İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

CEBİRSEL KATSAYILI BAZI BOŞLUK SERİLERİ VE LIOUVILLE SAYILARI

Gülcan KEKEÇ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN

Eylül, 2010

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

CEBİRSEL KATSAYILI BAZI BOŞLUK SERİLERİ VE LIOUVILLE SAYILARI

Gülcan KEKEÇ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN

Eylül, 2010

İSTANBUL

Bu çalışma 28/09/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL
Mimar Sinan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
T.C. Maltepe Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 4317 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Lisans, yüksek lisans ve doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim boyunca Yurt İçi Doktora Burs Programı adı altında verdiği maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eylül, 2010 **Gülcan KEKEÇ**

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \boldsymbol{a_n}$	:	$\{a_n\}$ reel sayı dizisinin üst limiti
$\mathbf{max}(\boldsymbol{a_1,...,a_n})$	:	$a_1,...,a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ reel sayılarının maksimumu
$\mathbf{min}(\boldsymbol{a_1,...,a_n})$	:	$a_1,...,a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ reel sayılarının minimumu
$\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$	:	Reel sayıların boş kümeden farklı alttan sınırlı A alt kümesinin en büyük alt sınırı
$(\boldsymbol{a_1,...,a_n})$	:	$a_1,...,a_n$ tam sayılarının en büyük ortak böleni
$[\boldsymbol{a_1,...,a_n}]$	:	$a_1,...,a_n$ tam sayılarının en küçük ortak katı
$\left\lvert\overline{\alpha}\right\rvert$	:	α cebirsel sayısının $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerinin mutlak değerlerinin maksimumu
$\boldsymbol{H[z]}$	:	H halkası üzerindeki tek değişkenli polinomlar halkası
$\boldsymbol{H[y,x]}$	:	H halkası üzerindeki iki değişkenli polinomlar halkası
$\boldsymbol{\partial P}$	:	P polinomunun derecesi
$\boldsymbol{H(P)}$	:	Tam katsayılı P polinomunun yüksekliği
$\boldsymbol{\partial \alpha}$	:	α cebirsel sayısının derecesi
$\boldsymbol{H(\alpha)}$	:	α cebirsel sayısının yüksekliği

ÖZET

CEBİRSEL KATSAYILI BAZI BOŞLUK SERİLERİ VE LIOUVILLE SAYILARI

Bu çalışmada, bazı genelleştirilmiş boşluk serileri üzerine incelemeler yapılmıştır. İlk olarak, rasyonel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya bir rasyonel sayı ya da bir Liouville sayısı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu teorem genelleştirilerek, katsayıları m. dereceden bir K cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayı ya da Mahler sınıflandırmasındaki $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ kümesine ait bir $U-$sayısı olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

ON SOME GAP SERIES WITH ALGEBRAIC COEFFICIENTS AND LIOUVILLE NUMBERS

In this work, some generalized lacunary power series are considered. First, it is shown that under some conditions the values of some generalized lacunary power series with rational coefficients for Liouville number arguments belong to either the field of rational numbers or the set of Liouville numbers. Then this theorem is generalized, and it is obtained that under some conditions the values of some generalized lacunary power series with algebraic coefficients from a certain algebraic number field K of degree m for Liouville number arguments belong to either the algebraic number field K or $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ in Mahler's classification of complex numbers.

1. GİRİŞ

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir

$$F(z)=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h \qquad \left(c_h \in \mathbb{C};\ \ h=0,1,2,...\right) \tag{1.1}$$

kuvvet serisine bir genelleştirilmiş boşluk serisi denir:

Koşul 1. $F(z)$ nin yakınsaklık yarıçapı $R>0$ dır.

Koşul 2. $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$0=s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < s_3 \le ... , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n}=\infty \tag{1.2}$$

olacak şekilde negatif olmayan tam sayıların iki alt dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} c_h=0, & r_n<h<s_n \qquad (n=1,2,3,...), \\ c_h\neq 0, & h=r_n \qquad (n=1,2,3,...), \\ c_h\neq 0, & h=s_n \qquad (n=0,1,2,...) \end{cases} \tag{1.3}$$

dir.

$P_n(z)=\sum_{h=s_n}^{r_{n+1}} c_h z^h \quad (n=0,1,2,...)$ olmak üzere

($P_n(z)$, sıfır polinomdan farklı; $P_n(z)\in\mathbb{C}[z]$), $F(z)$ genelleştirilmiş boşluk serisi, yakınsak olduğu $z\in\mathbb{C}$ ler için, (1.3) ten dolayı

$$F(z)=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \tag{1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $s_n = r_{n+1}$ $(n = 0,1,2,...)$ ise $P_n(z)$ polinomu bir tek terimden oluşur, bu durumda $F(z)$ genelleştirilmiş boşluk serisine bir basit boşluk serisi denir.

İlk olarak, Mahler $[1]$, 1965 yılında bazı tam katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerini incelemiş ve bu serilerin sıfırdan farklı cebirsel sayı argümanları için transandant değerler aldığına dair bir gerek ve yeter koşul vermiştir. Daha sonra Braune $[2]$, 1977 yılında cebirsel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerini incelemiş ve daha ileri sonuçlar elde etmiştir.

Zeren $[3]$, 1988 yılında Mahler'in ve Braune'nin elde ettiği sonuçları daha da ileri götürmüş ve katsayıları bir cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, sıfırdan farklı cebirsel sayı argümanları için Mahler'in $U_t -$ alt sınıfına ait değerler aldığını göstermiştir, burada t, verilen seriye ve argümana bağlı bir doğal sayıdır.

Bu çalışmada, Zeren $[3]$ tarafından ele alınan genelleştirilmiş boşluk serileri incelenerek iki teorem elde edilmiştir (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2). Bu çalışmada elde edilen ilk teoremde (Teorem 4.1), Zeren $[3]$ in ele aldığı cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serileri, katsayılar rasyonel iken düşünülmüş ve rasyonel katsayılı bu genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya bir rasyonel sayı ya da bir Liouville sayısı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra bu teorem genelleştirilerek, çalışmanın ikinci teoremi (Teorem 4.2) elde edilmiştir. Teorem 4.2 de, Zeren $[3]$ in ele aldığı katsayıları *m.* dereceden bir K cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayı ya da Mahler sınıflandırmasındaki $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ kümesine ait bir $U -$ sayısı olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen ilk teoremde (Teorem 4.1) $s_n = r_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, ..$ olursa Yılmaz $[4]$ ın verdiği teorem elde edilir, yani Teorem 4.1, $[4]$ te rasyonel katsayılı basit boşluk serileri için verilmiş olan teoremin (rasyonel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerine) bir genelleştirilmiş halidir.

Kekeç $[5]$, katsayıları m. dereceden bir K cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı bazı basit boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayı ya da Mahler sınıflandırmasındaki $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ kümesine ait bir $U-$sayısı olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada elde edilen ikinci teorem, yani Teorem 4.2, Kekeç $[5]$ in verdiği teoremin (katsayıları belli bir cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı genelleştirilmiş boşluk serilerine) bir genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir.

Çalışmayı iki bölüme ayırmak mümkündür. İlk bölümde (2. GENEL KISIMLAR) Liouville sayıları, kompleks sayıların Mahler ve Koksma sınıflandırmaları hakkında bilgiler ve bu çalışmada elde edilen teoremlerin (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2) ispatında ihtiyaç duyulan yardımcı teoremler verilerek çalışmanın anlaşılabilmesi için gerekli literatür incelemesi yapılmıştır. İkinci bölümde (4. BULGULAR) ise yukarıda bahsettiğimiz bu çalışmada elde edilen iki özgün teorem (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2), ifade ve ispat edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. LIOUVILLE TEOREMİ VE LIOUVILLE SAYILARI

J. Liouville, 1844 yılında, kendi adıyla anılan Liouville teoremini vererek transandant sayıların var olduğunu ispat etmiştir. Bu, hem transandant sayıların varlığını gösteren ilk ispattır hem de elimize somut transandant sayı örnekleri vermektedir.

Teorem 2.1.1 (Liouville) (Perron [6, sayfa 178-179]). ξ, *n.* dereceden $(n>1)$ bir cebirsel sayı olsun. Bu takdirde,

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{n+1}} \tag{2.1}$$

eşitsizliğini gerçekleyen ancak sonlu sayıda $\frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z};q>0)$ rasyonel sayısı vardır.

İspat. q nun yeteri kadar büyük değerleri için (2.1) eşitsizliğinin geçerli olmadığını gösterelim. ξ nin minimal polinomu

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \ \left(a_i\in\mathbb{Z}\ (i=0,1,...,n),\ (a_0,a_1,...,a_n)=1,\ a_n>0\right)$$

olsun. Herhangi bir $\frac{p}{q}$ $(p,q\in\mathbb{Z};q>0)$ rasyonel sayısı için aşağıdaki değere bakalım.

$$-f\left(\frac{p}{q}\right)=f(\xi)-f\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n-\left(a_0+a_1\frac{p}{q}+a_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+a_n\frac{p^n}{q^n}\right)$$

$$=a_1\left(\xi-\frac{p}{q}\right)+a_2\left(\xi^2-\frac{p^2}{q^2}\right)+\cdots+a_n\left(\xi^n-\frac{p^n}{q^n}\right).$$

ξ cebirsel sayısının derecesi >1 olduğundan $\xi \notin \mathbb{Q}$ dur, dolayısıyla $\xi - \dfrac{p}{q} \neq 0$ dır.

$$-f\left(\frac{p}{q}\right) = a_1\left(\xi - \frac{p}{q}\right) + a_2\left(\xi^2 - \frac{p^2}{q^2}\right) + a_3\left(\xi^3 - \frac{p^3}{q^3}\right) + \cdots + a_n\left(\xi^n - \frac{p^n}{q^n}\right)$$

eşitliğinin her iki tarafını $\xi - \dfrac{p}{q}$ ile bölersek,

$$\frac{-f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} = a_1 + a_2\left(\xi + \frac{p}{q}\right) + a_3\left(\xi^2 + \xi\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\right) + \cdots + a_n\left(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) \qquad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) den $f\left(\dfrac{p}{q}\right) \neq 0$ olduğu sonucu çıkar. Çünkü $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ olsa, (2.2) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşit olur. (2.2) eşitliğinin sağ tarafını ξ nin kuvvetlerine göre düzenleyecek olursak ξ nin en yüksek dereceli teriminin derecesi $n-1$ dir ve ξ^{n-1} in katsayısı $a_n \neq 0$ dır, yani bu durumda ξ, sıfır polinomdan farklı rasyonel katsayılı $n.$ dereceden daha küçük dereceden bir polinomun kökü olur. Bu ise ξ nin derecesinin n olmasıyla çelişir.

Herhangi bir $\dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; q > 0)$ rasyonel sayısı için

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$$

ise, bu durumda

$$\left|\frac{p}{q}\right| - |\xi| \leq \left||\xi| - \left|\frac{p}{q}\right|\right| \leq \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{p}{q}\right| - |\xi| < 1 \Rightarrow \left|\frac{p}{q}\right| < |\xi| + 1 \qquad (2.3)$$

olur. (2.3) ve $|\xi| < |\xi| + 1$ eşitsizlikleri kullanılarak, (2.2) eşitliğinden

$$\left| \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} \right| < |a_1| + 2|a_2| \left(|\xi|+1\right) + 3|a_3| \left(|\xi|+1\right)^2 + \cdots + n|a_n| \left(|\xi|+1\right)^{n-1}$$

elde edilir. $|a_1| + 2|a_2| \left(|\xi|+1\right) + 3|a_3| \left(|\xi|+1\right)^2 + \cdots + n|a_n| \left(|\xi|+1\right)^{n-1} = c$ diyelim. c, sadece ξ ye bağlı bir pozitif reel sabittir, p ve q dan bağımsızdır. O halde, $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ eşitsizliğini sağlayan $\frac{p}{q}$ rasyonel sayıları için $\left| \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} \right| < c$ dir. Öyleyse, q nun yeteri kadar büyük değerleri için, yani $q \geq c$ koşulunu sağlayan q tam sayıları için

$$\left| \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} \right| < q \tag{2.4}$$

dur. Ayrıca, yine herhangi bir $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; q > 0)$ rasyonel sayısı için

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{\left(a_0 + a_1 \frac{p}{q} + \cdots + a_n \frac{p^n}{q^n}\right) q^n}{q^n} \right| = \frac{\left|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n\right|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}. \tag{2.5}$$

($f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ olduğundan $\left|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n\right| \neq 0$ dır. $\left|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n\right| \neq 0$ ve $a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\left|a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + \cdots + a_n p^n\right| \geq 1$ dir.)

(2.4) ve (2.5) ten,

$$0 < \left| \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} \right| < q \Rightarrow \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \frac{1}{q} \geq \frac{1}{q^{n+1}}$$

elde edilir. O halde,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$$

eşitsizliği q nun yeteri kadar büyük değerleri için, yani $q \geq c > 0$ koşulunu sağlayan q tam sayıları için geçerli değildir. $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ eşitsizliği ancak paydaları $q < c$ olan $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; q > 0)$ rasyonel sayıları tarafından sağlanabilir. $0 < q < c$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda q tam sayısı vardır. Ayrıca $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; q > 0)$ rasyonel sayısı için (2.3) ten,

$$\left| \frac{p}{q} \right| < |\xi| + 1 \Rightarrow |p| < q\left(|\xi| + 1\right) \Rightarrow -q\left(|\xi| + 1\right) < p < q\left(|\xi| + 1\right)$$

elde edilir. q sonlu sayıda değer aldığından, p tam sayısı da ancak sonlu sayıda değer alabilir. O halde,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{n+1}}$$

eşitsizliğini gerçekleyen ancak sonlu sayıda $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; q > 0)$ rasyonel sayısı vardır.

Tanım 2.1.1 (Perron [6, sayfa 180]). ξ, bir irrasyonel sayı olsun. Eğer her $n>0$ tam sayısına karşılık aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklenecek şekilde bir $\dfrac{p_n}{q_n}$ $\left(p_n\,,\,q_n\in\mathbb{Z}\right)$ rasyonel sayısı bulunabilirse ξ irrasyonel sayısına bir Liouville sayısı denir:

$$q_n>1,\quad \left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^n}\ . \tag{2.6}$$

Örnek 2.1.1 (Schneider [7, sayfa 3]). $\xi=\sum_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\nu!}}$ irrasyonel sayısı bir Liouville sayısıdır:

$\dfrac{p_n}{q_n}=\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{2^{\nu!}}$ $(n\in\mathbb{N})$ rasyonel sayısını düşünelim.

$$\frac{p_n}{q_n}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{2^{\nu!}}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2!}}+\cdots+\frac{1}{2^{n!}}\right)=\frac{2^{n!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2!}}+\cdots+\frac{1}{2^{n!}}\right)}{2^{n!}}$$

dir. $p_n=2^{n!}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^{2!}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n!}}\right)$, $q_n=2^{n!}>1$ diyelim. Açıkça görüldüğü gibi p_n ve $q_n>1$ birer tam sayıdır.

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu!}}\right|=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu!}}=\frac{1}{2^{(n+1)!}}+\frac{1}{2^{(n+2)!}}+\frac{1}{2^{(n+3)!}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{(n+1)!}}\left(1+\frac{1}{2^{(n+2)!-(n+1)!}}+\frac{1}{2^{(n+3)!-(n+1)!}}+\cdots\right)\leq\frac{1}{2^{(n+1)!}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{2^{(n+1)!}}=\frac{2}{2^{(n+1)n!}}=\frac{2}{\left(2^{n!}\right)^n 2^{n!}}\leq\frac{1}{\left(2^{n!}\right)^n}=\frac{1}{q_n^n}\ .$$

Not 2.1.1. 1) (Perron [6, sayfa 180]) ξ, bir Liouville sayısı ise her $n>0$ tam sayısı için (2.6) eşitsizliğini gerçekleyen birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_n}{q_n}$ rasyonel sayısı vardır.

2) (Perron [6, sayfa 180]) ξ, bir Liouville sayısı ise her $n>0$ tam sayısı için (2.6) eşitsizliğini gerçekleyen paydaları keyfi bir pozitif reel sayıdan daha büyük olan birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_n}{q_n}$ rasyonel sayısı vardır.

3) ξ, bir Liouville sayısı ise her $n>0$ tam sayısı için (2.6) eşitsizliğini gerçekleyen paylarının mutlak değeri $\left(|p_n|\right)$ keyfi bir pozitif reel sayıdan daha büyük olan birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_n}{q_n}$ rasyonel sayısı vardır.

