleri arasındaki fark, yalnızca hareket eden üçgenin B_3 ve kapalı B_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen uzaklıklarına bağlıdır, [22].

Özel olarak, R hareketli uzayının bir Φ_{X_1} kuadriğinin her noktasından iki doğuranın geçtiğini ve bu kuadriğin bir düzlem olmadığını kabul edelim (Bu halde Φ_{X_1} kuadriği için tek kanatlı hiperboloid örnek verilebilir.). Φ_{X_1} kuadriğinin X_1 noktasındaki teğet düzlemi üzerinde Φ_{X_1} de bulunmayan bir Q noktasını göz önüne alalım. Bu durumda teğet düzlem içinde X_1 noktasında kesişen iki doğuran vardır. Bunlar üzerinde X_2 ve X_3 gibi iki keyfi nokta seçelim. Q noktasından yapılan izdüşüm, karşı doğuranlar üzerinde Q_2 ve Q_3 noktalarını verir. O takdirde B_3 hareketi altında, J_Q hacmi için (2.4.37) denklemi geçerli olur. Ayrıca X_1 , X_2 ve X_3 noktaları, aynı Φ_{X_1} kuadriği üzerinde olduklarından; $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{X_3}$ eşitlikleri geçerli olur. Dolayısıyla Teorem 2.4.6 gereğince, $D(X_1, X_2) = D(X_1, X_3) = 0$ bulunur. O halde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ denklemi ile (2.4.38) de verilen $\lambda_i = \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)}$ eşitliği, $i = 2, 3$ için (2.4.37) denkleminde kullanılırsa,

$$J_{X_1} - J_Q = \varepsilon_{23} \frac{D(Q, Q_2)}{D(X_2, Q_2)} \frac{D(Q, Q_3)}{D(X_3, Q_3)} D^2(X_2, X_3)$$

yazılabilir, [26].

Bu sonuç, verilen koşullar altında, klasik Holditch Teoremi'nin [2] uzaysal bir genelleştirilmiş olarak değerlendirilebilir. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.4.12: B_3 hareketi esnasında, Φ_{X_1} kuadriğinin her noktasından iki doğuranın geçtiğini kabul edelim. Ayrıca Φ_{X_1} kuadriğinin X_1 noktasındaki teğet düzlemi üzerinde Φ_{X_1} de bulunmayan bir Q noktasını göz önüne alalım ve teğet düzlem içinde X_1 noktasında kesişen iki doğuran üzerinde, X_2 ve X_3 gibi iki keyfi nokta seçelim. O takdirde bu hareket esnasında X_1 , X_2 ve X_3 noktaları tarafından R' sabit uzayında belirlenen bölgelerin J_{X_1} hacmi ile Q noktası tarafından R' de belirlenen bölgenin J_Q hacmi arasındaki fark, yalnızca hareket eden üçgenin B_3 ve kapalı B_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen uzaklıklarına bağlıdır, [26].

2.5. E^3 DE KAPALI YÖRÜNGE YÜZEYLERİNİN PARÇALARININ DİK İZDÜŞÜM ALANLARI İÇİN BİR HOLDITCH-TİPİ TEOREM

Bu alt bölümde; öncelikle E^3 de kapalı bir B_2 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir noktanın R' sabit uzayında çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin, üzerinde tanımlı olduğu $R(G)$ parametre bölgesinin -bir çemberin bağlantılılık yapısına sahip- bir Γ alt bölgesi üzerinde tanımlı, bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri verilmiştir, [30]. Sonra da bu kapalı hareket esnasında R de ele alınan doğrudan üç sabit noktanın R' de çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının bir \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda herhangi bir düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alanları ile ilgili bir Holditch-Tipi Teorem [30] ve bununla birlikte bu teoremin bazı sonuçları [32] ele alınmıştır.

B_3 hareketi altında bir $X = (x_i) \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin dJ_X hacim elementi için elde edilen (2.4.17) kuadratik denkleminde, x_i lerin ve karışık kuadratik terimlerin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 &= 0, \\ \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 &= 0, \\ \sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

ve

$$\begin{aligned}
-\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\
-\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 &= 0, \\
-\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

olacak şekilde seçilirse ve α_i ;

$$\alpha_i = \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \tag{2.5.3}$$

olarak tanımlanırsa, dJ_X hacim elementi için

$$dJ_X = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 \tag{2.5.4}$$

bulunur. Eğer $\vec{\sigma}'$ nün σ_i bileşenleri,

$$\sigma_i = s_{i1} \omega_1 + s_{i2} \omega_2 + s_{i3} \omega_3, \quad 1 \leq i \leq 3, \tag{2.5.5}$$

olarak yazılırsa; (2.5.2) denklemlerinden

$$s_{ij} + s_{ji} = 0, \tag{2.5.6}$$

(2.5.1) ve (2.5.6) denklemlerinden de

$$s_{ii} s_{jk} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \tag{2.5.7}$$

elde edilir. Gerçekten; (2.5.5) denklemi, (2.5.1) denklemlerinde kullanılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
(-s_{11} s_{23} + s_{13} s_{21} + s_{11} s_{32} - s_{12} s_{31}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\
(s_{21} s_{32} - s_{22} s_{31} + s_{22} s_{13} - s_{23} s_{12}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\
(s_{32} s_{13} - s_{33} s_{12} - s_{31} s_{23} + s_{33} s_{21}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

ve (2.5.5) denklemi, (2.5.2) denklemlerinde kullanılırsa da, sırasıyla,

$$\begin{aligned}(s_{12} + s_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (s_{23} + s_{32})\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (s_{31} + s_{13})\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0\end{aligned}\tag{2.5.9}$$

yazılabilir. Ayrıca ω_1 , ω_2 ve ω_3 formları lineer bağımsız olduklarından; (2.5.8) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\begin{aligned}s_{11}(-s_{23} + s_{32}) + s_{13}s_{21} - s_{12}s_{31} &= 0, \\ s_{22}(-s_{31} + s_{13}) + s_{21}s_{32} - s_{23}s_{12} &= 0, \\ s_{33}(-s_{12} + s_{21}) + s_{32}s_{13} - s_{31}s_{23} &= 0\end{aligned}\tag{2.5.10}$$

ve (2.5.9) denklemlerinden de, sırasıyla,

$$\begin{aligned}s_{12} + s_{21} &= 0, \\ s_{23} + s_{32} &= 0, \\ s_{31} + s_{13} &= 0\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

elde edilir. Böylece (2.5.11) deki denklemler, (2.5.6) da tek bir denklem ile ifade edilebilir. Ayrıca (2.5.11) deki denklemler, (2.5.10) denklemlerinde kullanılırsa; (2.5.7) denklemi elde edilir, [30].

B_3 hareketi esnasında, $O \in R$ başlangıç noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (2.4.15) ve (2.5.5) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
dJ_O &= (s_{11} \omega_1 + s_{12} \omega_2 + s_{13} \omega_3) \wedge (s_{21} \omega_1 + s_{22} \omega_2 + s_{23} \omega_3) \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\
&= \left[(s_{11} \omega_1 + s_{12} \omega_2 + s_{13} \omega_3) \wedge (s_{21} \omega_1 + s_{22} \omega_2 + s_{23} \omega_3) \right] \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\
&= \left[\begin{aligned} &s_{11} s_{22} \omega_1 \wedge \omega_2 + s_{11} s_{23} \omega_1 \wedge \omega_3 + s_{12} s_{21} \omega_2 \wedge \omega_1 + s_{12} s_{23} \omega_2 \wedge \omega_3 \\ &+ s_{13} s_{21} \omega_3 \wedge \omega_1 + s_{13} s_{22} \omega_3 \wedge \omega_2 \end{aligned} \right] \\
&\quad \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\
&= s_{11} s_{22} s_{33} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + s_{11} s_{23} s_{32} \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + s_{12} s_{21} s_{33} \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \\
&\quad + s_{12} s_{23} s_{31} \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 + s_{13} s_{21} s_{32} \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + s_{13} s_{22} s_{31} \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 \\
&= (s_{11} s_{22} s_{33} - s_{11} s_{23} s_{32} - s_{12} s_{21} s_{33} + s_{12} s_{23} s_{31} + s_{13} s_{21} s_{32} - s_{13} s_{22} s_{31}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (2.5.11) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$dJ_O = (s_{11} s_{22} s_{33} + s_{11} s_{23}^2 + s_{12}^2 s_{33} + s_{22} s_{31}^2) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

elde edilir. $dJ_O \neq 0$ olması için

$$s_{11} s_{22} s_{33} + s_{11} s_{23}^2 + s_{12}^2 s_{33} + s_{22} s_{31}^2 \neq 0$$

olmalıdır. Eğer bu son denklemde, (2.5.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$s_{11} s_{22} s_{33} \neq 0$$

bulunur. Buna göre $s_{ii} \neq 0$ olmalıdır. O halde (2.5.7) denkleminden, $s_{jk} = 0$ elde edilir.

Bu durumda $s_{ii} = s_i$ alınır, (2.5.5) ve (2.5.6) denklemlerinden

$$\sigma_i = s_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.5.12)$$

yazılabilir. Bu son denklem kullanılarak; (2.5.3) denklemi,

$$\alpha_i = s_i \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.5.13)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir, [30]. Böylece B_3 hareketi altında, $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (2.5.4) denkleminde, (2.5.12) ve (2.5.13) denklemleri kullanılırsa;

$$dJ_X = [s_1 s_2 s_3 + s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 + s_3 x_3^2] \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

bulunur, [30].

$X \in R$ sabit noktası, B_3 hareketi esnasında R' sabit uzayında bir bölge belirler. Bu bölgenin sınırı, kapalı bir yüzeydir. Bu yüzey, B_3 hareketi ile birlikte oluşan kapalı bir B_2 hareketi altında meydana gelen kapalı yörünge yüzeyidir. O halde kapalı B_2 hareketi esnasında X noktasının R' de çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, Ψ_X ile gösterilecek olan yüzey parçasının $d\vec{F}'_X$ ile gösterilecek olan vektörel alan elementi için (2.2.3) ve (2.4.12) denklemleri ile vektörel çarpımın ve 1-formlar arasındaki dış çarpımın özellikleri göz önüne alınırsa;

$$d\vec{F}'_X = \frac{1}{2} d\vec{x}' \hat{\times} d\vec{x}' = \tau_2 \wedge \tau_3 \vec{e}_1 + \tau_3 \wedge \tau_1 \vec{e}_2 + \tau_1 \wedge \tau_2 \vec{e}_3 \quad (2.5.14)$$

elde edilir, [30]. Böylece kapalı B_2 hareketi altında, Ψ_X yüzey parçasının \vec{F}'_X ile gösterilecek olan alan vektörü için (2.2.5) ve (2.5.14) denklemlerinden,

$$\vec{F}'_X = \iint_{\Gamma} d\vec{F}'_X = \sum_{i=1}^3 \left(\iint_{\Gamma} \tau_j \wedge \tau_k \right) \vec{e}_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

yazılabilir, [30]. Eğer \vec{F}'_X alan vektörünün $\iint_{\Gamma} \tau_j \wedge \tau_k$ bileşenleri, $f_i(X, X)$ ile gösterilirse; \vec{F}'_X alan vektörü,

$$\vec{F}'_X = \iint_{\Gamma} d\vec{F}'_X = \sum_{i=1}^3 f_i(X, X) \vec{e}_i \quad (2.5.15)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir, [30].

(2.4.11) ve (2.5.12) denklemleri kullanılarak, $\tau_i \wedge \tau_j$ için

$$\tau_i \wedge \tau_j = (s_i s_j + x_k^2) \omega_i \wedge \omega_j + (x_k x_i - x_j s_j) \omega_j \wedge \omega_k + (x_i s_i + x_j x_k) \omega_k \wedge \omega_i,$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, bulunur. Eğer bu denklem ile birlikte

$$\iint_{\Gamma} \omega_i \wedge \omega_j = 2a_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_i s_j \omega_i \wedge \omega_j = h_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_i \omega_i \wedge \omega_j = 2b_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_j \omega_i \wedge \omega_j = 2c_{ij}$$

gösterimleri kullanılırsa;

$$\vec{a} = a_{23} \vec{e}_1 + a_{31} \vec{e}_2 + a_{12} \vec{e}_3$$

olmak üzere, \vec{F}'_X alan vektörünün $f_i(X, X)$ ile gösterilen $\iint_{\Gamma} \tau_j \wedge \tau_k$ bileşenleri için

$$f_i(X, X) = h_{jk} - 2b_{ki} x_k + 2c_{ij} x_j + 2x_i \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (2.5.16)$$

elde edilir, [30].

Şimdi, kapalı B_2 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan doğruduş üç sabit noktanın R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları arasındaki ilişkiyi inceleyelim, [30]:

$X=(x_i)$ ve $Y=(y_i)$, R de iki farklı sabit nokta ve $Z=(z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Kapalı B_2 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının R' de çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarını, sırasıyla, Ψ_X , Ψ_Y ve Ψ_Z ile gösterelim. O halde Ψ_Z yüzey parçasının \vec{F}'_Z alan vektörünün bileşenleri için (2.5.16) denkleminde,

$$f_i(Z, Z) = h_{jk} - 2b_{ki} z_k + 2c_{ij} z_j + 2z_i \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle$$

yazılabilir. Bu denklem, (2.4.24) ve (2.5.16) denklemleri kullanılarak düzenlenir ve

$$h_{jk} - b_{ki} (x_k + y_k) + c_{ij} (x_j + y_j) + x_i \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle + y_i \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$$

ifadesi, $f_i(X, Y)$ ile gösterilirse;

$$f_i(Z, Z) = \lambda^2 f_i(X, X) + 2\lambda \mu f_i(X, Y) + \mu^2 f_i(Y, Y) \quad (2.5.17)$$

elde edilir, [30].

Tanım 2.5.1: Kapalı B_2 hareketi esnasında bileşenleri

$$f_i(X, Y) = h_{jk} - b_{ki} (x_k + y_k) + c_{ij} (x_j + y_j) + x_i \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle + y_i \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle, \quad (2.5.18)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, olan

$$\vec{F}'_{XY} = \sum_{i=1}^3 f_i(X, Y) \vec{e}_i \quad (2.5.19)$$

vektörüne, sabit $X, Y \in R$ noktaları tarafından R' sabit uzayında belirlenen karışık alan vektörü adı verilir, [30].

Böylece \vec{F}'_Z alan vektörü için (2.5.15), (2.5.17) ve (2.5.19) denklemlerinden,

$$\vec{F}'_Z = \lambda^2 \vec{F}'_X + 2\lambda \mu \vec{F}'_{XY} + \mu^2 \vec{F}'_Y \quad (2.5.20)$$

elde edilir. Ayrıca (2.5.15), (2.5.16), (2.5.18) ve (2.5.19) denklemleri kullanılarak; \vec{F}'_X , \vec{F}'_{XY} ve \vec{F}'_Y alan vektörleri arasında

$$\vec{F}'_X - 2\vec{F}'_{XY} + \vec{F}'_Y = 2\langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{y} \rangle (\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.5.21)$$

bulunur. Burada $2\langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{y} \rangle (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{M}$ alınırsa,

$$\vec{M} = \vec{F}'_X - 2\vec{F}'_{XY} + \vec{F}'_Y \quad (2.5.22)$$

yazılabilir. O halde (2.5.21) ve (2.5.22) denklemlerinden, \vec{M} vektörünün \overline{XY} vektörü doğrultusunda olduğu söylenebilir. Ayrıca (2.5.22) ve $\lambda + \mu = 1$ denklemleri, (2.5.20) denkleminde kullanılırsa; \vec{F}'_Z alan vektörü,

$$\vec{F}'_Z = \lambda \vec{F}'_X + \mu \vec{F}'_Y - \lambda \mu \vec{M}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir, [30]. Bu son denklemden, kapalı B_2 hareketi altında Ψ_Z yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanı için

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle = \lambda \langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle + \mu \langle \vec{e}', \vec{F}'_Y \rangle - \lambda \mu \langle \vec{e}', \vec{M} \rangle \quad (2.5.23)$$

elde edilir, [30].

İzdüşüme ve kapalı B_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki $D(X, Y)$ uzaklığının karesi

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \langle \vec{e}', \vec{M} \rangle = 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \langle \vec{e}', \vec{x} - \vec{y} \rangle, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (2.5.24)$$

şeklinde tanımlanır, [30]. Burada XY doğru parçasının yönlendirilmesiyle,

$$D(X, Y) = -D(Y, X)$$

alınır, [30]. Ayrıca \overrightarrow{XY} vektörü doğrultusunda olan \vec{M} vektörü ile \vec{e}' vektörü dik vektörlerse, $D(X, Y)$ uzaklığı sıfır olur.

Eğer (2.5.24) denklemi, (2.5.23) denkleminde kullanılırsa

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle = \lambda \langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle + \mu \langle \vec{e}', \vec{F}'_Y \rangle - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (2.5.25)$$

bulunur, [30].

Şimdi, kapalı B_2 hareketi esnasında Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının aynı olduğunu kabul edelim. O takdirde $\vec{F}'_X = \vec{F}'_Y$ olur. Bu durumda (2.5.25) denkleminde, $\lambda + \mu = 1$ denklemi kullanılarak

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle - \langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle = \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (2.5.26)$$

elde edilir, [30]. Ayrıca izdüşüme ve kapalı B_2 hareketine göre tanımlanan uzaklık göz önüne alınarak, X , Y ve Z noktaları doğrudan oldukları için

$$D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$$

ve (2.4.24) deki denklemlerde bulunan λ ve μ kullanılarak da

$$\lambda D(X, Y) = D(Z, Y) \text{ ve } \mu D(X, Y) = D(X, Z) \quad (2.5.27)$$

yazılabilir. Burada $D(X, Y) \neq 0$ ise λ ve μ , sırasıyla,

$$\lambda = \frac{D(Z,Y)}{D(X,Y)} \text{ ve } \mu = \frac{D(X,Z)}{D(X,Y)}$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde (2.5.27) denklemi, (2.5.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle - \langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle = \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y)$$

bulunur, [30]. Bu denklemde, (2.2.6) denklemi göz önüne alınırsa; F'_X ve F'_Z ile gösterilecek olan dik izdüşüm alanları arasındaki fark için

$$F'_X - F'_Z = \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y) \quad (2.5.28)$$

elde edilir, [30].

Dolayısıyla klasik Holditch Teoremi'nin [2]; E^3 de kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları için bir genelleştirilmiş olan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 2.5.1: X ve Y , R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Bununla birlikte kapalı B_2 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_X , Ψ_Y ve Ψ_Z ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, $\Psi_X = \Psi_Y$ olsun. Ayrıca Ψ_Z de Ψ_X den farklı olsun. O takdirde Ψ_X ile Ψ_Z yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları arasındaki fark, yalnızca izdüşüme ve kapalı B_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X,Z)$ ve $D(Z,Y)$ uzaklıklarına bağlıdır, [30].

