İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONNEKSİYONLARIN GEOMETRİSİ

Bahar KIRIK
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN

Haziran, 2011

İSTANBUL

Bu çalışma 29/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Zeren

Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

F. Özdemir

Doç.Dr. Fatma ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Yrd. Doç. Dr. Hakan Mete TAŞTAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Yrd. Doç. Dr. Özkan DEĞER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimimin ilk aşamasından beri kıymetli desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN'e ve bu dönem zarfında bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Haziran, 2011 **Bahar KIRIK**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Γ_{ij}^{k}	: Christoffel sembolleri
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\varnothing$	: Boş küme
M	: Diferansiyellenebilir manifold
$\mathbb{R}^{m}$	: m -boyutlu Öklid uzayı
$B_{x,r}$	: Açık top
$J_{f}(x)$	: f 'in $x \in \mathbb{R}^{n}$ 'deki Jakobiyen matrisi
(U,ϕ)	: Manifoldun bir haritası
ϕ_{γ}	: Yerel koordinat sistemi
I	: Özdeşlik dönüşümü
S^{1}	: Birim çember
S^{2}	: $\mathbb{R}^{3}$ 'teki birim küre
S^{n}	: n -boyutlu küre
$Gl(n,\mathbb{R})$	: Genel lineer grup
$\mathfrak{B}$	: Topoloji tabanı
X_{m}	: m noktasında teğet vektör
∇f	: f 'in gradiyent vektör alanı
$C^{\infty}(M)$	: M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$T_{m}M$	: m noktasındaki teğet uzay
$T_{m}^{*}(M)$	: m noktasındaki kotanjant uzay
δ_{ij}	: Kronecker Deltası
$\mathfrak{X}(M)$	: M üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi
$[X,Y]$	: X ve Y 'nin Lie Çarpımı
f_{*}	: f 'in diferansiyel dönüşümü
α	: M 'de bir eğri
$\dot{\alpha}(t_{0})$	: α 'nın $t = t_{0}$ noktasındaki teğet vektörü
∇	: Lineer konneksiyon
τ_{α}	: α eğrisi boyunca paralel öteleme
g	: Metrik alanı
$\lVert X_{m} \rVert$	: X_{m} teğet vektörünün uzunluğu
$L(\alpha)$	: α eğrisinin uzunluğu
$d(m,q)$	: m ve q noktaları arasındaki uzaklık
T	: Burulma tensörü

$\boldsymbol{T_s^r}$	: M manifoldu üzerinde (r,s) tipinden tensör demeti
$\boldsymbol{V}$	: $\mathbb{R}$ üzerinde n-boyutlu bir vektör uzayı
$\boldsymbol{Gl(V)}$	: V 'nin lineer otomorfizmalarının grubu
$\boldsymbol{V_s^r}$	: V vektör uzayı üzerindeki bütün (r,s) tipinden tensörlerin uzayı
$\boldsymbol{T(M)}$	: M 'nin teğet demeti
$\boldsymbol{T^*(M)}$	: M 'nin kotanjant demeti
$\boldsymbol{\pi}$	: İzdüşüm demeti
$\boldsymbol{L(M)}$	: M 'nin çatı demeti
$\boldsymbol{A^T}$	: A matrisinin transpozesi
$\boldsymbol{\tilde{\alpha}}$	: α eğrisinin lifti
$\boldsymbol{G}$	: Lie Grubu

ÖZET

KONNEKSİYONLARIN GEOMETRİSİ

Konneksiyonların geometrisini incelemek için öncelikle yoğun bir biçimde analiz, cebir ve topoloji bilgilerinin gözden geçirilmesine gereksinim duyulmaktadır. Bu hazırlıklar sonucunda, bu bilgilerin diferansiyel geometri içinde nasıl kullanıldığını görmek bu tezin temel amacıdır.

Bu çalışma, diferansiyellenebilir manifoldlar ve diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanan bazı temel kavramlar, lineer konneksiyonlar, Riemann manifoldları, tensör demetleri, vektör demetleri olmak üzere dört ana başlıktan oluşmaktadır.

Birinci kısımda, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan ön bilgiler verilmiştir. Ardından diferansiyellenebilir manifold kavramı tanıtılıp örnekler verilmiş ve bu yapılar üzerindeki teğet vektör, vektör alanı, eğri ve diferansiyellenebilir dönüşüm kavramları incelenmiştir.