İspat. 1) Bir $n>0$ tam sayısı alalım. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan $\nu=1,2,3,...$ için

$$\left|\xi-\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|<\frac{1}{q_{n+\nu}^{n+\nu}}<\frac{1}{q_{n+\nu}^{n}} \qquad \left(q_{n+\nu}>1,\ \nu=1,2,3,...\right) \tag{2.7}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}$ $(\nu=1,2,3,...)$ rasyonel sayıları vardır. Bu $\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}$ $(\nu=1,2,3,...)$ rasyonel sayıları arasında birbirinden farklı sonsuz sayıda rasyonel sayı vardır. Çünkü

$$0<\left|\xi-\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|<\frac{1}{q_{n+\nu}^{n+\nu}}\leq\frac{1}{2^{n+\nu}} \qquad \left(\nu=1,2,3,...\right)$$

$$\left(\xi\notin\mathbb{Q}\Rightarrow\xi\neq\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}, \qquad q_{n+\nu}>1\Rightarrow q_{n+\nu}\geq 2 \quad (\nu=1,2,3,...)\right)$$

dir. O halde, $\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|$ $(\nu = 1,2,3,...)$ terimleri bir sıfır dizisi oluşturur. Eğer $\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}$ $(\nu = 1,2,3,...)$ rasyonel sayıları arasında birbirinden farklı olanların sayısı sonlu olsa, başka bir deyişle $\left\{\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ rasyonel sayı dizisinin birbirinden farklı sadece sonlu sayıda terimi olsa, bu durumda $\left\{\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ sıfır dizisinin de birbirinden farklı sadece sonlu sayıda terimi olur. $\left\{\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ sıfır dizisindeki birbirinden farklı bu sonlu sayıdaki değeri $u_1, u_2, ..., u_t$ $(t \geq 1)$ ile gösterelim. $\left\{\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisinin her bir terimi pozitif olduğundan $u_1, u_2, ..., u_t$ pozitif reel sayılardır. $u = \min(u_1, u_2, ..., u_t)$ diyelim. u, pozitif bir reel sayıdır. O halde, her $\nu = 1,2,3,...$ için $\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right| \geq u$ dur. Bu ise $\left\{\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisinin bir sıfır dizisi olmasıyla çelişir. Çünkü $\left\{\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right\}_{\nu=1}^{\infty}$, bir sıfır dizisi olduğundan yeteri kadar büyük ν ler için $\left|\xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right| < u$ olmalıdır. O halde, $\left\{\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ rasyonel sayı dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi vardır.

2) 1) de herhangi bir $n > 0$ tam sayısı için bulduğumuz (2.6) eşitsizliğini gerçekleyen, birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi bulunan $\left\{\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ rasyonel sayı dizisinin paydalarının oluşturduğu $\{q_{n+\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisini düşünelim. Bu $\{q_{n+\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisi için $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} q_{n+\nu} = \infty$ dur. Çünkü $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} q_{n+\nu} = \infty$ olmasa, yani $\{q_{n+\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisi üstten sınırlı olsa, bu durumda

$$\exists M > 0 \text{ reel sayısı; } \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ için } q_{n+\nu} \leq M$$

olur. Öte yandan $1 < q_{n+\nu} \leq M$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda $q_{n+\nu}$ tam sayısı vardır. $\left\{ \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}} \right\}_{\nu=1}^{\infty}$ rasyonel sayı dizisinin terimleri (2.6) eşitsizliğini gerçeklediğinden, daha önce de yaptığımız gibi,

$$-q_{n+\nu}\left(|\xi|+1\right) < p_{n+\nu} < q_{n+\nu}\left(|\xi|+1\right)$$

dir. $q_{n+\nu}$ sonlu sayıda değer aldığından $p_{n+\nu}$ tam sayısı da ancak sonlu sayıda değer alabilir. O halde, birbirinden farklı ancak sonlu sayıda $\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}$ terimi oluşturulabilir. Bu ise $\left\{ \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}} \right\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda teriminin bulunması ile çelişir. O halde, $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} q_{n+\nu} = \infty$ olmak zorundadır. $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} q_{n+\nu} = \infty$ olduğundan $\{q_{n+\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ dizisinin $\lim_{j\to\infty} q_{n+\nu_j} = \infty$ olacak şekilde bir $\left\{q_{n+\nu_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla herhangi bir $G > 0$ reel sayısı verildiğinde yeteri kadar büyük j ler için $q_{n+\nu_j} > G$ dir. Ayrıca $\left\{ \frac{p_{n+\nu_j}}{q_{n+\nu_j}} \right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisinin de birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi vardır. O halde, terimleri (2.6) eşitsizliğini gerçekleyen $\left\{ \frac{p_{n+\nu_j}}{q_{n+\nu_j}} \right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisini düşünürsek istenilen elde edilir.

3) Bir $n > 0$ tam sayısı alalım. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan 2) den dolayı, (2.6) eşitsizliği gerçeklenecek şekilde, yani

$$\left| \xi - \frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}} \right| < \frac{1}{q_{n+\nu}^{n}} \quad \left(q_{n+\nu} > 1, \nu = 1, 2, 3, \ldots\right) \tag{2.8}$$

olacak şekilde paydaları keyfi bir pozitif reel sayıdan daha büyük alınabilen birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}$ $(\nu=1,2,3,...)$ rasyonel sayısı vardır. (2.8) den,

$$|\xi|-\left|\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right| \le \left||\xi|-\left|\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right|\right| \le \left|\xi-\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right| < \frac{1}{q_{n+\nu}^{n}} \quad (\nu=1,2,3,...)$$

$$\Rightarrow |\xi| - \left|\frac{p_{n+\nu}}{q_{n+\nu}}\right| < \frac{1}{q_{n+\nu}^{n}} \Rightarrow \frac{|p_{n+\nu}|}{q_{n+\nu}} > |\xi| - \frac{1}{q_{n+\nu}^{n}}$$

$$\Rightarrow |p_{n+\nu}| > |\xi|\, q_{n+\nu} - \frac{1}{q_{n+\nu}^{n-1}} \ge |\xi|\, q_{n+\nu} - 1$$

$$\Rightarrow |p_{n+\nu}| > q_{n+\nu}\,|\xi| - 1 \quad (\nu=1,2,3,...) \tag{2.9}$$

elde edilir. $M>0$ keyfi bir reel sayı olsun. $q_{n+\nu} > \frac{M+1}{|\xi|}$ $(\nu=1,2,3,...)$ alınırsa, (2.9) dan $|p_{n+\nu}|>M$ $(\nu=1,2,3,...)$ elde edilir. Böylece 3) ün ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.1.1. ξ, bir Liouville sayısı ise her $n>0$ tam sayısı için

$$q_n > 1, \quad \left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{n}}$$

olacak şekilde bir $\frac{p_n}{q_n}$ rasyonel sayısı vardır, ve burada q_n ile $|p_n|$ keyfi her pozitif reel sayıdan büyük alınabilir.

Sonuç 2.1.2. ξ, bir Liouville sayısı olsun. O halde, tanım gereği her $n>0$ tam sayısı için

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{n}} \quad (q_n>1)$$

olacak şekilde bir $\frac{p_n}{q_n}$ $(p_n,\, q_n \in \mathbb{Z})$ rasyonel sayısı vardır. Burada $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

İspat. Not 2.1.1 ve Sonuç 2.1.1 den elde edilir.

Teorem 2.1.2 (Perron [6, sayfa 180-181]). Liouville sayıları transandanttır.

İspat. ξ, bir Liouville sayısı olsun. ξ, bir transandant sayı olmasa, yani ξ, derecesi $n>1$ olan bir cebirsel sayı olsa (ξ, bir Liouville sayısı olduğundan bir irrasyonel sayıdır. Dolayısıyla eğer ξ, bir cebirsel sayı ise derecesi >1 dir), bu durumda Teorem 2.1.1 den dolayı, $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ eşitsizliğini sağlayan ancak sonlu sayıda $\frac{p}{q}$ $(q>0)$ rasyonel sayısı var olur. Bu ise, Not 2.1.1. 1) ile çelişir. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan $n+1$ pozitif tam sayısı için

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}} \qquad (q>1)$$

olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ $(q>1)$ rasyonel sayısı vardır. O halde ξ, transandant olmak zorundadır.

Teorem 2.1.3 (Schneider [7, sayfa 3]). ξ, bir irrasyonel sayı; $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, bir rasyonel sayı dizisi $(p_n,\, q_n \in \mathbb{Z};\, q_n > 1)$; $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} s_n = \infty$ olacak şekilde bir reel sayı dizisi ve

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{s_n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.10}$$

olsun. Bu takdirde ξ, bir Liouville sayısıdır.

İspat. $\overline{\lim_{n\to\infty}} s_n = \infty$ olduğundan $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisinin $\lim_{j\to\infty} s_{n_j} = \infty$ olacak şekilde bir $\left\{s_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. n, verilen herhangi bir doğal sayı olmak üzere, $\lim_{j\to\infty} s_{n_j} = \infty$ olduğundan yeteri kadar büyük j ler için $s_{n_j} > n$ dir. O halde, $\exists\, j_1$ doğal sayısı öyleki $s_{n_{j_1}} > 1$, $\exists\, j_2 > j_1$ doğal sayısı öyleki $s_{n_{j_2}} > 2$, $\exists\, j_3 > j_2$ doğal sayısı öyleki $s_{n_{j_3}} > 3, \ldots$. Yani $\left\{s_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ reel sayı dizisinin $\left\{s_{n_{j_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi için $s_{n_{j_k}} > k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$ dır. (2.10) dan,

$$\left|\xi - \frac{p_{n_{j_k}}}{q_{n_{j_k}}}\right| \le \frac{1}{q_{n_{j_k}}^{s_{n_{j_k}}}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.11}$$

elde edilir. $p_{n_{j_k}}$, $q_{n_{j_k}}$, $s_{n_{j_k}}$ ları yeniden adlandıralım ve $p_{n_{j_k}} = g_k$, $1 < q_{n_{j_k}} = h_k$, $s_{n_{j_k}} = r_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$ diyelim. O halde (2.11) den,

$$\left|\xi - \frac{g_k}{h_k}\right| \le \frac{1}{h_k^{r_k}} < \frac{1}{h_k^{k}} \quad (g_k,\, h_k \in \mathbb{Z};\ h_k > 1;\ k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\left(s_{n_{j_k}} > k \Rightarrow r_k > k > 0\right)$$

bulunur. Dolayısıyla ξ, bir Liouville sayısıdır.

Not 2.1.2. ξ, bir Liouville sayısı olsun. Bu takdirde, $\forall \omega > 0$ reel sayısı için

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\omega}} \quad (q > 1)$$

olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $\dfrac{p}{q}$ $(p,\, q \in \mathbb{Z})$ rasyonel sayısı vardır.

İspat. Bir $\omega > 0$ reel sayısı alalım. Archimedes prensibinden dolayı, $n = n(\omega) > \omega > 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan Not 2.1.1. 1) den dolayı, bu n doğal sayısı için

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n} \quad (q_n > 1)$$

olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_n}{q_n}$ rasyonel sayısı vardır. O halde,

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n} < \frac{1}{q_n^\omega} \quad (q_n > 1)$$

olduğundan

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\omega} \quad (q > 1)$$

olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı vardır.

Not 2.1.3. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, ...)$ ve $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} s_n = \infty$ olacak şekilde bir reel sayı dizisi olmak üzere, ξ Liouville sayısı

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n^{s_n}} \quad \left(p_n,\ q_n \in \mathbb{Z},\ q_n > 1;\ n = 1, 2, 3, ...\right)$$

gibi bir yaklaşıma sahip olsun. Bu takdirde, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$ ve $p_n \neq 0 \ (n = 1, 2, 3, ...)$ olduğunu kabul edebiliriz.

İspat. ξ, bir Liouville sayısı ve $s_n > 0 \ (n = 1, 2, 3, ...)$, bir reel sayı olduğundan Not 2.1.2 den dolayı, her $s_n \ (n = 1, 2, 3, ...)$ için $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{s_n}} \quad (q > 1)$ olacak şekilde birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı vardır. O halde, s_1 için

$\left|\xi-\dfrac{p_1}{q_1}\right|<\dfrac{1}{q_1^{s_1}}$ $(q_1>1)$ olacak şekilde bir $\dfrac{p_1}{q_1}\neq 0$ $(p_1\neq 0)$ rasyonel sayısı vardır, s_2 için $\left|\xi-\dfrac{p_2}{q_2}\right|<\dfrac{1}{q_2^{s_2}}$ $\left(q_2>1,\ \dfrac{p_2}{q_2}\neq\dfrac{p_1}{q_1},\ q_2>q_1\right)$ olacak şekilde bir $\dfrac{p_2}{q_2}\neq 0$ $(p_2\neq 0)$ rasyonel sayısı vardır, s_3 için $\left|\xi-\dfrac{p_3}{q_3}\right|<\dfrac{1}{q_3^{s_3}}$ $\left(q_3>1,\ \dfrac{p_3}{q_3}\neq\dfrac{p_2}{q_2},\ \dfrac{p_3}{q_3}\neq\dfrac{p_1}{q_1},\ q_3>q_2>q_1\right)$ olacak şekilde bir $\dfrac{p_3}{q_3}\neq 0$ $(p_3\neq 0)$ rasyonel sayısı vardır. Bu şekilde devam edilirse ispat tamamlanır, yani $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ rasyonel sayı dizisi için

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^{s_n}}\quad (q_n>1;\ n=1,2,3,\ldots),$$

$$p_n\neq 0\quad (n=1,2,3,\ldots),$$

$$q_1<q_2<q_3<\cdots$$

dir. $q_n\in\mathbb{Z}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ ve $q_1<q_2<q_3<\cdots$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=\infty$ dur.

Teorem 2.1.4 (Perron [6, sayfa 184-185]). ξ, bir Liouville sayısı ise $\eta=\dfrac{1}{\xi}$ de bir Liouville sayısıdır.

İspat. ξ, bir Liouville sayısı olsun.

ξ, bir Liouville sayısı ise $-\xi$ de bir Liouville sayısıdır. Çünkü ξ, bir Liouville sayısı olduğundan her $n>0$ tam sayısı için $\left|\xi-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{q^n}$ $(q>1)$ olacak şekilde bir $\dfrac{p}{q}$ $(q>1)$ rasyonel sayısı vardır.

$$\left|-\xi-\frac{(-p)}{q}\right|=\left|-\left(\xi-\frac{p}{q}\right)\right|=\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^n} \quad (q>1)$$

olduğundan her $n>0$ tam sayısı için $\left|-\xi-\frac{(-p)}{q}\right|<\frac{1}{q^n}$ $(q>1)$ olacak şekilde bir $\frac{-p}{q}$ $(q>1)$ rasyonel sayısı bulmuş oluruz. O halde $-\xi$, bir Liouville sayısıdır (ξ, bir irrasyonel sayı olduğundan $-\xi$ de bir irrasyonel sayıdır). Dolayısıyla $\xi>0$ kabul edebiliriz.

ξ, bir Liouville sayısı olduğundan her $n>0$ tam sayısı için,

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2n}} \quad (q>1) \tag{2.12}$$

olacak şekilde p ve q $(q>1)$ pozitif tam sayıları vardır. $p>0$ alınabilir, çünkü

$$\left|\xi-\frac{|p|}{q}\right|=\left||\xi|-\left|\frac{p}{q}\right|\right|\leq\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2n}} \quad (q>1)$$

$$\left(\xi>0,\ q>0 \Rightarrow |\xi|=\xi,\ |q|=q\right)$$

dur. Sonuç 2.1.1 den dolayı $|p|=p$ ve q, keyfi her pozitif reel sayıdan büyük alınabilir. O halde,

$$p>1, \qquad q>\max\left(\xi+1,\ \frac{1}{\xi}\right) \tag{2.13}$$

alabiliriz. (2.12) den,

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2n}} \quad (q>1) \Rightarrow \frac{p}{q}-\xi \leq \left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2n}}<1$$

$$\Rightarrow 0<\frac{p}{q}<\xi+1 \Rightarrow 0<\frac{p}{q^2}<\frac{\xi+1}{q}<1$$

$$\left((2.13) \Rightarrow q > \xi + 1 \Rightarrow \frac{\xi+1}{q} < 1 \right)$$

dir. Dolayısıyla,

$$0 < \frac{p}{q^2} < 1 \tag{2.14}$$

bulunur. (2.12) eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{q}{\xi p} > 0$ ile çarparsak,

$$\left| \xi \frac{q}{\xi p} - \frac{p}{q} \frac{q}{\xi p} \right| < \frac{1}{q^{2n}} \frac{q}{\xi p} \Rightarrow \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{q}{p} - \frac{1}{\xi} \right| < \frac{1}{q^{2n-1} \xi p} \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.13) ve (2.15) ten,

$$\left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{q^{2n-1} \xi p} < \frac{q}{q^{2n-1} p} = \frac{1}{p q^{2n-2}} = \frac{1}{p^n} \left(\frac{p}{q^2} \right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^n} \left(\frac{p}{q^2} \right)^{n-1} \tag{2.16}$$

elde edilir. Şimdi ise (2.13), (2.14) ve (2.16) dan,

$$\left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^n} \quad (p > 1)$$

bulunur. Her n pozitif tam sayısı için $\left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^n}$ $(p > 1)$ olacak şekilde bir $\frac{q}{p}$ rasyonel sayısı bulduğumuza göre $\eta = \frac{1}{\xi}$ irrasyonel sayısı, bir Liouville sayısıdır (ξ, bir irrasyonel sayı olduğundan $\frac{1}{\xi}$ de bir irrasyonel sayıdır).

Teorem 2.1.5 (Perron [6, sayfa 185-186]). İki irrasyonel ξ ve η sayıları arasında

$$\eta = r_0 + r_1\xi + \cdots + r_m\xi^m \qquad (r_i \in \mathbb{Q},\ i = 0,1,\ldots,m;\ m \in \mathbb{N})$$

şeklinde bir bağıntı var olsun. Bu takdirde ξ, bir Liouville sayısı ise η da bir Liouville sayısıdır.