Şimdi, M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun ve X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Bununla birlikte kapalı B_2 hareketi

esnasında, M , N , X ve Y noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_X ve Ψ_Y ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket esnasında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları aynı bir F_M'' alanı iken; Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları da F_M'' den farklı, sırasıyla, F_X'' ve F_Y'' olsun. Ayrıca F_M'' ile F_X'' alanları arasındaki fark, F_1'' ve F_M'' ile F_Y'' alanları arasındaki fark da F_2'' ile gösterilsin. Buna göre yukarıdaki koşullar altında, F_1'' ve F_2'' için (2.5.28) denkleminde, sırasıyla,

$$F_1'' = F_M'' - F_X'' = \varepsilon D(M, X)D(X, N)$$

ve

$$F_2'' = F_M'' - F_Y'' = \varepsilon D(M, Y)D(Y, N)$$

yazılabilir. Eğer F_1''/F_2'' oranı hesaplanırsa,

$$F_1''/F_2'' = \frac{D(M, X)D(X, N)}{D(M, Y)D(Y, N)}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$F_1''/F_2'' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)} \quad (2.5.29)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan açıkça görüleceği gibi F_1''/F_2'' oranı, yalnızca MN doğru parçası üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişlerine bağlıdır ve $X \neq Y$ olduğundan;

$$\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \neq 1$$

dir. Ayrıca (2.5.29) eşitliğindeki

$$\frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)}$$

oranı; M , N , Y ve X noktalarının çifte oranıdır, [54]. Eğer (MN, YX) ile gösterilen bu çifte oran [54], kısaca ℓ ile gösterilirse; (2.5.29) eşitliği ile verilen F_1^n/F_2^n oranı, ℓ çifte oranına bağlı olarak

$$F_1^n/F_2^n = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

O halde [32] de verilen Sonuç 1 in bir genelleştirilmiş olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.5.2: F_1^n/F_2^n oranı, M , N , X ve Y noktalarının yalnızca rölatif durumlarına bağlıdır.

Yukarıdaki teoremin özel bir hali olarak [32] de verilen Sonuç 1, aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

Sonuç 2.5.1: M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun ve X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Bununla birlikte kapalı B_2 hareketi altında, M , N , X ve Y noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_X ve Ψ_Y ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, $\Psi_M = \Psi_N$ olsun ve bu yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanı da F_M'' ile gösterilsin. Ayrıca Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları da F_M'' den farklı, sırasıyla, F_X'' ve F_Y'' olsun. Eğer F_M'' ile F_X'' alanları arasındaki fark,

F_1^n ve $F_M'^n$ ile $F_Y'^n$ alanları arasındaki fark da F_2^n ile gösterilirse; F_1^n/F_2^n oranı için $\ell = (MN, YX)$ olmak üzere,

$$F_1^n/F_2^n = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

eşitliği geçerli olur.

Şimdi, M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı B_2 hareketi esnasında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket esnasında, $\Psi_M = \Psi_N$ iken; $\Psi_A = \Psi_B$ olsun veya Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının hepsinin birden aynı olmaması koşuluyla, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları aynı bir $F_M'^n$ alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları da aynı bir $F_A'^n$ alanı olsun. O takdirde bu koşullar altında bazı irdelemeler yapılarak, aşağıdaki sonuçlar ve bu sonuçlar ile ilgili teoremler verilebilir:

Yukarıdaki koşullar ve izdüşüm ile kapalı B_2 hareketine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, (2.5.28) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğruduş nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$F_M'^n - F_X'^n = \varepsilon_1 D(M, X)D(X, N), \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

ve

$$F_A'^n - F_X'^n = \varepsilon_2 D(A, X)D(X, B), \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

yazılabilir. O halde aşağıdaki iki durum sözkonusudur:

i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$F'_M{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$F'_A{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B)] \quad (2.5.30)$$

elde edilir. Eğer $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n$ ise (2.5.30) denkleminde

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (2.5.30) denkleminde

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = 0$$

ve dolayısıyla

$$F'_M{}^n = F'_A{}^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı B_2 hareketi altında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanlarının eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n$ olması demektir.

ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$F'_M{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$F'_A{}^n - F'_X{}^n = -\varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B)] \quad (2.5.31)$$

elde edilir. Eğer $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n$ ise (2.5.31) denkleminde

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (2.5.31) denkleminde

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = 0$$

ve dolayısıyla

$$F'_M{}^n = F'_A{}^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı B_2 hareketi esnasında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanlarının eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n$ olması demektir.

Böylece [32] de verilen Sonuç 2, yukarıdaki koşullar altında aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

Teorem 2.5.3: M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, izdüşüme ve kapalı B_2 hareketine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M,N) \neq 0$ ve $D(A,B) \neq 0$ koşulları altında, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı B_2 hareketi altında, M , N , A ve B noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, $\Psi_M = \Psi_N$ iken; $\Psi_A = \Psi_B$ olsun veya Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının hepsinin birden aynı olmaması koşuluyla, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları aynı bir $F_M''^n$ alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları da aynı bir $F_A''^n$ alanı olsun. O takdirde bu hareket altında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanlarının eşit, yani $F_M''^n = F_A''^n$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki bağıntılardan yalnızca birinin gerçekleşmesidir:

$$D(M,X)D(X,N) - D(A,X)D(X,B) = 0$$

ya da

$$D(M,X)D(X,N) + D(A,X)D(X,B) = 0.$$

Şimdi de kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı B_2 hareketi esnasında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Eğer bu hareket esnasında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki $F_M''^n$ dik izdüşüm alanı, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki $F_A''^n$ dik

izdüşüm alanı ve Ψ_X yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki $F_X'^n$ dik izdüşüm alanı eşit ise (2.5.28) denkleminde; M, X, N ile A, X, B doğrudan nokta üçlülere göz önüne alınır, sırasıyla,

$$D(M, X)D(X, N) = 0$$

ve

$$D(A, X)D(X, B) = 0$$

elde edilir. Eğer bu son iki denklem geçerli ise de (2.5.28) denklemi göz önünde bulundurularak, sırasıyla,

$$F_M'^n - F_X'^n = 0$$

ve

$$F_A'^n - F_X'^n = 0$$

veya

$$F_M'^n = F_X'^n$$

ve

$$F_A'^n = F_X'^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı B_2 hareketi esnasında $\Psi_M, \Psi_N, \Psi_A, \Psi_B$ ve Ψ_X yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanlarının eşit, yani $F_M'^n = F_A'^n = F_X'^n$ olması demektir.

Dolayısıyla [32] de verilen Sonuç 2, yukarıdaki koşullar altında, Teorem 2.5.3 den farklı olarak aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

Teorem 2.5.4: M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı B_2 hareketi altında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları aynı bir $F_M''^n$ alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanları da aynı bir $F_A''^n$ alanı olsun. O takdirde bu hareket altında Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusundaki dik izdüşüm alanlarının eşit, yani $F_M''^n = F_A''^n = F_X''^n$ olması için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır, yani \overrightarrow{MN} ve \overrightarrow{AB} vektörlerinin \vec{e}' birim normal vektörüne dik olmalarıdır.

2.6. L^n n -BOYUTLU LORENTZ UZAYLARI

Bu alt bölümde, L^n n -boyutlu Lorentz uzayları ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir, [55-59].

Tanım 2.6.1: V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ özeliğini sağlıyor ise bu fonksiyona V üzerinde bir simetrik bilineer form denir, [55].

Tanım 2.6.2: \langle , \rangle , V sonlu boyutlu reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun. Eğer

- i) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise \langle , \rangle ya pozitif tanımlı,
- ii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise \langle , \rangle ya negatif tanımlı,
- iii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise \langle , \rangle ya pozitif yarı-tanımlı,
- iv) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise \langle , \rangle ya negatif yarı-tanımlı,
- v) $\forall \vec{w} \in V$ ve $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ için $\vec{v} = \vec{0}$ oluyorsa \langle , \rangle ya dejenere olmayan, aksi takdirde dejenere simetrik bilinear form denir, [55].

Tanım 2.6.3: \langle , \rangle , V sonlu boyutlu reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form ve W da V nin bir alt uzayı olsun. \langle , \rangle nın W üzerinde

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlı kısıtlanması negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna, \langle , \rangle simetrik bilinear formunun indeksi denir ve bu indeks, ν ile gösterilir. Genellikle \langle , \rangle simetrik bilinear formunun indeksi, V vektör uzayının indeksi olarak alınır ve $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir, [55].

Tanım 2.6.4: Sonlu boyutlu bir V reel vektör uzayı üzerindeki dejenere olmayan bir \langle , \rangle simetrik bilinear formuna bir skaler çarpım ve bu \langle , \rangle skaler çarpımıyla donatılmış V uzayına da skaler çarpım uzayı adı verilir, [55].

Teorem 2.6.1: Sonlu boyutlu bir V skaler çarpım uzayının ($\text{boy}V \geq 1$),

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = \pm 1$$

özelliklerine sahip bir $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ortonormal bazı vardır. Burada δ_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, kronecker deltası ve ε_j de \vec{e}_j vektörünün işaretidir, [55].

Teorem 2.6.2: Sonlu boyutlu bir V skaler çarpım uzayının herhangi bir ortonormal bazının negatif işaretli vektörlerinin sayısı, V nin indeksine eşittir, [55].

Tanım 2.6.5: Sonlu boyutlu bir V skaler çarpım uzayı için $\text{boy}V \geq 2$ ve $\nu=1$ ise V ye Lorentz vektör uzayı denir. Eğer özel olarak $V = \mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı alınır; $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilinear ve dejenere olmayan $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ metrik tensörüne \mathbb{R}^n üzerinde Lorentz metriği denir. Bu metrik ile birlikte \mathbb{R}^n vektör uzayı, n -boyutlu Lorentz uzayı (veya Minkowski uzayı) olarak adlandırılır ve genellikle L^n (veya \mathbb{R}_1^n) ile gösterilir, [55].

Tanım 2.6.6: $\vec{x} \in L^n$ olsun. Eğer

- i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L > 0$ ya da $\vec{x} = \vec{0}$ ise \vec{x} vektörüne bir uzaysal (spacelike) vektör,
- ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L < 0$ ise \vec{x} vektörüne bir zamansal (timelike) vektör,
- iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = 0$ ve $\vec{x} \neq \vec{0}$ ise \vec{x} vektörüne bir ışıksal (lightlike ya da null) vektör adı verilir, [55].

Tanım 2.6.7: $\vec{x}, \vec{y} \in L^n$ olsun. Eğer

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = 0$$

ise \vec{x} ve \vec{y} vektörlerine Lorentz anlamında dik vektörler denir, [56].

Tanım 2.6.8: Bir $\vec{x} \in L^n$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L|}$$

olarak tanımlanır, [55].

Bu son tanım ve Tanım 2.6.6 dan, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.6.3: $\vec{x} \in L^n$ olsun. O halde

- i) $\|\vec{x}\|_L \geq 0$ dır,
- ii) $\|\vec{x}\|_L = 0$ ve $\vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}$ bir ışıksal vektördür,
- iii) \vec{x} bir zamansal vektör ise $\|\vec{x}\|_L^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L$ dır,
- iv) \vec{x} bir uzaysal vektör ise $\|\vec{x}\|_L^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L$ dır, [55].

Tanım 2.6.9: L^{n+1} de,

$$H^n(-1) = \{\vec{x} \in L^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = -1\},$$

$$S_1^n = \{\vec{x} \in L^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1\}$$

ve

$$LC^* = \{\vec{x} \in L^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bu sözde kürelere, sırasıyla, n -boyutlu hiperbolik uzay, n -boyutlu de Sitter uzayı ve n -boyutlu ışık konisi (lightcone ya da nullcone) adı verilir, [55-57].

Tanım 2.6.10: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı

$$\vec{x} \times_L \vec{y} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

şeklinde tanımlanır, [58,59].

Teorem 2.6.4: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t} \in L^3$ olmak üzere, Lorentz anlamında vektörel çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \vec{x} \times_L \vec{y}, \vec{z} \rangle_L$,
- ii) $\vec{x} \times_L (\vec{y} \times_L \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L \vec{z} - \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_L \vec{y}$,
- iii) $\langle \vec{x} \times_L \vec{y}, \vec{z} \times_L \vec{t} \rangle_L = -\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_L \langle \vec{y}, \vec{t} \rangle_L + \langle \vec{x}, \vec{t} \rangle_L \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_L$, [59].

Tanım 2.6.11: $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 1$ ve $\varepsilon_n = -1$ olmak üzere; \mathbb{R}^n_n de, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\delta_{ij} \varepsilon_j]$ şeklinde tanımlanan matrisi işaret matrisi denir, [55].

Tanım 2.6.12: \mathbb{R}^n_n de,

$$A^{-1} = \boldsymbol{\varepsilon} A^T \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.6.1}$$

eşitliğini sağlayan bir A regüler matrisine Lorentz anlamında bir ortogonal matris denir ve bu matrislerin cümlesi $O_1(n)$ ile gösterilir. Her $A \in O_1(n)$ matrisi için $\det A = \pm 1$ dir. $\det A = 1$ koşulunu sağlayan bir $A \in O_1(n)$ matrisine de Lorentz anlamında bir özel ortogonal matris denir ve bu matrislerin cümlesi de $SO_1(n)$ ile gösterilir, [55].

Teorem 2.6.5: Bir $A \in \mathbb{R}^n_n$ matrisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) $A \in O_1(n)$,
- ii) A matrisinin sütun (sıra) vektörleri, L^n uzayının ortonormal bir bazıdır,
- iii) A , L^n uzayının ortonormal bir bazını ortonormal bir baza dönüştürür, [55].

Tanım 2.6.13: $S^T = -\epsilon S \epsilon$ eşitliğini sağlayan bir $S \in \mathbb{R}^n_n$ matrisine Lorentz anlamında anti-simetrik bir matris denir, [55].

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, E^2 de verilen klasik Holditch Teoremi'nin [2], E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altındaki genelleştirilmişlerinin (Holditch-Tipi Teoremler'in) [22,26,30]; L^3 deki karşılıkları araştırılmıştır. Ayrıca E^3 de bu uzay hareketleri ile ilgili verilen bazı sonuçların [11,22,26,32], L^3 deki karşılıkları çalışılmıştır. Bu sebeple E^3 deki bu genelleştirilmişler ve sonuçlar, "Genel Kısımlar" bölümünün 2.4 ve 2.5 alt bölümlerinde detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında verilen bu genelleştirilmişlerin ve sonuçların [11,22,26,30,32], L^3 deki karşılıklarının araştırılabilirmeleri amacıyla; beş alt bölümden oluşan "Bulgular" bölümünün 4.1 alt bölümünde, "Genel Kısımlar" bölümünün 2.6 alt bölümünde verilen Lorentz uzayları ile ilgili temel kavramlar kullanılarak, L^3 de uzay hareketlerinin türev denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca bu uzay hareketleri altında, hız vektörleri tanımlanmış ve bu hız vektörleri arasındaki ilişkiler ortaya koyulmuştur. Bununla birlikte L^3 de; 1-parametrelili, 2-parametrelili ve 3-parametrelili uzay hareketleri tanımlanmıştır. Alt bölüm 4.2 de; L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, hareketli uzayın herhangi bir sabit noktası tarafından sabit uzayda belirlenen bölgenin hacim elementi ve hacim formülleri bulunmuştur. Alt bölüm 4.3 de de bu uzay hareketi altında, hacimler için Lorentz anlamında Holditch-Tipi Teoremler ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Alt bölüm 4.4 de ise L^3 de herhangi bir yüzeyin bir parçasının, $\vec{e} = \vec{e}_3$ birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümünün alanı ile ilgili bazı ön bilgiler verilmiştir. Alt bölüm 4.5 de de L^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında, hareketli uzayın herhangi bir sabit noktası tarafından sabit uzayda çizilen kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri bulunmuştur. Ayrıca bu kapalı uzay hareketi esnasında kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının, $\vec{e}' = \vec{e}'_3$ birim normal vektörü doğrultusunda, $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümleri alınarak; yüzey parçalarının dik izdüşümlerinin alanları için Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem ve bazı sonuçları elde edilmiştir.

4. BULGULAR

"Genel Kısımlar" bölümünün 2.4 ve 2.5 alt bölümlerinde, sırasıyla, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında hareketli uzayda ele alınan sabit noktaların 3-parametreliliği uzay hareketi altında sabit uzayda belirledikleri bölgelerin hacimleri ve 2-parametreliliği kapalı uzay hareketi altında da sabit uzayda çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının dik izdüşüm alanları ile ilgili Holditch-Tipi Teoremler ve ayrıca bu uzay hareketleri altında verilen bazı sonuçlar incelenmiştir, [11,22,26,30,32]. Doktora tez çalışmasının orjinal kısmını meydana getiren bu bölümde ise L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında, hareketler ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra bu teoremlerin ve sonuçların karşılıkları araştırılmıştır. Ayrıca L^3 de bu hareketler ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. L^3 DE HAREKETLER

Bu alt bölümde, L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında hareketler ele alınmıştır ve L^3 de, uzay kinematiği için gerek duyulan ve tıpkı eğriler teorisindeki Frenet Formülleri gibi önemli rol oynayan, hareketlerin türev denklemleri verilmiştir. Ayrıca bu uzay hareketleri altında, hız vektörleri tanımlanmış ve bu hız vektörleri arasındaki bazı ilişkiler ortaya koyulmuştur. Bununla birlikte L^3 de; 1-parametreliliği, 2-parametreliliği ve 3-parametreliliği uzay hareketleri tanımlanmıştır.

R ve R' , L^3 3-boyutlu Lorentz uzayında birbiri üzerinde hareket edebilen, sırasıyla, hareketli ve sabit Lorentz uzayları olsun. Bu uzaylarda, sırasıyla, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ dik çatıları tespit edilsin, (Şekil 2.1. e bakınız.). Bu iki dik çatı, sırasıyla, R ve R' uzaylarının temsilcileri olarak kabul edilirse; R uzayının R' uzayına göre hareketi, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatısına göre hareketi olarak düşünülmektedir. Bu hareket, genellikle R/R' ile gösterilmektedir. Burada R ve R' uzayları, aynı şekilde yönlendirilmektedir.

Tanım 4.1.1: R/R' hareketinde $\overline{OO'}$ vektörüne hareketin öteleme vektörü denir ve bu vektör,

$$\overline{OO'} = \vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \quad (4.1.1)$$

ile gösterilir.

