İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

WEYL-OTSUKI UZAYLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN İNCELENMESİ

Beran PİRİNÇÇİ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN

Eylül, 2010

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

WEYL-OTSUKI UZAYLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN İNCELENMESİ

Beran PİRİNÇÇİ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN

Eylül, 2010

İSTANBUL

Bu çalışma 01/09/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr.Leyla ZEREN AKGÜN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr.Nuri KURUOĞLU
Bahçeşehir Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof.Dr.Ayşe KARA
Yıldız TeknikÜniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof.Dr.Mehmet ERDOĞAN
Yeni Yüzyıl Üniversitesi
Mühendislik Mimarlık Fakültesi

Prof.Dr.Osman GÜRSOY
Maltepe Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 3379 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.Leyla ZEREN AKGÜN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Doktora öğrenimimin ilk yıllarında danışmanlığımı yürüten ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr.Mehmet ERDOĞAN'a teşekkürü borç bilirim.

Eylül, 2010 **Beran PİRİNÇÇİ**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathfrak{X}_n$	: n-boyutlu düzgün manifold
$C^{\infty}\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı düzgün skaler alanların kümesi
$J_x^r f$	: f ’in x noktasındaki r-jeti
$J_{(x,y)}^r\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right)$	: $x\in\mathfrak{X}_n$ ’den $y\in\mathfrak{X}_m$ ’e tanımlı dönüşümlerin jet manifoldu
L_n^r	: $\mathbb{R}^n$ ’in r. diferansiyel grubu
$GL\left(n,\mathbb{R}\right)$	: Regüler $n\times n$ matrislerin grubu
$\Psi\left(E\right)$	: E vektör demetinin tüm kesitlerinin vektör uzayı
$\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı çatı demeti
$T\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı tanjant demeti
$T^{*}\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı kotanjant demeti
$\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı ikinci mertebeden tanjant demeti
$\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı ikinci mertebeden kotanjant demeti
$T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}$	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı (p,q) tipindeki tensör alanlarının vektör demeti
Γ	: $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı genel konneksiyon
P	: $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ’nin bir homomorfizması
D	: Γ genel konneksiyonunun kovaryant diferansiyel operatörü
$'\Gamma$	: Γ genel konneksiyonunun kontravaryant kısmı
$''\Gamma$	: Γ genel konneksiyonunun kovaryant kısmı
Q	: P izomorfizmasının tersi
$\bar{D}$	: Γ regüler genel konneksiyonunun temel kovaryant diferansiyel operatörü
$'\bar{D}$	: $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyel operatörü
$''\bar{D}$	: $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyel operatörü
θ_{μ}^{λ}	: Γ genel konneksiyonunun konneksiyon formları
Ω^i	: Γ genel konneksiyonunun burulma formları
T_{jh}^i	: Γ genel konneksiyonunun burulma tensörünün bileşenleri
Ω_i^j	: Γ genel konneksiyonunun eğrilik formları
R_{ihk}^j	: Γ genel konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri
$'\omega_i^j$	: $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun konneksiyon formları

$'T^{i}_{jh}$	: $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun burulma tensörünün bileşenleri
$'\Omega^{j}_{i}$	: $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik formları
$'R^{j}_{ihk}$	: $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri
$''\omega^{j}_{i}$	: $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun konneksiyon formları
$''T^{i}_{jh}$	: $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun burulma tensörünün bileşenleri
$''\Omega^{j}_{i}$	: $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik formları
$''R^{j}_{ihk}$	: $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri
g_{ij}	: Riemann metrik tensörünün bileşenleri
$\tilde{\Gamma}$	: Γ genel konneksiyonundan indüklenmiş genel konneksiyon
$T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$	: $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ uzayının $T_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$'deki ortogonal tümleyen uzayı
γ_k	: Rekürant vektör alanının bileşenleri
λ_{abc}	: Ricci dönme katsayıları
κ_N	: Normal eğrilik fonksiyonu
κ_1	: Birinci eğrilik fonksiyonu
κ_a	: Asal eğrilik fonksiyonu
$\mathcal{M}$	: Ortalama eğrilik fonksiyonu

ÖZET

WEYL-OTSUKI UZAYLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN İNCELENMESİ

Bu çalışmada, Weyl-Otsuki uzaylarında bulunan kongrüans eğrileri, eğrilik çizgileri, konjüge eğriler ve asimptotik eğriler incelenmiştir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölüm, genel konneksiyonlar teorisi ve Weyl-Otsuki uzayları hakkında yapılmış çalışmaların genel bir değerlendirmesine ayrılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümü beş alt bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2.1'de bir manifoldun ikinci mertebeden tanjant demetinin L_n^2 yapı grubunun genelleştirilmesi olan r-jet kavramı tanıtılmıştır. Bölüm 2.2'de bir manifoldun tanjant demetinin incelenmesinde kullanılan vektör demeti ve çatı demeti tanımları verilmiştir. Bölüm 2.3'te bir $\mathfrak{X}_n$ manifoldunun ikinci mertebeden $\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tanjant demeti ve ikinci mertebeden $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ kotanjant demeti tanımları verilmiş ve bu demetler yardımıyla bir diferansiyel operatörün elde edilişi gösterilmiştir. $T\left(\mathfrak{X}_n\right)\otimes\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tensör çarpım demetinin bir Γ kesiti şeklinde tanımlı genel konneksiyon kavramı verilmiş ve Γ genel konneksiyonuna göre D kovaryant diferansiyel operatörünün elde edilişi gösterilmiştir. Özel olarak regüler genel konneksiyon ve bu konneksiyona göre $\bar{D}$ temel kovaryant diferansiyel operatörü kavramları verilmiştir. Bir Γ regüler genel konneksiyonunun $'\Gamma$ kontravaryant kısmı ile $''\Gamma$ kovaryant kısmı tanıtılmış ve aynı zamanda birer klasik afin konneksiyonlar olan bu kısımlara göre $'\bar{D}$, $''\bar{D}$ temel kovaryant diferansiyellerin elde edilişi gösterilmiştir. Bir eğri boyunca kovaryant diferansiyel ve temel kovaryant diferansiyel tanımları yapılarak geodezik eğri tanımı elde edilmiştir. Son olarak genel konneksiyonların ve regüler genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formları incelenmiştir. Bölüm 2.4'te üzerinde bir genel konneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldun alt manifoldlarında indüklenmiş genel konneksiyon ve indüklenmiş regüler genel konneksiyonların kuruluşu incelenmiştir. Bir alt manifoldun geodezik alt manifold ya da flat alt manifold olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bölüm 2.5'te Weyl-Otsuki uzayları tanıtılmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümü elde edilen bulgulara ayrılmıştır. Bu bölümde, ilk olarak, ikinci bölümde elde edilen eşitlikler yardımıyla Weyl-Otsuki uzaylarında Gauss, Codazzi ve Künhe eşitliklerinin elde edilişi gösterilmiştir. Weyl-Otsuki manifoldlarında kongrüans eğrileri tanımlanmış ve bu eğriler, özel olarak, ortogonal olma koşulu altında incelenmiştir. Bu inceleme için, bir n-li ortogonal sistemin λ_{abc} Ricci dönme katsayıları kullanılmış ve bu katsayılar yardımıyla Γ genel konneksiyonunun belirlenebileceği gösterilmiştir. Bir n-li ortogonal sistemin bir birim tanjant vektör alanının paralelliği ile bu sistemin eğrilerinin geodezik olması koşulları, λ_{abc} katsayıları yardımıyla elde

edilmiştir. Ayrıca bir n-li ortogonal sistemin eğrilerinin normal ya da irrotasyonel olma koşulları incelenmiştir. Bu bölümde, son olarak, Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda bulunan eğrilik çizgilerini, konjüge eğrileri ve asimptotik eğrileri incelemek için Riemann manifoldlarındaki tanımlar Weyl-Otsuki manifoldlarına genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme sonucunda ortaya çıkan farklılıklar incelenmiş ve özellikle Riemann manifoldlarında birbirine denk olan eğrilik çizgileri tanımlarının Weyl-Otsuki manifoldlarında birbirine denk olmadıkları gösterilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, elde edilen sonuçların bir değerlendirmesi yapılmıştır.

SUMMARY

INVESTIGATION OF SOME SPECIAL CURVES IN WEYL-OTSUKI SPACES

This study is an investigation of congruences of curves, lines of curvature, conjugate lines and asymptotic lines in Weyl-Otsuki spaces.

The present study consists of four chapters. In the first chapter, a general evaluation of the studies about the theory of general connections and Weyl-Otsuki spaces is presented.

The second chapter includes five sections. In Section 2.1 the notion of r-jet which is a generalization of structure group L_n^2 of the tangent bundle of order 2 of a manifold is introduced. In Section 2.2 the definitions of vector bundles and frame bundles over a manifold that will be needed to investigate the tangent bundle of a manifold are given. In Section 2.3 for a manifold $\mathfrak{X}_n$, the definitions of $\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$, tangent bundle of order 2 of $\mathfrak{X}_n$, and $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$, cotangent bundle of order 2 of $\mathfrak{X}_n$, as well as a differential operator which is defined with these bundles are given. With respect to general connection Γ which is defined as a cross-section of tensor product bundle $T\left(\mathfrak{X}_n\right)\otimes\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$, the covariant differantial operator D is presented. Especially, the notions of regular general connections and the basic covariant differantial operator $\bar{D}$ which is defined with these connections are given. The contravariant and covariant parts of a regular general connection Γ which are denoted by $'\Gamma$ and $''\Gamma$, respectively, is presented and the basic covariant differantial operators $'\bar{D}$, $''\bar{D}$ with respect to these parts which are also classic affine connections are given. The definitions of covariant differentiation and basic covariant differentiation along a curve, as well as the definition of a geodesic curve are given. Finally, torsion forms and curvature forms of both general connections and regular general connections are presented. In Section 2.4 foundations of the induced general connections and the induced regular general connections of a submanifold in a Riemannian manifold with general connections are introduced. Moreover, necessary and sufficient conditions of a submanifold to be a geodesic submanifold or to be a flat submanifold are given. In Section 2.5 Weyl-Otsuki spaces are introduced.

The third chapter is devoted for some results of this study. In this chapter, firstly, by using some equations in the second chapter of this study; Gauss, Codazzi ve Künhe equations of Weyl-Otsuki spaces are written. Congruences of curves in Weyl-Otsuki manifolds are defined and these curves are particularly investigated under the orthogonally conditions. For this investigation, the Ricci's coefficients of rotation λ_{abc} of an orthogonal ennuple are used and it is proved that a general connection Γ is determined by these coefficients. By using the coefficients λ_{abc}, parallelism of the unit

tangent vector field of an orthogonal ennuple and the conditions of the curves of an orthogonal ennuple to be the geodesic curves of that ennuple are presented. Moreover, the conditions of the curves of an orthogonal ennuple to be normal or to be irrotational are discussed. In this chapter, finally, to investigate lines of curvature, conjugate lines and asymptotic lines in Weyl-Otsuki manifolds the definitions of these curves in Riemannian manifolds are generalized to Weyl-Otsuki manifolds. After these generalizations some differences of these definitions are presented and especially, it is proved that two kinds of definition of line of curvature which are equivalent in Riemannian manifolds are not equivalent in Weyl-Otsuki manifolds.

An evaluation of the results of this study is carried out in the fourth chapter.

1. GİRİŞ

Bir $\mathfrak{X}_n$ düzgün manifoldu üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi, $\mathfrak{X}_n$ üzerinde tanımlı tüm skaler alanların $C^\infty(\mathfrak{X}_n)$ cebiri üzerinde kontravaryant ve kovaryant mertebeli bir cebir olarak düşünülebilir. $\mathfrak{X}_n$ üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon bu cebir üzerinde kontravaryant derecesi 0 ve kovaryant derecesi 1 olan bir diferansiyel operatör tanımlar ve bu diferansiyel operatör kovaryant diferansiyel adını alır. Bilindiği gibi, $\mathfrak{X}_n$ üzerinde tanımlı bir vektör demetinin (vector bundle) herhangi bir kesitini (cross-section) sıfıra resmeden trivial diferansiyel operatör vardır [1]; ancak yukarıda belirtilen cebir söz konusu olduğunda bu trivial diferansiyel operatör, afin konneksiyonlardan türetilen bir kovaryant diferansiyel olarak düşünülemez. Bu diferansiyel operatörlerle ilgili genel bir konneksiyon teorisi oluşturma düşüncesiyle T. Otsuki genel konneksiyon (general connection) kavramını ortaya atmıştır, [2].

T. Otsuki bu çalışmasında genel konneksiyon kavramını, $\mathfrak{X}_n$'nin 2. mertebeden $\mathfrak{I}^2(\mathfrak{X}_n)$ tanjant demeti (tangent bundle) ve bunun duali olan 2. mertebeden $\mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n)$ kotanjant demeti (cotangent bundle) ile oluşturulan $T(\mathfrak{X}_n)\otimes\mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n)$ vektör demetinin bir $\Gamma=(P^i_j,\Gamma^i_{jk})$ kesiti şeklinde tanımlamıştır. Böylece $T(\mathfrak{X}_n)\otimes\mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n)$ vektör demetinin bir kesiti olan $(1,2)$ tipindeki herhangi bir tensör bir genel konneksiyon olarak düşünülebilmektedir. Yine bu çalışmada, genel konneksiyon tanımında geçen $P:T(\mathfrak{X}_n)\to T(\mathfrak{X}_n)$ homomorfizmasının bir izomorfizma olması durumunu incelemiş ve bu durumda genel konneksiyonu regüler genel konneksiyon şeklinde adlandırmıştır. P izomorfizmasının özel olarak özdeşlik izomorfizması olması durumunda Γ konneksiyonunun $T(\mathfrak{X}_n)$ tanjant demetinin bir klasik afin konneksiyonu olduğunu göstermiştir. Böylece T. Otsuki'nin klasik afin konneksiyonlar olarak ifade ettiği afin, projektif ve konformal konneksiyonlar ile $(1,2)$ tipindeki tensörler, genel konneksiyonların özel halleridir ve bunlara karşılık gelen kovaryant diferansiyel, yukarıda sözü edilen trivial diferansiyel operatördür.

Bilindiği gibi bir afin konneksiyonun lokal koordinatlara göre yazılan bileşenleri, koordinat dönüşümleri altında ikinci mertebeden kısmi türevleri içerdiğinden $(1,2)$ tipindeki bir tensör gibi davranmazlar. Ancak genel konneksiyon teorisinde $(1,2)$ tipindeki herhangi bir tensörün bir genel konneksiyon olarak düşünülebilmesi ve bir genel konneksiyon ile tanımlı diferansiyel operatörün bilinen diferansiyel kurallarına uymak zorunda olmayışı genel konneksiyonlar teorisinin gücünü ortaya koymaktadır. Afin konneksiyonların kısıtlayıcı özelliklerinin aksine genel konneksiyonlar ile çalışmak diferansiyel geometriyi kullanan matematiğin diğer dalları ile matematiksel fiziğe teorik anlamda daha serbest bir çalışma alanı kazandırmıştır.

T. Otsuki, bu çalışmasının devamı niteliğinde olan [3] ve [4]'te, genel konneksiyonlar ve regüler genel konneksiyonlar yardımıyla tanımlı, sırasıyla, kovaryant diferansiyel ve temel kovaryant diferansiyel ile büzülme arasındaki ilişkiyi ifade ederek geodezik eğrileri ve öz eğrileri incelemiştir. Ayrıca genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formlarını elde ederek, regüler genel konneksiyonların Ricci formülünü vermiştir.

T. Otsuki [5], ayrıca, genel konneksiyon tanımında geçen P homomorfizmasının, görüntü kümesi üzerinde bir izomorfizma olması durumunu incelemiş ve bu durumda genel konneksiyonu, normal genel konneksiyon şeklinde adlandırmıştır. Bu çalışmasında, normal genel konneksiyonları kullanarak normal kovaryant diferansiyeli tanımlamış ve bir normal genel konneksiyondan türetilebilecek bazı genel konneksiyonları tanıtmıştır. Genel konneksiyonların metrik genel konneksiyon olması durumunu [6] ve [7]'de incelemiş ve bir metrik genel konneksiyon ya da bir Levi-Civita konneksiyonundan elde edilen bazı genel konneksiyonların geometrik özelliklerini [8]'de ele almıştır. [9]'da, üzerinde bir normal genel konneksiyon tanımlı bir manifoldun temel eğrileri (basic curves) olarak tanımladığı eğrileri incelemiş ve bu eğrilerin geodezik olması durumunu incelemiştir. Normal genel konneksiyonların eğrilik tensörünü incelediği [10] ve [11]'de, üzerinde bir normal genel konneksiyon tanımlı bir uzayın Ricci formülünü ve Gauss eşitliğini vermiştir. Ayrıca [11]'de bir genel konneksiyondan indüklenmiş genel konneksiyon (induced general connections) kavramını tanıtmış ve [12]'de Ricci formülü ile indüklenmiş genel konneksiyon arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

T. Otsuki'nin genel konneksiyon teorisi ilk olarak 1963 yılında C.S. Houh [13] tarafından, üzerinde genel konneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldunun alt manifoldlarının incelenmesinde kullanılmıştır. C.S. Houh bu çalışmasında, bir Riemann manifold üzerinde tanımlı genel konneksiyondan indüklenmiş bir genel konneksiyonu alt manifold üzerinde tanımlayarak, bu konneksiyona göre kovaryant diferansiyel ile büzülme arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Yine bu çalışmasında, alt manifoldun geodezik ve flat olması koşullarını ifade etmiştir. Özel olarak, indüklenmiş genel konneksiyonun metrik genel konneksiyon olma durumunu incelemiş ve T. Otsuki'nin [8]'de incelediği $A\Gamma A$ genel konneksiyonunun eğrilik tensörü ile bu konneksiyondan indüklenmiş genel konneksiyonunun eğrilik tensörü arasındaki ilişkiyi göstermiştir.

T. Otsuki son olarak genel konneksiyonları fiziğin kara delik teorisine uygulamıştır. Bunun için ilk olarak [14]'te, üzerinde bir genel konneksiyon tanımlı olan ve geodezikleri yutan noktalar içeren bir uzayın kuruluşunu ele alarak, böyle bir uzayı belirli bir uzay-zaman metriği altında [15]'te incelemiştir. Ardından [16]'da, genel konneksiyonların singüler noktalarını ve üzerinde bir genel konneksiyon tanımlı bir manifoldun kara deliklerini incelemiştir.

Genel konneksiyon teorisi ilk olarak 1978'de A. Moor [17] tarafından Weyl uzayları ile ilişkilendirilmiştir. A. Moor bu çalışmasında, γ_k bir kovaryant vektör olmak üzere $D_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$ eşitliğini sağlayan bir g_{ij} metrik tensörü tarafından belirlenen bir genel konneksiyon tanımlayarak Weyl metriği ile genel konneksiyon kavramlarını kendi içinde birleştirmiş ve böylece Weyl-Otsuki teorisini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bu çalışmada, konneksiyon katsayılarını belirlemiş, g_{ij} ile büzülmüş öz vektörlerin temel kovaryant türevlerini incelemiş ve Dg_{ij} kovaryant diferansiyelinin uzayın bir eğrisi boyunca bir öz vektör olması için gerek ve yeter koşulları ifade etmiştir. Bu çalışmanın devamı niteliğinde olan [18]'de Weyl-Otsuki uzaylarında bir vektörün paralel yer değiştirme sonucunda uzunluğunun değişimini incelemiş ve bu incelemesini simetrik ve anti-simetrik tensörlere genelleştirmiştir. Ayrıca [19]'da, Weyl-Otsuki uzaylarında geodezik farklılaşmaları kontravaryant ve kovaryant tipte geodezik eğriler için ayrı ayrı incelemiştir.

1981 yılında D.F. Nadj [20], Ricci özdeşliğini farklı bir yöntemle Weyl-Otsuki uzaylarına genelleştirmiş ve yine bu yöntemle Bianchi özdeşliğini elde etmiştir. Yine aynı yılda [21], Weyl-Otsuki uzayında $Dg_{ij} = 0$ özel durumunu incelemiş ve bu durumda Riemann-Otsuki uzayı adını alan uzayların alt uzaylarının hangi koşullar altında bir Riemann-Otsuki uzayı olduğunu araştırmıştır. [22]'de, bir Riemann-Otsuki uzayının alt uzayına ortogonal olan uzayın genel konneksiyonunu tanımlamıştır. [23]'te Riemann-Otsuki uzaylarında kontravaryant ve kovaryant tipte otoparalel eğrileri incelemiştir. [24]'te genel konneksiyonun kovaryant kısmı ile Riemann-Otsuki uzaylarında Ricci formülünü elde ederek bu uzayların Gauss, Codazzi ve Künhe eşitliklerini vermiştir. Son olarak [25] ve [26]'da sırasıyla, Riemann-Otsuki ve Weyl-Otsuki uzaylarının Frenet formüllerini bir vektörün kontravaryant ve kovaryant bileşenleri için ayrı ayrı incelemiştir.

Bu tez çalışmasında yukarıda sözü edilen çalışmalar ışığında Weyl-Otsuki uzaylarında kongrüans eğrileri, eğrilik çizgileri, konjüge ve asimptotik eğrilerin incelenmesi amaçlanmaktadır.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde T. Otsuki'nin geliştirdiği genel konneksiyon teorisi tanıtılacaktır. Bunun için ilk olarak, genel konneksiyon tanımında geçen ikinci mertebeden tanjant demetlerin özelliklerinin verilebilmesi için r-jet kavramı ve vektör demetleri ele alınacaktır. İkinci olarak genel konneksiyon tanımı verilerek bir genel konneksiyona göre kovaryant diferansiyelin elde edilişi gösterilecektir. Özel olarak regüler genel konneksiyon ve bu konneksiyona göre temel kovaryant diferansiyel kavramları ele alınacak ve böylece kovaryant diferansiyel ve temel kovaryant diferansiyel yardımıyla bir eğri boyunca türev kavramı incelenecektir. Genel konneksiyonların ve regüler genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formları verildikten sonra bu formlar yardımıyla eğrilik tensörleri elde edilecektir. Daha sonra üzerinde genel konneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldun alt manifoldları üzerinde indüklenmiş genel konneksiyonun kuruluşu incelenecek ve son olarak Weyl-Otsuki uzayı tanıtılacaktır.

2.1. JET MANİFOLDLAR

Bu bölümde bir manifoldun ikinci mertebeden tanjant demetinin L_n^2 yapı grubunun genelleştirilmesi olan r-jet kavramı tanıtılacaktır, [27].

2.1.1. Düzgün Dönüşümlerin Jetleri

Bilindiği gibi bir $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun i. kısmi türevi $\partial_i f = \partial f / \partial x^i$ ile gösterilir. Eğer $1 \le i_1, i_2, ..., i_k \le n$ olmak üzere $I = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ bir pozitif tam sayı kümesi ise

$$\partial_I = \partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \tag{2.1.1}$$

geçerlidir. Kısmi türev operatörü değişmeli olduğundan sol yandaki sembol anlamlıdır.

Yardımcı Teorem 2.1.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $V \subset \mathbb{R}^m$ açık kümeler, $f : V \to \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $g = \left(g^\sigma\right)$, $1 \le \sigma \le m$, U'dan V'ye bir düzgün dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\partial_{i_s} \dots \partial_{i_2} \partial_{i_1} \left(f \circ g\right)(t) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{\left(I_1, I_2, \dots, I_k\right)} \partial_{\sigma_k} \dots \partial_{\sigma_2} \partial_{\sigma_1} f\left(g(t)\right) \partial_{I_k} g^{\sigma_k}(t) .. \partial_{I_2} g^{\sigma_2}(t) \partial_{I_1} g^{\sigma_1}(t) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

eşitliği geçerlidir; burada ikinci toplam, $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ kümesinin tüm $\left(I_1, I_2, \dots I_k\right)$ parçalanmalarına genişletildiği şeklinde anlaşılmalıdır, [27].

Tanım 2.1.2. (2.1.2) formülüne **yüksek mertebeden zincir kuralı** ya da sadece **zincir kuralı** denir.

Tanım 2.1.3. $\mathfrak{X}_n$ ve $\mathfrak{X}_m$ iki düzgün manifold, $x \in \mathfrak{X}_n$ bir nokta ve W_1, W_2 x'in birer komşuluğu olsun. C^0 sınıfından $f_1 : W_1 \to \mathfrak{X}_m$ ve $f_2 : W_2 \to \mathfrak{X}_m$ dönüşümleri $f_1(x) = f_2(x)$ eşitliğini sağlıyor ise bu iki dönüşüme x noktasında **0. mertebeden tanjanttır** denir. $r \ge 1$ bir tam sayı olmak üzere C^r sınıfından $f_1 : W_1 \to \mathfrak{X}_m$ ve $f_2 : W_2 \to \mathfrak{X}_m$ dönüşümleri

i) 0. mertebeden tanjant $\left(f_1(x) = f_2(x)\right)$ ve

ii) x noktasında bir (U, φ), $\varphi = \left(x^i\right)$ ve $f_1(x) = f_2(x)$ noktasında (V, ψ), $\psi = \left(y^\sigma\right)$ haritaları vardır öyle ki $U \subset W_1 \cap W_2$, $f_1(U), f_2(U) \subset V$ ve $\partial_I = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k}$ olmak üzere her $k \le r$ için

$$\partial_I \left(\psi f_1 \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right) = \partial_I \left(\psi f_2 \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right) \tag{2.1.3}$$

eşitliğini sağlıyor ise bu iki dönüşüme x noktasında **r. mertebeden tanjanttır** denir. Eğer bu dönüşümler her r için r. mertebeden tanjant ise bunlara ∞ **mertebeden tanjanttır** denir.

(2.1.3) eşitliğini bileşenler cinsinden ifade etmek istersek: $\psi f_1 \varphi^{-1} = \left(y^\sigma f_1 \varphi^{-1} \right)$, $\psi f_2 \varphi^{-1} = \left(y^\sigma f_2 \varphi^{-1} \right)$ yazılırsa f_1 ve f_2 dönüşümleri x noktasında r. mertebeden tanjanttır ancak ve ancak $f_1(x) = f_2(x)$ ve her $k = 1, 2, ..., r$ için

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \left(y^\sigma f_1 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right) = \partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \left(y^\sigma f_2 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right), \qquad (2.1.4)$$

burada $1 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq n$ ve $1 \leq \sigma \leq m$ dir.

Eğer f_1, f_2 x noktasında r. mertebeden tanjant ise x noktasında herhangi bir $\left(\bar{U}, \bar{\varphi} \right)$, $\bar{\varphi} = \left(\bar{x}^i \right)$ haritası ve $f_1(x) = f_2(x)$ noktasında herhangi bir $\left(\bar{V}, \bar{\psi} \right)$, $\bar{\psi} = \left(\bar{y}^\sigma \right)$ haritası için $k = 1, 2, ..., r$ olmak üzere

$$\partial^k \left(\bar{\psi} f_1 \bar{\varphi}^{-1} \right) \left(\bar{\varphi}(x) \right) = \partial^k \left(\bar{\psi} f_2 \bar{\varphi}^{-1} \right) \left(\bar{\varphi}(x) \right) \qquad (2.1.5)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliği görebilmek için bileşenler cinsinden yazarsak

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \left(\bar{y}^\sigma f_1 \bar{\varphi}^{-1} \right) \left(\bar{\varphi}(x) \right) = \partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \left(\bar{y}^\sigma \psi^{-1} \circ \psi f_1 \varphi^{-1} \circ \varphi \bar{\varphi}^{-1} \right) \left(\bar{\varphi}(x) \right)$$

eşitliği elde edilir, çünkü sağ yan Yardımcı Teorem 2.1.1.'den $\partial_{j_1} \left(y^\nu f_1 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$, $\partial_{j_1} \partial_{j_2} \left(y^\nu f_1 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$, ... , $\partial_{j_1} \partial_{j_2} ... \partial_{j_k} \left(y^\nu f_1 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$ değişkenleri cinsinden bir polinomdur. Böylece $\partial_{i_1} \partial_{i_2} ... \partial_{i_k} \left(\bar{y}^\sigma f_2 \bar{\varphi}^{-1} \right) \left(\bar{\varphi}(x) \right)$ türevi de $\partial_{j_1} \left(y^\nu f_2 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$, $\partial_{j_1} \partial_{j_2} \left(y^\nu f_2 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$, ... , $\partial_{j_1} \partial_{j_2} ... \partial_{j_k} \left(y^\nu f_2 \varphi^{-1} \right) \left(\varphi(x) \right)$ değişkenleri cinsinden aynı polinom ile ifade edilebilir. Böylece (2.1.5) eşitliği (2.1.4)'ten elde edilir. Sonuç olarak (2.1.3) ya da (2.1.4) eşitlikleri harita seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.1.4. $x \in \mathfrak{X}_n$, $y \in \mathfrak{X}_m$ sabit iki nokta ve W x'in bir komşuluğu olmak üzere C^r sınıfından $f(x) = y$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}_m$ dönüşümlerinin kümesi $C^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m \right)$ ile gösterilsin. $C^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m \right)$ üzerinde "f ve g, x noktasında r. mertebeden tanjanttır" bağıntısı açıktır ki **yansımalı, geçişken, simetriktir** ve böylece bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının belirttiği denklik sınıflarına **kaynağı** x

ve hedefi y **olan r-jetler** denir. Bir $f \in C^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right)$ dönüşümünün ait olduğu denklik sınıfına f **'in** x **'deki r-jeti** denir ve $J^r_x f$ ile gösterilir.

Kaynağı $x \in \mathfrak{X}_n$ ve hedefi $y \in \mathfrak{X}_m$ olan r-jetlerin kümesini $J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right)$ ile gösteriyoruz. Açıktır ki, $J^0_x f = (x, y)$ ve $J^0_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right) = \{(x, y)\}$ dir.

Şimdi $J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right)$ üzerinde C^r sınıfından bir düzgün yapı tanımlayalım. x noktasında bir harita (U, φ), $\varphi = \left(x^i\right)$ ve y noktasında bir harita (V, ψ), $\psi = \left(y^\sigma\right)$ olsun. Her $J^r_x \in J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right)$ için

$$y^\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_k}\left(J^r_x f\right) = \partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_k}\left(y^\sigma f \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right) \tag{2.1.6}$$

yazalım, burada $1 \le k \le r$, $1 \le \sigma \le m$ ve $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n$ dir. $y^\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ 'lar $J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right)$ üzerinde reel değerli fonksiyonlardır. Böylece

$$\chi^r_{\varphi,\psi}\left(J^r_x f\right) = \left(y^\sigma_{i_1}\left(J^r_x f\right), y^\sigma_{i_1 i_2}\left(J^r_x f\right), \ldots, y^\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_r}\left(J^r_x f\right)\right)$$

yazabiliriz. Bu eşitlik yardımıyla bir $\chi^r_{\varphi,\psi} : J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m\right) \to \mathbb{R}^N$ dönüşümü bileşenler cinsinden tanımlanmış olur; burada

$$N = m\left(\binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+r-1}{r}\right) = m\left(\binom{n+r}{n} - 1\right) \tag{2.1.7}$$

dir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 2.1.1. yardımıyla farklı bir gösterimi de kullanabiliriz: $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n$ olmak üzere $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ bir pozitif tam sayı kümesi ise (2.1.1) eşitliğinde kullanılan ∂_I yardımıyla (2.1.6) eşitliği

$$y^\sigma_I\left(J^r_x f\right) = \partial_I\left(y^\sigma f \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.1.5. $\mathfrak{X}_n$ ve $\mathfrak{X}_m$ iki düzgün manifold olsun. x noktasında her bir (U,φ), $\varphi=(x^i)$ ve y noktasında her bir (V,ψ), $\psi=(y^\sigma)$ haritaları için $\left(J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m),\chi^r_{\varphi,\psi}\right)$, $\chi^r_{\varphi,\psi}\left(J^r_x f\right)=\left(y^\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_k}\right)$ $J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m)$ üzerinde bir harita olacak şekilde $J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m)$ üzerinde bir ve yalnız bir düzgün yapı vardır, [27].

$\left(J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m),\chi^r_{\varphi,\psi}\right)$ haritasına, (U,φ) ve (V,ψ) haritaları ile **ilintilidir** (associated) denir.

Sonuç 2.1.6. $J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m)$ üzerindeki manifoldun topolojisi, $\mathbb{R}^N$ Öklid uzayının topolojisidir.

2.1.2. Jetlerin Bileşkesi

Tanım 2.1.7. $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_m$ ve $\mathfrak{X}_l$ düzgün manifoldlar olsun. $A=J^r_x f\in J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m)$ ve $B=J^r_y g\in J^r_{(y,z)}(\mathfrak{X}_m,\mathfrak{X}_l)$ r-jetleri için $f(x)=y$ ve $g(y)=z$ olacak şekilde $g\circ f$ bileşke dönüşümü tanımlı ise

$$B\circ A=J^r_x(g\circ f)$$

şeklinde tanımlı $B\circ A$ r-jetine A ve B'nin **bileşkesi** denir.

$J^r_{(x,y)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m)\times J^r_{(y,z)}(\mathfrak{X}_m,\mathfrak{X}_l)$ kümesinden $J^r_{(x,z)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_l)$ kümesi içine tanımlı $(A,B)\rightarrow B\circ A$ dönüşümüne r-jetlerin **bileşke işlemi** adı verilir.

Şimdi $J^r_x(g\circ f)$'in koordinatlarını A ve B'nin koordinatları ile belirleyelim. x noktasında bir harita (U,φ), $\varphi=(x^i)$ ve $y=f(x)$ noktasında bir harita (V,ψ), $\psi=(y^\sigma)$ ve $z=g(y)$ noktasında bir harita (W,η), $\eta=(z^A)$ olsun. Teorem 2.1.5.'ten $\left(J^r_{(x,z)}(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_l),\chi^r_{\varphi,\eta}\right)$, $\chi^r_{\varphi,\eta}\left(J^r_x(g\circ f)\right)=w^A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ haritası elde edilir öyle ki

$$\chi^r_{\varphi,\eta}\left(J^r_x\left(g\circ f\right)\right)=\left(\partial_{i_1}\left(z^A gf\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right),\partial_{i_1}\partial_{i_2}\left(z^A gf\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right),\right.$$
$$\left.\ldots,\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_r}\left(z^A gf\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right)\right)$$

yani her $k=1,2,...,r$ için

$$w^A_{i_1i_2\ldots i_k}\left(J^r_x\left(g\circ f\right)\right)=\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_k}\left(z^A gf\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right)$$
$$=\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_k}\left(z^A g\psi^{-1}\circ\psi f\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(x)\right)$$

dir. Yardımcı Teorem 2.1.1.'deki yüksek mertebeden zincir kuralını bu eşitliğe uygulayalım. İlgili haritaları $\left(J^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right),\chi^r_{\varphi,\psi}\right)$, $\chi^r_{\varphi,\psi}\left(J^r_x f\right)=y^{\sigma}_{i_1i_2\ldots i_k}$ ve $\left(J^r_{(y,z)}\left(\mathfrak{X}_m,\mathfrak{X}_l\right),\chi^r_{\psi,\eta}\right)$, $\chi^r_{\psi,\eta}\left(J^r_x g\right)=z^A_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$ ile gösterelim. Böylece

$$w^A_{i_1i_2\ldots i_k}\left(J^r_x\left(g\circ f\right)\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{s}\sum_{(I_1,I_2,\ldots I_k)} z^A_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}\left(J^r_x g\right)y^{\sigma_k}_{I_k}\left(J^r_x f\right)\ldots y^{\sigma_2}_{I_2}\left(J^r_x f\right)y^{\sigma_1}_{I_1}\left(J^r_x f\right)$$

ya da kısaca

$$w^A_{i_1i_2\ldots i_k}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{(I_1,I_2,\ldots I_k)} z^A_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}y^{\sigma_k}_{I_k}\ldots y^{\sigma_2}_{I_2}y^{\sigma_1}_{I_1}\,. \tag{2.1.8}$$

elde edilir.

Şimdi (2.1.4)'ten, eğer $J^r_y g=J^r_y g'$ ve $J^r_x f=J^r_x f'$ ise $J^r_x\left(g\circ f\right)=J^r_x\left(g'\circ f'\right)$ bulunur ki bu ise $J^r_x\left(g\circ f\right)$ r-jetinin sadece A ve B'ye bağlı olması demektir.

r-jetlerin bileşke işlemi **assosyatiftir** ve (2.1.8) eşitliği r-jetlerin bileşke formülüdür. Şu halde aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.1.8. r-jetlerin bileşke işlemi düzgündür, [27].

2.1.3. Regüler ve Tersinir Jetler

id_X ve id_Y, sırasıyla, $\mathfrak{X}_n$ ve $\mathfrak{X}_m$ manifoldlarının özdeşlik dönüşümleri olsun. Şu halde $J_x^r id_X \in J_{(x,x)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_n)$ ve $J_y^r id_Y \in J_{(y,y)}^r(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{X}_m)$, olmak üzere herhangi bir $A = J_x^r f \in J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ için $J_y^r id_Y \circ A = J_y^r id_Y \circ J_x^r f$, $A \circ J_x^r id_X = J_x^r f \circ J_x^r id_X$ bileşkeleri tanımlıdır ve

$$J_y^r id_Y \circ A = A \quad , \quad A \circ J_x^r id_X = A$$

dır. Öte yandan her $A \in J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ r-jeti için

$$B \circ A = J_x^r id_X$$

olacak şekilde bir $B \in J_{(y,x)}^r(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{X}_n)$ r-jeti bulunabiliyorsa A'ya **regüler** denir. Her $A \in J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ r-jeti için

$$B \circ A = J_x^r id_X \quad , \quad A \circ B = J_y^r id_Y$$

olacak şekilde bir $B \in J_{(y,x)}^r(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{X}_n)$ r-jeti bulunabiliyorsa A'ya **tersinir** denir.

Teorem 2.1.9. a) Bir $A = J_x^r f \in J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ r-jeti regülerdir ancak ve ancak f dönüşümü x noktasında bir daldırmadır (immersion).
b) Bir $A = J_x^r f \in J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ r-jeti tersinirdir ancak ve ancak f dönüşümü x'in bir komşuluğunda bir diffeomorfizmadır, [27].

$J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$'nin regüler r-jetlerinden oluşan küme $immJ_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ ile gösterilirse bu küme $J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$'nin bir açık alt kümesidir. Açıktır ki, determinant fonksiyonunun sürekli oluşu kullanılarak (w_j^ν) matrislerinin maksimal rankı n olmak üzere $\left(w_{i_1}^\sigma, w_{i_1 i_2}^\sigma, \ldots, w_{i_1 i_2 \ldots i_r}^\sigma\right) \in \mathbb{R}^N$ noktalarından oluşan W kümesi $\mathbb{R}^N$'in bir açık alt kümesidir. Şu halde x noktasında bir (U, φ), y noktasında bir (V, ψ) ve bunlarla ilgili olarak $J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m)$ üzerinde $\left(J_{(x,y)}^r(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{X}_m), \chi_{\varphi,\psi}^r\right)$, $\chi_{\varphi,\psi}^r = \left(y_{i_1}^\sigma, y_{i_1 i_2}^\sigma, \ldots, y_{i_1 i_2 \ldots i_r}^\sigma\right)$

haritaları kullanılarak $\chi^r_{\varphi,\psi}$ sürekli dönüşümleri yardımıyla $immJ^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right)$ kümesi W 'nın ters görüntüsü olarak elde edilir.

$immJ^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right)\neq\varnothing$ ancak ve ancak $\dim\mathfrak{X}_n=n\leq\dim\mathfrak{X}_m=m$ dir. Eğer $n=m$ ise $immJ^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right)$ kümesi tersinir r-jetlerden oluşur. Tersine $immJ^r_{(x,y)}\left(\mathfrak{X}_n,\mathfrak{X}_m\right)$ kümesi bir tersinir r-jet içerirse x ve y noktaları aynı boyutlu komşuluklara sahiptir.

2.1.4. Diferansiyel Gruplar

r,n iki pozitif tam sayı olmak üzere

$$L^r_n=immJ^r_{(0,0)}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$$

olsun. Şu halde L^r_n, $J^r_{(0,0)}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ jet manifoldunun tersinir r-jetlerinin kümesidir. $J^r_{(0,0)}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ üstünde $a^i_{j_1 j_2\cdots j_k}$ kanonik koordinatlarını L^r_n 'ye kısıtlayarak, L^r_n üstünde

$$a^i_{j_1 j_2\cdots j_k}\left(J^r_0\alpha\right)=D_{j_1}D_{j_2}...D_{j_k}\alpha^i\left(0\right) \tag{2.1.9}$$

kanonik koordinatlarını elde ederiz; burada $\alpha=\left(\alpha^i\right)$, $1\leq i\leq n$, $1\leq k\leq r$, $1\leq j_1\leq j_2\leq...\leq j_k\leq n$ dir. Bu koordinatlarda

$$L^r_n=\left\{J^r_0\alpha\in J^r_{(0,0)}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)\middle|\ \det a^i_j\left(J^r_0\alpha\right)\neq 0\right\}$$

eşitliği geçerlidir.

(2.1.9)'daki kanonik koordinatlar (2.1.8)'deki gibi yazılabilir. Yani $I=\left\{i_1,i_2,...,i_k\right\}$, $1\leq i_1,i_2,...,i_k\leq n$ olacak şekilde bir pozitif tam sayılar kümesi ise

$$a^i_I=a^i_{j_1 j_2\cdots j_k} \tag{2.1.10}$$

yazarız.

Jetlerin bileşkesi, L_n^r üstünde

$$L_n^r \times L_n^r \ni (A,B) \to A \circ B \in L_n^r \tag{2.1.11}$$

şeklinde bir **işlem** tanımlar. Bu işlem **assosyatiftir**. $J_0^r id_{\mathbb{R}^n} \in L_n^r$ r-jeti **birim** ve her $A \in L_n^r$, $A = J_0^r \alpha$ r-jetinin $A^{-1} = J_0^r \alpha^{-1}$ şeklinde tek bir tersi vardır. Böylece (2.1.11), L_n^r üstünde bir **grup yapısı** tanımlar. r-jetlerin bileşkeleri düzgün olduğundan L_n^r bir **Lie grubudur**.

Tanım 2.1.10. (2.1.11) ile tanımlı bu Lie grubuna $\mathbb{R}^n$'in **r. diferansiyel grubu** ya da sadece **diferansiyel grubu** denir.

(2.1.7)'den ise

$$\dim L_n^r = n\left(\binom{n+r}{n} - 1\right)$$

bulunur. Dikkat edilirse L_n^1, $GL(n,\mathbb{R})$ **genel lineer grubuna** kanonik olarak özdeştir.

r-jet bileşke formülü ve (2.1.9), (2.1.10) kanonik koordinatları kullanılarak (2.1.11) grup işlemini tam olarak ifade edebiliriz: $A,B \in L_n^r$ olmak üzere $A = J_0^r \alpha$, $B = J_0^r \beta$, $C = A \circ B = J_0^r(\alpha \circ \beta)$, ve $a^k_{i_1 i_2 \ldots i_s} = a^k_{i_1 i_2 \ldots i_s}(J_0^r \alpha)$, $b^k_{i_1 i_2 \ldots i_s} = a^k_{i_1 i_2 \ldots i_s}(J_0^r \beta)$, $c^k_{i_1 i_2 \ldots i_s} = a^k_{i_1 i_2 \ldots i_s}(J_0^r(\alpha \circ \beta))$ ise

$$c^k_{i_1 i_2 \ldots i_s} = \sum_{p=1}^{s} \sum_{(I_1, I_2, \ldots I_p)} a^k_{j_1 j_2 \ldots j_p} b^{j_1}_{I_1} b^{j_2}_{I_2} \ldots b^{j_p}_{I_p}$$

yazılır ve burada ikinci toplam $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$ kümesinin tüm $(I_1, I_2, \ldots, I_p)$ parçalanışlarına genişletilmiştir.