İkinci kısımda, bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde lineer konneksiyon tanımı verilmiştir. Ayrıca bir lineer konneksiyona göre, bir diferansiyellenebilir manifold üzerindeki bir eğrinin jeodezik olması koşulu ifade edilmiştir.

Üçüncü kısımda, bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde metrik alanı tanımlanmıştır. Buna ek olarak Riemann metriği, Riemann manifoldu ve Riemann konneksiyonu kavramları ifade edilerek Riemann konneksiyonunun burulmasız bir metrik konneksiyon olduğu gösterilmiştir. Öte yandan, bir Riemann manifoldundaki bir eğrinin jeodezik olması ile ilgili teoremler verilmiş ve sonuçlar elde edilmiştir.

Son kısımda ise tensör demeti kavramı incelenmiş ve bu yapının bir diferansiyellenebilir manifold olduğu kanıtlanmıştır. Bunun yanı sıra vektör demetleri, tensör demetleri, çatı demetleri, asal lif demetleri kısaca tanıtılmış ve bu yapıların diferansiyellenebilir manifoldlarla olan bağlantısı ortaya konmuştur.

SUMMARY

THE GEOMETRY OF CONNECTIONS

In order to examine the geometry of connections, the knowledges of analysis, algebra and topology are intensely needed for review. As a result of the preparations of these knowledges, to see how they are used in differential geometry is the main purpose of this thesis.

This study consists of four main chapters that are differetiable manifolds and some basic concepts defined on differentiable manifolds, linear connections, Riemannian manifolds, tensor bundles and vector bundles.

In the first part, preliminaries used in the next sections are given. Then, by introducing the concept of differentiable manifold, examples are given and tangent space, vector fields, curves, differentiable maps on this structure are examined.

The definition of linear connection on a differentiable manifold is given in the second part. In addition, the condition of being a geodesic of a curve on a differentiable manifold is expressed with respect to a linear connection.

Metric field on a differentiable manifold is defined in the third part. In addition to this, by expressing the the concepts of Riemannian metric, Riemannian manifold and Riemannian connection, it is shown that Riemannian connection is a torsion free and a metric connection. On the other hand, the theorems related to a curve to be a geodesic on a Riemannian manifold are given and some results have been obtained.

In the last part, the notion of tensor bundles are examined and it is proved that this structure is a differentiable manifold. In addition, the concepts of vector bundles, frame bundles, principal fiber bundles are introduced briefly and the relationship between these structures and differentiable manifolds have been revealed.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin farklı bir disiplin olarak ortaya çıkışı Carl Friedrich Gauss ve Bernhard Riemann ile başlamıştır. Riemann bir yüzey kavramını daha geniş boyuta taşımak için yoğun çalışmalar yapmıştır. 1854'de Göttingen'deki açılış konuşmasında ilk kez manifold kavramını tanımlamıştır. Carl Friedrich Gauss, "Theorema Egregium" teoremi ile bir yüzeyin eğriliğinin intristik bir özellik olduğunu kanıtlamıştır. Manifold teorisi de bu intristik özelliklere dayanmaktadır. Bir fizikçi olarak James Clerk Maxwell'in ve Gregorio Ricci Corbastro, Tullio Levi-Civita gibi matematikçilerin çalışmaları tensör analizinin gelişimine yön vermiştir. Bu düşüncelerle Einstein'ın "Genel Rölativite Teorisi" bir uygulama alanı bulmuştur. Manifold teorisi ile ilgili çalışma yapan bilim adamlarından biri de Alman matematikçi ve bir teorik fizikçi olan Hermann Klaus Hugo Weyl'dir. 1913'de yayımladığı "Riemann Yüzeyleri" adlı kitabında 2-boyutlu bir manifoldun tanımını vermiştir. Manifoldların yaygın olarak kabul edilen tanımı ise Amerikalı bir matematikçi olan Hassler Whitney tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında diferansiyellenebilir manifold kavramının yanı sıra inceleyeceğimiz geometrik yapılardan biri de, bizi bir vektör alanının diğer bir vektör alanına göre türevini hesaplama olanağı sağlayacak olan ve adına "lineer konneksiyon" ya da "kovaryant türev" diyeceğimiz yapıdır. Bir konneksiyon, klasik olarak 1869'da bir Alman matematikçi ve fizikçi olan Elwin Bruno Christoffel tarafından $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$ ya da Γ_{ij}^{k} ile göstereceğimiz sembollerin kümesi olarak tanımlanmıştır. Riemann ve Yarı Riemann geometrisinde kovaryant türev kavramı, Gregorio Ricci Corbastro ve Tullio Levi-Civita tarafından tanıtılmıştır. Ricci ve Levi-Civita, bir manifold üzerindeki bir vektör alanının yöne göre türevini genelleştirmişlerdir. Böylece yeni türev de "Levi-Civita Konneksiyonu" adı verilmiştir. Bu fikirler birleştirilerek bir vektör demeti üzerindeki kovaryant türev kavramının modern anlamda günümüzde de kullanılan ve adına “Koszul Konneksiyonu” denilen tanımı 1950’de Jean-Louis Koszul tarafından verilmiştir.