İspat. ξ, bir Liouville sayısı olsun. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan her $n > 0$ tam sayısı için

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2mn}} \quad (q > 1) \tag{2.17}$$

olacak şekilde p ve q tam sayıları vardır ve q, keyfi her pozitif reel sayıdan büyük alınabilir. (2.17) den,

$$\left|\frac{p}{q}\right| < |\xi| + 1 \tag{2.18}$$

bulunur. (2.17), (2.18) ve $|\xi| < |\xi| + 1$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left|\xi^\mu - \frac{p^\mu}{q^\mu}\right| = \left|\left(\xi - \frac{p}{q}\right)\left(\xi^{\mu-1} + \xi^{\mu-2}\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p^{\mu-1}}{q^{\mu-1}}\right)\right|$$

$$= \left|\xi - \frac{p}{q}\right|\left|\xi^{\mu-1} + \xi^{\mu-2}\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p^{\mu-1}}{q^{\mu-1}}\right| < \frac{1}{q^{2mn}}\,\mu\left(|\xi| + 1\right)^{\mu-1} \qquad (\mu \in \mathbb{N},\ \mu \geq 2)$$

elde edilir. Öte yandan, (2.17) den dolayı,

$$\left|\xi^\mu - \frac{p^\mu}{q^\mu}\right| < \frac{1}{q^{2mn}}\,\mu\left(|\xi| + 1\right)^{\mu-1}$$

eşitsizliği $\mu = 1$ için de geçerlidir. Dolayısıyla her μ doğal sayısı için

$$\left|\xi^\mu - \frac{p^\mu}{q^\mu}\right| < \frac{1}{q^{2mn}}\,\mu\left(|\xi| + 1\right)^{\mu-1} \tag{2.19}$$

dir. (2.19) kullanılarak,

$$\left|\eta-\sum_{\mu=0}^{m}\frac{r_\mu p^\mu}{q^\mu}\right|=\left|\eta-\left(r_0+r_1\frac{p}{q}+r_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+r_m\frac{p^m}{q^m}\right)\right|$$

$$=\left|r_0+r_1\xi+r_2\xi^2+\cdots+r_m\xi^m-\left(r_0+r_1\frac{p}{q}+r_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+r_m\frac{p^m}{q^m}\right)\right|$$

$$=\left|r_1\left(\xi-\frac{p}{q}\right)+r_2\left(\xi^2-\frac{p^2}{q^2}\right)+\cdots+r_m\left(\xi^m-\frac{p^m}{q^m}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{\mu=1}^{m}r_\mu\left(\xi^\mu-\frac{p^\mu}{q^\mu}\right)\right|\leq\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\left|\xi^\mu-\frac{p^\mu}{q^\mu}\right|$$

$$<\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\frac{\mu\left(\left|\xi\right|+1\right)^{\mu-1}}{q^{2mn}}=\frac{1}{q^{2mn}}\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\mu\left(\left|\xi\right|+1\right)^{\mu-1}$$

bulunur. O halde,

$$\left|\eta-\sum_{\mu=0}^{m}\frac{r_\mu p^\mu}{q^\mu}\right|<\frac{1}{q^{2mn}}\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\mu\left(\left|\xi\right|+1\right)^{\mu-1}\qquad(2.20)$$

dir.

$$\sum_{\mu=0}^{m}\frac{r_\mu p^\mu}{q^\mu}=r_0+r_1\frac{p}{q}+r_2\frac{p^2}{q^2}+\cdots+r_m\frac{p^m}{q^m}$$

$$=\frac{\left(r_0+r_1\frac{p}{q}+\cdots+r_m\frac{p^m}{q^m}\right)q^m}{q^m}=\frac{r_0q^m+r_1pq^{m-1}+\cdots+r_mp^m}{q^m}$$

$$=\frac{l\left(r_0q^m+r_1pq^{m-1}+\cdots+r_mp^m\right)}{l\,q^m}=\frac{k}{l\,q^m}$$

olup, burada l; $r_0,\, r_1,...,r_m$ rasyonel sayılarının paydalarının en küçük ortak katıdır, ve bir rasyonel sayının paydası pozitif bir tam sayı olduğundan $l>0$ bir tam sayıdır, $k=l\left(r_0q^m+r_1pq^{m-1}+\cdots+r_mp^m\right)\in\mathbb{Z}$ dir. Öyleyse,

$$\sum_{\mu=0}^{m}\frac{r_\mu p^\mu}{q^\mu}=\frac{k}{l\,q^m}\qquad (k,l\in\mathbb{Z};\ l>0) \tag{2.21}$$

dir. (2.20) ve (2.21) den,

$$\left|\eta-\frac{k}{l\,q^m}\right|<\frac{1}{q^{2mn}}\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\mu\left(\left|\xi\right|+1\right)^{\mu-1} \tag{2.22}$$

elde edilir. $\sum_{\mu=1}^{m}\left|r_\mu\right|\mu\left(\left|\xi\right|+1\right)^{\mu-1}=c$ diyelim. $r_1,r_2,...,r_m$ rasyonel sayılarının hepsi birden sıfır olamayacağından $c>0$ dir. Dolayısıyla c, n ve q dan bağımsız bir pozitif reel sabittir. O halde,

$$\left|\eta-\frac{k}{l\,q^m}\right|<\frac{1}{q^{2mn}}\,c \tag{2.23}$$

dir. $q>1$ tam sayısı $q\geq\sqrt[mn]{c\,l^n}$ olacak şekilde alınırsa,

$$\frac{1}{q^{2mn}}\,c\leq\frac{1}{q^{2mn}}\,\frac{q^{mn}}{l^n}=\frac{1}{q^{mn}\,l^n}=\frac{1}{\left(l\,q^m\right)^n} \tag{2.24}$$

olur. (2.23) ve (2.24) ten,

$$\left|\eta-\frac{k}{l\,q^m}\right|<\frac{1}{\left(l\,q^m\right)^n}\qquad\left(k\in\mathbb{Z},\ l\,q^m\in\mathbb{Z},\ l\,q^m>1\right)$$

bulunur ($l>0,\ q>1,\ m\geq1$ birer tam sayı olduğundan $l\,q^m>1$ de bir tam sayıdır). O halde, her $n>0$ tam sayısı için

$$\left|\eta-\frac{k}{l\,q^{m}}\right|<\frac{1}{\left(l\,q^{m}\right)^{n}} \qquad \left(l\,q^{m}>1\right)$$

olacak şekilde bir $\frac{k}{l\,q^{m}}$ rasyonel sayısı bulduğumuzdan η irrasyonel sayısı, bir Liouville sayısıdır.

Teorem 2.1.6. Liouville sayıları $\mathbb{R}$ de yoğundur.

İspat. $\mathbb{R}$ deki her açık aralıkta bir Liouville sayısının var olduğunu gösterelim. $x, y \in \mathbb{R},\ x<y$ ve $\xi>0$, bir Liouville sayısı olsun. Rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $\alpha \in \left(\frac{x}{\xi},\ \frac{y}{\xi}\right)$ olacak şekilde bir $\alpha \neq 0$ rasyonel sayısı vardır. Buradan $\alpha\,\xi \in (x,\ y)$ elde edilir. Öte yandan, Teorem 2.1.5 ten dolayı $\alpha\,\xi$ irrasyonel sayısı bir Liouville sayısıdır.

2.2. KOMPLEKS SAYILARIN MAHLER VE KOKSMA SINIFLANDIRMALARI

2.2.1. Mahler Sınıflandırması

Mahler $[8]$, 1932’de kompleks sayıları birbirine yabancı dört sınıfa aşağıdaki şekilde ayırmıştır.

ξ, verilen bir kompleks sayı, n ve H da verilen iki doğal sayı olsun. Tam katsayılı bir $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k$ polinomunun yüksekliğini $H(P)=\max\left(|a_0|,|a_1|,...,|a_k|\right)$ şeklinde tanımlayalım ve derecesini ∂P ile gösterelim.

$K_{n,H}=\left\{P(z)\in\mathbb{Z}[z]:\ \partial P\le n,\ H(P)\le H\right\}$ kümesini düşünelim. $P(z)\equiv 1$ polinomu $K_{n,H}$ kümesine ait olduğundan $K_{n,H}$ kümesi boş kümeden farklıdır ve $K_{n,H}$ kümesinin sonlu sayıda elemanı vardır, yani $\partial P\le n,\ H(P)\le H$ koşullarını sağlayan sonlu sayıda tam katsayılı polinom vardır. Şimdi ise $K_{n,H,\xi}=\left\{\ |P(\xi)|\in\mathbb{R}:\ P(z)\in K_{n,H}\ \right\}$ kümesini düşünelim. $K_{n,H}$ kümesi boş kümeden farklı olduğundan $K_{n,H,\xi}$ kümesi de boş kümeden farklıdır, $K_{n,H}$ kümesinin sonlu sayıda elemanı olduğundan $K_{n,H,\xi}$ kümesinin de sonlu sayıda elemanı vardır. $P(z)\equiv 1\in K_{n,H}$ olduğundan $|P(\xi)|=1\in K_{n,H,\xi}$ dir. O halde, $K_{n,H,\xi}$ kümesine ait sıfırdan farklı $|P(\xi)|$ değerleri vardır. Şu halde aşağıdaki minimumdan bahsedebiliriz:

$$w_n(H,\xi)=\min_{\substack{P(z)\in\mathbb{Z}[z],\,P(\xi)\neq 0\\ \partial P\le n,\ H(P)\le H}}|P(\xi)|\ . \tag{2.25}$$

(2.25) te minimuma giren $|P(\xi)|$ değerleri arasında $1\in\mathbb{R}$ de bulunduğundan

$$0<w_n(H,\xi)\le 1 \tag{2.26}$$

dir.

n i sabit tutup H yı değiştirelim. $H_1 > H_2$ ise $w_n(H_1,\xi) \leq w_n(H_2,\xi)$ dir, yani $w_n(H,\xi)$, sabit bir n için, H nın bir monoton azalan fonksiyonudur. Çünkü $H_1 > H_2$ olduğundan

$$K_{n,H_1,\xi} - \{0\} \supseteq K_{n,H_2,\xi} - \{0\} \tag{2.27}$$

dır. $K_{n,H_1,\xi} - \{0\}$ ve $K_{n,H_2,\xi} - \{0\}$, reel sayıların boş kümeden farklı ve alttan (sıfır ile) sınırlı alt kümeleri olduğundan ve (2.27) den,

$$\inf\left(K_{n,H_1,\xi} - \{0\}\right) \leq \inf\left(K_{n,H_2,\xi} - \{0\}\right) \tag{2.28}$$

dır. $K_{n,H_1,\xi} - \{0\}$ ve $K_{n,H_2,\xi} - \{0\}$ kümeleri sonlu olduğundan ve (2.28) den,

$$\min\left(K_{n,H_1,\xi} - \{0\}\right) \leq \min\left(K_{n,H_2,\xi} - \{0\}\right) \tag{2.29}$$

dır. Buradan

$$w_n(H_1,\xi) \leq w_n(H_2,\xi) \tag{2.30}$$

elde edilir. Tamamen benzer şekilde, H yı sabit tutup n i değiştirelim. $n_1 > n_2$ ise $w_{n_1}(H,\xi) \leq w_{n_2}(H,\xi)$ dir, yani $w_n(H,\xi)$, sabit bir H için, n in bir monoton azalan fonksiyonudur.

$w_n(H,\xi) = H^{-x} \quad (H > 1)$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin tam bir tane çözümü vardır, o da

$$x = \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H} \tag{2.31}$$

dir. Bu x i $\rho_n(H)$ ile gösterelim. (2.26) dan dolayı, $\rho_n(H) \geq 0$ dır.

$$w_n(\xi) = \overline{\lim_{H\to\infty}}\, \rho_n(H) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H} \tag{2.32}$$

diyelim.

$$0 \le w_n(\xi) \le \infty \tag{2.33}$$

dur. Çünkü her $H > 1$ doğal sayısı için $\rho_n(H) \ge 0$ olduğundan $\overline{\lim\limits_{H\to\infty}}\, \rho_n(H) = w_n(\xi) \ge 0$ dır. $\{\rho_n(H)\}_{H=2}^{\infty}$ reel sayı dizisi, alttan sınırlı olduğu için, eğer üstten de sınırlı ise $\overline{\lim\limits_{H\to\infty}}\, \rho_n(H) = w_n(\xi)$ değeri sonludur, yani bir reel sayıdır. Eğer $\{\rho_n(H)\}_{H=2}^{\infty}$ dizisi üstten sınırlı değilse $\overline{\lim\limits_{H\to\infty}}\, \rho_n(H) = w_n(\xi) = \infty$ dur.

Ayrıca, $w_n(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonudur, yani

$$n_1 > n_2 \quad ise \quad w_{n_1}(\xi) \ge w_{n_2}(\xi) \tag{2.34}$$

dir. Çünkü $n_1 > n_2$ ise $0 < w_{n_1}(H,\xi) \le w_{n_2}(H,\xi)$ olduğundan

$\dfrac{1}{w_{n_1}(H,\xi)} \ge \dfrac{1}{w_{n_2}(H,\xi)} > 0$ olup, buradan $\dfrac{\log \dfrac{1}{w_{n_1}(H,\xi)}}{\log H} \ge \dfrac{\log \dfrac{1}{w_{n_2}(H,\xi)}}{\log H}$ $(H > 1)$,

öyleyse $w_{n_1}(\xi) = \overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \dfrac{\log \dfrac{1}{w_{n_1}(H,\xi)}}{\log H} \ge \overline{\lim\limits_{H\to\infty}} \dfrac{\log \dfrac{1}{w_{n_2}(H,\xi)}}{\log H} = w_{n_2}(\xi)$ elde edilir.

$$w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} \tag{2.35}$$

diyelim.

$$0 \le w(\xi) \le \infty \tag{2.36}$$

dur.Çünkü,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ } için \text{ } w_n(\xi) \ge 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ } için \text{ } \frac{w_n(\xi)}{n} \ge 0 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} \ge 0 \Rightarrow w(\xi) \ge 0.$$

Eğer bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $w_{n_0}(\xi) = \infty$ ise, $w_n(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonu olduğundan her $n \ge n_0$ için $w_n(\xi) = \infty$ dur. Dolayısıyla, her $n \ge n_0$ için $\frac{w_n(\xi)}{n} = \infty$ dur. Bu durumda, $w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} = \infty$ olur. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n(\xi) < \infty$ ise, bu durumda $\left\{\frac{w_n(\xi)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, bir reel sayı dizisi olur. $\left\{\frac{w_n(\xi)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, alttan sınırlı olduğu için üstten de sınırlı ise $w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} < \infty$ dur, yani $w(\xi)$, bir reel sayıdır; $\left\{\frac{w_n(\xi)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, üstten sınırlı değilse $w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} = \infty$ olur.

1) $w_n(\xi) = \infty$ olacak şekilde n indeksleri varsa, bu indekslerin minimumuna $\mu(\xi)$ diyelim. O halde, $n < \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) < \infty$; $w_n(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonu olduğundan $n \ge \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) = \infty$ dur. Bu durumda ξ nin indeksi $\mu(\xi)$, sonludur denir.

2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n(\xi) < \infty$ ise $\mu(\xi) = \infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur denir.

O halde, $\xi \in \mathbb{C}$ için $w(\xi)$ ve $\mu(\xi)$ değerleri tek türlü belirlidir; $w(\xi)$ ve $\mu(\xi)$ nin her ikisi birden sonlu olamaz. Çünkü $\mu(\xi)$, sonlu ise $n \ge \mu(\xi)$ için $w_n(\xi) = \infty$ olacağından, $n \ge \mu(\xi)$ için $\frac{w_n(\xi)}{n} = \infty$ olur, buradan $w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n(\xi)}{n} = \infty$ elde edilir.

Öyleyse, $\xi \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki dört durumdan tam bir tanesi söz konusudur. ξ sayısına

$w(\xi)=0$, $\mu(\xi)=\infty$ ise bir $A-$sayısı,

$0<w(\xi)<\infty$, $\mu(\xi)=\infty$ ise bir $S-$sayısı,

$w(\xi)=\infty$, $\mu(\xi)=\infty$ ise bir $T-$sayısı,

$w(\xi)=\infty$, $\mu(\xi)<\infty$ ise bir $U-$sayısı

denir. O halde, bu şekilde bütün kompleks sayıları birbirine yabancı dört sınıfa ayırabiliriz. $A-$sayılarının oluşturduğu sınıfa $A-$sınıfı, $S-$sayılarının oluşturduğu sınıfa $S-$sınıfı, $T-$sayılarının oluşturduğu sınıfa $T-$sınıfı ve $U-$sayılarının oluşturduğu sınıfa $U-$sınıfı denir.

Teorem 2.2.1.1 (Schneider [7, sayfa 68-69]). Her cebirsel sayı bir $A-$sayısıdır ve karşıt olarak her $A-$sayısı bir cebirsel sayıdır. Başka bir deyişle, $A-$sınıfı ile cebirsel sayılar kümesi aynıdır.

Sonuç 2.2.1.1. Transandant sayılar S, T, U gibi birbirine yabancı üç sınıfa ayrılır.