Örnek 2.1.11. (L_n^2'de grup işlemi) Uygulamada diferansiyel grupların grup operasyonu için tam harita gösterimlerine gereksinim duyulur. Tanım kullanılarak L_n^2 grubu için kanonik koordinatlar cinsinden formülleri türetebiliriz. $A,B \in L_n^2$ iki 2-jet olsun. $U,V,W \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $0 \in \mathbb{R}^n$ orijinin üç komşuluğu ve $A = J_0^2\alpha$, $B = J_0^2\beta$ olacak şekilde $\alpha : U \to V$, $\beta : V \to W$ iki diffeomorfizma olsun. $\mathbb{R}^n$ üstünde (aynı şekilde U , V ve W üstünde) kanonik koordinatları $\left(x^i\right)$ ile gösterelim. Bileşenler cinsinde $\alpha = \left(x^i\alpha\right)$, $\beta = \left(x^i\beta\right)$ yazalım ve U'dan W içine $\gamma = \beta \circ \alpha$, $\gamma = \left(x^i\gamma\right)$ diffeomorfizmasını düşünelim. Şu halde A ve B'nin L_n^2'deki çarpımı $C = J_0^2\gamma$ 2-jeti dir. C'nin kanonik koordinatlarını elde etmek için γ'nın bileşenlerinin $0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında 2. mertebeye kadar tüm kısmi türevlerini hesaplamalıyız. Bu diffeomorfizmanın bir $x \in U$ noktasında bileşenlerini türetirsek,

$$
\begin{aligned}
\partial_{j_1}\left(x^i\gamma\right)(x) &= \partial_{j_1}\left(x^i\beta\circ\alpha\right)(x) = \partial_k\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(x)\right)\partial_{j_1}\left(x^k\alpha\right)(x) \\
\partial_{j_2}\partial_{j_1}\left(x^i\gamma\right)(x) &= \partial_{j_2}\partial_{j_1}\left(x^i\beta\circ\alpha\right)(x) \\
&= \partial_{k_2}\partial_{k_1}\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(x)\right)\partial_{j_2}\left(x^{k_2}\alpha\right)(x)\partial_{j_1}\left(x^{k_1}\alpha\right)(x) \\
&\quad + \partial_k\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(x)\right)\partial_{j_2}\partial_{j_1}\left(x^k\alpha\right)(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. $x = \alpha(x) = 0$ eşitliği yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\partial_{j_1}\left(x^i\gamma\right)(0) &= \partial_k\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(0)\right)\partial_{j_1}\left(x^k\alpha\right)(0), \\
\partial_{j_2}\partial_{j_1}\left(x^i\gamma\right)(0) &= \partial_{k_2}\partial_{k_1}\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(0)\right)\partial_{j_2}\left(x^{k_2}\alpha\right)(0)\partial_{j_1}\left(x^{k_1}\alpha\right)(0) \\
&\quad + \partial_k\left(x^i\beta\right)\left(\alpha(0)\right)\partial_{j_2}\partial_{j_1}\left(x^k\alpha\right)(0),
\end{aligned}
$$

ya da bunlara eşdeğer olan

$$
\begin{aligned}
a^i_{j_1}\left(J_0^2\gamma\right) &= a^i_k\left(J_0^2\beta\right).a^k_{j_1}\left(J_0^2\alpha\right), \\
a^i_{j_2j_1}\left(J_0^2\gamma\right) &= a^i_{k_2k_1}\left(J_0^2\beta\right).a^{k_2}_{j_2}\left(J_0^2\alpha\right).a^{k_1}_{j_1}\left(J_0^2\alpha\right) + a^i_k\left(J_0^2\beta\right).a^k_{j_2j_1}\left(J_0^2\alpha\right),
\end{aligned}
$$

eşitlik bulunur. Bu formülleri ise

$$
\begin{aligned}
c^i_{j_1} &= b^i_k a^k_{j_1} \\
c^i_{j_2j_1} &= b^i_{k_2k_1} a^{k_2}_{j_2} a^{k_1}_{j_1} + b^i_k a^k_{j_2j_1}
\end{aligned}
\qquad (2.1.12)
$$

şeklinde kısa olarak ifade edebiliriz. (2.1.12) formülleri L_n^2 diferansiyel grubunun kanonik koordinatlar cinsinden **grup işleminin denklemleridir**.

2.2. VEKTÖR DEMETLERİ

Bu bölümde bir manifoldun tanjant demetlerinin incelenmesinde kullanılacak olan vektör demeti ve çatı demeti kavramları tanıtılacaktır, [1].

2.2.1. Vektör Demetleri

Tanım 2.2.1. E, $\mathfrak{X}_n$ iki düzgün manifold ve $\pi : E \to \mathfrak{X}_n$, üzerine düzgün bir dönüşüm olsun. $\mathfrak{X}_n$'nin bir $\{U, V, W, ...\}$ açık örtülüşü ve bir $\{\varphi_U, \varphi_V, \varphi_W, ...\}$ dönüşüm kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $(E, \mathfrak{X}_n, \pi, \mathbb{R}^r)$'ye $\mathfrak{X}_n$ üzerinde **r-boyutlu reel vektör demeti** denir ve kısaca E ile gösterilir:

i) Her $\varphi_U : U \times \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(U)$ dönüşümü bir diffeomorfizma olup, her $x \in U$, $w \in \mathbb{R}^r$ için

$$\pi \circ \varphi_U(x, w) = x.$$

ii) Herhangi bir sabit $x \in U$ için

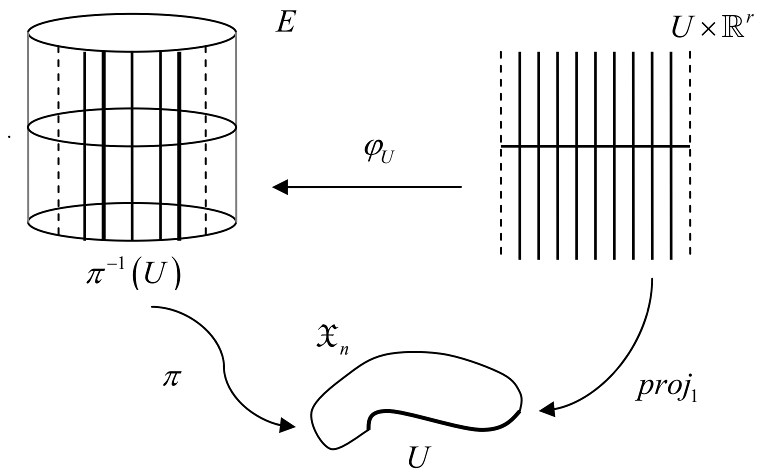
$$\varphi_{U,x}(w) = \varphi_U(x, w), \qquad w \in \mathbb{R}^r$$

şeklinde tanımlı $\varphi_{U,x} : \mathbb{R}^r \to \pi^{-1}(x)$, bir homeomorfizmadır.

iii) $U \cap V \neq \varnothing$ iken, $\forall x \in U \cap V$ için $\mathbb{R}^r$'nin bir

$$g_{VU}(x) = \varphi_{U,x}^{-1} \circ \varphi_{V,x} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$$

lineer otomorfizması yardımıyla $g_{VU} : U \cap V \to GL(r, \mathbb{R})$, bir düzgün dönüşümdür (bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1: $\mathfrak{X}_n$ üzerinde r-boyutlu reel vektör demeti

Burada $\mathfrak{X}_n$ 'ye **baz uzayı**, E 'ye **tümel uzayı**, π 'ye **izdüşüm dönüşümü** denir. Her $x \in \mathfrak{X}_n$ için $E_x = \pi^{-1}(x)$ kümesi, $\varphi_{U,x}$ dönüşümleri yardımıyla $\mathbb{R}^r$ 'ye homeomorfik olup E vektör demetinin x noktasındaki **lifi (fibre)** adını alır. Böylece bir E vektör demeti, lokal olarak $\mathfrak{X}_n \times \mathbb{R}^r$ uzayına diffeomorfiktir.

Koşul ii)'den kolayca görülebileceği gibi, $x \in U \cap V$ olmak üzere $w_U, w_V \in \mathbb{R}^r$ vektörlerinin

$$\varphi_U(x, w_U) = \varphi_V(x, w_V) \tag{2.2.1}$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul bir $g_{VU}(x) \in GL(r, \mathbb{R})$ için

$$w_U = w_V \cdot g_{VU}(x) \tag{2.2.2}$$

olmasıdır. Koşul ii)'deki g_{VU} dönüşümlerine E vektör demetinin **koordinat dönüşüm fonksiyonları** ve $GL(r, \mathbb{R})$ grubuna da E vektör demetinin **yapı grubu** adı verilir. Yine koşul ii)'den kolayca görülebileceği gibi, g_{VU} koordinat dönüşüm fonksiyonları

$$g_{UU}(x) = 1_G$$
$$g_{VU}(x) = (g_{UV}(x))^{-1}$$
$$g_{VW}(x) = g_{VU}(x)\, g_{UW}(x)$$

özelliklerini sağlar. $\mathbb{R}^r \times GL(r,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^r ; (w_V , g_{VU}) \to w_V \cdot g_{VU}$ şeklinde tanımlı ve

- $\forall w_V \in \mathbb{R}^r$ ve $\forall g_{VU}, g_{UW} \in G$ için $w_V \cdot (g_{VU} g_{UW}) = (w_V \cdot g_{VU}) \cdot g_{UW}$
- $\forall w_V \in \mathbb{R}^r$ ve $1_G \in GL(r,\mathbb{R})$ için $w_V \cdot 1_G = w_V$

özelliklerini sağlayan "$\cdot$" işlemine göre $GL(r,\mathbb{R})$ grubu $\mathbb{R}^r$ üzerinde bir **sağ etkimedir**.

Tanım 2.2.2. $(E, \mathfrak{X}_n, \pi, \mathbb{R}^r)$ bir vektör demeti olsun. Bir $s : \mathfrak{X}_n \to E$ düzgün dönüşümü $\pi \circ s = I_{\mathfrak{X}_n}$ koşulunu sağlıyorsa s'ye bu vektör demetinin bir **kesiti** adı verilir ve tüm kesitlerin oluşturduğu vektör uzayı $\Psi(E)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.3.(Tanjant ve Kotanjant Demetler) $\mathfrak{X}_n$ düzgün bir manifold ve $x \in \mathfrak{X}_n$ noktasının bir koordinat komşuluğu (U, u^i) olsun. x noktasında $T_x(\mathfrak{X}_n)$ tanjant uzayının kanonik bazı $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_x \right\}$ olmak üzere, her $\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_x \in T_x(\mathfrak{X}_n)$ için üzerine ve düzgün bir

$$\pi : T(\mathfrak{X}_n) = \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} T_x(\mathfrak{X}_n) \to \mathfrak{X}_n$$
$$(x, \xi) = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_x \to x$$

izdüşüm dönüşümü tanımlıdır. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir bazı $\{e_i\}$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$'de $w_U = w_U{}^i e_i$ ve $w_V = w_V{}^i e_i$ vektörleri için

$$\varphi_U(x, w_U) = w_U{}^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)_x , \qquad \varphi_V(x, w_V) = w_V{}^i \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \right)_x$$

diffeomorfizmaları tanımlıdır. $x \in U \cap V$ noktasının (U, u^i) ve (V, v^i) koordinat komşulukları için

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \tag{2.2.3}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda (2.2.1)'den

$$\varphi_U\left(x,w_U\right)=w_U{}^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x=w_V{}^j\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)_x=\varphi_V\left(x,w_V\right)$$

eşitliğinde (2.2.3) kullanılırsa

$$w_U{}^j=w_V{}^i\frac{\partial v^j}{\partial u^i}$$

yazılır ve bu eşitlik (2.2.2) ile karşılaştırılırsa, koordinat dönüşüm fonksiyonları $g_{VU}=\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)$ Jakobyen matrisi şeklinde bulunur. Bu şekilde elde edilen ve yapı grubu $GL(n,\mathbb{R})$ olan $\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right),\mathfrak{X}_n,\pi,\mathbb{R}^n\right)$ vektör demetine $\mathfrak{X}_n$ manifoldunun **tanjant demeti** adı verilir. Bir $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}:\mathfrak{X}_n\to T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ dönüşümü için $\left(\pi\circ\xi\right)(x)=\pi\left(x,\xi\right)=\pi\left(\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x\right)=x$ olduğundan $\xi\in\psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)$, yani $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tanjant demetinin kesitleri birer tanjant vektör alanıdır.

Benzer şekilde, $x\in\mathfrak{X}_n$ noktasının bir koordinat komşuluğu $\left(U,u^i\right)$ olsun. x noktasında $T_x^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ kotanjant uzayının bazı; $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x\right\}$ bazının duali, yani $du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)=\frac{\partial u^i}{\partial u^j}=\delta^i_j$, olan $\left\{\left(du^i\right)_x\right\}$ dir. Her $\omega=\omega^i\left(du^i\right)_x\in T_x^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ için üzerine ve düzgün bir

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}:T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)=\bigcup_{x\in\mathfrak{X}_n}T_x^*\left(\mathfrak{X}_n\right)&\to\mathfrak{X}_n\\ \left(x,\omega\right)=\omega^i\left(du^i\right)_x&\to x\end{aligned}$$

izdüşüm dönüşümü tanımlıdır. $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ dual vektör uzayının bir bazı $\left\{e^{*i}\right\}$ olmak üzere, $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$'da $\lambda_U=\lambda_{U,i}e^{*i}$ ve $\lambda_V=\lambda_{V,i}e^{*i}$ fonksiyonelleri için

$$\varphi_U\left(x,\lambda_U\right)=\lambda_{U,i}\left(du^i\right)_x,\qquad\varphi_V\left(x,\lambda_V\right)=\lambda_{V,i}\left(dv^i\right)_x$$

diffeomorfizmaları tanımlıdır. Şimdi

$$\begin{aligned}\varphi_U\left(x,w_U\right)&=\varphi_V\left(x,w_V\right)\\ \varphi_U\left(x,\lambda_U\right)&=\varphi_V\left(x,\lambda_V\right)\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $w_U, w_V \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_U, \lambda_V \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ için

$$\left\langle \varphi_U\left(x, w_U\right), \varphi_U\left(x, \lambda_U\right)\right\rangle = \left\langle w_U, \lambda_U\right\rangle$$

şeklinde tanımlı bir $\langle , \rangle$ eşleşmesi yardımıyla

$$\left\langle w_U, \lambda_U\right\rangle = \left\langle w_V, \lambda_V\right\rangle \tag{2.2.4}$$

elde edilir. $w_U \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenlerini satır matrisi ve $\lambda_U \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$ fonksiyonellerinin bileşenlerini sütun matrisi olarak ifade edersek; yukarıdaki eşleşmeyi

$$\left\langle w_U, \lambda_U\right\rangle = w_U \cdot \lambda_U$$

matris çarpımı şeklinde ifade edebiliriz. Böylece (2.2.4)'te (2.2.2) kullanılırsa

$$\left\langle w_V \cdot g_{VU}\left(x\right), \lambda_U\right\rangle = \left\langle w_V, \lambda_V\right\rangle \quad \Rightarrow \qquad g_{VU}\left(x\right) \cdot \lambda_U = \lambda_V$$

elde edilir ki, burada $h_{VU} = \left(g_{VU}^{-1}\right)^t = \left(g_{UV}\right)^t$ yazılırsa

$$\lambda_U = \lambda_V \cdot h_{VU}$$

bulunur. Sonuçta koordinat dönüşüm fonksiyonları $h_{VU} = \left(\dfrac{\partial u^i}{\partial v^j}\right)$, yani Jakobyen matrisinin tersinin transpozesi, olacak şekilde

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j \tag{2.2.5}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu şekilde elde edilen ve yapı grubu $GL\left(n, \mathbb{R}^*\right)$ olan $\left(T^*\left(\mathfrak{X}_n\right), \mathfrak{X}_n, \pi, \left(\mathbb{R}^n\right)^*\right)$ vektör demetine $\mathfrak{X}_n$ manifoldunun **kotanjant demeti** adı verilir. Bir $\omega = \omega^i du^i : \mathfrak{X}_n \to T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ dönüşümü için $\left(\tilde{\pi} \circ \omega\right)\left(x\right) = \tilde{\pi}\left(x, \omega\right) = \tilde{\pi}\left(\omega^i \left(du^i\right)_x\right) = x$ olduğundan $\omega \in \psi\left(T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)$, yani $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ kotanjant demetinin kesitleri birer kotanjant vektör alanıdır.

Tanım 2.2.4. $\left(E,\mathfrak{X}_n,\pi,\mathbb{R}^r\right)$ bir düzgün vektör demeti olsun. $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı tüm skaler alanların kümesi $C^\infty\left(\mathfrak{X}_n\right)$ olmak üzere bir

$$D:\Psi(E)\to\Psi\left(T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\otimes E\right)$$

dönüşümü

i) Her $s_1,s_2\in\Psi(E)$ için $D\left(s_1+s_2\right)=Ds_1+Ds_2$

ii) $s\in\Psi(E)$ ve $\forall f\in C^\infty\left(\mathfrak{X}_n\right)$ için $D(sf)=df\otimes s+f(Ds)$

özelliklerini sağlıyor ise D dönüşümüne E vektör demeti üstünde bir **konneksiyon** denir. Özel olarak $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tanjant demeti üstünde tanımlı bir konneksiyona **afin konneksiyon** adı verilir. E vektör demeti üstünde tanımlı bir D konneksiyonu yardımıyla $\xi,\eta\in T\left(\mathfrak{X}_n\right)$, $f\in C^\infty\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ve $s,s_1,s_2\in\Psi(E)$ için

$$\begin{aligned}
&D_{\xi+\eta}s=D_\xi s+D_\xi s\\
&D_{f\xi}s=f\left(D_\xi s\right)\\
&D_\xi\left(s_1+s_2\right)=D_\xi s_1+D_\xi s_2\\
&D_\xi(fs)=(\xi f)s+f\left(D_\xi s\right)
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan

$$D_\xi s=\langle\xi,Ds\rangle:\Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)\times\Psi(E)\to\Psi(E)$$

dönüşümüne s kesitinin ξ doğrultusundaki **kovaryant türevi** denir.

Tanım 2.2.5. F_1, F_2 sonlu boyutlu reel vektör uzayları olmak üzere $\left(E_1,\mathfrak{X}_n,\pi_1,F_1\right)$ ve $\left(E_2,\mathfrak{X}_n,\pi_2,F_2\right)$, koordinat dönüşüm fonksiyonları, sırasıyla, g_{VU} ve g'_{VU} olan iki düzgün vektör demeti olsun. Koordinat dönüşüm fonksiyonları, $F_1\oplus F_2$ vektör uzayı üstünde

$$h_{VU}=\begin{pmatrix} g_{VU} & 0\\ 0 & g'_{VU}\end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümler olan $\left(E_1\oplus E_2,\mathfrak{X}_n,\hat{\pi},F_1\oplus F_2\right)$ vektör demetine E_1 ve E_2 vektör demetlerinin **direkt toplam demeti (direct sum bundle)** adı verilir.

Tanım 2.2.6. F_1, F_2 sonlu boyutlu reel vektör uzayları olmak üzere $\left(E_1, \mathfrak{X}_n, \pi_1, F_1\right)$ ve $\left(E_2, \mathfrak{X}_n, \pi_2, F_2\right)$, koordinat dönüşüm fonksiyonları, sırasıyla, g_{VU} ve g'_{VU} olan iki düzgün vektör demeti olsun. $g_{VU} = \left(a^i_j\right)$ ve $g'_{VU} = \left(b^l_k\right)$ matrislerinin tensör çarpımı olan ve

$$h_{VU} = \begin{pmatrix} a^1_1 g'_{VU} & \dots & a^n_1 g'_{VU} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^1_n g'_{VU} & \cdots & a^n_n g'_{VU} \end{pmatrix}$$

blok matrisi şeklinde tanımlı $h_{VU} = g_{VU} \otimes g'_{VU}$ koordinat dönüşüm fonksiyonları, $F_1 \otimes F_2$ tensör çarpımı üstünde

$$\left(v_1 \otimes v_2\right) \cdot h_{VU} = \left(v_1 \cdot g_{VU}\right) \otimes \left(v_2 \cdot g'_{VU}\right)$$

şeklinde bir işlem tanımlar. Bu şekilde elde edilen $\left(E_1 \otimes E_2, \mathfrak{X}_n, \tilde{\pi}, F_1 \otimes F_2\right)$ vektör demetine, E_1 ve E_2 vektör demetlerinin **çarpım demeti (product bundle)** adı verilir.

Tanım 2.2.7. $\left(E, \mathfrak{X}_n, \pi, \mathbb{R}^r\right)$ bir düzgün vektör demeti olsun. H, E'nin düzgün bir alt manifoldu ve her $x \in \mathfrak{X}_n$ için $H_x = H \cap \pi^{-1}\left(x\right), E_x = \pi^{-1}\left(x\right)$ vektör uzayının s-boyutlu alt uzayı olmak üzere bir $\pi|_H : H \to \mathfrak{X}_n$ üzerine düzgün dönüşümü yardımıyla elde edilen $\left(H, \mathfrak{X}_n, \pi|_H, \mathbb{R}^s\right)$ vektör demetine E vektör demetinin **vektör alt demeti (vector subbundle)** adı verilir.

2.2.2. Çatı Demetleri

Bu bölümde §2.2.1.'de tanımladığımız vektör demeti kavramından hareketle çatı demetlerini (frame bundles) tanıtacağız.

$\left(E, \mathfrak{X}_n, \pi, \mathbb{R}^r\right)$, Tanım 2.2.1.'deki şekliyle bir reel vektör demeti olsun. Bir $x \in \mathfrak{X}_n$ noktasında $\mathfrak{X}_n$'nin lineer bağımsız tanjant vektörleri $\left\{e_1, ..., e_n\right\}$ olsun. $\left(x; e_1, ..., e_n\right)$ sıralısına $\mathfrak{X}_n$'nin x noktasındaki bir **çatısı** denir. x noktasındaki tüm çatılardan oluşan küme F_x olmak üzere, her $x \in \mathfrak{X}_n$ için

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n) = \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} F_x$$

kümesi üzerinde

$$\pi(x; e_1, e_2, ..., e_n) = x$$

şeklinde tanımlı $\pi : \mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n) \to \mathfrak{X}_n$ doğal izdüşüm dönüşümü üzerine bir dönüşümdür. $\mathfrak{X}_n$'nin herhangi bir (U, u^i) koordinat komşuluğundaki doğal çatı alanı $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^n}\right)$ olmak üzere U'daki herhangi bir $(x; e_1, ..., e_n)$ çatısı

$$e_i = a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_x \tag{2.2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_i^j \in GL(n, \mathbb{R})$. Böylece

$$\varphi_U(x, a_i^j) = (x; e_1, ..., e_n) \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlı $\varphi_U : U \times GL(n, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U)$ dönüşümü bire-birdir. $\mathfrak{X}_n$'nin $\{U, V, W, ...\}$ açık örtülüşüne karşılık gelen $\{\varphi_U, \varphi_V, \varphi_W, ...\}$ dönüşümleri, (2.2.7)'deki dönüşümler olarak seçilirse $U \times GL(n, \mathbb{R})$ topolojik çarpımının tüm açık kümelerinin φ_U altındaki görüntüleri $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$'nin bir topolojik bazını oluşturur. Böylece $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$'nin bu topolojik yapısı uyarınca φ_U dönüşümleri birer homeomorfizmadır. φ_U dönüşümleri yardımıyla $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$'nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunun lokal koordinat sistemi (u^i, a_i^j) şeklinde ifade edilebilir. $\mathfrak{X}_n$'nin diğer bir (V, v^i) koordinat komşuluğu için $U \cap V \neq \varnothing$ ise (V, v^i) koordinat komşuluğundaki doğal çatı alanı $\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, ..., \frac{\partial}{\partial v^n}\right)$ olmak üzere (2.2.3),

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j}$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $(x; e_1, ..., e_n)$, $U \cap V$'de bir çatı ise bu çatının (U, u^i) ve (V, v^i) koordinat komşuluklarına göre (u^i, a_i^j) ve (v^i, b_i^j) koordinatları

$$\varphi_U\left(u^i, a_i^j\right) = \varphi_V\left(v^i, b_i^j\right)$$

ya da

$$a_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} = b_i^j \frac{\partial}{\partial v^j}$$

eşitliğini sağlar. Burada (2.2.3) kullanılırsa

$$b_i^j = a_i^k \frac{\partial v^j}{\partial u^k} \tag{2.2.8}$$

elde edilir. v^i ve b_i^j fonksiyonları, sırasıyla u^i ve a_i^j fonksiyonlarının düzgün fonksiyonları olduğundan $\pi : \mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right) \to \mathfrak{X}_n$ doğal izdüşüm dönüşümü de düzgündür. Böylece $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right)$, (m+m^2)-boyutlu bir düzgün manifoldtur. (2.2.7) eşitliği, $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin lokal olarak $U \times GL\left(n, \mathbb{R}\right)$ uzayına diffeomorfik olması anlamına gelir ki bu durumda her $x \in U$ için

$$\varphi_{U,x}\left(g\right) = \varphi_U\left(x, g\right), \qquad g \in GL\left(n, \mathbb{R}\right)$$

şeklinde tanımlı $\varphi_{U,x} : GL\left(n, \mathbb{R}\right) \to \pi^{-1}\left(x\right)$, bir homeomorfizmadır. Bu durumda

$$g_{VU}\left(x\right) = \varphi_{U,x}^{-1} \circ \varphi_{V,x} : GL\left(n, \mathbb{R}\right) \to GL\left(n, \mathbb{R}\right)$$

şeklinde tanımlı $g_{VU} : U \cap V \to GL\left(r, \mathbb{R}\right)$ dönüşümü bir homeomorfizma olup (2.2.8)'den koordinat dönüşüm fonksiyonları $g_{VU} = \left(\dfrac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)$ Jakobyen matrisi şeklinde bulunur. Böylece $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin her noktası $\mathfrak{X}_n$'in bir çatısı olarak düşünülebilir.

Tanım 2.2.8. Yukarıda tanımlanan, yapı grubu ve lif uzayı $GL\left(n, \mathbb{R}\right)$ olan $\left(\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right), \mathfrak{X}_n, \pi, GL\left(n, \mathbb{R}\right)\right)$ demetine **çatı demeti** denir.

2.3. GENEL KONNEKSİYONLAR

Bu bölümde ikinci mertebeden tanjant demetler ve bunlar yardımıyla tanımlanan genel konneksiyonlar tanıtılacaktır, [2, 3, 5, 8].

2.3.1. Tanjant ve Kotanjant Demetler, Diferansiyel Operatör

2.3.1.1. İkinci Mertebeden Tanjant ve Kotanjant Demetler

§2.1.4'te $L_n^2 = \left\{ \left(a_i^j, a_{ih}^j \right) \middle\| a_i^j \right| \neq 0, a_{ih}^j = a_{hi}^j \right\}$ 2. diferansiyel grubunu tanımlamış ve L_n^2 üzerinde tanımlı grup işleminin denklemlerini (2.1.12) formülleri ile vermiştik. L_n^2 grubunu kapsayan ve $a_{ih}^j = a_{hi}^j$ koşulunu sağlaması gerekmeyen $\mathfrak{L}_n^2 = \left\{ \left(a_i^j, a_{ik}^j \right) \middle\| a_i^j \right| \neq 0 \right\}$ kümesi üstündeki çarpma işlemini (2.1.12) formüllerine benzer şekilde, $\alpha, \beta \in \mathfrak{L}_n^2$ için

$$a_i^j \left(\alpha\beta \right) = a_k^j \left(\alpha \right) a_i^k \left(\beta \right) \tag{2.3.1}$$

$$a_{ih}^j \left(\alpha\beta \right) = a_k^j \left(\alpha \right) a_{ih}^k \left(\beta \right) + a_{kl}^j \left(\alpha \right) a_i^k \left(\beta \right) a_h^l \left(\beta \right) \tag{2.3.2}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. Burada a_i^j ve a_{ih}^j $\mathfrak{L}_n^2$'nin koordinatları olarak alınmıştır. Bu çarpma işlemine göre $\mathfrak{L}_n^2$ bir grup oluşturur.

$L_n^1 = GL\left(n, \mathbb{R}\right)$ grubunu, $\mathfrak{L}_n^2$'nin $a_{ih}^j \left(\alpha \right) = 0$ koşulunu sağlayan tüm α elemanlarından oluşan bir alt grubu olarak düşünebiliriz. Böylece a_i^j koordinatları $L_n^1 = \left\{ \left(a_i^j, 0 \right) \middle\| a_i^j \right| \neq 0 \right\}$ alt grubunun koordinatları olur.

$$a_i^j \left(\sigma\left(\alpha \right) \right) = a_i^j \left(\alpha \right) \tag{2.3.3}$$

eşitliği ile verilen $\sigma : \mathfrak{L}_n^2 \to L_n^1$ doğal homomorfizmasını düşünelim. σ homomorfizması $\mathfrak{L}_n^2$'nin $\mathbb{R}$ üstünde bir gösterilişidir. σ'nın çekirdeği olan

$$\Re_n^2 = \ker \sigma = \left\{ \alpha \in \mathfrak{L}_n^2 \middle| a_i^j \left(\sigma\left(\alpha \right) \right) = a_i^j \left(\alpha \right) = \delta_j^i \right\}$$

kümesi üstünde

$$\eta(\alpha)=\sigma(\alpha^{-1})\alpha$$
$$\overline{\eta}(\alpha)=\alpha\sigma(\alpha^{-1})$$

eşitlikleri ile tanımlı $\eta,\overline{\eta}:\mathfrak{L}_n^2\to\mathfrak{R}_n^2$ dönüşümlerini düşünelim. $\mathfrak{L}_n^2$'nin herhangi bir α elemanı $\mathfrak{L}_n^1$ ve $\mathfrak{R}_n^2$'nin elemanlarının çarpımı olarak

$$\alpha=\sigma(\alpha)\eta(\alpha)=\overline{\eta}(\alpha)\sigma(\alpha)$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Gerçekten

$$\begin{aligned} a_i^j\left(\sigma(\alpha)\eta(\alpha)\right) &= a_i^j\left(\sigma(\alpha)\sigma(\alpha^{-1})\alpha\right)=a_k^j\left(\sigma(\alpha)\sigma(\alpha^{-1})\right)a_i^k(\alpha) \\ &= a_l^j\left(\sigma(\alpha)\right)a_k^l\left(\sigma(\alpha^{-1})\right)a_i^k(\alpha)=a_l^j(\alpha)a_k^l(\alpha^{-1})a_i^k(\alpha) \\ &= a_k^j(\alpha\alpha^{-1})a_i^k(\alpha)=a_k^j\left(1_{\mathfrak{L}_n^2}\right)a_i^k(\alpha)=\delta_j^k a_i^k(\alpha)=a_i^j(\alpha)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\overline{\eta}(\alpha)\sigma(\alpha)=\alpha$ eşitliği de gösterilebilir.

Şimdi Örnek 2.2.3.'e benzer şekilde ikinci mertebeden tanjant ve kotanjant demetlerini tanımlayalım. $\mathfrak{X}_n$'in herhangi bir (U,u^i) koordinat komşuluğunda, ∂u_i ve $\partial^2 u_{ih}$ ile gösterilen $n+n^2$ tane vektör alanını düşünelim. Diğer bir (V,v^i) koordinat komşuluğunda tanımlı vektör alanları ∂v_i ve $\partial^2 v_{ih}$ olmak üzere $U\cap V\neq\emptyset$ komşuluğunda bu vektör alanlarının

$$\partial u_i=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\partial v_j \tag{2.3.4}$$

$$\partial^2 u_{ih}=\frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h\partial u^i}\partial v_j+\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^h}\partial^2 v_{jk} \tag{2.3.5}$$

eşitliklerini gerçeklediğini varsayalım. Böylece $\mathfrak{X}_n$'in her x noktasında, koordinat komşuluğundan bağımsız olan ∂u_i ve $\partial^2 u_{ih}$ vektörleri ile doğurulan $n+n^2$ boyutlu bir $\mathfrak{I}_x^2(\mathfrak{X}_n)\supset T_x(\mathfrak{X}_n)$ vektör uzayı elde edilmiş olur.

$\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)=\bigcup \mathfrak{T}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ uzayını $\tau_2:\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)\rightarrow \mathfrak{X}_n$, doğal izdüşümü yardımıyla, yapı grubu $\mathfrak{L}_n^2$ olan $\left\{\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right),\mathfrak{X}_n,\tau_2\right\}$ vektör demetinin tümel uzayı olarak düşünebiliriz. Bu vektör demetinin $g_{VU}:U\cap V\rightarrow \mathfrak{L}_n^2$ koordinat dönüşüm fonksiyonları, (2.3.4) ve (2.3.5)'ten

$$a_i^j\left(g_{\beta\alpha}\right)=\frac{\partial v^j}{\partial u^i} \qquad \text{ve} \qquad a_{ih}^j\left(g_{\beta\alpha}\right)=\frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h\partial u^i}$$

eşitlikleri ile belirlidir. Bu şekilde elde ettiğimiz $\left\{\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right),\mathfrak{X}_n,\tau_2\right\}$ vektör demetini kısaca $\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ile göstereceğiz ve $\mathfrak{X}_n$'in **ikinci mertebeden tanjant demeti** diyeceğiz. Ayrıca (2.3.4) uyarınca ∂u_i vektörünü $\frac{\partial}{\partial u^i}$ tanjant vektörü ile özdeşleştirebiliriz. Böylece $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$, $\mathfrak{T}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ vektör demetinin bir alt demeti olarak düşünülebilir.

$\mathfrak{X}_n$'nin herhangi bir $\left(U,u^i\right)$ koordinat komşuluğunda ikinci mertebeden d^2u^i diferansiyelleri ve bunlarla karşılıklı olarak lineer bağımsız olan $du^i\otimes du^h$ tarafından doğurulan $n+n^2$-boyutlu vektör uzayını düşünelim. $\left(U,u^i\right)$ ve $\left(V,v^i\right)$ koordinat komşuluklarına karşılık gelen vektör uzaylarını $U\cap V\neq\varnothing$ komşuluğunda

$$d^2v^j=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}d^2u^i+\frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h\partial u^i}du^i\otimes du^h \tag{2.3.6}$$

$$dv^j\otimes dv^k=\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial v^k}{\partial u^h}du^i\otimes du^h \tag{2.3.7}$$

eşitlikleri ile ilişkilendirelim. Bu denklemleri (2.3.4) ve (2.3.5) ile karşılaştırırsak bu şekilde elde ettiğimiz uzayın, $\mathfrak{T}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ uzayının dual uzayı olduğunu görebiliriz. Bu dual uzayı $\mathfrak{D}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ile gösterelim. $\mathfrak{D}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ dual uzayının $\left\{d^2u^i,du^i\otimes du^h\right\}$ bazı, $\mathfrak{T}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ uzayının $\left\{\partial u_i,\partial^2 u_{ih}\right\}$ bazının dualidir. $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)=\bigcup \mathfrak{D}_x^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ uzayı, $\mathfrak{X}_n$'in **ikinci mertebeden kotanjant demetinin** tümel uzayı olup bu vektör demetini de kısaca $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ile gösteriyoruz. (2.3.7) eşitliğinden, $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ çarpım demeti $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ demetinin bir alt demeti olarak düşünülebilir.

2.3.1.2. Diferansiyel Operatör

$\xi = V^i \partial u_i \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)$ ve $\omega = V_i du^i \in \Psi\left(T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)$ olmak üzere

$$d : \begin{cases} \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)\right) \to \Psi\left(\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\right) \\ \Psi\left(T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)\right) \to \Psi\left(\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)\right) \end{cases}$$

diferansiyel operatörünü

$$\begin{aligned} d\xi &= d\left(V^i \partial u_i\right) = \partial^2 u_{ih} \otimes V^i du^h + \partial u_i \otimes dV^i \\ d\omega &= d\left(V_i du^i\right) = V_i d^2 u^i + du^i \otimes dV_i \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. (2.3.4), (2.3.5), (2.3.6) ve (2.3.7) eşitliklerinden bu tanımın lokal koordinatlardan bağımsız olduğu kolayca görülebilir.

Bu tanıma benzer şekilde d operatörünü, $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı çarpım demetlerine genişletebiliriz. $T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)} = T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes p} \otimes T*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes q}$, $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı bir vektör demeti olsun. $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q+1)}$ demetinin t-inci ve (q+1)-inci bileşenlerinin $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$'ye genişletilmesiyle elde edilen vektör demetini $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \dot{\otimes} T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q-t)}$ gösterelim. Bu durumda $V = V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots du^{j_q} \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d : \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}\right) &\to \\ \Psi\Bigg(\sum_{s=1}^{p} T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(s-1)} &\otimes \mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q+1)} \\ &+ \sum_{t=1}^{q} T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes p} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \dot{\otimes} T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q-t)} \Bigg) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

diferansiyel operatörünü,

$$\begin{aligned} dV &= V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} d\left(\partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots du^{j_q}\right) \\ &+ \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes dV^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

ve

$$
\begin{aligned}
& d\left(\partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \\
& = \sum_{s=1}^{p} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \otimes \partial^2 u_{i_s h} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \qquad (2.3.11) \\
& \quad + \sum_{t=1}^{q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_{t-1}} \otimes d^2 u^{j_t} \dot{\otimes} \left(du^{j_{t+1}} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. (2.3.9) denkleminin sağ yanındaki toplamın her iki bileşeni de $T(\mathfrak{X}_n)^{\otimes(p,q+1)}$ demetini içerir ve böylece $T(\mathfrak{X}_n)^{\otimes(p,q+1)}$ demetinin $(p+q)$ değişik şekilde genişletilmesiyle elde edilen demetlerin bir tür direkt toplamını elde edebiliriz. Böylece

$$
d\left(\partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \text{ ve } \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^{j_{q+1}}
$$

tensörleri, $x \in \mathfrak{X}_n$ üzerindeki lif uzayının $n^{p+q} + n^{p+q+1} = n^{p+q}(n+1)$ boyutlu bir alt uzayını oluşturur. Bu tensörler lokal koordinat seçiminden bağımsızdır. $x \in \mathfrak{X}_n$ üzerindeki lifi $n^{p+q}(n+1)$ boyutlu vektör uzayı olan bu demeti $T(\mathfrak{X}_n)^{\bar{\otimes}(p,q+1)}$ ile göstereceğiz. $T(\mathfrak{X}_n)^{\otimes(p,q+1)}$ demeti $T(\mathfrak{X}_n)^{\bar{\otimes}(p,q+1)}$ vektör demetinin bir alt demetidir. Bu durumda (2.3.9) ile verilen diferansiyel operatör

$$
d : \Psi\left(T(\mathfrak{X}_n)^{\otimes(p,q)}\right) \to \Psi\left(T(\mathfrak{X}_n)^{\bar{\otimes}(p,q+1)}\right) \qquad (2.3.12)
$$

şeklini alır.

2.3.2. Genel Konneksiyonlar ve Kovaryant Diferansiyel

2.3.2.1. Genel Konneksiyonlar

$\mathfrak{M}_n^2 = \left\{\left(a_i^j, a_{ik}^j\right)\right\}$, (2.3.1) ve (2.3.2) eşitlikleri ile tanımlı çarpma işlemine göre bir yarı grup olsun. Bu durumda elemanları $\left|a_i^j\right| \neq 0$ koşulunu sağlayan $\mathfrak{L}_n^2$ grubu, $\mathfrak{M}_n^2$ yarı grubunun bir alt grubu olur. (2.3.3)'e benzer şekilde,

$$a_i^j\left(\sigma\left(\alpha\right)\right)=a_i^j\left(\alpha\right)$$

eşitliği ile verilen $\sigma:\mathfrak{M}_n^2\to M_n^1=\left\{\left(a_i^j\right)\right\}$ doğal homomorfizmasını düşünelim. Burada $\left(a_i^j\right)$ elemanları $\left(a_i^j,0\right)$ şeklinde düşünülebileceğinden; M_n^1, $\mathfrak{M}_n^2$ yarı grubunun bir alt yarı grubu olur.

Tanım 2.3.1. $\mathfrak{X}_n$ üzerinde $T\left(\mathfrak{X}_n\right)\otimes\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ vektör demetinin bir Γ kesitine $\mathfrak{X}_n$'in bir **genel konneksiyonu** denir ve $\mathfrak{X}_n$'nin bir $\left(U,u^i\right)$ koordinat komşuluğunda

$$\Gamma=\partial u_i\otimes\left(P_j^i d^2u^j+\Gamma_{jk}^i du^j\otimes du^k\right)$$

şeklinde yazılır.

Böylece her $\left(U,u^i\right)$ koordinat komşuluğu için

$$a_j^i\cdot f_U=P_j^i,\quad a_{jk}^i\cdot f_U=\Gamma_{jk}^i$$

eşitlikleri ile verilen bir $f_U:U\to\mathfrak{M}_n^2$ dönüşümü yardımıyla Γ kesitinin bileşenleri $\mathfrak{M}_n^2$ yarı grubunun $\left(P_j^i,\Gamma_{jk}^i\right)$ şeklinde bir elemanı olarak düşünülebilir. Diğer bir deyişle $\left\{f_U\right\}$ dönüşümleri Γ genel konneksiyonunu karakterize eder. Bu durumda $U\cap V\neq\varnothing$ olacak şekilde $\left(U,u^i\right)$ ve $\left(V,v^i\right)$ koordinat komşulukları için (2.3.4), (2.3.6) ve (2.3.7)'den

$$\begin{aligned}\Gamma&=\partial u_i\otimes\left(P_j^i d^2u^j+\Gamma_{jk}^i du^j\otimes du^k\right)\\&=\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\partial v_h\otimes\left\{P_j^i\left(\frac{\partial u^j}{\partial v^k}d^2v^k+\frac{\partial^2u^j}{\partial v^m\partial v^l}dv^l\otimes dv^m\right)+\Gamma_{jk}^i\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^k}{\partial v^m}dv^l\otimes dv^m\right\}\\&=\partial v_h\otimes\left\{\frac{\partial v^h}{\partial u^i}P_j^i\frac{\partial u^j}{\partial v^k}d^2v^k+\frac{\partial v^h}{\partial u^i}\left(P_j^i\frac{\partial^2u^j}{\partial v^m\partial v^l}+\Gamma_{jk}^i\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^k}{\partial v^m}\right)dv^l\otimes dv^m\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\overline{P}_k^h=\frac{\partial v^h}{\partial u^i}P_j^i\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\qquad(2.3.13)$$

$$\overline{\Gamma}^h_{lm} = \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\left(P^i_j \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^m \partial v^l} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^k}{\partial v^m} \right) \tag{2.3.14}$$

olmak üzere $\left(V, v^i\right)$ koordinat komşuluğunda Γ kesiti

$$\Gamma = \partial v_h \otimes \left(\overline{P}^h_k d^2 v^k + \overline{\Gamma}^h_{lm} dv^l \otimes dv^m \right)$$

şeklinde olup (2.3.13) ve (2.3.14) eşitlikleri

$$\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)\left(P^i_j, \Gamma^i_{jk}\right) = \left(\overline{P}^i_j, \overline{\Gamma}^i_{jk}\right) g_{VU}$$

ya da kısaca

$$\left(\sigma \cdot g_{VU}\right) f_U = f_V g_{VU} \tag{2.3.15}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.15) eşitliğine σ homomorfizması uygulanırsa

$$\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)\left(\sigma \cdot f_U\right) = \left(\sigma \cdot f_V\right)\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)$$

bulunur. Bileşenler cinsinden yazıldığında (2.3.13)'e denk olan bu eşitlikten, P^i_j'nin (1,1) tipinde bir tanjant tensör alanının bileşenleri olduğu görülür. Bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunda bu tensör alanını

$$\lambda\left(\Gamma\right) = P^i_j \partial u_i \otimes du^j = P \tag{2.3.16}$$

şeklinde gösterelim. Özel olarak λ dönüşümü, $\lambda\left(\Gamma\right) = \delta^i_j \partial u_i \otimes du^j = I$ olacak şekilde seçilirse Γ konneksiyonunun $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tanjant demetinin bir klasik afin konneksiyonu olduğu (2.3.14)'ten görülür. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.3.2. $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ tanjant demetinin bir klasik afin konneksiyonu, λ altındaki görüntüsü $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin özdeşlik izomorfizması olacak şekilde $T\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ vektör demetinin bir kesitine karşılık gelir, [2].