Biz bu çalışmada bir lineer konneksiyon kavramının, bir eğri boyunca vektörlerin paralel ötelemesi ile olan ilişkisini de inceleyeceğiz. “Paralel öteleme” kavramı 1917’de Levi-Civita tarafından sunulmuştur. Élie Cartan paralel ötelemenin önemini görerek yeni bir geometri tanımlamak için “teğet uzay” kavramını daha da genelleştirmiştir. Öte yandan 1930’lardan sonra lif demeti kavramı geliştirilmiştir. 1950’lerde ise bir lif demeti üzerindeki bir konneksiyon teorisi ortaya çıkmıştır. Bu konuda bir Fransız matematikçi olan Charles Ehresmann yanı sıra Shiing Shen Chern gibi pek çok matematikçi Cartan’ın çalışmasına büyük ölçüde ışık tutan çalışmalar yapmıştır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. ÖN BİLGİLER

Bu kısımda ileride sıkça kullanılacak olan teorem ve tanımlar verildi.

Tanım 2.1.1: $\mathbb{R}^m = \left\{ x = (x_1, ..., x_m) \middle| x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le m \right\}$ olsun. x_i sayılarına $x \in \mathbb{R}^m$ noktasının ***i*** **-inci koordinatı** adı verilir.

Her $x, y \in \mathbb{R}^m$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} (x+y)_i &= x_i + y_i \\ (ax)_i &= ax_i \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

işlemlerini tanımlayalım. Yukarıda tanımladığımız toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}$ üzerinde m -boyutlu bir vektör uzayıdır.

Her $x, y \in \mathbb{R}^m$ için,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - y_i \right)^2} \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlayalım. $d(x, y)$ aşağıdaki üç koşulu sağlar:

(1) $d(x, y) \ge 0$ 'dır.Eşitlik yalnızca $x = y$ olması durumunda gerçekleşir.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) Her $x, y, z \in \mathbb{R}^m$ için, $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$ 'dir.

Dolayısıyla $d(x, y)$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde bir metriktir ve $\mathbb{R}^m$ bir metrik uzay olur. Öte yandan, $\mathbb{R}^m$ doğal bir topolojik yapıya da sahiptir: $x \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ olmak üzere,

$$B_{x,r} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \middle| d(x,y) < r \right\} \tag{2.1.3}$$

açık toplarının birleşimi de açık kümedir.

Tanım 2.1.2: $d(x,y)$ metriğine sahip m-boyutlu $\mathbb{R}^m$ vektör uzayına, $\boldsymbol{m}$ **-boyutlu Öklid Uzayı** adı verilir.

Tanım 2.1.3: f, $\mathbb{R}^n$'in açık bir alt kümesinden $\mathbb{R}^m$'e giden bir fonksiyon olsun. $f(x) = (f_1(x),...,f_m(x))$ olmak üzere, f_i $(i = 1,2,...,m)$ koordinat fonksiyonlarının her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f'e **diferansiyellenebilir fonksiyon** ya da $\boldsymbol{C^\infty}$ **sınıfındandır** denir.

Tanım 2.1.4: $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere; $u_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u_i(p) = u_i(p_1,...,p_n) = p_i$ $(1 \le i \le n)$ şeklinde tanımlı $u_1,...,u_n$ fonksiyonlarına $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$ **'in doğal koordinat fonksiyonları** denir.