Eğer $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ve $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ ortonormal bazları, matris formunda, sırasıyla,

$$E = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \text{ ve } E' = \begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilirse; R ve R' uzaylarının aynı yönlendirilmeye sahip olduğu göz önüne alınarak, $A \in SO_1(3)$ olmak üzere,

$$E = AE' \text{ veya } E' = A^{-1}E \quad (4.1.2)$$

yazılabilir. Buradaki ilk denklemin diferansiyeli alınırsa,

$$dE = dAE' + AdE' \quad (4.1.3)$$

bulunur. Burada E' matrisi, R' sabit uzayını temsil ettiğinden; $dE' = 0$ dır. O halde (4.1.3) denklemi, (4.1.2) deki ikinci denklem göz önüne alınırsa;

$$dE = dA(A^{-1}E) = (dA A^{-1})E$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu son eşitlikte

$$dA A^{-1} = \Omega \quad (4.1.4)$$

alınırsa,

$$dE = \Omega E \quad (4.1.5)$$

elde edilir. $A \in SO_1(3)$ matrisi regüler olduğundan,

$$A A^{-1} = I_3$$

yazılabilir ve buradan da diferansiyel alınarak

$$dA A^{-1} + A dA^{-1} = 0$$

bulunur. (4.1.4) ve (2.6.1) denklemleri, bu son denklemde kullanılırsa;

$$\Omega + A \boldsymbol{\varepsilon} dA^T \boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

veya

$$\Omega = -A \boldsymbol{\varepsilon} dA^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1.6)$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.4) ve (2.6.1) denklemlerinden,

$$\Omega = dA(\boldsymbol{\varepsilon} A^T \boldsymbol{\varepsilon})$$

bulunur. Bu matrisin transpozu alınırsa,

$$\Omega^T = \boldsymbol{\varepsilon} A \boldsymbol{\varepsilon} dA^T$$

elde edilir. Böylece bu son denklem, (4.1.6) denklemi ile birlikte düşünülürse

$$\Omega^T = -\boldsymbol{\varepsilon} \Omega \boldsymbol{\varepsilon}$$

bulunur. O halde Ω matrisi, Lorentz anlamında anti-simetrik bir matristir. Bu durumda Ω matrisinin bileşenleri, ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, ile gösterilirse; Ω matrisi için

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada $\omega_{ij} = -\omega_{kj}$, $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, alınırsa; Ω matrisi,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 4.1.2: Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenleri ile tanımlanan

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \vec{e}_i$$

vektörüne, R/R' hareketinin dönme vektörü adı verilir.

Eğer (4.1.7) ile verilen Ω matrisi, (4.1.5) denkleminde kullanılırsa;

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= -\omega_2 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_2, \\ d\vec{e}_2 &= \omega_3 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= -\omega_1 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

elde edilir. Bu türev denklemleri, kısaca

$$d\vec{e}_i = (-1)^{j-k} \omega_j \vec{e}_k - \omega_k \vec{e}_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.1.9)$$

şeklinde tek bir denklem ile ifade edilebilir.

$d\vec{e}_i$ için verilen bu son denklemin dış türevi alınır,

$$\vec{0} = d(d\vec{e}_i) = (-1)^{j-k} (d\vec{e}_k \wedge \omega_j + \vec{e}_k d\omega_j) - (d\vec{e}_j \wedge \omega_k + \vec{e}_j d\omega_k)$$

bulunur. Burada da (4.1.9) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (-1)^{j-k} \left(\left((-1)^{i-j} \omega_i \vec{e}_j - \omega_j \vec{e}_i \right) \wedge \omega_j + \vec{e}_k d\omega_j \right) - \left(\left((-1)^{k-i} \omega_k \vec{e}_i - \omega_i \vec{e}_k \right) \wedge \omega_k + \vec{e}_j d\omega_k \right) \\ &= (-1)^{i-k} \omega_i \wedge \omega_j \vec{e}_j - (-1)^{j-k} \omega_j \wedge \omega_i \vec{e}_i + (-1)^{j-k} d\omega_j \vec{e}_k - (-1)^{k-i} \omega_k \wedge \omega_i \vec{e}_i \\ &\quad + \omega_i \wedge \omega_k \vec{e}_k - d\omega_k \vec{e}_j \end{aligned}$$

veya

$$\vec{0} = \left((-1)^{i-k} \omega_i \wedge \omega_j - d\omega_k \right) \vec{e}_j + \left((-1)^{j-k} d\omega_j + \omega_i \wedge \omega_k \right) \vec{e}_k$$

elde edilir. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, lineer bağımsız olduğu için bu son denklemden

$$(-1)^{i-k} \omega_i \wedge \omega_j - d\omega_k = 0, \quad (-1)^{j-k} d\omega_j + \omega_i \wedge \omega_k = 0$$

veya

$$d\omega_k = (-1)^{i-k} \omega_i \wedge \omega_j, \quad d\omega_j = (-1)^{k-j} \omega_k \wedge \omega_i$$

yazılabilir. Bu durumda R/R' hareketinin dönme vektörünün bileşenleri için integrallenebilme koşulları,

$$d\omega_i = (-1)^{j-i} \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.1.10)$$

şeklinde bulunur.

(4.1.1) den kolaylıkla ifade edilen $\overline{O'O} = -\vec{u} = -u_1 \vec{e}_1 - u_2 \vec{e}_2 - u_3 \vec{e}_3$ vektörünün diferansiyeli alınır ve (4.1.8) deki denklemler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d\overline{O'O} &= -d\vec{u} \\ &= -du_1 \vec{e}_1 - u_1 d\vec{e}_1 - du_2 \vec{e}_2 - u_2 d\vec{e}_2 - du_3 \vec{e}_3 - u_3 d\vec{e}_3 \\ &= (-du_1 - u_2 \omega_3 + u_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (-du_2 + u_3 \omega_1 + u_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (-du_3 + u_1 \omega_2 + u_2 \omega_1) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\sigma_i = -du_i - (-1)^j u_j \omega_k + u_k \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.1.11)$$

ve $-d\vec{u} = \vec{\sigma}'$ alınırsa,

$$\vec{\sigma}' = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 \quad (4.1.12)$$

yazılabilir.

Tanım 4.1.3: (4.1.8) (veya kısaca (4.1.9)) ve (4.1.12) denklemlerine, R/R' hareketinin türev denklemleri denir.

Eğer (4.1.12) denkleminin dış türevi alınırsa,

$$\vec{0} = d\vec{\sigma}' = d\sigma_1 \wedge \vec{e}_1 + \sigma_1 d\vec{e}_1 + d\sigma_2 \wedge \vec{e}_2 + \sigma_2 d\vec{e}_2 + d\sigma_3 \wedge \vec{e}_3 + \sigma_3 d\vec{e}_3$$

bulunur. Burada da (4.1.8) deki denklemler göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= d\vec{\sigma}' \\ &= (-\omega_2 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_2) \wedge \sigma_1 + d\sigma_1 \vec{e}_1 + (\omega_3 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_3) \wedge \sigma_2 + d\sigma_2 \vec{e}_2 \\ &\quad + (-\omega_1 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_1) \wedge \sigma_3 + d\sigma_3 \vec{e}_3 \\ &= -\omega_2 \wedge \sigma_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \wedge \sigma_1 \vec{e}_2 + d\sigma_1 \vec{e}_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 \vec{e}_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 \vec{e}_3 + d\sigma_2 \vec{e}_2 - \omega_1 \wedge \sigma_3 \vec{e}_2 \\ &\quad - \omega_2 \wedge \sigma_3 \vec{e}_1 + d\sigma_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$\vec{0} = (d\sigma_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3) \vec{e}_1 + (-\omega_3 \wedge \sigma_1 + d\sigma_2 - \omega_1 \wedge \sigma_3) \vec{e}_2 \\ + (-\omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 + d\sigma_3) \vec{e}_3$$

elde edilir. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, lineer bağımsız olduğu için bu son denklemden

$$d\sigma_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 - \omega_2 \wedge \sigma_3 = 0,$$

$$d\sigma_2 - \omega_1 \wedge \sigma_3 - \omega_3 \wedge \sigma_1 = 0,$$

$$d\sigma_3 - \omega_2 \wedge \sigma_1 - \omega_1 \wedge \sigma_2 = 0$$

veya

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \omega_3 - \sigma_3 \wedge \omega_2,$$

$$d\sigma_2 = -\sigma_3 \wedge \omega_1 - \sigma_1 \wedge \omega_3,$$

$$d\sigma_3 = -\sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1$$

bulunur. Böylece R/R' hareketinin öteleme vektörü ile ilgili olarak elde edilen bu integrallenebilme koşulları, kısaca

$$d\sigma_i = (-1)^j \sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.1.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Şimdi, R/R' hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan herhangi bir noktanın R' sabit uzayını temsil eden dik çatının başlangıç noktasına göre konum vektörünün değişimini inceleyelim:

R hareketli uzayındaki herhangi bir X noktasının $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının başlangıç noktasına göre konum vektörü, $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ ile gösterilirse

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\overline{O'X} = \overline{O'O} + \overline{OX}$$

vektörel denklemi için (Şekil 2.1 e bakınız.) X noktasının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatisının başlangıç noktasına göre konum vektörü, $\overline{O'X} = \vec{x}'$ ile gösterilirse; $\overline{O'O} = -\vec{u}$ olduğundan,

$$\vec{x}' = -\vec{u} + \vec{x}$$

yazılabilir. O halde \vec{x}' konum vektörünün değişimi olan $d\vec{x}'$,

$$d\vec{x}' = -d\vec{u} + d\vec{x}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemde, (4.1.12) ve (4.1.8) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\vec{x}' &= \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 + dx_1 \vec{e}_1 + x_1 d\vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + x_2 d\vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 + x_3 d\vec{e}_3 \\ &= \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3 + (x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (-x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (-x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3 \\ &\quad + dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} d\vec{x}' &= (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (\sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3 \\ &\quad + dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

elde edilir.

Buna göre [1,15,33-35,40,41,44] göz önünde bulundurularak, L^3 de hareketler altında hız vektörleri için aşağıdaki tanımlar ve teorem kolaylıkla ifade edilebilir:

Tanım 4.1.4: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının R' sabit uzayında ve R hareketli uzayında sahip olduğu hız vektörlerine, sırasıyla, mutlak ve relatif hız vektörleri denir ve bu hız vektörleri, sırasıyla,

$$\vec{X}_A = d\vec{x}'$$

ve

$$\vec{X}_R = dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2 + dx_3 \vec{e}_3$$

ile gösterilir.

Tanım 4.1.5: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak hız vektörü ile relatif hız vektörü arasındaki farka, sürüklenme hız vektörü denir ve bu hız vektörü,

$$\vec{X}_F = (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (\sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3$$

ile gösterilir.

Teorem 4.1.1: R/R' hareketi esnasında herhangi bir $X \in R$ noktasının mutlak, sürüklenme ve relatif hız vektörleri arasında

$$\vec{X}_A = \vec{X}_F + \vec{X}_R$$

bağıntısı geçerlidir.

Eğer R/R' hareketi esnasında bir $X \in R$ noktası, sabit ise $\vec{X}_R = \vec{0}$ olacağından;

$$\vec{X}_A = \vec{X}_F$$

elde edilir. Bu sonuca göre herhangi bir $X \in R$ sabit noktası için (4.1.14) denkleminde,

$$d\vec{x}' = (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \vec{e}_1 + (\sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \vec{e}_2 + (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \vec{e}_3$$

yazılabilir. Burada

$$\tau_i = \sigma_i + (-1)^j x_j \omega_k - x_k \omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.1.15)$$

alınırsa; $d\vec{x}'$,

$$d\vec{x}' = \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2 + \tau_3 \vec{e}_3 \quad (4.1.16)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında, L^3 de bir R/R' hareketi; $i, 1 \leq i \leq 3$, hareketin parametre sayısı olmak üzere; kısaca \mathcal{B}_i ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.6: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq 3$, vektörleri; reel bir t parametresinin (genellikle zaman olarak alınır) diferansiyellenebilir fonksiyonları ise $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ hareketli dik çatısının $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ sabit dik çatısına göre hareketi olarak kabul edilen R hareketli uzayının R' sabit uzayına göre hareketine, 1-parametrelili uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca \mathcal{B}_1 ile gösterilir.

Tanım 4.1.7: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve $\vec{e}_i, 1 \leq i \leq 3$, vektörleri; t_1 ve t_2 reel parametrelerinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise harekete, 2-parametrelili uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca \mathcal{B}_2 ile gösterilir.

Tanım 4.1.8: R/R' uzay hareketinin \vec{u} öteleme vektörü ve \vec{e}_i , $1 \leq i \leq 3$, vektörleri; t_1 , t_2 ve t_3 reel parametrelerinin diferansiyellenebilir fonksiyonları ise harekete, 3-parametrelî uzay hareketi denir ve bu hareket, kısaca \mathcal{B}_3 ile gösterilir.

4.2. L^3 DE 3-PARAMETRELİ UZAY HAREKETİ ALTINDA SABİT UZAYDA BELİRLENEN BÖLGENİN HACMİ

Burada alt bölüm 4.3 de gerekli olacak, \mathcal{B}_3 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan herhangi bir sabit noktanın R' sabit uzayında belirlediği bölgenin hacim elementi ve hacim formülleri verilmiştir.

\mathcal{B}_3 hareketi esnasında, Ω matrisinin ω_i bileşenleri ve $-d\vec{u} = \vec{\sigma}'$ vektörünün (4.1.11) de verilen σ_i bileşenleri; t_1 , t_2 ve t_3 reel parametrelerinin lineer diferansiyel formlarıdır. Ayrıca 3-boyutlu parametre uzayında (t_i parametrelerinin uzayında) ele alınan bir G bölgesinin sınırı -bir kürenin bağlantılılık yapısına sahip- kapalı ve yönlendirilebilir bir $R(G)$ yüzeyi olmak üzere; kendimizi bu G bölgesine karşılık gelen bir \mathcal{B}_3 hareketine kısıtlarsak, $R(G)$ ye de bu \mathcal{B}_3 hareketi ile birlikte oluşan kapalı bir \mathcal{B}_2 hareketi karşılık gelir. Bu kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir nokta, R' sabit uzayında kapalı bir yörünge yüzeyi çizer ve bu kapalı yörünge yüzeyi, \mathcal{B}_3 hareketi esnasında bu noktanın R' de belirlediği bölgenin sınırınıdır.

Tanım 4.2.1: \mathcal{B}_3 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir X noktasının R' sabit uzayında belirlediği bölgenin hacim elementi; $\tau_1 = \sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2$, $\tau_2 = \sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3$ ve $\tau_3 = \sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1$ olmak üzere, (4.1.16) denklemini göz önüne alınarak

$$dJ_X = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanılarak elde edilen

$$J_X = \int_G dJ_X \quad (4.2.2)$$

ifadesine de bu bölgenin hacmi denir.

Bu tanıma göre; \mathcal{B}_3 hareketi esnasında $O \in R$ başlangıç noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (4.1.15) ve (4.2.1) denklemlerinden,

$$dJ_O = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \quad (4.2.3)$$

elde edilir. O halde (4.2.2) ve (4.2.3) denklemlerinden, $O \in R$ noktasının R' de belirlediği bölgenin hacmi için

$$J_O = \int_G \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 \quad (4.2.4)$$

bulunur. Ayrıca \mathcal{B}_3 hareketi altında sabit bir $X \in R$ noktasının R' de belirlediği bölgenin dJ_X hacim elementi için (4.1.15) ve (4.2.1) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} dJ_X &= \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3 \\ &= (\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \wedge (\sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3) \wedge (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \\ &= [(\sigma_1 + x_2 \omega_3 - x_3 \omega_2) \wedge (\sigma_2 - x_3 \omega_1 - x_1 \omega_3)] \wedge (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \\ &= \left[\begin{array}{l} \sigma_1 \wedge \sigma_2 - \sigma_1 \wedge \omega_1 x_3 - \sigma_1 \wedge \omega_3 x_1 + \omega_3 \wedge \sigma_2 x_2 \\ -\omega_3 \wedge \omega_1 x_2 x_3 - \omega_2 \wedge \sigma_2 x_3 + \omega_2 \wedge \omega_1 x_3^2 + \omega_2 \wedge \omega_3 x_3 x_1 \end{array} \right] \\ &\quad \wedge (\sigma_3 - x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_1 - \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_2 - \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_3 \\
&\quad + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3 x_1 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_3 x_2 - \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3 x_1 \\
&\quad + \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 x_1^2 + \sigma_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_1 x_2 + \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 x_2 \\
&\quad - \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_2 x_1 - \omega_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_2^2 - \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_2 x_3 \\
&\quad + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_2 x_3 x_1 + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_2^2 x_3 - \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 x_3 \\
&\quad + \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 x_3 x_1 + \omega_2 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_1 x_3 x_2 + \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \sigma_3 x_3^2 \\
&\quad - \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 x_1 - \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 x_3^2 x_2 + \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \sigma_3 x_3 x_1 \\
&\quad - \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 x_3 x_1^2 - \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_3 x_1 x_2
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
dJ_X &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 x_1^2 + \sigma_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_2^2 - \sigma_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 \\
&\quad + (-\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 - \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) x_1 x_2 \\
&\quad + (-\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 - \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1) x_2 x_3 \\
&\quad + (-\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2) x_3 x_1 \\
&\quad + (-\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3) x_1 \\
&\quad + (\sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1) x_2 \\
&\quad + (-\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2) x_3
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. dJ_X hacim elementi, kısaca

$$\begin{aligned}
dJ_X &= \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sum_{i=1}^3 (-1)^{j-k} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k x_i^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 (-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + (-1)^k \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) x_i x_j \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 ((-1)^i \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) x_i,
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. Eğer (4.2.5) denklemi, (4.2.2) denkleminde kullanılırsa; \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında, $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacmi için

$$J_X = \int_G \begin{pmatrix} \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 - \sigma_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 x_1^2 + \sigma_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 x_2^2 \\ -\sigma_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 x_3^2 + (-\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 - \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) x_1 x_2 \\ + (-\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 - \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1) x_2 x_3 \\ + (-\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2) x_3 x_1 \\ + (-\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3) x_1 \\ + (\sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1) x_2 \\ + (-\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2) x_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.6) denklemi, (4.2.2) denklemine kullanılır ve

$$A_i = \int_G (-1)^{j-k} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$$

alınırsa; (4.2.7) denklemi ile verilen J_X hacmi, kısaca

$$J_X = \int_G \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + \sum_{i=1}^3 \int_G (-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + (-1)^k \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) x_i x_j \\ + \sum_{i=1}^3 \int_G ((-1)^i \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k) x_i, \quad (4.2.8)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. Dolayısıyla \mathfrak{B}_3 hareketi altında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacmi, x_i bileşenlerine göre bir kuadratik polinomdur.