2.3.2.2. Kovaryant Diferansiyel

$\Gamma \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)\right)$ genel konneksiyonu için

$$\mu\left(\partial u_j\right) = P_j^i \partial u_i, \qquad \mu\left(\partial^2 u_{jk}\right) = \Gamma_{jk}^i \partial u_i \tag{2.3.17}$$

eşitliklerini sağlayan bir $\mu = \mu_\Gamma : \mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \to T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ homomorfizmasını tanımlayalım. $\left\{\partial u_i, \partial^2 u_{jk}\right\}$ ve $\left\{d^2 u^i, du^j \otimes du^k\right\}$ dual bazlar olduğundan μ homomorfizması

$$\mu(\xi) = \langle \Gamma, \xi \rangle, \quad \xi \in \mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$$

şeklinde bir iç çarpım belirler. Gerçekten

$$\begin{aligned}\mu\left(\partial u_i\right) &= \left\langle \Gamma, \partial u_i \right\rangle = \left\langle \partial u_j \otimes \left(P_k^j d^2 u^k + \Gamma_{kh}^j du^k \otimes du^h\right), \partial u_i \right\rangle \\ &= \left\langle \partial u_j \otimes P_k^j d^2 u^k, \partial u_i \right\rangle = P_k^j \delta_i^k \partial u_j = P_i^j \partial u_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu\left(\partial^2 u_{ih}\right) &= \left\langle \Gamma, \partial^2 u_{ih} \right\rangle = \left\langle \partial u_j \otimes \left(P_k^j d^2 u^k + \Gamma_{kl}^j du^k \otimes du^l\right), \partial^2 u_{ih} \right\rangle \\ &= \left\langle \partial u_j \otimes \Gamma_{kl}^j du^k \otimes du^l, \partial^2 u_{ih} \right\rangle = \Gamma_{kl}^j \delta_i^k \delta_h^l \partial u_j = \Gamma_{ih}^j \partial u_j\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $T\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ vektör demeti $\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin bir vektör alt demeti olduğundan Γ konneksiyonu $\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin bir kesiti olarak düşünebilir. Böylece $\omega \in \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ olmak üzere $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$'de yukarıdakine benzer bir $\langle \omega, \Gamma \rangle$ homomorfizmasını

$$\begin{aligned}\left\langle d^2 u^i, \Gamma \right\rangle &= \left\langle d^2 u^i, \partial u_j \otimes \left(P_k^j d^2 u^k + \Gamma_{kl}^j du^k \otimes du^l\right) \right\rangle \\ &= \delta_j^i \left(P_k^j d^2 u^k + \Gamma_{kl}^j du^k \otimes du^l\right) \\ &= P_k^i d^2 u^k + \Gamma_{kl}^i du^k \otimes du^l\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

$$\left\langle du^i \otimes du^j, \Gamma \right\rangle = \left\langle du^i \otimes du^j, \partial u_h \otimes \left(P_k^h d^2 u^k + \Gamma_{kl}^h du^k \otimes du^l\right) \right\rangle = 0$$

şeklinde tanımlayabiliriz. (2.3.16)'dan $\lambda(\Gamma) \in \Psi\left(T(\mathfrak{X}_n)^{\otimes(1,1)}\right)$ olduğundan (2.3.12)'den $d(\lambda(\Gamma)) \in \Psi\left(T(\mathfrak{X}_n)^{\bar{\otimes}(1,2)}\right)$ yazılır. Ayrıca

$$T(\mathfrak{X}_n)^{\bar{\otimes}(1,2)} \subset \mathfrak{I}^2(\mathfrak{X}_n) \otimes T^*(\mathfrak{X}_n)^{\otimes 2} + T(\mathfrak{X}_n) \otimes \mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n) \subset \mathfrak{I}^2(\mathfrak{X}_n) \otimes \mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n)$$

olduğundan $d(\lambda(\Gamma)) \in \Psi\left(\mathfrak{I}^2(\mathfrak{X}_n) \otimes \mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n)\right)$ şeklinde düşünebiliriz. Böylece (2.3.16), (2.3.10) ve (2.3.11)'den

$$\begin{aligned} d(\lambda(\Gamma)) &= d\left(P_j^i \partial u_i \otimes du^j\right) = P_j^i d\left(\partial u_i \otimes du^j\right) + \partial u_i \otimes du^j \otimes dP_j^i \\ &= P_j^i \left(\partial^2 u_{ih} \otimes du^j \otimes du^h + \partial u_i \otimes d^2 u^j\right) + \left(\partial_h P_j^i\right) \partial u_i \otimes du^j \otimes du^h \end{aligned} \qquad (2.3.19)$$

elde edilir. Böylece bir $\varphi = \varphi_\Gamma : \mathfrak{D}^2(\mathfrak{X}_n) \to T^*(\mathfrak{X}_n)^{\otimes 2}$ homomorfizmasını

$$\varphi(\omega) = \left\langle \omega, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \right\rangle$$

şeklindeki iç çarpım ile tanımlayabiliriz. (2.3.18) ve (2.3.19)'dan ise

$$\begin{aligned} \varphi\left(d^2 u^i\right) &= \left\langle d^2 u^i, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \right\rangle = \left\langle d^2 u^i, d(\lambda(\Gamma)) \right\rangle - \left\langle d^2 u^i, \Gamma \right\rangle \\ &= \left\langle d^2 u^i, P_j^k \left(\partial^2 u_{kh} \otimes du^j \otimes du^h + \partial u_k \otimes d^2 u^j\right) + \left(\partial_h P_j^k\right) \partial u_k \otimes du^j \otimes du^h \right\rangle \\ &\quad - P_k^i d^2 u^k - \Gamma_{kl}^i du^k \otimes du^l \\ &= \left(P_j^k \delta_k^i d^2 u^j + \left(\partial_h P_j^k\right) \delta_k^i du^j \otimes du^h\right) - P_k^i d^2 u^k - \Gamma_{kl}^i du^k \otimes du^l \\ &= \left(\partial_h P_j^i - \Gamma_{jh}^i\right) du^j \otimes du^h, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\varphi\left(du^i \otimes du^h\right) \\ &\quad = \left\langle du^i \otimes du^h, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \right\rangle = \left\langle du^i \otimes du^h, d(\lambda(\Gamma)) \right\rangle \\ &\quad = \left\langle du^i \otimes du^h, P_j^k \left(\partial^2 u_{kl} \otimes du^j \otimes du^l + \partial u_k \otimes d^2 u^j\right) + \left(\partial_h P_j^k\right) \partial u_k \otimes du^j \otimes du^l \right\rangle \\ &\quad = P_j^k \delta_k^i \delta_l^h du^j \otimes du^l \\ &\quad = P_j^i du^j \otimes du^h, \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\Lambda^i_{jh} = \Gamma^i_{jh} - \partial_h P^i_j \tag{2.3.20}$$

yazılırsa

$$\varphi\left(d^2u^i\right) = -\Lambda^i_{jh} du^j \otimes du^h, \qquad \varphi\left(du^i \otimes du^h\right) = P^i_j du^j \otimes du^h \tag{2.3.21}$$

eşitlikleri elde edilir. Üstelik genel olarak

$$\begin{gathered}\varphi\left(du^i\right) = du^i \\ \varphi\left(du^{i_1} \otimes \ldots \otimes du^{i_q} \otimes du^h\right) = P^{i_1}_{j_1} \ldots P^{i_q}_{j_q} du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

ve

$$\varphi\Big|_{\mathfrak{I}^2(\mathfrak{X}_n)} = \mu \tag{2.3.23}$$

yazılırsa $T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)}$ vektör demeti üstünde birbirinin aynısı olan

$$T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(s-1)} \otimes \mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q+1)} \to T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)} \qquad \left(s = 1, 2, \ldots, p\right)$$

$$T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes p} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \dot{\otimes} T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q-t)} \to T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)} \qquad \left(t = 1, 2, \ldots, q\right)$$

homomorfizmalarını buluruz. Bu homomorfizmalar yardımıyla “$\dot{\otimes}$” tensör çarpımının tanımındaki gibi

$$\left(\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{p} T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(s-1)} \otimes \mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \otimes T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q+1)} \\ &+\sum_{t=1}^{q} T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes p} \otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right) \dot{\otimes} T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(q-t)}\end{aligned}\right) \to T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)}$$

homomorfizmasını tanımlayabiliriz. Bunu aynı φ sembolü ile gösterirsek

$$\varphi = \varphi_\Gamma : T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\bar{\otimes}(p,q+1)} \to T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)} \qquad \left(p, q = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{2.3.24}$$

homomorfizmasını elde ederiz.

Tanım 2.3.3. Bir Γ genel konneksiyonu için

$$D = D_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma} \cdot d : \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}\right) \rightarrow \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q+1)}\right) \tag{2.3.25}$$

şeklinde tanımlı diferansiyel operatöre Γ genel konneksiyonunun **kovaryant diferansiyel operatörü** denir.

Herhangi bir $V = V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q} \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}\right)$ tensör alanı için (2.3.10), (2.3.11), (2.3.17), (2.3.20), (2.3.21), (2.3.22) ve (2.3.23)'ten

$$\begin{aligned}
DV &= \varphi_{\Gamma} \cdot d\left(V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q}\right) \\
&= \varphi_{\Gamma}\left(V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} d\left(\partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q} \otimes dV^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\right) \\
&= V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \varphi_{\Gamma}\left(\sum_{s=1}^{p} \partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_{s-1}} \otimes \partial^2 u_{k_s h} \otimes \partial u_{k_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q} \otimes du^h\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{t=1}^{q} \partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_{t-1}} \otimes d^2 u^{l_t} \dot{\otimes} \left(du^{l_{t+1}} \otimes \ldots \otimes du^{l_q}\right)\right) \\
&\quad + \varphi_{\Gamma}\left(\partial u_{k_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{l_1} \otimes \ldots \otimes du^{l_q} \otimes \partial_h V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} du^h\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{p} P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}} \Gamma^{i_s}_{k_s h} P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}} \ldots P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_q}_{j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \\
&\qquad \otimes \partial u_{i_s} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\
&\quad - \left(\sum_{t=1}^{q} P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}} \Lambda^{l_t}_{j_t h} P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}} \ldots P^{l_q}_{j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \\
&\qquad \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_{t-1}} \otimes du^{j_t} \otimes du^h \dot{\otimes} \left(du^{j_{t+1}} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \\
&\quad + P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_p}_{k_p} \partial_h V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_q}_{j_q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\
&= \left(P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_p}_{k_p} \partial_h V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_q}_{j_q} + \sum_{s=1}^{p} P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}} \Gamma^{i_s}_{k_s h} P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}} \ldots P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_q}_{j_q}\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{t=1}^{q} P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}} \Lambda^{l_t}_{j_t h} P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}} \ldots P^{l_q}_{j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$DV = \partial u_{i_1} \otimes ... \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes ... \otimes du^{j_q} \otimes DV^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$$

olmak üzere

$$DV^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = D_h V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} du^h \tag{2.3.26}$$

ve

$$\begin{aligned} D_h V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} &= P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_p}_{k_p} \partial_h V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_q}_{j_q} \\ &+ \sum_{s=1}^{p} P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}} \Gamma^{i_s}_{k_s h} P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}} ... P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_q}_{j_q} \\ &- \sum_{t=1}^{q} P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_p}_{k_p} V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}} \Lambda^{l_t}_{j_t h} P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}} ... P^{l_q}_{j_q} \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

elde edilir. (2.3.27) eşitliği ile belirli $D_h V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ tensör alanına $V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ tensör alanının du^h doğrultusundaki **kovaryant türevi** adı verilir.

Şimdi bileşenleri $V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ ve $W^{i_{p+1} \cdots i_{p+a}}_{j_{q+1} \cdots j_{q+b}}$ olan (p,q) ve (a,b) tipinde iki tensör alanı, sırasıyla, V ve W olmak üzere $V \otimes W$ tensör çarpımının kovaryant türevini hesaplayalım. (2.3.27)'den

$$\begin{aligned} D_h \left(V^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} W^{i_{p+1} \cdots i_{p+a}}_{j_{q+1} \cdots j_{q+b}} \right) &= P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}} \partial_h \left(V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} W^{k_{p+1} \cdots k_{p+a}}_{l_{q+1} \cdots l_{q+b}} \right) P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}} \\ &+ \sum_{s=1}^{p+a} P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}} \Gamma^{i_s}_{k_s h} P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}} ... P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}} \left(V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} W^{k_{p+1} \cdots k_{p+a}}_{l_{q+1} \cdots l_{q+b}} \right) P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}} \\ &- \sum_{t=1}^{q+b} P^{i_1}_{k_1} ... P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}} \left(V^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q} W^{k_{p+1} \cdots k_{p+a}}_{l_{q+1} \cdots l_{q+b}} \right) P^{l_1}_{j_1} ... P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}} \Lambda^{l_t}_{j_t h} P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}} ... P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}} \end{aligned}$$

yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_h\left(V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}W^{i_{p+1}\ldots i_{p+a}}_{j_{q+1}\ldots j_{q+b}}\right) &= P^{i_{p+1}}_{k_{p+1}}\ldots P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}}W^{k_{p+1}\ldots k_{p+a}}_{l_{q+1}\ldots l_{q+b}}P^{l_{q+1}}_{j_{q+1}}\ldots P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}}\Big[P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}\partial_h V^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad+\sum_{s=1}^{p}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}\Gamma^{i_s}_{k_s h}P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad-\sum_{t=1}^{q}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}}\Lambda^{l_t}_{j_t h}P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}}\ldots P^{l_q}_{j_q}\Big]\\
&\quad+P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\Big[P^{i_{p+1}}_{k_{p+1}}\ldots P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}}\partial_h W^{k_{p+1}\ldots k_{p+a}}_{l_{q+1}\ldots l_{q+b}}P^{l_{q+1}}_{j_{q+1}}\ldots P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}}\\
&\quad+\sum_{s=p+1}^{p+a}P^{i_{p+1}}_{k_{p+1}}\ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}\Gamma^{i_s}_{k_s h}P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}}\ldots P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}}W^{k_{p+1}\ldots k_{p+a}}_{l_{q+1}\ldots l_{q+b}}P^{l_{q+1}}_{j_{q+1}}\ldots P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}}\\
&\quad-\sum_{t=q+1}^{q+b}P^{i_{p+1}}_{k_{p+1}}\ldots P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}}W^{k_{p+1}\ldots k_{p+a}}_{l_{q+1}\ldots l_{q+b}}P^{l_{q+1}}_{j_{q+1}}\ldots P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}}\Lambda^{l_t}_{j_t h}P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}}\ldots P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}}\Big]
\end{aligned}
$$

ya da

$$
\begin{aligned}
D_h\left(V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}W^{i_{p+1}\ldots i_{p+a}}_{j_{q+1}\ldots j_{q+b}}\right) &= \left(D_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)P^{i_{p+1}}_{k_{p+1}}\ldots P^{i_{p+a}}_{k_{p+a}}W^{k_{p+1}\ldots k_{p+a}}_{l_{q+1}\ldots l_{q+b}}P^{l_{q+1}}_{j_{q+1}}\ldots P^{l_{q+b}}_{j_{q+b}}\\
&\quad+P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\left(D_h W^{i_{p+1}\ldots i_{p+a}}_{j_{q+1}\ldots j_{q+b}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.3.28}
$$

bulunur. (2.3.28) eşitliği, genel konneksiyona göre kovaryant türevin, klasik afin konneksiyonlarda çarpımın kovaryant türevi için geçerli olan Leibniz kuralını sağlamadığını göstermektedir.

Şimdi de kovaryant türev ve büzülme arasındaki ilişkiyi gösterelim. Bileşenleri $V^{i_1\ldots i_p i}_{j_1\ldots j_q j}$ olan (p+1,q+1) tipindeki bir V tensör alanı için (2.3.27)'den

$$
\begin{aligned}
\delta^j_i\left(D_h V^{i_1\ldots i_p i}_{j_1\ldots j_q j}\right) &= P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}\partial_h V^{k_1\ldots k_p k}_{l_1\ldots l_q l}\left(P^l_i P^i_k\right)P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad+\sum_{s=1}^{p}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}\Gamma^{i_s}_{k_s h}P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p k}_{l_1\ldots l_q l}\left(P^l_i P^i_k\right)P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad+P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}\Gamma^i_{kh}V^{k_1\ldots k_p k}_{l_1\ldots l_q l}P^l_i P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad-\sum_{t=1}^{q}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p k}_{l_1\ldots l_q l}\left(P^l_i P^i_k\right)P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_{t-1}}_{j_{t-1}}\Lambda^{l_t}_{j_t h}P^{l_{t+1}}_{j_{t+1}}\ldots P^{l_q}_{j_q}\\
&\quad-P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}P^i_k V^{k_1\ldots k_p k}_{l_1\ldots l_q l}\Lambda^l_{ih}P^{l_1}_{j_1}\ldots P^{l_q}_{j_q}
\end{aligned}
$$

bulunur. $M = P^2$, yani

$$M_j^i = P_k^i P_j^k \tag{2.3.29}$$

alırsak

$$\begin{aligned}\delta_i^j\left(D_h V_{j_1\ldots j_q j}^{i_1\ldots i_p i}\right) &= P_{k_1}^{i_1}\ldots P_{k_p}^{i_p}\partial_h\left(V_{l_1\ldots l_q l}^{k_1\ldots k_p k} M_k^l\right)P_{j_1}^{l_1}\ldots P_{j_q}^{l_q}\\ &+\sum_{s=1}^{p} P_{k_1}^{i_1}\ldots P_{k_{s-1}}^{i_{s-1}}\Gamma_{k_s h}^{i_s}P_{k_{s+1}}^{i_{s+1}}\ldots P_{k_p}^{i_p}\left(V_{l_1\ldots l_q l}^{k_1\ldots k_p k}M_k^l\right)P_{j_1}^{l_1}\ldots P_{j_q}^{l_q}\\ &-\sum_{t=1}^{q} P_{k_1}^{i_1}\ldots P_{k_p}^{i_p}\left(V_{l_1\ldots l_q l}^{k_1\ldots k_p k}M_k^l\right)P_{j_1}^{l_1}\ldots P_{j_{t-1}}^{l_{t-1}}\Lambda_{j_t h}^{l_t}P_{j_{t+1}}^{l_{t+1}}\ldots P_{j_q}^{l_q}\\ &-P_{k_1}^{i_1}\ldots P_{k_p}^{i_p}V_{l_1\ldots l_q l}^{k_1\ldots k_p k}\left[\partial_h\left(P_i^l P_k^i\right)-P_i^l\Gamma_{kh}^i+\Lambda_{ih}^l P_k^i\right]P_{j_1}^{l_1}\ldots P_{j_q}^{l_q}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (2.3.27)'den

$$D_h\delta_k^l = \Gamma_{ih}^l P_k^i - P_i^l\Lambda_{kh}^i \tag{2.3.30}$$

olduğundan (2.3.20)'den

$$\begin{aligned}\partial_h\left(P_i^l P_k^i\right)-P_i^l\Gamma_{kh}^i+\Lambda_{ih}^l P_k^i &= P_i^l\left(\partial_h P_k^i-\Gamma_{kh}^i\right)+P_k^i\left(\partial_h P_i^l+\Lambda_{ih}^l\right)\\ &=\Gamma_{ih}^l P_k^i - P_i^l\Lambda_{kh}^i = D_h\delta_k^l\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\delta_i^j\left(D_h V_{j_1\ldots j_q j}^{i_1\ldots i_p i}\right) = D_h\left(V_{j_1\ldots j_q l}^{i_1\ldots i_p k}M_k^l\right)-P_{k_1}^{i_1}\ldots P_{k_p}^{i_p}V_{l_1\ldots l_q l}^{k_1\ldots k_p k}D_h\delta_k^l P_{j_1}^{l_1}\ldots P_{j_q}^{l_q}$$

eşitliği elde edilir. (2.3.30) eşitliği, Kronecker deltasının genel konneksiyona göre kovaryant türevinin klasik afin konneksiyonlardan farklı olarak her zaman sıfır olmadığını göstermektedir. Böylece klasik afin konneksiyonlardan farklı olarak, kovaryant türev ve büzülme işlemleri değişmeli değildir.

2.3.2.3. Genel Konneksiyonların Kontravaryant ve Kovaryant Kısımları

$\tilde{\mathfrak{L}}_n^2 = \left\{ \left(a_i^j, a_{ik}^j, p_i^j \right) \middle| \left| a_i^j \right| \neq 0 \right\}$, (2.3.1) ve (2.3.2) eşitliklerine benzer şekilde

$$a_i^j(\alpha\beta) = a_k^j(\alpha)\, a_i^k(\beta)$$
$$a_{ih}^j(\alpha\beta) = a_k^j(\alpha)\, a_{ih}^k(\beta) + a_{kl}^j(\alpha)\, p_i^k(\beta)\, a_h^l(\beta)$$
$$p_i^j(\alpha\beta) = p_k^j(\alpha)\, p_i^k(\beta)$$

eşitlikleri ile tanımlı çarpma işlemine göre bir yarı grup olsun. Bu durumda her $\left(a_i^j, a_{ik}^j \right) \in \mathfrak{L}_n^2$ elemanı $\left(a_i^j, a_{ik}^j, a_i^j \right)$ şeklinde düşünülebileceğinden; $\mathfrak{L}_n^2$ grubu $\tilde{\mathfrak{L}}_n^2$ yarı grubunun bir alt grubu olur. Ayrıca (2.3.3)'e benzer şekilde

$$a_i^j\left(\sigma(\alpha)\right) = a_i^j(\alpha)$$

eşitliği ile verilen $\sigma : \tilde{\mathfrak{L}}_n^2 \to L_n^1$ doğal homomorfizmasını düşünelim. Şimdi her $\left(U, u^i \right)$ koordinat komşuluğu için

$$a_j^i \cdot \tilde{f}_U = \delta_j^i, \quad a_{jk}^i \cdot \tilde{f}_U = \Lambda_{jk}^i, \quad p_j^i \cdot \tilde{f}_U = -P_j^i$$

eşitlikleri ile verilen bir $\tilde{f}_U : U \to \tilde{\mathfrak{L}}_n^2$ dönüşümü tanımlayalım, burada Λ_{jk}^i bileşeni (2.3.20) eşitliği ile belirlidir.

Şimdi (2.3.8)'den, bir $\left(U, u^i \right)$ koordinat komşuluğu için Γ genel konneksiyonunu

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \partial u_i \otimes \left(P_j^i d^2 u^j + \Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k \right) \\
&= \partial u_i \otimes \left(d\left(P_j^i du^j \right) - du^j \otimes dP_j^i + \Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k \right) \\
&= \partial u_i \otimes \left(d\left(P_j^i du^j \right) - \partial_k P_j^i du^j \otimes du^k + \Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazarsak (2.3.20)'den bu eşitlik

$$\Gamma = \partial u_i \otimes \left(d\left(P_j^i du^j \right) + \Lambda_{jk}^i du^j \otimes du^k \right)$$

şeklini alır. Diğer bir $\left(V, v^i \right)$ koordinat komşuluğu için (2.3.13)'ten

$$\frac{\partial \overline{P}_k^h}{\partial v^l} = \frac{\partial}{\partial v^l}\left(\frac{\partial v^h}{\partial u^i} P_j^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial^2 v^h}{\partial u^m \partial u^i} P_j^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l} + \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial P_j^i}{\partial v^l}\frac{\partial u^j}{\partial v^k} + \frac{\partial v^h}{\partial u^i} P_j^i \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^l \partial v^k}$$

elde edilir ki bu eşitlik (2.3.14)'ten çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}_{kl}^h - \frac{\partial \overline{P}_k^h}{\partial v^l} &= \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\left(P_j^i \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^l \partial v^k} + \Gamma_{jm}^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l}\right) \\
&\quad - \frac{\partial^2 v^h}{\partial u^m \partial u^i} P_j^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l} - \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial P_j^i}{\partial v^l}\frac{\partial u^j}{\partial v^k} - \frac{\partial v^h}{\partial u^i} P_j^i \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^l \partial v^k} \\
&= -\frac{\partial^2 v^h}{\partial u^m \partial u^i} P_j^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l} - \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\frac{\partial P_j^i}{\partial u^m}\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l} + \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\Gamma_{jm}^i \frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l}
\end{aligned}$$

ya da

$$\overline{\Lambda}_{kl}^h = \left(-\frac{\partial^2 v^h}{\partial u^m \partial u^i} P_j^i + \frac{\partial v^h}{\partial u^i}\Lambda_{jm}^i\right)\frac{\partial u^j}{\partial v^k}\frac{\partial u^m}{\partial v^l} \tag{2.3.31}$$

bulunur. Böylece $\left(V, v^i\right)$ koordinat komşuluğunda Γ genel konneksiyonu

$$\Gamma = \partial v_h \otimes \left(d\left(\overline{P}_k^h dv^k\right) + \overline{\Lambda}_{lm}^h dv^l \otimes dv^m\right)$$

şeklinde olup $U \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde $\left(U, u^i\right)$ ve $\left(V, v^i\right)$ koordinat komşuluklarında (2.3.13) ve (2.3.31) eşitlikleri

$$g_{VU}\left(\delta_j^i, \Lambda_{jk}^i, -P_j^i\right) = \left(\delta_j^i, \overline{\Lambda}_{jk}^i, -\overline{P}_j^i\right)\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)$$

ya da kısaca

$$g_{VU}\tilde{f}_U = \tilde{f}_V\left(\sigma \cdot g_{VU}\right) \tag{2.3.32}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer bir deyişle $\left\{\tilde{f}_U\right\}$ dönüşümleri Γ genel konneksiyonunu karakterize eder ve böylece (2.3.32) ile (2.3.15) eşitlikleri birbirine denk bulunur.

Şimdi $Q = \partial u_i \otimes Q^i_j du^j$, bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunda tanımlı bir tensör alanı olsun. $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunda sırasıyla

$$a^i_j \cdot q_U = Q^i_j, \quad a^i_{jk} \cdot q_U = 0$$

ve

$$a^i_j \cdot \tilde{q}_U = \delta^i_j, \quad a^i_{jk} \cdot \tilde{q}_U = 0, \quad p^i_j \cdot \tilde{q}_U = Q^i_j$$

eşitlikleri ile tanımlı $q_U : U \to \mathfrak{M}^2_n$ ve $\tilde{q}_U : U \to \tilde{\mathfrak{L}}^2_n$ dönüşümlerini düşünelim. Bu dönüşümler benzer şekilde

$$\left(\sigma \cdot g_{VU}\right) q_U = q_V \left(\sigma \cdot g_{VU}\right) \quad \text{ve} \quad \left(\sigma \cdot g_{VU}\right) \tilde{q}_U = \tilde{q}_V \left(\sigma \cdot g_{VU}\right)$$

eşitliklerini sağlar. Böylece (2.3.15) ve (2.3.32)'den, $f'_U = q_U f_U$ ve $f''_U = \tilde{f}_U \tilde{q}_U$ eşitlikleri ile tanımlı $\{f'_U\}$ ve $\{f''_U\}$ dönüşümleri

$$\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)\left(q_U f_U\right) = \left(q_V f_V\right) g_{VU} \qquad \text{ve} \qquad g_{VU}\left(\tilde{f}_U \tilde{q}_U\right) = \left(\tilde{f}_V \tilde{q}_V\right)\left(\sigma \cdot g_{VU}\right)$$

eşitliklerini gerçekler. $\{f'_U\}$ ve $\{f''_U\}$ dönüşümlerinin karakterize ettiği genel konneksiyonları sırasıyla $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ ile gösterirsek,

$$a^i_j \cdot f'_U = a^i_j \cdot \left(q_U f_U\right) = a^i_k\left(q_U\right) a^k_j\left(f_U\right) = Q^i_k P^k_j$$

$$\begin{aligned} a^i_{jk} \cdot f'_U &= a^i_{jk} \cdot \left(q_U f_U\right) = a^i_l\left(q_U\right) a^l_{jk}\left(f_U\right) + a^i_{lh}\left(q_U\right) a^l_j\left(f_U\right) a^h_k\left(f_U\right) \\ &= Q^i_l \Gamma^l_{jk} = {}'\Gamma^i_{jk} \end{aligned}$$

ve

$$a^i_j \cdot f''_U = a^i_j \cdot \left(\tilde{f}_U \tilde{q}_U\right) = a^i_k\left(\tilde{f}_U\right) a^k_j\left(\tilde{q}_U\right) = \delta^i_k \delta^k_j = \delta^i_j$$

$$\begin{aligned} a^i_{jk} \cdot f''_U &= a^i_{jk} \cdot \left(\tilde{f}_U \tilde{q}_U\right) = a^i_l\left(\tilde{f}_U\right) a^l_{jk}\left(\tilde{q}_U\right) + a^i_{lh}\left(\tilde{f}_U\right) p^l_j\left(\tilde{q}_U\right) a^h_k\left(\tilde{q}_U\right) \\ &= \Lambda^i_{lh} Q^l_j \delta^h_k = \Lambda^i_{lk} Q^l_j = {}''\Gamma^i_{jk} \end{aligned}$$

$$p^i_j \cdot f\,''_U = p^i_j \cdot \left(\tilde{f}_U \tilde{q}_U\right) = p^i_k\left(\tilde{f}_U\right) p^k_j\left(\tilde{q}_U\right) = -P^i_k Q^k_j$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} {}'\Gamma &= \partial u_i \otimes \left(\left(Q^i_l P^l_j\right) d^2u^j + {}'\Gamma^i_{jk} du^j \otimes du^k\right) \\ &= \partial u_i Q^i_l \otimes \left(P^l_j d^2u^j + \Gamma^l_{jk} du^j \otimes du^k\right) = Q\Gamma \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

ve

$$\begin{aligned} {}''\Gamma &= \partial u_i \otimes \left(d\left(Q^l_j P^i_l du^j\right) + {}''\Gamma^i_{jk} du^j \otimes du^k\right) \\ &= \partial u_i \otimes \left(d\left(Q^l_j P^i_l du^j\right) + \Lambda^i_{lk} Q^l_j du^j \otimes du^k\right) \\ &= \partial u_i \otimes \left(P^i_l d\left(Q^l_j du^j\right) + Q^l_j \partial_k P^i_l du^j \otimes du^k + \left(\Gamma^i_{lk} - \partial_k P^i_l\right) Q^l_j du^j \otimes du^k\right) \\ &= \partial u_i \otimes \left(P^i_l d\left(Q^l_j du^j\right) + \Gamma^i_{lk}\left(Q^l_j du^j\right) \otimes du^k\right) = \Gamma Q \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.4. (2.3.33) ve (2.3.34) eşitlikleri ile belirli $'\Gamma = Q\Gamma$ ve $''\Gamma = \Gamma Q$ genel konneksiyonlarına sırasıyla Γ genel konneksiyonunun **kontravaryant** ve **kovaryant kısmı** denir ve bileşenler cinsinden ise

$$'\Gamma^i_{jk} = Q^i_l \Gamma^l_{jk}, \tag{2.3.35}$$

$$\begin{aligned} ''\Gamma^i_{jk} &= \Lambda^i_{lk} Q^l_j \\ &= \left(\Gamma^i_{lk} - \partial_k P^i_l\right) Q^l_j \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

şeklinde ifade edilir.

2.3.3. Regüler Genel Konneksiyonlar

2.3.3.1. Regüler Genel Konneksiyonlar ve Temel Kovaryant Türev

Tanım 2.3.5. $P = \lambda(\Gamma)$ homomorfizması $T(\mathfrak{X}_n)$'nin bir izomorfizması ise Γ genel konneksiyonuna **regüler genel konneksiyon** denir.

P, $T(\mathfrak{X}_n)$'nin bir izomorfizması olduğundan P'nin tersi tanımlı olup bunu $P^{-1} = Q$ ile göstereceğiz. Γ bir regüler genel konneksiyon ise Γ'nın kontravaryant ve kovaryant kısımları için §2.3.2.3.'teki $\{q_U\}$ dönüşümlerini $P^i_j Q^j_k = \delta^i_k$ eşitliğini sağlayan $Q = \partial u_i \otimes Q^i_j du^j$ tensör alanı yardımıyla tanımlarsak, (2.3.35) ve (2.3.36) eşitliklerinin P^i_j ile çarpılmasıyla

$$\Gamma^h_{jk} = P^h_i \,{}'\Gamma^i_{jk}, \tag{2.3.37}$$

$$\Gamma^i_{hk} = {}''\Gamma^i_{jk} P^j_h + \partial_k P^i_h \tag{2.3.38}$$

elde edilir. Γ bir regüler genel konneksiyon ise (2.3.16) ile tanımlı λ dönüşümü, (2.3.33) ve (2.3.34) eşitliklerine uygulandığında, $\lambda({}'\Gamma) = \lambda({}''\Gamma) = \delta^i_j \partial u_i \otimes du^j = I$ elde edilir. Böylece Teorem 2.3.2.'den Γ regüler genel konneksiyonunun kontravaryant ve kovaryant kısımları olan ${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ konneksiyonları birer klasik afin konneksiyondur. Bu çalışmada daha çok temel kovaryant diferansiyel kullanılacağından, ${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ konneksiyonlarını, (2.3.37) ve (2.3.38) eşitlikleri ile Γ regüler genel konneksiyonundan elde edilen klasik afin konneksiyonlar anlamında kullanacağız. Bu anlamda, (2.3.37) ve (2.3.38)'den

$$\partial_k P^i_j + P^h_j \,{}''\Gamma^i_{hk} - P^i_h \,{}'\Gamma^h_{jk} = 0 \tag{2.3.39}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe **Otsuki denklemi** adı verilir.

Şimdi Γ regüler genel konneksiyonuna göre kovaryant diferansiyeli tanımlayalım. §2.3.2.2.'deki μ ve φ dönüşümlerine benzer şekilde ${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ için $\varphi' = \varphi_{'\Gamma}$ ve $\varphi'' = \varphi_{''\Gamma}$ dönüşümleri

$$\varphi'\big|_{\Im^2(\mathfrak{X}_n)} = \mu' = \mu_{'\Gamma}, \qquad \varphi''\big|_{\Im^2(\mathfrak{X}_n)} = \mu'' = \mu_{''\Gamma}$$

olmak üzere

$$\varphi'\left(\partial u_i\right)=\partial u_i,\quad \varphi'\left(\partial^2 u_{jk}\right)='\Gamma^i_{jk}\partial u_i$$
$$\varphi''\left(\partial u_i\right)=\partial u_i,\quad \varphi''\left(\partial^2 u_{jk}\right)=''\Gamma^i_{jk}\partial u_i$$
$$\varphi'\left(du^i\right)=du^i,\quad \varphi'\left(d^2u^i\right)=-'\Gamma^i_{jk}du^j\otimes du^k,\quad \varphi'\left(du^i\otimes du^h\right)=du^i\otimes du^h$$
$$\varphi''\left(du^i\right)=du^i,\quad \varphi''\left(d^2u^i\right)=-''\Gamma^i_{jk}du^j\otimes du^k,\quad \varphi''\left(du^i\otimes du^h\right)=du^i\otimes du^h$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eşitlikler kullanılarak (2.3.17) ve (2.3.21) eşitlikleri

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\partial u_i\right)=\varphi\varphi'\left(\partial u_i\right)=\varphi\varphi''\left(\partial u_i\right),\\
&\varphi\left(\partial^2 u_{jk}\right)=\Gamma^i_{jk}\partial u_i=P^i_h\,'\Gamma^h_{jk}\partial u_i=\varphi\left('\Gamma^h_{jk}\partial u_i\right)=\varphi\varphi'\left(\partial^2 u_{jk}\right),\\
&\varphi\left(du^i\right)=\varphi\varphi'\left(du^i\right)=\varphi\varphi''\left(du^i\right),\\
&\varphi\left(d^2u^i\right)=-\Lambda^i_{jk}du^j\otimes du^k=-''\Gamma^i_{hk}P^h_j du^j\otimes du^k=\varphi\left(-''\Gamma^i_{hk}du^h\otimes du^k\right)\\
&\qquad\qquad=\varphi\varphi''\left(d^2u^i\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 2.3.6. $\varphi=\varphi_\Gamma$ homomorfizmasının 1. mertebeden tensör çarpım demetlerine kısıtlanışı $\overline{\varphi}$ olsun. $\overline{\mu}=\overline{\mu}_\Gamma$ homomorfizması $T\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ve $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$ demetlerinde özdeşlik dönüşümü, $\mathfrak{I}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ve $\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_n\right)$ demetlerinde, sırasıyla, φ' ve φ'' homomorfizmaları olmak üzere Γ regüler genel konneksiyonu için

$$\varphi=\overline{\varphi}\cdot\overline{\mu}$$

geçerlidir, [3].

$\overline{\mu}=\overline{\mu}_\Gamma$ homomorfizmasına Γ **regüler genel konneksiyonunun temel homomorfizması** denir. $\overline{\mu}=\overline{\mu}_\Gamma$ temel homomorfizması yardımıyla

$$\overline{D}=\overline{D}_\Gamma=\overline{\mu}_\Gamma\cdot d$$

şeklinde tanımlı kovaryant diferansiyele Γ **regüler genel konneksiyonunun temel kovaryant diferansiyeli** denir. (2.3.25)’e göre

$$D=\overline{\varphi}\cdot\overline{D} \tag{2.3.40}$$

yazılabilir. Herhangi bir $V = V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes(p,q)}\right)$ tensör alanı için (2.3.26) ve (2.3.27)'ye benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\overline{D}V &= \overline{\mu} \cdot d\left(V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \\
&= \overline{\mu}\Big(V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} d\left(\partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \\
&\qquad + \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes dV^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\Big) \\
&= V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \overline{\mu}\Big(\sum_{s=1}^{p} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \otimes \partial^2 u_{i_s h} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\
&\qquad + \sum_{t=1}^{q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_{t-1}} \otimes d^2 u^{j_t} \dot{\otimes}\left(du^{j_{t+1}} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right)\Big) \\
&\quad + \overline{\mu}\left(\partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes \partial_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} du^h\right) \\
&= \left(\sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \otimes \partial u_{i_s} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \\
&\quad \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\
&\quad - \left(\sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_{t+1} \ldots j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \\
&\quad \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_{t-1}} \otimes du^{j_t} \otimes du^h \dot{\otimes}\left(du^{j_{t+1}} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}\right) \\
&\quad + \left(\partial_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\
&= \left(\partial_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_{t+1} \ldots j_q}\right) \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \\
&\quad \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes du^h
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$\overline{D}V = \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q} \otimes \overline{D}V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

olmak üzere

$$\overline{D}V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \overline{D}_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} du^h \tag{2.3.41}$$

ve

$$\overline{D}_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \partial_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_{t+1} \ldots j_q} \tag{2.3.42}$$

elde edilir. (2.3.42) eşitliği ile belirli $\bar{D}_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensör alanına $V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ tensör alanının du^h doğrultusundaki **temel kovaryant türevi** adı verilir. D kovaryant diferansiyeli ile $\bar{D}$ temel kovaryant diferansiyeli arasındaki ilişkiyi ifade eden (2.3.40) eşitliğini bileşenler cinsinden yazmak istersek; (2.3.27) ve (2.3.42)'den

$$D_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = P^{i_1}_{k_1} \ldots P^{i_p}_{k_p} \left(\bar{D}_h V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \right) P^{l_1}_{j_1} \ldots P^{l_q}_{j_q} \tag{2.3.43}$$

ya da

$$\bar{D}_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = Q^{i_1}_{k_1} \ldots Q^{i_p}_{k_p} \left(D_h V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \right) Q^{l_1}_{j_1} \ldots Q^{l_q}_{j_q} \tag{2.3.44}$$

bulunur.

Şimdi bileşenleri $V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ ve $W^{i_{p+1} \ldots i_{p+a}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+b}}$ olan (p,q) ve (a,b) tipinde iki tensör alanı, sırasıyla, V ve W olmak üzere $V \otimes W$ tensör çarpımının temel kovaryant türevi (2.3.28) ve (2.3.44) uyarınca

$$\bar{D}_h \left(V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} W^{i_{p+1} \ldots i_{p+a}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+b}} \right) = \left(\bar{D}_h V^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \right) W^{k_{p+1} \ldots k_{p+a}}_{l_{q+1} \ldots l_{q+b}} + V^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \left(\bar{D}_h W^{i_{p+1} \ldots i_{p+a}}_{j_{q+1} \ldots j_{q+b}} \right) \tag{2.3.45}$$

olarak elde edilir. (2.3.45) eşitliği, regüler genel konneksiyona göre temel kovaryant türevin, klasik afin konneksiyonlarda çarpımın kovaryant türevi için geçerli olan Leibniz kuralını sağladığını göstermektedir.

Şimdi de temel kovaryant türev ve büzülme arasındaki ilişkiyi gösterelim. Bileşenleri $V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q j}$ olan (p+1,q+1) tipindeki bir V tensör alanı için (2.3.42) uyarınca

$$\begin{aligned}
\delta^j_i \left(\bar{D}_h V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q j} \right) &= \partial_h V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q i} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p i}_{j_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots j_q i} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_{t+1} \ldots j_q i} \\
&\quad + {}'\Gamma^{i}_{kh} V^{i_1 \ldots i_p k}_{j_1 \ldots j_q i} - {}''\Gamma^{k}_{ih} V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q k} \\
&= \bar{D}_h \left(V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q j} \delta^j_i \right) + \left({}'\Gamma^{j}_{ih} - {}''\Gamma^{j}_{ih} \right) V^{i_1 \ldots i_p i}_{j_1 \ldots j_q j}
\end{aligned}$$

elde edilir ki yine (2.3.42) uyarınca

$$\overline{D}_h \delta_i^j = {}'\Gamma_{ih}^j - {}''\Gamma_{ih}^j \tag{2.3.46}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\delta_i^j \left(\overline{D}_h V_{j_1 \ldots j_q j}^{i_1 \ldots i_p i} \right) = \overline{D}_h \left(V_{j_1 \ldots j_q j}^{i_1 \ldots i_p i} \delta_i^j \right) + V_{j_1 \ldots j_q j}^{i_1 \ldots i_p i} \overline{D}_h \delta_i^j \tag{2.3.47}$$

eşitliği bulunur. (2.3.46) eşitliği, Kronecker deltasının regüler genel konneksiyona göre temel kovaryant türevinin klasik afin konneksiyonlardan farklı olarak her zaman sıfır olmadığını göstermektedir. Böylece klasik afin konneksiyonlardan farklı olarak, temel kovaryant türev ve büzülme işlemleri değişmeli değildir, ancak $\overline{D}_h \delta_i^j = {}'\Gamma_{ih}^j - {}''\Gamma_{ih}^j = 0$ ya da ${}'\Gamma = {}''\Gamma$ ise bu işlemler değişmeli olur.

2.3.3.2. ${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ Konneksiyonlarına Göre Temel Kovaryant Diferansiyel

Bilindiği gibi klasik afin konneksiyonların kovaryant diferansiyelleri hem büzülme işlemi ile değişmelidir ve hem de çarpımın kovaryant diferansiyeli söz konusu olduğunda Leibniz kuralını gerçeklemektedir. Bu nedenle regüler genel konneksiyonlarla çalışırken onun kontravaryant ve kovaryant kısımları ile çalışmak hesaplamalarda kolaylık sağlar. Bunun için, ${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ konneksiyonlarına göre temel kovaryant diferansiyel ile Γ regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyel arasındaki ilişkiyi saptayalım.

${}'\Gamma$ ve ${}''\Gamma$ klasik afin konneksiyonlarına göre temel kovaryant diferansiyel operatörlerini, sırasıyla, ${}'\overline{D}$ ve ${}''\overline{D}$ ile gösterirsek klasik afin konneksiyon tanımından bileşenleri $V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ olan bir $V \in \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_n \right)^{\otimes(p,q)} \right)$ tensör alanı için

$$\begin{aligned} {}'\overline{D} V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} &= {}'\overline{D}_h V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} du^h \\ {}'\overline{D}_h V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} &= \partial_h V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma_{kh}^{i_s} V_{j_1 \ldots\ldots\ldots\ldots j_q}^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_{s+1} \ldots i_p} - \sum_{t=1}^{q} {}'\Gamma_{j_t h}^{k} V_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_{t+1} \ldots j_q}^{i_1 \ldots\ldots\ldots\ldots i_p} \end{aligned} \tag{2.3.48}$$

ve

$$
\begin{aligned}
&{}''\overline{D}V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = {}''\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} du^h \\
&{}''\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \partial_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} {}''\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q}
\end{aligned}
\tag{2.3.49}
$$

bulunur. (2.3.42)'de (2.3.46) dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} &= \partial_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma^{k}_{j_t h} V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q} \\
&= \partial_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} {}'\Gamma^{i_s}_{kh} V^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} \left({}'\Gamma^{k}_{j_t h} - \overline{D}_h \delta^{k}_{j_t} \right) V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q} \\
&= {}'\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{t=1}^{q} \left(\overline{D}_h \delta^{k}_{j_t} \right) V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q}
\end{aligned}
$$

ya da

$$
\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = {}'\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{t=1}^{q} \left(\overline{D}_h \delta^{k}_{j_t} \right) V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q} \tag{2.3.50}
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$
\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = {}''\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{s=1}^{p} \left(\overline{D}_h \delta^{i_s}_{k} \right) V^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q} \tag{2.3.51}
$$

elde edilir. (2.3.50) ve (2.3.51)'den, bileşenleri $V^{i_1\ldots i_p}$ olan bir kontravaryant V tensör alanı için

$$
\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p} = {}'\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p} \tag{2.3.52}
$$

ve bileşenleri $V_{j_1\ldots j_q}$ olan bir kovaryant V tensör alanı için

$$
\overline{D}_h V_{j_1\ldots j_q} = {}''\overline{D}_h V_{j_1\ldots j_q}
$$

eşitlikleri geçerli olur. Ayrıca (2.3.50) ve (2.3.51) eşitliklerinden ${}'\overline{D}$ ve ${}''\overline{D}$ temel kovaryant diferansiyel operatörleri arasında ilişki

$$
{}''\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = {}'\overline{D}_h V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{s=1}^{p} \left(\overline{D}_h \delta^{i_s}_{k} \right) V^{i_1\ldots i_{s-1}k i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q} + \sum_{t=1}^{q} \left(\overline{D}_h \delta^{k}_{j_t} \right) V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}k j_{t+1}\ldots j_q}
$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

Şimdi (2.3.48)'den $'\bar{D}_h P_j^i$ hesaplanır, sırasıyla, (2.3.46) ve (2.3.39) kullanılırsa

$$\begin{aligned} '\bar{D}_h P_j^i &= \partial_h P_j^i + '\Gamma_{kh}^i P_j^k - '\Gamma_{jh}^k P_k^i \\ &= \partial_h P_j^i + \left(\bar{D}_h \delta_k^i + ''\Gamma_{kh}^i\right) P_j^k - '\Gamma_{jh}^k P_k^i \\ &= \left(\partial_h P_j^i + ''\Gamma_{kh}^i P_j^k - '\Gamma_{jh}^k P_k^i\right) + P_j^k \bar{D}_h \delta_k^i \end{aligned}$$

ya da

$$'\bar{D}_h P_j^i = P_j^k \bar{D}_h \delta_k^i \tag{2.3.53}$$

bulunur. (2.3.49)'dan benzer şekilde

$$''\bar{D}_h P_j^i = P_k^i \bar{D}_h \delta_j^k$$

elde edilir. Böylece (2.3.47)'den, temel kovaryant türev ile büzülme arasındaki ilişkiyi ifade eden aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.3.7. Γ regüler genel konneksiyonunun temel kovaryant türevi ile büzülme işleminin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul birbirine denk olan aşağıdaki eşitliklerden birinin sağlanmasıdır, [3]:

i) $\bar{D}_h \delta_j^i = 0$, **ii)** $'\bar{D}_h P_j^i = 0$, **iii)** $''\bar{D}_h P_j^i = 0$, **iv)** $'\Gamma = ''\Gamma$.