Tanım 2.1.5: $\mathbb{R}^n$'in doğal koordinat fonksiyonları $u_1,...,u_n$ ve $\mathbb{R}^m$'in doğal koordinat fonksiyonları $v_1,...,v_m$ olmak üzere $f_j = v_j \circ f$ $(j = 1,...,m)$ dir. Bu durumda f'in $x \in \mathbb{R}^n$'deki **Jakobiyen matrisi**,

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial u_i}\bigg|_x \right] = \left[\frac{\partial (v_j \circ f)}{\partial u_i}\bigg|_x \right] \tag{2.1.4}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.1 (Ters Fonksiyon Teoremi) [1] : $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu E üzerinde C^1 sınıfından olsun. $a \in E$ için $f'(a)$ terslenebilir ve $b = f(a)$ olsun. Bu durumda,

(i) $\mathbb{R}^n$'de $a \in U$ ve $b \in V$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır. f, U üzerinde birebirdir ve $f(U) = V$'dir.

(ii) g, f'in tersi olmak üzere, $g \in C^1(V)$'dir.

Bu teoreme göre, f 'in x 'in bir komşuluğunda diferansiyellenebilir bir tersinin olması için gerek ve yeter koşul $J_f(x)$ matrisinin tekil olmamasıdır.

Tanım 2.1.6: X herhangi bir küme olsun. Birleşimleri X kümesini veren X 'in alt kümelerinin bir ailesine X kümesinin bir **örtüsü** adı verilir. Başka bir deyişle; $U=\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, X 'in bir alt kümeler ailesi ise U 'nun bir örtü olması için gerek ve yeter koşul,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \qquad (2.1.5)$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.7: X herhangi bir küme olsun. X 'in kuvvet kümeleri olan $P(X)$ üzerinde τ ile gösterilen bir alt kümeler ailesi verilsin. Bu alt kümeler ailesi aşağıdaki özellikleri gerçeklesin:

(i) $\varnothing, X \in \tau$

(ii) Her $\alpha \in I$, $G_\alpha \in \tau$ için $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \tau$

(iii) $i=1,...,n$ için $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$

Yukarıdaki üç koşulu gerçekleyen τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** denir. (X,τ)'ya da bir **topolojik uzay** adı verilir. τ 'nun üyelerinin her birine **açık küme**, tümleyeni açık olan kümeye de **kapalı küme** denir.

Tanım 2.1.8: Bir $p \in X$ için p noktasını içeren $G \in \tau$ açık kümesine p noktasının bir **komşuluğu** ya da **civarı** adı verilir.

Tanım 2.1.9: X bir topolojik uzay olsun. X 'in bir örtüsünün bütün elemanları açık kümeler ise bu örtüye **açık örtü** adı verilir.

Tanım 2.1.10: $U=\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ve $V=\{V_\beta : \beta \in B\}$, X uzayının örtüleri olsun. V 'deki her küme U 'daki kümelerin alt kümesi oluyorsa V örtüsüne X uzayının U

örtüsünün bir **inceltilmişi** adı verilir. Başka bir deyişle; her $V_\beta \in V$ için, $\exists U_\alpha \in U : V_\beta \subseteq U_\alpha$ dır.

Tanım 2.1.11: X uzayının bir açık örtüsü olsun. X uzayının her noktası örtüsündeki sonlu sayıdaki kümeleri kesen bir komşuluğa sahipse bu açık örtüye **yerel** *(lokal)* **olarak sonlu örtü** adı verilir. Başka bir deyişle; $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ örtüsünün yerel olarak sonlu olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $\{\alpha \in A : U_\alpha \bigcap V(x) \neq \varnothing\}$ kümesi sonlu olacak biçimde $x \in X$ 'in bir $V(x)$ komşuluğunun olmasıdır.

Tanım 2.1.12: Bir topolojik uzayın her açık örtüsü yerel olarak sonlu olan bir açık inceltme içeriyorsa bu uzaya **yantıkız** *(paracompact) uzay* adı verilir.

Tanım 2.1.13: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $p_1, p_2 \in X$ $(p_1 \neq p_2)$ için $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$ olacak şekilde $p_1 \in G_1 \in \tau$ ve $p_2 \in G_2 \in \tau$ açık alt kümeleri varsa (X,τ) topolojik uzayına **Hausdorff uzayı** denir.