Eğer $\sigma_j \wedge \sigma_k$ 2-formunun diferansiyeli alınırsa,

$$d(\sigma_j \wedge \sigma_k) = d\sigma_j \wedge \sigma_k - \sigma_j \wedge d\sigma_k$$

ve burada da (4.1.13) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(\sigma_j \wedge \sigma_k) &= \left((-1)^k \sigma_k \wedge \omega_i - \sigma_i \wedge \omega_k \right) \wedge \sigma_j - \sigma_j \wedge \left((-1)^i \sigma_i \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge \omega_i \right) \\ &= (-1)^k \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \sigma_j - \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \sigma_j - (-1)^i \sigma_j \wedge \sigma_i \wedge \omega_j + \sigma_j \wedge \sigma_j \wedge \omega_i \end{aligned}$$

veya

$$d(\sigma_j \wedge \sigma_k) = (-1)^i \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k$$

elde edilir. Burada Stokes Formülü kullanılırsa,

$$\int_G \left((-1)^i \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k \right) = \int_{R(G)} \sigma_j \wedge \sigma_k \quad (4.2.9)$$

bulunur. Benzer şekilde $\sigma_i \wedge \omega_j$ 2-formunun diferansiyeli alınırsa,

$$d(\sigma_i \wedge \omega_j) = d\sigma_i \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge d\omega_j$$

ve burada da (4.1.10) ve (4.1.13) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} d(\sigma_i \wedge \omega_j) &= \left((-1)^j \sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j \right) \wedge \omega_i - \sigma_i \wedge \left((-1)^{k-j} \omega_k \wedge \omega_i \right) \\ &= (-1)^j \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i - \sigma_k \wedge \omega_j \wedge \omega_i - (-1)^{k-j} \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \omega_i \end{aligned}$$

veya

$$d(\sigma_i \wedge \omega_j) = (-1)^j \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i - (-1)^{k-j} \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \omega_i$$

elde edilir. Burada Stokes Formülü'nün kullanılmasıyla da

$$\int_G \left(-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + (-1)^k \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k \right) = -(-1)^{k-j} \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \omega_j \quad (4.2.10)$$

bulunur. Buna göre \mathcal{B}_3 hareketi esnasında bir $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin J_X hacim formülü için elde edilen (4.2.8) ile verilen kuadratik polinomda, lineer ve karışık kuadratik terimlerin katsayıları sıfır olacak şekilde uygun bir hareketli koordinat sistemi seçilirse; (4.2.9) ve (4.2.10) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\int_G \left((-1)^i \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_i \wedge \sigma_k \wedge \omega_k \right) = \int_{R(G)} \sigma_j \wedge \sigma_k = 0$$

ve

$$\int_G \left(-\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k + (-1)^k \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k \right) = -(-1)^{k-j} \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \omega_j = 0$$

yazılabilir. O takdirde (4.2.4) ve (4.2.8) denklemlerinden, J_X hacmi için

$$J_X = J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 \quad (4.2.11)$$

elde edilir. Burada A_i katsayıları,

$$A_i = \int_G (-1)^{j-k} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k = \frac{1}{2} \left(\int_{R(G)} (-1)^{j-k} \sigma_j \wedge \omega_j + \int_{R(G)} \sigma_k \wedge \omega_k \right),$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. Gerçekten, $\sigma_i \wedge \omega_i$, $\sigma_j \wedge \omega_j$ ve $\sigma_k \wedge \omega_k$ 2-formlarının diferansiyelleri alınırsa, sırasıyla,

$$d(\sigma_i \wedge \omega_i) = d\sigma_i \wedge \omega_i - \sigma_i \wedge d\omega_i,$$

$$d(\sigma_j \wedge \omega_j) = d\sigma_j \wedge \omega_j - \sigma_j \wedge d\omega_j,$$

$$d(\sigma_k \wedge \omega_k) = d\sigma_k \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge d\omega_k$$

ve bu denklemlerde de (4.1.10) ve (4.1.13) denklemleri kullanılırsa, sırasıyla,

$$d(\sigma_i \wedge \omega_i) = (-1)^j \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i - \sigma_k \wedge \omega_j \wedge \omega_i - (-1)^{j-i} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k,$$

$$d(\sigma_j \wedge \omega_j) = (-1)^k \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j - \sigma_i \wedge \omega_k \wedge \omega_j - (-1)^{k-j} \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i,$$

$$d(\sigma_k \wedge \omega_k) = (-1)^i \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_i \wedge \omega_k - (-1)^{i-k} \sigma_k \wedge \omega_i \wedge \omega_j$$

bulunur. Bu denklemlerden,

$$\begin{aligned} -(-1)^k d(\sigma_i \wedge \omega_i) + d(\sigma_j \wedge \omega_j) &= \left((-1)^{k+j-i} + 1 \right) \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \\ &\quad - \left((-1)^{k+j} + (-1)^{k-j} \right) \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(\sigma_i \wedge \omega_i) + (-1)^{k-i} d(\sigma_k \wedge \omega_k) &= \left(-(-1)^{j-i} + (-1)^k \right) \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \\ &\quad + \left((-1)^j + (-1)^{k-i} \right) \sigma_j \wedge \omega_k \wedge \omega_i \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son iki denklemden de

$$\begin{aligned} \left((-1)^{k-j} - (-1)^{-i} \right) d(\sigma_i \wedge \omega_i) + \left((-1)^j + (-1)^{k-i} \right) d(\sigma_j \wedge \omega_j) \\ + \left((-1)^{j-i} + (-1)^{-j-i} \right) d(\sigma_k \wedge \omega_k) = 4(-1)^j \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \end{aligned}$$

elde edilir. Burada G bölgesi üzerinden integral alınır ve Stokes Formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_G (-1)^{j-k} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k \\
&= \frac{1}{4} \int_{R(G)} \left[\left((-1)^{-j} - (-1)^{-k-i} \right) \sigma_i \wedge \omega_i + \left((-1)^{-k+j} + (-1)^{-i} \right) \sigma_j \wedge \omega_j \right. \\
& \quad \left. + \left((-1)^{-k+j-i} + 1 \right) \sigma_k \wedge \omega_k \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{R(G)} \left[(-1)^{j-k} \sigma_j \wedge \omega_j + \sigma_k \wedge \omega_k \right],
\end{aligned}$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, ve böylece $A_i, 1 \leq i \leq 3$, katsayıları bulunur.

Böylece (4.2.11) denlemi ile verilen J_X hacmi için aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.2.1: \mathcal{B}_3 hareketi altında eşit J_X hacimli bölgeler belirleyen hareketli uzayın bütün sabit noktaları, bir Φ_X kuadriği üzerinde bulunur.

4.3. L^3 DE HACİMLER İÇİN HOLDITCH-TİPİ TEOREMLER

Bu alt bölümde, \mathcal{B}_3 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan sabit noktaların R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri ile ilgili Holditch-Tipi Teoremler ve bununla birlikte bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Şimdi, \mathcal{B}_3 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan doğruduş üç sabit noktanın R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

$X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, R de iki farklı sabit nokta ve $Z = (z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Bu Z noktasının bileşenleri için

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (4.3.1)$$

yazılabilir. O halde \mathcal{B}_3 hareketi esnasında Z noktasının R' de belirlediği bölgenin J_Z hacmi için (4.2.11) ve (4.3.1) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}
J_Z &= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i z_i^2 \\
&= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i (\lambda x_i + \mu y_i)^2 \\
&= J_O + \lambda^2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + 2\lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 \sum_{i=1}^3 A_i y_i^2 \\
&= J_O + \lambda^2 (J_X - J_O) + 2\lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 (J_Y - J_O) \\
&= \lambda^2 J_X + \left((1 - (\lambda + \mu)^2) + 2\lambda \mu \right) J_O + 2\lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu^2 J_Y
\end{aligned}$$

veya

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda \mu \left(J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i \right) + \mu^2 J_Y$$

bulunur. Burada $J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i$ ifadesi, J_{XY} ile gösterilirse;

$$J_Z = \lambda^2 J_X + 2\lambda \mu J_{XY} + \mu^2 J_Y \quad (4.3.2)$$

elde edilir.

Tanım 4.3.1: \mathcal{B}_3 hareketi altında

$$J_{XY} = J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i \quad (4.3.3)$$

olarak tanımlanan J_{XY} ifadesine, sabit $X, Y \in R$ noktalarının R' de belirledikleri karışık yörünge hacmi denir.

Bu tanıma göre, $J_{XY} = J_{YX}$ ve $J_{XX} = J_X$ olduğu açıktır. Ayrıca (4.2.11) ve (4.3.3) denklemlerinden,

$$J_X - 2J_{XY} + J_Y = \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \quad (4.3.4)$$

yazılabilir. Buna göre \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında, Z noktasının R' de belirlediği bölgenin J_Z hacmi için (4.3.2) denkleminde; (4.3.4) ve $\lambda + \mu = 1$ denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} J_Z &= \lambda^2 J_X + \lambda \mu \left(J_X + J_Y - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \right) + \mu^2 J_Y \\ &= \lambda^2 J_X + \lambda \mu J_X + \lambda \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 + \mu^2 J_Y \\ &= \lambda(\lambda + \mu) J_X + \mu(\lambda + \mu) J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \\ &= \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla \mathfrak{B}_3 hareketi altında, J_X , J_Y ve J_Z hacimleri arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.1: X ve Y noktaları, R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında, X , Y ve Z noktalarının R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasında

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \quad (4.3.5)$$

bağıntısı geçerlidir.

\mathfrak{B}_3 hareketine ve onunla birlikte oluşan kapalı \mathfrak{B}_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki $D(X, Y)$ uzaklığının karesini

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (4.3.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanım; E^3 de B_3 hareketi ve onunla birlikte oluşan kapalı B_2 hareketi altında, [22,26] da verilen tanımın L^3 deki karşılığıdır.

Eğer (4.3.6) denklemi, (4.3.5) denkleminde kullanılırsa;

$$J_Z = \lambda J_X + \mu J_Y - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (4.3.7)$$

elde edilir.

XY doğru parçasının yönlendirilmesiyle,

$$D(X, Y) = -D(Y, X)$$

alınır. Ayrıca \mathcal{B}_3 hareketine ve onunla birlikte oluşan kapalı \mathcal{B}_2 hareketine göre tanımlanan uzaklık göz önüne alınarak; X , Y ve Z noktaları doğruduş oldukları için

$$D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$$

ve (4.3.1) deki denklemlerde bulunan λ ve μ kullanılarak da

$$\lambda D(X, Y) = D(Z, Y) \text{ ve } \mu D(X, Y) = D(X, Z) \quad (4.3.8)$$

yazılabilir. Burada $D(X, Y) \neq 0$ ise λ ve μ , sırasıyla,

$$\lambda = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} \text{ ve } \mu = \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (4.3.7) denkleminde, J_Z hacmi için

$$J_Z = \frac{1}{D(X,Y)} [D(Z,Y)J_X + D(X,Z)J_Y] - \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y)$$

yazılabilir.

Şimdi, \mathfrak{B}_3 hareketi altında XY doğru parçasının uç noktalarının R' de aynı bir bölgeyi belirlediklerini kabul edelim. O takdirde $J_X = J_Y$ olur. Buna göre (4.3.8) ve $\lambda + \mu = 1$ denklemleri, (4.3.7) denkleminde kullanılırsa; J_X ile J_Z hacimleri arasındaki fark için

$$J_X - J_Z = \varepsilon D(X,Z)D(Z,Y) \quad (4.3.9)$$

elde edilir.

Bu sonuç, E^3 de B_3 hareketi esnasında hacimler için elde edilen sonucun [22]; L^3 deki karşılığıdır. O halde \mathfrak{B}_3 hareketi altında, aşağıdaki Holditch-Tipi Teorem verilebilir:

Teorem 4.3.2: X ve Y , R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. XY doğru parçası, \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında öyle hareket ettirilsin ki; X ve Y noktaları R' sabit uzayında aynı bir bölgeyi belirlerlerken, Z noktası da R' de farklı bir bölgeyi belirlesin. O takdirde bu iki bölgenin hacimleri arasındaki fark, yalnızca \mathfrak{B}_3 ve kapalı \mathfrak{B}_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X,Z)$ ve $D(Z,Y)$ uzaklıklarına bağlıdır.

Şimdi, \mathfrak{B}_3 hareketi altında R' sabit uzayında belirlenen karışık yörünge hacminin geometrik yorumu için aynı Φ_X kuadriğinin farklı X ve Y noktalarından yola çıkalım. Bu durumda Φ_X ile Φ_Y çakışır ve $J_X = J_Y$ olur. Eğer $P = (p_i)$ noktası, X ve Y noktalarına göre Z noktasının harmonik eşleniği ise

$$p_i = \lambda' x_i + \mu' y_i, \quad \lambda' + \mu' = 1$$

ve bununla birlikte $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$, $\lambda + \mu = 1$ olduğu için $\mu \lambda' + \mu' \lambda = 0$ yazılabilir, [54]. O halde P ve Z noktalarının R' de belirledikleri J_{PZ} karışık yörünge hacminin

geometrik yorumunu ifade edebilmek için $\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i$ toplamı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i &= \sum_{i=1}^3 A_i (\lambda' x_i + \mu' y_i) (\lambda x_i + \mu y_i) \\
&= \lambda' \lambda \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + \mu' \mu \sum_{i=1}^3 A_i y_i^2 \\
&= \lambda' \lambda (J_X - J_O) + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) (J_{XY} - J_O) + \mu' \mu (J_Y - J_O) \\
&= \lambda' \lambda J_X - \lambda' \lambda J_O + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_{XY} - (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_O + \mu' \mu J_Y - \mu' \mu J_O \\
&= \lambda' \lambda J_X - \lambda' \lambda J_O + (\lambda' \mu + \mu' \lambda) \left(\frac{J_X + J_Y - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2}{2} \right) \\
&\quad - (\lambda' \mu + \mu' \lambda) J_O + \mu' \mu J_Y - \mu' \mu J_O \\
&= (\lambda' \lambda + \lambda' \mu + \mu' \lambda + \mu' \mu) J_X - (\lambda' \lambda + \lambda' \mu + \mu' \lambda + \mu' \mu) J_O \\
&= (\lambda' + \mu') (\lambda + \mu) J_X - (\lambda' + \mu') (\lambda + \mu) J_O
\end{aligned}$$

veya

$$\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i = J_X - J_O$$

elde edilir. Diğer taraftan, P ve Z noktaları için (4.3.3) denkleminde

$$\sum_{i=1}^3 A_i p_i z_i = J_{PZ} - J_O$$

bulunur. Bu son iki denklemin sol tarafları eşit olduğu için

$$J_{PZ} = J_X$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.3: \mathcal{B}_3 hareketi esnasında R hareketli uzayının P ve Z noktaları, Φ_X kuadriğine göre bir eşlenik nokta çifti ve J_{PZ} de bu noktaların R' sabit uzayında belirledikleri karışık yörünge hacmi olsun. Bu durumda J_{PZ} hacmi ile Φ_X kuadriğinin noktalarının belirledikleri bölgelerin J_X hacmi eşittir.

Şimdi de X ve Y noktalarını, Φ_X kuadriğinin bir doğurunu üzerinde seçelim (Bu halde Φ_X kuadriği için ışık konisi ve de Sitter uzayı sözde küreleri, düzlem ve silindir örnek verilebilir.). O takdirde (4.3.1) deki denklemler yardımıyla belirlenen Z noktası da Φ_X kuadriği üzerinde bulunur. Buna göre $J_X = J_Y = J_Z$ olur. Bu sonuç ve $\lambda + \mu = 1$ denklemi, (4.3.7) denkleminde kullanılırsa;

$$D(X, Y) = 0$$

koşulu elde edilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.4: R hareketli uzayının X ve Y noktaları, Φ_X kuadriğinin bir doğurunu üzerinde bulunuyorlarsa; bu noktalar arasındaki \mathcal{B}_3 ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X, Y)$ uzaklığı sıfır olur.

Şimdi, M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Kabul edelim ki \mathcal{B}_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; X ve Y noktaları da R hareketli uzayının Φ_M den farklı olan, sırasıyla, Φ_X ve Φ_Y kuadriklerinin üzerinde bulunsunlar. Ayrıca J_M ile J_X hacimleri arasındaki fark, J ve J_M ile J_Y hacimleri arasındaki fark da J' ile

gösterilsin. O takdirde yukarıdaki koşullar altında, J ve J' için (4.3.9) denkleminde, sırasıyla,

$$J = J_M - J_X = \varepsilon D(M, X) D(X, N)$$

ve

$$J' = J_M - J_Y = \varepsilon D(M, Y) D(Y, N)$$

yazılabilir. Burada J/J' oranı hesaplanırsa,

$$J/J' = \frac{D(M, X) D(X, N)}{D(M, Y) D(Y, N)}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \frac{D(M, Y) D(X, N)}{D(M, X) D(Y, N)} \quad (4.3.10)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan açıkça görüleceği gibi J/J' oranı, yalnızca MN doğru parçası üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişlerine bağlıdır ve $X \neq Y$ olduğundan,

$$\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \neq 1$$

dir. Ayrıca (4.3.10) eşitliğindeki

$$\frac{D(M, Y) D(X, N)}{D(M, X) D(Y, N)}$$

oranı; M , N , Y ve X noktalarının çifte oranıdır, [54]. Eğer (MN, YX) ile gösterilen bu çifte oran [54], kısaca ℓ ile gösterilirse; (4.3.10) eşitliği ile verilen J/J' oranı, ℓ çifte oranına bağlı olarak

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.5: J/J' oranı; M , N , X ve Y noktalarının yalnızca rölatif durumlarına bağlıdır.

Yukarıdaki teoremin özel bir hali olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.3.1: M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Kabul edelim ki \mathcal{B}_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R' sabit uzayında J_M hacimli aynı bir bölgeyi belirlerlerken; X ve Y noktaları da R' de hacimleri J_M den farklı olan, sırasıyla, J_X ve J_Y hacimli bölgeler belirlesinler. Ayrıca J_M ile J_X hacimleri arasındaki fark, J ve J_M ile J_Y hacimleri arasındaki fark da J' ile gösterilsin. O takdirde J/J' oranı için $\ell = (MN, YX)$ olmak üzere,

$$J/J' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

eşitliği geçerli olur.

Şimdi, M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Kabul edelim ki MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında

kesişsinler. Ayrıca \mathfrak{B}_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu koşullar altında bazı irdelemeler yapılarak, aşağıdaki sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili teoremler verilebilir:

Yukarıdaki koşullar ve \mathfrak{B}_3 ile kapalı \mathfrak{B}_2 hareketlerine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, (4.3.9) denkleminde; M, X, N ile A, X, B doğruduş nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$J_M - J_X = \varepsilon_1 D(M, X)D(X, N), \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

ve

$$J_A - J_X = \varepsilon_2 D(A, X)D(X, B), \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

yazılabilir. O halde aşağıdaki iki durum sözkonusudur:

i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$J_M - J_X = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$J_A - J_X = \varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$J_M - J_A = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B)] \quad (4.3.11)$$

elde edilir. Eğer $\Phi_M = \Phi_A$ ise $J_M = J_A$ olur ve böylece (4.3.11) denkleminde

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (4.3.11) denkleminden

$$J_M - J_A = 0$$

ve dolayısıyla

$$J_M = J_A$$

elde edilir. Bu ise \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları demektir.

ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$J_M - J_X = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$J_A - J_X = -\varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$J_M - J_A = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B)] \quad (4.3.12)$$

elde edilir. Eğer $\Phi_M = \Phi_A$ ise $J_M = J_A$ olur ve böylece (4.3.12) denkleminden

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (4.3.12) denkleminden

$$J_M - J_A = 0$$

ve dolayısıyla

$$J_M = J_A$$

elde edilir. Bu ise \mathfrak{B}_3 hareketi altında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları demektir.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.6: M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Kabul edelim ki MN ve AB doğru parçaları, \mathfrak{B}_3 ve kapalı \mathfrak{B}_2 hareketlerine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca \mathfrak{B}_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket esnasında, M , N , A ve B noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) üzerinde bulunmaları için gerek ve yeter koşul aşağıdaki bağıntılardan yalnızca birinin gerçekleşmesidir:

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

ya da

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0.$$

Şimdi de kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Eğer \mathfrak{B}_3 hareketi altında, R de; M ve N noktalarının üzerinde bulunduğu Φ_M kuadriği, A ve B noktalarının üzerinde bulunduğu Φ_A kuadriği ve X noktasının üzerinde bulunduğu Φ_X kuadriği aynı ise $J_M = J_A = J_X$ olur. Buna göre (4.3.9) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğruduş nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$D(M, X)D(X, N) = 0$$

ve

$$D(A, X)D(X, B) = 0$$

elde edilir. Eğer bu son iki denklem geçerli ise de (4.3.9) denklemi göz önünde bulundurularak, sırasıyla,

$$J_M - J_X = 0$$

ve

$$J_A - J_X = 0$$

veya

$$J_M = J_X$$

ve

$$J_A = J_X$$

elde edilir. Bu ise \mathcal{B}_3 hareketi esnasında, M , N , A , B ve X noktalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin $(\Phi_M = \Phi_A = \Phi_X)$ üzerinde bulunmaları demektir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.7: Kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca \mathcal{B}_3 hareketi altında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket altında, M , N , A , B ve X noktalarının R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A = \Phi_X$) üzerinde bulunmaları için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır.

Yukarıdaki teorem, Teorem 4.3.4 göz önünde bulundurularak, aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

Teorem 4.3.8: Kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca \mathcal{B}_3 hareketi esnasında, M ve N noktaları R hareketli uzayının aynı bir Φ_M kuadriğinin üzerinde bulunurlarken; A ve B noktaları da R hareketli uzayının aynı bir Φ_A kuadriğinin üzerinde bulunsunlar. O takdirde bu hareket esnasında, MN ve AB doğru parçalarının; R hareketli uzayının aynı bir kuadriğinin ($\Phi_M = \Phi_A$) bir X noktasında kesişen iki doğurana olmaları için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır.

Şimdi, R hareketli uzayında ele alınan doğrudan olmayan üç sabit noktanın ve bu noktaların tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit noktanın; \mathcal{B}_3 hareketi

altında, R' sabit uzayında belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

$X_1 = (x_i)$, $X_2 = (y_i)$ ve $X_3 = (z_i)$, R de doğrudan olmayan üç sabit nokta ve $Q = (q_i)$ de X_1 , X_2 ve X_3 noktalarının tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit nokta olsun, (Şekil 2.2 ye bakınız.). Bu durumda Q noktasının bileşenleri için

$$q_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (4.3.13)$$

yazılabilir.

\mathfrak{B}_3 hareketi esnasında Q noktası tarafından R' de belirlenen bölgenin J_Q hacmi için (4.2.11) ve (4.3.13) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} J_Q &= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i q_i^2 \\ &= J_O + \sum_{i=1}^3 A_i (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i)^2 \\ &= J_O + \lambda_1^2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 + \lambda_2^2 \sum_{i=1}^3 A_i y_i^2 + \lambda_3^2 \sum_{i=1}^3 A_i z_i^2 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + 2\lambda_1 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i x_i z_i + 2\lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i y_i z_i \\ &= J_O + \lambda_1^2 (J_{X_1} - J_O) + \lambda_2^2 (J_{X_2} - J_O) + \lambda_3^2 (J_{X_3} - J_O) \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + 2\lambda_1 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i x_i z_i + 2\lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i y_i z_i \\ &= \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + \left((1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 + 2\lambda_1 \lambda_3 + 2\lambda_2 \lambda_3 \right) J_O \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i + 2\lambda_1 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i x_i z_i + 2\lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i y_i z_i \end{aligned}$$

veya

$$J_Q = \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i y_i \right) + 2\lambda_1 \lambda_3 \left(J_O + \sum_{i=1}^3 A_i x_i z_i \right) \\ + 2\lambda_2 \lambda_3 \left(J_O + \sum_{i=1}^3 A_i y_i z_i \right)$$

bulunur. Burada (4.3.3) denklemi göz önüne alınırsa,

$$J_Q = \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + 2\lambda_1 \lambda_2 J_{X_1 X_2} + 2\lambda_1 \lambda_3 J_{X_1 X_3} + 2\lambda_2 \lambda_3 J_{X_2 X_3}$$

elde edilir. Bu denklemde de (4.3.4) ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ denklemleri kullanılırsa,

$$J_Q = \lambda_1^2 J_{X_1} + \lambda_2^2 J_{X_2} + \lambda_3^2 J_{X_3} + \lambda_1 \lambda_2 \left(J_{X_1} + J_{X_2} - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 \right) \\ + \lambda_1 \lambda_3 \left(J_{X_1} + J_{X_3} - \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - z_i)^2 \right) + \lambda_2 \lambda_3 \left(J_{X_2} + J_{X_3} - \sum_{i=1}^3 A_i (y_i - z_i)^2 \right) \\ = \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) J_{X_1} + \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_3) J_{X_2} + \lambda_3 (\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2) J_{X_3} \\ - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 - \lambda_1 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - z_i)^2 - \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i (y_i - z_i)^2 \\ = \lambda_1 J_{X_1} + \lambda_2 J_{X_2} + \lambda_3 J_{X_3} \\ - \lambda_1 \lambda_2 \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - y_i)^2 - \lambda_1 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i (x_i - z_i)^2 - \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 A_i (y_i - z_i)^2$$

bulunur. Burada da (4.3.6) denklemi kullanılırsa, J_Q hacmi için

$$J_Q = \lambda_1 J_{X_1} + \lambda_2 J_{X_2} + \lambda_3 J_{X_3} \\ - \left\{ \varepsilon_{12} \lambda_1 \lambda_2 D^2(X_1, X_2) + \varepsilon_{13} \lambda_1 \lambda_3 D^2(X_1, X_3) + \varepsilon_{23} \lambda_2 \lambda_3 D^2(X_2, X_3) \right\} \quad (4.3.14)$$

elde edilir.

Eğer Q_i noktaları, X_iQ ve X_jX_k , $i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, doğru parçalarının kesişim noktaları olarak alınır; mümkün olan tüm uzaklıkların sıfırdan farklı olmaları kabulü altında, Şekil 2.2 yardımıyla λ_i , $1 \leq i \leq 3$, için aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir:

Şimdi, Şekil 2.2 deki $Q_1 = (q_{1i})$ noktasını göz önüne alalım. X_2 , Q_1 ve X_3 noktaları doğrudan olduklarından,

$$q_{1i} = \zeta_{11} y_i + \zeta_{12} z_i, \quad \zeta_{11} + \zeta_{12} = 1 \quad (4.3.15)$$

ve X_1 , Q ve Q_1 noktaları doğrudan olduklarından da

$$q_i = \zeta_{13} x_i + \zeta_{14} q_{1i}, \quad \zeta_{13} + \zeta_{14} = 1 \quad (4.3.16)$$

yazılabilir. Burada

$$\zeta_{11} = \frac{D(Q_1, X_3)}{D(X_2, X_3)}, \quad \zeta_{12} = \frac{D(X_2, Q_1)}{D(X_2, X_3)}$$

ve

$$\zeta_{13} = \frac{D(Q, Q_1)}{D(X_1, Q_1)}, \quad \zeta_{14} = \frac{D(X_1, Q)}{D(X_1, Q_1)}$$

olmak üzere; (4.3.15) deki ilk denklem, (4.3.16) daki ilk denklemde yerine yazılırsa

$$q_i = \zeta_{13} x_i + \zeta_{14} (\zeta_{11} y_i + \zeta_{12} z_i) = \zeta_{13} x_i + \zeta_{14} \zeta_{11} y_i + \zeta_{14} \zeta_{12} z_i$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta_{13} = \frac{D(Q, Q_1)}{D(X_1, Q_1)}, \\ \lambda_2 &= \zeta_{14} \zeta_{11} = \frac{D(X_1, Q)}{D(X_1, Q_1)} \frac{D(Q_1, X_3)}{D(X_2, X_3)}, \\ \lambda_3 &= \zeta_{14} \zeta_{12} = \frac{D(X_1, Q)}{D(X_1, Q_1)} \frac{D(X_2, Q_1)}{D(X_2, X_3)}\end{aligned}\tag{4.3.17}$$

bulunur.

Şimdi de Şekil 2.2 deki $Q_2 = (q_{2i})$ noktasını göz önüne alalım. X_3 , Q_2 ve X_1 noktaları doğruduş olduklarından,

$$q_{2i} = \zeta_{21} z_i + \zeta_{22} x_i, \quad \zeta_{21} + \zeta_{22} = 1\tag{4.3.18}$$

ve X_2 , Q ve Q_2 noktaları doğruduş olduklarından da

$$q_i = \zeta_{23} y_i + \zeta_{24} q_{2i}, \quad \zeta_{23} + \zeta_{24} = 1\tag{4.3.19}$$

yazılabilir. Burada

$$\zeta_{21} = \frac{D(Q_2, X_1)}{D(X_3, X_1)}, \quad \zeta_{22} = \frac{D(X_3, Q_2)}{D(X_3, X_1)}$$

ve

$$\zeta_{23} = \frac{D(Q, Q_2)}{D(X_2, Q_2)}, \quad \zeta_{24} = \frac{D(X_2, Q)}{D(X_2, Q_2)}$$

olmak üzere; (4.3.18) deki ilk denklem, (4.3.19) daki ilk denklemde yerine yazılırsa

$$q_i = \zeta_{23} y_i + \zeta_{24} (\zeta_{21} z_i + \zeta_{22} x_i) = \zeta_{24} \zeta_{22} x_i + \zeta_{23} y_i + \zeta_{24} \zeta_{21} z_i$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta_{24} \zeta_{22} = \frac{D(X_2, Q) D(X_3, Q_2)}{D(X_2, Q_2) D(X_3, X_1)}, \\ \lambda_2 &= \zeta_{23} = \frac{D(Q, Q_2)}{D(X_2, Q_2)}, \\ \lambda_3 &= \zeta_{24} \zeta_{21} = \frac{D(X_2, Q) D(Q_2, X_1)}{D(X_2, Q_2) D(X_3, X_1)}\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

bulunur.

Son olarak, Şekil 2.2 deki $Q_3 = (q_{3i})$ noktasını göz önüne alalım. X_1 , Q_3 ve X_2 noktaları doğrudan olduklarından,

$$q_{3i} = \zeta_{31} x_i + \zeta_{32} y_i, \quad \zeta_{31} + \zeta_{32} = 1\tag{4.3.21}$$

ve X_3 , Q ve Q_3 noktaları doğrudan olduklarından da

$$q_i = \zeta_{33} z_i + \zeta_{34} q_{3i}, \quad \zeta_{33} + \zeta_{34} = 1\tag{4.3.22}$$

yazılabilir. Burada

$$\zeta_{31} = \frac{D(Q_3, X_2)}{D(X_1, X_2)}, \quad \zeta_{32} = \frac{D(X_1, Q_3)}{D(X_1, X_2)}$$

ve

$$\zeta_{33} = \frac{D(Q, Q_3)}{D(X_3, Q_3)}, \quad \zeta_{34} = \frac{D(X_3, Q)}{D(X_3, Q_3)}$$

olmak üzere; (4.3.21) deki ilk denklem, (4.3.22) deki ilk denklemde yerine yazılırsa

$$q_i = \zeta_{33} z_i + \zeta_{34} (\zeta_{31} x_i + \zeta_{32} y_i) = \zeta_{34} \zeta_{31} x_i + \zeta_{34} \zeta_{32} y_i + \zeta_{33} z_i$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \zeta_{34} \zeta_{31} = \frac{D(X_3, Q) D(Q_3, X_2)}{D(X_3, Q_3) D(X_1, X_2)}, \\ \lambda_2 &= \zeta_{34} \zeta_{32} = \frac{D(X_3, Q) D(X_1, Q_3)}{D(X_3, Q_3) D(X_1, X_2)}, \\ \lambda_3 &= \zeta_{33} = \frac{D(Q, Q_3)}{D(X_3, Q_3)}\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

elde edilir. O takdirde (4.3.17), (4.3.20) ve (4.3.23) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{D(Q, Q_1)}{D(X_1, Q_1)} = \frac{D(X_2, Q) D(X_3, Q_2)}{D(X_2, Q_2) D(X_3, X_1)} = \frac{D(X_3, Q) D(Q_3, X_2)}{D(X_3, Q_3) D(X_1, X_2)}, \\ \lambda_2 &= \frac{D(X_1, Q) D(Q_1, X_3)}{D(X_1, Q_1) D(X_2, X_3)} = \frac{D(Q, Q_2)}{D(X_2, Q_2)} = \frac{D(X_3, Q) D(X_1, Q_3)}{D(X_3, Q_3) D(X_1, X_2)}, \\ \lambda_3 &= \frac{D(X_1, Q) D(X_2, Q_1)}{D(X_1, Q_1) D(X_2, X_3)} = \frac{D(X_2, Q) D(Q_2, X_1)}{D(X_2, Q_2) D(X_3, X_1)} = \frac{D(Q, Q_3)}{D(X_3, Q_3)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler, kısaca

$$\lambda_i = \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} = \frac{D(X_j, Q) D(X_k, Q_j)}{D(X_j, Q_j) D(X_k, X_i)} = \frac{D(X_k, Q) D(Q_k, X_j)}{D(X_k, Q_k) D(X_i, X_j)},$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, şeklinde de ifade edilebilir. O halde λ_i , $1 \leq i \leq 3$, için verilen bu eşitlikler, (4.3.14) denkleminde göz önüne alınırsa; J_Q hacmi için

$$J_Q = \sum_{i=1}^3 \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} J_{X_i} - \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k),\tag{4.3.24}$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, elde edilir. Eğer X_1, X_2 ve X_3 noktaları, \mathcal{B}_3 hareketi altında R' de aynı bir bölgeyi belirlerlerse; $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{X_3}$ olur. Buna göre (4.3.24) denkleminde, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ denklemi kullanılırsa; J_{X_1} ile J_Q hacimleri arasındaki fark için

$$J_{X_1} - J_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) D(X_i, Q_k), \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

bulunur.

Böylece Teorem 4.3.2 nin genelleştirilmiş olan aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.3.9: R hareketli uzayında X_1, X_2 ve X_3 köşe noktalarına sahip bir üçgen göz önüne alalım. Kabul edelim ki \mathcal{B}_3 hareketi esnasında üçgenin köşe noktaları, R' sabit uzayında aynı bir bölgeyi belirlerlerken; bu noktaların tanımladıkları düzlem üzerindeki bir diğer sabit Q noktası da R' de farklı bir bölgeyi belirlesin. O takdirde bu iki bölgenin hacimleri arasındaki fark, yalnızca hareket eden üçgenin \mathcal{B}_3 ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen uzaklıklarına bağlıdır.

Özel olarak, R hareketli uzayının bir Φ_{X_1} kuadriğinin her noktasından iki doğuranın geçtiğini ve bu kuadriğin bir düzlem olmadığını kabul edelim (Bu halde Φ_{X_1} kuadriği için de Sitter uzayı sözde küresi örnek verilebilir.). Φ_{X_1} kuadriğinin X_1 noktasındaki teğet düzlemi üzerinde Φ_{X_1} de bulunmayan bir Q noktasını göz önüne alalım. Bu durumda teğet düzlem içinde X_1 noktasında kesişen iki doğuran vardır. Bunlar üzerinde X_2 ve X_3 gibi iki keyfi nokta seçelim. Q noktasından yapılan izdüşüm, karşı doğuranlar üzerinde Q_2 ve Q_3 noktalarını verir. O takdirde \mathcal{B}_3 hareketi altında, J_Q hacmi için (4.3.14) denklemi geçerli olur. Ayrıca X_1, X_2 ve X_3 noktaları, aynı Φ_{X_1} kuadriği üzerinde olduklarından; $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{X_3}$ eşitlikleri geçerli olur. Dolayısıyla Teorem 4.3.4 den, $D(X_1, X_2) = D(X_1, X_3) = 0$ bulunur. O halde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

denklemini ve (4.3.20) de verilen λ_2 ile (4.3.23) de verilen λ_3 , (4.3.14) denkleminde kullanılırsa; J_{X_1} ile J_Q hacimleri arasındaki fark için

$$J_{X_1} - J_Q = \varepsilon_{23} \frac{D(Q, Q_2)}{D(X_2, Q_2)} \frac{D(Q, Q_3)}{D(X_3, Q_3)} D^2(X_2, X_3)$$

elde edilir.

Bu sonuç, verilen koşullar altında, klasik Holditch Teoremi'nin [2] Lorentz anlamında uzaysal bir genelleştirilmiştir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.10: \mathcal{B}_3 hareketi esnasında, Φ_{X_1} kuadriğinin her noktasından iki doğuranın geçtiğini kabul edelim. Ayrıca Φ_{X_1} kuadriğinin X_1 noktasındaki teğet düzlemi üzerinde Φ_{X_1} de bulunmayan bir Q noktasını göz önüne alalım ve teğet düzlem içinde X_1 noktasında kesişen iki doğuran üzerinde, X_2 ve X_3 gibi iki keyfi nokta seçelim. O takdirde bu hareket esnasında X_1 , X_2 ve X_3 noktaları tarafından R' sabit uzayında belirlenen bölgelerin J_{X_1} hacmi ile Q noktası tarafından R' de belirlenen bölgenin J_Q hacmi arasındaki fark, yalnızca hareket eden üçgenin \mathcal{B}_3 ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketlerine göre özel bir şekilde ölçülen uzaklıklarına bağlıdır.

4.4. L^3 DE BİR YÜZEY PARÇASININ DİK İZDÜŞÜM ALANI

Burada alt bölüm 4.5 de gerekli olacak; L^3 de bir yüzey parçasının, $\vec{e} = \vec{e}_3$ birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümünün alanı ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

Ψ ; L^3 de u ve v parametreleri üzerinde tanımlı olan bir yüzeyin, bu parametrelerin bölgesinin -bir çemberin bağlantılılık yapısına sahip- bir Γ alt bölgesi üzerinde tanımlı, bir parçası ve $X = X(u, v)$ de bu Ψ yüzey parçası üzerinde bir nokta olsun. $x_i(u, v)$, $1 \leq i \leq 3$, koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan;

$$g_{11} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle_L, \quad g_{12} = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle_L \quad \text{ve} \quad g_{22} = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle_L$$

olmak üzere,

$$\|\vec{x}_u \times_L \vec{x}_v\|_L^2 = W^2 = |g_{12}^2 - g_{11} g_{22}|$$

yazılabilir.