Teorem 2.2.1.2 (LeVeque [9, sayfa 172-174]). z ve t gibi iki kompleks sayı birbirine cebirsel olarak bağlı ise, yani $F(z,t)=0$ olacak şekilde sıfır polinomdan farklı bir tam katsayılı $F(x,y)$ polinomu varsa, z ve t aynı sınıfa aittir.

$\xi \in \mathbb{C}$, $\mu(\xi)=m$ olacak şekilde bir $U-$sayısı olsun ve U_m ile de bu şekildeki ξ sayılarının oluşturduğu kümeyi gösterelim, yani $U_m=\{\xi \in U:\ \mu(\xi)=m\}$ olsun. U_m $(m=1,2,3,...)$ kümesi, $U-$sınıfının bir alt sınıfıdır ve U, bu ayrık U_m sınıflarının birleşimidir, yani $U=\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ $(m \neq n \ ise \ U_m \cap U_n=\varnothing)$ dir. LeVeque $[10]$, $U_m \neq \varnothing$ $(m=1,2,3,...)$ olduğunu göstermiştir. Liouville sayılarının kümesi ile U_1 alt sınıfı (tamamen) aynıdır. [1]

[1] $U-$sayıları ile ilgili daha fazla bilgi için LeVeque [10] e bakınız.

Aklımıza $A-, S-, T-, U-$sayılarının var olup olmadığı gibi bir soru gelebilir. Her cebirsel sayı bir $A-$sayısı ve her Liouville sayısı da bir $U-$sayısı olduğundan $A-$ ve $U-$sınıfı boş kümeden farklıdır. Öte yandan hemen hemen tüm sayılar $S-$sayılarıdır, yani Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme dışında tüm sayılar $S-$sayılarıdır. Özellikle e sayısı bir $S-$sayısıdır (Schneider [7, sayfa 82-94]). Ancak $T-$sayılarının var olup olmadığı yaklaşık kırk yıl boyunca açık bir problem olarak kalmıştır ve nihayet 1968 yılında Schmidt $[11]$ tarafından $T-$sınıfının boş kümeden farklı olduğu ispat edilmiştir.

2.2.2. Koksma Sınıflandırması

Koksma $[12]$, 1939'da kompleks sayıların başka bir sınıflandırmasını daha verdi. Koksma sınıflandırması ile kompleks sayılar aşağıdaki şekilde A^*, S^*, T^*, U^* gibi birbirine yabancı dört sınıfa ayrılmaktadır.

$\alpha \in \mathbb{C}$, bir cebirsel sayı ve $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$ $\left(a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z};\ k \geq 1;\ (a_0, a_1, ..., a_k) = 1;\ a_k > 0\right)^2$ de α nın minimal polinomu olsun. Bu takdirde, α nın yüksekliği $H(\alpha)$, $H(\alpha) = H(P)$ olarak; α nın derecesi $\partial\alpha$ ise $\partial\alpha = \partial P$ olarak tanımlanır.

ξ, verilen bir kompleks sayı; n ve H, verilen iki doğal sayı ve $\alpha \in \mathbb{C}$ de yüksekliği $\leq H$, derecesi $\leq n$ olan herhangi bir cebirsel sayı olsun. Yüksekliği $\leq H$, derecesi $\leq n$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda tam katsayılı polinom olduğundan yüksekliği $\leq H$, derecesi $\leq n$ olacak şekilde ancak sonlu sayıda cebirsel sayı vardır (Bu cebirsel sayılar, bu polinomların kökleridir).

$K^*_{n,H,\xi} = \left\{ |\xi - \alpha| \in \mathbb{R} :\ \alpha,\ cebirsel\ sayı;\ \partial\alpha \leq n,\ H(\alpha) \leq H;\ \alpha \neq \xi \right\}$ kümesini düşünelim. $K^*_{n,H,\xi} \neq \varnothing$ tur, çünkü eğer $\xi = 0$ ise $\alpha = 1$ alınabilir, yani $|0-1| \in K^*_{n,H,\xi}$ olup, $K^*_{n,H,\xi} \neq \varnothing$ tur. Eğer $\xi \neq 0$ ise bu durumda da $\alpha = 0$ alınabilir, yani $|\xi - 0| = |\xi| \in K^*_{n,H,\xi}$ olup, yine $K^*_{n,H,\xi} \neq \varnothing$ tur. Ayrıca, bir önceki paragrafta

---

2 $(a_0, a_1, ..., a_k)$ notasyonu ile $a_0, a_1, ..., a_k$ tam sayılarının en büyük ortak böleni gösterilmektedir.

açıklananlardan dolayı, $K^*_{n,H,\xi}$ kümesinin sonlu sayıda elemanı vardır. O halde, aşağıdaki minimumdan bahsedebiliriz:

$$w_n^*(H,\xi) = \min_{\substack{\alpha,\, cebirsel;\ \alpha \neq \xi \\ \partial\alpha \le n,\ H(\alpha) \le H}} |\xi - \alpha| \ . \tag{2.37}$$

Eğer $\xi = 0$ ise $\alpha = 1$ cebirsel sayısı (2.37) de minimuma giren α cebirsel sayılarından biri olduğundan $w_n^*(H,\xi) \le 1$ olur. Eğer $\xi \neq 0$ ise bu durumda da $\alpha = 0$ cebirsel sayısı (2.37) de minimuma giren α cebirsel sayılarından biri olduğundan $w_n^*(H,\xi) \le |\xi|$ olur. O halde,

$$0 < w_n^*(H,\xi) \le \max\left(|\xi|, 1 \right) \tag{2.38}$$

dir. Burada $\max\left(|\xi|, 1 \right) \ge 1$; sadece ξ ye bağlı, n ve H dan bağımsız bir reel sabittir. Mahler sınıflandırmasında olduğu gibi, sabit bir n için, $w_n^*(H,\xi)$, H nın bir monoton azalan fonksiyonudur, yani $H_1 > H_2$ ise $w_n^*(H_1,\xi) \le w_n^*(H_2,\xi)$ dir, yine sabit bir H için, $w_n^*(H,\xi)$, n in bir monoton azalan fonksiyonudur, yani $n_1 > n_2$ ise $w_{n_1}^*(H,\xi) \le w_{n_2}^*(H,\xi)$ dir.

$H\, w_n^*(H,\xi) = H^{-x}$ $(H > 1)$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin tam bir tane çözümü vardır, o da

$$x = \frac{\log \dfrac{1}{H\, w_n^*(H,\xi)}}{\log H} \tag{2.39}$$

dir. Bu x i $\rho_n^*(H)$ $(H > 1)$ ile gösterelim. (2.38) ve (2.39) dan dolayı, $\left\{ \rho_n^*(H) \right\}_{H=2}^{\infty}$, alttan sınırlı bir reel sayı dizisidir.

$$w_n^*(\xi) = \overline{\lim_{H\to\infty}}\, \rho_n^*(H) = \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{H\, w_n^*(H,\xi)}}{\log H} \tag{2.40}$$

diyelim. $w_n^*(\xi)$ değeri sonlu ya da sonsuz olabilir ve $w_n^*(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonudur, yani

$$n_1 > n_2 \quad ise \quad w_{n_1}^*(\xi) \geq w_{n_2}^*(\xi) \tag{2.41}$$

dir.

$$w^*(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n^*(\xi)}{n} \tag{2.42}$$

diyelim.

$$0 \leq w^*(\xi) \leq \infty \tag{2.43}$$

dur.

1) $w_n^*(\xi) = \infty$ olacak şekilde n indeksleri varsa, bu indekslerin minimumuna $\mu^*(\xi)$ diyelim. O halde, $n < \mu^*(\xi)$ için $w_n^*(\xi) < \infty$; $w_n^*(\xi)$, n in bir monoton artan fonksiyonu olduğundan $n \geq \mu^*(\xi)$ için $w_n^*(\xi) = \infty$ dur. Bu durumda ξ nin indeksi $\mu^*(\xi)$, sonludur denir.

2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $w_n^*(\xi) < \infty$ ise $\mu^*(\xi) = \infty$ yazılır ve ξ nin indeksi sonsuzdur denir.

O halde, $\xi \in \mathbb{C}$ için $w^*(\xi)$ ve $\mu^*(\xi)$ değerleri tek türlü belirlidir; $w^*(\xi)$ ve $\mu^*(\xi)$ nin her ikisi birden sonlu olamaz. Çünkü $\mu^*(\xi)$ nin sonlu olması $w^*(\xi)$ nin sonsuz olmasını gerektirir.

Öyleyse, $\xi \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki dört durumdan tam bir tanesi söz konusudur. ξ sayısına

$w^*(\xi) = 0$, $\quad \mu^*(\xi) = \infty$ ise bir A^*-sayısı,

$0 < w^*(\xi) < \infty$, $\quad \mu^*(\xi) = \infty$ ise bir S^*-sayısı,

$w^*(\xi) = \infty$, $\quad \mu^*(\xi) = \infty$ ise bir T^*-sayısı,

$w^*(\xi) = \infty$, $\quad \mu^*(\xi) < \infty$ ise bir U^*-sayısı

denir. A^*-sayılarının oluşturduğu sınıfa A^*-sınıfı, S^*-sayılarının oluşturduğu sınıfa S^*-sınıfı, T^*-sayılarının oluşturduğu sınıfa T^*-sınıfı ve U^*-sayılarının oluşturduğu sınıfa U^*-sınıfı denir. O halde, Koksma sınıflandırması ile bütün kompleks sayılar birbirine yabancı A^*, S^*, T^*, U^* gibi dört sınıfa ayrılmış olur.

$\xi \in \mathbb{C}$, $\mu^*(\xi) = m$ olacak şekilde bir U^*-sayısı olsun ve U_m^* ile de bu şekildeki ξ sayılarının oluşturduğu kümeyi gösterelim, yani $U_m^* = \left\{ \xi \in U^* : \mu^*(\xi) = m \right\}$ olsun. U_m^* $(m = 1, 2, 3, ...)$ kümesi, U^*-sınıfının bir alt sınıfıdır ve U^*, bu ayrık U_m^* alt sınıflarının birleşimidir, yani $U^* = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m^*$ $\left(m \neq n \ ise \ U_m^* \cap U_n^* = \varnothing \right)$ dir.

Wirsing $[13]$, 1961'de Mahler sınıflandırması ile Koksma sınıflandırmasının eşdeğer olduğunu, yani $A-, S-, T-, U-$sayılarının sırasıyla A^*-, S^*-, T^*-, U^*-sayılarıyla aynı olduğunu göstermiştir. Ayrıca, $U_m = U_m^*$ $(m = 1, 2, 3, ...)$ dır.

2.3. YARDIMCI TEOREMLER

Yardımcı Teorem 2.3.1 (İçen [14]). K, m. dereceden bir cebirsel sayı cismi; $\alpha_j \in K \quad (j=1,2,...,k;\ k \geq 1)$; η, herhangi bir cebirsel sayı; $F(y, x_1, ..., x_k)$, y ye göre derecesi en az 1 olan tam katsayılı bir polinom; η cebirsel sayısı ile $\alpha_j \quad (j=1,2,...,k)$ cebirsel sayıları arasında

$$F(\eta, \alpha_1, ..., \alpha_k) = 0$$

bağıntısı geçerli olsun. $\alpha_j \quad (j=1,2,...,k)$ nin yüksekliğini $H(\alpha_j)$, η nın yüksekliğini $H(\eta)$, $F(y, x_1, ..., x_k)$ polinomunun y ye göre derecesini d, $F(y, x_1, ..., x_k)$ polinomunun $x_j \quad (j=1,2,...,k)$ ye göre derecesini l_j ve $F(y, x_1, ..., x_k)$ polinomunun yüksekliğini H ile gösterelim. Bu takdirde,

$$\partial\eta \leq dm$$

ve

$$H(\eta) \leq 3^{2dm+(l_1+\cdots+l_k)m} H^m H(\alpha_1)^{l_1 m} ... H(\alpha_k)^{l_k m}$$

dir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışmada makale ve kitaplardan yararlanılmıştır. Kaynaklar bölümünde belirtilen kitap ve makaleler incelenip gerekli alt yapı oluşturulduktan sonra, 4. BULGULAR bölümünde verilen iki özgün teorem (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2) elde edilmiştir. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin ispatında Zeren [3] ve Yılmaz [4] ün kullandığı tekniklerden yararlanılmıştır. Ayrıca, Teorem 4.2 nin ispatında Koksma sınıflandırması kullanılmıştır. Çünkü Mahler sınıflandırmasında tam katsayılı polinomlarla, Koksma sınıflandırmasında ise cebirsel sayılarla çalışılmaktadır. Teorem 4.2 nin ispatında, cebirsel sayılarla çalışmak tam katsayılı polinomlarla çalışmaktan daha kolay olduğu için, Koksma sınıflandırması ile çalışmak tercih edilmiştir.

4. BULGULAR

Bu çalışmada aşağıdaki iki özgün teorem elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $F(z)=\sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h \quad \left(c_h \in \mathbb{Q};\ c_h = \dfrac{b_h}{a_h},\ b_h \in \mathbb{Z},\ a_h \in \mathbb{N} \quad (h=0,1,2,\ldots) \right);$

$\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$0 = s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < s_3 \le \ldots \tag{4.1}$$

koşulunu sağlayan, negatif olmayan tam sayıların iki alt dizisi;

$$\begin{cases} c_h = 0, & r_n < h < s_n \quad (n=1,2,3,\ldots), \\ c_h \neq 0, & h = r_n \quad (n=1,2,3,\ldots), \\ c_h \neq 0, & h = s_n \quad (n=0,1,2,\ldots); \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = \infty \ ; \tag{4.3}$$

$F(z)$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$R > 0 \quad (R\text{, sonlu ya da sonsuz olabilir}) \ ; \tag{4.4}$$

$$\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log A_h}{h} < \infty \qquad \left(A_h = [a_0, a_1, \ldots, a_h]\ ;\ h = 1,2,3,\ldots \right)^3 \ ; \tag{4.5}$$

[3] $[a_0, a_1, \ldots, a_h]$ notasyonu , $a_0, a_1, \ldots, a_h$ tam sayılarının en küçük ortak katını göstermektedir.

ξ,

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}} \quad \left(p_n, q_n \in \mathbb{Z},\ q_n > 1,\ \omega_n = \frac{s_n}{r_n \log q_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);\ \lim_{n \to \infty} \omega_n = \infty \right) \quad (4.6)$$

gibi bir yaklaşıma sahip bir Liouville sayısı (burada $r_1 = 0$ ise yaklaşım, $n = 2$ den başlatılır) ve

$$|\xi| < R$$

olsun. Bu takdirde ya $F(\xi)$, bir rasyonel sayıdır ya da $F(\xi)$, bir Liouville sayısıdır.

İspat. $P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$ olmak üzere ($P_k(z)$, sıfır polinomdan farklı; $P_k(z) \in \mathbb{Q}[z]$), $F(z)$ genelleştirilmiş boşluk serisi, yakınsak olduğu $z \in \mathbb{C}$ ler için, (4.2) den dolayı

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir.

Teoremin ispatını beş aşamada yapacağız:

1) $0 < |\xi| < R$ olduğundan $z = \xi$ için $F(z)$ serisi yakınsaktır ve $F(\xi) \in \mathbb{R}$ dir.

2) $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(z) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ polinomlarını düşünelim ($F_n(z)$, sıfır polinomdan farklı, $F_n(z) \in \mathbb{Q}[z]$).

$$\eta_n = F_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = P_0\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + P_1\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + \cdots + P_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$$

$$= \sum_{h=s_0}^{r_n} c_h \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (4.8)$$

rasyonel sayılarını göz önüne alalım. Şimdi η_n rasyonel sayılarının paydalarını belirleyelim. (4.8) den,

$$\eta_n = c_{s_0}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{s_0} + c_{s_0+1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{s_0+1} + \cdots + c_{r_n}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{r_n}$$

$$= \frac{b_{s_0}}{a_{s_0}}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{s_0} + \frac{b_{s_0+1}}{a_{s_0+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{s_0+1} + \cdots + \frac{b_{r_n}}{a_{r_n}}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{r_n}$$

$$= \frac{d_n}{A_{r_n} q_n^{r_n}}, \qquad d_n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir, o halde

$$\eta_n = \frac{d_n}{A_{r_n} q_n^{r_n}} \qquad \left(d_n,\ A_{r_n} q_n^{r_n} \in \mathbb{Z};\ A_{r_n} q_n^{r_n} > 1;\ n = 1,2,3,\ldots\right) \tag{4.9}$$

şeklindedir.