2.3.4 Eğri Boyunca Kovaryant Türev

Γ, $\mathfrak{X}_n$'nin bir genel konneksiyonu olsun. $\mathfrak{X}_n$'de bir $C : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca tanımlı ve bileşenleri $V_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ olan bir V tensör alanının C eğrisi boyunca kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}\frac{DV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{dt} &= P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}\frac{dV^{k_1\ldots k_p}_{h_1\ldots h_q}}{dt}P^{h_1}_{j_1}\ldots P^{h_q}_{j_q}\\ &+\sum_{s=1}^{p}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}\Gamma^{i_s}_{k_s h}\frac{du^h}{dt}P^{i_{s+1}}_{k_{s+1}}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{h_1\ldots h_q}P^{h_1}_{j_1}\ldots P^{h_q}_{j_q}\\ &-\sum_{t=1}^{q}P^{i_1}_{k_1}\ldots P^{i_p}_{k_p}V^{k_1\ldots k_p}_{h_1\ldots h_q}P^{h_1}_{j_1}\ldots P^{h_{t-1}}_{j_{t-1}}\Lambda^{h_t}_{j_t h}\frac{du^h}{dt}P^{h_{t+1}}_{j_{t+1}}\ldots P^{h_q}_{j_q}\end{aligned} \tag{2.3.54}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu eşitlik C ’nin $\frac{du^i}{dt}$ tanjant vektörü için

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right)=P^i_k\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt} \tag{2.3.55}$$

şeklini alır. C eğrisi için diğer bir s parametresi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{D}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)&=P^i_k\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma^i_{kh}\frac{du^k}{ds}\frac{du^h}{ds}\\ &=P^i_k\left(\frac{d^2u^k}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{du^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\right)+\Gamma^i_{kh}\frac{du^k}{dt}\frac{du^h}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik (2.3.55) ile karşılaştırılırsa

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)=\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{D}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right)+\frac{d^2t}{ds^2}P^i_k\frac{du^k}{dt} \tag{2.3.56}$$

bulunur. Bu eşitlik, t parametreli bir C eğrisi boyunca tanımlı bir $\psi=\psi(t)$ fonksiyonunun,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right)=\psi P^i_j\frac{du^j}{dt} \tag{2.3.57}$$

koşulunu sağlamasının parametre değişiminden bağımsız olduğu anlamına gelir. Gerçekten (2.3.57) eşitliği (2.3.56)’da yazılırsa

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)=\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\psi+\frac{d^2t}{ds^2}\right\}\frac{ds}{dt}P_k^i\frac{du^k}{ds}$$

elde edilir ki bu eşitlik, diğer bir s parametresi için ψ fonksiyonunun yerini

$$\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\psi+\frac{d^2t}{ds^2}\right\}\frac{ds}{dt} \tag{2.3.58}$$

fonksiyonunun alması demektir.

Tanım 2.3.8. t parametreli bir C eğrisi, bu eğri boyunca tanımlı bir ψ fonksiyonu için (2.3.57) eşitliğini sağlıyorsa C eğrisine Γ'ya göre **geodezik** denir ve bu geodezik için

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)=0$$

koşulunu sağlayan s parametresi geodeziğin **afin parametresi** adını alır.

(2.3.58) ifadesinin sıfır olması durumunda verilen bir t parametresinden s afin parametresine

$$s=\int e^{\int\psi(t)dt}dt$$

şeklinde geçilebileceğinden aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.3.9. C geodezik eğrisinin her noktasında $P_k^i\dfrac{du^k}{dt}\neq 0$ ise C'nin afin parametreleri bir afin dönüşümle tek türlü belirlidir. C geodezik eğrisinin her noktasında $P_k^i\dfrac{du^k}{dt}=0$ ise her parametre bir afin parametredir, [3].

Şimdi Γ bir regüler genel konneksiyon ise (2.3.41), (2.3.42) ve (2.3.54)'ten

$$\frac{\bar{D}V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{dt}=\frac{dV^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{dt}+\sum_{s=1}^{p}{}'\Gamma^{i_s}_{k\,h}\frac{du^h}{dt}V^{i_1\ldots i_{s-1}ki_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots\ldots\ldots j_q}-\sum_{t=1}^{q}{}''\Gamma^{k}_{j_t\,h}\frac{du^h}{dt}V^{i_1\ldots\ldots\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{t-1}kj_{t+1}\ldots j_q} \tag{2.3.59}$$

bulunur. P bir izomorfizma olduğundan (2.3.57) koşulu

$$\frac{\bar{D}}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right)=\psi\frac{du^i}{dt}$$

şeklini alır. $\frac{du^i}{dt}$ kontravaryant tensörü için (2.3.52)'den $\frac{\bar{D}}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right) = \frac{'\bar{D}}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right)$ olduğundan aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.3.10. $\mathfrak{X}_n$ üstünde tanımlı bir C eğrisinin Γ regüler genel konneksiyonuna göre geodezik olması için gerek ve yeter koşul C'nin $'\Gamma$'ye göre bir geodezik eğri olmasıdır, [3].

2.3.5. Genel Konneksiyonların Burulma ve Eğrilik Formları

$\mathfrak{X}_n$'nin bir Γ genel konneksiyonunun burulma ve eğrilik formlarını bulmak için klasik afin konneksiyonlarda olduğu gibi [1], Γ'nın Tanım 2.2.8.'deki $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ çatı demeti üstündeki diferansiyel formlarını tanımlayalım. §2.2.2.'de belirtildiği gibi, $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ çatı demetinin herhangi bir noktası $\mathfrak{X}_n$'nin bir çatısı olarak düşünülebileceğinden, (2.2.6) eşitliği

$$e_\lambda = a_\lambda^i \partial u_i, \qquad (\lambda = 1,...,n) \tag{2.3.60}$$

şeklinde yazılabilir. a_λ^i, $GL(n,\mathbb{R})$ grubu üstünde tanımlı bir fonksiyon olduğundan, her $\alpha \in L_n^1 = GL(n,\mathbb{R})$ için

$$b_j^\lambda a_\mu^j = \delta_\mu^\lambda \tag{2.3.61}$$

şeklinde belirli bir $b_j^\lambda(\alpha) = a_j^\lambda(\alpha^{-1})$ fonksiyonu vardır. (2.3.60)'ın kovaryant diferansiyeli alınırsa, (2.3.26) ve (2.3.27)'den

$$De_\lambda = \partial u_i \otimes Da_\lambda^i = \partial u_i \otimes \left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma_{jh}^i a_\lambda^j du^h\right)$$

bulunur. (2.3.61)'den (2.3.60) eşitliği $\partial u_i = b_i^\mu e_\mu$ şeklinde yazılabileceğinden yukarıdaki eşitlik

$$De_\lambda = e_\mu \otimes b_i^\mu \left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma_{jh}^i a_\lambda^j du^h\right)$$

şeklini alır. $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ çatı demetinde $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunun (u^i,α), $\alpha \in L_n^1 = GL(n,\mathbb{R})$, lokal koordinat sistemi kullanılarak

$$\theta_\lambda^\mu = b_i^\mu(\alpha)\left\{P_j^i(u)\,da_\lambda^j(\alpha)+\Gamma^i_{jh}(u)\,a_\lambda^j(\alpha)\,du^h\right\} \tag{2.3.62}$$

diferansiyel formunu tanımlayabiliriz. Diğer bir (v^i,β) lokal koordinat sisteminde, e_λ tanjant vektör alanı

$$e_\lambda = \overline{a}_\lambda^i \partial v_i$$

şeklinde yazılırsa, $\overline{a}_\lambda^i$ ve bunun tersi olan $\overline{b}_i^\mu$ fonksiyonları için (2.2.8)'den

$$\overline{a}_\lambda^i = a_\lambda^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \qquad \text{ve} \qquad \overline{b}_i^\mu = b_j^\mu \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \tag{2.3.63}$$

eşitlikleri geçerli olup, (2.3.62) eşitliği

$$\overline{\theta}_\lambda^\mu = \overline{b}_i^\mu(\beta)\left\{\overline{P}_j^i(v)\,d\overline{a}_\lambda^j(\beta)+\overline{\Gamma}^i_{jh}(v)\,\overline{a}_\lambda^j(\beta)\,dv^h\right\} \tag{2.3.64}$$

şeklini alır. Şimdi (2.3.64)'te, (2.2.5), (2.3.13), (2.3.14) kullanılır ve (2.3.63) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\overline{\theta}_\lambda^\mu &= \overline{b}_i^\mu(\beta)\left\{\overline{P}_j^i(v)\,d\overline{a}_\lambda^j(\beta)+\overline{\Gamma}^i_{jh}(v)\,\overline{a}_\lambda^j(\beta)\,dv^h\right\}\\
&= b_k^\mu(\alpha)\frac{\partial u^k}{\partial v^i}\left\{\frac{\partial v^i}{\partial u^h}P_l^h(u)\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\,d\left(a_\lambda^l(\alpha)\frac{\partial v^j}{\partial u^l}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{\partial v^i}{\partial u^l}\left(P_m^l(u)\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^h \partial v^j}+\Gamma^l_{mr}(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^j}\frac{\partial u^r}{\partial v^h}\right)a_\lambda^s(\alpha)\frac{\partial v^j}{\partial u^s}\frac{\partial v^h}{\partial u^t}\,du^t\right\}\\
&= b_k^\mu(\alpha)\left\{P_l^k(u)\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\left(da_\lambda^l(\alpha)\frac{\partial v^j}{\partial u^l}+a_\lambda^l(\alpha)\,d\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^l}\right)\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^s}\frac{\partial v^h}{\partial u^t}P_m^k(u)\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^h \partial v^j}+\Gamma^k_{st}(u)\right)a_\lambda^s(\alpha)\,du^t\right\}
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\overline{\theta}_\lambda^\mu = b_k^\mu(\alpha)\left\{P_l^k(u)\,da_\lambda^l(\alpha) + P_l^k(u)\,a_\lambda^l(\alpha)\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\,d\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^l}\right)\right.$$

$$\left. + P_m^k(u)\,a_\lambda^s(\alpha)\frac{\partial v^j}{\partial u^s}\,d\left(\frac{\partial u^m}{\partial v^j}\right) + \Gamma_{st}^k(u)\,a_\lambda^s(\alpha)\,du^t\right\}$$

$$= b_k^\mu(\alpha)\left\{P_l^k(u)\,da_\lambda^l(\alpha) + \Gamma_{st}^k(u)\,a_\lambda^s(\alpha)\,du^t\right\}$$

bulunur. Bu eşitlik (2.3.62) ile karşılaştırılırsa aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir:

Yardımcı Teorem 2.3.11. θ_μ^λ diferansiyel formları tüm $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ uzayında tanımlı ve $\mathfrak{X}_n$ 'nin lokal koordinat seçiminden bağımsızdır, [3].

Tanım 2.3.12. (2.3.62) eşitliği ile tanımlı θ_μ^λ diferansiyel formlarına Γ 'nın $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ 'deki **konneksiyon formları** denir.

Klasik afin konneksiyon teorisinde olduğu gibi, $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ 'de burulma ve eğrilik formlarını elde etmek için önemli bir diğer diferansiyel formu tanıyalım. (2.2.5),

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\,dv^j$$

eşitliği b_i^μ ile çarpılır ve (2.3.63) kullanılırsa

$$b_i^\mu du^i = b_i^\mu \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\,dv^j = \overline{b}_j^\mu dv^j\,,$$

yani $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ 'de

$$\theta^\mu = b_i^\mu(\alpha)\,du^i \tag{2.3.65}$$

şeklinde tanımlı diferansiyel formlar $\mathfrak{X}_n$ 'nin lokal koordinat seçiminden bağımsızdır. Şimdi $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$ 'de

$$P_\lambda^\mu = b_j^\mu(\alpha)\,P_i^j(u)\,a_\lambda^i(\alpha) \tag{2.3.66}$$

dönüşümünü düşünelim. (2.3.62), (2.3.65), (2.3.66) kullanılır ve (2.3.61) dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
P_\lambda^\mu d\theta^\lambda + \theta_\lambda^\mu \wedge \theta^\lambda &= P_\lambda^\mu d\left(b_k^\lambda(\alpha)du^k\right) \\
&\quad + b_i^\mu(\alpha)\left\{P_j^i(u)da_\lambda^j(\alpha) + \Gamma^i_{jh}(u)a_\lambda^j(\alpha)du^h\right\} \wedge \left(b_k^\lambda(\alpha)du^k\right) \\
&= P_\lambda^\mu db_k^\lambda(\alpha) \wedge du^k \\
&\quad + b_i^\mu(\alpha)P_j^i(u)b_k^\lambda(\alpha)da_\lambda^j(\alpha) \wedge du^k + b_i^\mu(\alpha)\Gamma^i_{jh}(u)du^h \wedge du^j \\
&= P_\lambda^\mu db_k^\lambda(\alpha) \wedge du^k \\
&\quad - b_i^\mu(\alpha)P_j^i(u)a_\lambda^j(\alpha)db_k^\lambda(\alpha) \wedge du^k + b_i^\mu(\alpha)\Gamma^i_{jh}(u)du^h \wedge du^j \\
&= -b_i^\mu(\alpha)\Gamma^i_{jh}(u)du^j \wedge du^h
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$
\Omega^i \equiv -\Gamma^i_{jh}(u)du^j \wedge du^h \tag{2.3.67}
$$

yazılırsa $\mathfrak{B}(\mathfrak{X}_n)$'de

$$
\Theta^\mu \equiv P_\lambda^\mu d\theta^\lambda + \theta_\lambda^\mu \wedge \theta^\lambda = b_i^\mu(\alpha)\Omega^i
$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden Θ^μ diferansiyel formlarını elde ederiz. $\mathfrak{X}_n$'nin diğer bir (V, v^i) koordinat komşuluğu için $U \cap V \neq \varnothing$ ise

$$
\begin{aligned}
\bar{\Omega}^i &= -\bar{\Gamma}^i_{jh}(v)dv^j \wedge dv^h \\
&= -\frac{\partial v^i}{\partial u^l}\left(P_m^l(u)\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^h \partial v^j} + \Gamma^l_{mr}(u)\frac{\partial u^m}{\partial v^j}\frac{\partial u^r}{\partial v^h}\right)\frac{\partial v^j}{\partial u^k}\frac{\partial v^h}{\partial u^s}du^k \wedge du^s \\
&= -\frac{\partial v^i}{\partial u^l}\frac{\partial v^j}{\partial u^k}\frac{\partial v^h}{\partial u^s}P_m^l(u)\frac{\partial^2 u^m}{\partial v^h \partial v^j}du^k \wedge du^s - \frac{\partial v^i}{\partial u^l}\Gamma^l_{ks}(u)du^k \wedge du^s \\
&= -\frac{\partial v^i}{\partial u^l}\Gamma^l_{ks}(u)du^k \wedge du^s
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlik (2.3.67) ile karşılaştırılırsa aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir:

Yardımcı Teorem 2.3.12. Ω^i diferansiyel formları $\mathfrak{X}_n$'nin vektörel diferansiyel formlarıdır, [3].

Tanım 2.3.13. (2.3.67) eşitliği ile tanımlı Ω^i diferansiyel formlarına Γ'nın **burulma formları** denir. Bu formlara karşılık gelen ve lokal bileşenleri

$$
T^i_{jh} = \Gamma^i_{jh} - \Gamma^i_{hj} \tag{2.3.68}
$$

olan (1,2) tipindeki tensör alanına da Γ 'nın **burulma tensörü** adı verilir.
(2.3.68) eşitliğinden

$$\Omega^i = -\frac{1}{2} T^i_{jh} du^j \wedge du^h$$

yazılışı kolayca elde edilir.

Şimdi de Γ 'nın eğrilik formlarını elde edelim. Bunu için (2.3.61) dikkate alınarak, (2.3.62) ve (2.3.66) eşitlikleri yardımıyla $P^\mu_\nu d\theta^\nu_\sigma + \theta^\mu_\nu \wedge \theta^\nu_\sigma$ diferansiyel formunu hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
P^\mu_\nu d\theta^\nu_\sigma &= P^\mu_\nu d\left[b^\nu_i \left(P^i_j da^j_\sigma + \Gamma^i_{jh} a^j_\sigma du^h \right) \right] \\
&= P^\mu_\nu db^\nu_i \wedge \left(P^i_j da^j_\sigma + \Gamma^i_{jh} a^j_\sigma du^h \right) + P^\mu_\nu b^\nu_i d\left(P^i_j da^j_\sigma + \Gamma^i_{jh} a^j_\sigma du^h \right) \\
&= P^\mu_\nu \left(P^i_j db^\nu_i \wedge da^j_\sigma + \Gamma^i_{jh} a^j_\sigma db^\nu_i \wedge du^h \right) \\
&\quad + P^\mu_\nu b^\nu_i \left(dP^i_j \wedge da^j_\sigma + d\Gamma^i_{jh} \wedge a^j_\sigma du^h + \Gamma^i_{jh} da^j_\sigma \wedge du^h \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^\mu_\nu \wedge \theta^\nu_\sigma &= b^\mu_i \left(P^i_j da^j_\nu + \Gamma^i_{jh} a^j_\nu du^h \right) \wedge b^\nu_k \left(P^k_l da^l_\sigma + \Gamma^k_{lm} a^l_\sigma du^m \right) \\
&= b^\mu_i P^i_j da^j_\nu \wedge b^\nu_k P^k_l da^l_\sigma + b^\mu_i P^i_j da^j_\nu \wedge b^\nu_k \Gamma^k_{lm} a^l_\sigma du^m \\
&\quad + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} a^j_\nu du^h \wedge b^\nu_k P^k_l da^l_\sigma + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} a^j_\nu du^h \wedge b^\nu_k \Gamma^k_{lm} a^l_\sigma du^m \\
&= -b^\mu_i P^i_j a^j_\nu db^\nu_k \wedge P^k_l da^l_\sigma - b^\mu_i P^i_j a^j_\nu db^\nu_k \wedge \Gamma^k_{lm} a^l_\sigma du^m \\
&\quad + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} du^h \wedge P^j_l da^l_\sigma + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} du^h \wedge \Gamma^j_{lm} a^l_\sigma du^m \\
&= -P^\mu_\nu db^\nu_k \wedge P^k_l da^l_\sigma - P^\mu_\nu db^\nu_k \wedge \Gamma^k_{lm} a^l_\sigma du^m \\
&\quad + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} du^h \wedge P^j_l da^l_\sigma + b^\mu_i \Gamma^i_{jh} du^h \wedge \Gamma^j_{lm} a^l_\sigma du^m
\end{aligned}$$

eşitlikleri toplanırsa (2.3.20)'den

$$
\begin{aligned}
P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu = {} & P_\nu^\mu \left(P_j^i db_i^\nu \wedge da_\sigma^j + \Gamma_{jh}^i a_\sigma^j db_i^\nu \wedge du^h \right) \\
& + P_\nu^\mu b_i^\nu \left(dP_j^i \wedge da_\sigma^j + d\Gamma_{jh}^i \wedge a_\sigma^j du^h + \Gamma_{jh}^i da_\sigma^j \wedge du^h \right) \\
& - P_\nu^\mu db_k^\nu \wedge P_l^k da_\sigma^l - P_\nu^\mu db_k^\nu \wedge \Gamma_{lm}^k a_\sigma^l du^m \\
& + b_i^\mu \Gamma_{jh}^i du^h \wedge P_l^j da_\sigma^l + b_i^\mu \Gamma_{jh}^i du^h \wedge \Gamma_{lm}^j a_\sigma^l du^m \\
= {} & P_\nu^\mu b_i^\nu \left(dP_j^i \wedge da_\sigma^j + d\Gamma_{jh}^i \wedge a_\sigma^j du^h + \Gamma_{jh}^i da_\sigma^j \wedge du^h \right) \\
& + b_i^\mu \Gamma_{jh}^i du^h \wedge P_l^j da_\sigma^l + b_i^\mu \Gamma_{jh}^i du^h \wedge \Gamma_{lm}^j a_\sigma^l du^m \\
= {} & \left(P_\nu^\mu b_i^\nu d\Gamma_{jh}^i \wedge du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m \right) a_\sigma^j \\
& + \left(P_\nu^\mu b_i^\nu dP_j^i - P_\nu^\mu b_i^\nu \Gamma_{jh}^i du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i P_j^l du^h \right) \wedge da_\sigma^j \\
= {} & \left(P_\nu^\mu b_i^\nu d\Gamma_{jh}^i \wedge du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m \right) a_\sigma^j \\
& + \left(P_\nu^\mu b_i^\nu \partial_h P_j^i du^h - P_\nu^\mu b_i^\nu \Gamma_{jh}^i du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i P_j^l du^h \right) \wedge da_\sigma^j \\
= {} & \left(P_\nu^\mu b_i^\nu d\Gamma_{jh}^i \wedge du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m \right) a_\sigma^j \\
& + \left(b_i^\mu \Gamma_{lh}^i P_j^l du^h - P_\nu^\mu b_i^\nu \Lambda_{jh}^i du^h \right) \wedge da_\sigma^j
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada (2.3.66)'dan elde edilen

$$
P_\nu^\mu b_i^\nu = b_k^\mu P_i^k, \qquad P_\lambda^\mu a_\mu^k = P_i^k a_\lambda^i \tag{2.3.69}
$$

eşitliklerinden birincisi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu = {} & \left(b_k^\mu P_i^k d\Gamma_{jh}^i \wedge du^h + b_i^\mu \Gamma_{lh}^i du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m \right) a_\sigma^j \\
& + \left(b_i^\mu \Gamma_{lh}^i P_j^l du^h - b_k^\mu P_i^k \Lambda_{jh}^i du^h \right) \wedge da_\sigma^j
\end{aligned}
$$

ya da

$$
\begin{aligned}
P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu = {} & b_k^\mu \left(P_i^k d\Gamma_{jh}^i \wedge du^h + \Gamma_{lh}^k du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m \right) a_\sigma^j \\
& + b_k^\mu \left(\Gamma_{lh}^k P_j^l du^h - P_i^k \Lambda_{jh}^i du^h \right) \wedge da_\sigma^j
\end{aligned} \tag{2.3.70}
$$

elde edilir. Şimdi

$$
\pi_\lambda^\mu \equiv \theta_\lambda^\mu - dP_\lambda^\mu
$$

yazalım. Bu eşitliği, (2.3.62), (2.3.66) ve (2.3.69)'dan

$$\begin{aligned}\pi_\lambda^\mu &= b_i^\mu\left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma^i_{jh} a_\lambda^j du^h\right) - d\left(b_i^\mu P_j^i a_\lambda^j\right)\\ &= b_i^\mu\left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma^i_{jh} a_\lambda^j du^h\right) - db_i^\mu P_j^i a_\lambda^j - b_i^\mu dP_j^i a_\lambda^j - b_i^\mu P_j^i da_\lambda^j\\ &= b_i^\mu\left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma^i_{jh} a_\lambda^j du^h - dP_j^i a_\lambda^j - P_j^i da_\lambda^j\right) - db_i^\mu P_j^i a_\lambda^j\\ &= b_i^\mu\left(P_j^i da_\lambda^j + \Gamma^i_{jh} a_\lambda^j du^h - a_\lambda^j \partial_h P_j^i du^h - P_j^i da_\lambda^j\right) - db_i^\mu P_\lambda^\nu a_\nu^i\\ &= b_i^\mu\left(P_j^i da_\lambda^j + \Lambda^i_{jh} a_\lambda^j du^h - P_j^i da_\lambda^j\right) + b_i^\mu P_\lambda^\nu da_\nu^i\end{aligned}$$

ya da

$$\pi_\lambda^\mu = b_i^\mu\left(P_\lambda^\nu da_\nu^i + \Lambda^i_{jh} a_\lambda^j du^h\right) \tag{2.3.71}$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer b_j^μ 'ler bir kovaryant tensörün bileşenleri olarak düşünülürse

$$Db_j^\mu = db_i^\mu P_j^i - b_i^\mu \Lambda^i_{jh} du^h$$

bulunur. $\mathfrak{X}_n$ 'de bir diferansiyel formu ifade eden bu eşitlik a_λ^j ile çarpılır ve (2.3.69) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}a_\lambda^j Db_j^\mu &= db_i^\mu P_j^i a_\lambda^j - b_i^\mu \Lambda^i_{jh} a_\lambda^j du^h\\ &= db_i^\mu P_\lambda^\nu a_\nu^i - b_i^\mu \Lambda^i_{jh} a_\lambda^j du^h\\ &= -b_i^\mu da_\nu^i P_\lambda^\nu - b_i^\mu \Lambda^i_{jh} a_\lambda^j du^h\\ &= -\pi_\lambda^\mu\end{aligned}$$

elde edilir ki böylece, $\mathfrak{X}_n$ 'de tanımlı Db_j^μ diferansiyel formlarından türetilen $-\pi_\lambda^\mu$ 'lar $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_n\right)$'de tanımlı diferansiyel formlardır. Şimdi (2.3.62), (2.3.69) ve (2.3.71)'den

$$\begin{aligned}&\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu\\ &\quad= b_i^\mu\left(P_j^i da_\nu^j + \Gamma^i_{jh} a_\nu^j du^h\right)P_\rho^\nu - P_\nu^\mu b_i^\nu\left(P_\rho^\sigma da_\sigma^i + \Lambda^i_{jh} a_\rho^j du^h\right)\\ &\quad= b_i^\mu P_j^i P_\rho^\nu da_\nu^j + b_i^\mu \Gamma^i_{jh} a_\nu^j P_\rho^\nu du^h - P_\nu^\mu b_i^\nu P_\rho^\sigma da_\sigma^i - P_\nu^\mu b_i^\nu \Lambda^i_{jh} a_\rho^j du^h\\ &\quad= P_\sigma^\mu b_j^\sigma P_\rho^\nu da_\nu^j + b_i^\mu \Gamma^i_{jh} a_\rho^k P_k^j du^h - P_\nu^\mu b_i^\nu P_\rho^\sigma da_\sigma^i - b_k^\mu P_i^k \Lambda^i_{jh} a_\rho^j du^h\\ &\quad= b_k^\mu\left(\Gamma^k_{ih} P_j^i du^h - P_i^k \Lambda^i_{jh} du^h\right)a_\rho^j\end{aligned} \tag{2.3.72}$$

elde edilir ki bu eşitlik b_j^ρ ile çarpılıp (2.3.70)'te yerine yazılırsa

$$P^{\mu}_{\nu} d\theta^{\nu}_{\sigma} + \theta^{\mu}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}_{\sigma} = b^{\mu}_{k} \left(P^{k}_{i} d\Gamma^{i}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) a^{j}_{\sigma}$$
$$+ \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge b^{\rho}_{j} da^{j}_{\sigma}$$

bulunur. Bu eşitliğin P^{σ}_{λ} ile çarpılması sonucunda elde edilen

$$\left(P^{\mu}_{\nu} d\theta^{\nu}_{\sigma} + \theta^{\mu}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}_{\sigma} \right) P^{\sigma}_{\lambda} = b^{\mu}_{k} \left(P^{k}_{i} d\Gamma^{i}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) a^{j}_{\sigma} P^{\sigma}_{\lambda}$$
$$+ \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge b^{\rho}_{j} P^{\sigma}_{\lambda} da^{j}_{\sigma}$$

eşitliğinin sağ yanındaki ikinci teriminde (2.3.71)'den

$$\pi^{\rho}_{\lambda} - b^{\rho}_{j} \Lambda^{j}_{lh} a^{l}_{\lambda} du^{h} = b^{\rho}_{j} P^{\sigma}_{\lambda} da^{j}_{\sigma}$$

yazılır ve (2.3.69) dikkate alınırsa

$$\left(P^{\mu}_{\nu} d\theta^{\nu}_{\sigma} + \theta^{\mu}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}_{\sigma} \right) P^{\sigma}_{\lambda} = b^{\mu}_{k} \left(P^{k}_{l} d\Gamma^{l}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) a^{i}_{\lambda} P^{j}_{i}$$
$$+ \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge \left(\pi^{\rho}_{\lambda} - b^{\rho}_{j} \Lambda^{j}_{lh} a^{l}_{\lambda} du^{h} \right)$$

bulunur. Bu eşitlik

$$\left(P^{\mu}_{\nu} d\theta^{\nu}_{\sigma} + \theta^{\mu}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}_{\sigma} \right) P^{\sigma}_{\lambda} - \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge \pi^{\rho}_{\lambda}$$
$$= b^{\mu}_{k} \left(P^{k}_{l} d\Gamma^{l}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) a^{i}_{\lambda} P^{j}_{i}$$
$$- \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge \left(b^{\rho}_{j} \Lambda^{j}_{lh} a^{l}_{\lambda} du^{h} \right)$$

ya da (2.3.72) kullanılarak

$$\begin{aligned} &\left(P^{\mu}_{\nu} d\theta^{\nu}_{\sigma} + \theta^{\mu}_{\nu} \wedge \theta^{\nu}_{\sigma} \right) P^{\sigma}_{\lambda} - \left(\theta^{\mu}_{\nu} P^{\nu}_{\rho} - P^{\mu}_{\nu} \pi^{\nu}_{\rho} \right) \wedge \pi^{\rho}_{\lambda} \\ &= b^{\mu}_{k} \left(P^{k}_{l} d\Gamma^{l}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) a^{i}_{\lambda} P^{j}_{i} \\ &\quad - b^{\mu}_{k} \left(\Gamma^{k}_{lh} P^{l}_{j} du^{h} - P^{k}_{l} \Lambda^{l}_{jh} du^{h} \right) a^{j}_{\rho} \wedge \left(b^{\rho}_{j} \Lambda^{j}_{im} a^{i}_{\lambda} du^{m} \right) \\ &= b^{\mu}_{k} \Big\{ \left(P^{k}_{l} d\Gamma^{l}_{jh} \wedge du^{h} + \Gamma^{k}_{lh} du^{h} \wedge \Gamma^{l}_{jm} du^{m} \right) P^{j}_{i} \\ &\quad - \left(\Gamma^{k}_{lh} P^{l}_{j} du^{h} - P^{k}_{l} \Lambda^{l}_{jh} du^{h} \right) \wedge \Lambda^{j}_{im} du^{m} \Big\} a^{i}_{\lambda} \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

şeklini alır. Bu durumda $\mathfrak{B}\left(\mathfrak{X}_{n}\right)$'de tanımlı

$$\Theta_\lambda^\mu = \left(P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu\right) P_\lambda^\sigma - \left(\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu\right) \wedge \pi_\lambda^\rho$$

diferansiyel formu ile $\mathfrak{X}_n$ 'de tanımlı

$$\Omega_i^k = \left(P_l^k d\Gamma_{jh}^l \wedge du^h + \Gamma_{lh}^k du^h \wedge \Gamma_{jm}^l du^m\right) P_i^j - \left(\Gamma_{lh}^k P_j^l du^h - P_l^k \Lambda_{jh}^l du^h\right) \wedge \Lambda_{im}^j du^m$$

ya da (2.3.30)'dan

$$\Omega_i^j = \left(P_l^j d\Gamma_{kh}^l \wedge du^h + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{km}^l du^m\right) P_i^k - D\delta_k^j \wedge \Lambda_{im}^k du^m \tag{2.3.74}$$

diferansiyel formu yardımıyla (2.3.73) eşitliği

$$\Theta_\lambda^\mu = b_j^\mu \Omega_i^j a_\lambda^i \tag{2.3.75}$$

şeklinde yazılır. (2.3.75) eşitliği, Ω_i^j 'lerin $\mathfrak{X}_n$ 'de (1,1) tipinde tensörel diferansiyel formlar olduğunu göstermektedir. $\lambda(\Gamma) = P = I$, yani Γ klasik afin konneksiyon ise Ω_i^j , klasik afin konneksiyonun eğrilik formu olur.

Tanım 2.3.14. (2.3.74) eşitliği ile tanımlı Ω_i^j diferansiyel formlarına Γ 'nın **eğrilik formları** denir. Bu formlara karşılık gelen ve lokal bileşenleri R_{ihk}^j olan (1,3) tipindeki tensör alanına da Γ 'nın **eğrilik tensörü** adı verilir.

Ω_i^j , lokal bileşenleri cinsinden

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ihk}^j du^h \wedge du^k \tag{2.3.76}$$

şeklinde yazalım. (2.3.74)'ten

$$
\begin{aligned}
\Omega_i^j &= \left(P_l^j d\Gamma_{kh}^l \wedge du^h + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{km}^l du^m\right) P_i^k - D\delta_k^j \wedge \Lambda_{im}^k du^m \\
&= \left(P_l^j \partial_m \Gamma_{kh}^l du^m \wedge du^h + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{km}^l du^m\right) P_i^k - D_h \delta_k^j du^h \wedge \Lambda_{im}^k du^m \\
&= \frac{1}{2} P_l^j \left(\partial_m \Gamma_{kh}^l du^m \wedge du^h + \partial_h \Gamma_{km}^l du^h \wedge du^m\right) P_i^k \\
&\quad + \frac{1}{2} P_l^j \left(\Gamma_{lh}^j \Gamma_{km}^l du^h \wedge du^m + \Gamma_{lm}^j \Gamma_{kh}^l du^m \wedge du^h\right) P_i^k \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\left(D_h \delta_k^j\right) \Lambda_{im}^k du^h \wedge du^m + \left(D_m \delta_k^j\right) \Lambda_{ih}^k du^m \wedge du^h\right) \\
&= \frac{1}{2} P_l^j \left(\partial_m \Gamma_{kh}^l - \partial_h \Gamma_{km}^l + \Gamma_{lm}^j \Gamma_{kh}^l - \Gamma_{lh}^j \Gamma_{km}^l\right) du^m \wedge du^h P_i^k \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\left(D_m \delta_k^j\right) \Lambda_{ih}^k + \left(D_h \delta_k^j\right) \Lambda_{im}^k\right) du^m \wedge du^h
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu eşitlik (2.3.76) ile karşılaştırılırsa

$$
R_{ihk}^j = P_l^j \left(\partial_h \Gamma_{mk}^l - \partial_k \Gamma_{mh}^l + \Gamma_{lh}^j \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{mh}^l\right) P_i^m - \left(D_h \delta_m^j\right) \Lambda_{ik}^m + \left(D_k \delta_m^j\right) \Lambda_{ih}^m \quad (2.3.77)
$$

bulunur. (2.3.77)'den

$$
R_{ihk}^j = -R_{ikh}^j
$$

eşitliği kolayca elde edilir.

2.3.6. Regüler Genel Konneksiyonların Burulma ve Eğrilik Formları

Regüler genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formlarını elde etmek için §2.3.5.'teki Γ genel konneksiyonunun regüler olduğunu varsayacağız. Γ'nın kontravaryant ve kovaryant kısımları sırasıyla $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ olsun. Sırasıyla, (2.3.20), (2.3.29) ve (2.3.37)

$$
\Lambda_{jh}^i = \Gamma_{jh}^i - \partial_h P_j^i, \qquad M_j^i = P_k^i P_j^k, \qquad \Gamma_{jk}^h = P_i^h\, {}'\Gamma_{jk}^i
$$

eşitlikleri ile (2.3.53)

$$
{}'\bar{D}_h P_j^i = P_j^k \bar{D}_h \delta_k^i
$$

eşitliğinin P_i^l ile çarpılmasıyla elde edilen

$$D_h\delta_j^l = P_i^l\,'\bar{D}_h P_j^i$$

eşitliği (2.3.74)'te yazılırsa $'\bar{D}$ temel kovaryant diferansiyel tanımından

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j &= \left(P_l^j d\left(P_r^l\,'\Gamma_{kh}^r\right)\wedge du^h + P_r^j\,'\Gamma_{lh}^r du^h \wedge P_s^l\,'\Gamma_{km}^s du^m\right)P_i^k \\
&\quad -\left(P_l^j\,'\bar{D}P_k^l\right)\wedge\left(P_r^k\,'\Gamma_{im}^r du^m - dP_i^k\right) \\
&= \left(P_l^j dP_r^l\,'\Gamma_{kh}^r \wedge du^h + P_l^j P_r^l d\,'\Gamma_{kh}^r \wedge du^h + P_l^j\,'\Gamma_{sm}^l du^m \wedge P_r^s\,'\Gamma_{kh}^r du^h\right)P_i^k \\
&\quad +\left(P_l^j\,'\bar{D}P_k^l\right)\wedge\left('\bar{D}P_i^k - P_i^r\,'\Gamma_{rm}^k du^m\right) \\
&= \left(M_r^j d\,'\Gamma_{kh}^r \wedge du^h + P_l^j\left(dP_r^l - '\bar{D}P_r^l\right)\wedge '\Gamma_{kh}^r du^h + P_l^j\,'\Gamma_{sm}^l du^m \wedge P_r^s\,'\Gamma_{kh}^r du^h\right)P_i^k \\
&\quad + P_l^j\,'\bar{D}P_k^l \wedge '\bar{D}P_i^k \\
&= \left(M_r^j d\,'\Gamma_{kh}^r \wedge du^h + P_l^j\left(dP_r^l - '\bar{D}P_r^l + P_r^s\,'\Gamma_{sm}^l du^m\right)\wedge '\Gamma_{kh}^r du^h\right)P_i^k \\
&\quad + P_l^j\,'\bar{D}P_k^l \wedge '\bar{D}P_i^k \\
&= \left(M_r^j d\,'\Gamma_{kh}^r \wedge du^h + P_l^j P_s^l\,'\Gamma_{rm}^s du^m \wedge '\Gamma_{kh}^r du^h\right)P_i^k + P_l^j\,'\bar{D}P_k^l \wedge '\bar{D}P_i^k
\end{aligned}$$

ya da

$$\Omega_i^j = M_s^j\left(d\,'\Gamma_{kh}^s \wedge du^h + '\Gamma_{rm}^s du^m \wedge '\Gamma_{kh}^r du^h\right)P_i^k + P_l^j\,'\bar{D}P_k^l \wedge '\bar{D}P_i^k \qquad (2.3.78)$$

bulunur. $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik ve konneksiyon formları, sırasıyla,

$$'\Omega_i^j = d\,'\omega_i^j + '\omega_l^j \wedge '\omega_i^l \qquad \text{ve} \qquad '\omega_i^j = '\Gamma_{ih}^j du^h \qquad (2.3.79)$$

ile gösterilirse

$$'\Omega_i^j = d\,'\Gamma_{ih}^j du^h + '\Gamma_{lm}^j du^m \wedge '\Gamma_{ih}^l du^h$$

eşitliğinden (2.3.78),

$$\Omega_i^j = M_s^j\,'\Omega_k^s P_i^k + P_l^j\,'\bar{D}P_k^l \wedge '\bar{D}P_i^k \qquad (2.3.80)$$

şeklini alır. Benzer şekilde $''\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun eğrilik ve konneksiyon formları sırasıyla,

$$''\Omega_i^j = d\,''\omega_i^j + ''\omega_l^j \wedge ''\omega_i^l \qquad \text{ve} \qquad ''\omega_i^j = ''\Gamma_{ih}^j du^h \qquad (2.3.81)$$

ile gösterilirse (2.3.37), (2.3.38) ve (2.3.79)'dan

$$\begin{aligned} ''\omega_i^j &= ''\Gamma_{ih}^j du^h = \left(\Gamma_{lh}^j - \partial_h P_l^j\right) Q_i^l du^h = \left(P_k^j\, '\Gamma_{lh}^k - \partial_h P_l^j\right) Q_i^l du^h \\ &= P_k^j\, '\omega_l^k Q_i^l - dP_l^j Q_i^l = dQ_i^l P_l^j + P_k^j\, '\omega_l^k Q_i^l \end{aligned}$$

ya da

$$''\omega_i^j = P_k^j \left(dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l \right) \qquad (2.3.82)$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.3.81)'de yazılırsa

$$\begin{aligned} ''\Omega_i^j &= d\left(P_k^j \left(dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l\right)\right) + P_k^j \left(dQ_l^k + '\omega_h^k Q_l^h\right) \wedge P_s^l \left(dQ_i^s + '\omega_r^s Q_i^r\right) \\ &= dP_k^j \wedge dQ_i^k + dP_k^j \wedge '\omega_l^k Q_i^l + P_k^j d\, '\omega_l^k Q_i^l + P_k^j dQ_i^l \wedge '\omega_l^k \\ &\quad + P_k^j dQ_l^k \wedge P_s^l dQ_i^s + P_k^j dQ_l^k \wedge P_s^l\, '\omega_r^s Q_i^r + P_k^j\, '\omega_h^k Q_l^h \wedge P_s^l dQ_i^s \\ &\quad + P_k^j\, '\omega_h^k Q_l^h \wedge P_s^l\, '\omega_r^s Q_i^r \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanında $d\left(P_k^j Q_l^k\right) = d\delta_l^j = 0$ eşitliğinin bir sonucu olan

$$dP_k^j Q_l^k = -P_k^j dQ_l^k$$

eşitliğinin kullanılmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned} P_k^j dQ_l^k \wedge P_s^l dQ_i^s &= -Q_l^k dP_k^j \wedge P_s^l dQ_i^s = -dP_k^j \wedge dQ_i^k \\ P_k^j dQ_l^k \wedge P_s^l\, '\omega_r^s Q_i^r &= -Q_l^k dP_k^j \wedge P_s^l\, '\omega_r^s Q_i^r = -dP_k^j \wedge '\omega_r^k Q_i^r \\ P_k^j\, '\omega_h^k Q_l^h \wedge P_s^l dQ_i^s &= P_k^j\, '\omega_h^k Q_l^h \wedge P_s^l dQ_i^s = -P_k^j dQ_i^h \wedge '\omega_h^k \end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} ''\Omega_i^j &= P_k^j d\, '\omega_l^k Q_i^l + P_k^j\, '\omega_h^k Q_l^h \wedge P_s^l\, '\omega_r^s Q_i^r \\ &= P_k^j \left(d\, '\omega_l^k + '\omega_h^k \wedge '\omega_r^h \right) Q_i^l \end{aligned}$$

ya da

$$''\Omega_i^j = P_k^j\, '\Omega_l^k Q_i^l \qquad (2.3.83)$$

bulunur. Ayrıca (2.3.49)'da (2.3.81) yazılır ve (2.3.82) dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
{}''\bar{D}P_j^i &= dP_j^i + P_j^k\,{}''\Gamma_{kh}^i du^h - P_k^i\,{}''\Gamma_{jh}^k du^h \\
&= dP_j^i + {}''\omega_k^i P_j^k - {}''\omega_j^k P_k^i \\
&= dP_j^i + P_r^i\left(dQ_k^r + {}'\omega_l^r Q_k^l\right)P_j^k - P_r^k\left(dQ_j^r + {}'\omega_l^r Q_j^l\right)P_k^i \\
&= dP_j^i - P_r^i dP_j^k Q_k^r + P_r^i\,{}'\omega_l^r Q_k^l P_j^k + dP_r^k Q_j^r P_k^i - P_r^k\,{}'\omega_l^r Q_j^l P_k^i \\
&= P_k^i\left(dP_l^k + P_l^r\,{}'\omega_r^k - P_r^k\,{}'\omega_l^r\right)Q_j^l \\
&= P_k^i\left(dP_l^k + P_l^r\,{}'\Gamma_{rh}^k du^h - P_r^k\,{}'\Gamma_{lh}^r du^h\right)Q_j^l
\end{aligned}
$$

ya da

$$
{}''\bar{D}P_j^i = P_k^i\,{}'\bar{D}P_l^k Q_j^l \tag{2.3.84}
$$

bulunur. Şimdi (2.3.83) ve (2.3.84) eşitlikleri düzenlenip (2.3.80)'de yazılırsa

$$
\Omega_i^j = M_s^j\left(Q_l^s\,{}''\Omega_r^l P_k^r\right)P_i^k + P_l^j\left(Q_r^l\,{}''\bar{D}P_s^r P_k^s\right)\wedge\left(Q_h^k\,{}''\bar{D}P_m^h P_i^m\right)
$$

ya da

$$
\Omega_i^j = P_l^j\,{}''\Omega_r^l M_i^r + {}''\bar{D}P_h^j \wedge {}''\bar{D}P_m^h P_i^m \tag{2.3.85}
$$

bulunur. $'\Gamma$ ve $''\Gamma$, birer klasik afin konneksiyon olduğundan bunların eğrilik tensörleri ve eğrilik formları sırasıyla

$$
\begin{aligned}
{}'R_{ihk}^j &= \partial_h\,{}'\Gamma_{ik}^j - \partial_k\,{}'\Gamma_{ih}^j + {}'\Gamma_{lh}^j\,{}'\Gamma_{ik}^l - {}'\Gamma_{lk}^j\,{}'\Gamma_{ih}^l, \\
{}''R_{ihk}^j &= \partial_h\,{}''\Gamma_{ik}^j - \partial_k\,{}''\Gamma_{ih}^j + {}''\Gamma_{lh}^j\,{}''\Gamma_{ik}^l - {}''\Gamma_{lk}^j\,{}''\Gamma_{ih}^l,
\end{aligned} \tag{2.3.86}
$$

$$
\begin{aligned}
{}'\Omega_i^j &= \frac{1}{2}\,{}'R_{ihk}^j du^h \wedge du^k, \\
{}''\Omega_i^j &= \frac{1}{2}\,{}''R_{ihk}^j du^h \wedge du^k
\end{aligned}
$$

şeklinde olacağından, (2.3.80) ve (2.3.85) eşitlikleri ile verilen eğrilik formlarını lokal bileşenler cinsinden

$$
\begin{aligned}
R_{ihk}^j &= M_s^j\,{}'R_{rhk}^s P_i^r + 2P_l^j\,{}'\bar{D}_h P_r^l \wedge {}'\bar{D}_k P_i^r \\
R_{ihk}^j &= P_s^j\,{}''R_{rhk}^s M_i^r + 2\,{}''\bar{D}_h P_r^j \wedge {}''\bar{D}_k P_l^r P_i^l
\end{aligned}
$$

olarak buluruz.