Tanım 2.1.14: (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) iki topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f : X \to Y$ fonksiyonuna (X,τ_X) ve (Y,τ_Y) topolojik uzayları arasında bir **homeomorfizma** adı verilir.

(i) f birebir örten bir fonksiyondur,

(ii) f süreklidir,

(iii) f^{-1} süreklidir.

Tanım 2.1.15: f, birebir örten bir dönüşüm olsun. f ve f^{-1} dönüşümleri birer homomorfizma ise yani yapı koruyan dönüşümler ise bu durumda f dönüşümüne bir **izomorfizma** adı verilir.

Tanım 2.1.16: Bir matematiksel nesnenin kendi üzerine olan bir izomorfizmasına bir **otomorfizma** adı verilir.

2.2. DİFERANSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

Bu kısımda, öncelikle diferansiyellenebilir manifold kavramı tanımlanarak, bu yapılarla ilgili örnekler verildi. Daha sonra, diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanan temel kavramlar incelendi.

2.2.1. Diferansiyellenebilir Manifold Tanımı ve Örnekleri

Bir diferansiyellenebilir manifold yerel olarak Öklid uzayına benzeyen bir topolojik uzaydır. Şimdi bu kavramı ayrıntılı bir şekilde inceleyelim.

Tanım 2.2.1.1: **n-boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu** yantıkız bir Hausdorff uzayıdır ve $\left\{\left(U_\gamma,\phi_\gamma\right)\middle|\gamma\in\Gamma\right\}$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) U_γ 'lar M 'de açık kümelerdir ve

$$M=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma \tag{2.2.1}$$

dır. Her ϕ_γ, U_γ 'dan $\mathbb{R}^n$ 'in bir açık alt kümesine bir homeomorfizmadır.

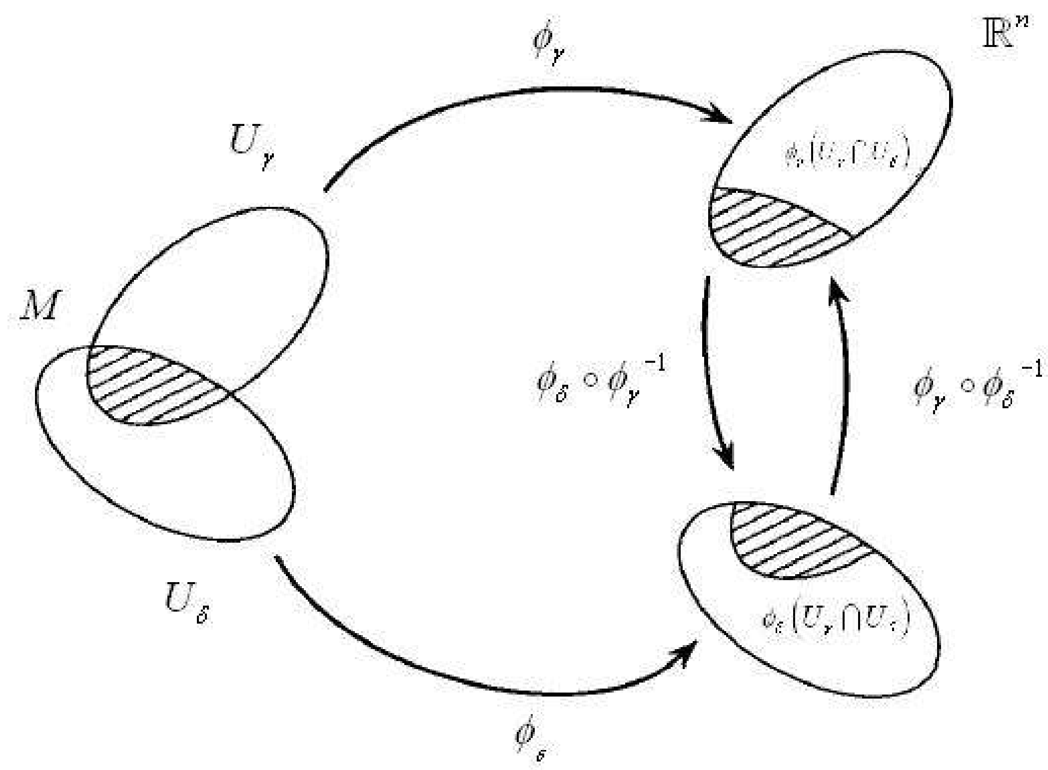
(ii) $U_\gamma\cap U_\delta\neq\varnothing$ olmak üzere,

$\phi_\delta\circ\phi_\gamma^{-1}:\phi_\gamma\left(U_\gamma\cap U_\delta\right)\to\phi_\delta\left(U_\gamma\cap U_\delta\right)$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır.