3) $\left|F(\xi) - \eta_n\right| \le \left|F(\xi) - F_n(\xi)\right| + \left|F_n(\xi) - \eta_n\right| \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$ (4.10)

dir. Şimdi $\left|F(\xi) - F_n(\xi)\right|$ ve $\left|F_n(\xi) - \eta_n\right|$ için birer üst sınır belirleyelim.

$$\left|F(\xi) - F_n(\xi)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\xi)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} P_k(\xi)\right|$$

$$= \left|\sum_{h=s_n}^{\infty} c_h\,\xi^h\right| \le \sum_{h=s_n}^{\infty} \left|c_h\right|\,\left|\xi\right|^h\ . \tag{4.11}$$

$$0 < \left|\xi\right| < \rho < R \tag{4.12}$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ reel sayısı alalım ($R = \infty$ ise $\rho > \left|\xi\right|$ olacak şekilde bir $\rho > 0$ reel sayısı almak yeterlidir). $F(z)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $0 < \left|\rho\right| = \rho < R$ olduğundan $F(\rho) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h\,\rho^h$ serisi yakınsaktır, dolayısıyla

$\lim_{h\to\infty}\left(c_h\,\rho^h\right)=0$ dır. Her yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\left\{c_h\,\rho^h\right\}_{h=0}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır. O halde,

$$\exists M>0 \ \textit{reel sayısı}; \quad \forall h=0,1,2,... \ \textit{için} \quad \left|c_h\,\rho^h\right|\le M$$

$$\Rightarrow \quad |c_h|\le \frac{M}{\rho^h} \qquad (h=0,1,2,...) \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.11), (4.12) ve (4.13) ten,

$$|F(\xi)-F_n(\xi)|\le \sum_{h=s_n}^{\infty}|c_h|\,|\xi|^h \le \sum_{h=s_n}^{\infty}\frac{M}{\rho^h}\,|\xi|^h = M\sum_{h=s_n}^{\infty}\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^h$$

$$=M\left(\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n}+\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n+1}+\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n+2}+\cdots\right)=M\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n}\left(1+\frac{|\xi|}{\rho}+\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=M\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n}\frac{1}{1-\frac{|\xi|}{\rho}}=\frac{\dfrac{M}{1-\frac{|\xi|}{\rho}}}{\left(\dfrac{\rho}{|\xi|}\right)^{s_n}} \qquad (n=1,2,3,...)$$

$$\left((4.12)\Rightarrow \ 0<|\xi|<\rho<R\Rightarrow \ 0<\frac{|\xi|}{\rho}<1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad |F(\xi)-F_n(\xi)|\le\frac{e_1}{e_2^{s_n}} \qquad (n=1,2,3,...) \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada $e_1=\dfrac{M}{1-\frac{|\xi|}{\rho}}>0, \quad e_2=\dfrac{\rho}{|\xi|}>1$ pozitif reel sabitlerdir (e_1 *ve* e_2; $n,\ r_n,\ s_n,\ \eta_n,\ p_n$ *ve* q_n lerden bağımsızdır).

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} P_k(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| = \left|\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\, \xi^h - \sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right|$$

$$= \left|\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\left(\xi^h - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right)\right| \le \sum_{h=s_0}^{r_n} \left|c_h\right| \left|\xi^h - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right|$$

$$\le \sum_{h=s_0}^{r_n} \left|c_h\right| \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \left|\xi^{h-1} + \xi^{h-2}\frac{p_n}{q_n} + \cdots + \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{h-1}\right| . \tag{4.15}$$

(4.13) ten,

$$\left|c_h\right| \le \frac{M}{\rho^h} \le M\, B^h \le M_1 B^h \qquad (h=0,1,2,...) \tag{4.16}$$

dır. Burada $B=\max\left(1,\frac{1}{\rho}\right)\ge 1,\quad M_1=\max(1,M)\ge 1$ dir. (4.6) dan,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\xi\right| \le \left|\,\left|\xi\right| - \left|\frac{p_n}{q_n}\right|\,\right| \le \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}} < 1$$

olup, buradan

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\xi\right| + 1 \qquad (n=1,2,3,...) \tag{4.17}$$

bulunur. (4.6), (4.15), (4.16), (4.17) ve $\left|\xi\right| < \left|\xi\right|+1$ olmasından dolayı,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \sum_{h=s_0}^{r_n} M_1 B^h \frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}}\, h\left(\left|\xi\right|+1\right)^{h-1} \le \sum_{h=s_0}^{r_n} M_1^{r_n} B^{r_n} \frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}}\, r_n\left(\left|\xi\right|+1\right)^{r_n}$$

$$= \left(r_n+1\right) M_2^{r_n} \frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}}\, r_n\left(\left|\xi\right|+1\right)^{r_n} \tag{4.18}$$

dir. Burada $M_2 = M_1 B \ge 1$ dir. (4.18) den,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}}\left(r_n+1\right)^2 M_2^{r_n}\left(|\xi|+1\right)^{r_n} \tag{4.19}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{r_n}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{r_n+1}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[r_n]{\left(r_n+1\right)^2}=1$$

$\Rightarrow\ \exists e_3>1$ reel sayısı; yeteri kadar büyük n ler için

$$\left(r_n+1\right)^2 \le e_3^{r_n} \tag{4.20}$$

dir. (4.19) ve (4.20) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}}\, e_3^{r_n} M_2^{r_n}\left(|\xi|+1\right)^{r_n} = \frac{e_4^{r_n}}{q_n^{r_n\omega_n}} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada $e_4=e_3 M_2\left(|\xi|+1\right)>1$ dir (e_4; n, r_n, s_n, η_n, p_n *ve* q_n den bağımsız, pozitif reel sabit). Ayrıca ξ, bir Liouville sayısı olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=\infty$ olduğunu kabul edebiliriz (Sonuç 2.1.2 ve Not 2.1.3 e bakınız). O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$e_4 \le q_n \tag{4.22}$$

dir. (4.21) ve (4.22) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \frac{q_n^{r_n}}{q_n^{r_n\omega_n}} = \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)}} \tag{4.23}$$

bulunur. Şimdi (4.14) e geri dönelim.

λ, değeri daha sonra açıklanacak pozitif bir reel sayı olsun. Yeteri kadar büyük n ler için,

$$\frac{e_1}{e_2^{s_n}} \le \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n - 1)\lambda}} \tag{4.24}$$

dır. Çünkü, sonsuz sayıda n için,

$$\frac{e_1}{e_2^{s_n}} > \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n - 1)\lambda}} \tag{4.25}$$

olsa; (4.25) i sağlayan n doğal sayılarının oluşturduğu doğal sayıların alt dizisini $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ ile gösterirsek,

$$\frac{e_1}{e_2^{s_{n_j}}} > \frac{1}{q_{n_j}^{r_{n_j}\left(\omega_{n_j} - 1\right)\lambda}} > 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

elde edilir. Bundan ve (4.6) dan,

$$\log e_1 - s_{n_j} \log e_2 > -r_{n_j}\left(\omega_{n_j} - 1\right)\lambda \log q_{n_j}$$

$$\Rightarrow \log e_1 + r_{n_j}\left(\omega_{n_j} - 1\right)\lambda \log q_{n_j} > s_{n_j} \log e_2$$

$$\Rightarrow \log e_1 + r_{n_j}\left(\frac{s_{n_j}}{r_{n_j} \log q_{n_j}} - 1\right)\lambda \log q_{n_j} > s_{n_j} \log e_2$$

$$\Rightarrow \log e_1 + \left(s_{n_j} - r_{n_j} \log q_{n_j}\right)\lambda > s_{n_j} \log e_2$$

$$\Rightarrow \frac{\log e_1}{s_{n_j}} + \left(1 - \frac{r_{n_j} \log q_{n_j}}{s_{n_j}}\right)\lambda > \log e_2$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty}\left(\frac{\log e_1}{s_{n_j}}+\left(1-\frac{r_{n_j}\log q_{n_j}}{s_{n_j}}\right)\lambda\right)\geq \lim_{j\to\infty}\log e_2$$

$$\Rightarrow\ \lambda \geq \log e_2 > 0 \qquad (e_2 > 1 \Rightarrow \log e_2 > 0).$$

O halde; λ, $0<\lambda<\log e_2$ olacak şekilde seçilirse (4.24) sağlanır.

Öte yandan, $0<\lambda<1$ için

$$\frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)}} \leq \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \tag{4.26}$$

eşitsizliği yeteri kadar büyük n ler için geçerlidir.

Sonuç olarak, λ reel sayısı, $0<\lambda<\min\left(1,\ \log e_2\right)$ olacak şekilde seçilirse; (4.14) ve (4.24) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F(\xi)-F_n(\xi)\right| \leq \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}}\ , \tag{4.27}$$

(4.23) ve (4.26) dan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \leq \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \tag{4.28}$$

bulunur. (4.10), (4.27) ve (4.28) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F(\xi)-\eta_n\right| \leq \frac{2}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \leq \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-2)\lambda}} \tag{4.29}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n=\infty,\ \ \lambda>0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\omega_n-2\right)\lambda\right)=\infty$ dur. $\left(\omega_n-2\right)\lambda=\gamma_n \quad (n=1,2,3,...)$ diyelim. O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F(\xi)-\eta_n\right| \leq \frac{1}{q_n^{r_n \gamma_n}} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty\right) \tag{4.30}$$

elde edilir.

4) (4.5) ten, $\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log A_h}{h} < \infty$ olduğundan $\left\{\frac{\log A_h}{h}\right\}_{h=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi, üstten sınırlıdır. O halde, $\exists \sigma > 0$ *reel sayısı* ; $\forall h = 1,2,3,...$ *için* $0 \leq \frac{\log A_h}{h} \leq \sigma$ dır. Buradan,

$$A_h \leq A^h \qquad (h = 1,2,3,...) \tag{4.31}$$

elde edilir. Burada $A = e^{\sigma} > 1$ dir (A; n, r_n, s_n, η_n, p_n *ve* q_n den bağımsız, pozitif reel sabit).

Yeteri kadar büyük n ler için,

$$\frac{1}{q_n^{r_n \gamma_n}} \leq \frac{1}{\left(A^{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}} \tag{4.32}$$

dir. Çünkü,

$$0 \leq \frac{1}{q_n^{r_n \gamma_n}} \leq \frac{1}{\left(A^{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}} \Leftrightarrow q_n^{r_n \gamma_n} \geq \left(A^{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}$$

$$\Leftrightarrow q_n^{\gamma_n} \geq A^{\frac{\gamma_n}{2}} q_n^{\frac{\gamma_n}{2}} . \tag{4.33}$$

(4.33) eşitsizliği, yeteri kadar büyük n ler için doğrudur. Çünkü, yeteri kadar büyük n ler için,

$$q_n^{\gamma_n} = \left(q_n^2\right)^{\frac{\gamma_n}{2}} = \left(q_n\, q_n\right)^{\frac{\gamma_n}{2}} = q_n^{\frac{\gamma_n}{2}} q_n^{\frac{\gamma_n}{2}} \geq A^{\frac{\gamma_n}{2}} q_n^{\frac{\gamma_n}{2}}$$

dir ($\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için, $q_n \geq A$ dır. Ayrıca yeteri kadar büyük n ler için $\gamma_n > 0$ dir. O halde, yeteri kadar büyük n ler için $q_n^{\frac{\gamma_n}{2}} \geq A^{\frac{\gamma_n}{2}}$ dir). Öyleyse, (4.33) ün eşdeğeri olan (4.32) eşitsizliği de yeteri kadar büyük n ler için doğrudur.

(4.31) den,

$$A_{r_n} \leq A^{r_n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{4.34}$$

elde edilir ($r_1 \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz, çünkü $r_1 = 0$ ise, (4.34) eşitsizliği $n = 2$ den başlatılır). (4.34) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\frac{1}{\left(A^{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}} \leq \frac{1}{\left(A_{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}} \tag{4.35}$$

bulunur. (4.30), (4.32) ve (4.35) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F(\xi) - \eta_n\right| \leq \frac{1}{\left(A_{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\frac{\gamma_n}{2}}} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty\right) \tag{4.36}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{2} = \infty$ dur. $\frac{\gamma_n}{2} = \theta_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ diyelim. O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$\left|F(\xi) - \eta_n\right| \leq \frac{1}{\left(A_{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\theta_n}} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty\right) \tag{4.37}$$

bulunur. $A_{r_n} q_n^{r_n} > 1$, $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty$ olduğundan $\left\{\frac{1}{\left(A_{r_n} q_n^{r_n}\right)^{\theta_n}}\right\}$, bir sıfır dizisidir.

Öyleyse, (4.37) den,

$$\left\{\left|F(\xi) - \eta_n\right|\right\}, \text{ bir sıfır dizisi} \tag{4.38}$$

olduğu elde edilir. Başka bir deyişle,

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = F(\xi) \tag{4.39}$$

dir.

5) $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ sıfır dizisi için aşağıdaki iki durumdan tam bir tanesi söz konusudur:

a) Belli bir n den itibaren $|F(\xi)-\eta_n|=0$ ise:

Bu durumda, belli bir n den itibaren $\eta_n = F(\xi)$ olur, yani $\{\eta_n\}$, bir sabit dizi olur ve aldığı değer de $F(\xi)$ dir. $\eta_n \in \mathbb{Q}$ $(n=1,2,3,...)$ olduğundan, bu durumda $F(\xi)$, bir rasyonel sayı olur.

b) Sonsuz sayıda $n\in\mathbb{N}$ için $|F(\xi)-\eta_n|\neq 0$ ise:

$|F(\xi)-\eta_n|\neq 0$ koşulunu sağlayan n doğal sayılarının oluşturduğu doğal sayıların alt dizisini $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ ile gösterip, (4.9) ve (4.37) yi kullanırsak, yeteri kadar büyük j ler için,

$$0<\left|F(\xi)-\frac{d_{n_j}}{A_{r_{n_j}} q_{n_j}^{r_{n_j}}}\right| \le \frac{1}{\left(A_{r_{n_j}} q_{n_j}^{r_{n_j}}\right)^{\theta_{n_j}}} \quad \left(d_{n_j}, A_{r_{n_j}} q_{n_j}^{r_{n_j}} \in \mathbb{Z};\ A_{r_{n_j}} q_{n_j}^{r_{n_j}} > 1;\ \lim_{j\to\infty} \theta_{n_j} = \infty\right) \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.40) tan, önce $F(\xi)$ reel sayısının bir irrasyonel sayı olduğu elde edilir. Teorem 2.1.3 ve (4.40) tan, $F(\xi)$ irrasyonel sayısının bir Liouville sayısı olduğu bulunur. O halde, b) durumunda $F(\xi)$, bir Liouville sayısı olur. Böylece, Teorem 4.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.1 in bir genelleştirilmiş halidir. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak, Teorem 4.1 de katsayıları $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminden alınmış, başka bir deyişle, katsayıları 1. dereceden bir cebirsel sayı cisminden alınmış bir genelleştirilmiş boşluk serisiyle çalıştık, Teorem 4.1 de katsayıları *m.* dereceden bir cebirsel sayı cisminden alınmış bir genelleştirilmiş boşluk serisiyle çalışırsak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2. $K = \mathbb{Q}(\theta)$, m. dereceden bir cebirsel sayı cismi; [4]

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h \qquad \left(c_h \in K;\ \ h = 0,1,2,\ldots\right);$$

$\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$0 = s_0 \le r_1 < s_1 \le r_2 < s_2 \le r_3 < s_3 \le \ldots \tag{4.41}$$

koşulunu sağlayan, negatif olmayan tam sayıların iki alt dizisi;

$$\begin{cases} c_h = 0, & r_n < h < s_n \quad (n = 1,2,3,\ldots), \\ c_h \ne 0, & h = r_n \quad (n = 1,2,3,\ldots), \\ c_h \ne 0, & h = s_n \quad (n = 0,1,2,\ldots); \end{cases} \tag{4.42}$$

$\sum_{h=0}^{\infty} \left|\overline{c_h}\right| z^h$ [5] kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$R > 0 \quad (R\text{, sonlu ya da sonsuz olabilir})\ ; \tag{4.43}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = \infty\,; \tag{4.44}$$

a_h $(h = 0,1,2,\ldots)$, $a_h\, c_h$ tam cebirsel sayı olacak şekilde uygun bir doğal sayı olmak üzere,

---

[4] Cebirsel sayı cisimleri, cebirsel sayılar ve tam cebirsel sayılar hakkında bilgi için LeVeque [9] ve Pollard [15] a bakınız.

[5] $\left|\overline{c_h}\right|$ notasyonu, c_h cebirsel sayısının $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşleniklerinin mutlak değerlerinin maksimumunu göstermektedir.

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\frac{\log A_h}{h}<\infty \qquad \left(A_h=\left[a_0,a_1,...,a_h\right];\;\; h=1,2,3,...\right)\;; \tag{4.45}$$

ξ,

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|\le\frac{1}{q_n^{r_n\omega_n}} \quad \left(p_n,q_n\in\mathbb{Z},\;\; q_n>1,\;\; \omega_n=\frac{s_n}{r_n\log q_n}\quad (n=1,2,3,...);\;\; \lim_{n\to\infty}\omega_n=\infty\right) \tag{4.46}$$

gibi bir yaklaşıma sahip bir Liouville sayısı (burada $r_1=0$ ise yaklaşım, $n=2$ den başlatılır) ve

$$|\xi|<R$$

olsun. Bu takdirde ya $F(\xi)$, K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayıdır ya da $F(\xi)\in\bigcup_{i=1}^{m}U_i$ dir.

İspat. $P_k(z)=\sum_{h=s_k}^{r_{k+1}}c_h z^h \quad (k=0,1,2,...)$ olmak üzere ($P_k(z)$, sıfır polinomdan farklı; $P_k(z)\in K[z]\subseteq\mathbb{C}[z]$), $F(z)$ genelleştirilmiş boşluk serisi, yakınsak olduğu $z\in\mathbb{C}$ ler için, (4.42) den dolayı,

$$F(z)=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z) \tag{4.47}$$

şeklinde yazılabilir.