Son olarak Γ regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyel operatörü için Ricci formülünü inceleyelim. Bunun için lokal bileşenleri U_i^j olan (1,1) tipindeki bir tensör alanının Ricci formülünü elde edip daha sonra bu formülü (p,q) tipindeki tensör alanlarına genişleteceğiz. Şimdi (2.3.42)'den, U_i^j tensör alanının temel kovaryant türevi

$$\bar{D}_h U_i^j = \partial_h U_i^j + U_i^l \,{}'\Gamma_{lh}^j - U_l^j \,{}''\Gamma_{ih}^l$$

olduğundan ikinci mertebeden temel kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
\bar{D}_k \bar{D}_h U_i^j &= \partial_k \left(\bar{D}_h U_i^j \right) + {}'\Gamma_{lk}^j \bar{D}_h U_i^l - {}''\Gamma_{ik}^l \bar{D}_h U_l^j - {}''\Gamma_{hk}^l \bar{D}_l U_i^j \\
&= \partial_k \left(\partial_h U_i^j \right) + {}'\Gamma_{lh}^j \partial_k U_i^l + U_i^l \partial_k \,{}'\Gamma_{lh}^j - {}''\Gamma_{ih}^l \partial_k U_l^j - U_l^j \partial_k \,{}''\Gamma_{ih}^l \\
&\quad + \left(\partial_h U_i^l + U_i^r \,{}'\Gamma_{rh}^l - U_r^l \,{}''\Gamma_{ih}^r \right) {}'\Gamma_{lk}^j - \left(\partial_h U_l^j + U_l^r \,{}'\Gamma_{rh}^j - U_r^j \,{}''\Gamma_{lh}^r \right) {}''\Gamma_{ik}^l \\
&\quad - {}''\Gamma_{hk}^l \bar{D}_l U_i^j
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\bar{D}_h \bar{D}_k U_i^j &= \partial_h \left(\partial_k U_i^j \right) + {}'\Gamma_{lk}^j \partial_h U_i^l + U_i^l \partial_h \,{}'\Gamma_{lk}^j - {}''\Gamma_{ik}^l \partial_h U_l^j - U_l^j \partial_h \,{}''\Gamma_{ik}^l \\
&\quad + \left(\partial_k U_i^l + U_i^r \,{}'\Gamma_{rk}^l - U_r^l \,{}''\Gamma_{ik}^r \right) {}'\Gamma_{lh}^j - \left(\partial_k U_l^j + U_l^r \,{}'\Gamma_{rk}^j - U_r^j \,{}''\Gamma_{lk}^r \right) {}''\Gamma_{ih}^l \\
&\quad - {}''\Gamma_{kh}^l \bar{D}_l U_i^j
\end{aligned}$$

yazılırsa bu iki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\bar{D}_k \bar{D}_h U_i^j - \bar{D}_h \bar{D}_k U_i^j &= \left(\partial_k \,{}'\Gamma_{lh}^j - \partial_h \,{}'\Gamma_{lk}^j + {}'\Gamma_{rk}^j \,{}'\Gamma_{lh}^r - {}'\Gamma_{rh}^j \,{}'\Gamma_{lk}^r \right) U_i^l \\
&\quad - \left(\partial_k \,{}''\Gamma_{ih}^l - \partial_h \,{}''\Gamma_{ik}^l + {}''\Gamma_{rk}^l \,{}''\Gamma_{ih}^r - {}''\Gamma_{rh}^l \,{}''\Gamma_{ik}^r \right) U_l^j \\
&\quad - \left({}''\Gamma_{hk}^l - {}''\Gamma_{kh}^l \right) \bar{D}_l U_i^j
\end{aligned}$$

elde edilir ki (2.3.86)'dan

$$\bar{D}_k \bar{D}_h U_i^j - \bar{D}_h \bar{D}_k U_i^j = {}'R_{lkh}^j U_i^l - {}''R_{ikh}^l U_l^j - \left({}''\Gamma_{hk}^l - {}''\Gamma_{kh}^l \right) \bar{D}_l U_i^j$$

bulunur. $'\Gamma$ ve $''\Gamma$, birer klasik afin konneksiyon olduğundan bunların burulma tensörleri ve burulma formları sırasıyla

$$'T^i_{jh} = '\Gamma^i_{jh} - '\Gamma^i_{hj} \quad \text{ve} \quad ''T^i_{jh} = ''\Gamma^i_{jh} - ''\Gamma^i_{hj}$$

$$'\Omega^i = -\frac{1}{2}\,'T^i_{jh} du^j \wedge du^h \quad \text{ve} \quad ''\Omega^i = -\frac{1}{2}\,''T^i_{jh} du^j \wedge du^h$$

şeklinde olacağından yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} 2\overline{D}_{[k}\overline{D}_{h]}U^j_i &= \overline{D}_k\overline{D}_h U^j_i - \overline{D}_h\overline{D}_k U^j_i \\ &= 'R^j_{lkh}U^l_i - ''R^l_{ikh}U^j_l - ''T^l_{hk}\overline{D}_l U^j_i \end{aligned} \tag{2.3.87}$$

şeklini alır. Tensör çarpımının temel kovaryant türevi (2.3.45) eşitliğinde ifade edildiği gibi Leibniz kuralını sağladığından, Ricci formülünü (p,q) tipindeki tensör alanlarına (2.3.87) eşitliğindekine benzer şekilde genişletebiliriz.

Teorem 2.3.15. Bileşenleri $V^{i_1..i_p}_{j_1\cdots j_q}$ olan (p,q) tipindeki herhangi bir tensör alanı için aşağıdaki Ricci formülü geçerlidir, [3]:

$$\begin{aligned} 2\overline{D}_{[k}\overline{D}_{h]}V^{i_1..i_p}_{j_1\cdots j_q} &= \overline{D}_k\overline{D}_h V^{i_1..i_p}_{j_1\cdots j_q} - \overline{D}_h\overline{D}_k V^{i_1..i_p}_{j_1\cdots j_q} \\ &= \sum_{s=1}^{p} 'R^{i_s}_{lkh}V^{i_1\ldots l\ldots i_p}_{j_1\ldots\ldots j_q} - \sum_{t=1}^{q} ''R^{l}_{i_t kh}V^{i_1\ldots\ldots i_p}_{j_1\ldots l\ldots j_q} - ''T^l_{hk}\overline{D}_l V^{i_1\ldots i_p}_{j_1\cdots j_q} \end{aligned} \tag{2.3.88}$$

2.4. ÜZERİNDE GENEL KONNEKSİYON TANIMLI BİR RIEMANN MANİFOLDUN ALT MANİFOLDLARI

Bu bölümde üzerinde bir genel konneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldunun alt manifoldları üzerinde indüklenmiş genel konneksiyon ve indüklenmiş regüler genel konneksiyonların kuruluşunu inceleyeceğiz, [13].

$\mathfrak{X}_n$, üzerinde bir G Riemann metriği tanımlı n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\left(g_{ij}\right)$ simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olmak üzere, bu metriği $\mathfrak{X}_n$'nin bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunda

$$G = g_{ij} du^i \otimes du^j$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$ 'nin m-boyutlu bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir noktasının lokal koordinatlarını u^i, $(i = 1,...,n)$, ve $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktasının lokal koordinatlarını x^α, $(\alpha = 1,...,m)$, ile gösterelim. Bir $x \in \mathfrak{X}_m$ noktası için, $\iota(x) \in \mathfrak{X}_n$ noktasının (U, u^i) koordinat komşuluğu ile $x \in \mathfrak{X}_m$ noktasının (U_0, x^α) koordinat komşuluğu arasında

$$u^i \cdot \iota = u^i \left(x^1, ..., x^\alpha \right)$$

bağıntısı vardır. Burada $\left(\partial u^i / \partial x^\alpha \right)$ matrisinin rankı m dir.

$\mathfrak{X}_m$ 'nin x noktasındaki $T_x(\mathfrak{X}_m)$ tanjant uzayının kanonik bazı $\{\partial x_\alpha\}$ ve $\mathfrak{X}_n$ 'nin x noktasındaki $T_x(\mathfrak{X}_n)$ tanjant uzayının kanonik bazı $\{\partial u_i\}$ olsun. Bu durumda $\{du^i\}$ ve $\{dx^\alpha\}$ sırasıyla, $\{\partial u_i\}$ ve $\{\partial x_\alpha\}$ bazlarının dual bazları olmak üzere

$$\iota_* \partial x_\alpha = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \partial u_i, \qquad i^* du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \tag{2.4.1}$$

eşitlikleri geçerlidir. Karışıklığa yol açmadığı sürece ι, ι_* ve i^* gösterimlerini kullanmayacağız. Örneğin $u^i \cdot \iota = u^i \left(x^1, ..., x^\alpha \right)$ yerine

$$u^i = u^i \left(x^1, ..., x^\alpha \right)$$

yazacağız. Şimdi

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} = \xi^i_\alpha \tag{2.4.2}$$

yazarsak (2.4.1)'den

$$\iota_* \partial x_\alpha = \xi^i_\alpha \partial u_i, \qquad i^* du^i = \xi^i_\alpha dx^\alpha \tag{2.4.3}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}\xi^i_\alpha \xi^j_\beta \tag{2.4.4}$$

yazarsak, $g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ formu $\mathfrak{X}_m$ üzerinde pozitif tanımlı bir form olur. $\left(g^{\alpha\beta}\right)$, $\left(g_{\alpha\beta}\right)$ matrisinin ters matrisi ve

$$\xi^\alpha_i = g^{\alpha\beta} g_{ij} \xi^j_\beta \tag{2.4.5}$$

olsun. Bu durumda (2.4.4)'ten

$$\xi^j_\alpha \xi^\beta_j = \delta^\beta_\alpha$$

elde edilir. Ancak (2.4.5) eşitliğinden

$$\xi^i_\alpha \xi^\alpha_j = \xi^i_\alpha g^{\alpha\beta} g_{jh} \xi^h_\beta \neq \delta^i_j$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece x noktasındaki diğer $\left(V, v^i\right)$ ve $\left(V_0, y^\alpha\right)$ koordinat komşulukları için (2.4.5)'ten

$$\begin{aligned} &\xi^i_\alpha(y) = \xi^i_\beta(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}, \qquad \xi^\alpha_i(y) = \xi^\beta_i(x)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &\xi^i_\alpha(v) = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}\xi^j_\alpha(u), \qquad \xi^\alpha_i(v) = \frac{\partial u^j}{\partial v^i}\xi^\alpha_j(u) \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

elde edilir. Herhangi bir $x \in \mathfrak{X}_m$ noktası için

$$\iota^{\#} dx^\alpha = \xi^\alpha_i du^i \tag{2.4.7}$$

eşitliği ile tanımlı bir $\iota^{\#} : T^*_x\left(\mathfrak{X}_m\right) \to T^*_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$ lineer dönüşümünü düşünelim. Bu tanımın lokal koordinatlardan bağımsız olduğu (2.2.5) ve (2.4.6)'dan kolayca görülür. Benzer şekilde,

$$\iota_{\#} \partial u_i = \xi^\alpha_i \partial x_\alpha \tag{2.4.8}$$

eşitliği ile tanımlı bir $\iota_{\#} : T_x(\mathfrak{X}_n) \to T_x(\mathfrak{X}_m)$ lineer dönüşümünün de lokal koordinatlardan bağımsız olduğu (2.3.4) ve (2.4.6)'dan açıktır.

Şimdi x noktasındaki $\mathfrak{I}_x^2(\mathfrak{X}_m)$ ikinci mertebeden tanjant vektör uzayında

$$\begin{aligned} &\iota_* \partial^2 x_{\alpha\beta} = \left(\partial_\beta \xi_\alpha^i\right)\partial u_i + \xi_\alpha^i \xi_\beta^j \partial^2 u_{ij} \\ &\iota_*\big|_{T_x(\mathfrak{X}_m)} : \iota_* \partial x_\alpha = \xi_\alpha^i \partial u_i \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

eşitlikleri ile tanımlı bir $\iota_* : \mathfrak{I}_x^2(\mathfrak{X}_m) \to \mathfrak{I}_x^2(\mathfrak{X}_n)$ lineer dönüşümünü düşünelim. x noktasının diğer bir (V, v^i) koordinat komşuluğu için x'in koordinatları

$$v^i = v^i\left(u^k\left(x^\alpha\right)\right)$$

şeklinde yazılabileceğinden, (2.3.4) ve (2.3.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\iota_* \partial^2 x_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 v^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \partial v_j + \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial v^j}{\partial x^\beta} \partial^2 v_{ij}$$

bulunur. Böylece ι_* dönüşümü lokal koordinatlardan bağımsızdır.

Diğer yandan, $x \in \mathfrak{X}_m$ noktasının (U_0, x^α) ve (V_0, y^α) koordinat komşulukları için

$$\begin{aligned} &\partial y_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha} \partial x_\beta \\ &\partial^2 y_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \partial x_\gamma + \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^\beta} \partial^2 x_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece ι_* lineer dönüşümü için (2.4.9) ve (2.4.6)'dan

$$\iota_* \partial^2 y_{\alpha\beta} = \partial_\beta \xi_\alpha^i(y) \partial u_i + \xi_\alpha^i(y) \xi_\beta^j(y) \partial^2 u_{ij}$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} &\iota^* d^2 u^i = \xi_\alpha^i d^2 x^\alpha + \partial_\beta \xi_\alpha^i dx^\alpha \otimes dx^\beta \\ &i^*\big|_{T_x^*(\mathfrak{X}_m)} : i^* du^i = \xi_\alpha^i dx^\alpha \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

eşitlikleri ile tanımlı bir $\iota^*: \mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_n) \to \mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_m)$ lineer dönüşümünü düşünelim. ι^* lineer olduğundan (2.3.6) ve (2.4.6) eşitlikleri kullanılarak

$$\iota^* d^2 v^j = \frac{\partial v^j}{\partial x^\alpha} d^2 x^\alpha + \frac{\partial v^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

bulunur. Böylece ι^* dönüşümü lokal koordinatlardan bağımsızdır. $\mathfrak{X}_m$'nin (U_0, x^α) koordinat komşuluğunu yine $\mathfrak{X}_m$'nin (V_0, y^α) koordinat komşuluğuna dönüştürürsek;

$$\iota^* d^2 u^i = \xi_\alpha^i(y) d^2 y^\alpha + \partial_\beta \xi_\alpha^i(y) dy^\alpha \otimes dy^\beta$$

elde ederiz.

Şimdi $\mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_m) \to \mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_n)$ şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlamak istiyoruz. Ancak $\xi_\alpha^i \xi_j^\alpha \neq \delta_j^i$ olduğundan, lokal koordinatlardan bağımsız böyle bir dönüşüm tanımlayamayız. Bu nedenle x noktasının (U, u^i) koordinat komşuluğunda

$$\begin{aligned} &\iota^{\#}{}_U d^2 x^\alpha = \xi_i^\alpha d^2 u^i + \xi_h^\beta \partial_\beta \xi_i^\alpha du^i \otimes du^h \\ &\iota^{\#}{}_U\big|_{T_x^*(\mathfrak{X}_m)} : \iota^{\#} dx^\alpha = \xi_i^\alpha du^i \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

eşitlikleri ile belirli bir $\iota^{\#}{}_U : \mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_m) \to \mathfrak{D}_x^2(\mathfrak{X}_n)$ lineer dönüşümünü tanımlayabiliriz. (2.3.6) ve (2.3.7) eşitliklerini

$$\iota^{\#}{}_V d^2 x^\alpha = \xi_i^\alpha(v) d^2 v^i + \xi_j^\beta(v) \partial_\beta \xi_i^\alpha(v) dv^i \otimes dv^j$$

eşitliğinde yazarsak (2.4.6)'dan

$$\begin{aligned} \iota^{\#}{}_V d^2 x^\alpha = {} & \xi_j^\alpha(u) d^2 u^j + \xi_h^\beta(u) \partial_\beta \xi_k^\alpha(u) du^k \otimes du^h \\ & + \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \xi_j^\alpha(u) \left[\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^h \partial u^k} - \xi_h^\beta(u) \xi_\beta^l(u) \frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k} \right] du^k \otimes du^h \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\xi_\alpha^i \xi_j^\alpha \neq \delta_j^i$ olduğundan

$$\iota^{\#}{}_V d^2x^\alpha = \xi_j^\alpha(u)\,d^2u^j + \xi_h^\beta(u)\,\partial_\beta \xi_k^\alpha(u)\,du^k \otimes du^h$$
$$+\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\xi_j^\alpha(u)\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k}\left[\delta_h^l - \xi_h^\beta(u)\,\xi_\beta^l(u)\right]du^k \otimes du^h$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.4.11) ile karşılaştırılırsa

$$\iota^{\#}{}_V d^2x^\alpha = \iota^{\#}{}_U d^2x^\alpha + \xi_j^\alpha(u)\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k}\left[\delta_h^l - \xi_h^\beta \xi_\beta^l\right]du^k \otimes du^h \tag{2.4.12}$$

elde edilir. Ayrıca ι^* lineer olduğundan (2.4.12) ve (2.4.3) kullanılarak

$$\iota^* \iota^{\#}{}_V d^2x^\alpha = \iota^* \iota^{\#}{}_U d^2x^\alpha$$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.4.1. $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunda tanımlı ve bileşenleri $T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ olan bir tensör alanı için bileşenleri

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \xi_{i_1}^{\alpha_1} \ldots \xi_{i_p}^{\alpha_p} T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \xi_{\beta_1}^{j_1} \ldots \xi_{\beta_q}^{j_q} \tag{2.4.13}$$

eşitliği ile verilen $\left(T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\right)$ tensör alanı $\mathfrak{X}_m$ 'de tanımlı bir tensör alanı olup, $\mathfrak{X}_n$ üzerinde tanımlı $\left(T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}\right)$ tensör alanınından **indüklenmiş tensör alanı** adını alır.

Tanım 2.4.2. $\mathfrak{X}_m$ 'nin bir $\left(U_0, x^\alpha\right)$ koordinat komşuluğunda tanımlı ve bileşenleri $T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ olan bir tensör alanı için (2.4.3) ve (2.4.7)'den

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \partial x_{\alpha_1} \otimes \ldots \partial x_{\alpha_p} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_q}$$
$$= T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \xi_{\alpha_1}^{i_1} \ldots \xi_{\alpha_p}^{i_p} \xi_{j_1}^{\beta_1} \ldots \xi_{j_q}^{\beta_q} \partial u_{i_1} \otimes \ldots \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_q}$$

eşitliği ile elde edilen ve bileşenleri

$$T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \xi_{\alpha_1}^{i_1} \ldots \xi_{\alpha_p}^{i_p} \xi_{j_1}^{\beta_1} \ldots \xi_{j_q}^{\beta_q}$$

olan tensör alanına, $\left(T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\right)$ tensör alanının $\mathfrak{X}_n$ ' nin bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğundaki **gösterilişi** adı verilir.

2.4.1. İndüklenmiş Genel Konneksiyon

$\mathfrak{X}_n$ 'nin bir

$$\Gamma = \partial u_i \otimes \left(P_j^i d^2 u^j + \Gamma_{jh}^i du^j \otimes du^h \right)$$

genel konneksiyonu verilsin. $\mathfrak{X}_n$ 'nin $\left(P_j^i \right)$ tensör alanının $\mathfrak{X}_m$ üzerindeki indüklenmiş tensör alanının bileşenleri (2.4.13)'e göre

$$P_\beta^\alpha = \xi_i^\alpha P_j^i \xi_\beta^j \qquad (2.4.14)$$

şeklindedir.

Tanım 2.4.3. $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir $\Gamma = \left(P_j^i , \Gamma_{jk}^i \right)$ genel konneksiyonu verilsin.

$$\tilde{\Gamma} \equiv \iota\left(\Gamma\right) = \iota_\# \partial u_i \otimes \left(P_j^i \iota^* d^2 u^j + \Gamma_{jk}^i \iota^* du^j \otimes du^k \right),$$

şeklinde tanımlı konneksiyona, $\mathfrak{X}_m$ 'nin Γ 'dan türetilen **indüklenmiş genel konneksiyonu** denir.

Gerçekten (2.4.8), (2.4.10) ve (2.4.14)'ten

$$\begin{aligned}
&\iota_\# \partial u_i \otimes \left(P_j^i \iota^* d^2 u^j + \Gamma_{jk}^i \iota^* du^j \otimes du^k \right) \\
&\quad = \xi_i^\alpha \partial x_\alpha \otimes \left[P_j^i \left(\xi_\beta^j d^2 x^\beta + \partial_\eta \xi_\beta^j dx^\beta \otimes dx^\eta \right) + \Gamma_{jk}^i \xi_\beta^\alpha \xi_\eta^\alpha dx^\beta \otimes dx^\eta \right] \\
&\quad = \partial x_\alpha \otimes \left[\xi_i^\alpha P_j^i \xi_\beta^j d^2 x^\beta + \xi_i^\alpha P_j^i \partial_\eta \xi_\beta^j dx^\beta \otimes dx^\eta + \xi_i^\alpha \Gamma_{jk}^i \xi_\beta^\alpha \xi_\eta^\alpha dx^\beta \otimes dx^\eta \right] \\
&\quad = \partial x_\alpha \otimes \left[P_\beta^\alpha d^2 x^\beta + \xi_i^\alpha \left(P_j^i \partial_\eta \xi_\beta^j + \Gamma_{jk}^i \xi_\beta^\alpha \xi_\eta^\alpha \right) dx^\beta \otimes dx^\eta \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\Gamma_{\beta\eta}^\alpha = \xi_i^\alpha \left(P_j^i \partial_\eta \xi_\beta^j + \Gamma_{jk}^i \xi_\beta^j \xi_\eta^k \right) \qquad (2.4.15)$$

yazılırsa

$$\tilde{\Gamma} \equiv \iota\left(\Gamma\right) = \partial x_\alpha \otimes \left(P_\beta^\alpha d^2 x^\beta + \Gamma_{\beta\eta}^\alpha dx^\beta \otimes dx^\eta \right)$$

elde edilir ki böylece $\tilde{\Gamma}$, $T\left(\mathfrak{X}_m\right)\otimes\mathfrak{D}^2\left(\mathfrak{X}_m\right)$'nin bir kesitidir. $\mathfrak{X}_m$'nin diğer bir $\left(V_0, y^\alpha\right)$ koordinat komşuluğu için $U_0 \cap V_0 \neq \varnothing$ ise (2.4.3) ve (2.4.15)'ten

$$\Gamma^\alpha_{\beta\eta}\left(y\right)=\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\left(x\right)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\eta}+P^\lambda_\nu\left(x\right)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\beta \partial y^\eta}$$

bulunur. $\mathfrak{X}_n$'nin Γ genel konneksiyonu için $\Lambda^i_{jh}=\Gamma^i_{jh}-\partial_h P^i_j$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Lambda^\alpha_{\beta\eta}&=\Gamma^\alpha_{\beta\eta}-\partial_\eta P^\alpha_\beta\\&=\xi^\alpha_i\Lambda^i_{jk}\xi^j_\beta\xi^k_\eta-\xi^j_\beta P^i_j\partial_\eta\xi^\alpha_i\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

elde edilir. Eğer $U_0 \cap V_0 \neq \varnothing$ ise (2.4.6)'dan, $\Lambda^\alpha_{\beta\eta}\left(x\right)$ ve $\Lambda^\alpha_{\beta\eta}\left(y\right)$ arasında

$$\Lambda^\alpha_{\beta\eta}\left(y\right)=\left[-P^\lambda_\mu\left(x\right)\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}+\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\Lambda^\lambda_{\mu\nu}\left(x\right)\right]\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\eta}$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi karışık tipte bir tensörün verilen bir genel konneksiyona ve onun indüklenmiş genel konneksiyonuna göre kovaryant diferansiyelini tanımlayalım. μ_Γ, (2.3.17) eşitliği ile tanımlanan lineer dönüşüm olsun. Bu durumda (2.4.8)'den

$$\begin{aligned}\iota_\#\mu_\Gamma\left(\partial u_i\right)&=\iota_\#\left(P^j_i\partial u_j\right)=P^j_i\xi^\alpha_j\partial x_\alpha,\\ \iota_\#\mu_\Gamma\left(\partial^2 u_{jk}\right)&=\iota_\#\left(\Gamma^i_{jk}\partial u_i\right)=\Gamma^i_{jk}\xi^\alpha_i\partial x_\alpha\end{aligned}$$

geçerlidir. Böylece (2.4.9)'dan

$$\begin{aligned}\iota_\#\mu_\Gamma\iota_*\left(\partial x_\alpha\right)&=\iota_\#\mu_\Gamma\left(\xi^i_\alpha\partial u_i\right)=\xi^i_\alpha\iota_\#\left(P^j_i\partial u_j\right)=\xi^i_\alpha P^j_i\xi^\beta_j\partial x_\beta,\\ \iota_\#\mu_\Gamma\iota_*\left(\partial^2 x_{\alpha\beta}\right)&=\iota_\#\mu_\Gamma\left(\left(\partial_\beta\xi^i_\alpha\right)\partial u_i+\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\partial^2 u_{ij}\right)\\&=\iota_\#\left(\left(\partial_\beta\xi^i_\alpha\right)P^j_i\partial u_j+\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\Gamma^k_{ij}\partial u_k\right)\\&=\left(\partial_\beta\xi^i_\alpha\right)P^j_i\xi^\eta_j\partial x_\eta+\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\Gamma^k_{ij}\xi^\eta_k\partial x_\eta\\&=\xi^\eta_k\left(P^k_i\partial_\beta\xi^i_\alpha+\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\Gamma^k_{ij}\right)\partial x_\eta\\&=\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\partial x_\eta\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$\mu_{\tilde{\Gamma}} = \iota_{\#}\mu_{\Gamma}\iota_{*}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} &\mu_{\tilde{\Gamma}}\left(\partial x_{\alpha}\right) = P_{\alpha}^{\beta}\partial x_{\beta} \\ &\mu_{\tilde{\Gamma}}\left(\partial^2 x_{\alpha\beta}\right) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\partial x_{\eta} \end{aligned} \qquad (2.4.17)$$

elde edilir. Benzer biçimde, $\mathfrak{X}_m$'nin her noktasında (2.3.21) ve (2.3.22) eşitlikleri yardımıyla $\iota^*\varphi_{\Gamma}$ lineer dönüşümünü için (2.4.10)'dan

$$\begin{aligned} &\iota^*\varphi_{\Gamma}\left(du^i\right) = \iota^*\left(du^i\right) = \xi_{\alpha}^i dx^{\alpha}, \\ &\iota^*\varphi_{\Gamma}\left(du^i \otimes du^j\right) = \iota^*\left(P_k^i du^k \otimes du^j\right) = P_k^i \xi_{\alpha}^k \xi_{\beta}^j dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}, \\ &\iota^*\varphi_{\Gamma}\left(d^2u^i\right) = \iota^*\left(-\Lambda_{jk}^i du^j \otimes du^k\right) = -\Lambda_{jk}^i \xi_{\alpha}^j \xi_{\beta}^k dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.4.11)'den

$$\begin{aligned} \iota^*\varphi_{\Gamma}\left(\iota^{\#}dx^{\alpha}\right) &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\left(\xi_i^{\alpha}du^i\right) = \xi_i^{\alpha}\xi_{\beta}^i dx^{\beta} = dx^{\alpha}, \\ \iota^*\varphi_{\Gamma}\left(\iota^{\#}\left(dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}\right)\right) &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\left(\xi_i^{\alpha}\xi_j^{\beta}du^i \otimes du^j\right) \\ &= \xi_i^{\alpha}\xi_j^{\beta}P_k^i\xi_{\eta}^k\xi_{\mu}^j dx^{\eta} \otimes dx^{\mu} = P_{\eta}^{\alpha}dx^{\eta} \otimes dx^{\beta}, \\ \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota_U^{\#}\left(d^2x^{\alpha}\right) &= -\Lambda_{\beta\eta}^{\alpha}dx^{\beta} \otimes dx^{\eta} \end{aligned}$$

bulunur. $\iota^*\varphi_{\Gamma}\iota_V^{\#}\left(d^2x^{\alpha}\right)$ ifadesini hesaplamak için (2.4.12)'den

$$\begin{aligned} \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota^{\#}{}_V d^2x^{\alpha} &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota^{\#}{}_U d^2x^{\alpha} + \iota^*\varphi_{\Gamma}\left\{\xi_j^{\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k}\left[\delta_h^l - \xi_h^{\beta}\xi_{\beta}^l\right]du^k \otimes du^h\right\} \\ &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota^{\#}{}_U d^2x^{\alpha} + \iota^*\left(\xi_j^{\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k}\left[\delta_h^l - \xi_h^{\beta}\xi_{\beta}^l\right]P_s^k du^s \otimes du^h\right) \\ &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota^{\#}{}_U d^2x^{\alpha} + \xi_j^{\alpha}\frac{\partial u^j}{\partial v^i}\frac{\partial^2 v^i}{\partial u^l \partial u^k}\left[\delta_h^l - \xi_h^{\beta}\xi_{\beta}^l\right]P_s^k\xi_{\mu}^s\xi_{\eta}^h dx^{\mu} \otimes dx^{\eta} \\ &= \iota^*\varphi_{\Gamma}\iota^{\#}{}_U d^2x^{\alpha} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\iota^*\varphi_\Gamma\iota^\#{}_U d^2x^\alpha = \iota^*\varphi_\Gamma\iota^\#{}_V d^2x^\alpha$$

elde edilir ki bu eşitlik $\iota^*\varphi_\Gamma\iota^\#{}_U$ dönüşümünün $\left(U,u^i\right)$ koordinat komşuluğundan bağımsız olması anlamına gelir. Bu eşitlikte

$$\varphi'_{\tilde{\Gamma}} \equiv \iota^*\varphi_\Gamma\iota^\#{}_U = \iota^*\varphi_\Gamma\iota^\#{}_V$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi'_{\tilde{\Gamma}}\left(dx^\alpha\right) = dx^\alpha,\\
&\varphi'_{\tilde{\Gamma}}\left(dx^\alpha \otimes dx^\beta\right) = P^\alpha_\eta dx^\eta \otimes dx^\beta,\\
&\varphi'_{\tilde{\Gamma}}\left(d^2x^\alpha\right) = -\Lambda^\alpha_{\beta\eta} dx^\beta \otimes dx^\eta
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

bulunur. (2.4.17) ve (2.4.18)'i genelleştirerek aşağıdaki gibi tanımlı bir lineer dönüşüm elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\tilde{\Gamma}}\left(\partial x_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \partial x_{\alpha_m}\right) = P^{\beta_1}_{\alpha_1} \ldots P^{\beta_m}_{\alpha_m} \partial x_{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \partial x_{\beta_m},\\
&\varphi_{\tilde{\Gamma}}\left(dx^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\alpha_m} \otimes dx^{\alpha_{m+1}}\right) = P^{\alpha_1}_{\beta_1} \ldots P^{\alpha_m}_{\beta_m} dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_m} \otimes dx^{\beta_{m+1}},\\
&\varphi_{\tilde{\Gamma}}\left(\partial^2 x_{\alpha\beta}\right) = \Gamma^\eta_{\alpha\beta} \partial x_\eta,\\
&\varphi_{\tilde{\Gamma}}\left(d^2x^\alpha\right) = -\Lambda^\alpha_{\beta\eta} dx^\beta \otimes dx^\eta.
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Bu $\varphi_{\tilde{\Gamma}}$ dönüşümü, $\mathfrak{X}_m$'nin $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş genel konneksiyonuna göre $D_{\tilde{\Gamma}}$ kovaryant diferansiyelinin tanımlanmasını sağlar:

$$D \equiv D_{\tilde{\Gamma}} = \varphi_{\tilde{\Gamma}} \cdot d : \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes(p,q)}\right) \to \Psi\left(T\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes(p,q+1)}\right).$$

Şimdi $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan karışık tipte bir tensör alanının kovaryant diferansiyelini tanımlayalım.

Tanım 2.4.4. $\mathfrak{X}_m$'de

$$V = V^{\alpha_1 \ldots i_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots j_1 \ldots} \partial x_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_1} \otimes \ldots$$

şeklinde tanımlı tensör alanına **karışık tipte bir tensör alanı** adı verilir.

V tensör alanının dV diferansiyeli

$$
\begin{aligned}
dV =\, & \partial_\eta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots}\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta}\\
&+\sum_k V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots}\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial^2 x_{\alpha_k\eta}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta}\\
&+\sum_l V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots}\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes\partial^2 u_{i_l a}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes du^{a}\\
&+\sum_h V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots}\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes d^2x^{\beta_h}\,\dot{\otimes}\left(\ldots\right)\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\\
&+\sum_m V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots}\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes d^2u^{j_m}\,\dot{\otimes}\left(\ldots\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. (2.4.19) ve (2.3.24) eşitliklerinin bir genelleştirmesi olacak şekilde d 'nin görüntü kümesi üstünde bir φ dönüşümünü

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta}\right)\\
&\quad= P^{\lambda_1}_{\alpha_1}\ldots P^{h_1}_{i_1}\ldots P^{\beta_1}_{\mu_1}\ldots P^{j_1}_{k_1}\ldots\partial x_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{h_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes du^{k_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta},\\
&\varphi\left(\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\partial^2 x_{\alpha_k\eta}\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta}\right)\\
&\quad= P^{\lambda_1}_{\alpha_1}\ldots\Gamma^{\lambda_k}_{\alpha_k\eta}\ldots P^{h_1}_{i_1}\ldots P^{\beta_1}_{\mu_1}\ldots P^{j_1}_{k_1}\ldots\partial x_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{h_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes du^{k_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta},\\
&\varphi\left(\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes\partial^2 u_{i_l r}\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes du^{r}\right)\\
&\quad= P^{\lambda_1}_{\alpha_1}\ldots P^{h_1}_{i_1}\ldots\Gamma^{h_l}_{i_l r}\ldots P^{\beta_1}_{\mu_1}\ldots P^{j_1}_{k_1}\ldots\partial x_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{h_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes du^{k_1}\otimes\ldots\otimes du^{r},\\
&\varphi\left(\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes d^2x^{\beta_h}\,\dot{\otimes}\left(\ldots\right)\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\right)\\
&\quad= -P^{\lambda_1}_{\alpha_1}\ldots P^{h_1}_{i_1}\ldots P^{\beta_1}_{\mu_1}\ldots\Lambda^{\beta_h}_{\mu_h\eta}\ldots P^{j_1}_{k_1}\ldots\partial x_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{h_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes du^{k_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\eta},\\
&\varphi\left(\partial x_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\ldots\otimes\partial u_{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes du^{j_1}\otimes\ldots\otimes d^2u^{j_m}\,\dot{\otimes}\left(\ldots\right)\right)\\
&\quad= -P^{\lambda_1}_{\alpha_1}\ldots P^{h_1}_{i_1}\ldots P^{\beta_1}_{\mu_1}\ldots P^{j_1}_{k_1}\ldots\Lambda^{j_m}_{k_m r}\ldots\partial x_{\lambda_1}\otimes\ldots\otimes\partial u_{h_1}\otimes\ldots\otimes dx^{\mu_1}\otimes\ldots\otimes du^{k_1}\otimes\ldots\otimes du^{r}.
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlayalım. Yukarıdaki eşitliklerin sağ yanlarında bulunan dx^{η} son terimini $T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin $\xi^{\eta}_i du^i$ şeklindeki bir elemanı gibi düşünürsek

$$
\begin{aligned}
\varphi : d\Big(T\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes p}\otimes T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes q}\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes r}\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes s}\Big)\\
\to T\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes p}\otimes T\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes q}\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_m\right)^{\otimes r}\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)^{\otimes s}\otimes T^*\left(\mathfrak{X}_n\right)
\end{aligned}
$$

buluruz. Böylece karışık tipte bir tensör alanının kovaryant diferansiyeli

$$DV = \varphi dV$$

şeklinde tanımlanabilir. Böylece bu eşitlikten

$$DV = \partial x_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \partial u_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes DV^{\alpha_1 \ldots i_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots j_1 \ldots}$$

olmak üzere

$$DV^{\alpha_1 \ldots i_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots j_1 \ldots} = D_\eta V^{\alpha_1 \ldots i_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots j_1 \ldots} dx^\eta$$

ve

$$\begin{aligned} D_\eta V^{\alpha_1 \ldots i_1 \ldots}_{\beta_1 \ldots j_1 \ldots} = {} & P^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots P^{i_1}_{h_1} \ldots \partial_\eta V^{\lambda_1 \ldots h_1 \ldots}_{\mu_1 \ldots k_1 \ldots} P^{\mu_1}_{\beta_1} \ldots P^{k_1}_{j_1} \ldots \\ & + \sum_l P^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots \Gamma^{\alpha_l}_{\eta\gamma} \ldots P^{i_1}_{h_1} \ldots V^{\lambda_1 \ldots \gamma \ldots h_1 \ldots}_{\mu_1 \ldots\ldots\ldots k_1 \ldots} P^{\mu_1}_{\beta_1} \ldots P^{k_1}_{j_1} \ldots \\ & + \sum_l P^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots P^{i_1}_{h_1} \ldots \Gamma^{i_l}_{hr} \xi^r_\eta \ldots V^{\lambda_1 \ldots h_1 \ldots h \ldots}_{\mu_1 \ldots k_1 \ldots\ldots} P^{\mu_1}_{\beta_1} \ldots P^{k_1}_{j_1} \ldots \\ & - \sum_l P^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots P^{i_1}_{h_1} \ldots V^{\lambda_1 \ldots\ldots\ldots h_1 \ldots}_{\mu_1 \ldots \delta \ldots k_1 \ldots} P^{\mu_1}_{\beta_1} \ldots \Lambda^{\delta}_{\mu_l \eta} \ldots P^{k_1}_{j_1} \ldots \\ & - \sum_l P^{\alpha_1}_{\lambda_1} \ldots P^{i_1}_{h_1} \ldots V^{\lambda_1 \ldots h_1 \ldots\ldots}_{\mu_1 \ldots k_1 \ldots s \ldots} P^{\mu_1}_{\beta_1} \ldots P^{k_1}_{j_1} \ldots \Lambda^{s}_{j_l t} \xi^t_\eta \ldots \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

bulunur.

2.4.3. İndüklenmiş Regüler Genel Konneksiyon

Bu bölümde, $\mathfrak{X}_n$ ’nin $\Gamma = \left(P^i_j, \Gamma^i_{jk}\right)$ genel konneksiyonunun regüler olması durumunda $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun Γ ’dan türetilen $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş konneksiyonunu inceleyeceğiz.

Tanım 2.4.5. $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$ ’nin bir alt manifoldu olsun. $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ tanjant uzayının $\mathfrak{X}_n$ ’de tanımlı G Riemann metriğine göre $T_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$ ’deki ortogonal tümleyen uzayı $T^\perp_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ile gösterilsin. Her $x \in \mathfrak{X}_m$ için $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ve $T^\perp_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ uzayları P izomorfizması altında invaryant, yani

$$P\left(T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)\right) \subset T_x\left(\mathfrak{X}_m\right) \qquad \text{ve} \qquad P\left(T^\perp_x\left(\mathfrak{X}_m\right)\right) \subset T^\perp_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$$

ise $\mathfrak{X}_m$'e $\mathfrak{X}_n$'nin $\Gamma = \left(P^i_j, \Gamma^i_{jk}\right)$ **genel konneksiyonuna göre uygun (adapted) alt manifoldu** ya da kısaca **alt manifoldu*** denir.

$\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu ise $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ve $T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$ uzayları P izomorfizması altında invaryant olduğundan

$$T_x\left(\mathfrak{X}_n\right) = T_x\left(\mathfrak{X}_m\right) \oplus T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece her $x \in \mathfrak{X}_m$ için $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$'nin $\xi^i_\alpha = \partial u^i / \partial x^\alpha$, $\left(\alpha = 1,...,m\right)$ şeklinde tanımlı bir $\left\{\xi^i_\alpha\right\}$ bazı ile $T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$'nin $\left\{\xi^i_A\right\}$, $\left(A = m+1,...,n\right)$ şeklinde $n-m$ bağımsız tanjant vektörü kullanılarak $T_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$ uzayının bir bazı $\left\{\xi^i_\alpha, \xi^i_A\right\}$ şeklinde ifade edilebilir.

$T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ve $T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$ uzayları G Riemann metriğine göre ortogonal olduğundan

$$g_{ij}\xi^i_\alpha \xi^j_A = 0 \tag{2.4.21}$$

eşitliği geçerlidir. (2.4.4) ve (2.4.5) eşitliklerine benzer şekilde

$$g_{AB} = g_{ij}\xi^i_A \xi^j_B, \tag{2.4.22}$$

$$\xi^A_i = g^{AB} g_{ij}\xi^j_B, \qquad \left(g_{AB}\right)^{-1} = \left(g^{AB}\right) \tag{2.4.23}$$

yazalım. Bu durumda (2.4.21) dikkate alınarak, (2.4.5) ve (2.4.23)'ten

$$\xi^i_B \xi^A_i = \delta^A_B, \qquad \xi^i_\alpha \xi^B_i = 0, \qquad \xi^\alpha_i \xi^i_A = 0 \tag{2.4.24}$$

eşitlikleri elde edilir. $\left\{\xi^i_\alpha\right\}$ ve $\left\{\xi^i_A\right\}$, P altında invaryant ve P regüler olduğundan $P^i_j \xi^j_\alpha = \xi^i_\beta W^\beta_\alpha$ ve $P^i_j \xi^j_A = \xi^i_B W^B_A$ olacak şekilde $\left(W^\beta_\alpha\right)$ ve $\left(W^B_A\right)$ regüler matrisleri bulunabilir. Böylece, genel olarak

$$P^a_b = \xi^a_i P^i_j \xi^j_b, \qquad \left(a, b = 1,...,n\right) \tag{2.4.25}$$

---

* Bundan sonra, "alt manifold" kavramını "uygun alt manifold" anlamında kullanacağız.

yazarsak (2.4.5), (2.4.23) ve (2.4.21)'den

$$\begin{aligned} P_\alpha^A &= \xi_i^A P_j^i \xi_\alpha^j = \xi_i^A \xi_\beta^i W_\alpha^\beta = \left(g^{AB} g_{ij} \xi_B^j \right) \xi_\beta^i W_\alpha^\beta = 0, \\ P_A^\alpha &= \xi_i^\alpha P_j^i \xi_A^j = \xi_i^\alpha \xi_B^i W_A^B = \left(g^{AB} g_{ij} \xi_B^j \right) \xi_\beta^i W_\alpha^\beta = 0 \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

bulunur. Bu eşitlikler yardımıyla $\left(P_b^a\right)$ matrisi

$$\begin{pmatrix} \xi_i^\alpha \\ \xi_i^A \end{pmatrix} \left(P_j^i\right)\left(\xi_\beta^j, \xi_B^j\right) = \begin{pmatrix} P_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & P_B^A \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $\left(P_j^i\right)$ regüler olduğundan $\left(P_\beta^\alpha\right)$ ve $\left(P_B^A\right)$ matrisleri regülerdir. Burada $\left(P_B^A\right)$ matrisi, (2.4.25)'ten

$$P_B^A = \xi_i^A P_j^i \xi_B^j \tag{2.4.27}$$

şeklinde belirlidir. $\left(P_\beta^\alpha\right)$ matrisi regüler olduğundan aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.4.6. $\Gamma = \left(P_j^i, \Gamma_{jk}^i\right)$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. Bu durumda Γ'dan elde edilen $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş genel konneksiyonu da regülerdir, [13].

Şimdi $\left(\xi_\alpha^j, \xi_A^j\right)$ matrisinin tersi $\begin{pmatrix} \xi_i^\alpha \\ \xi_i^A \end{pmatrix}$ olduğundan

$$\xi_i^\alpha \xi_\alpha^j + \xi_i^A \xi_A^j = \delta_i^j \tag{2.4.28}$$

eşitliği geçerlidir. (2.4.26), (2.4.27) ve (2.4.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} P_\beta^\alpha \xi_k^\beta &= \xi_i^\alpha P_j^i \xi_\beta^j \xi_k^\beta = \xi_i^\alpha P_j^i \left(\delta_k^j - \xi_B^j \xi_k^B \right) = \xi_i^\alpha P_k^i - P_B^\alpha \xi_k^B = \xi_i^\alpha P_k^i, \\ P_B^A \xi_k^B &= \xi_i^A P_j^i \xi_B^j \xi_k^B = \xi_i^A P_j^i \left(\delta_k^j - \xi_\alpha^j \xi_k^\alpha \right) = \xi_i^A P_k^i - P_\alpha^A \xi_k^\alpha = \xi_i^A P_k^i \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $\xi_\alpha^k P_\beta^\alpha = P_j^k \xi_\beta^j$ ve $\xi_A^k P_B^A = P_j^k \xi_B^j$ elde edilir ki böylece

$$\begin{aligned} \xi_i^\alpha P_i^i &= P_\beta^\alpha \xi_j^\beta, \qquad & \xi_\alpha^i P_\beta^\alpha &= P_j^i \xi_\beta^j \\ \xi_i^A P_j^i &= P_B^A \xi_j^B, \qquad & \xi_A^i P_B^A &= P_j^i \xi_B^j \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

eşitlikleri geçerli olur. $\left(P_j^i\right)$, $\left(P_\beta^\alpha\right)$ ve $\left(P_B^A\right)$ matrislerinin ters matrislerini

$$\left(Q_j^i\right)=\left(P_j^i\right)^{-1}, \qquad \left(Q_\beta^\alpha\right)=\left(P_\beta^\alpha\right)^{-1}, \qquad \left(Q_B^A\right)=\left(P_B^A\right)^{-1}$$

ile gösterirsek (2.4.29)'dan

$$\begin{aligned} &\xi_i^\alpha Q_j^i=\xi_j^\beta Q_\beta^\alpha, \qquad && \xi_\beta^i Q_\alpha^\beta=Q_j^i\xi_\alpha^j \\ &\xi_i^A Q_j^i=\xi_j^B Q_B^A, && \xi_A^i Q_B^A=Q_j^i\xi_B^j \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

eşitlikleri elde edilir. Γ regüler genel konneksiyonundan türetilen $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş konneksiyonu da regüler olduğundan bu konneksiyonların kontravaryant ve kovaryant kısımları için

$$\begin{aligned} &Q_k^i\Gamma_{jh}^k={}'\Gamma_{jh}^i, \qquad && \Lambda_{kh}^i Q_j^k={}''\Gamma_{jh}^i \\ &Q_\eta^\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^\eta={}'\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, && \Lambda_{\eta\gamma}^\alpha Q_\beta^\eta={}''\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

eşitlikleri geçerli olur. Burada (2.4.15), (2.4.29) ve (2.4.30)'dan

$$\begin{aligned} {}'\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= Q_\eta^\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^\eta = Q_\eta^\alpha\xi_i^\eta\left(P_j^i\partial_\gamma\xi_\beta^j+\Gamma_{jk}^i\xi_\beta^j\xi_\gamma^k\right)=Q_\eta^\alpha\left(P_\sigma^\eta\xi_j^\sigma\partial_\gamma\xi_\beta^j+\xi_i^\eta\Gamma_{jk}^i\xi_\beta^j\xi_\gamma^k\right) \\ &= \xi_j^\alpha\partial_\gamma\xi_\beta^j+\xi_l^\alpha Q_i^l\Gamma_{jk}^i\xi_\beta^j\xi_\gamma^k \end{aligned}$$

ya da

$${}'\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha=\xi_i^\alpha\partial_\gamma\xi_\beta^i+\xi_i^\alpha\,{}'\Gamma_{jk}^i\xi_\beta^j\xi_\gamma^k \tag{2.4.32}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.4.16), (2.4.29) ve (2.4.30)'dan

$${}''\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha=\Lambda_{\eta\gamma}^\alpha Q_\beta^\eta=\left(\xi_i^\alpha\Lambda_{jk}^i\xi_\eta^j\xi_\gamma^k-\xi_\eta^j P_j^i\partial_\gamma\xi_i^\alpha\right)Q_\beta^\eta=\xi_i^\alpha\Lambda_{jk}^i Q_l^j\xi_\beta^l\xi_\gamma^k-\xi_\beta^l Q_l^j P_j^i\partial_\gamma\xi_i^\alpha$$

ya da

$${}''\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha=\xi_i^\alpha\partial_\gamma\xi_\beta^i+\xi_i^\alpha\,{}''\Gamma_{jk}^i\xi_\beta^j\xi_\gamma^k \tag{2.4.33}$$

bulunur. (2.4.32) ve (2.4.33)'ten

$${}'\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha-{}''\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha=\xi_i^\alpha\left({}'\Gamma_{jk}^i-{}''\Gamma_{jk}^i\right)\xi_\beta^j\xi_\gamma^k$$

ya da

$$\overline{D}_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\beta} = \xi^{\alpha}_{i}\left(\overline{D}_{k}\delta^{i}_{j}\right)\xi^{j}_{\beta}\xi^{k}_{\gamma} \tag{2.4.34}$$

bulunur ki böylce aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4.7. Γ, $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir alt manifoldu olsun. $\overline{D}_k\delta^i_j = 0$ ise $\overline{D}_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\beta} = 0$ eşitliği geçerlidir, [13].