Tanım 4.4.1: Γ bölgesi üzerinde

$$dF = W \, du \wedge dv \tag{4.4.1}$$

şeklinde tanımlanan dF ifadesine, Ψ yüzey parçasının bir X noktasındaki skaler alan elementi denir.

Tanım 4.4.2: Ψ yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} d\vec{x} \hat{\times}_L d\vec{x} \tag{4.4.2}$$

şeklinde tanımlanan vektöre, Ψ nin vektörel alan elementi denir. Burada " $\hat{\times}_L$ " işlemi, L^3 de vektörler arasındaki vektörel çarpımı ve 1-formlar arasındaki dış çarpımı göstermektedir. Ayrıca $d\vec{F}$ vektörü; X noktasında Ψ nin normali doğrultusunda olup, normu bu noktada Ψ nin skaler alan elementinden ibarettir.

Tanım 4.4.3: Γ bölgesi üzerinde,

$$\vec{F} = \iint_{\Gamma} d\vec{F} \tag{4.4.3}$$

şeklinde tanımlanan vektöre; Ψ yüzey parçası üzerindeki bir X noktası için Ψ nin alan vektörü denir.

Şimdi, Ψ yüzey parçasının $d\vec{F}$ vektörel alan elementinin ve \vec{F} alan vektörünün birim normal vektörü $\vec{e} = \vec{e}_3$ olan xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümlerini alalım:

$d\vec{F}$ vektörel alan elementinin, \vec{e} birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümü; dF^n ile gösterilirse

$$dF^n = \langle \vec{e}, d\vec{F} \rangle_L$$

yazılabilir.

Ψ yüzey parçasının herhangi bir X noktasının, \vec{e} birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümü; X^n ile gösterilirse

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX^n} + \overrightarrow{X^n X} \quad (4.4.4)$$

vektörel denklemi yazılabilir. Ayrıca X^n izdüşüm noktasının \vec{x}^n ile gösterilen $\overrightarrow{OX^n}$ konum vektörü için de

$$\vec{x}^n = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \quad (4.4.5)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{X^n X} = -\langle \vec{e}, \vec{x} \rangle_L \vec{e}$$

olduğundan; \vec{x}^n vektörü, (4.4.4) denklemi kullanılarak

$$\vec{x}^n = \vec{x} + \langle \vec{e}, \vec{x} \rangle_L \vec{e}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Ψ yüzey parçasının, \vec{e} birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümünü; Ψ^n ile gösterelim. Bu durumda (4.4.2) denkleminde, sırasıyla, (4.4.5) ve (4.4.1) denklemleri göz önüne alınırsa; Ψ^n nin vektörel alan elementi için

$$\begin{aligned}
d\vec{F}^n &= \frac{1}{2} d\vec{x}^n \hat{x}_L d\vec{x}^n \\
&= \frac{1}{2} (dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2) \hat{x}_L (dx_1 \vec{e}_1 + dx_2 \vec{e}_2) \\
&= \frac{1}{2} (\vec{e}_1 \times_L \vec{e}_2 dx_1 \wedge dx_2 + \vec{e}_2 \times_L \vec{e}_1 dx_2 \wedge dx_1) \\
&= \vec{e}_1 \times_L \vec{e}_2 dx_1 \wedge dx_2 \\
&= -\vec{e}_3 dx_1 \wedge dx_2 \\
&= -\vec{e} dx_1 \wedge dx_2 \\
&= -\vec{e} dF^n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ψ yüzey parçasının \vec{F} alan vektörünün, \vec{e} birim normal vektörü doğrultusunda, xoy -düzlemi üzerine dik izdüşümü; F^n ile gösterilirse

$$F^n = \langle \vec{e}, \vec{F} \rangle_L \quad (4.4.6)$$

yazılabilir. Burada F^n ye, Ψ^n nin alanı adı verilir.

4.5. L^3 DE KAPALI YÖRÜNGE YÜZEYLERİNİN PARÇALARININ DİK İZDÜŞÜM ALANLARI İÇİN BİR HOLDITCH-TİPİ TEOREM

Bu alt bölümde; öncelikle L^3 de kapalı bir \mathcal{B}_2 hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir noktanın R' sabit uzayında çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin, üzerinde tanımlı olduğu $R(G)$ parametre bölgesinin -bir çemberin bağlantılılık yapısına sahip-

bir Γ alt bölgesi üzerinde tanımlı, bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri bulunmuştur. Sonra da bu kapalı hareket esnasında R de ele alınan doğrudan üç sabit noktanın R' de çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının $\vec{e}' = \vec{e}'_3$ birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları ile ilgili Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem ve bununla birlikte bu teoremin bazı sonuçları verilmiştir.

\mathcal{B}_3 hareketi altında bir $X = (x_i) \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin dJ_X hacim elementi için elde edilen (4.2.5) kuadratik denkleminde, x_i lerin ve karışık kuadratik terimlerin katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 &= 0, \\ \sigma_2 \wedge \sigma_3 \wedge \omega_3 + \sigma_2 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 &= 0, \\ -\sigma_3 \wedge \sigma_1 \wedge \omega_1 + \sigma_3 \wedge \sigma_2 \wedge \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

ve

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 - \sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ -\sigma_2 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 - \sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 &= 0, \\ -\sigma_3 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + \sigma_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

olacak şekilde seçilirse ve α_i ;

$$\alpha_i = (-1)^{j-k} \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.5.3)$$

olarak tanımlanırsa, dJ_X hacim elementi için

$$dJ_X = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 \quad (4.5.4)$$

bulunur. Eğer $\vec{\sigma}'$ nün σ_i bileşenleri,

$$\sigma_i = s_{i1} \omega_1 + s_{i2} \omega_2 + s_{i3} \omega_3, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (4.5.5)$$

olarak yazılırsa; (4.5.1) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\begin{aligned} (s_{11} s_{23} - s_{13} s_{21} + s_{11} s_{32} - s_{12} s_{31}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (s_{21} s_{32} - s_{22} s_{31} + s_{22} s_{13} - s_{23} s_{12}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (-s_{32} s_{13} + s_{33} s_{12} - s_{31} s_{23} + s_{33} s_{21}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

ve (4.5.2) denklemlerinden de, sırasıyla,

$$\begin{aligned} (s_{12} - s_{21}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (s_{23} - s_{32}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ (s_{31} + s_{13}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

yazılabilir. Ayrıca ω_1 , ω_2 ve ω_3 formları lineer bağımsız olduklarından; (4.5.6) denklemlerinden, sırasıyla,

$$\begin{aligned} s_{11} (s_{23} + s_{32}) - s_{13} s_{21} - s_{12} s_{31} &= 0, \\ s_{22} (-s_{31} + s_{13}) + s_{21} s_{32} - s_{23} s_{12} &= 0, \\ s_{33} (s_{12} + s_{21}) - s_{32} s_{13} - s_{31} s_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

ve (4.5.7) denklemlerinden de, sırasıyla,

$$\begin{aligned} s_{12} - s_{21} &= 0, \\ s_{23} - s_{32} &= 0, \\ s_{31} + s_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

elde edilir. Böylece (4.5.9) denklemleri için

$$s_{ij} + (-1)^{i-j} s_{ji} = 0 \quad (4.5.10)$$

yazılabilir. (4.5.9) denklemleri, (4.5.8) denklemlerinde kullanılırsa da

$$s_{ii} s_{jk} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.5.11)$$

bulunur.

\mathcal{B}_3 hareketi esnasında, $O \in R$ başlangıç noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (4.2.3) ve (4.5.5) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} dJ_O &= (s_{11} \omega_1 + s_{12} \omega_2 + s_{13} \omega_3) \wedge (s_{21} \omega_1 + s_{22} \omega_2 + s_{23} \omega_3) \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\ &= \left[(s_{11} \omega_1 + s_{12} \omega_2 + s_{13} \omega_3) \wedge (s_{21} \omega_1 + s_{22} \omega_2 + s_{23} \omega_3) \right] \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\ &= \left[\begin{aligned} &s_{11} s_{22} \omega_1 \wedge \omega_2 + s_{11} s_{23} \omega_1 \wedge \omega_3 + s_{12} s_{21} \omega_2 \wedge \omega_1 + s_{12} s_{23} \omega_2 \wedge \omega_3 \\ &+ s_{13} s_{21} \omega_3 \wedge \omega_1 + s_{13} s_{22} \omega_3 \wedge \omega_2 \end{aligned} \right] \\ &\quad \wedge (s_{31} \omega_1 + s_{32} \omega_2 + s_{33} \omega_3) \\ &= s_{11} s_{22} s_{33} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 + s_{11} s_{23} s_{32} \omega_1 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 + s_{12} s_{21} s_{33} \omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_3 \\ &\quad + s_{12} s_{23} s_{31} \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 + s_{13} s_{21} s_{32} \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + s_{13} s_{22} s_{31} \omega_3 \wedge \omega_2 \wedge \omega_1 \\ &= (s_{11} s_{22} s_{33} - s_{11} s_{23} s_{32} - s_{12} s_{21} s_{33} + s_{12} s_{23} s_{31} + s_{13} s_{21} s_{32} - s_{13} s_{22} s_{31}) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.5.9) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$dJ_O = (s_{11} s_{22} s_{33} - s_{11} s_{23}^2 - s_{12}^2 s_{33} + s_{22} s_{31}^2) \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

elde edilir. $dJ_O \neq 0$ olması için

$$s_{11} s_{22} s_{33} - s_{11} s_{23}^2 - s_{12}^2 s_{33} + s_{22} s_{31}^2 \neq 0$$

olmalıdır. Eğer bu son denklemden, (4.5.11) denklemi göz önüne alınırsa

$$s_{11} s_{22} s_{33} \neq 0$$

bulunur. Buna göre $s_{ii} \neq 0$ olmalıdır. O halde (4.5.11) denkleminde, $s_{jk} = 0$ elde edilir. Bu durumda $s_{ii} = s_i$ alınır, (4.5.5) ve (4.5.10) denklemlerinden

$$\sigma_i = s_i \omega_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (4.5.12)$$

yazılabilir. Bu son denklem kullanılarak; (4.5.3) denklemi,

$$\alpha_i = (-1)^{j-k} s_i \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.5.13)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Böylece \mathcal{B}_3 hareketi altında $X \in R$ sabit noktasının R' de belirlediği bölgenin hacim elementi için (4.5.4) denkleminde, (4.5.12) ve (4.5.13) denklemleri kullanılırsa;

$$dJ_X = [s_1 s_2 s_3 - s_1 x_1^2 + s_2 x_2^2 - s_3 x_3^2] \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

bulunur.

$X \in R$ sabit noktası, \mathcal{B}_3 hareketi esnasında R' sabit uzayında bir bölge belirler. Bu bölgenin sınırı, kapalı bir yüzeydir. Bu yüzey, \mathcal{B}_3 hareketi ile birlikte oluşan kapalı bir \mathcal{B}_2 hareketi altında meydana gelen kapalı yörünge yüzeyidir. O takdirde kapalı \mathcal{B}_2 hareketi esnasında X noktasının R' de çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, Ψ_X ile gösterilecek olan yüzey parçasının $d\bar{F}'_X$ ile gösterilecek olan vektörel alan elementi için (4.4.2) denkleminde;

$$d\bar{F}'_X = \frac{1}{2} d\bar{x}' \hat{\times}_L d\bar{x}'$$

yazılabilir. Burada (4.1.16) denklemini kullanılırsa ve Lorentz anlamında vektörel çarpımın ve 1-formlar arasındaki dış çarpımın özellikleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
d\vec{F}'_X &= \frac{1}{2}(\tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2 + \tau_3 \vec{e}_3) \hat{\times}_L (\tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2 + \tau_3 \vec{e}_3) \\
&= \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} &\tau_1 \wedge \tau_2 \vec{e}_1 \times_L \vec{e}_2 + \tau_1 \wedge \tau_3 \vec{e}_1 \times_L \vec{e}_3 + \tau_2 \wedge \tau_1 \vec{e}_2 \times_L \vec{e}_1 + \tau_2 \wedge \tau_3 \vec{e}_2 \times_L \vec{e}_3 \\ &+ \tau_3 \wedge \tau_1 \vec{e}_3 \times_L \vec{e}_1 + \tau_3 \wedge \tau_2 \vec{e}_3 \times_L \vec{e}_2 \end{aligned} \right) \\
&= \frac{1}{2}(-\tau_1 \wedge \tau_2 \vec{e}_3 - \tau_1 \wedge \tau_3 \vec{e}_2 + \tau_2 \wedge \tau_1 \vec{e}_3 + \tau_2 \wedge \tau_3 \vec{e}_1 + \tau_3 \wedge \tau_1 \vec{e}_2 - \tau_3 \wedge \tau_2 \vec{e}_1) \\
&= \tau_2 \wedge \tau_3 \vec{e}_1 + \tau_3 \wedge \tau_1 \vec{e}_2 - \tau_1 \wedge \tau_2 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

veya

$$d\vec{F}'_X = \sum_{i=1}^3 \left(-(-1)^k \tau_j \wedge \tau_k \right) \vec{e}_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2, \quad (4.5.14)$$

elde edilir. Böylece kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında, Ψ_X yüzey parçasının \vec{F}'_X ile gösterilecek olan alan vektörü için (4.4.3) ve (4.5.14) denklemlerinden,

$$\vec{F}'_X = \iint_{\Gamma} d\vec{F}'_X = \sum_{i=1}^3 \left(\iint_{\Gamma} -(-1)^k \tau_j \wedge \tau_k \right) \vec{e}_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

yazılabilir. Eğer \vec{F}'_X alan vektörünün $\iint_{\Gamma} \left(-(-1)^k \tau_j \wedge \tau_k \right)$ bileşenleri, $f_i(X, X)$ ile gösterilirse; \vec{F}'_X alan vektörü,

$$\vec{F}'_X = \iint_{\Gamma} d\vec{F}'_X = \sum_{i=1}^3 f_i(X, X) \vec{e}_i \quad (4.5.15)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

(4.1.15) ve (4.5.12) denklemleri kullanılarak, $\tau_i \wedge \tau_j$ için

$$\begin{aligned}
\tau_i \wedge \tau_j &= \left(\sigma_i + (-1)^j x_j \omega_k - x_k \omega_j \right) \wedge \left(\sigma_j + (-1)^k x_k \omega_i - x_i \omega_k \right) \\
&= \sigma_i \wedge \sigma_j + (-1)^k x_k \sigma_i \wedge \omega_i - x_i \sigma_i \wedge \omega_k + (-1)^j x_j \omega_k \wedge \sigma_j \\
&\quad + (-1)^{j+k} x_j x_k \omega_k \wedge \omega_i - x_k \omega_j \wedge \sigma_j - (-1)^k x_k^2 \omega_j \wedge \omega_i + x_k x_i \omega_j \wedge \omega_k \\
&= (s_i \omega_i) \wedge (s_j \omega_j) + (-1)^k x_k (s_i \omega_i) \wedge \omega_i - x_i (s_i \omega_i) \wedge \omega_k \\
&\quad + (-1)^j x_j \omega_k \wedge (s_j \omega_j) + (-1)^{j+k} x_j x_k \omega_k \wedge \omega_i - x_k \omega_j \wedge (s_j \omega_j) \\
&\quad - (-1)^k x_k^2 \omega_j \wedge \omega_i + x_k x_i \omega_j \wedge \omega_k \\
&= s_i s_j \omega_i \wedge \omega_j - x_i s_i \omega_i \wedge \omega_k + (-1)^j x_j s_j \omega_k \wedge \omega_j \\
&\quad + (-1)^{j+k} x_j x_k \omega_k \wedge \omega_i - (-1)^k x_k^2 \omega_j \wedge \omega_i + x_k x_i \omega_j \wedge \omega_k
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\tau_i \wedge \tau_j &= \left(s_i s_j + (-1)^k x_k^2 \right) \omega_i \wedge \omega_j + \left(-(-1)^j x_j s_j + x_k x_i \right) \omega_j \wedge \omega_k \\
&\quad + \left(x_i s_i + (-1)^{j+k} x_j x_k \right) \omega_k \wedge \omega_i,
\end{aligned}$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, bulunur. Eğer

$$\iint_{\Gamma} \omega_i \wedge \omega_j = 2a_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_i s_j \omega_i \wedge \omega_j = h_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_i \omega_i \wedge \omega_j = 2b_{ij},$$

$$\iint_{\Gamma} s_j \omega_i \wedge \omega_j = 2c_{ij}$$

gösterimleri kullanılırsa;

$$\iint_{\Gamma} \tau_i \wedge \tau_j = h_{ij} + 2(-1)^k a_{ij} x_k^2 - 2(-1)^j b_{jk} x_j + 2a_{jk} x_k x_i + 2c_{ki} x_i + 2(-1)^{j+k} a_{ki} x_j x_k$$

elde edilir. Burada $i \rightarrow j$, $j \rightarrow k$ ve $k \rightarrow i$ yazılırsa,

$$\iint_{\Gamma} \tau_j \wedge \tau_k = h_{jk} + 2(-1)^i a_{jk} x_i^2 - 2(-1)^k b_{ki} x_k + 2a_{ki} x_i x_j + 2c_{ij} x_j + 2(-1)^{k+i} a_{ij} x_k x_i$$

ve dolayısıyla \vec{F}'_X alan vektörünün $f_i(X, X)$ ile gösterilen $\iint_{\Gamma} (-(1)^k \tau_j \wedge \tau_k)$

bileşenleri için

$$f_i(X, X) = -(-1)^k \begin{bmatrix} h_{jk} + 2(-1)^i a_{jk} x_i^2 - 2(-1)^k b_{ki} x_k + 2a_{ki} x_i x_j + 2c_{ij} x_j \\ + 2(-1)^{k+i} a_{ij} x_k x_i \end{bmatrix}, \quad (4.5.16)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, bulunur.