Teoremin ispatını dört aşamada yapacağız:

1) $F(z)=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h$ genelleştirilmiş boşluk serisinin yakınsaklık yarıçapı $\ge R$ dir.

Çünkü $|c_h|\le\left|\overline{c_h}\right|$ $(h=0,1,2,...)$ olduğundan $\sum_{h=0}^{\infty}\left|\overline{c_h}\right| z^h$ serisinin yakınsak olduğu tüm $z\in\mathbb{C}$ ler için $F(z)$ de yakınsaktır. O halde, $z=\xi$ için $F(z)$, yakınsaktır ve $F(\xi)\in\mathbb{C}$ dir.

2) $F_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z) \quad (n=1,2,3,...)$ polinomlarını düşünelim ($F_n(z)$, sıfır polinomdan farklı; $F_n(z)\in K[z]\subseteq \mathbb{C}[z]$).

$$\eta_n = F_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=P_0\left(\frac{p_n}{q_n}\right)+P_1\left(\frac{p_n}{q_n}\right)+\cdots+P_{n-1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$$

$$=\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h \in K \qquad (n=1,2,3,...) \tag{4.48}$$

cebirsel sayılarını göz önüne alalım, $\eta_n \in K \quad (n=1,2,3,...)$ olduğundan $\partial\eta_n \le m \quad (n=1,2,3,...)$ dir.

$$\eta_n=\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h \qquad (n=1,2,3,...)$$

eşitliğinin her iki tarafını A_{r_n} doğal sayısı ile çarparsak,

$$A_{r_n}\eta_n-\sum_{h=s_0}^{r_n} A_{r_n}c_h\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h=0 \tag{4.49}$$

bulunur. $A_{r_n}c_h \quad (h=s_0,\ s_0+1,...,r_n)$, $K=\mathbb{Q}(\theta)$ cebirsel sayı cismine ait bir tam cebirsel sayıdır. Ayrıca, teoremin hipotezindeki $\theta\in K$ cebirsel sayısının bir tam cebirsel sayı olduğunu kabul edelim. $A_{r_n}c_h\in K=\mathbb{Q}(\theta)$ ve $K=\mathbb{Q}(\theta)$ nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki bir tabanı $\{1,\theta,...,\theta^{m-1}\}$ olduğundan,

$$A_{r_n}c_h=x_0^{(h)}+x_1^{(h)}\theta+\cdots+x_{m-1}^{(h)}\theta^{m-1} \qquad (h=s_0,...,r_n) \tag{4.50}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $x_0^{(h)},\ x_1^{(h)},...,\ x_{m-1}^{(h)}$ rasyonel sayıları vardır. Şimdi bu $x_0^{(h)},\ x_1^{(h)},...,\ x_{m-1}^{(h)}$ rasyonel sayılarını belirleyelim. (4.50) bağıntısında, K üzerindeki cisim eşleniklerine geçilirse,

$$\begin{cases} A_{r_n} c_h^{\{1\}} = x_0^{(h)} + x_1^{(h)} \theta^{\{1\}} + \cdots + x_{m-1}^{(h)} \left(\theta^{m-1}\right)^{\{1\}} \text{ [6]} \\ A_{r_n} c_h^{\{2\}} = x_0^{(h)} + x_1^{(h)} \theta^{\{2\}} + \cdots + x_{m-1}^{(h)} \left(\theta^{m-1}\right)^{\{2\}} \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ A_{r_n} c_h^{\{m\}} = x_0^{(h)} + x_1^{(h)} \theta^{\{m\}} + \cdots + x_{m-1}^{(h)} \left(\theta^{m-1}\right)^{\{m\}} \end{cases} \tag{4.51}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada bilinmeyenler $x_0^{(h)}, x_1^{(h)}, ..., x_{m-1}^{(h)}$ dır. (4.51) denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & ... & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & ... & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & ... & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & ... & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & ... & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Çünkü, $K = \mathbb{Q}(\theta)$ cebirsel sayı cisminin $\mathbb{Q}$ üzerindeki boyutu m ve θ, bir tam cebirsel sayı olduğundan

$$D(\theta) = \Delta^2(1, \theta, ..., \theta^{m-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & ... & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & ... & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}^2$$

diskriminantı [7] sıfırdan farklı bir tam sayıdır. O halde, (4.51) denklem sisteminin bir tek çözümü vardır:

---

[6] $K, m.$ dereceden bir cebirsel sayı cismi ve $\alpha \in K$ olsun. $\alpha^{\{i\}}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ notasyonu ile $\alpha \in K$ cebirsel sayısının K üzerindeki cisim eşlenikleri gösterilmektedir (cisim eşlenikleri hakkında bilgi için LeVeque [9] ve Pollard [15] a bakınız).

[7] $D(\theta)$ diskriminantı hakkında bilgi için LeVeque [9] ve Pollard [15] a bakınız.

$$x_0^{(h)} = \frac{\begin{vmatrix} A_{r_n} c_h^{\{1\}} & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ A_{r_n} c_h^{\{2\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ A_{r_n} c_h^{\{m\}} & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_{r_n} c_h^{\{1\}} & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ A_{r_n} c_h^{\{2\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ A_{r_n} c_h^{\{m\}} & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_{r_n} c_h^{\{1\}} & A_{r_n} c_h^{\{2\}} & \dots & A_{r_n} c_h^{\{m\}} \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_{r_n} c_h^{\{1\}} + \cdots + A_{r_n} c_h^{\{m\}} & A_{r_n} c_h^{\{1\}} \theta^{\{1\}} + \cdots + A_{r_n} c_h^{\{m\}} \theta^{\{m\}} & \ldots & A_{r_n} c_h^{\{1\}} (\theta^{m-1})^{\{1\}} + \cdots + A_{r_n} c_h^{\{m\}} (\theta^{m-1})^{\{m\}} \\ \theta^{\{1\}} + \cdots + \theta^{\{m\}} & \theta^{\{1\}} \theta^{\{1\}} + \cdots + \theta^{\{m\}} \theta^{\{m\}} & \ldots & \theta^{\{1\}} (\theta^{m-1})^{\{1\}} + \cdots + \theta^{\{m\}} (\theta^{m-1})^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} + \cdots + (\theta^{m-1})^{\{m\}} & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \theta^{\{1\}} + \cdots + (\theta^{m-1})^{\{m\}} \theta^{\{m\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} (\theta^{m-1})^{\{1\}} + \cdots + (\theta^{m-1})^{\{m\}} (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{D(\theta)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \left(A_{r_n} c_h\right)^{\{1\}} + \cdots + \left(A_{r_n} c_h\right)^{\{m\}} & \left(A_{r_n} c_h \theta\right)^{\{1\}} + \cdots + \left(A_{r_n} c_h \theta\right)^{\{m\}} & \ldots & \left(A_{r_n} c_h \theta^{m-1}\right)^{\{1\}} + \cdots + \left(A_{r_n} c_h \theta^{m-1}\right)^{\{m\}} \\ \theta^{\{1\}} + \cdots + \theta^{\{m\}} & \left(\theta^2\right)^{\{1\}} + \cdots + \left(\theta^2\right)^{\{m\}} & \ldots & (\theta^m)^{\{1\}} + \cdots + (\theta^m)^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} + \cdots + (\theta^{m-1})^{\{m\}} & (\theta^m)^{\{1\}} + \cdots + (\theta^m)^{\{m\}} & \ldots & (\theta^{2(m-1)})^{\{1\}} + \cdots + (\theta^{2(m-1)})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{D(\theta)}$$

$$=: \frac{\zeta_0'^{(h)}}{D(\theta)} .$$

$\zeta_0'^{(h)}$ determinantındaki bileşenlerin hepsi birer tam sayıdır. Çünkü K, *m.* dereceden bir cebirsel sayı cismi ve $\alpha \in K$, bir tam cebirsel sayı ise $\alpha^{\{1\}} + \cdots + \alpha^{\{m\}}$ bir tam sayıdır. O halde, $\zeta_0'^{(h)} \in \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla,

$$x_0^{(h)} = \frac{\zeta_0^{(h)}}{|D(\theta)|}, \qquad \zeta_0^{(h)} \in \mathbb{Z}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D(\theta)$, sıfırdan farklı bir tam sayı olduğundan $|D(\theta)| \in \mathbb{N}$ dir. $|D(\theta)| = D$ diyelim. D, sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlı sabit bir doğal sayıdır. O halde,

$$x_0^{(h)} = \frac{\zeta_0^{(h)}}{D}; \qquad \zeta_0^{(h)} \in \mathbb{Z}, \quad D \in \mathbb{N}$$

şeklindedir. Tamamen benzer şekilde,

$$x_1^{(h)} = \frac{\zeta_1^{(h)}}{D}; \qquad \zeta_1^{(h)} \in \mathbb{Z}, \quad D \in \mathbb{N}$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1}^{(h)} = \frac{\zeta_{m-1}^{(h)}}{D}; \qquad \zeta_{m-1}^{(h)} \in \mathbb{Z}, \quad D \in \mathbb{N}$$

bulunur. (4.50) den,

$$A_{r_n} c_h = \frac{\zeta_0^{(h)}}{D} + \frac{\zeta_1^{(h)}}{D}\theta + \cdots + \frac{\zeta_{m-1}^{(h)}}{D}\theta^{m-1} \qquad (h = s_0, ..., r_n) \tag{4.52}$$

elde edilir. (4.49) ve (4.52) den,

$$A_{r_n}\eta_n - \sum_{h=s_0}^{r_n}\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{\zeta_\mu^{(h)}}{D}\theta^\mu \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h = 0$$

$$\Rightarrow \; DA_{r_n}\eta_n - \sum_{h=s_0}^{r_n}\sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^{(h)}\theta^\mu \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h = 0 \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.53) ün her iki tarafını $q_n^{r_n}$ ile çarparsak,

$$\left(q_n^{r_n} DA_{r_n} \right)\eta_n - \sum_{h=s_0}^{r_n}\sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^{(h)} q_n^{r_n-h} p_n^h \theta^\mu = 0 \tag{4.54}$$

bulunur. $\zeta_\mu^{(h)}$ $(\mu = 0,1,...,m-1;\; h = s_0,...,r_n)$, $q_n^{r_n-h}$, p_n^h $(h = s_0,...,r_n)$ ve $q_n^{r_n} DA_{r_n}$ birer tam sayı olduğundan

$$L(y,x) := \left(q_n^{r_n} DA_{r_n} \right) y - \sum_{h=s_0}^{r_n}\sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^{(h)} q_n^{r_n-h} p_n^h x^\mu \tag{4.55}$$

tam katsayılı bir polinomdur ve

$$L(\eta_n,\theta)=0 \tag{4.56}$$

dır. $q_n^{r_n}DA_{r_n}\neq 0$ olduğundan $L(y,x)$ polinomunun y ye göre derecesi 1 dir. $L(y,x)$ in x e göre derecesine l_1 diyelim, $l_1\leq m-1$ dir. $L(y,x)\in\mathbb{Z}[y,x]$ polinomunun yüksekliğini H ile gösterirsek, Yardımcı Teorem 2.3.1 den dolayı,

$$H(\eta_n)\leq 3^{2m+l_1 m}\,H^m\,H(\theta)^{l_1 m}$$

$$\leq 3^{2m+(m-1)m}\,H^m\,H(\theta)^{(m-1)m}$$

$$\Rightarrow\quad H(\eta_n)\leq 3^{m(m+1)}\,H^m\,H(\theta)^{(m-1)m} \tag{4.57}$$

elde edilir. Şimdi $L(y,x)$ polinomunun H yüksekliğini üstten sınırlayalım. (4.55) ten,

$$H=\max\left(q_n^{r_n}DA_{r_n}\,,\,\left|\zeta_\mu^{(h)}\right|q_n^{r_n-h}\left|p_n^h\right|\right) \tag{4.58}$$
$$h=s_0,\dots,r_n$$
$$\mu=0,\dots,m-1$$

dır. ξ, bir Liouville sayısı olduğundan $p_n\neq 0$ $(n=1,2,3,\dots)$ olduğunu kabul edebiliriz (Sonuç 2.1.2 ve Not 2.1.3 e bakınız). O halde, $p_n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ olduğundan $|p_n|\geq 1$ dir. Ayrıca (4.46) dan $q_n>1$ $(n=1,2,3,\dots)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, (4.58) den,

$$H\leq\max\left(q_n^{r_n}DA_{r_n}\,,\,\left|\zeta_\mu^{(h)}\right|q_n^{r_n}\left|p_n\right|^{r_n}\right)$$
$$h=s_0,\dots,r_n$$
$$\mu=0,\dots,m-1$$

$$\leq\max\left(q_n^{r_n}\left|p_n\right|^{r_n}DA_{r_n}\,,\,\left|\zeta_\mu^{(h)}\right|q_n^{r_n}\left|p_n\right|^{r_n}\right)$$
$$h=s_0,\dots,r_n$$
$$\mu=0,\dots,m-1$$

$$= q_n^{r_n} \left| p_n \right|^{r_n} \max_{\substack{h = s_0, \dots, r_n \\ \mu = 0, \dots, m-1}} \left(DA_{r_n}, \left| \zeta_\mu^{(h)} \right| \right) \tag{4.59}$$

elde edilir. Şimdi ise $\left| \zeta_\mu^{(h)} \right|$ $(\mu = 0,1,\dots,m-1;\ h = s_0,\dots,r_n)$ yı üstten sınırlayalım. (4.52) den,

$$DA_{r_n} c_h = \zeta_0^{(h)} + \zeta_1^{(h)}\theta + \cdots + \zeta_{m-1}^{(h)}\theta^{m-1} \qquad (h = s_0,\dots,r_n) \tag{4.60}$$

dır.

$$DA_{r_n} c_h = \delta \tag{4.61}$$

diyelim. Burada $A_{r_n} c_h \in K$, bir tam cebirsel sayı, D de bir doğal sayı olduğundan $\delta \in K$, bir tam cebirsel sayıdır. (4.60) ve (4.61) den,

$$\delta = \zeta_0^{(h)} + \zeta_1^{(h)}\theta + \cdots + \zeta_{m-1}^{(h)}\theta^{m-1} \qquad (h = s_0,\dots,r_n) \tag{4.62}$$

olur. (4.62) de K üzerindeki cisim eşleniklerine geçersek,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^{\{1\}} = \zeta_0^{(h)} + \zeta_1^{(h)}\theta^{\{1\}} + \cdots + \zeta_{m-1}^{(h)}\left(\theta^{m-1}\right)^{\{1\}} \\ \delta^{\{2\}} = \zeta_0^{(h)} + \zeta_1^{(h)}\theta^{\{2\}} + \cdots + \zeta_{m-1}^{(h)}\left(\theta^{m-1}\right)^{\{2\}} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \delta^{\{m\}} = \zeta_0^{(h)} + \zeta_1^{(h)}\theta^{\{m\}} + \cdots + \zeta_{m-1}^{(h)}\left(\theta^{m-1}\right)^{\{m\}} \end{array} \right. \tag{4.63}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Burada bilinmeyenler $\zeta_0^{(h)}, \zeta_1^{(h)}, \dots, \zeta_{m-1}^{(h)}$ dır. (4.63) denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan (4.63) lineer denklem sisteminin bir tek çözümü vardır:

$$\zeta_0^{(h)} = \frac{\begin{vmatrix} \delta^{\{1\}} & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ \delta^{\{2\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ \delta^{\{m\}} & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ 1 & \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . & . \\ 1 & \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\delta^{\{1\}} \begin{vmatrix} \theta^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . & . \\ \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} - \delta^{\{2\}} \begin{vmatrix} \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ \theta^{\{3\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{3\}} \\ . & . & . \\ \theta^{\{m\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{m+1} \delta^{\{m\}} \begin{vmatrix} \theta^{\{1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ . & . & . \\ \theta^{\{m-1\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m-1\}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & \dots & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & \dots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \zeta_0^{(h)} = \frac{\delta^{\{1\}} \Delta_{01} + \delta^{\{2\}} \Delta_{02} + \cdots + \delta^{\{m\}} \Delta_{0m}}{\Delta}$$

$$= \frac{\Delta_{01}}{\Delta} \delta^{\{1\}} + \frac{\Delta_{02}}{\Delta} \delta^{\{2\}} + \cdots + \frac{\Delta_{0m}}{\Delta} \delta^{\{m\}}$$

$$\Rightarrow \quad \zeta_0^{(h)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{0j}}{\Delta} \delta^{\{j\}}$$

bulunur. Burada $\Delta_{01} = \begin{vmatrix} \theta^{\{2\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{2\}} \\ . & . \; . \; . \; . & . \\ \theta^{\{m\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}$, $\Delta_{02} = -\begin{vmatrix} \theta^{\{1\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ \theta^{\{3\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{3\}} \\ . & . \; . \; . \; . & . \\ \theta^{\{m\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}, \ldots,$

$$\Delta_{0m} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} \theta^{\{1\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{1\}} \\ . & . \; . \; . \; . & . \\ \theta^{\{m-1\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{m-1\}} \end{vmatrix} \quad ve \ \Delta = \Delta(1, \theta, \ldots, \theta^{m-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \theta^{\{1\}} & \theta^{\{2\}} & \ldots & \theta^{\{m\}} \\ . & . & . & . \\ (\theta^{m-1})^{\{1\}} & (\theta^{m-1})^{\{2\}} & \ldots & (\theta^{m-1})^{\{m\}} \end{vmatrix}$$

kompleks sayıları sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlıdır; δ, n ve h ya bağlı değildir. Tamamen benzer şekilde,

$$\zeta_1^{(h)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{1j}}{\Delta} \delta^{\{j\}}$$

$$\vdots$$

$$\zeta_{m-1}^{(h)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{m-1,\,j}}{\Delta} \delta^{\{j\}}$$

bulunur. O halde,

$$\zeta_\mu^{(h)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{\mu j}}{\Delta} \delta^{\{j\}} \qquad \left(\mu = 0,1,\ldots,m-1;\; h \in \{ s_0,\ldots,r_n \} \right) \tag{4.64}$$