Şimdi $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyel kavramını karışık tensör alanına genelleştirebiliriz.

Tanım 2.4.8. $\mathfrak{X}_m$ 'de bileşenleri $V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots}$ olan bir karışık tensör alanı için

$$\overline{D}_{\beta}V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots} = Q^{\alpha_1}_{\gamma_1}\dots Q^{i_1}_{h_1}\dots D_{\beta}V^{\gamma_1 \dots h_1 \dots}_{\eta_1 \dots k_1 \dots}Q^{\eta_1}_{\beta_1}\dots Q^{k_1}_{j_1}\dots \tag{2.4.35}$$

eşitliği ile verilen $\overline{D}_{\beta}$ işlemine, $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre **temel kovaryant türev** adı verilir.

(2.4.35) eşitliğinde (2.4.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\overline{D}_{\beta}V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots} \\
&= Q^{\alpha_1}_{\gamma_1}\dots Q^{i_1}_{h_1}\dots\Big[P^{\gamma_1}_{\lambda_1}\dots P^{h_1}_{r_1}\dots\partial_{\beta}V^{\lambda_1 \dots r_1 \dots}_{\mu_1 \dots s_1 \dots}P^{\mu_1}_{\eta_1}\dots P^{s_1}_{k_1}\dots \\
&\qquad\qquad + \sum_{l} P^{\gamma_1}_{\lambda_1}\dots\Gamma^{\gamma_l}_{\beta\gamma}\dots P^{h_1}_{r_1}\dots V^{\lambda_1 \dots \gamma \dots r_1 \dots}_{\mu_1 \dots\dots\dots s_1 \dots}P^{\mu_1}_{\eta_1}\dots P^{s_1}_{k_1}\dots \\
&\qquad\qquad + \sum_{l} P^{\gamma_1}_{\lambda_1}\dots P^{h_1}_{r_1}\dots\Gamma^{h_l}_{hr}\xi^{r}_{\beta}\dots V^{\lambda_1 \dots r_1 \dots h \dots}_{\mu_1 \dots s_1 \dots\dots}P^{\mu_1}_{\eta_1}\dots P^{s_1}_{k_1}\dots \\
&\qquad\qquad - \sum_{l} P^{\gamma_1}_{\lambda_1}\dots P^{h_1}_{r_1}\dots V^{\lambda_1 \dots\dots\dots r_1 \dots}_{\mu_1 \dots \delta \dots s_1 \dots}P^{\mu_1}_{\eta_1}\dots\Lambda^{\delta}_{\eta_l\beta}\dots P^{s_1}_{k_1}\dots \\
&\qquad\qquad - \sum_{l} P^{\gamma_1}_{\lambda_1}\dots P^{h_1}_{r_1}\dots V^{\lambda_1 \dots r_1 \dots\dots}_{\mu_1 \dots s_1 \dots s \dots}P^{\mu_1}_{\eta_1}\dots P^{s_1}_{k_1}\dots\Lambda^{s}_{k_l t}\xi^{t}_{\beta}\dots\Big]Q^{\eta_1}_{\beta_1}\dots Q^{k_1}_{j_1}\dots \\
&= \partial_{\beta}V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots} + \sum_{l} Q^{\alpha_l}_{\gamma_l}\Gamma^{\gamma_l}_{\beta\gamma}V^{\alpha_1 \dots \gamma \dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots\dots\dots j_1 \dots} + \sum_{l} Q^{i_l}_{h_l}\Gamma^{h_l}_{hr}\xi^{r}_{\beta}V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots h \dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots\dots} \\
&\quad - \sum_{l} V^{\alpha_1 \dots\dots\dots i_1 \dots}_{\beta_1 \dots \delta \dots j_1 \dots}Q^{\eta_l}_{\beta_l}\Lambda^{\delta}_{n_l\beta} - \sum_{l} V^{\alpha_1 \dots i_1 \dots\dots}_{\beta_1 \dots j_1 \dots s \dots}\Lambda^{s}_{k_l t}Q^{k_l}_{j_l}\xi^{t}_{\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir ki (2.4.31)’den

$$\bar{D}_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots} = \partial_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots} + \sum_l {}'\Gamma^{\alpha_l}_{\beta\gamma} V^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots\ldots\ldots j_1\ldots} + \sum_l {}'\Gamma^{i_l}_{hr} V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots h\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots\ldots} \xi^r_\beta$$
$$- \sum_l {}''\Gamma^{\delta}_{\beta_l\beta} V^{\alpha_1\ldots\ldots\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots\delta\ldots j_1\ldots} - \sum_l {}''\Gamma^{s}_{j_l t} V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots s\ldots} \xi^t_\beta \tag{2.4.36}$$

bulunur.

Şimdi temel kovaryant türev ile büzülme arasındaki ilişkiyi inceleyelim. (2.4.36)'dan

$$\delta^{j_1}_{i_1} \bar{D}_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots} = \partial_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots} + \sum_l {}'\Gamma^{\alpha_l}_{\beta\gamma} V^{\alpha_1\ldots\gamma\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots\ldots\ldots i_1 j_2\ldots} + \sum_l {}'\Gamma^{i_l}_{hr} V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots h\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots\ldots} \xi^r_\beta$$
$$- \sum_l {}''\Gamma^{\delta}_{\beta_l\beta} V^{\alpha_1\ldots\ldots\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots\delta\ldots i_1 j_2\ldots} - \sum_l {}''\Gamma^{s}_{j_l t} V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots s\ldots} \xi^t_\beta$$
$$= \bar{D}_\beta \left(V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots} \right) + {}'\Gamma^{i_1}_{hr} V^{\alpha_1\ldots h i_2\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots} \xi^r_\beta - {}''\Gamma^{s}_{i_1 t} V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots s j_2\ldots} \xi^t_\beta$$
$$= \bar{D}_\beta \left(V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots} \right) + V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots j_1 j_2\ldots} \left({}'\Gamma^{j_1}_{i_1 r} - {}''\Gamma^{j_1}_{i_1 r} \right) \xi^r_\beta$$
$$= \bar{D}_\beta \left(V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots i_1 j_2\ldots} \right) + V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots j_1 j_2\ldots} \bar{D}_\beta \delta^{j_1}_{i_1}$$

bulunur. Böylece

$$\delta^{j_1}_{i_1} \bar{D}_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots} = \bar{D}_\beta \left(V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots j_1 j_2\ldots} \delta^{j_1}_{i_1} \right) + V^{\alpha_1\ldots i_1 i_2\ldots}_{\beta_1\ldots j_1 j_2\ldots} \bar{D}_\beta \delta^{j_1}_{i_1} \tag{2.4.37}$$

ve benzer şekilde

$$\delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \bar{D}_\beta V^{\alpha_1\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\ldots j_1\ldots} = \bar{D}_\beta \left(V^{\alpha_1\alpha_2\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\beta_2\ldots i_1\ldots} \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \right) + V^{\alpha_1\alpha_2\ldots i_1\ldots}_{\beta_1\beta_2\ldots j_1\ldots} \bar{D}_\beta \delta^{\beta_1}_{\alpha_1} \tag{2.4.38}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.4.9. Γ regüler genel konneksiyonuna göre $\bar{D}_\beta \delta^i_j = 0$ ve $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre $\bar{D}_\beta \delta^\alpha_\beta = 0$ ise temel kovaryant türev ile büzülme işlemleri değişmelidir, [13].

(2.4.36)'dan ξ^i_α karışık tensörünün temel kovaryant türevi

$$\bar{D}_\beta \xi^i_\alpha = \partial_\beta \xi^i_\alpha + {}'\Gamma^i_{jk} \xi^j_\alpha \xi^k_\beta - {}''\Gamma^\eta_{\alpha\beta} \xi^i_\eta \tag{2.4.39}$$

olduğundan (2.4.32) kullanılarak

$$\xi_i^{\eta}\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^i = \xi_i^{\eta}\left(\partial_{\beta}\xi_{\alpha}^i + {}'\Gamma_{jk}^i\xi_{\alpha}^j\xi_{\beta}^k - {}''\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\xi_{\gamma}^i\right) = \xi_i^{\eta}\partial_{\beta}\xi_{\alpha}^i + \xi_i^{\eta}\,{}'\Gamma_{jk}^i\xi_{\alpha}^j\xi_{\beta}^k - {}''\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}$$
$$= {}'\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - {}''\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}$$

ya da

$$\xi_i^{\eta}\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^i = \bar{D}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\eta} \tag{2.4.40}$$

bulunur. (2.4.40) ve (2.4.28) eşitliklerinden

$$\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^i = \delta_j^i\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^j = \left(\xi_j^{\eta}\xi_{\eta}^i + \xi_j^A\xi_A^i\right)\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^j = \xi_{\eta}^i\bar{D}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\eta} + \xi_j^A\xi_A^i\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^j$$

elde edilir ki burada

$$H_{\alpha\beta}^A = \xi_j^A\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^j, \qquad H_{\alpha\beta}^i = \xi_A^iH_{\alpha\beta}^A$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^i &= \xi_{\eta}^i\bar{D}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\eta} + \xi_A^iH_{\alpha\beta}^A\\ &= \xi_{\eta}^i\bar{D}_{\beta}\delta_{\alpha}^{\eta} + H_{\alpha\beta}^i\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

bulunur. (2.4.21)'den

$$g_{ij}H_{\alpha\beta}^i\xi_{\eta}^j = g_{ij}\xi_A^iH_{\alpha\beta}^A\xi_{\eta}^j = 0,$$

yani $H_{\alpha\beta}^i$ vektörü $T_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$'e ortogonaldir. Ayrıca (2.4.39) ve (2.4.24)'ten $H_{\alpha\beta}^A$,

$$\begin{aligned}H_{\alpha\beta}^A &= \xi_j^A\bar{D}_{\beta}\xi_{\alpha}^j = \xi_j^A\left(\partial_{\beta}\xi_{\alpha}^j + {}'\Gamma_{hk}^j\xi_{\alpha}^h\xi_{\beta}^k - {}''\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\xi_{\eta}^j\right)\\ &= \xi_j^A\partial_{\beta}\xi_{\alpha}^j + \xi_j^A\,{}'\Gamma_{hk}^j\xi_{\alpha}^h\xi_{\beta}^k - \xi_j^A\,{}''\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\xi_{\eta}^j\\ &= \xi_j^A\partial_{\beta}\xi_{\alpha}^j + \xi_j^A\,{}'\Gamma_{hk}^j\xi_{\alpha}^h\xi_{\beta}^k\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi klasik alt uzay teorisindeki, bir vektörün bir eğri boyunca paralelliği kavramı ile geodezik eğri kavramını regüler genel konneksiyonlar için inceleyelim. $\left(V^{\alpha}\right)$, $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun s afin parametreli bir $C:x^{\alpha}=x^{\alpha}\left(s\right)$ eğrisi boyunca tanımlı bir tanjant vektör alanı olsun. Bu vektör alanının $\mathfrak{X}_n$'nin bir koordinat komşuluğundaki gösterilişi

$$V^i=\xi^i_{\alpha}V^{\alpha}$$

şeklindedir. (2.3.59)'dan, $\left(V^i\right)$ vektör alanının $\mathfrak{X}_m$'deki bu eğri boyunca, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant diferansiyeli, (2.4.38), (2.3.45) ve (2.4.41)'den

$$\begin{aligned}\frac{\bar{D}V^i}{ds}=\frac{\bar{D}\left(\xi^i_{\alpha}V^{\alpha}\right)}{ds}&=\frac{\bar{D}\xi^i_{\alpha}}{ds}V^{\alpha}+\xi^i_{\alpha}\frac{\bar{D}V^{\alpha}}{ds}-\xi^i_{\beta}V^{\eta}\frac{\bar{D}\delta^{\beta}_{\eta}}{ds}\\&=\xi^i_{\alpha}\frac{\bar{D}V^{\alpha}}{ds}+V^{\alpha}\left(\xi^i_{\eta}\frac{\bar{D}\delta^{\eta}_{\alpha}}{ds}+H^i_{\alpha\beta}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right)-\xi^i_{\beta}V^{\eta}\frac{\bar{D}\delta^{\beta}_{\eta}}{ds}\\&=\xi^i_{\alpha}\frac{\bar{D}V^{\alpha}}{ds}+H^i_{\alpha\beta}V^{\alpha}\frac{dx^{\beta}}{ds}\end{aligned}\tag{2.4.42}$$

bulunur. Böylece $\frac{\bar{D}V^i}{ds}=0$ eşitliği geçerli ise $\frac{\bar{D}V^{\alpha}}{ds}=0$ ve $H^i_{\alpha\beta}V^{\alpha}\frac{dx^{\beta}}{ds}=0$ eşitliklerinin her ikisi birden geçerlidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 2.4.10. $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$'nin bir tanjant vektör alanı $\mathfrak{X}_m$'deki bir eğri boyunca, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre bir paralel vektör alanı ise bu tanjant vektör alanı aynı eğri boyunca $\mathfrak{X}_m$'nin, Γ'dan türetilen $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre de paralel vektör alanıdır.

Tanım 2.4.11. Γ, $\mathfrak{X}_n$'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$'nin $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre paralel tanjant vektör alanı, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre de paralel tanjant vektör alanı ise $\mathfrak{X}_m$'e $\mathfrak{X}_n$'nin **flat alt manifoldu** denir.

Teorem 2.4.12. Γ, $\mathfrak{X}_n$'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun, $\mathfrak{X}_n$'nin bir flat alt manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $H^i_{\alpha\beta}=0$ olmasıdır, [13].

Teorem 2.4.10. ve Teorem 2.4.12.'deki Γ genel konneksiyonunun regüler olma koşulunun kaldırılabileceği (2.4.35) eşitliğinden kolayca görülür.

$\mathfrak{X}_n$'nin $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan s afin parametreli bir $C : x^\alpha = x^\alpha(s)$ eğrisi, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre bir geodeziği olsun. C eğrisinin $\mathfrak{X}_m$'deki dx^α / ds tanjant vektörünün $\mathfrak{X}_n$'deki gösterilişi $\xi^i_\alpha \left(dx^\alpha / ds \right) = du^i / ds$ olduğundan

$$\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds} \right) = \frac{\bar{D}}{ds}\left(\xi^i_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik için, (2.4.42)'de $V^i = du^i / ds$ ve $V^\alpha = dx^\alpha / ds$ yazılırsa

$$\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds} \right) = \xi^i_\alpha \frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) + H^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

bulunur. Böylece $\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds} \right) = 0$ eşitliği geçerli ise $\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0$ ve

$$H^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{1}{2}\left(H^i_{\alpha\beta} + H^i_{\beta\alpha} \right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = H^i_{(\alpha\beta)} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

eşitliklerinin her ikisi birden geçerlidir. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 2.4.13. $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$'deki bir C eğrisi, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre bir geodezik eğrisi ise $\mathfrak{X}_m$'nin, Γ'dan türetilen $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre de bir geodezik eğrisidir.

Tanım 2.4.14. Γ, $\mathfrak{X}_n$'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$'nin $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre her geodezik eğrisi, $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonuna göre de bir geodezik eğrisi ise $\mathfrak{X}_m$'e $\mathfrak{X}_n$'nin **geodezik alt manifoldu** denir.

Teorem 2.4.15. Γ, $\mathfrak{X}_n$'nin bir regüler genel konneksiyonu ve $\mathfrak{X}_m$, $\mathfrak{X}_n$'nin bir alt manifoldu olsun. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun $\mathfrak{X}_n$'nin bir geodezik alt manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $H^i_{(\alpha\beta)} = 0$ olmasıdır, [13].

Teorem 2.4.13. ve Teorem 2.4.15.'teki Γ genel konneksiyonunun regüler olma koşulunun kaldırılabileceği (2.4.35) eşitliğinden kolayca görülür.

2.4.4. Ortogonal Uzayların Genel Konneksiyonu

Bu bölümde $T_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$'deki $T_x^{\perp}\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ortogonal tümleyen uzayına ait bir ortogonal vektör alanının kovaryant diferansiyelini tanımlayacağız, [22].

$\mathfrak{X}_m$'e ortogonal olan bir V vektör alanının kontravaryant bileşenlerinin $\mathfrak{X}_n$'nin bir koordinat komşuluğundaki gösterilişi

$$V^i = \xi^i_A V^A \tag{2.4.43}$$

şeklindedir. Şimdi DV^A kovaryant diferansiyelini, DV^i kovaryant diferansiyelinin ortogonal uzay üzerine izdüşümü, yani

$$DV^A = \xi^A_i DV^i$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (2.3.43), (2.4.2), (2.4.43), (2.4.29) ve (2.4.27)'den

$$\begin{aligned}
DV^A &= \xi^A_i DV^i = \xi^A_i P^i_j \overline{D}V^j = \xi^A_i P^i_j \left(\partial_k V^j + '\Gamma^j_{hk} V^h\right) du^k \\
&= \xi^A_i P^i_j \left(\partial_\alpha V^j + '\Gamma^j_{hk} \xi^k_\alpha V^h\right) dx^\alpha \\
&= \xi^A_i P^i_j \left(\partial_\alpha \left(\xi^j_B V^B\right) + '\Gamma^j_{hk} \xi^k_\alpha \xi^h_C V^C\right) dx^\alpha \\
&= \xi^A_i P^i_j \left(\left(\partial_\alpha \xi^j_B\right) V^B + \xi^j_B \partial_\alpha V^B + '\Gamma^j_{hk} \xi^k_\alpha \xi^h_C V^C\right) dx^\alpha \\
&= \xi^A_i P^i_j \xi^j_B \partial_\alpha V^B dx^\alpha + \xi^A_i P^i_j \left(\partial_\alpha \xi^j_C + '\Gamma^j_{hk} \xi^k_\alpha \xi^h_C\right) V^C dx^\alpha \\
&= P^A_B \partial_\alpha V^B dx^\alpha + P^A_B \xi^B_j \left(\partial_\alpha \xi^j_C + '\Gamma^j_{hk} \xi^k_\alpha \xi^h_C\right) V^C dx^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$'\Gamma^{B}_{C\alpha} = \xi^{B}_{j}\left(\partial_{\alpha}\xi^{j}_{C} + '\Gamma^{j}_{hk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{h}_{C}\right) \tag{2.4.44}$$

yazılırsa

$$DV^{A} = P^{A}_{B}\left(\partial_{\alpha}V^{B} + '\Gamma^{B}_{C\alpha}V^{C}\right)dx^{\alpha} = P^{A}_{B}\bar{D}V^{B}$$

bulunur. $\mathfrak{X}_m$ 'e ortogonal olan bir V vektör alanının kovaryant bileşenlerinin $\mathfrak{X}_n$ 'nin bir koordinat komşuluğundaki gösterilişi, (2.4.43) ve (2.4.23)'ten

$$V_i = g_{ij}V^{j} = g_{ij}\xi^{j}_{B}V^{B} = g^{BA}g_{ij}\xi^{j}_{B}V_{A} = \xi^{A}_{i}V_{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. DV_A kovaryant diferansiyelini

$$DV_A = \xi^{i}_{A}DV_i$$

şeklinde tanımlarsak, benzer şekilde

$$\begin{aligned}
DV_A &= \xi^{i}_{A}DV_i = \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\bar{D}V_j = \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\left(\partial_k V_j - ''\Gamma^{h}_{jk}V_h\right)du^{k} \\
&= \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\left(\partial_{\alpha}V_j - ''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}V_h\right)dx^{\alpha} \\
&= \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\left(\partial_{\alpha}\left(\xi^{B}_{j}V_B\right) - ''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{C}_{h}V_C\right)dx^{\alpha} \\
&= \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\left(\left(\partial_{\alpha}\xi^{B}_{j}\right)V_B + \xi^{B}_{j}\partial_{\alpha}V_B - ''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{C}_{h}V_C\right)dx^{\alpha} \\
&= \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\xi^{B}_{j}\partial_{\alpha}V_B dx^{\alpha} - \xi^{i}_{A}P^{j}_{i}\left(''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{C}_{h} - \partial_{\alpha}\xi^{C}_{j}\right)V_C dx^{\alpha} \\
&= P^{B}_{A}\partial_{\alpha}V_B dx^{\alpha} - P^{B}_{A}\xi^{j}_{B}\left(''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{C}_{h} - \partial_{\alpha}\xi^{C}_{j}\right)V_C dx^{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$''\Gamma^{C}_{B\alpha} = \xi^{j}_{B}\left(''\Gamma^{h}_{jk}\xi^{k}_{\alpha}\xi^{C}_{h} - \partial_{\alpha}\xi^{C}_{j}\right) \tag{2.4.45}$$

yazılırsa

$$DV_A = P^{B}_{A}\left(\partial_{\alpha}V_B - ''\Gamma^{C}_{B\alpha}V_C\right)dx^{\alpha} = P^{B}_{A}\bar{D}V_B$$

bulunur. (2.4.44) ve (2.4.45) eşitlikleri ile belirli $'\Gamma^{B}_{C\alpha}$ ve $''\Gamma^{B}_{C\alpha}$ katsayıları, ortogonal uzayın konneksiyon katsayılarını ifade etmektedir. Böylece bileşenleri $V^{i\gamma A}_{j\eta B}$ olan karışık tipte bir tensör alanının kovaryant diferansiyeli

$$
\begin{aligned}
&DV^{i\gamma A}_{j\eta B} = P^{i}_{h} P^{\gamma}_{\nu} P^{A}_{C} \bar{D} V^{h\nu C}_{k\mu D} P^{k}_{j} P^{\mu}_{\eta} P^{D}_{B}, \\
&\bar{D} V^{h\nu C}_{k\mu D} = \Big(\partial_\alpha V^{h\nu C}_{k\mu D} + {}'\Gamma^{h}_{rl} \xi^{l}_{\alpha} V^{r\nu C}_{k\mu D} + {}'\Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha} V^{h\lambda C}_{k\mu D} + {}'\Gamma^{C}_{E\alpha} V^{h\nu E}_{k\mu D} \\
&\qquad - {}''\Gamma^{r}_{kl} \xi^{l}_{\alpha} V^{h\nu C}_{r\mu D} - {}''\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} V^{h\nu C}_{k\lambda D} - {}''\Gamma^{E}_{D\alpha} V^{h\nu C}_{k\lambda E} \Big) dx^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.4.46}
$$

şeklindedir. Karışık tipte bir tensör alanı için temel kovaryant türev ile büzülme işlemi arasında (2.4.37) ve (2.4.38) eşitlikleri geçerlidir. Bu tensör alanının ortogonal uzaya ait bileşenleri için temel kovaryant türev ile büzülme işlemi arasındaki ilişki

$$
\begin{aligned}
\delta^{B}_{A} \bar{D}_{\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu B} &= \partial_\alpha V^{i\eta A}_{j\mu A} + {}'\Gamma^{i}_{hk} \xi^{k}_{\alpha} V^{h\eta A}_{j\mu A} + {}'\Gamma^{\eta}_{\gamma\alpha} V^{i\gamma A}_{j\mu A} + {}'\Gamma^{A}_{C\alpha} V^{i\eta C}_{j\mu A} \\
&\quad - {}''\Gamma^{h}_{jk} \xi^{k}_{\alpha} V^{i\eta A}_{h\mu A} - {}''\Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} V^{i\eta A}_{j\gamma A} - {}''\Gamma^{C}_{A\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu C} \\
&= \bar{D}_{\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu A} + {}'\Gamma^{A}_{C\alpha} V^{i\eta C}_{j\mu A} - {}''\Gamma^{C}_{A\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu C} \\
&= \bar{D}_{\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu A} + V^{i\eta C}_{j\mu A} \bar{D}_{\alpha} \delta^{A}_{C}
\end{aligned}
$$

ya da

$$
\delta^{B}_{A} \bar{D}_{\alpha} V^{i\eta A}_{j\mu B} = \bar{D}_{\alpha} \left(V^{i\eta A}_{j\mu B} \delta^{B}_{A} \right) + V^{i\eta A}_{j\mu B} \bar{D}_{\alpha} \delta^{B}_{A} \tag{2.4.47}
$$

eşitliği ile belirlidir.

2.5. WEYL-OTSUKI UZAYLARI

Weyl-Otsuki uzayları ilk olarak A. Moor tarafından [17]’de, genel konneksiyon kavramı ile bir Weyl metriği ilişkilendirilerek karakterize edilmiştir. Regüler genel konneksiyonlarla çalışmanın kolaylığı açısından bu çalışmada, Weyl-Otsuki uzayının, D.F. Nadj’ın [26]’da regüler genel konneksiyonları kullanarak verdiği diğer bir tanımını kullanacağız. Bu tanımlardan herhangi birinin verilmesi durumunda diğer tanımın (2.3.43) ya da (2.3.44) eşitlikleri yardımıyla ifade edilebileceği de kolayca görülebilir.

Tanım 2.5.1. Üzerinde bir $G = g_{ij} du^i \otimes du^j$ Riemann metriği ve bir $\Gamma = \left(P^i_j, \Gamma^i_{jk}\right)$ regüler genel konneksiyonu tanımlı n-boyutlu bir Riemann uzayında, γ_k bir kovaryant vektör alanı olmak üzere, g_{ij} metrik tensörün $\overline{D}_k g_{ij}$ temel kovaryant türevi

$$\overline{D}_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij} \; ^{\dagger} \tag{2.5.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa bu uzaya **Weyl-Otsuki uzayı** adı verilir. γ_k vektör alanına **rekürant vektör alanı**, (2.5.1) eşitliğini sağlayan $\left(g_{ij}\right)$ tensörüne **rekürant metrik tensör** ve G metriğine de **Weyl metriği** denir.

Bundan sonra Weyl-Otsuki uzaylarında tanımlı manifoldlarla çalışacağımız için bu manifoldları **Weyl-Otsuki manifoldu** şeklinde adlandıracağız.

Bilindiği gibi klasik Weyl uzaylarında, Kronecker deltasının klasik afin konneksiyona göre kovaryant türevi $\nabla_k \delta^i_j = 0$ olduğundan, $\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$ eşitliğinden $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$ elde edilir. Ancak bir Γ regüler genel konneksiyonunun geçerli olduğu Weyl-Otsuki uzaylarında, genel olarak $\overline{D}_k \delta^i_j \neq 0$ olduğundan $\overline{D}_k g^{ij}$ temel kovaryant türevi klasik Weyl uzaylarındaki gibi elde edilemez. Bu nedenle $\overline{D}_k g^{ij}$ temel kovaryant türevini belirleyerek g^{ij}'nin de bir rekürant vektör olması için gerek ve yeter koşulu inceleyelim.

(2.3.47) ve (2.5.1)'den

$$\begin{aligned}
\overline{D}_k \delta^i_h = \overline{D}_k \left(g^{ij} g_{jh}\right) &= g_{jh} \overline{D}_k g^{ij} + g^{ij} \overline{D}_k g_{jh} - g^{il} g_{jh} \overline{D}_k \delta^j_l \\
&= g_{jh} \overline{D}_k g^{ij} + g^{ij} \gamma_k g_{jh} - g^{il} g_{jh} \overline{D}_k \delta^j_l \\
&= g_{jh} \overline{D}_k g^{ij} + \gamma_k \delta^i_h - g^{il} g_{jh} \overline{D}_k \delta^j_l
\end{aligned}$$

ya da

---

† $\gamma_k = 0$ ise regüler genel konneksiyon bir metrik konneksiyon olur ve bu uzay Riemann-Otsuki uzayı şeklinde adlandırılır.

$$\overline{D}_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij} + g^{ih}\overline{D}_k \delta_h^j + g^{jh}\overline{D}_k \delta_h^i$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.5.2. Bir Weyl-Otsuki uzayında g^{ij} 'nin $-\gamma_k$ 'nın rekürant vektör alanı, yani

$$\overline{D}_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij} \tag{2.5.2}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$g^{ih}\overline{D}_k \delta_h^j + g^{jh}\overline{D}_k \delta_h^i = 0 \tag{2.5.3}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Weyl-Otsuki uzaylarında kongrüans eğrileri, eğrilik çizgileri, konjüge ve asimptotik eğrileri inceleyeceğimiz bu tez çalışmasında §2'deki tanım ve teoremleri kullanacağız. Eğrilerin incelenmesinden önce Weyl-Otsuki uzaylarında Gauss, Codazzi ve Künhe eşitliklerinin elde edilişini göstereceğiz. Bu eşitlikleri D.F. Nadj [24]'te Riemann-Otsuki uzayları için genel konneksiyonların kovaryant kısmını kullanarak elde etmişti. Ancak bu çalışmada Weyl-Otsuki uzaylarının Gauss, Codazzi ve Künhe eşitlikleri [24]'te verilen yöntemden farklı olarak §2.4.4.'te elde ettiğimiz eşitlikler yardımıyla ifade edilecektir.

Ardından, ilk olarak, bir Riemann manifoldunun kongrüans eğrileri kavramını Weyl-Otsuki manifolduna genişleterek Weyl-Otsuki manifoldunda kongrüans eğrilerini ortogonal olma koşulu altında inceleyeceğiz. Böylece Weyl-Otsuki manifoldunda bir n-li ortogonal sistemin Ricci dönme katsayılarını elde ederek, bir vektörün n-li ortogonal sistemin bir eğrisine göre paralel olma koşulunu ifade edeceğiz. Bu koşul altında bir n-li ortogonal sistemin bir eğrisinin, geodezik eğri olması için gerek ve yeter koşulu elde edeceğiz. Ayrıca bir n-li ortogonal sistemin normal olma koşulunu da inceleyerek böyle bir sistemin bir eğrisinin, normal, geodezik ve irrotasyonel eğri olma durumunda aralarındaki ilişkiyi saptayacağız.

Son olarak, Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda bulunan eğrilik çizgileri, konjüge eğriler ve asimptotik eğrileri incelemek için, §2.4.'te bazı özelliklerini ifade ettiğimiz ancak alt manifold üzerinde tanımlayacağımız, bir eğrinin eğriliği, normal eğriliği ve ortalama eğriliği kavramlarından yararlanacağız. Daha sonra da Riemann manifoldlarında birbirine denk olan, farklı eğrilik çizgisi tanımlarının, Weyl-Otsuki manifoldlarında denk olmadıklarını göreceğiz.

4. BULGULAR

Bu bölümde, ilk olarak §2.4.4.'te elde edilen eşitlikler yardımıyla Weyl-Otsuki uzaylarında Gauss, Codazzi ve Künhe eşitliklerinin elde edilişini göstereceğiz. Ardından Weyl-Otsuki manifoldlarında kongrüans eğrileri, eğrilik çizgileri, konjüge ve asimptotik eğrileri inceleyeceğiz.

4.1. WEYL-OTSUKI UZAYLARINDA GAUSS, CODAZZİ VE KÜHNE EŞİTLİKLERİ

§2.4.4.'te karışık tipte bir tensör alanının temel kovaryant diferansiyelini ifade etmiştik. Bu bölümde, karışık tipte ξ^i_A tensör alanının ikinci mertebeden temel kovaryant diferansiyeli yardımıyla Gauss, Codazzi ve Kühne eşitliklerini yazacağız.

İlk olarak ξ^i_A tensör alanının temel kovaryant türevini hesaplayalım. (2.4.46)'dan karışık tipte ξ^i_A tensörünün temel kovaryant türevi

$$\overline{D}_\beta \xi^i_A = \partial_\beta \xi^i_A + {}'\Gamma^i_{jk}\xi^k_\beta \xi^j_A - {}''\Gamma^B_{A\beta}\xi^i_B$$

olduğundan, (2.4.44) kullanılarak

$$\begin{aligned}\xi^C_i \overline{D}_\beta \xi^i_A &= \xi^C_i \left(\partial_\beta \xi^i_A + {}'\Gamma^i_{jk}\xi^k_\beta \xi^j_A - {}''\Gamma^B_{A\beta}\xi^i_B\right) = \xi^C_i \partial_\beta \xi^i_A + \xi^C_i\, {}'\Gamma^i_{jk}\xi^k_\beta \xi^j_A - {}''\Gamma^C_{A\beta} \\ &= {}'\Gamma^C_{A\beta} - {}''\Gamma^C_{A\beta}\end{aligned}$$

ya da

$$\xi^C_i \overline{D}_\beta \xi^i_A = \overline{D}_\beta \delta^C_A \qquad (4.1.1)$$

bulunur. (4.1.1) ve (2.4.28) eşitliklerinden

$$\bar{D}_\beta \xi^i_A = \delta^i_j \bar{D}_\beta \xi^j_A = \left(\xi^\alpha_j \xi^i_\alpha + \xi^B_j \xi^i_B \right) \bar{D}_\beta \xi^j_A = \xi^\alpha_j \xi^i_\alpha \bar{D}_\beta \xi^j_A + \xi^i_B \bar{D}_\beta \delta^B_A$$

elde edilir ki burada

$$L^\alpha_{A\beta} = \xi^\alpha_j \bar{D}_\beta \xi^j_A, \qquad L^i_{A\beta} = \xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{D}_\beta \xi^i_A &= \xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_B \bar{D}_\beta \delta^B_A \\ &= L^i_{A\beta} + \xi^i_B \bar{D}_\beta \delta^B_A \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

bulunur. (2.4.21)'den

$$g_{ij} L^i_{A\beta} \xi^j_B = g_{ij} \xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta} \xi^j_B = 0,$$

elde edilir ki bu ise $L^i_{A\beta}$ vektörünün bir tanjant vektör olması demektir.

Şimdi $\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha$ ikinci mertebeden temel kovaryant türevini hesaplayalım. (2.4.41), (2.4.38), (2.4.47) ve (2.3.45)'ten

$$\begin{aligned} \bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha &= \bar{D}_\lambda \left(\xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha + \xi^i_A H^A_{\alpha\beta} \right) \\ &= \bar{D}_\lambda \left(\xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha \right) + \bar{D}_\lambda \left(\xi^i_A H^A_{\alpha\beta} \right) \\ &= \bar{D}_\lambda \xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha + \xi^i_\eta \bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha - \xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\gamma_\alpha \bar{D}_\lambda \delta^\eta_\gamma \\ &\quad + H^A_{\alpha\beta} \bar{D}_\lambda \xi^i_A + \xi^i_A \bar{D}_\lambda H^A_{\alpha\beta} - \xi^i_A H^B_{\alpha\beta} \bar{D}_\lambda \delta^A_B \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanında (2.4.40)'tan

$$\bar{D}_\lambda \xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha - \xi^i_\eta \bar{D}_\beta \delta^\gamma_\alpha \bar{D}_\lambda \delta^\eta_\gamma = \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha \left(\bar{D}_\lambda \xi^i_\eta - \xi^i_\gamma \bar{D}_\lambda \delta^\gamma_\eta \right) = 0$$

olduğuna dikkat edilir ve (4.1.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha &= \xi^i_\eta \bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha + H^A_{\alpha\beta} \bar{D}_\lambda \xi^i_A + \xi^i_A \bar{D}_\lambda H^A_{\alpha\beta} - \xi^i_A H^B_{\alpha\beta} \bar{D}_\lambda \delta^A_B \\ &= \xi^i_\eta \bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha + H^A_{\alpha\beta} \left(\xi^i_\eta L^\eta_{A\lambda} + \xi^i_B \bar{D}_\lambda \delta^B_A \right) + \xi^i_A \bar{D}_\lambda H^A_{\alpha\beta} - \xi^i_A H^B_{\alpha\beta} \bar{D}_\lambda \delta^A_B \\ &= \xi^i_\eta \left(\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \delta^\eta_\alpha + L^\eta_{A\lambda} H^A_{\alpha\beta} \right) + \xi^i_A \bar{D}_\lambda H^A_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\overline{D}_{[\lambda}\overline{D}_{\beta]}\xi^i_\alpha &= \frac{1}{2}\left(\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\xi^i_\alpha - \overline{D}_\beta\overline{D}_\lambda\xi^i_\alpha\right)\\ &= \xi^i_\eta\left(\overline{D}_{[\lambda}\overline{D}_{\beta]}\delta^\eta_\alpha + L^\eta_{A[\lambda}H^A_{\alpha\beta]}\right) + \xi^i_A\overline{D}_{[\lambda}H^A_{\alpha\beta]}\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\xi^i_A$ ikinci mertebeden temel kovaryant türevi için (4.1.2), (2.4.38), (2.4.47) ve (2.3.45)'ten

$$\begin{aligned}\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\xi^i_A &= \overline{D}_\lambda\left(\xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^B_A\right)\\ &= \overline{D}_\lambda\left(\xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta}\right) + \overline{D}_\lambda\left(\xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^B_A\right)\\ &= \overline{D}_\lambda\xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_\alpha\overline{D}_\lambda L^\alpha_{A\beta} - \xi^i_\alpha L^\eta_{A\beta}\overline{D}_\lambda\delta^\alpha_\eta\\ &\quad + \overline{D}_\lambda\xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^B_A + \xi^i_B\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\delta^B_A - \xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^C_A\overline{D}_\lambda\delta^B_C\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanında (4.1.1)'den

$$\overline{D}_\lambda\xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^B_A - \xi^i_B\overline{D}_\beta\delta^C_A\overline{D}_\lambda\delta^B_C = \overline{D}_\beta\delta^B_A\left(\overline{D}_\lambda\xi^i_B - \xi^i_C\overline{D}_\lambda\delta^C_B\right) = 0$$

olduğuna dikkat edilir ve (2.4.41) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\xi^i_A &= \overline{D}_\lambda\xi^i_\alpha L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_\alpha\overline{D}_\lambda L^\alpha_{A\beta} - \xi^i_\alpha L^\eta_{A\beta}\overline{D}_\lambda\delta^\alpha_\eta + \xi^i_B\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\delta^B_A\\ &= \left(\xi^i_\eta\overline{D}_\lambda\delta^\eta_\alpha + \xi^i_B H^B_{\alpha\lambda}\right)L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_\alpha\overline{D}_\lambda L^\alpha_{A\beta} - \xi^i_\alpha L^\eta_{A\beta}\overline{D}_\lambda\delta^\alpha_\eta + \xi^i_B\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\delta^B_A\\ &= \xi^i_\alpha\overline{D}_\lambda L^\alpha_{A\beta} + \xi^i_B\left(\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\delta^B_A + H^B_{\alpha\lambda}L^\alpha_{A\beta}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\overline{D}_{[\lambda}\overline{D}_{\beta]}\xi^i_A &= \frac{1}{2}\left(\overline{D}_\lambda\overline{D}_\beta\xi^i_A - \overline{D}_\beta\overline{D}_\lambda\xi^i_A\right)\\ &= \xi^i_\alpha\overline{D}_{[\lambda}L^\alpha_{A\beta]} + \xi^i_B\left(\overline{D}_{[\lambda}\overline{D}_{\beta]}\delta^B_A + H^B_{\alpha[\lambda}L^\alpha_{A\beta]}\right)\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

elde edilir.

Şimdi Gauss ve birinci Codazzi eşitlikleri için $\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha$ ikinci mertebeden temel kovaryant türevini

$$\begin{aligned}
\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha &= \partial_\lambda\left(\bar{D}_\beta \xi^i_\alpha\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda \bar{D}_\beta \xi^h_\alpha - {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\bar{D}_\beta \xi^i_\gamma - {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma \xi^i_\alpha \\
&= \partial_\lambda\left(\partial_\beta \xi^i_\alpha + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta \xi^k_\alpha - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\xi^i_\nu\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\left(\partial_\beta \xi^h_\alpha + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta \xi^k_\alpha - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\xi^h_\nu\right) \\
&\quad - {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\left(\partial_\beta \xi^i_\gamma + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta \xi^k_\gamma - {}''\Gamma^\nu_{\gamma\beta}\xi^i_\nu\right) - {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma \xi^i_\alpha \\
&= \partial_\lambda \partial_\beta \xi^i_\alpha + \xi^k_\alpha \partial_\lambda\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\right) + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta \partial_\lambda \xi^k_\alpha - \xi^i_\nu \partial_\lambda {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\partial_\lambda \xi^i_\nu \\
&\quad + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\left(\partial_\beta \xi^h_\alpha + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta \xi^k_\alpha - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\xi^h_\nu\right) - {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\left(\partial_\beta \xi^i_\gamma + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta \xi^k_\gamma - {}''\Gamma^\nu_{\gamma\beta}\xi^i_\nu\right) \\
&\quad - {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma \xi^i_\alpha
\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\bar{D}_\beta \bar{D}_\lambda \xi^i_\alpha &= \partial_\beta \partial_\lambda \xi^i_\alpha + \xi^k_\alpha \partial_\beta\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\right) + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda \partial_\beta \xi^k_\alpha - \xi^i_\nu \partial_\beta {}''\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\partial_\beta \xi^i_\nu \\
&\quad + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\beta\left(\partial_\lambda \xi^h_\alpha + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\lambda \xi^k_\alpha - {}''\Gamma^\nu_{\alpha\lambda}\xi^h_\nu\right) - {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\left(\partial_\lambda \xi^i_\gamma + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda \xi^k_\gamma - {}''\Gamma^\nu_{\gamma\lambda}\xi^i_\nu\right) \\
&\quad - {}''\Gamma^\gamma_{\lambda\beta}\bar{D}_\gamma \xi^i_\alpha
\end{aligned}$$

yazılırsa bu iki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi^i_\alpha - \bar{D}_\beta \bar{D}_\lambda \xi^i_\alpha &= \left(\partial_\lambda\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\right) - \partial_\beta\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\, {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta - {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\beta\, {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\lambda\right)\xi^k_\alpha \\
&\quad - \left(\partial_\lambda {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \partial_\beta {}''\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + {}''\Gamma^\nu_{\gamma\lambda}\, {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - {}''\Gamma^\nu_{\gamma\beta}\, {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}\right)\xi^i_\nu \\
&\quad - \left({}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda} - {}''\Gamma^\gamma_{\lambda\beta}\right)\bar{D}_\gamma \xi^i_\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$ {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta = {}'\Gamma^i_{k\beta} \tag{4.1.5}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}'R^i_{k\lambda\beta} &= \partial_\lambda\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\right) - \partial_\beta\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\, {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta - {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\beta\, {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\lambda \\
&= \partial_\lambda {}'\Gamma^i_{k\beta} - \partial_\beta {}'\Gamma^i_{k\lambda} + {}'\Gamma^i_{h\lambda}\, {}'\Gamma^h_{k\beta} - {}'\Gamma^i_{h\beta}\, {}'\Gamma^h_{k\lambda}
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$$ {}''R^\nu_{\alpha\lambda\beta} = \partial_\lambda {}''\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \partial_\beta {}''\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + {}''\Gamma^\nu_{\gamma\lambda}\, {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - {}''\Gamma^\nu_{\gamma\beta}\, {}''\Gamma^\gamma_{\alpha\lambda}$$

yazılırsa

$$\bar{D}_{[\lambda}\bar{D}_{\beta]}\xi^i_\alpha = \frac{1}{2}\left(\bar{D}_\lambda\bar{D}_\beta\xi^i_\alpha - \bar{D}_\beta\bar{D}_\lambda\xi^i_\alpha\right)$$
$$= {}'R^i_{k\lambda\beta}\xi^k_\alpha - {}''R^\nu_{\alpha\lambda\beta}\xi^i_\nu - {}''T^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma\xi^i_\alpha$$

bulunur. Böylece (4.1.3) eşitliği

$${}'R^i_{k\lambda\beta}\xi^k_\alpha - {}''R^\nu_{\alpha\lambda\beta}\xi^i_\nu - {}''T^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma\xi^i_\alpha = \xi^i_\eta\left(\bar{D}_{[\lambda}\bar{D}_{\beta]}\delta^\eta_\alpha + L^\eta_{A[\lambda}H^A_{\alpha\beta]}\right) + \xi^i_A\bar{D}_{[\lambda}H^A_{\alpha\beta]} \qquad (4.1.7)$$

şeklini alır. (4.1.7) eşitliği ξ^μ_i ile çarpılırsa

$${}'R^i_{k\lambda\beta}\xi^k_\alpha\xi^\mu_i = {}''R^\mu_{\alpha\lambda\beta} + {}''T^\gamma_{\beta\lambda}\left(\bar{D}_\gamma\xi^i_\alpha\right)\xi^\mu_i + \bar{D}_{[\lambda}\bar{D}_{\beta]}\delta^\mu_\alpha + L^\mu_{A[\lambda}H^A_{\alpha\beta]}$$

Gauss eşitliği elde edilir. (4.1.7) eşitliği ξ^B_i ile çarpılırsa

$${}'R^i_{k\lambda\beta}\xi^k_\alpha\xi^B_i = {}''T^\gamma_{\beta\lambda}\left(\bar{D}_\gamma\xi^i_\alpha\right)\xi^B_i + \bar{D}_{[\lambda}H^B_{\alpha\beta]}$$

birinci Codazzi eşitliği elde edilir.