(iii) (i) ve (ii) 'ye göre $\left\{\left(U_\gamma,\phi_\gamma\right)\middle|\gamma\in\Gamma\right\}$ kümesi maksimaldir yani her $\gamma\in\Gamma$ için bu küme $\phi\circ\phi_\gamma^{-1}$ ve $\phi_\gamma\circ\phi^{-1}$ fonksiyonları C^∞ sınıfından olacak şekilde (i) 'yi sağlayan bütün (U,ϕ) elemanlarını içerir, [2].

U_γ kümesine M 'de bir **koordinat komşuluğu**, ϕ_γ 'ya M 'de bir *(yerel)* **koordinat sistemi**, $\left(U_\gamma,\phi_\gamma\right)$ 'ya da M 'de bir **harita** *(chart)* adı verilir. (ii) koşulu haritaların **bağdaşması** *(compability condition)* olarak adlandırılır. (Şekil 2.2.1)

$\{(U_\gamma, \phi_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ kümesine M 'de bir **diferansiyellenebilir yapı** ya da **C^∞ yapı** adı verilir.



Şekil 2.2.1

Tanım 2.2.1.2: M üzerinde bir C^∞ yapı verilebiliyorsa M 'ye **düzgün manifold** *(smooth manifold)* adı verilir.

Teorem 2.2.1.1. [3]: M 'deki (i) ve (ii) koşulunu sağlayan her küme bir tek diferansiyellenebilir yapı ile kapsanır.

İspat: M 'de Tanım 2.2.1.1'in (i) ve (ii) koşulunu sağlayan koordinat sisteminin kümesini A ile gösterelim. A 'nın her elemanı ile C^∞ bağdaşan n-boyutlu bütün koordinat sistemlerinin kümesi A' olsun. A' 'nün A 'yı kapsayan bir diferansiyellenebilir yapı olduğunu ve bu kümeden başka A 'yı kapsayan bir diferansiyellenebilir yapının bulunmadığı gösterilmelidir. A' 'nün tanımına göre $A \subset A'$ dir. $p \in M$ olsun. A, Tanım 2.2.1.1 (i) ve (ii) koşulunu sağladığından p noktası

A'daki en az bir ϕ koordinat sisteminin tanım bölgesindedir. $A \subset A'$ olduğundan p noktası A''deki en az bir koordinat sisteminin tanım bölgesinde demektir. Böylece A', Tanım 2.2.1.1'in (i) koşulunu sağlamış olur. η_1, η_2 A''de iki koordinat sistemi olsun. Her $\eta_2(U_1 \cap U_2)$ için $\eta_2^{-1}(p) \in M$ 'yi içeren A'ya ait bir (V, ϕ) haritası vardır. Hipotez gereğince A''nün her elemanı A'nın her elemanı ile C^∞ bağdaştığından $\eta_1 \circ \phi^{-1}$ ve $\phi \circ \eta_2^{-1}$ fonksiyonları C^∞ sınıfındandır. Dolayısıyla bu fonksiyonların bileşkesi de C^∞ sınıfındandır. O halde $(\eta_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \eta_2^{-1})$ fonksiyonu da C^∞ sınıfındandır. p'nin bir komşuluğu üzerinde $(\eta_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \eta_2^{-1})$ fonksiyonu $\eta_1 \circ \eta_2^{-1}$ fonksiyonuna eşittir. Dolayısıyla $\eta_1 \circ \eta_2^{-1}$ fonksiyonu bu komşuluk üzerinde C^∞ sınıfındandır. Her p noktası için bu işlemler yapılabileceğinden $\eta_1 \circ \eta_2^{-1}$ fonksiyonu $\eta_2(U_1 \cap U_2)$ kümesinin her noktasında C^∞ sınıfındandır. Böylece Tanım 2.2.1.1'in (ii) koşulu da sağlanmış olur. M'de bir ϕ koordinat sistemi A''nün her elemanı ile C^∞ bağdaşıyorsa A''nün tanımına göre $\phi \in A'$ olur. Bu durumda A', Tanım 2.2.1.1'in (iii) koşulunu sağlamış olur. O halde A', M'de bir diferansiyellenebilir yapıdır. Şimdi A'yı kapsayan birden çok diferansiyellenebilir yapı bulunamayacağını gösterelim. A^*, A'yı kapsayan diğer bir diferansiyellenebilir yapı ve $\xi \in A^*$ olsun. $A \subset A^*$ olduğundan ξ, A'nın her elemanı ile C^∞ bağdaşır. A''nün tanımına göre $\xi \in A'$ olur. Böylece, $A^* \subset A'$ olarak elde edilir. $\xi \in A'$ ise ξ, A''nün her elemanı ile C^∞ bağdaşır. $A^* \subset A'$ olduğundan ξ, A^*'ın her elemanı ile de C^∞ bağdaşır. A^* bir diferansiyellenebilir yapı olduğundan, $\xi \in A^*$ olmalıdır. O halde $A' \subset A^*$ olarak bulunur. Böylece $A^* = A'$ olarak elde edilir. □