şeklindedir. Burada $\Delta_{\mu j}$ $(\mu = 0,1,\ldots,m-1;\; j = 1,\ldots,m)$ ve Δ, sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlıdır; δ, n ve h dan bağımsızdır. (4.64) ten,

$$\left|\zeta_{\mu}^{(h)}\right| = \left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta_{\mu j}}{\Delta}\delta^{\{j\}}\right| \le \sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|}\left|\delta^{\{j\}}\right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|}\left|\overline{\delta}\right| = \left|\overline{\delta}\right| \sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|} \le \left|\overline{\delta}\right| \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|} \tag{4.65}$$

elde edilir. (4.61) den,

$$\left|\overline{\delta}\right| \le \left|\overline{DA_{r_n}}\right| \left|\overline{c_h}\right| = DA_{r_n}\left|\overline{c_h}\right| \qquad \left(h\in\{s_0,...,r_n\}\right) \tag{4.66}$$

dır. (4.65) ve (4.66) dan,

$$\left|\zeta_{\mu}^{(h)}\right| \le DA_{r_n}\left|\overline{c_h}\right| \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|} = \left(D\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|}\right)A_{r_n}\left|\overline{c_h}\right| \tag{4.67}$$

bulunur.

$$D\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|} = \overline{C}(K) \tag{4.68}$$

diyelim. $\overline{C}(K)$, sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlı olan pozitif bir reel sabittir. $\overline{C}(K)$; n, h ve μ den bağımsızdır. Çünkü D ve $\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left|\Delta_{\mu j}\right|}{\left|\Delta\right|}$, sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlı olan pozitif reel sayılardır. O halde, (4.67) ve (4.68) den,

$$\left|\zeta_{\mu}^{(h)}\right| \le \overline{C}(K)\,A_{r_n}\left|\overline{c_h}\right| \qquad \left(\mu=0,1,...,m-1;\ h=s_0,...,r_n\right) \tag{4.69}$$

elde edilir. (4.59) ve (4.69) dan,

$$H \le q_n^{r_n}\left|p_n\right|^{r_n} \max_{h=s_0,...,r_n}\left(DA_{r_n},\ \overline{C}(K)\,A_{r_n}\left|\overline{c_h}\right|\right) \tag{4.70}$$

bulunur.

$$\max(D, \overline{C}(K)) = C(K) \tag{4.71}$$

diyelim. $C(K) \geq 1$, sadece θ ve θ nın eşleniklerine bağlı olan pozitif bir reel sabittir. $C(K)$, h ve n den bağımsızdır. O halde, (4.70) ve (4.71) den,

$$H \leq q_n^{r_n} \left|p_n\right|^{r_n} C(K) A_{r_n} \max_{h=s_0,\ldots,r_n}\left(1, \left|\overline{c_h}\right|\right) \tag{4.72}$$

elde edilir. Şimdi (4.57) ye geri dönelim. (4.57) ve (4.72) den,

$$H(\eta_n) \leq 3^{m(m+1)} q_n^{r_n m} \left|p_n\right|^{r_n m} C(K)^m A_{r_n}^m \left(\max_{h=s_0,\ldots,r_n}\left(1, \left|\overline{c_h}\right|\right)\right)^m H(\theta)^{(m-1)m} \tag{4.73}$$

bulunur.

$$0 < |\xi| < \rho < R \tag{4.74}$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ reel sayısı alalım ($R = \infty$ ise $\rho > |\xi|$ olacak şekilde bir $\rho > 0$ reel sayısı almak yeterlidir). (4.43) den dolayı, $\sum_{h=0}^{\infty} \left|\overline{c_h}\right| \rho^h$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla, $\lim_{h\to\infty}\left(\left|\overline{c_h}\right| \rho^h\right) = 0$ dır. Her yakınsak dizi sınırlı olduğundan $\left\{\left|\overline{c_h}\right| \rho^h\right\}_{h=0}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır. O halde, $\exists M > 0$ *reel sayısı*; $\forall h = 0,1,2,\ldots$ *için* $\left|\overline{c_h}\right| \rho^h \leq M$ dir. Öyleyse,

$$\left|\overline{c_h}\right| \leq \frac{M}{\rho^h} \qquad (h = 0,1,2,\ldots) \tag{4.75}$$

elde edilir. (4.75) ten,

$$\max_{h=s_0,\dots,r_n}\left(1,\ \left|\overline{c_h}\right|\right) \le \max_{h=s_0,\dots,r_n}\left(1,\ \frac{M}{\rho^h}\right) \le \max_{h=s_0,\dots,r_n}\left(M_1,\ \frac{M_1}{\rho^h}\right) = M_1 \max_{h=s_0,\dots,r_n}\left(1,\ \frac{1}{\rho^h}\right)$$

$$= M_1\left(\max\left(1,\frac{1}{\rho}\right)\right)^{r_n} \tag{4.76}$$

bulunur. Burada $M_1 = \max(1, M) \ge 1$ dir. (4.45) ten dolayı, $\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{\log A_h}{h} < \infty$ olduğundan $\left\{\frac{\log A_h}{h}\right\}_{h=1}^{\infty}$ dizisi üstten sınırlıdır. O halde,

$$\exists \sigma > 0 \quad reel \quad sayısı\ ; \quad \forall h = 1,2,3,\dots \quad için \quad \frac{\log A_h}{h} \le \sigma \tag{4.77}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\log A_{r_n}}{r_n} \le \sigma \qquad (n = 2,3,\dots) \tag{4.78}$$

$$\Rightarrow \quad A_{r_n} \le e^{\sigma r_n} \qquad (n = 2,3,\dots) \tag{4.79}$$

elde edilir. (4.73), (4.76) ve (4.79) dan,

$$H(\eta_n) \le 3^{m(m+1)}\ q_n^{r_n m}\ |p_n|^{r_n m}\ C(K)^m\ e^{\sigma r_n m}\ M_1^m \left(\max\left(1,\frac{1}{\rho}\right)\right)^{r_n m} H(\theta)^{(m-1)m}$$

$$\le 3^{r_n m(m+1)}\ C(K)^{r_n m}\ e^{\sigma r_n m}\ M_1^{r_n m}\left(\max\left(1,\frac{1}{\rho}\right)\right)^{r_n m} H(\theta)^{r_n(m-1)m}\ q_n^{r_n m}\ |p_n|^{r_n m} \qquad (n \ge 2)$$

$$\le e_0^{r_n m} q_n^{r_n m}\ |p_n|^{r_n m} \qquad (n = 2,3,\dots) \tag{4.80}$$

elde edilir. Burada $e_0 = 3^{(m+1)} C(K)\ e^{\sigma} M_1 \max\left(1,\frac{1}{\rho}\right) H(\theta)^{(m-1)} > 1$; $n,\ r_n,\ s_n,\ \eta_n,\ p_n\ ve\ q_n$ den bağımsız pozitif bir reel sabittir. Öte yandan ξ, bir Liouville sayısı olduğundan $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ olduğunu kabul edebiliriz

(Sonuç 2.1.2 ve Not 2.1.3 e bakınız). O halde, yeteri kadar büyük n ler için, $e_0 \leq q_n$ dir. Bundan ve (4.80) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$H(\eta_n) \leq q_n^{2r_n m} \, |p_n|^{r_n m} \tag{4.81}$$

bulunur. (4.46) dan dolayı,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right| - |\xi| \leq \left| |\xi| - \left|\frac{p_n}{q_n}\right| \right| \leq \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}} < 1$$

olup, buradan

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right| < |\xi| + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.82}$$

olur, (4.82) den de

$$|p_n| < q_n \left(|\xi| + 1 \right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.83}$$

elde edilir. (4.81) ve (4.83) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$H(\eta_n) \leq q_n^{3r_n m} \left(|\xi| + 1 \right)^{r_n m}$$

bulunur. Yine, yeteri kadar büyük n ler için $|\xi| + 1 \leq q_n$ olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$H(\eta_n) \leq q_n^{4r_n m} \tag{4.84}$$

olur. O halde, yeteri kadar büyük n ler için,

$$H(\eta_n) \leq q_n^{e_1 r_n} \tag{4.85}$$

elde edilir. Burada $e_1 = 4m > 1$ dir.

3) $\left|F(\xi)-\eta_n\right| \le \left|F(\xi)-F_n(\xi)\right| + \left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \qquad (n=1,2,3,...)$ (4.86)

dir. Şimdi $\left|F(\xi)-F_n(\xi)\right|$ ve $\left|F_n(\xi)-\eta_n\right|$ için birer üst sınır belirleyelim.

$$\left|F(\xi)-F_n(\xi)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\xi)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} P_k(\xi)\right|$$

$$= \left|\sum_{h=s_n}^{\infty} c_h\, \xi^h\right| \le \sum_{h=s_n}^{\infty} \left|c_h\right| \left|\xi\right|^h \le \sum_{h=s_n}^{\infty} \left|\overline{c_h}\right| \left|\xi\right|^h \tag{4.87}$$

dir. (4.74), (4.75) ve (4.87) den,

$$\left|F(\xi)-F_n(\xi)\right| \le \sum_{h=s_n}^{\infty} \frac{M}{\rho^h} \left|\xi\right|^h = M \sum_{h=s_n}^{\infty} \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^h$$

$$= M\left(\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n} + \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n+1} + \left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n+2} + \cdots\right) = M\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n}\left(1+\frac{|\xi|}{\rho}+\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^2+\cdots\right)$$

$$= M\left(\frac{|\xi|}{\rho}\right)^{s_n} \frac{1}{1-\frac{|\xi|}{\rho}} = \frac{\dfrac{M}{1-\frac{|\xi|}{\rho}}}{\left(\dfrac{\rho}{|\xi|}\right)^{s_n}} \qquad (n=1,2,3,...)$$

$$\left((4.74) \Rightarrow\ 0<\left|\xi\right|<\rho<R \Rightarrow\ 0<\frac{|\xi|}{\rho}<1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left|F(\xi)-F_n(\xi)\right| \le \frac{e_2}{e_3^{s_n}} \qquad (n=1,2,3,...) \tag{4.88}$$

elde edilir. Burada $e_2 = \dfrac{M}{1-\frac{|\xi|}{\rho}} > 0, \quad e_3 = \dfrac{\rho}{|\xi|} > 1$ pozitif reel sabitlerdir

(e_2 *ve* e_3; $n,\ r_n,\ s_n,\ \eta_n,\ p_n$ *ve* q_n den bağımsızdır).

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} P_k(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| = \left|\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h\, \xi^h - \sum_{h=s_0}^{r_n} c_h \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right|$$

$$= \left|\sum_{h=s_0}^{r_n} c_h \left(\xi^h - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right)\right| \le \sum_{h=s_0}^{r_n} \left|c_h\right| \left|\xi^h - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^h\right|$$

$$\le \sum_{h=s_0}^{r_n} \left|c_h\right| \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \left|\xi^{h-1} + \xi^{h-2}\,\frac{p_n}{q_n} + \cdots + \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{h-1}\right|$$

$$\le \sum_{h=s_0}^{r_n} \left|\overline{c_h}\right| \; \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| \; \left(\left|\xi\right|^{h-1} + \left|\xi\right|^{h-2}\left|\frac{p_n}{q_n}\right| + \cdots + \left|\frac{p_n}{q_n}\right|^{h-1}\right) \qquad (4.89)$$

dir. (4.75) ten,

$$\left|\overline{c_h}\right| \le \frac{M}{\rho^h} \le M\,B^h \le M_1\,B^h \qquad (h = 0,1,2,...) \qquad (4.90)$$

bulunur. Burada $B = \max\left(1, \dfrac{1}{\rho}\right) \ge 1$, $M_1 = \max(1, M) \ge 1$ dir. (4.46), (4.82), (4.89), (4.90) ve $\left|\xi\right| < \left|\xi\right| + 1$ olmasından dolayı,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \sum_{h=s_0}^{r_n} M_1 B^h\, \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}}\; h\,\left(\left|\xi\right|+1\right)^{h-1} \le \sum_{h=s_0}^{r_n} M_1^{r_n} B^{r_n}\, \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}}\; r_n\,\left(\left|\xi\right|+1\right)^{r_n}$$

$$= \left(r_n + 1\right)\, M_2^{r_n}\, \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}}\; r_n\,\left(\left|\xi\right|+1\right)^{r_n} \qquad (4.91)$$

dir. Burada $M_2 = M_1 B \ge 1$ dir. (4.91) den,

$$\left|F_n(\xi)-\eta_n\right| \le \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}} \left(r_n + 1\right)^2\, M_2^{r_n} \left(\left|\xi\right|+1\right)^{r_n} \qquad (4.92)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[r_n]{r_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[r_n]{r_n + 1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[r_n]{(r_n+1)^2} = 1$$

$\Rightarrow\ \exists e_4 > 1$ reel sayısı; yeteri kadar büyük n ler için

$$(r_n+1)^2 \le e_4^{r_n} \tag{4.93}$$

dir. (4.92) ve (4.93) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F_n(\xi) - \eta_n| \le \frac{1}{q_n^{r_n \omega_n}}\, e_4^{r_n} M_2^{r_n} \left(|\xi|+1\right)^{r_n} = \frac{e_5^{r_n}}{q_n^{r_n \omega_n}} \tag{4.94}$$

bulunur. Burada $e_5 = e_4 M_2 \left(|\xi|+1\right) > 1$ dir (e_5; n, r_n, s_n, η_n, p_n *ve* q_n den bağımsız, pozitif reel sabit). Öte yandan, $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ olduğundan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$e_5 \le q_n \tag{4.95}$$

dir. (4.94) ve (4.95) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F_n(\xi) - \eta_n| \le \frac{q_n^{r_n}}{q_n^{r_n \omega_n}} = \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n - 1)}} \tag{4.96}$$

elde edilir. Şimdi (4.88) e geri dönelim.

λ, değeri daha sonra açıklanacak pozitif bir reel sayı olsun. Yeteri kadar büyük n ler için,

$$\frac{e_2}{e_3^{s_n}} \le \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n - 1)\lambda}} \tag{4.97}$$

dır. Çünkü, sonsuz sayıda n için,

$$\frac{e_2}{e_3^{s_n}} > \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n - 1)\lambda}} \tag{4.98}$$

olsa; (4.98) i sağlayan n doğal sayılarının oluşturduğu doğal sayıların alt dizisini $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ ile gösterirsek,

$$\frac{e_2}{e_3^{s_{n_j}}} > \frac{1}{q_{n_j}^{r_{n_j}\left(\omega_{n_j}-1\right)\lambda}} > 0 \qquad (j=1,2,3,\ldots)$$

elde edilir. Bundan ve (4.46) dan,

$$\log e_2 - s_{n_j}\log e_3 > -r_{n_j}\left(\omega_{n_j}-1\right)\lambda\,\log q_{n_j}$$

$$\Rightarrow\ \log e_2 + r_{n_j}\left(\omega_{n_j}-1\right)\lambda\,\log q_{n_j} > s_{n_j}\log e_3$$

$$\Rightarrow\ \log e_2 + r_{n_j}\left(\frac{s_{n_j}}{r_{n_j}\log q_{n_j}}-1\right)\lambda\,\log q_{n_j} > s_{n_j}\log e_3$$

$$\Rightarrow\ \log e_2 + \left(s_{n_j} - r_{n_j}\log q_{n_j}\right)\lambda > s_{n_j}\log e_3$$

$$\Rightarrow\ \frac{\log e_2}{s_{n_j}} + \left(1-\frac{r_{n_j}\log q_{n_j}}{s_{n_j}}\right)\lambda > \log e_3$$

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty}\left(\frac{\log e_2}{s_{n_j}} + \left(1-\frac{r_{n_j}\log q_{n_j}}{s_{n_j}}\right)\lambda\right) \geq \lim_{j\to\infty}\log e_3$$

$$\Rightarrow\ \lambda \geq \log e_3 > 0 \qquad (\ e_3 > 1 \Rightarrow \log e_3 > 0\ ).$$

O halde; λ, $0<\lambda<\log e_3$ olacak şekilde seçilirse (4.97) sağlanır.

Öte yandan, $0<\lambda<1$ için,

$$\frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)}} \leq \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \tag{4.99}$$

eşitsizliği yeteri kadar büyük n ler için geçerlidir.