Şimdi ikinci Codazzi ve Kühne eşitlikleri için $\bar{D}_\lambda\bar{D}_\beta\xi^i_A$ ikinci mertebeden temel kovaryant türevini

$$\bar{D}_\lambda\bar{D}_\beta\xi^i_A = \partial_\lambda\left(\bar{D}_\beta\xi^i_A\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\bar{D}_\beta\xi^h_A - {}''\Gamma^B_{A\lambda}\bar{D}_\beta\xi^i_B - {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma\xi^i_A$$
$$= \partial_\lambda\left(\partial_\beta\xi^i_A + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\xi^k_A - {}''\Gamma^B_{A\beta}\xi^i_B\right) + {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\left(\partial_\beta\xi^h_A + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta\xi^k_A - {}''\Gamma^B_{A\beta}\xi^h_B\right)$$
$$- {}''\Gamma^B_{A\lambda}\left(\partial_\beta\xi^i_B + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\xi^k_B - {}''\Gamma^C_{B\beta}\xi^i_C\right) - {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma\xi^i_A$$
$$= \partial_\lambda\partial_\beta\xi^i_A + \xi^k_A\partial_\lambda\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\right) + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\partial_\lambda\xi^k_A - \xi^i_B\partial_\lambda{}''\Gamma^B_{A\beta} - {}''\Gamma^B_{A\beta}\partial_\lambda\xi^i_B$$
$$+ {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\lambda\left(\partial_\beta\xi^h_A + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\beta\xi^k_A - {}''\Gamma^B_{A\beta}\xi^h_B\right) - {}''\Gamma^B_{A\lambda}\left(\partial_\beta\xi^i_B + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\beta\xi^k_B - {}''\Gamma^C_{B\beta}\xi^i_C\right)$$
$$- {}''\Gamma^\gamma_{\beta\lambda}\bar{D}_\gamma\xi^i_A$$

şeklinde yazalım. Benzer şekilde

$$\bar{D}_\beta\bar{D}_\lambda\xi^i_A = \partial_\beta\partial_\lambda\xi^i_A + \xi^k_A\partial_\beta\left({}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\right) + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\partial_\beta\xi^k_A - \xi^i_B\partial_\beta{}''\Gamma^B_{A\lambda} - {}''\Gamma^B_{A\lambda}\partial_\beta\xi^i_B$$
$$+ {}'\Gamma^i_{hl}\xi^l_\beta\left(\partial_\lambda\xi^h_A + {}'\Gamma^h_{kr}\xi^r_\lambda\xi^k_A - {}''\Gamma^B_{A\lambda}\xi^h_B\right) - {}''\Gamma^B_{A\beta}\left(\partial_\lambda\xi^i_B + {}'\Gamma^i_{kr}\xi^r_\lambda\xi^k_B - {}''\Gamma^C_{B\lambda}\xi^i_C\right)$$
$$- {}''\Gamma^\gamma_{\lambda\beta}\bar{D}_\gamma\xi^i_A$$

yazılırsa bu iki eşitlikten

$$\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi_A^i - \bar{D}_\beta \bar{D}_\lambda \xi_A^i = \left(\partial_\lambda \left('\Gamma_{kr}^i \xi_\beta^r \right) - \partial_\beta \left('\Gamma_{kr}^i \xi_\lambda^r \right) + '\Gamma_{hl}^i \xi_\lambda^l \, '\Gamma_{kr}^h \xi_\beta^r - '\Gamma_{hl}^i \xi_\beta^l \, '\Gamma_{kr}^h \xi_\lambda^r \right) \xi_A^k$$
$$- \left(\partial_\lambda \, ''\Gamma_{A\beta}^B - \partial_\beta \, ''\Gamma_{A\lambda}^B + ''\Gamma_{C\lambda}^B \, ''\Gamma_{A\beta}^C - ''\Gamma_{C\beta}^B \, ''\Gamma_{A\lambda}^C \right) \xi_B^i$$
$$- \left(''\Gamma_{\beta\lambda}^\gamma - ''\Gamma_{\lambda\beta}^\gamma \right) \bar{D}_\gamma \xi_A^i$$

bulunur. Burada

$$''R_{A\lambda\beta}^B = \partial_\lambda \, ''\Gamma_{A\beta}^B - \partial_\beta \, ''\Gamma_{A\lambda}^B + ''\Gamma_{C\lambda}^B \, ''\Gamma_{A\beta}^C - ''\Gamma_{C\beta}^B \, ''\Gamma_{A\lambda}^C$$

yazılırsa (4.1.5) ve (4.1.6)’dan

$$\bar{D}_{[\lambda} \bar{D}_{\beta]} \xi_A^i = \frac{1}{2} \left(\bar{D}_\lambda \bar{D}_\beta \xi_A^i - \bar{D}_\beta \bar{D}_\lambda \xi_A^i \right)$$
$$= 'R_{k\lambda\beta}^i \xi_A^k - ''R_{A\lambda\beta}^B \xi_B^i - ''T_{\beta\lambda}^\gamma \bar{D}_\gamma \xi_A^i$$

bulunur. Böylece (4.1.4) eşitliği

$$'R_{k\lambda\beta}^i \xi_A^k - ''R_{A\lambda\beta}^B \xi_B^i - ''T_{\beta\lambda}^\gamma \bar{D}_\gamma \xi_A^i = \xi_\alpha^i \bar{D}_{[\lambda} L_{A\beta]}^\alpha + \xi_B^i \left(\bar{D}_{[\lambda} \bar{D}_{\beta]} \delta_A^B + H_{\alpha[\lambda}^B L_{A\beta]}^\alpha \right) \qquad (4.1.8)$$

şeklini alır. (4.1.8) eşitliği ξ_i^μ ile çarpılırsa

$$'R_{k\lambda\beta}^i \xi_A^k \xi_i^\mu = ''T_{\beta\lambda}^\gamma \left(\bar{D}_\gamma \xi_A^i \right) \xi_i^\mu + \bar{D}_{[\lambda} L_{A\beta]}^\mu$$

ikinci Codazzi eşitliği elde edilir. (4.1.8) eşitliği ξ_i^C ile çarpılırsa

$$'R_{k\lambda\beta}^i \xi_A^k \xi_i^C = ''R_{A\lambda\beta}^C + ''T_{\beta\lambda}^\gamma \left(\bar{D}_\gamma \xi_A^i \right) \xi_i^C + \bar{D}_{[\lambda} \bar{D}_{\beta]} \delta_A^C + H_{\alpha[\lambda}^C L_{A\beta]}^\alpha$$

Kühne eşitliği elde edilir.

4.2. WEYL-OTSUKI MANİFOLDUNDA KONGRÜANS EĞRİLERİ

Bu bölümde bir Riemann manifoldunda kongrüans eğrileri kavramını [28, 29], Weyl-Otsuki manifoldlarına genişleterek kongrüans eğrilerini ortogonal olma koşulu altında inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.1. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun her bir noktasından bir eğrisi geçen eğri ailesine $\mathfrak{X}_n$ ’de **kongrüans eğrileri** adı verilir.

Kongrüans eğrileri, bir V vektör alanı ile belirlenebilir. Gerçekten, V vektör alanının bir $\left(U, u^i\right)$ koordinat komşuluğunun herhangi bir $x \in \mathfrak{X}_n$ noktasındaki değeri, eğri ailesinin bu noktadan geçen eğrisinin tanjant vektörü olarak düşünülürse, bu vektör alanı doğrultusunda sonsuz küçük bir yer değişiminin du^i bileşenleri için

$$\frac{du^1}{V^1} = \frac{du^2}{V^2} = \ldots = \frac{du^n}{V^n}$$

geçerli olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin

$$\varphi^i\left(u^1, u^2, \ldots, u^n\right) = c^i = sabit, \qquad \left(i = 1, \ldots, n-1\right) \tag{4.2.1}$$

şeklinde n-1 bağımsız çözümü var olup, x noktasının koordinatları (4.2.1)’de yazılarak c^i sabitleri belirlenebilir. Böylece bu n-1 denklem, koordinatları bir tek parametrenin birer fonksiyonu olan ve x noktasından geçen bir eğri tanımlar. Her bir $x \in \mathfrak{X}_n$ noktasından böyle bir eğri geçeceğinden, V vektör alanı eğrilerin bir kongrüansını belirler.

Tanım 4.2.2. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda tanımlı n tane kongrüans eğrisi karşılıklı ortogonal ise bu kongrüans eğrilerine **n-li ortogonal sistem (orthogonal ennuple)** adı verilir.

Şimdi $V_{a|}$, $\left(a = 1, \ldots, n\right)$ ‡, bir n-li ortogonal sistemin n tane kongrüans eğrisinin birim tanjant vektör alanı olsun. $V_{a|}$ vektör alanının kontravaryant ve kovaryant bileşenlerini sırasıyla, $V^i_{a|}$ ve $V_{a|i}$ ile gösterelim. n tane kongrüans eğrisi karşılıklı ortogonal olduğundan,

$$g_{ij} V^i_{a|} V^j_{b|} = \delta^a_b \tag{4.2.2}$$

---

‡ $V_{a|}$ vektör alanının a alt indisi, kongrüans eğrisinin numarasını göstermektedir.

ya da

$$V^i_{a|}V_{b|i} = \delta^a_b \tag{4.2.3}$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi metrik tensörün g_{ij} bileşenlerini, $V_{a|}$ vektör alanının bileşenleri cinsinden ifade edelim. (4.2.3) eşitliğinde $V^i_{a|}$, $\left|V_{a|i}\right|$ determinantında $V_{a|i}$'nin kofaktörünün bu determinanta bölümü olduğundan

$$\sum_a V^i_{a|}V_{a|j} = \delta^i_j \tag{4.2.4}$$

geçerlidir. (4.2.2) eşitliği

$$V_{a|i} = g_{ik}V^k_{a|}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik $V_{a|j}$ ile çarpılır ve a'ya göre toplam alınırsa (4.2.3)'ten

$$\sum_a V_{a|i}V_{a|j} = g_{ij}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sum_a V^i_{a|}V^j_{a|} = g^{ij} \tag{4.2.5}$$

elde edilir.

4.2.1. Ricci Dönme Katsayıları

Tanım 4.2.3. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem verilsin. $V_{a|}$ vektörünün $V_{c|}$ doğrultusundaki temel kovaryant türev vektörünün bileşenlerini $\left(\overline{D}_j V^i_{a|}\right)V^j_{c|}$ ve bu vektörün $V_{b|}$ üzerindeki izdüşümünü

$$\lambda_{abc} = \left(\bar{D}_j V^i_{a|}\right) V_{b|i} V^j_{c|} \tag{4.2.6}$$

şeklinde gösterirsek, λ_{abc} invaryantına **Ricci dönme katsayıları** denir.

(4.2.4) dikkate alınarak (4.2.6)'dan

$$\bar{D}_j V^i_{a|} = \sum_{b,c} \lambda_{abc} V^i_{b|} V_{c|j} \tag{4.2.7}$$

ve bu eşitlikte de (4.2.3) kullanılarak

$$V^j_{c|} \bar{D}_j V^i_{a|} = \sum_{b} \lambda_{abc} V^i_{b|} \tag{4.2.8}$$

elde edilir. (4.2.7) eşitliği, (2.3.42) dikkate alınarak $V_{a|k}$ ile çarpılır ve a'ya göre toplam alınırsa

$$\sum_a \left(\bar{D}_j V^i_{a|}\right) V_{a|k} = \sum_a \left(\partial_j V^i_{a|} + {}'\Gamma^i_{hj} V^h_{a|}\right) V_{a|k} = \sum_{a,b,c} \lambda_{abc} V_{a|k} V^i_{b|} V_{c|j}$$

ya da

$${}'\Gamma^i_{kj} = -\sum_a V_{a|k} \partial_j V^i_{a|} + \sum_{a,b,c} \lambda_{abc} V_{a|k} V^i_{b|} V_{c|j} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Böylece bir n-li ortogonal sistem ve λ_{abc} invaryantları verildiği durumda bir ${}'\Gamma$ klasik afin konneksiyonu belirlenebilir. Ayrıca bir P izomorfizması için $\Gamma^i_{jk} = P^i_h {}'\Gamma^h_{jk}$ ve ${}''\Gamma^i_{jk} = \left(\Gamma^i_{hk} - \partial_k P^i_h\right) Q^h_j$ eşitliklerinden Γ regüler genel konneksiyonu belirlenebilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 4.2.4. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem ve λ_{abc} invaryantları verilirse, $T_x\left(\mathfrak{X}_n\right)$'nin herhangi bir P izomorfizması için Γ regüler genel konneksiyonu belirlidir.

Şimdi (4.2.9)'dan

$$2\,{}'\Gamma^i_{(kj)} = {}'\Gamma^i_{kj} + {}'\Gamma^i_{jk} = -2\sum_a V_{a|(j}\partial_{k)} V^i_{a|} + \sum_{a,b,c} \left(\lambda_{abc} + \lambda_{cba}\right) V_{a|k} V^i_{b|} V_{c|j}$$

ve

$$'T^i_{kj} = '\Gamma^i_{kj} - '\Gamma^i_{jk}$$
$$= 2\sum_a V_{a|[j}\partial_{k]}V^i_{a|} + \sum_{a,b,c}\left(\lambda_{abc} - \lambda_{cba}\right)V_{a|k}V^i_{b|}V_{c|j}$$

yazılırsa aşağıdaki teoremleri elde ederiz:

Teorem 4.2.5. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem için λ_{abc} Ricci dönme katsayılarının, a ve c indislerine göre anti-simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$'\Gamma^i_{(jk)} = -\sum_a V_{a|(j}\partial_{k)}V^i_{a|}$$

olmasıdır.

Teorem 4.2.6. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem için λ_{abc} Ricci dönme katsayılarının, a ve c indislerine göre simetrik olması için gerek ve yeter koşul

$$'T^i_{kj} = 2\sum_a V_{a|[j}\partial_{k]}V^i_{a|}$$

olmasıdır.

Eğer, özel olarak $\lambda_{abc} = 0$ ise (4.2.7)'den

$$\overline{D}_j V^i_{a|} = 0, \qquad (4.2.10)$$

yani $V_{a|}$ bir paralel vektör alanıdır. Bu durumda (2.3.88) Ricci formülünden

$$'R^i_{jkh}V^j_{a|} = 0$$

elde edilir. Eğer, ayrıca

$$'R^i_{jkh} = 0 \qquad (4.2.11)$$

ise (4.2.10) eşitliği tamamen integre edilebilirdir, yani $V_{a|}$ tanjant vektör alanının herhangi bir noktadaki değerleri kullanılarak elde edilen çözüm tek türlü belirlidir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.7. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem için Ricci dönme katsayıları $\lambda_{abc} = 0$ ise $V_{a|}$'nın n-li ortogonal sistemin herhangi bir eğrisine göre bir paralel vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul (4.2.11) eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bir n-li ortogonal sistemin, bir $V_{a|}$ birim tanjant vektör alanının, sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{c|}$ olan diğer bir eğrisine göre bir paralel vektör alanı olması için

$$V_{c|}^{j} \overline{D}_j V_{a|}^{i} = \rho V_{a|}^{i}$$

eşitliğini sağlayan bir ρ skaler alanının var olması gerektiği bilinmektedir. Bu durumda (4.2.8)'den

$$\rho V_{a|}^{i} = V_{c|}^{j} \overline{D}_j V_{a|}^{i} = \sum_b \lambda_{abc} V_{b|}^{i}$$

ya da

$$\sum_b \left(\lambda_{abc} - \rho \delta_a^b \right) V_{b|}^{i} = 0$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.2.8. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda bir n-li ortogonal sistem verilsin. Bu sistemin bir $V_{a|}$ birim tanjant vektör alanının, sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{c|}$ olan diğer bir eğrisine göre bir paralel vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda_{abc} = 0, \qquad \left(b = 1,...n \ ; a \neq b \right)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi, birim tanjant vektör alanı $\underset{a|}{V}$ olan bir n-li ortogonal sistemin eğrilerinin geodezik olmasını inceleyelim. Sistemin s_a afin parametreli bir $u^i = u^i\left(s_a\right)$ geodezik eğrisinin birim tanjant vektör alanının kontravaryant bileşeni $\underset{a|}{V^i} = du^i / ds_a$ olduğundan

$$\frac{\bar{D}\underset{a|}{V^i}}{ds} = \left(\bar{D}_j \underset{a|}{V^i}\right)\frac{du^j}{ds_a} = \underset{a|}{V^j}\bar{D}_j \underset{a|}{V^i} = 0$$

ya da (4.2.8)'den

$$\underset{a|}{V^j}\bar{D}_j \underset{a|}{V^i} = \sum_b \lambda_{aba}\underset{b|}{V^i} = 0$$

geçerlidir. Bu eşitlik, $\underset{a|}{V}$ birim tanjant vektör alanının, üzerinde bulunduğu eğriye göre bir paralel vektör alanı olması demektir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.9. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $\underset{a|}{V}$ olan bir n-li ortogonal sistemin eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda_{aba} = 0, \qquad \left(b = 1,...n \ ; a \neq b\right) \tag{4.2.12}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi λ_{abc} Ricci dönme katsayılarını, a ve b indislerine göre inceleyelim. Bunun için Teorem 2.5.2.'deki (2.5.3) koşulunun gerçeklendiğini, yani (2.5.2),

$$\bar{D}_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kabul ediyoruz. İlk olarak, (2.3.47) ve (2.3.45)'ten

$$\bar{D}_j \underset{a|}{V^i} = \bar{D}_j\left(V_{a|h} g^{ih}\right) = g^{ih}\bar{D}_j V_{a|h} + V_{a|h}\bar{D}_j g^{ih} - V_{a|h} g^{ik}\bar{D}_j \delta_k^h$$

yazılırsa (2.5.2) kullanılarak

$$\bar{D}_j \underset{a|}{V^i} = g^{ih}\bar{D}_j V_{a|h} - \gamma_j g^{ih} V_{a|h} - V_{a|h} g^{ik}\bar{D}_j \delta_k^h$$

bulunur. Bu eşitlik (4.2.6)'da yazılırsa

$$\lambda_{abd} = \left(g^{ih} \bar{D}_j V_{a|h} - \gamma_j g^{ih} V_{a|h} - V_{a|h} g^{ik} \bar{D}_j \delta_k^h \right) V_{b|i} V_{d|}^j$$
$$= \left(V_{b|}^h \bar{D}_j V_{a|h} - \gamma_j \delta_b^a - V_{a|h} V_{b|}^k \bar{D}_j \delta_k^h \right) V_{d|}^j$$

ya da (4.2.4)'ten

$$V_{b|}^h \bar{D}_j V_{a|h} = \sum_d \lambda_{abd} V_{d|j} + \gamma_j \delta_b^a + V_{a|h} V_{b|}^k \bar{D}_j \delta_k^h \tag{4.2.13}$$

elde edilir. İkinci olarak, (4.2.3) eşitliğinin temel kovaryant türevinden yazılan

$$\bar{D}_j \delta_b^a = \bar{D}_j \left(V_{a|}^i V_{b|i} \right) = V_{b|i} \bar{D}_j V_{a|}^i + V_{a|}^i \bar{D}_j V_{b|i} - V_{a|}^k V_{b|i} \bar{D}_j \delta_k^i = 0$$

eşitliği $V_{c|}^j$ ile çarpılırsa, (4.2.6) ve (4.2.13)'ten

$$0 = V_{c|}^j V_{b|i} \bar{D}_j V_{a|}^i + V_{c|}^j V_{a|}^i \bar{D}_j V_{b|i} - V_{c|}^j V_{a|}^k V_{b|i} \bar{D}_j \delta_k^i$$
$$= \lambda_{abc} + V_{c|}^j \left(\sum_d \lambda_{bad} V_{d|j} + \gamma_j \delta_b^a + V_{b|h} V_{a|}^k \bar{D}_j \delta_k^h \right) - V_{c|}^j V_{a|}^k V_{b|i} \bar{D}_j \delta_k^i$$
$$= \lambda_{abc} + \lambda_{bac} + \gamma_j \delta_b^a V_{c|}^j$$

ya da

$$\lambda_{abc} + \lambda_{bac} = -\gamma_j \delta_b^a V_{c|}^j \tag{4.2.14}$$

bulunur. (4.2.14) eşitliği,

$$\lambda_{aab} = -\frac{1}{2} \gamma_j V_{b|}^j, \qquad \lambda_{abc} = -\lambda_{bac}, \qquad (a \neq b) \tag{4.2.15}$$

şeklinde yazılırsa aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.2.10. (2.5.2) eşitliğinin geçerli olduğu bir Weyl-Otsuki manifoldunda λ_{abc} Ricci dönme katsayıları, birbirinden farklı a ve b indislerine göre anti-simetriktir, yani $\lambda_{abc} = -\lambda_{bac}, (a \neq b)$ dir.

4.2.2. Bir n-li Ortogonal Sistemin Lame Eşitliği

Bir n-li ortogonal sistemin tüm eğrileri boyunca tanımlı bir ϕ skaler alanının, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ ve yay uzunluğu s_a olan bir eğrisi boyunca $V_{a|}$ doğrultusundaki türevi

$$\frac{\partial\phi}{\partial s_a}=\frac{\partial\phi}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial s_a}=V_{a|}^i\partial_i\phi$$

şeklinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanının, yay uzunluğu s_b ve birim tanjant vektör alanı $V_{b|}$ olan diğer bir eğrisi boyunca $V_{b|}$ doğrultusundaki türevi

$$\frac{\partial}{\partial s_b}\frac{\partial\phi}{\partial s_a}=V_{b|}^j\partial_j\left(V_{a|}^i\partial_i\phi\right)=\left(V_{a|}^i\partial_j\partial_i\phi+\partial_jV_{a|}^i\partial_i\phi\right)V_{b|}^j$$

şeklinde olup (2.3.42) ve (4.2.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_b}\frac{\partial\phi}{\partial s_a}&=V_{a|}^iV_{b|}^j\partial_j\partial_i\phi+\left(V_{b|}^j\overline{D}_jV_{a|}^i-{}'\Gamma_{kj}^iV_{a|}^kV_{b|}^j\right)\partial_i\phi\\&=V_{a|}^iV_{b|}^j\partial_j\partial_i\phi+\left(\sum_c\lambda_{acb}V_{c|}^i-{}'\Gamma_{kj}^iV_{a|}^kV_{b|}^j\right)\partial_i\phi\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial s_b}\frac{\partial\phi}{\partial s_a}-\frac{\partial}{\partial s_a}\frac{\partial\phi}{\partial s_b}=\left(\sum_c\left(\lambda_{acb}-\lambda_{bca}\right)V_{c|}^i-{}'T_{kj}^iV_{a|}^kV_{b|}^j\right)\partial_i\phi$$

elde edilir. Bir ϕ skaler alanının ikinci mertebeden doğrultu türevinin değişmeli olmadığını gösteren bu eşitliğe, n-li ortogonal sistemin **Lame eşitliği** adı verilir.

4.2.3. Bir n-li Ortogonal Sistemin Normal Olma Koşulu

Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunda, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistem verilsin. Bu sistemin $x\in\mathfrak{X}_n$ noktasının bir $\left(U,u^i\right)$ koordinat komşuluğunda bir

$\phi = sabit$, hiperyüzey ailesine normal olması için $\nabla\phi$ gradyent vektör alanının $V_{a|}$ yönünde olması, yani

$$\frac{\partial\phi/\partial u^1}{V_{a|1}} = \frac{\partial\phi/\partial u^2}{V_{a|2}} = \dots = \frac{\partial\phi/\partial u^n}{V_{a|n}}$$

koşulunun gerçeklenmesi gerekmektedir. Bilindiği gibi bu koşulu gerçekleyen ϕ fonksiyonunun bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$V_{a|i}\left(\partial_k V_{a|j} - \partial_j V_{a|k}\right) + V_{a|j}\left(\partial_i V_{a|k} - \partial_k V_{a|i}\right) + V_{a|k}\left(\partial_j V_{a|i} - \partial_i V_{a|j}\right) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitlik, birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğri için (2.3.42) kullanılarak

$$\begin{aligned}0 = V_{n|i}&\left(\bar{D}_k V_{n|j} + {}''\Gamma^l_{jk} V_{n|l} - \bar{D}_j V_{n|k} - {}''\Gamma^l_{kj} V_{n|l}\right) + V_{n|j}\left(\bar{D}_i V_{n|k} + {}''\Gamma^l_{ki} V_{n|l} - \bar{D}_k V_{n|i} - {}''\Gamma^l_{ik} V_{n|l}\right)\\ &+ V_{n|k}\left(\bar{D}_j V_{n|i} + {}''\Gamma^l_{ij} V_{n|l} - \bar{D}_i V_{n|j} - {}''\Gamma^l_{ji} V_{n|l}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve $V^i_{a|} V^k_{b|}$, $(a,b = 1,2,\dots,n-1)$ ile çarpılırsa (4.2.13)'ten

$$\begin{aligned}0 &= V^i_{a|} V^k_{b|} V_{n|j}\left(\bar{D}_i V_{n|k} + {}''\Gamma^l_{ki} V_{n|l} - \bar{D}_k V_{n|i} - {}''\Gamma^l_{ik} V_{n|l}\right)\\ &= V_{n|j}\Big(\lambda_{nba} + \gamma_i \delta^n_b V^i_{a|} + V_{n|l} V^k_{b|} V^i_{a|} \bar{D}_i \delta^l_k + {}''\Gamma^l_{ki} V_{n|l} V^i_{a|} V^k_{b|}\\ &\qquad - \lambda_{nab} - \gamma_k \delta^n_a V^k_{b|} - V_{n|l} V^i_{a|} V^k_{b|} \bar{D}_k \delta^l_i - V^i_{a|} V^k_{b|}\, {}''\Gamma^l_{ik} V_{n|l}\Big)\\ &= V_{n|j}\left(\lambda_{nba} + V_{n|l} V^k_{b|} V^i_{a|} \bar{D}_i \delta^l_k + {}''\Gamma^l_{ki} V_{n|l} V^i_{a|} V^k_{b|} - \lambda_{nab} - V_{n|l} V^i_{a|} V^k_{b|} \bar{D}_k \delta^l_i - V^i_{a|} V^k_{b|}\, {}''\Gamma^l_{ik} V_{n|l}\right)\\ &= V_{n|j}\left(\lambda_{nba} - \lambda_{nab} + \left(2\bar{D}_{[i}\delta^l_{k]} + {}''T^l_{ki}\right) V^i_{a|} V^k_{b|} V_{n|l}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.2.11. (2.5.2) eşitliğinin geçerli olduğu bir Weyl-Otsuki manifoldunda verilen bir n-li ortogonal sistemin, birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğrisinin normal olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda_{nab} - \lambda_{nba} = {}'T^l_{ki} V^i_{a|} V^k_{b|} V_{n|l}, \qquad (a,b = 1,2,\dots,n-1) \tag{4.2.16}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Şimdi bir n-li ortogonal sistemin tüm eğrilerinin normal olması durumunu inceleyelim. Bu durumda, λ_{abc} Ricci dönme katsayılarındaki a, b ve c indislerinin birbirinden farklı olması gerektiğinden, (4.2.16) eşitliğinde (4.2.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lambda_{abc} &= \lambda_{acb} + {}'T^l_{ki} V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} = -\lambda_{cab} + {}'T^l_{ki} V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} \\
&= -\lambda_{cba} - {}'T^l_{ki} V^i_{a|} V^k_{b|} V_{c|l} + {}'T^l_{ki} V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} \\
&= \lambda_{bca} + {}'T^l_{ki} \left(V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} - V^i_{a|} V^k_{b|} V_{c|l} \right) \\
&= \lambda_{bac} + {}'T^l_{ki} V^i_{c|} V^k_{a|} V_{b|l} + {}'T^l_{ki} \left(V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} - V^i_{a|} V^k_{b|} V_{c|l} \right) \\
&= -\lambda_{abc} + {}'T^l_{ki} \left(V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} + V^i_{c|} V^k_{a|} V_{b|l} - V^i_{a|} V^k_{b|} V_{c|l} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4.2.12. (2.5.2) eşitliğinin geçerli olduğu bir Weyl-Otsuki manifoldunda verilen bir n-li ortogonal sistemin tüm eğrilerinin normal olması için gerek ve yeter koşul

$$2\lambda_{abc} = {}'T^l_{ki} \left(V^i_{b|} V^k_{c|} V_{a|l} + V^i_{c|} V^k_{a|} V_{b|l} - V^i_{a|} V^k_{b|} V_{c|l} \right),$$
$$\left(a,b,c = 1,2,...,n \quad \text{ve} \quad a,b,c \text{ birbirinden farklı} \right)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

4.2.4. Bir n-li Ortogonal Sistemin Rotasyoneli

Tanım 4.2.13. Bir n-li ortogonal sistemin birim tanjant vektörünün rotasyoneline **n-li ortogonal sistemin rotasyoneli** adı verilir. Rotasyoneli özdeş olarak sıfır olan bir n-li ortogonal sistem, **irrotasyonel** şeklinde adlandırılır.

Bir n-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğrisini düşünelim. Bu eğri için (4.2.13) eşitliği

$$V^h_{b|} \bar{D}_j V_{n|h} = \sum_c \lambda_{nbc} V_{c|j} + \gamma_j \delta^n_b + V_{n|h} V^l_{b|} \bar{D}_j \delta^h_l$$

şeklinde yazılır. Bu eşitlik $V_{b|k}$ ile çarpılır ve b 'ye göre toplam alınırsa (4.2.4)'ten

$$\bar{D}_j V_{n|k} = \sum_{b,c} \lambda_{nbc} V_{b|k} V_{c|j} + \gamma_j V_{n|k} + V_{n|h} \bar{D}_j \delta_k^h \tag{4.2.17}$$

elde edilir. $V_{n|}$ vektör alanının rotasyoneli, (4.2.17)'den

$$\begin{aligned} \bar{D}_j V_{n|i} - \bar{D}_i V_{n|j} &= \sum_{b,c} \lambda_{nbc} V_{b|i} V_{c|j} + \gamma_j V_{n|i} + V_{n|h} \bar{D}_j \delta_i^h - \sum_{b,c} \lambda_{nbc} V_{b|j} V_{c|i} - \gamma_i V_{n|j} - V_{n|h} \bar{D}_i \delta_j^h \\ &= \sum_{b,c} \left(\lambda_{nbc} - \lambda_{ncb}\right) V_{b|i} V_{c|j} + 2\left(\bar{D}_{[j} \delta_{i]}^h + \gamma_{[j} \delta_{i]}^h\right) V_{n|h} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu eşitliği hesaplamak için sağ yanındaki iki katlı toplamı; ilk olarak b ve c indisleri $1,...,n-1$ değerlerini ve ikinci olarak b ve c indislerinden en az biri n değerini alacak şekilde parçalayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{D}_j V_{n|i} - \bar{D}_i V_{n|j} = &\sum_{b,c=1}^{n-1} \left(\lambda_{nbc} - \lambda_{ncb}\right) V_{b|i} V_{c|j} + \sum_{b=1}^{n-1} \left(\lambda_{nbn} - \lambda_{nnb}\right) V_{b|i} V_{n|j} \\ &+ \sum_{c=1}^{n-1} \left(\lambda_{nnc} - \lambda_{ncn}\right) V_{n|i} V_{c|j} + 2\left(\bar{D}_{[j} \delta_{i]}^h + \gamma_{[j} \delta_{i]}^h\right) V_{n|h} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan bu eğri, normal ve geodezik bir eğri olsun. Bu durumda (4.2.18) eşitliğinin sağ yanındaki ilk terim için (4.2.16)'dan,

$$\begin{aligned} \sum_{b,c=1}^{n-1} \left(\lambda_{nbc} - \lambda_{ncb}\right) V_{b|i} V_{c|j} &= \sum_{b,c=1}^{n-1} {}'T_{kh}^l V_{b|}^h V_{c|}^k V_{n|l} V_{b|i} V_{c|j} \\ &= {}'T_{kh}^l \left(\delta_i^h - V_{n|}^h V_{n|i}\right)\left(\delta_j^k - V_{n|}^k V_{n|j}\right) V_{n|l} \\ &= {}'T_{kh}^l \left(\delta_i^h \delta_j^k - \delta_i^h V_{n|}^k V_{n|j} - \delta_j^k V_{n|}^h V_{n|i} + V_{n|}^h V_{n|i} V_{n|}^k V_{n|j}\right) V_{n|l} \\ &= \left({}'T_{ji}^l - {}'T_{ki}^l V_{n|}^k V_{n|j} - {}'T_{jh}^l V_{n|}^h V_{n|i} + {}'T_{kh}^l V_{n|}^h V_{n|i} V_{n|}^k V_{n|j}\right) V_{n|l} \\ &= \left({}'T_{ji}^l - {}'T_{ki}^l V_{n|}^k V_{n|j} + {}'T_{kj}^l V_{n|}^k V_{n|i}\right) V_{n|l} \\ &= \left({}'T_{ji}^l - 2\,{}'T_{k[i}^l V_{n|}^k V_{n|j]}\right) V_{n|l} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.18) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci ve üçüncü terimler için (4.2.12)'den

$$\lambda_{nbn} = \lambda_{ncn} = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{D}_j V_{n|i} - \bar{D}_i V_{n|j} &= \left({}'T_{ji}^{l} - 2\,{}'T_{k[i}^{l} V_{n|}^{k} V_{n|j]} \right) V_{n|l} - \sum_{b=1}^{n-1} \lambda_{nnb} V_{b|i} V_{n|j} \\
&\quad + \sum_{c=1}^{n-1} \lambda_{nnc} V_{n|i} V_{c|j} + 2\left(\bar{D}_{[j} \delta_{i]}^{h} + \gamma_{[j} \delta_{i]}^{h} \right) V_{n|h} \\
&= \left({}''T_{ji}^{l} - 2\,{}'T_{k[i}^{l} V_{n|}^{k} V_{n|j]} + 2\gamma_{[j} \delta_{i]}^{l} \right) V_{n|l} \\
&\quad + \sum_{b=1}^{n-1} \lambda_{nnb} \left(V_{n|i} V_{b|j} - V_{b|i} V_{n|j} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ yanındaki son terim için (4.2.15)’ten,

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{n-1} \lambda_{nnb} \left(V_{n|i} V_{b|j} - V_{b|i} V_{n|j} \right) &= -\frac{1}{2} \gamma_k \sum_{b=1}^{n-1} V_{b|}^{k} \left(V_{n|i} V_{b|j} - V_{b|i} V_{n|j} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \gamma_k V_{n|i} \left(\delta_j^k - V_{n|}^{k} V_{n|j} \right) + \frac{1}{2} \gamma_k V_{n|j} \left(\delta_i^k - V_{n|}^{k} V_{n|i} \right) \\
&= \gamma_{[i} V_{n|j]}
\end{aligned}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\bar{D}_j V_{n|i} - \bar{D}_i V_{n|j} = \left({}''T_{ji}^{l} - 2\,{}'T_{k[i}^{l} V_{n|}^{k} V_{n|j]} + \gamma_{[j} \delta_{i]}^{l} \right) V_{n|l}$$

bulunur. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.14. (2.5.2) eşitliğinin geçerli olduğu bir Weyl-Otsuki manifoldunda verilen bir n-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğrisi için

$$ {}''T_{ji}^{l} - 2\,{}'T_{k[i}^{l} V_{n|}^{k} V_{n|j]} + \gamma_{[j} \delta_{i]}^{l} = 0$$

eşitliği geçerli ise bu eğri, aşağıdaki üç koşuldan herhangi ikisini sağlaması durumunda üçüncü koşulu da sağlar:

i) verilen eğri normaldir, ii) verilen eğri geodeziktir, iii) verilen eğri irrotasyoneldir.

4.3. WEYL-OTSUKI MANİFOLDUNUN ALT MANİFOLDLARINDA BULUNAN BAZI ÖZEL EĞRİLER

Bu bölümde bir Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda bulunan konjüge ve asimptotik eğriler ile eğrilik çizgilerini inceleyeceğiz. Riemann manifoldlarda birbirine denk olan farklı eğrilik çizgisi tanımlarının, Weyl-Otsuki manifoldlarında denk olmadıklarını göreceğiz. Bunun için , §2.4'te bazı özelliklerini ifade ettiğimiz eğrileri burada alt manifold üzerinde tanımlayarak bu eğrilerin; eğriliğini, normal ve ortalama eğriliklerini inceleyeceğiz.

Şimdi ilk olarak bir Weyl-Otsuki manifoldunun bir alt manifoldunun da yine bir Weyl-Otsuki manifoldu olduğunu gösterelim. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldu üzerinde tanımlı ve $\mathfrak{X}_n$'nin Γ regüler genel konneksiyonundan indüklenmiş $\tilde{\Gamma}$ genel konneksiyonunun da regüler olduğunu Teorem 2.4.6.'da göstermiştik. Bu durumda $\mathfrak{X}_m$ üzerinde tanımlı $g_{\alpha\beta}$ metrik tensörünün $\tilde{\Gamma}$ indüklenmiş regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant türevi için (2.4.4), (2.4.36) ve (2.4.38) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_\eta g_{\alpha\beta} &= \bar{D}_\eta\left(g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\right) = \xi^j_\beta\bar{D}_\eta\left(g_{ij}\xi^i_\alpha\right) + g_{ij}\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta\xi^j_\beta - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h \\
&= \xi^j_\beta\left(\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta g_{ij} + g_{ij}\bar{D}_\eta\xi^i_\alpha - g_{ij}\xi^h_\alpha\bar{D}_\eta\delta^i_h\right) + g_{ij}\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta\xi^j_\beta - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h \\
&= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\bar{D}_\eta\xi^i_\alpha - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\bar{D}_\eta\delta^i_h + g_{ij}\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta\xi^j_\beta - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada (2.4.41), (2.4.34) ve (2.4.28) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{D}_\eta g_{\alpha\beta} &= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\left(\xi^i_\mu\bar{D}_\eta\delta^\mu_\alpha + \xi^i_A H^A_{\alpha\eta}\right) - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\bar{D}_\eta\delta^i_h \\
&\quad + g_{ij}\xi^i_\alpha\left(\xi^j_\mu\bar{D}_\eta\delta^\mu_\beta + \xi^j_A H^A_{\beta\eta}\right) - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h \\
&= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\xi^i_\mu\bar{D}_\eta\delta^\mu_\alpha - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\bar{D}_\eta\delta^i_h + g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^j_\mu\bar{D}_\eta\delta^\mu_\beta - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h \\
&= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\bar{D}_\eta g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\xi^i_\mu\xi^\mu_h\left(\bar{D}_k\delta^h_l\right)\xi^l_\alpha\xi^k_\eta - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\bar{D}_\eta\delta^i_h \\
&\quad + g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^j_\mu\xi^\mu_h\left(\bar{D}_k\delta^h_l\right)\xi^l_\beta\xi^k_\eta - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\bar{D}_\eta\delta^j_h \\
&= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\xi^k_\eta\bar{D}_k g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\xi^i_\mu\xi^\mu_h\xi^l_\alpha\xi^k_\eta\bar{D}_k\delta^h_l - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\eta\bar{D}_k\delta^i_h + g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^j_\mu\xi^\mu_h\xi^l_\beta\xi^k_\eta\bar{D}_k\delta^h_l \\
&\quad - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\xi^k_n\bar{D}_k\delta^j_h
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\overline{D}_\eta g_{\alpha\beta} &= \xi^j_\beta \xi^i_\alpha \xi^k_\eta \overline{D}_k g_{ij} + g_{ij}\xi^j_\beta\left(\delta^i_h - \xi^i_A\xi^A_h\right)\xi^l_\alpha\xi^k_\eta \overline{D}_k\delta^h_l - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\eta\overline{D}_k\delta^i_h \\ &\quad + g_{ij}\xi^i_\alpha\left(\delta^j_h - \xi^j_A\xi^A_h\right)\xi^l_\beta\xi^k_\eta\overline{D}_k\delta^h_l - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\xi^k_n\overline{D}_k\delta^j_h \\ &= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\xi^k_\eta\overline{D}_k g_{ij} + g_{hj}\xi^j_\beta\xi^l_\alpha\xi^k_\eta\overline{D}_k\delta^h_l - g_{ij}\xi^h_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\eta\overline{D}_k\delta^i_h + g_{ih}\xi^i_\alpha\xi^l_\beta\xi^k_\eta\overline{D}_k\delta^h_l \\ &\quad - g_{ij}\xi^i_\alpha\xi^h_\beta\xi^k_n\overline{D}_k\delta^j_h \\ &= \xi^j_\beta\xi^i_\alpha\xi^k_\eta\overline{D}_k g_{ij}\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte (2.5.1), (2.4.4) ve (2.4.13) kullanılırsa

$$\overline{D}_\eta g_{\alpha\beta} = \gamma_\eta g_{\alpha\beta}$$

elde edilir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.1. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun her alt manifoldu da bir Weyl-Otsuki manifoldudur.

4.3.1. Weyl-Otsuki Manifoldunun Alt Manifoldunda Bulunan Bir Eğrinin Eğriliği

$\mathfrak{X}_m$, bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun bir alt manifoldu olsun. §2.4.3'te $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun $T^\perp_x\left(\mathfrak{X}_m\right)$ ortogonal uzayının bir bazını $\left\{\xi^i_A\right\}$, $\left(A = m+1,...,n\right)$ şeklinde göstermiştik. Burada $\left\{\xi^i_A\right\}$ bazını ortonormal kabul edeceğiz. Böylece (2.4.21) eşitliği ile birlikte (2.4.22)'den elde edilen

$$g_{ij}\xi^i_A\xi^j_A = 1 \qquad \text{ve} \qquad g_{ij}\xi^i_A\xi^j_B = 0,\ \left(A \neq B\right) \tag{4.3.1}$$

eşitlikleri geçerli olur. (4.3.1)'in ilk eşitliğinin $\tilde{\Gamma}$ regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant türevi alınır ve (2.5.1) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}0 = \overline{D}_\beta\left(g_{ij}\xi^i_A\xi^j_A\right) &= \xi^j_A\overline{D}_\beta\left(g_{ij}\xi^i_A\right) + g_{ij}\xi^i_A\overline{D}_\beta\xi^j_A - g_{ij}\xi^i_A\xi^k_A\overline{D}_\beta\delta^j_k \\ &= \xi^j_A\left(\xi^i_A\overline{D}_\beta g_{ij} + g_{ij}\overline{D}_\beta\xi^i_A + g_{ij}\xi^k_A\overline{D}_\beta\delta^i_k\right) + g_{ij}\xi^i_A\overline{D}_\beta\xi^j_A - g_{ij}\xi^i_A\xi^k_A\overline{D}_\beta\delta^j_k \\ &= \xi^j_A\xi^i_A\xi^l_\beta\overline{D}_l g_{ij} + 2g_{ij}\xi^j_A\overline{D}_\beta\xi^i_A \\ &= \gamma_l\xi^l_\beta + 2g_{ij}\xi^j_A\overline{D}_\beta\xi^i_A\end{aligned}$$

ya da

$$g_{ij}\xi_A^j\overline{D}_\beta\xi_A^i = -\frac{1}{2}\gamma_l\xi_\beta^l$$

elde edilir. Böylece (4.1.2) eşitliği

$$\overline{D}_\beta\xi_A^i = \xi_\alpha^i L_{A\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\gamma_j\xi_\beta^j\xi_A^i \tag{4.3.2}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde (2.4.21) eşitliğinin $\tilde{\Gamma}$ regüler genel konneksiyonuna göre temel kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
0 = \overline{D}_\beta\left(g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^j\right) &= \xi_A^j\overline{D}_\beta\left(g_{ij}\xi_\alpha^i\right) + g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j - g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j \\
&= \xi_A^j\left(\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta g_{ij} + g_{ij}\overline{D}_\beta\xi_\alpha^i + g_{ij}\xi_\alpha^k\overline{D}_\beta\delta_k^i\right) + g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j - g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j \\
&= \xi_A^j\xi_\alpha^i\xi_\beta^l\overline{D}_l g_{ij} + g_{ij}\xi_A^j\overline{D}_\beta\xi_\alpha^i + g_{ij}\xi_\alpha^k\xi_A^j\overline{D}_\beta\delta_k^i + g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j - g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j \\
&= \xi_A^j\xi_\alpha^i\xi_\beta^l\gamma_l g_{ij} + g_{ij}\xi_A^j\overline{D}_\beta\xi_\alpha^i + g_{ij}\xi_\alpha^k\xi_A^j\overline{D}_\beta\delta_k^i + g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j - g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j \\
&= g_{ij}\xi_A^j\overline{D}_\beta\xi_\alpha^i + g_{ij}\xi_\alpha^k\xi_A^j\overline{D}_\beta\delta_k^i + g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j - g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j
\end{aligned}$$

ya da

$$g_{ij}\xi_\alpha^i\overline{D}_\beta\xi_A^j = g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j - g_{ij}\xi_\alpha^k\xi_A^j\overline{D}_\beta\delta_k^i - g_{ij}\xi_A^j\overline{D}_\beta\xi_\alpha^i$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.4.41) ve (4.3.2) kullanılırsa

$$g_{ij}\xi_\alpha^i\left(\xi_\eta^j L_{A\beta}^\eta - \frac{1}{2}\gamma_l\xi_\beta^l\xi_A^j\right) = g_{ij}\xi_\alpha^i\xi_A^k\overline{D}_\beta\delta_k^j - g_{ij}\xi_\alpha^k\xi_A^j\overline{D}_\beta\delta_k^i - g_{ij}\xi_A^j\left(\xi_\eta^i\overline{D}_\beta\delta_\alpha^\eta + \xi_B^i H_{\alpha\beta}^B\right)$$

ya da

$$L_{A\beta\alpha} = g_{\alpha\eta}L_{A\beta}^\eta = g_{ij}\left(\xi_\alpha^j\xi_A^k - \xi_\alpha^k\xi_A^j\right)\overline{D}_\beta\delta_k^i - H_{\alpha\beta}^A \tag{4.3.3}$$

bulunur.