Şimdi de diferansiyellenebilir manifoldlar için basit birkaç örnek verelim.

Örnek 2.2.1.1: I, özdeşlik dönüşümü olmak üzere $(\mathbb{R}^n, I)$, $\mathbb{R}^n$'in bir haritasıdır ve $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Örnek 2.2.1.2: $\mathbb{R}^2$ uzayındaki birim çemberi S^1 ile gösterirsek, S^1 1-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Bilindiği gibi $\mathbb{R}^2$ bir topolojik uzaydır. Bir topolojik uzayın her alt kümesi asıl uzayın topolojisinden indirgenen topoloji ile birlikte bir topolojik uzay olduğundan S^1 kümesi bir topolojik uzaydır. $\mathbb{R}^2$, Hausdorff uzayı olduğundan S^1 de Hausdorff uzayı olur.

$$S^1 = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$$

şeklinde yazıp, koordinat komşuluklarını aşağıdaki gibi seçelim.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \left\{(x,y) \in S^1 \middle| x > 0\right\} \\
U_2 &= \left\{(x,y) \in S^1 \middle| x < 0\right\} \\
U_3 &= \left\{(x,y) \in S^1 \middle| y > 0\right\} \\
U_4 &= \left\{(x,y) \in S^1 \middle| y < 0\right\}
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

U_γ $(\gamma = 1,...,4)$ kümeleri açık yarım çemberlerdir.

$$S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$$

dir.

$$\begin{array}{lcl}
\phi_1 : U_1 \to (-1,1) & & \phi_3 : U_3 \to (-1,1) \\
(x,y) \mapsto \phi_1(x,y) = y & & (x,y) \mapsto \phi_3(x,y) = x \\
 & , & \\
\phi_2 : U_2 \to (-1,1) & & \phi_4 : U_4 \to (-1,1) \\
(x,y) \mapsto \phi_2(x,y) = y & & (x,y) \mapsto \phi_4(x,y) = x
\end{array} \tag{2.2.3}$$

olsun. ϕ_γ $(\gamma = 1,...,4)$ fonksiyonları birer homemorfizmadır. Örneğin, ϕ_1 için kontrol edelim:

$\phi_1(x,y) = y$ olduğundan, ϕ_1 fonksiyonu süreklidir.

Her $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in U_1$ için, $\phi_1(x_1,y_1) = \phi_1(x_2,y_2)$ ise,

$$y_1 = y_2 \tag{2.2.4}$$

olarak bulunur. $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S^1$ olduğundan,

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

ve

$$x_2^2 + y_2^2 = 1$$

dir. Buradan (2.2.4) kullanılırsa ve $x_1 > 0, x_2 > 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$x_1 = x_2$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ϕ_1 fonksiyonu birebirdir. Şimdi ϕ_1'in tersini bulalım:

$$\phi_1^{-1} : (-1,1) \to U_1$$

dir. $\phi_1^{-1}(y) = (x, y)$ fonksiyonu sürekli olduğundan ϕ_1 bir homeomorfizmadır. Benzer şekilde ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 fonksiyonları da birer homemorfizma olur. Böylece, Tanım 2.2.1.1'in (i) koşulu sağlanmış olur. $U_1 \cap U_3$ ve $U_1 \cap U_4$ için bağdaşma koşulunu kontrol edelim.

$$U_1 \cap U_3 = \left\{ (x, y) \in S^1 \middle| x > 0, y > 0 \right\}$$

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1} : \phi_3 (U_1 \cap U_3) \to \phi_1 (U_1 \cap U_3)$$

ve $\phi_3 (U_1 \cap U_3) = (0,1)$ 'dir.