Sonuç olarak, λ reel sayısı, $0<\lambda<\min(1,\ \log e_3)$ olacak şekilde seçilirse; (4.96) ve (4.99) dan, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F_n(\xi)-\eta_n| \le \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}}, \tag{4.100}$$

(4.88) ve (4.97) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F(\xi)-F_n(\xi)| \le \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \tag{4.101}$$

bulunur. (4.86), (4.100) ve (4.101) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F(\xi)-\eta_n| \le \frac{2}{q_n^{r_n(\omega_n-1)\lambda}} \le \frac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-2)\lambda}} \tag{4.102}$$

elde edilir. $\left\{\dfrac{1}{q_n^{r_n(\omega_n-2)\lambda}}\right\}$, bir sıfır dizisi olduğundan ve (4.102) den,

$$\{|F(\xi)-\eta_n|\}, \text{ bir sıfır dizisi} \tag{4.103}$$

dir. Başka bir deyişle,

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n = F(\xi) \tag{4.104}$$

dir. (4.85) ve (4.102) den, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F(\xi)-\eta_n| \le \frac{1}{H(\eta_n)^{\frac{(\omega_n-2)\lambda}{e_1}}} \tag{4.105}$$

olur. $\dfrac{(\omega_n-2)\lambda}{e_1}=\gamma_n \quad (n=1,2,3,\ldots)$ diyelim. O halde, (4.105) ten, yeteri kadar büyük n ler için,

$$|F(\xi)-\eta_n| \le \frac{1}{H(\eta_n)^{\gamma_n}} \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\infty\right) \ . \tag{4.106}$$

4) $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ sıfır dizisi için aşağıdaki iki durumdan tam bir tanesi söz konusudur:

a) Belli bir n den itibaren $|F(\xi)-\eta_n|=0$ ise:

Bu durumda, belli bir n den itibaren $\eta_n = F(\xi)$ olur, yani $\{\eta_n\}$, bir sabit dizi olur ve aldığı değer de $F(\xi)$ dir. $\eta_n \in K$ $(n=1,2,3,...)$ olduğundan, bu durumda $F(\xi)\in K$ olur. Yani a) durumunda $F(\xi)$, K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayıdır.

b) Sonsuz sayıda $n\in\mathbb{N}$ için $|F(\xi)-\eta_n|\neq 0$ ise:

Bu durumda, $\{\eta_n\}$ cebirsel sayı dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi vardır. Çünkü, $\{\eta_n\}$ dizisinin birbirinden farklı sonlu sayıda terimi olsa, bu durumda $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ dizisinin de birbirinden farklı sonlu sayıda terimi olur. Sonsuz sayıda $n\in\mathbb{N}$ için $|F(\xi)-\eta_n|\neq 0$ olduğundan $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ dizisinde sıfırdan farklı en az bir terim vardır. O halde, $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ dizisinin birbirinden ve sıfırdan farklı sadece sonlu sayıda terimi olur. $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$ dizisindeki birbirinden ve sıfırdan farklı olan bu sonlu sayıdaki değeri $u_1,u_2,...,u_t$ $(t\geq 1)$ ile gösterelim ($u_1,u_2,...,u_t\in\mathbb{R}$; $u_1\neq 0, u_2\neq 0,...,u_t\neq 0 \Rightarrow u_1>0,\ u_2>0,...,u_t>0$; $i\neq j \Rightarrow u_i\neq u_j$, $i,j\in\{1,2,...,t\}$). $\min(u_1,u_2,...,u_t)=c$ diyelim, $c>0$ bir reel sayıdır. Öte yandan, herhangi bir n doğal sayısı için

$$\text{ya } |F(\xi)-\eta_n|=0 \text{ dır ya da } |F(\xi)-\eta_n|\neq 0 \Rightarrow |F(\xi)-\eta_n|\geq c \tag{4.107}$$

dir. Oysaki, $\{|F(\xi)-\eta_n|\}$, bir sıfır dizisi olduğundan

$$\exists n_0\in\mathbb{N};\quad \forall n\geq n_0 \quad \textit{için} \quad |F(\xi)-\eta_n|<c \tag{4.108}$$

dir. Sonsuz sayıda $n\in\mathbb{N}$ için $|F(\xi)-\eta_n|\neq 0$ olduğundan $\left|F(\xi)-\eta_{\bar{n}}\right|\neq 0$ olacak şekilde bir $\bar{n}>n_0$ doğal sayısı vardır. (4.107) den dolayı, $\left|F(\xi)-\eta_{\bar{n}}\right|\geq c$ elde edilir.

Bu ise, (4.108) ile çelişir. O halde, $\{\eta_n\}$ cebirsel sayı dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda terimi vardır.

η_n cebirsel sayılarının yüksekliklerinin oluşturduğu $\{H(\eta_n)\}$ doğal sayı dizisi, üstten sınırsızdır. Çünkü, $\{H(\eta_n)\}$ dizisi, üstten sınırlı olsa;

$$\exists M_3 > 0 \text{ } \textit{reel sayısı}; \ \forall n = 1, 2, 3, ... \text{ } \textit{için} \quad H(\eta_n) \le M_3$$

olur. Öte yandan, $\partial\eta_n \le m \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\{\eta_n\}$ dizisinin birbirinden farklı sonlu sayıda terimi olur ($H(\alpha) \le M_3$, $\partial\alpha \le m$ olacak şekilde birbirinden farklı sadece sonlu sayıda α cebirsel sayısı vardır). Bu ise, $\{\eta_n\}$ dizisinin birbirinden farklı sonsuz sayıda teriminin olmasıyla çelişir. O halde, $\{H(\eta_n)\}$ dizisi, üstten sınırsızdır. Dolayısıyla, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} H(\eta_n) = \infty$ dur. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} H(\eta_n) = \infty$ olduğundan $\{H(\eta_n)\}$ doğal sayı dizisinin

$$1 < H(\eta_{n_1}) < H(\eta_{n_2}) < H(\eta_{n_3}) < ... \ , \quad \lim_{j\to\infty} H(\eta_{n_j}) = \infty \tag{4.109}$$

olacak şekilde bir $\left\{H(\eta_{n_j})\right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. (4.109) dan dolayı, $\left\{\eta_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin tüm terimleri birbirinden farklıdır ($i \ne j \Rightarrow \eta_{n_i} \ne \eta_{n_j}$). O halde, $\left\{\eta_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinde $F(\xi)$ ye eşit olan en fazla bir terim olabilir. η_{n_j} $(j = 1, 2, 3, ...)$ terimleri arasında $F(\xi)$ ye eşit olan bir terim varsa, yani bir $j_0 \in \mathbb{N}$ için $\eta_{n_{j_0}} = F(\xi)$ ise; $\left\{\eta_{n_j}\right\}$ dizisinden baştaki sonlu sayıdaki $\eta_{n_1}, \eta_{n_2}, ..., \eta_{n_{j_0}}$ terimlerini atıp, $\left\{\eta_{n_j}\right\}$ dizisini tekrar numaralandırırsak $\left(j_0 + 1 \to 1, \ j_0 + 2 \to 2, ...\right)$, artık $\left\{\eta_{n_j}\right\}$ dizisinin tüm terimleri $F(\xi)$ den farklı olur. Toparlayacak olursak, $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ cebirsel sayı dizisinin $\left\{\eta_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ alt dizisi aşağıdaki özellikleri gerçekler:

i) $\eta_{n_j} \neq F(\xi) \quad (j=1,2,3,...)$,

ii) $1 < H(\eta_{n_1}) < H(\eta_{n_2}) < H(\eta_{n_3}) < ... \ , \quad \lim_{j\to\infty} H(\eta_{n_j}) = \infty$,

iii) $\eta_{n_j} \in K \ \ (j=1,2,3,...) \ \Rightarrow \ \partial\eta_{n_j} \leq m \quad (j=1,2,3,...)$.

(4.106) dan ve i) den, yeteri kadar büyük j ler için,

$$0 < \left| F(\xi) - \eta_{n_j} \right| \leq \frac{1}{H(\eta_{n_j})^{\gamma_{n_j}}} \qquad \left(\lim_{j\to\infty} \gamma_{n_j} = \infty \right) \tag{4.110}$$

elde edilir. $H(\eta_{n_j}) = H_j \quad (j=1,2,3,...)$ diyelim. ii) den dolayı, $\left\{ H_j \right\}_{j=1}^{\infty}$, doğal sayıların kesin artan bir alt dizisidir. i), ii), iii) ve (4.110) dan,

$$w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right) = \min_{\substack{\alpha,\, cebirsel;\ \alpha \neq F(\xi) \\ \partial\alpha \leq m,\ H(\alpha) \leq H_j}} \left| F(\xi) - \alpha \right| \ \leq \left| F(\xi) - \eta_{n_j} \right| \leq \frac{1}{H(\eta_{n_j})^{\gamma_{n_j}}} = \frac{1}{H_j^{\gamma_{n_j}}}$$

$$\Rightarrow \ 0 < w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right) \leq \frac{1}{H_j^{\gamma_{n_j}}} \qquad \text{(yeteri kadar büyük } j \text{ ler için)}$$

$$\Rightarrow \ 0 < H_j\, w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right) \leq \frac{1}{H_j^{\gamma_{n_j}-1}} \qquad \text{(yeteri kadar büyük } j \text{ ler için)}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{H_j\, w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right)} \geq H_j^{\gamma_{n_j}-1} > 0 \qquad \text{(yeteri kadar büyük } j \text{ ler için)}$$

$$\Rightarrow \ \frac{\log \dfrac{1}{H_j\, w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right)}}{\log H_j} \geq \gamma_{n_j} - 1 \qquad \text{(yeteri kadar büyük } j \text{ ler için)}$$

$$\overset{\lim_{j\to\infty} \gamma_{n_j} = \infty}{\Rightarrow} \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{\log \dfrac{1}{H_j\, w_m^*\left(H_j,\, F(\xi)\right)}}{\log H_j} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\lim_{H\to\infty}} \frac{\log \dfrac{1}{H\, w_m^*\left(H,\, F(\xi)\right)}}{\log H} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad w_m^*\left(F(\xi)\right) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad F(\xi) \in U^* \quad ve \quad \mu^*\left(F(\xi)\right) \le m$$

$$\Rightarrow \quad F(\xi) \in \bigcup_{i=1}^{m} U_i^* \quad . \tag{4.111}$$

$U_i = U_i^*$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ olduğundan (4.111) den, $F(\xi) \in \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ elde edilir, yani b) durumunda $F(\xi) \in \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ dir. Böylece, Teorem 4.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1, Teorem 4.2 nin bir özel halidir. Teorem 4.2 de $m = 1$ alınırsa Teorem 4.1 elde edilir.

Örnek 4.1. $s_0 = 0,\quad s_n = \left((n+2)!\right)^{(n+2)!} \quad (n = 1, 2, 3, ...),$

$$r_n = 2\left((n+1)!\right)^{(n+1)!} \qquad (n = 1, 2, 3, ...),$$

$$\begin{cases} c_h = 0, & r_n < h < s_n \quad (n = 1, 2, 3, ...), \\ c_h = 1, & s_n \le h \le r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, ...), \end{cases}$$

olmak üzere $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ serisi ve $\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a^{r_\nu}}$ $\left(a \ge 3,\ bir\ tam\ sayı\right)$ Liouville sayısı Teorem 4.1 in koşullarını sağlar

$$\left(\frac{p_n}{q_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a^{r_\nu}} = \frac{a^{r_n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a^{r_\nu}}}{a^{r_n}}, \quad p_n = a^{r_n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{a^{r_\nu}}, \quad q_n = a^{r_n} > 1 \quad (n = 1, 2, 3, ...) \right).$$

Dolayısıyla $F(\xi)$, ya bir rasyonel sayıdır ya da bir Liouville sayısıdır.

Örnek 4.2. $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt[m]{p}\right)$ $\left(p\geq 2,\ bir\ asal\ say\imath;\ m\geq 2\right)$ (K, m. dereceden bir cebirsel sayı cismidir),

$$s_0=0,\qquad s_n=\left((n+2)!\right)^{(n+2)!}\qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

$$r_n=2\left((n+1)!\right)^{(n+1)!}\qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

$$\begin{cases} c_h=0, & r_n<h<s_n \quad (n=1,2,3,\ldots),\\ c_h=\sqrt[m]{p}, & s_n\leq h\leq r_{n+1} \quad (n=0,1,2,\ldots),\end{cases}$$

olmak üzere $F(z)=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h$ serisi ve $\xi=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a^{r_\nu}}$ $\left(a\geq 3,\ bir\ tam\ say\imath\right)$ Liouville sayısı Teorem 4.2 nin koşullarını sağlar

$$\left(\frac{p_n}{q_n}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a^{r_\nu}}=\frac{a^{r_n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a^{r_\nu}}}{a^{r_n}},\quad p_n=a^{r_n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a^{r_\nu}},\quad q_n=a^{r_n}>1\qquad (n=1,2,3,\ldots)\right).$$

Dolayısıyla ya $F(\xi)$, K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayıdır ya da $F(\xi)\in\bigcup_{i=1}^{m}U_i$ dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak, rasyonel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya bir rasyonel sayı ya da bir Liouville sayısı olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.1). Daha sonra, bu teorem genelleştirilerek, katsayıları m. dereceden bir K cebirsel sayı cisminden alınmış cebirsel katsayılı bazı genelleştirilmiş boşluk serilerinin, bazı koşullar altında, Liouville sayıları argümanlar için aldığı değerlerin ya K cebirsel sayı cismine ait bir cebirsel sayı ya da Mahler sınıflandırmasındaki $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ kümesine ait bir $U-$sayısı olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.2). Daha sonraki çalışmalarda,

1) Teorem 4.2 de kesin sınıf belirlenebilir, yani Teorem 4.2 deki $F(z)$ genelleştirilmiş boşluk serisinin Teorem 4.2 nin koşullarını sağlayan ξ Liouville sayısı için aldığı $F(\xi)$ değeri cebirsel değilse, yani $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ kümesine aitse $F(\xi)$ nin $U_1,...,U_m$ alt sınıflarından tam da hangisine ait olduğu belirlenebilir,

2) Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 de, argüman olarak U_1 sınıfını oluşturan Liouville sayıları kullanılmıştır. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 de, argüman olarak bir U_1 sayısı yerine bir U_m $(m>1)$ sayısı konulup incelenebilir,

3) Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 de çalışılan $F(z)$ serisinde $\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}=\infty$ dur, $\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}<\infty$ olursa işlerin nasıl yürüyeceği üzerine düşünülebilir,

4) Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 de kompleks alanda çalışılmaktadır. Teorem 4.1 ve Teorem 4.2, $p-$adik alana nakledilebilir.

KAYNAKLAR

1. MAHLER, K., 1965, Arithmetic Properties of Lacunary Power Series with Integral Coefficients, *Journal of the Australian Math. Soc.*, 5, 56-64.

2. BRAUNE, E., 1977, Über arithmetische Eigenschaften von Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument, *Monatshefte für Math.,* 84, 1-11.

3. ZEREN, B. M., 1988, Über die Natur der Transzendenz der Werte einer Art verallgemeinerter Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten für algebraische Argumente, *Bull. Tech. Univ. Istanbul,* 41, 569-588.

4. YILMAZ, G., 2001, On the Gap Series and Liouville Numbers, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der.*, 60, 111-116.

5. KEKEÇ, G., 2010, On Some Lacunary Power Series with Algebraic Coefficients for Liouville Number Arguments, *University of Istanbul Faculty of Science the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy,* accepted for publication.

6. PERRON, O., 1960, *Irrationalzahlen,* Walter de Gruyter & Co., Berlin.

7. SCHNEIDER, T., 1957, *Einführung in die transzendenten Zahlen,* Springer-Verlag, Berlin.

8. MAHLER, K., 1932, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II, *J. Reine Angew. Math.*, 166, 118-150.

9. LEVEQUE, W. J., 1961, *Topics in Number Theory Volume II,* Addison-Wesley Publishing, London, England.

10. LEVEQUE, W. J., 1953, On Mahler's U-numbers, *J. London Math. Soc.*, 28, 220-229.

11. SCHMIDT, W. M., 1970, T-numbers do exist, *Academic Press,* 3-26.

12. KOKSMA, J. F., 1939, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.*, 48, 176-189.

13. WIRSING, E., 1961, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J. Reine Angew. Math.*, 206, 67-77.

14. İÇEN, O. Ş., 1973, Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adisch elliptischen Funktionen I und II", *İst. Üniv. Fen Fak. Mec.,* Seri A, 38, 25-35.

15. POLLARD, H., 1950, *The Theory of Algebraic Numbers,* The Mathematical Association of America, The Waverly Press, Baltimore, Maryland.

16. MAHLER, K., 1976, *Lectures on Transcendental Numbers,* Springer-Verlag, Berlin, 3-540-07986-6.

17. COHN, H., 1946, Note on Almost Algebraic Numbers, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 52, 1042-1045.

18. ZEREN, B. M., 1980, Über einige komplexe und p-adische Lückenreihen mit Werten aus den Mahlerschen Unterklassen U_m , *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec.,* Seri A, 45, 89-130.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında İstanbul'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi İstanbul'da tamamladım. 1991 yılında Ömer Seyfettin İlkokulu'ndan, 1994 yılında Gümüşpala Ortaokulu'ndan, 1998 yılında Pertevniyal Lisesi'nden mezun oldum. 1998 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimime başladım ve 2002 yılında bu bölümden mezun oldum. 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım ve 2006 yılında Prof. Dr. Bedriye M. ZEREN'in danışmanlığında yüksek lisans eğitimimi tamamladım. 2006 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimime başladım.