Şimdi, $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan s afin parametreli bir $C : x^\alpha = x^\alpha\left(s\right)$ eğrisini düşünelim. Bu eğrinin $\mathfrak{X}_m$'deki dx^α/ds birim tanjant vektörünün $\mathfrak{X}_n$'deki gösterilişi

$\xi_\alpha^i\left(dx^\alpha/ds\right)=du^i/ds$ olduğundan (2.4.42) eşitliğinde $V^i=du^i/ds$ ve $V^\alpha=dx^\alpha/ds$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)&=\xi_\alpha^i\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)+\xi_A^i H_{\alpha\beta}^A\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\\&=\xi_\alpha^i\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)+H_{\alpha\beta}^i\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

elde edilir. Burada $\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)$ ve $\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)$, C eğrisinin sırasıyla $\mathfrak{X}_n$ ve $\mathfrak{X}_m$ manifoldlarına göre eğrilik vektörünün kontravaryant bileşenleridir. $\left\{\xi_A^i\right\}$, $\left(A=m+1,...,n\right)$ ortonormal bazına ait tamamen keyfi olarak saptanan bir ξ_A^i normal vektör alanı için, yani A sabit seçilirse, (4.3.4) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci terim, eğrilik vektörünün $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun ξ_A^i normal vektör alanı boyunca kontravaryant bileşenleri olup; C eğrisinin ξ_A^i **normal vektör alanı boyunca normal eğrilik vektörü** adını alır. Bu vektörün büyüklüğüne, eğrinin ξ_A^i **normal vektör alanı boyunca normal eğriliği** denir ve

$$\overset{A}{\kappa}=H_{\alpha\beta}^A\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

ile hesaplanır. C eğrisinin, tüm ξ_A^i normal vektör alanları boyunca normal eğrilik vektörlerinin toplamına bu eğrinin **normal eğrilik vektörü** denir. C eğrisinin, normal eğrilik vektörünün büyüklüğü eğrinin **normal eğriliği** adını alır ve

$$\kappa_N{}^2=\sum_A\left(H_{\alpha\beta}^A\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)^2\tag{4.3.5}$$

ya da

$$\kappa_N{}^2=\sum_A H_{\alpha\beta}^A H_{\eta\nu}^A\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\eta}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\tag{4.3.6}$$

ile hesaplanır. C eğrisinin $\mathfrak{X}_n$ ve $\mathfrak{X}_m$ manifoldlarına göre birinci eğrilikleri sırasıyla

$$\kappa_1=\left[g_{ij}\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^j}{ds}\right)\right]^{1/2} \quad \text{ve} \quad \hat{\kappa}_1=\left[g_{\alpha\beta}\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\beta}{ds}\right)\right]^{1/2} \tag{4.3.7}$$

şeklindedir. (4.3.4)'ten

$$\begin{aligned}
&g_{ij}\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{du^j}{ds}\right)\\
&=g_{ij}\left(\xi^i_\alpha\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)+\xi^i_A H^A_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)\left(\xi^j_\eta\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\eta}{ds}\right)+\xi^j_B H^B_{\eta\nu}\frac{dx^\eta}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)\\
&=g_{\alpha\eta}\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)\frac{\bar{D}}{ds}\left(\frac{dx^\eta}{ds}\right)+\sum_A\left(H^A_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)^2
\end{aligned}$$

yazılır ve (4.3.5) ile (4.3.7) dikkate alınırsa

$$\kappa_1^{\,2}=\hat{\kappa}_1^{\,2}+\kappa_N^{\,2} \tag{4.3.8}$$

elde edilir. Özel olarak, C eğrisi $\mathfrak{X}_m$'de bir geodezik eğri ise $\hat{\kappa}_1=0$ olacağından, bu eğrinin $\mathfrak{X}_n$'deki birinci eğriliği, alt manifoldun bu geodezik eğri doğrultusundaki normal eğriliğidir. Böylece $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun $\mathfrak{X}_n$'nin bir geodezik alt manifoldu olması için gerek ve yeter koşul her bir noktadaki bütün doğrultularda normal eğriliğin sıfır olmasıdır. Bu durumda $H^i_{(\alpha\beta)}=0$ olur ki bu sonuç Teorem 2.4.15.'te ifade edilmiştir.

$\mathfrak{X}_m$'de birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$, $(a=1,...,m)$ olan bir m-li ortogonal sistem verilsin. Bu sistemin eğrilerinin, $V_{a|}$ birim tanjant vektör alanı doğrultusundaki normal eğrilik vektörlerinin toplamına **ortalama eğrilik vektörü** denir ve (4.2.5)'ten

$$\mathcal{M}^i=\sum_a \xi^i_A H^A_{\alpha\beta}V^\alpha_{a|}V^\beta_{a|}=\xi^i_A H^A_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$

eşitliği ile verilir. Ortalama eğrilik vektörünün büyüklüğü **ortalama eğrilik** olarak adlandırılır ve

$$\mathcal{M}^2 = g_{ij}\mathcal{M}^i\mathcal{M}^j = g_{ij}\left(\xi^i_A H^A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\right)\left(\xi^j_B H^B_{\eta\nu} g^{\eta\nu}\right) = \sum_A \left(H^A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\right)^2$$

şeklinde hesaplanır. Eğer $\mathcal{M} = 0$ ise $\mathfrak{X}_m$ alt manifolduna **minimal** denir. Bu durumda Teorem 2.4.15. kullanılarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.2. Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun her geodezik alt manifoldu minimaldir.

4.3.2. Weyl-Otsuki Manifoldunun Alt Manifoldunda Bulunan Eğrilik Çizgileri, Konjüge Eğriler ve Asimptotik Eğriler

Bir $\mathfrak{X}_n$ Weyl-Otsuki manifoldunun bir $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan eğrilik çizgilerinin, konjüge eğrilerin ve asimptotik eğrilerin incelenmesi için ilk olarak $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda α ve β indislerine göre simetrik $H^A_{(\alpha\beta)}$ kovaryant[§] tensör alanının belirlediği asal doğrultuları ele alalım. Bunun için $H^A_{(\alpha\beta)} - \overset{A}{\kappa} g_{\alpha\beta}$ simetrik kovaryant tensör alanının

$$\left| H^A_{(\alpha\beta)} - \overset{A}{\kappa} g_{\alpha\beta} \right| = 0 \tag{4.3.9}$$

determinant denklemini düşünelim. $g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$ formu $\mathfrak{X}_m$ üzerinde pozitif tanımlı olduğundan (4.3.9)'un tüm kökleri reeldir. Bu denklemin bir $\overset{A}{\kappa}_a$, $(a = 1,...,m)$ basit kökü için

$$\left(H^A_{(\alpha\beta)} - \overset{A}{\kappa}_a g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha_{a|} = 0 \tag{4.3.10}$$

eşitliğini sağlayan ve kontravaryant bileşenleri $V^\alpha_{a|}$ olan bir $V_{a|}$ tanjant vektör alanını düşünelim. Eğer (4.3.9)'un $\overset{A}{\kappa}_a$'dan farklı diğer bir $\overset{A}{\kappa}_b$, $(b = 1,...,m)$ basit köküne karşılık gelen

---

[§] $H^A_{(\alpha\beta)}$ tensöründe A indisini sabit kabul ediyoruz.

$$\left(H^{A}_{(\alpha\beta)} - \overset{A}{\kappa}_{b}\, g_{\alpha\beta} \right) V^{\alpha}_{b|} = 0$$

eşitliği $V^{\alpha}_{a|}$ ile çarpılır ve elde edilen eşitlik (4.3.10)'un $V^{\alpha}_{b|}$ ile çarpımından elde edilen eşitlikten çıkarılırsa

$$g_{\alpha\beta} V^{\alpha}_{a|} V^{\beta}_{b|} = 0\,, \qquad (4.3.11)$$

yani $V_{a|}$ ve $V_{b|}$ tanjant vektör alanları ortogonal olarak bulunur. Eğer (4.3.9)'un tüm kökleri basit ise bu şekilde karşılıklı ortogonal m tane tanjant vektör alanı belirlenebilir.

Tanım 4.3.3. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun herhangi bir noktasında (4.3.9) denkleminin basit köklerine karşılık gelen ve (4.3.10) eşitliğini sağlayan tanjant vektör alanlarına $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun $H^{A}_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının bu noktada belirlediği **asal doğrultuları** denir.

(4.3.9)'un köklerinden r, $(r \leq m)$ tanesi eşit ise bu r tane karşılıklı ortogonal tanjant vektör alanı sonsuz şekilde belirlenebilir ve bunlar diğer basit köklere karşılık gelen asal doğrultulara ortogonaldir. Şimdi bir V tanjant vektör alanı ile

$$\overset{A}{\kappa} = \frac{H^{A}_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}}{g_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}} \qquad (4.3.12)$$

şeklinde tanımlı $\overset{A}{\kappa}$ skaler alanını düşünelim. (4.3.6)'dan $\overset{A}{\kappa}$ skaler alanı alt manifoldun belirli bir ξ^{i}_{A} normal vektör alanı boyunca V doğrultusundaki normal eğriliği olur. $\overset{A}{\kappa}$ skaler alanının V doğrultusuna göre ekstremum değerleri

$$\frac{d\overset{A}{\kappa}}{dV^{\beta}} = 0$$

eşitliği ile verildiğinden (4.3.12) eşitliği

$$H^A_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta - \overset{A}{\kappa}\, g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta = 0$$

şeklinde yazılır ve V^β 'ya göre türetilirse

$$\left(H^A_{(\alpha\beta)} - \overset{A}{\kappa}\, g_{\alpha\beta} \right) V^\alpha = 0$$

bulunur. Bu eşitlik $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının belirlediği asal doğrultular olduğundan, $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının bir noktada belirlediği asal doğrultular $\overset{A}{\kappa}$ skaler alanının bu noktadaki ekstremum değerlerine karşılık gelen doğrultulardır.

Tanım 4.3.4. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktasında belirli bir ξ^i_A normal vektör alanı boyunca $\overset{A}{\kappa}$ normal eğriliğinin, $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının bu noktada belirlediği asal doğrultulara karşılık gelen kritik değerlerine alt manifoldun bu noktadaki ξ^i_A **normal vektör alanı boyunca asal normal eğriliği** ve $\xi^i_A \overset{A}{\kappa}$ vektörüne** de ξ^i_A **normal vektör alanı boyunca asal normal eğrilik vektörü** denir. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktadaki tüm ξ^i_A normal vektör alanları boyunca asal normal eğrilik vektörlerinin toplamına bu noktadaki **asal normal eğrilik vektörü** ve bu vektörün büyüklüğüne de bu noktadaki **asal normal eğrilik** adı verilir.

(4.3.11) eşitliği dikkate alındığında, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$, $\left(a = 1,...,m \right)$ olan kongrüans eğrilik çizgileri bir m-li ortogonal sistem oluşturur. Tanım 4.3.4.'ten $V_{a|}$ birim tanjant vektör alanı doğrultusundaki asal normal eğrilik

$$\kappa_a = \sum_A \left(H^A_{\alpha\beta} V^\alpha_{a|} V^\beta_{a|} \right)^2$$

şeklinde hesaplanır. Bu asal normal eğriliklerin toplamı, (4.2.5)'ten

** Burada A indisi sabit olduğundan A üzerinden toplam alınmamaktadır.

$$\sum_a \kappa_a = \sum_a \sum_A \left(H^A_{\alpha\beta} \underset{a|}{V^\alpha} \underset{a|}{V^\beta} \right)^2 = \sum_A \left(H^A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \right)^2 = \mathcal{M}^2 ,$$

yani alt manifoldun ortalama eğriliğinin karesini verir.

Tanım 4.3.5. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan ve her noktadaki tanjant vektörü alt manifoldun bu noktadaki bir asal doğrultusu olan bir eğriye alt manifoldun bir **eğrilik çizgisi** denir.

Bilindiği gibi, klasik Riemann manifoldlarda alt manifoldun bir eğrilik çizgisi, birbirine denk olan aşağıdaki iki özellikle karakterize edilir:

(1) Eğrinin her noktasındaki tanjant vektörü alt manifoldun bir asal doğrultusudur.

(2) $\bar{D}\xi^i_A / ds$ vektörü, eğrinin her noktasında eğrinin bir tanjant vektörüdür.

Bu iki özelliğin Weyl-Otsuki manifoldlarında denk olmadığını göstereceğiz. (4.3.10) eşitliği ile karakterize edilen (1) özelliğini yukarıda inceledik. Şimdi (2) özelliğini ele alalım. $\bar{D}\xi^i_A / ds$, eğrinin her noktasında eğrinin bir tanjant vektörü ise bu eğrinin bir birim tanjant vektör alanı V olmak üzere

$$\frac{\bar{D}\xi^i_A}{ds} = V^\alpha \bar{D}_\alpha \xi^i_A = \underset{A}{\tau} V^i \tag{4.3.13}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik

$$\underset{A}{\tau} \left(\xi^i_\alpha V^\alpha \right) = V^\alpha \bar{D}_\alpha \xi^i_A$$

şeklinde yazılır ve (4.3.2) dikkate alınırsa

$$\underset{A}{\tau} \left(\xi^i_\alpha V^\alpha \right) = V^\alpha \left(\xi^i_\beta L^\beta_{A\alpha} - \frac{1}{2} \gamma_j \xi^j_\alpha \xi^i_A \right)$$

ya da

$$\left(L^\beta_{A\alpha} - \underset{A}{\tau} \delta^\beta_\alpha \right) \xi^i_\beta V^\alpha - \frac{1}{2} \gamma_j \xi^j_\alpha \xi^i_A V^\alpha = 0$$

bulunur. Bu eşitlik sırasıyla, $g_{ik}\xi_{\eta}^{k}$ ve $g_{ik}\xi_{A}^{k}$ ile çarpılırsa (4.3.3) dikkate alınarak

$$\left(L_{A\alpha\eta} - \underset{A}{\tau}\, g_{\alpha\eta}\right)V^{\alpha} = 0 \tag{4.3.14}$$

$$\gamma_{j}\xi_{\alpha}^{j}V^{\alpha} = 0 \tag{4.3.15}$$

denklem sistemleri elde edilir. (4.3.15) eşitliği, bileşenleri V^{α} olan birim tanjant vektör alanının bileşenleri $\gamma_{j}\xi_{\alpha}^{j}$ ya da buna denk olarak bileşenleri $\overline{D}_{\alpha}\delta_{A}^{B}$ $\left(A \text{ sabit ve } B = 1,...,m\right)$ olan vektör alanına ortogonal olduğunu ifade etmektedir. Eğer bileşenleri $\overline{D}_{\alpha}\delta_{A}^{B}$ olan m vektör alanı lineer bağımsız ise (4.3.15) denklem sisteminin bir çözümü bulunmayacağından (4.3.14) denklem sistemi $m-1$ denklem ile ifade edilir.

(4.3.14) eşitliği (4.3.3) dikkate alınarak

$$\left(L_{A\alpha\eta} - \underset{A}{\tau}\, g_{\alpha\eta}\right)V^{\alpha} = \left[g_{ij}\left(\xi_{\eta}^{j}\xi_{A}^{k} - \xi_{\eta}^{k}\xi_{A}^{j}\right)\overline{D}_{\alpha}\delta_{k}^{i} - H_{\eta\alpha}^{A} - \underset{A}{\tau}\, g_{\alpha\eta}\right]V^{\alpha} = 0 \tag{4.3.16}$$

şeklinde yazılırsa (4.3.13) eşitliğinin sağlanması için $\underset{A}{\tau}$ skaler alanının

$$\left|L_{A\alpha\eta} - \underset{A}{\tau}\, g_{\alpha\eta}\right| = 0 \tag{4.3.17}$$

determinant denkleminin bir kökü olması gerektiği sonucu elde edilir. (4.3.16) eşitliği ile belirli doğrultular genel olarak, alt manifoldun (4.3.10) ile belirlenen asal doğrultularından farklıdır. Üstelik, $H_{(\alpha\beta)}^{A}$ kovaryant tensör alanı simetrik ve metrik tensör alanı pozitif tanımlı olduğundan (4.3.9) denkleminin tüm kökleri reeldir. Böylece (1) özelliğinin belirttiği eğrilik çizgileri birer reel eğridir. Ancak (4.3.17) denkleminin bazı kökleri kompleks olabileceğinden (2) özelliği her zaman reel eğriler tanımlamaz. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3.6. Weyl-Otsuki manifoldunun bir alt manifoldunda (1) ve (2) özellikleri birbirine denk değildir.

Şimdi Weyl-Otsuki manifoldlarında konjüge eğriler ile asimptotik eğrileri inceleyelim. Bunun için konjüge eğri ve asimptotik eğri tanımlarını verelim.

Tanım 4.3.7. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktasındaki bileşenleri V^α ve W^α olan doğrultular için

$$\sum_A \overset{A}{H}_{(\alpha\beta)} \overset{A}{H}_{(\eta\nu)} V^\alpha W^\beta V^\eta W^\nu = 0$$

ise bu doğrultulara **konjüge doğrultular** denir. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun iki kongrüans eğrisinin bir noktadaki doğrultuları konjüge ise bu eğrilere **konjüge eğriler** denir.

Tanım 4.3.8. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda kendisi ile konjüge olan bir doğrultuya **asimptotik doğrultu** ve her noktadaki doğrultusu asimptotik doğrultu olan eğriye de **asimptotik eğri** adı verilir.

(4.3.9) denkleminin köklerini $\overset{A}{\kappa}_a$, $(a = 1,...,m)$ ve (4.3.10) eşitlikleri uyarınca bu köklere karşılık gelen doğrultuları $V^\alpha_{a|}$ ile gösterelim. (4.3.9)'un farklı $\overset{A}{\kappa}_a$ ve $\overset{A}{\kappa}_b$ köklerine karşılık gelen $V^\alpha_{a|}$ ve $V^\alpha_{b|}$ asal doğrultularının ortogonal olduğunu (4.3.11) ile göstermiştik. Asal doğrultuların ortogonal olduğu dikkate alınarak (4.3.10) eşitliği $V^\beta_{b|}$ ile çarpılırsa

$$\overset{A}{H}_{(\alpha\beta)} V^\alpha_{a|} V^\beta_{b|} = 0$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.9. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktasında (4.3.9) denkleminin farklı köklerine karşılık gelen asal doğrultuları konjüge doğrultulardır.

(4.3.9) denkleminin tüm kökleri farklı ise bu köklere karşılık gelen asal doğrultular bir m-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı olarak düşünülebileceğinden aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.10. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun bir noktasında (4.3.9) denkleminin tüm kökleri farklı ise bu köklere karşılık gelen asal doğrultuların belirttiği m-li ortogonal sistemin tüm eğrileri konjüge eğrilerdir.

Şimdi $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda herhangi bir doğrultu için (4.3.6) eşitliğinden aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.11. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda verilen bir doğrultunun bir asimptotik doğrultu olması için gerek ve yeter koşul alt manifoldun bu doğrultudaki normal eğriliğinin sıfır olmasıdır.

Ayrıca, (4.3.8) eşitliği Teorem 4.3.11. ile birlikte düşünülürse aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.12. $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunun $\mathfrak{X}_n$ 'nin geodezik alt manifoldu olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{X}_m$ alt manifoldunda bulunan geodezik eğrilerin asimptotik eğri olmasıdır.

Şimdi $m = n-1$, yani $\mathfrak{X}_n$ manifoldunun bir $\mathfrak{X}_{n-1}$ hiperyüzeyi için (1) ve (2) özelliklerini inceleyelim. $\mathfrak{X}_{n-1}$ hiperyüzeyine normal olan bir tek vektör alanı olacağından $\left\{\xi_A^i\right\}$ ortonormal bazı yerine bileşenleri N^i olan bir birim normal vektör alanı yardımıyla (4.3.2) ve (2.4.41) eşitlikleri, sırasıyla,

$$\bar{D}_\beta N^i = L_\beta^\alpha \xi_\alpha^i - \frac{1}{2}\gamma_j \xi_\beta^j N^i$$

$$\bar{D}_\beta \xi_\alpha^i = \xi_\eta^i \bar{D}_\beta \delta_\alpha^\eta + N^i H_{\alpha\beta}$$

şeklinde yazılırsa (4.3.3) eşitliği

$$L_{\beta\alpha} = g_{\alpha\eta} L_\beta^\eta = g_{ij}\left(\xi_\alpha^j N^k - \xi_\alpha^k N^j\right)\bar{D}_\beta \delta_k^i - H_{\alpha\beta} \tag{4.3.18}$$

şeklinde bulunur. Bu eşitliklerdeki L_β^α, $H_{\alpha\beta}$ ve $L_{\beta\alpha}$ tensör alanlarının sırasıyla, yukarıda ifade edilen $L_{A\beta}^\alpha$, $H_{\alpha\beta}^A$ ve $L_{A\beta\alpha}$ tensörlerinin hiperyüzeydeki karşılıkları olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda (4.3.9) ve (4.3.10) eşitliklerinden, (1) özelliğinde ifade edilen $V_{a|}$, $\left(a = 1,...,n-1\right)$ asal doğrultuları

$$\left| H_{(\alpha\beta)} - \kappa g_{\alpha\beta} \right| = 0$$

determinant denkleminin köklerine karşılık gelen κ_a skaler alanı için

$$\left(H_{(\alpha\beta)} - \kappa_a g_{\alpha\beta} \right) V_{a|}^{\alpha} = 0 \qquad (4.3.19)$$

eşitliğini sağlar. Diğer yandan, hiperyüzeyde (2) özelliği ne karşılık gelen (4.3.13) eşitliği

$$\frac{\bar{D}N^i}{ds} = V^\alpha \bar{D}_\alpha N^i = \tau V^i$$

şeklinde yazılırsa (4.3.16) ve (4.3.17) eşitlikleri, sırasıyla,

$$\left(L_{\alpha\eta} - \tau g_{\alpha\eta} \right) V^\alpha = \left[g_{ij} \left(\xi_\eta^j N^k - \xi_\eta^k N^j \right) \bar{D}_\alpha \delta_k^i - H_{\eta\alpha} - \tau g_{\alpha\eta} \right] V^\alpha = 0 \qquad (4.3.20)$$

$$\left| L_{\alpha\eta} - \tau g_{\alpha\eta} \right| = 0 \qquad (4.3.21)$$

şeklinde bulunur. Hiperyüzey için (4.3.14) ve (4.3.15) denklem sistemleri yerine yalnızca (4.3.20) sistemi geçerlidir. Böylece Sonuç 4.3.6.'ya benzer şekilde; Weyl-Otsuki manifoldunun bir hiperyüzeyinde (1) ve (2) özelliklerinin birbirine denk olmadıklarını söyleyebiliriz.

Hiperyüzey için (4.3.19) eşitliğini sağlayan $V_{a|}$, $\left(a = 1,...,n-1\right)$ asal doğrultuları, alt manifold durumunda olduğu gibi, bir (n-1)-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı olarak düşünülebilir ve bu doğrultular konjügedir. Ancak (4.3.20) sistemi ile belirli doğrultular için aynı ifadeler genel olarak doğru değildir. Çünkü (4.3.21) denkleminin farklı τ_a ve τ_b köklerine karşılık gelen $W_{a|}^{\alpha}$ ve $W_{b|}^{\alpha}$ doğrultuları için (4.3.20)'den yazılan

$$\left(L_{\alpha\beta} - \tau_a g_{\alpha\beta} \right) W_{a|}^{\alpha} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \left(L_{\alpha\beta} - \tau_b g_{\alpha\beta} \right) W_{b|}^{\alpha} = 0 \qquad (4.3.22)$$

eşitlikleri sırasıyla $W_{b|}^{\beta}$ ve $W_{a|}^{\beta}$ ile çarpılır ve elde edilenler çıkarılırsa

$$\left(\tau_a - \tau_b\right) g_{\alpha\beta} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} = \left(L_{\alpha\beta} - L_{\beta\alpha}\right) W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta}$$

ya da

$$g_{\alpha\beta} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} = \frac{2}{\tau_a - \tau_b} L_{[\alpha\beta]} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} \tag{4.3.23}$$

bulunur. (4.3.23) eşitliği, $W_{a|}^{\alpha}$ ve $W_{b|}^{\alpha}$ doğrultularının genel olarak ortogonal olmadığını ifade eder. Eğer $L_{\alpha\beta}$ tensör alanı simetrik ise (4.3.23) eşitliğinden $W_{a|}^{\alpha}$ ve $W_{b|}^{\alpha}$ doğrultuları ortogonal doğrultulardır. Bununla birlikte $L_{\alpha\beta}$ simetrik tensör alanı

$$L_{(\alpha\beta)} = -H_{(\beta\alpha)}$$

eşitliğini sağlıyor ise aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.13. $\mathfrak{X}_{n-1}$ hiperyüzeyinde (4.3.18) eşitliği ile tanımlı $L_{\alpha\beta}$ tensör alanı simetrik ve bu simetrik tensör alanı

$$L_{(\alpha\beta)} = -H_{(\beta\alpha)}$$

ise (4.3.22) eşitliği ile belirli $W_{a|}$, $\left(a = 1,...,n-1\right)$ doğrultusu hiperyüzeyin asal doğrultusudur.

(4.3.22) eşitlikleri sırasıyla $W_{b|}^{\beta}$ ve $W_{a|}^{\beta}$ ile çarpılır ve elde edilenler toplanırsa

$$\left(\tau_a + \tau_b\right) g_{\alpha\beta} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} = \left(L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha}\right) W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta}$$

ya da

$$L_{(\alpha\beta)} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} = \frac{\tau_a + \tau_b}{2} g_{\alpha\beta} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} \tag{4.3.24}$$

bulunur. Böylece (4.3.23) ve (4.3.24) eşitliklerinden

$$L_{(\alpha\beta)} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} = \frac{\tau_a + \tau_b}{\tau_a - \tau_b} L_{[\alpha\beta]} W_{a|}^{\alpha} W_{b|}^{\beta} \tag{4.3.25}$$

elde edilir. (4.3.18) eşitliğinde

$$g_{ij}\left(\xi_\alpha^j N^k - \xi_\alpha^k N^j\right)\overline{D}_\beta \delta_k^i = A_{\alpha\beta}$$

yazılırsa $L_{\alpha\beta}$ tensör alanının

$$L_{(\alpha\beta)} = A_{(\beta\alpha)} - H_{(\beta\alpha)} \tag{4.3.26}$$

simetrik kısmı (4.3.25)'te kullanılarak

$$\left(H_{(\beta\alpha)} + \frac{\tau_a + \tau_b}{\tau_a - \tau_b} L_{[\alpha\beta]} - A_{(\beta\alpha)}\right) W_{a|}^\alpha W_{b|}^\beta = 0 \tag{4.3.27}$$

bulunur. Şimdi

$$A_{(\beta\alpha)} = 0$$

koşulunu düşünelim. (4.3.26) eşitliği dikkate alınırsa bu koşul

$$L_{(\alpha\beta)} = -H_{(\beta\alpha)} \tag{4.3.28}$$

eşitliğine denktir. Bu durumda (4.3.27)'den aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.3.14. $\mathfrak{X}_{n-1}$ hiperyüzeyinde (4.3.21) denkleminin farklı τ_a ve τ_b köklerine karşılık gelen $W_{a|}$ ve $W_{b|}$, $(a,b = 1,...,n-1)$ doğrultularının konjüge olması için gerek ve yeter koşul

(i) $L_{\alpha\beta}$ tensör alanı simetrik ise bu simetrik tensör alanının (4.3.28) eşitliğini sağlaması,

(ii) $L_{\alpha\beta}$ tensör alanı simetrik değilse; (4.3.28) eşitliği ile birlikte τ_a ve τ_b kökler toplamının sıfır olmasıdır.

Hiperyüzeyde yukarıda yaptığımız (1) ve (2) özelliklerinin incelenmesindeki farklılıklar dışında, alt manifoldlar için verilen diğer tanım ve teoremlerin hiperyüzey için de aynı olduğu kolayca görülebilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Genel konneksiyonlar, konneksiyon teorisi içinde farklı bir yere sahiptir. Bu farklılık, T.Otsuki'nin klasik afin konneksiyonlar olarak ifade ettiği afin, projektif ve konformal konneksiyonların bir genelleştirmesi olmanın ötesinde $(1,2)$ tipindeki tensörlere birer konneksiyon gözüyle bakılabileceğinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle genel konneksiyon teorisi, klasik afin konneksiyonların kısıtlayıcı özelliklerinin aksine, diferansiyel geometriyi kullanan tüm bilim dallarına daha geniş bir çalışma olanağı sunar.

Genel konneksiyon kavramı ile bir Weyl metriğinin ilişkilendirilmesi yardımıyla tanımlanan Weyl-Otsuki uzaylarında; kongrüans eğrileri, eğrilik çizgileri, konjüge ve asimptotik eğriler gibi bazı özel eğrileri incelediğimiz bu tez çalışmasında, ilk olarak, T. Otsuki'nin geliştirdiği genel konneksiyon kavramı detaylı olarak incelenmiştir. Bu inceleme yardımıyla genel konneksiyonlara ve regüler genel konneksiyonlara göre, sırasıyla, kovaryant diferansiyel ve temel kovaryant diferansiyel kavramlarının elde edilişi gösterilmiştir. Ayrıca genel konneksiyonların ve regüler genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formları incelenmiş ve üzerinde genel konneksiyon tanımlı bir Riemann manifoldunun alt manifoldları üzerinde indüklenmiş genel konneksiyonun kuruluşu gösterilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen ilk sonuç, indüklenmiş regüler genel konneksiyon ve bu regüler genel konneksiyona göre eğrilik formları kullanılarak bir Weyl-Otsuki manifoldunun eğrilik tensörü ile onun bir alt manifoldunun eğrilik tensörü arasındaki ilişkiyi ifade eden Gauss, Codazzi ve Kühne eşitlikleridir. Bu eşitlikler, D.F. Nadj'ın [24]'te, Riemann-Otsuki uzayları için genel konneksiyonların kovaryant kısmını kullanarak elde ettiği yöntemden farklı olarak §2.4.4.'te elde ettiğimiz eşitlikler yardımıyla yazılmıştır.

Weyl-Otsuki uzaylarında özel eğrilerden biri olarak düşündüğümüz kongrüans eğrilerinin incelenmesi için Riemann uzaylarındaki kongrüans eğrileri tanımı Weyl-Otsuki uzaylarına genelleştirilmiş ve kongrüans eğrileri özel olarak ortogonal olma koşulu altında incelenmiştir. Kongrüans eğrilerinin incelenmesi için, Riemann uzaylarında olduğu gibi, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistemin λ_{abc} Ricci dönme katsayıları kullanılmıştır. Bir n-li ortogonal sistemin λ_{abc} Ricci dönme katsayılarının verilmesi durumunda, $T_x(\mathfrak{X}_n)$'nin herhangi bir P izomorfizması için, Γ regüler genel konneksiyonunun belirlenebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, λ_{abc} Ricci dönme katsayılarının; a, b ve c indislerine göre simetrik ya da anti-simetrik olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir.

Bir n-li ortogonal sistemin bir $V_{a|}$ birim tanjant vektör alanının, sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{c|}$ olan diğer bir eğrisine göre bir paralel vektör alanı olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda_{abc} = 0, (b = 1, ...n \ ; a \neq b)$ eşitliğinin sağlanması olduğu gösterilmiştir. Böylece, birim tanjant vektör alanı $V_{a|}$ olan bir n-li ortogonal sistemin eğrilerinin geodezik olması için gerek ve yeter koşulun $\lambda_{aba} = 0, (b = 1, ...n; a \neq b)$ eşitliğinin sağlanması olduğu kanıtlanmıştır. Weyl-Otsuki uzaylarında elde ettiğimiz bu iki sonucun, Riemann uzaylarındakinden farklı olarak, üzerinde asimetrik konneksiyon tanımlı uzaylardaki ile aynı olduğu görülmüştür, [29].

Bir Weyl-Otsuki manifoldu üzerinde tanımlı bir ϕ skaler alanının ikinci mertebeden doğrultu türevinin değişmeli olmadığı n-li ortogonal sistemin

$$\frac{\partial}{\partial s_b}\frac{\partial \phi}{\partial s_a} - \frac{\partial}{\partial s_a}\frac{\partial \phi}{\partial s_b} = \left(\sum_c \left(\lambda_{acb} - \lambda_{bca} \right) V^i_{c|} - {}'T^i_{kj} V^k_{a|} V^j_{b|} \right) \partial_i \phi \, ,$$

Lame eşitliği yardımıyla gösterilmiştir. Bu eşitliğin sağ yanı $'\Gamma$ klasik afin konneksiyonunun burulma tensörünün $'T^l_{ki}$ bileşenleri cinsinden ifade edilmiştir. Riemann uzaylarında bu bileşenler sıfır olduğundan, Weyl-Otsuki uzaylarında elde edilen bu eşitliğin Riemann uzaylarındakinin bir genelleştirmesi olduğu söylenebilir, [28].

Bir Weyl-Otsuki manifoldunda verilen bir n-li ortogonal sistemin, bu manifoldun bir $\phi = sabit$, hiperyüzey ailesine normal olması tanımı verilmiş ve bu manifoldun $\overline{D}_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$ eşitliğini sağlaması durumunda n-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğrisinin normal olması için gerek ve yeter koşulun

$$\lambda_{nab} - \lambda_{nba} = {}'T_{ki}^{l} V_{a|}^{i} V_{b|}^{k} V_{n|l}, \qquad (a,b = 1,2,...,n-1)$$

eşitliğinin sağlanması olduğu gösterilmiştir. Böylece bu sistemin tüm eğrilerinin normal olması için gerek ve yeter koşulun

$$2\lambda_{abc} = {}'T_{ki}^{l}\left(V_{b|}^{i} V_{c|}^{k} V_{a|l} + V_{c|}^{i} V_{a|}^{k} V_{b|l} - V_{a|}^{i} V_{b|}^{k} V_{c|l}\right),$$
$$\left(a,b,c = 1,2,...,n \quad \text{ve} \quad a,b,c \text{ birbirinden farklı}\right)$$

eşitliğinin sağlanması olduğu kanıtlanmıştır. Yukarıdaki her iki eşitlik, yine, ${}'T_{ki}^{l}$ bileşenleri cinsinden ifade edilmiştir. Riemann uzaylarında bu bileşenler sıfır olduğundan, Weyl-Otsuki uzaylarında elde edilen her iki sonucun da Riemann uzaylarındakinin birer genelleştirmesi olduğunu söyleyebiliriz, [28].

Bir Weyl-Otsuki manifoldunda verilen bir n-li ortogonal sistemin rotasyoneli tanımı verilmiş ve bu manifoldun $\overline{D}_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$ eşitliğini sağlaması durumunda n-li ortogonal sistemin birim tanjant vektör alanı $V_{n|}$ olan eğrisi için

$$''T_{ji}^{l} - 2\,{}'T_{k[i}^{l} V_{n|}^{k} V_{n|j]} + \gamma_{[j}\delta_{i]}^{l} = 0$$

eşitliği geçerli ise bu eğrinin; normal, geodezik ve irrotasyonel olma koşullarından herhangi ikisinin gerçekleştiği taktirde üçüncü koşulun da gerçekleşeceği gösterilmiştir. Bu eşitlik Riemann uzaylarında daima sıfır olduğundan, Weyl-Otsuki uzaylarında elde edilen bu sonucun da Riemann uzaylarındakinin bir genelleştirmesi olduğu açıktır, [28].

Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda bulunan eğrilik çizgilerini, konjüge eğrileri ve asimptotik eğrileri incelemek için ilk olarak Riemann manifoldlarda tanımlı bir eğrinin; eğriliği, normal eğriliği ve ortalama eğriliği kavramları Weyl-Otsuki manifoldlarına genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme sonucunda, Riemann uzaylarındaki normal eğrilik ve ortalama eğrilik kavramları uzayın ikinci temel formu ile belirlenirken Weyl-Otsuki uzaylarında, alt uzaya ortogonal olan ve α, β indislerine göre simetrik olması gerekmeyen $H^i_{\alpha\beta} = \xi^i_A H^A_{\alpha\beta}$ vektörü ile belirlidir. Bu durum, Weyl-Otsuki uzaylarında Kronecker deltasının kovaryant türevinin sıfırdan farklı olmasından kaynaklanmaktadır.

Adı geçen eğrilerin incelenmesi için ikinci olarak Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda asal doğrultular ele alınmıştır. Asal doğrultuların belirlenmesi için α ve β indislerine göre simetrik olması gerekmeyen $H^A_{\alpha\beta}$ tensörü yerine bu tensörün $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kısmı ile çalışılmıştır. Böylece Weyl-Otsuki manifoldunun eğrilik çizgisi tanımı, Riemann manifoldlarda birbirine denk olan

(1) Eğrinin her noktasındaki tanjant vektörü alt manifoldun bir asal doğrultusudur,

(2) $\bar{D}\xi^i_A / ds$ vektörü, eğrinin her noktasında eğrinin bir tanjant vektörüdür,

şeklindeki eğrilik çizgisi tanımlarından, asal doğrultu kavramı ile ilişkili olan (1) ile verilmiştir. (1) tanımı kullanılarak, $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının bir noktada belirlediği asal doğrultuların ξ^i_A normal vektör alanı boyunca $\overset{A}{\kappa}$ normal eğriliğinin bu noktadaki ekstremum değerlerine karşılık gelen doğrultular olduğu gösterilmiştir. Ancak (2) tanımı ile belirli eğrilerin her zaman reel eğriler olmadığı gösterildiğinden; Weyl-Otsuki manifoldunun bir alt manifoldunda (1) ve (2) tanımlarının birbirine denk olmadığı sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç, burulmalı uzaylarda (1) ve (2) tanımlarının birbirine denk olmadığı sonucuyla benzerlik göstermektedir, [30].

Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda konjüge eğrilerin ve asimptotik eğrilerin incelenmesi için Riemann manifoldlardaki konjüge doğrultu kavramı Weyl-Otsuki manifoldlarına genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme, yine, $H^A_{\alpha\beta}$ tensörünün $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kısmı kullanılarak yapılmıştır. Böylece ilk olarak $H^A_{(\alpha\beta)}$ simetrik kovaryant tensör alanının belirlediği farklı asal doğrultuların konjüge doğrultular olduğu sonucu elde edilmiştir. Bu asal doğrultuların tümünün birbirinden farklı olması durumunda asal doğrultuların belirttiği ortogonal sistemin tüm eğrilerinin konjüge eğriler olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda verilen bir doğrultunun bir asimptotik doğrultu olması için gerek ve yeter koşulun alt manifoldun bu doğrultudaki normal eğriliğinin sıfır olması sonucu elde edilmiştir. Bu sonuç yardımıyla, Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunun bir geodezik alt manifold olması için gerek ve yeter koşulun alt manifoldun geodezik eğrilerinin aynı zamanda asimptotik eğri olması sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçların Riemann uzaylarındakinin birer genelleştirmesi olduğu söylenebilir, [28].

Weyl-Otsuki manifoldunun alt manifoldunda bulunan eğrilik çizgileri, konjüge eğriler ve asimptotik eğriler için yapılan bu inceleme özel olarak hiperyüzeyler için de yapılmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Weyl-Otsuki uzaylarının alt uzayında bulunan bazı özel eğrileri incelediğimiz bu çalışmanın; alt uzayda ya da hiperyüzey üzerinde r. mertebeden asimptotik eğriler, r. mertebeden geodezik eğriler, hiperasimptotik eğriler, hipernormal eğriler, hiperdarboux eğrileri gibi diğer eğrilerin incelenmesine olanak verdiğini düşünmekteyiz. Ayrıca Weyl-Otsuki uzaylarının alt uzayında ya da hiperyüzeyi üzerinde, çevreleyen uzayda verilen bir λ-kongrüansına göre relatif eğrilik, relatif paralellik ve λ-kongrüansına göre bir eğrinin relatif genelleştirilmiş normal eğriliği tanımları yapılarak bunlara bağlı teoremlerin ve sonuçların tartışılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. CHERN, S.S., CHEN, W.H. and LAM, K.S., 1999, *Lectures on differential geometry,* World Scientific, Singapore, 981-02-4182-8 (pbk).
2. OTSUKI, T., 1958, Tangent bundles of order 2 and general connections, *Math. J. Okayama Univ.,* 8, 143-179.
3. OTSUKI, T., 1960, On general connections I, *Math. J. Okayama Univ.,* 9, 99-164.
4. OTSUKI, T., 1961, On general connections II, *Math. J. Okayama Univ.,* 10, 113-124.
5. OTSUKI, T., 1961, On normal general connections, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 13, 152-166.
6. OTSUKI, T., 1961, On metric general connections, *Proc. Japan Acad.,* 37, 183-188.
7. OTSUKI, T., 1962, A note on metric general connections, *Proc. Japan Acad.,* 38, 409-413.
8. OTSUKI, T., 1962, General connecitons $A\Gamma A$ and the parallelism of Levi-Civita, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 14, 40-52.
9. OTSUKI, T., 1962, On basic curves in spaces with normal general connections, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 14, 110-118.
10. OTSUKI, T., 1963, On curvatures of spaces with normal general connections I, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 15, 52-61.
11. OTSUKI, T., 1963, On curvatures of spaces with normal general connections II, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 15, 184-194.
12. OTSUKI, T., 1965, Ricci's formula for normal general connections and its applications, *Kodai Math. Sem. Rep.,* 17, 74-84.
13. HOUH, C.S., 1963, Submanifolds in a Riemannian manifold with general connections, *Math. J. Okayama Univ.,* 12 (1), 1-37.
14. OTSUKI, T., 1982, A construction of spaces with general connections which have points swallowing geodesics, *Math. J. Okayama Univ.,* 24, 157-165.
15. OTSUKI, T., 1985, A certain space-time metric and smooth general connections, *Kodai Math. J.,* 8, 307-316.
16. OTSUKI, T., 1988, Singular point sets of a general connection and black holes, *Math. J. Okayama Univ.,* 30, 199-211.
17. MOOR, A., 1978, Otsukische Übertragung mit rekurrentem masstensor, *Acta Sci. Math.,* 40, 129-142.
18. MOOR, A., 1979, Über die Veränderung der Länge der Vektoren in Weyl-Otsukischen räumen, *Acta Sci. Math.,* 41, 173-185.
19. MOOR, A., 1981, Über verschiedene geodätische abweichungen in Weyl-Otsukischen räumen, *Publ. Math., Debrecen,* 28, 247-258.
20. NADJ, D.F., 1981, On curvatures of the Weyl-Otsuki spaces, *Publ. Math., Debrecen,* 28, 59-73.

21. NADJ, D.F., 1981, On subspaces of Riemann-Otsuki space, *Publ. de l'Inst. Math.Beograd NS,* 30 (44), 53-58.
22. NADJ, D.F., 1981, On the orthogonal spaces of the subspaces of a Riemann-Otsuki space, *Zbornik radova PMF Novi Sad,* 11, 201-208.
23. NADJ, D.F., 1983, Autoparallel curves of Riemann-Otsuki spaces, *Zbornik radova PMF Novi Sad,* 13, 227-243.
24. NADJ, D.F., 1984, The Gauss, Codazzi and Kühne equations of Riemann-Otsuki spaces, *Acta Math. Hung.,* 44 (3-4), 255-260.
25. NADJ, D.F., 1986, The Frenet formulae of the Riemann-Otsuki space, *Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi. Sad MS,* 16 (1), 95-106.
26. NADJ, D.F., 1989, Die Frenetformeln des Weyl-Otsukischen raumes, *Publ. Math., Debrecen,* 36 (1-4), 221-228.
27. KRUPKA, D. and KRUPKA, M., 2000, Jets and contact elements, *Proceedings of the Seminar on Differential Geometry; Mathematical Publications,* 2, 39-85.
28. WEATHERBURN, C.E., 1942, *An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus,* Cambridge University Press, London.
29. EISENHART, L.P., 1927, *Non-Riemannian geometry,* American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume VIII, New York.
30. HAYDEN, H.A., 1932, Sub-spaces of a space with torsion, *Proc. London Math. Soc.,* s2-34(1), 27-50.

ÖZGEÇMİŞ

16.06.1976 tarihinde Diyarbakır'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi, sırasıyla, Mehmetçik İlköğretim Okulu ve Diyarbakır Anadolu Lisesi'nde tamamladım. 1995 yılında öğrenime başladığım İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldum. 2001 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimime başladım ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Hasan Ali Yücel Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandım. 2005 yılında yüksek lisans öğrenimimi tamamladım ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimime başladım. Doktora öğrenimim devam ederken İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandım. Halen bu görevime devam etmekteyim. Evli ve bir çocuk babasıyım.