Şimdi, kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi esnasında R hareketli uzayında ele alınan doğruduş üç sabit noktanın R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının $\vec{e}' = \vec{e}'_3$ birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ - düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

$X = (x_i)$ ve $Y = (y_i)$, R de iki farklı sabit nokta ve $Z = (z_i)$ de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının R' de çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarını, sırasıyla, Ψ_X , Ψ_Y ve Ψ_Z ile gösterelim. O halde Ψ_Z yüzey parçasının \vec{F}'_Z alan vektörünün bileşenleri için (4.5.16) denkleminde,

$$f_i(Z, Z) = -(-1)^k h_{jk} - 2(-1)^{i+k} a_{jk} z_i^2 + 2b_{ki} z_k - 2(-1)^k a_{ki} z_i z_j - 2(-1)^k c_{ij} z_j - 2(-1)^i a_{ij} z_k z_i$$

yazılabilir. Bu denklem, (4.3.1) ve (4.5.16) denklemleri kullanılarak düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
f_i(Z, Z) &= -(-1)^k h_{jk} + 2\lambda b_{ki} x_k + 2\mu b_{ki} y_k - 2(-1)^k \lambda c_{ij} x_j - 2(-1)^k \mu c_{ij} y_j \\
&\quad - 2\lambda^2 x_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} x_i + (-1)^k a_{ki} x_j + (-1)^i a_{ij} x_k \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu x_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} y_i + (-1)^k a_{ki} y_j + (-1)^i a_{ij} y_k \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu y_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} x_i + (-1)^k a_{ki} x_j + (-1)^i a_{ij} x_k \right) \\
&\quad - 2\mu^2 y_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} y_i + (-1)^k a_{ki} y_j + (-1)^i a_{ij} y_k \right) \\
&= -(-1)^k h_{jk} + 2\lambda b_{ki} x_k + 2\mu b_{ki} y_k - 2(-1)^k \lambda c_{ij} x_j - 2(-1)^k \mu c_{ij} y_j \\
&\quad + \lambda^2 \left(f_i(X, X) + (-1)^k h_{jk} - 2b_{ki} x_k + 2(-1)^k c_{ij} x_j \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu x_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} y_i + (-1)^k a_{ki} y_j + (-1)^i a_{ij} y_k \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu y_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} x_i + (-1)^k a_{ki} x_j + (-1)^i a_{ij} x_k \right) \\
&\quad + \mu^2 \left(f_i(Y, Y) + (-1)^k h_{jk} - 2b_{ki} y_k + 2(-1)^k c_{ij} y_j \right) \\
&= (-1 + \lambda^2 + \mu^2) (-1)^k h_{jk} + \lambda^2 f_i(X, X) + \mu^2 f_i(Y, Y) \\
&\quad + 2\lambda b_{ki} x_k (1 - \lambda) + 2\mu b_{ki} y_k (1 - \mu) \\
&\quad + 2(-1)^k \lambda c_{ij} x_j (-1 + \lambda) + 2(-1)^k \mu c_{ij} y_j (-1 + \mu) \\
&\quad - 2\lambda \mu x_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} y_i + (-1)^k a_{ki} y_j + (-1)^i a_{ij} y_k \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu y_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} x_i + (-1)^k a_{ki} x_j + (-1)^i a_{ij} x_k \right) \\
&= -2\lambda \mu (-1)^k h_{jk} + \lambda^2 f_i(X, X) + \mu^2 f_i(Y, Y) \\
&\quad + 2\lambda \mu b_{ki} x_k + 2\lambda \mu b_{ki} y_k - 2(-1)^k \lambda \mu c_{ij} x_j - 2(-1)^k \lambda \mu c_{ij} y_j \\
&\quad - 2\lambda \mu x_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} y_i + (-1)^k a_{ki} y_j + (-1)^i a_{ij} y_k \right) \\
&\quad - 2\lambda \mu y_i \left((-1)^{i+k} a_{jk} x_i + (-1)^k a_{ki} x_j + (-1)^i a_{ij} x_k \right)
\end{aligned}$$

veya

$$f_i(Z, Z) = \lambda^2 f_i(X, X) + \mu^2 f_i(Y, Y) + 2\lambda\mu \begin{pmatrix} -(-1)^k h_{jk} + b_{ki}(x_k + y_k) - (-1)^k c_{ij}(x_j + y_j) \\ -2(-1)^{i+k} a_{jk} x_i y_i - (-1)^k a_{ki}(x_i y_j + y_i x_j) \\ -(-1)^i a_{ij}(x_i y_k + y_i x_k) \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki parantezli ifade, $f_i(X, Y)$ ile gösterilirse

$$f_i(Z, Z) = \lambda^2 f_i(X, X) + 2\lambda\mu f_i(X, Y) + \mu^2 f_i(Y, Y) \quad (4.5.17)$$

elde edilir.

Tanım 4.5.1: Kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi esnasında bileşenleri

$$f_i(X, Y) = -(-1)^k \begin{pmatrix} h_{jk} - (-1)^k b_{ki}(x_k + y_k) + c_{ij}(x_j + y_j) \\ +2(-1)^i a_{jk} x_i y_i + a_{ki}(x_i y_j + y_i x_j) \\ +(-1)^{k+i} a_{ij}(x_i y_k + y_i x_k) \end{pmatrix}, \quad (4.5.18)$$

$i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$, olan

$$\vec{F}'_{XY} = \sum_{i=1}^3 f_i(X, Y) \vec{e}_i \quad (4.5.19)$$

vektörüne, sabit $X, Y \in R$ noktaları tarafından R' sabit uzayında belirlenen karışık alan vektörü adı verilir.

Böylece \vec{F}'_Z alan vektörü için (4.5.15), (4.5.17) ve (4.5.19) denklemlerinden,

$$\vec{F}'_Z = \lambda^2 \vec{F}'_X + 2\lambda\mu \vec{F}'_{XY} + \mu^2 \vec{F}'_Y \quad (4.5.20)$$

elde edilir. Ayrıca (4.5.15), (4.5.16), (4.5.18) ve (4.5.19) denklemleri kullanılarak; \vec{F}'_X ,

\vec{F}'_{XY} ve \vec{F}'_Y alan vektörleri arasında

$$\begin{aligned}
\vec{F}'_X - 2\vec{F}'_{XY} + \vec{F}'_Y &= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} -2(-1)^{i+k} a_{jk} x_i^2 - 2(-1)^k a_{ki} x_i x_j - 2(-1)^i a_{ij} x_k x_i \\ +4(-1)^{i+k} a_{jk} x_i y_i + 2(-1)^k a_{ki} (x_i y_j + y_i x_j) \\ +2(-1)^i a_{ij} (x_i y_k + y_i x_k) - 2(-1)^{i+k} a_{jk} y_i^2 \\ -2(-1)^k a_{ki} y_i y_j - 2(-1)^i a_{ij} y_k y_i \end{bmatrix} \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} -2(-1)^{i+k} a_{jk} (x_i - y_i)^2 \\ -2(-1)^k a_{ki} (x_i x_j + y_i y_j - x_i y_j - y_i x_j) \\ -2(-1)^i a_{ij} (x_k x_i + y_k y_i - x_i y_k - y_i x_k) \end{bmatrix} \vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} -2(-1)^{i+k} a_{jk} (x_i - y_i)^2 - 2(-1)^k a_{ki} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \\ -2(-1)^i a_{ij} (x_k - y_k)(x_i - y_i) \end{bmatrix} \vec{e}_i \\
&= \begin{bmatrix} -2a_{23} (x_1 - y_1)^2 + 2a_{31} (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \\ +2a_{12} (x_3 - y_3)(x_1 - y_1) \end{bmatrix} \vec{e}_1 \\
&\quad + \begin{bmatrix} 2a_{31} (x_2 - y_2)^2 + 2a_{12} (x_2 - y_2)(x_3 - y_3) \\ -2a_{23} (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \end{bmatrix} \vec{e}_2 \\
&\quad + \begin{bmatrix} 2a_{12} (x_3 - y_3)^2 - 2a_{23} (x_3 - y_3)(x_1 - y_1) \\ +2a_{31} (x_2 - y_2)(x_3 - y_3) \end{bmatrix} \vec{e}_3 \\
&= 2a_{12} (x_3 - y_3) [(x_1 - y_1) \vec{e}_1 + (x_2 - y_2) \vec{e}_2 + (x_3 - y_3) \vec{e}_3] \\
&\quad - 2a_{23} (x_1 - y_1) [(x_1 - y_1) \vec{e}_1 + (x_2 - y_2) \vec{e}_2 + (x_3 - y_3) \vec{e}_3] \\
&\quad + 2a_{31} (x_2 - y_2) [(x_1 - y_1) \vec{e}_1 + (x_2 - y_2) \vec{e}_2 + (x_3 - y_3) \vec{e}_3] \\
&= 2 [a_{12} (x_3 - y_3) - a_{23} (x_1 - y_1) + a_{31} (x_2 - y_2)] (\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned}$$

eşitlikleri ve sonuç olarak

$$\vec{F}'_X - 2\vec{F}'_{XY} + \vec{F}'_Y = 2 \left[\sum_{i=1}^3 (-1)^i a_{ij} (x_k - y_k) \right] (\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.5.21)$$

eşitliği bulunur. Burada $2 \left[\sum_{i=1}^3 (-1)^i a_{ij} (x_k - y_k) \right] (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{M}$ alınırsa,

$$\vec{M} = \vec{F}'_X - 2\vec{F}'_{XY} + \vec{F}'_Y \quad (4.5.22)$$

yazılabilir. O halde (4.5.21) ve (4.5.22) denklemlerinden, \vec{M} vektörünün \overline{XY} vektörü doğrultusunda olduğu söylenebilir. Ayrıca (4.5.22) denklemi, (4.5.20) denkleminde kullanılırsa; \vec{F}'_Z alan vektörü için

$$\begin{aligned} \vec{F}'_Z &= \lambda^2 \vec{F}'_X + \lambda \mu (\vec{F}'_X + \vec{F}'_Y - \vec{M}) + \mu^2 \vec{F}'_Y \\ &= \lambda(\lambda + \mu) \vec{F}'_X + \mu(\lambda + \mu) \vec{F}'_Y - \lambda \mu \vec{M} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada da $\lambda + \mu = 1$ denklemi kullanılırsa; \vec{F}'_Z alan vektörü,

$$\vec{F}'_Z = \lambda \vec{F}'_X + \mu \vec{F}'_Y - \lambda \mu \vec{M}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Bu son denklemden; kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında Ψ_Z yüzey parçasının, \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda, $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümünün alanı için

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle_L = \lambda \langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle_L + \mu \langle \vec{e}', \vec{F}'_Y \rangle_L - \lambda \mu \langle \vec{e}', \vec{M} \rangle_L \quad (4.5.23)$$

elde edilir.

İzdüşüme ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen, sabit $X, Y \in R$ noktaları arasındaki $D(X, Y)$ uzaklığının karesini

$$D^2(X, Y) = \varepsilon \langle \vec{e}', \vec{M} \rangle_L, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (4.5.24)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada XY doğru parçasının yönlendirilmesiyle,

$$D(X, Y) = -D(Y, X)$$

alınır. Ayrıca \overrightarrow{XY} vektörü doğrultusunda olan \vec{M} vektörü ile \vec{e}' vektörü Lorentz anlamında dik vektörlerse, $D(X, Y)$ uzaklığı sıfır olur.

Eğer (4.5.24) denklemi, (4.5.23) denkleminde kullanılırsa

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle_L = \lambda \langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle_L + \mu \langle \vec{e}', \vec{F}'_Y \rangle_L - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (4.5.25)$$

bulunur.

Şimdi, kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi esnasında Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının aynı olduğunu kabul edelim. O takdirde $\vec{F}'_X = \vec{F}'_Y$ olur. Bu durumda (4.5.25) denkleminde, $\lambda + \mu = 1$ denklemi kullanılarak

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle_L - \langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle_L = \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y) \quad (4.5.26)$$

elde edilir. Ayrıca izdüşüme ve kapalı \mathfrak{B}_2 hareketine göre tanımlanan uzaklık göz önüne alınarak, X , Y ve Z noktaları doğrudan oldukları için

$$D(X, Z) + D(Z, Y) = D(X, Y)$$

ve (4.3.1) deki denklemlerde bulunan λ ve μ kullanılarak da

$$\lambda D(X, Y) = D(Z, Y) \text{ ve } \mu D(X, Y) = D(X, Z) \quad (4.5.27)$$

yazılabilir. Burada $D(X, Y) \neq 0$ ise λ ve μ , sırasıyla,

$$\lambda = \frac{D(Z, Y)}{D(X, Y)} \text{ ve } \mu = \frac{D(X, Z)}{D(X, Y)}$$

şeklinde ifade edilebilir. O halde (4.5.27) denklemi, (4.5.26) denklemine yerine yazılırsa

$$\langle \vec{e}', \vec{F}'_X \rangle_L - \langle \vec{e}', \vec{F}'_Z \rangle_L = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y)$$

bulunur. Bu denklemde, (4.4.6) denklemi göz önüne alınır; F'_X ve F'_Z ile gösterilecek olan dik izdüşüm alanları arasındaki fark için

$$F'_X - F'_Z = \varepsilon D(X, Z) D(Z, Y) \quad (4.5.28)$$

elde edilir.

Bu sonuç, klasik Holditch Teoremi'nin [2]; L^3 de kapalı yörünge yüzeylerinin, $\Gamma \subset R(G)$ bölgesi üzerinde tanımlı, parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları için bir genelleştirilmiştir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.5.1: X ve Y , R hareketli uzayında iki farklı sabit nokta ve Z de XY doğru parçası üzerinde bir diğer sabit nokta olsun. Bununla birlikte kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında, X , Y ve Z noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_X , Ψ_Y ve Ψ_Z ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, $\Psi_X = \Psi_Y$ olsun. Ayrıca Ψ_Z de Ψ_X den farklı olsun. O takdirde Ψ_X ile Ψ_Z yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları arasındaki fark, yalnızca izdüşüme ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketine göre özel bir şekilde ölçülen $D(X, Z)$ ve $D(Z, Y)$ uzaklıklarına bağlıdır.

Bu teorem, E^3 de kapalı B_2 hareketi esnasında yüzey parçalarının dik izdüşüm alanları ile ilgili olarak Müller tarafından ifade edilen Holditch-Tipi Teorem'in [30]; L^3 deki karşılığıdır.

Şimdi, M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun ve X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Bununla birlikte kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında, M , N , X ve Y noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_X ve Ψ_Y ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları aynı bir F_M'' alanı iken; Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları da F_M'' den farklı, sırasıyla, F_X'' ve F_Y'' olsun. Ayrıca F_M'' ile F_X'' alanları arasındaki fark, F_1'' ve F_M'' ile F_Y'' alanları arasındaki fark da F_2'' ile gösterilsin. Buna göre yukarıdaki koşullar altında, F_1'' ve F_2'' için (4.5.28) denkleminde, sırasıyla,

$$F_1'' = F_M'' - F_X'' = \varepsilon D(M, X)D(X, N)$$

ve

$$F_2'' = F_M'' - F_Y'' = \varepsilon D(M, Y)D(Y, N)$$

yazılabilir. Eğer F_1''/F_2'' oranı hesaplanırsa,

$$F_1''/F_2'' = \frac{D(M, X)D(X, N)}{D(M, Y)D(Y, N)}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$F_1''/F_2'' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)} \quad (4.5.29)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan açıkça görüleceği gibi F_1''/F_2'' oranı, yalnızca

MN doğru parçası üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişlerine bağlıdır ve $X \neq Y$ olduğundan;

$$\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \neq 1$$

dir. Ayrıca (4.5.29) eşitliğindeki

$$\frac{D(M, Y)D(X, N)}{D(M, X)D(Y, N)}$$

oranı; M , N , Y ve X noktalarının çifte oranıdır, [54]. Eğer (MN, YX) ile gösterilen bu çifte oran [54], kısaca ℓ ile gösterilirse; (4.5.29) eşitliği ile verilen F_1^n/F_2^n oranı, ℓ çifte oranına bağlı olarak

$$F_1^n/F_2^n = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

O halde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.5.2: F_1^n/F_2^n oranı, M , N , X ve Y noktalarının yalnızca rölatif durumlarına bağlıdır.

Yukarıdaki teoremin özel bir hali olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.5.1: M , N , X ve Y ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun ve X ve Y noktaları, MN doğru parçası üzerinde bulunsun. Bununla birlikte kapalı \mathcal{B}_2 hareketi esnasında, M , N , X ve Y noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_X ve Ψ_Y ile gösterilsin. Kabul

edelim ki bu hareket esnasında, $\Psi_M = \Psi_N$ olsun ve bu yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümünün alanı da F_M'' ile gösterilsin. Ayrıca Ψ_X ve Ψ_Y yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları da F_M'' den farklı, sırasıyla, F_X'' ve F_Y'' olsun. Eğer F_M'' ile F_X'' alanları arasındaki fark, F_1'' ve F_M'' ile F_Y'' alanları arasındaki fark da F_2'' ile gösterilirse; F_1''/F_2'' oranı için $\ell = (MN, YX)$ olmak üzere,

$$F_1''/F_2'' = \left[\frac{D(M, X)}{D(M, Y)} \right]^2 \ell$$

eşitliği geçerli olur.

Şimdi, M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi altında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket altında, $\Psi_M = \Psi_N$ iken; $\Psi_A = \Psi_B$ olsun veya Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının hepsinin birden aynı olmaması koşuluyla, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları aynı bir F_M'' alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları da aynı bir F_A'' alanı olsun. O takdirde bu koşullar altında bazı irdelemeler yapılarak, aşağıdaki sonuçlar ve bu sonuçlar ile ilgili teoremler verilebilir:

Yukarıdaki koşullar ve izdüşüm ile kapalı \mathfrak{B}_2 hareketine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, (4.5.28) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğrudan doğruya nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$F'_M{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon_1 D(M, X)D(X, N), \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

ve

$$F'_A{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon_2 D(A, X)D(X, B), \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

yazılabilir. O halde aşağıdaki iki durum sözkonusudur:

i) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$F'_M{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon D(M, X)D(X, N),$$

$$F'_A{}^n - F'_X{}^n = \varepsilon D(A, X)D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = \varepsilon [D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B)] \quad (4.5.30)$$

elde edilir. Eğer $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n$ ise (4.5.30) denkleminde

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (4.5.30) denkleminde

$$F'_M{}^n - F'_A{}^n = 0$$

ve dolayısıyla

$$F_M''^n = F_A''^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı \mathfrak{B}_2 hareketi esnasında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarının eşit, yani $F_M''^n = F_A''^n$ olması demektir.

ii) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon$ ise

$$F_M''^n - F_X''^n = \varepsilon D(M, X) D(X, N),$$

$$F_A''^n - F_X''^n = -\varepsilon D(A, X) D(X, B)$$

ve dolayısıyla

$$F_M''^n - F_A''^n = \varepsilon [D(M, X) D(X, N) + D(A, X) D(X, B)] \quad (4.5.31)$$

elde edilir. Eğer $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları eşit, yani $F_M''^n = F_A''^n$ ise (4.5.31) denkleminde

$$D(M, X) D(X, N) + D(A, X) D(X, B) = 0$$

bulunur. Tersine, bu son denklem geçerli ise (4.5.31) denkleminde

$$F_M''^n - F_A''^n = 0$$

ve dolayısıyla

$$F_M''^n = F_A''^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarının eşit, yani $F_M'^n = F_A'^n$ olması demektir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.5.3: M, N, A ve $B; R$ hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, izdüşüme ve kapalı \mathcal{B}_2 hareketine bağlı olarak tanımlanan uzaklığa göre $D(M, N) \neq 0$ ve $D(A, B) \neq 0$ koşulları altında, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı \mathcal{B}_2 hareketi esnasında, M, N, A ve B noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket esnasında, $\Psi_M = \Psi_N$ iken; $\Psi_A = \Psi_B$ olsun veya Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının hepsinin birden aynı olmaması koşuluyla, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları aynı bir $F_M'^n$ alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları da aynı bir $F_A'^n$ alanı olsun. O takdirde bu hareket esnasında, $\Psi_M = \Psi_N = \Psi_A = \Psi_B$ olması veya hepsi birden aynı olmayan Ψ_M, Ψ_N, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarının eşit, yani $F_M'^n = F_A'^n$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki bağıntılardan yalnızca birinin gerçekleşmesidir:

$$D(M, X)D(X, N) - D(A, X)D(X, B) = 0$$

ya da

$$D(M, X)D(X, N) + D(A, X)D(X, B) = 0.$$

Şimdi de kabul edelim ki M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Eğer bu hareket altında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin $F_M''^n$ alanı, Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin $F_A''^n$ alanı ve Ψ_X yüzey parçasının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümünün $F_X''^n$ alanı eşit ise (4.5.28) denkleminde; M , X , N ile A , X , B doğrudan doğruya nokta üçlüleri göz önüne alınırsa, sırasıyla,

$$D(M, X)D(X, N) = 0$$

ve

$$D(A, X)D(X, B) = 0$$

elde edilir. Eğer bu son iki denklem geçerli ise de (4.5.28) denklemi göz önünde bulundurularak, sırasıyla,

$$F_M''^n - F_X''^n = 0$$

ve

$$F_A''^n - F_X''^n = 0$$

veya

$$F_M''^n = F_X''^n$$

ve

$$F'_A{}^n = F'_X{}^n$$

elde edilir. Bu ise kapalı \mathcal{B}_2 hareketi altında Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarının eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n = F'_X{}^n$ olması demektir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.5.4: M , N , A ve B ; R hareketli uzayında dört farklı sabit nokta olsun. Bununla birlikte MN ve AB doğru parçaları, bu dört noktadan farklı sabit bir X noktasında kesişsinler. Ayrıca kapalı \mathcal{B}_2 hareketi esnasında, M , N , A , B ve X noktalarının R' sabit uzayında çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçaları, sırasıyla, Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X ile gösterilsin. Kabul edelim ki bu hareket esnasında, Ψ_M ve Ψ_N yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları aynı bir $F'_M{}^n$ alanı iken; Ψ_A ve Ψ_B yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanları da aynı bir $F'_A{}^n$ alanı olsun. O takdirde bu hareket esnasında Ψ_M , Ψ_N , Ψ_A , Ψ_B ve Ψ_X yüzey parçalarının \vec{e}' birim normal vektörü doğrultusunda $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümlerinin alanlarının eşit, yani $F'_M{}^n = F'_A{}^n = F'_X{}^n$ olması için gerek ve yeter koşul

$$D(M, X)D(X, N) = D(A, X)D(X, B) = 0$$

olmasıdır, yani \overrightarrow{MN} ve \overrightarrow{AB} vektörlerinin \vec{e}' birim normal vektörüne Lorentz anlamında dik olmalarıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

3-boyutlu parametre uzayında (t_i parametrelerinin uzayında) ele alınan bir G bölgesinin sınırı -bir kürenin bağlantılılık yapısına sahip- kapalı ve yönlendirilebilir bir $R(G)$ yüzeyi olmak üzere; E^3 3-boyutlu Öklid uzayında kendimizi bu G bölgeye karşılık gelen bir 3-parametrelili uzay hareketine kısıtlarsak, $R(G)$ ye de bu 3-parametrelili uzay hareketi ile birlikte oluşan bir 2-parametrelili kapalı uzay hareketi karşılık gelir. Bu 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında R hareketli uzayında ele alınan sabit bir nokta, R' sabit uzayında kapalı bir yörünge yüzeyi çizer ve bu kapalı yörünge yüzeyi, 3-parametrelili uzay hareketi esnasında bu noktanın R' de belirlediği bölgenin sınırır, [1,11,22,26,30].

3-parametrelili uzay hareketi ile 2-parametrelili kapalı uzay hareketi arasındaki bu ilişki göz önünde bulundurularak; bu tez çalışmasında, öncelikle E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında hacimlerle ilgili ifade edilen bir Holditch-Tipi Teorem ve genelleştirilmişleri ile bazı sonuçların [11,22,26]; L^3 3-boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıkları araştırılmış ve ayrıca bunların dışında bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun için ilk olarak, L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında hareketli uzayın herhangi bir sabit noktasının sabit uzayda belirlediği bölgenin hacim elementi ve hacim formülleri bulunmuştur. Bununla birlikte bu uzay hareketi altında; hareketli uzaydaki doğruduş üç sabit noktanın sabit uzayda belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişki kullanılarak, 3-parametrelili uzay hareketine ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımlanan -hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki- uzaklık sayesinde, Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra da hareketli uzayda ele alınan doğruduş olmayan üç sabit noktanın ve bu noktalar tarafından tanımlanan düzlem üzerindeki bir diğer sabit noktanın sabit uzayda belirledikleri bölgelerin hacimleri arasındaki ilişki kullanılarak, Lorentz anlamında hacimler için ifade edilen Holditch-Tipi Teorem'in bazı genelleştirilmişleri verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ayrıca E^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında, kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının dik izdüşüm alanlarıyla ilgili ifade edilen bir Holditch-Tipi Teorem'in [30] ve bu teoremin [32] de verilen iki sonucunun; L^3 deki karşılıkları araştırılmıştır. Bu sebeple L^3 de vektörel alan elementi ve alan vektörü kavramları yardımıyla, 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında ilk olarak; hareketli uzaydaki sabit bir noktanın sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge yüzeyinin bir parçasının vektörel alan elementi ve alan vektörü formülleri bulunmuştur. Bununla birlikte bu 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında; hareketli uzaydaki doğrudan üç sabit noktanın sabit uzayda çizdikleri kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının, $\vec{e}' = \vec{e}'_3$ birim normal vektörü doğrultusunda, $x'o'y'$ -düzlemi üzerine dik izdüşümleri alınmış ve bu yüzey parçalarının dik izdüşümlerinin alanları arasındaki ilişki kullanılarak, izdüşüme ve 2-parametrelili kapalı uzay hareketine bağlı olarak tanımlanan -hareketli uzayın iki sabit noktası arasındaki- uzaklık sayesinde, Lorentz anlamında bir Holditch-Tipi Teorem elde edilmiştir. Sonra da L^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi esnasında ifade edilen bu Lorentz anlamında Holditch-Tipi Teorem'in bazı sonuçları verilmiştir.

Literatürde, klasik Holditch Teoremi'nin homotetik hareketler altındaki genelleştirilmişlerine de rastlanmaktadır, [36-38,42,43,46]. Örneğin; Düldül ve diğ., Müller'in E^3 de 1-parametrelili kapalı uzay hareketi altında verdiği sonuçların [23]; E^3 de 1-parametrelili kapalı homotetik hareket altındaki karşılıklarını, [38] de çalışmışlardır. Bunun yanı sıra Düldül ve Kuruoğlu, Müller'in E^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında verdiği bazı sonuçların [22,26]; E^3 de 3-parametrelili homotetik hareket altındaki karşılıklarını, [43] de araştırmışlardır. Son yıllarda, Lorentz düzleminde ve uzayında da hareketler üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır, [33-35,39-42,44-46]. Örneğin; Yüce ve Kuruoğlu, [39] da düzlemsel Lorentz hareketi altında Holditch-Tipi Teoremler vermişlerdir. Bununla birlikte Yüce ve Kuruoğlu, [42] de L^2 Lorentz düzleminde homotetik hareket altında Steiner Formülü ve Holditch-Tipi Teoremler elde etmişlerdir. Bu sebeple Yıldırım ve diğ., Müller'in E^3 de 1-parametrelili kapalı uzay hareketi altında verdiği sonuçların [23]; L^3 Lorentz uzayındaki karşılıklarını, [45] de incelemişlerdir. Bunun yanı sıra Yıldırım ve diğ., [45] deki çalışmanın; L^3 de 1-parametrelili kapalı homotetik hareket altındaki karşılığını, [46] da sunmuşlardır. Bu nedenle L^3 de 3-parametrelili uzay hareketi altında, bu tez kapsamında elde edilen

sonuçların; L^3 de 3-parametrelili homotetik hareket altındaki karşılıklarını araştırmak açık bir problem olarak gözükmektedir. Ayrıca E^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında, Müller tarafından kapalı yörünge yüzeylerinin parçalarının bir düzlem üzerine dik izdüşümlerinin alanları için yapılan çalışmanın [30]; E^3 de 2-parametrelili kapalı homotetik hareket altındaki karşılığına literatürde řu ana kadar rastlanmamıştır. Bu sebeple gerek [30] daki çalışmanın; E^3 de 2-parametrelili kapalı homotetik hareket altındaki karşılığını araştırmak, gerekse L^3 de 2-parametrelili kapalı uzay hareketi altında bu tez kapsamında elde edilen sonuçların; L^3 de 2-parametrelili kapalı homotetik hareket altındaki karşılıklarını araştırmak açık birer problem olarak gözükmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] MÜLLER, H. R., 1963, *Kinematik Dersleri* (Çeviri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Um.96-Mat.27, Ankara.
- [2] HOLDITCH, H., 1858, Geometrical theorem, *Q. J. Pure Appl. Math.*, 2, 38.
- [3] STEINER, J., 1881, *Gesammelte Werke II*, Berlin.
- [4] LEUDES DORF, C., 1877, Theorem in kinematics, *Messenger Math.*, 7, 125-127.
- [5] LEUDES DORF, C., 1878, Note on the theorem in kinematics, *Messenger Math.*, 8, 11-12.
- [6] KEMPE, A. B., 1878, Note on Mr. Leudesdorf's Theorem in kinematics, *Messenger Math.*, 7, 165-167.
- [7] ELLIOTT, E. B., 1878, A theorem in areas including Holditch's, with its analogue in three dimensions, *Messenger Math.*, 7, 150-156.
- [8] ELLIOTT, E. B., 1881, Extension to curved surfaces of a former theorem on plane areas, *Messenger Math.*, 10, 156-158.
- [9] ELLIOTT, E. B., 1881, Some theorems of kinematics on a sphere, *Proc. London Math. Soc.*, 12, 47-57.
- [10] BLASCHKE, W., 1948, *Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse No.2, Abhandlung, 31-37, Heidelberg, Springer-Verlag.
- [11] BLASCHKE, W., 1948, Über Integrale in der Kinematik, *Archiv der Mathematik*, 1, 18-22.
- [12] THÜRING, R., 1952, Studien über den Holditchschen Satz, *Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel*, 63, 221-252.
- [13] THÜRING, R., 1956, Studien über die Holditchsche Bewegung, *Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel*, 67, 575-594.
- [14] BLASCHKE, W., MÜLLER, H. R., 1956, *Ebene Kinematik*, Verlag von R. Oldenbourg, München.

- [15] MÜLLER, H. R., 1959, *Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik*, *Monatshefte für Mathematik*, 63, 3, 231-240.
- [16] HACISALİHOĞLU, H. H., 1971, On closed spherical motions, *Quarterly of Applied Mathematics*, 29, 269-276.
- [17] HACISALİHOĞLU, H. H., 1972, On the pitch of a closed ruled surface, *Mechanism and Machine Theory*, 7, 291-305.
- [18] HACISALİHOĞLU, H. H., 1974, On the geometry of motion in the Euclidean n -space, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A₁*, 10, 95-108.
- [19] HOSCHEK, J., 1975, Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch, *Monatshefte für Mathematik*, 80, 93-99.
- [20] MÜLLER, H. R., 1978, Verallgemeinerung einer Formel von Steiner, *Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges.*, 29, 107-113.
- [21] MÜLLER, H. R., 1978, Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung, *Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges.*, 29, 115-119.
- [22] MÜLLER, H. R., 1979, Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch, *Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges.*, 30, 54-61.
- [23] MÜLLER, H. R., 1980, Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven, *Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges.*, 31, 129-135.
- [24] BROMAN, A., 1981, Holditch's Theorem, *Math. Mag.*, 54, 99-108.
- [25] HERING, L., 1981, *Holditch-Sätze für Regelflächen und deren Übertragungen auf ebene und sphärische Kurven*, zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.), Dissertation, Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, Technische Universität Darmstadt.
- [26] MÜLLER, H. R., 1982, Über den Rauminhalt kinematisch erzeugter, geschlossener Flächen, *Archiv der Mathematik*, 38, 43-49.
- [27] POTTMANN, H., 1985, Holditch-Sicheln, *Archiv der Mathematik*, 44, 373-378.
- [28] POTTMANN, H., 1986, Zum Satz von Holditch in der euklidischen Ebene, *Elemente der Mathematik*, 41, 1-6.
- [29] POTTMANN, H., 1987, Sätze vom Holditch-Typ über den Flächeninhalt kinematisch erzeugter unbeschränkter Bereiche, *Anzeiger der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Naturwiss. Klasse*, 124, 43-51.
- [30] MÜLLER, H. R., 1987, Ein Holditch-Satz für Flächenstücke im R_3 , *Abhandl. Braunsch. Wiss. Ges.*, 39, 37-42.

- [31] GÜNEŞ, R., KELEŞ, S., HACISALİHOĞLU, H. H., 1989, Two corollaries of Holditch's theorem for one-parameter closed spatial motions, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A₁*, 38, no.1-2, 53-58.
- [32] GÜNEŞ, R., KELEŞ, S., HACISALİHOĞLU, H. H., 1989, Two corollaries of Holditch's theorem for the parts of surface in E^3 , *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A₁*, 38, 59-66.
- [33] HACISALİHOĞLU, H. H., 1990, On the geometry of motion of Lorentzian plane, *Proc. of Assiut First International Conference of Mathematics and Statistics*, Part I, 12-14 February 1990, University of Assiut, Assiut, Egypt, 87-107.
- [34] ERGİN, A. A., 1991, On the 1-parameter Lorentzian motions, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Serie A₁*, 40, no.1-2, 59-66.
- [35] TUTAR, A., KURUOĞLU, N., 1999, On the one-parameter homothetic motions on the Lorentzian plane, *Bulletin of Pure and Applied Sciences*, 18E (2), 333-340.
- [36] TUTAR, A., KURUOĞLU, N., 1999, The Steiner formula and the Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics, *Mech. Mach. Theory*, 34, 1-6.
- [37] YÜCE, S., KURUOĞLU, N., 2004, The generalized Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54 (129), 337-340.
- [38] DÜLDÜL, M., KURUOĞLU, N., TUTAR, A., 2004, The generalization of Holditch theorem for closed space curves, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 84, 1, 60-64.
- [39] YÜCE, S., KURUOĞLU, N., 2004, Holditch-type theorems for the planar Lorentzian motions, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 17, 4, 467-471.
- [40] TOSUN, M., GUNGOR, M. A., HACISALİHOĞLU, H. H., OKUR, I., 2006, A study on the one parameter Lorentzian spherical motions, *Acta Math. Univ. Comeniana*, LXXV, 1, 85-93.
- [41] TOSUN, M., KUCUK, A., GUNGOR, M. A., 2006, The homothetic motions in the Lorentz 3-space, *Acta Mathematica Scientia*, 26 B (4), 711-719.
- [42] YÜCE, S., KURUOĞLU, N., 2007, Steiner formula and Holditch-type theorems for homothetic Lorentzian motions, *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A*, 31, A2, 207-212.
- [43] DÜLDÜL, M., KURUOĞLU, N., 2007, On the volume of the trajectory surfaces under the homothetic motions, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 76, 2, 241-246.
- [44] GUNGOR, M. A., TOSUN, M., 2008, One parameter Lorentzian motions in Lorentz 3-space, *Kragujevac J. Math.*, 31, 95-109.

- [45] YILDIRIM, H., YÜCE, S., KURUOĞLU, N., 2009, Holditch Theorem for the closed space curves in Lorentzian 3-space, *Acta Mathematica Scientia*, kabul edildi.
- [46] YILDIRIM, H., YÜCE, S., KURUOĞLU, N., 2010, 3-boyutlu Lorentz uzayında 1-parametrelili kapalı homotetik hareketler altında Holditch-Tipi Teoremler, *VIII. Geometri Sempozyumu Bildiri ve Poster Özet Kitapçığı*, 29 Nisan-2 Mayıs 2010, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 41.
- [47] GIERING, O., HOSCHEK, J., 1994, *Geometrie und ihre Anwendungen*, Carl Hanser Verlag, Munich, 3-446-16576-2.
- [48] HACISALİHOĞLU, H. H., 1980, *Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere*, İ. Ü. Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Mat. No:1, Malatya.
- [49] HACISALİHOĞLU, H. H., 2000, *Diferansiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, II. Cilt, III. Baskı.
- [50] HACISALİHOĞLU, H. H., 2000, *Diferansiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, I. Cilt, IV. Baskı.
- [51] HACISALİHOĞLU, H. H., 1980, *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat-No:2.
- [52] O'NEILL, B., 1997, *Elementary Differential Geometry*, 2nd ed., Academic Press, New York, 0-12-526745-2.
- [53] GUGGENHEIMER, H. W., 1977, *Differential Geometry*, Dover Publications, Inc. New York, 0-486-63433-7.
- [54] HACISALİHOĞLU, H. H., 1998, *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere*, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- [55] O'NEILL, B., 1983, *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 0-12-526740-1.
- [56] RATCLIFFE, J. G., 1994, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 0-387-94249-1.
- [57] IZUMIYA, S., 2009, Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, *Moscow Mathematical Journal*, 9, 325-357.
- [58] GREUB, W. H., 1967, *Linear Algebra*, 3rd ed., Springer-Verlag and Academic Press, New York.
- [59] DZAN, J. J., 1985, Trigonometric laws on Lorentzian sphere S_1^2 , *Journal of Geometry*, 24, 6-13.

ÖZGEÇMİŞ

24.11.1980 tarihinde İstanbul'da doğdum. İlkokul birinci ve ikinci sınıfı Maçka İlkokulu, üçüncü ve dördüncü sınıfı Şükrü Naili Paşa İlkokulu ve beşinci sınıfı Ahmet Çuhadaroğlu İlköğretim Okulu'nda okudum. Orta okulu Sait Çiftçi İlköğretim Okulu'nda ve liseyi de Beşiktaş Sakıp Sabancı Lisesi'nde bitirdim. 1999 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2001 yılında Fizik Bölümü Çift Anadal Programı'na kayıt yaptırđım. 2003 yılında Matematik Bölümü'nden mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım. Yine bu yıl, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü kadrosunda, Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandım. 2004 yılında Fizik Bölümü Çift Anadal Programı'nı ve 2006 yılında da yüksek lisans eğitimimi tamamladım. Aynı yıl, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimime başladım. Halen araştırma görevlisi olarak çalışmalarına devam etmekteyim.