$v \in \phi_3 (U_1 \cap U_3)$ olsun.

$$\phi_3 (x, y) = x \;\Rightarrow\; \phi_3 \left(v, \sqrt{1 - v^2} \right) = v \;\Rightarrow\; \phi_3^{-1} (v) = \left(v, \sqrt{1 - v^2} \right)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\phi_1 \circ \phi_3^{-1} (v) = \phi_1 \left(v, \sqrt{1 - v^2} \right) = \sqrt{1 - v^2} \in (0,1) \tag{2.2.5}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığı üzerinden $(0,1)$ aralığı üzerine bir homeomorfizmadır. Bu fonksiyonun tersi,

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1 (U_1 \cap U_3) \to \phi_3 (U_1 \cap U_3)$$

dir. $v \in \phi_1(U_1 \cap U_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} &\phi_1\left(\sqrt{1-v^2}, v\right) = v \Rightarrow \phi_1^{-1}(v) = \left(\sqrt{1-v^2}, v\right) \\ &\phi_3 \circ \phi_1^{-1}(v) = \phi_3\left(\sqrt{1-v^2}, v\right) = \sqrt{1-v^2} \in (0,1) \end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

olarak bulunur.

$\phi_3 \circ \phi_1^{-1}$ fonksiyonu süreklidir ve $(0,1)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilirdir. O halde $\phi_1 \circ \phi_3^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. Dolayısıyla (U_1, ϕ_1) ve (U_3, ϕ_3) haritaları için Tanım 2.2.1.1'in (ii) koşulu gerçeklenmiş olur. Benzer şekilde,

$$U_1 \cap U_4 = \left\{(x, y) \in S^1 \,\middle|\, x > 0, y < 0\right\}$$

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1} : \phi_4(U_1 \cap U_4) \to \phi_1(U_1 \cap U_4)$$

ve $\phi_4(U_1 \cap U_4) = (0,1)$'dir.

$v \in \phi_4(U_1 \cap U_4)$ olsun.

$$\phi_4(x, y) = x \;\Rightarrow\; \phi_4\left(v, -\sqrt{1-v^2}\right) = v \;\Rightarrow\; \phi_4^{-1}(v) = \left(v, -\sqrt{1-v^2}\right)$$

bulunur. Bu durumda,

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}(v) = \phi_1\left(v, -\sqrt{1-v^2}\right) = -\sqrt{1-v^2} \in (-1,0) \qquad (2.2.7)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığından $(-1,0)$ aralığı üzerine bir homeomorfizmadır. Bu fonksiyonun tersi,

$$\phi_4 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_4) \to \phi_4(U_1 \cap U_4)$$

dir. $v \in (-1,0)$ olsun.

$$\phi_1(x,y)=y \;\Rightarrow\; \phi_1\left(\sqrt{1-v^2},v\right)=v \;\Rightarrow\; \phi_1^{-1}(v)=\left(\sqrt{1-v^2},v\right)$$

bulunur.

$$\phi_4\circ\phi_1^{-1}(v)=\phi_4\left(\sqrt{1-v^2},v\right)=\sqrt{1-v^2}\in(0,1) \tag{2.2.8}$$

olarak bulunur. $\phi_4\circ\phi_1^{-1}$ fonksiyonu süreklidir ve $(0,1)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilirdir. O halde $\phi_1\circ\phi_4^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. Dolayısıyla (U_1,ϕ_1) ve (U_4,ϕ_4) haritaları için de Tanım 2.2.1.1'in (ii) koşulu gerçeklenmiş olur. Benzer şekilde diğer haritaların da C^∞ bağdaştığı gösterilebilir. Böylece S^1 1-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

Uyarı 2.2.1.1: Örnek 2.2.1.2'deki haritaları başka şekilde de seçmek mümkündür. Aslında bağdaşan iki koordinat haritası bulmak yeterlidir. Koordinat komşuluklarını aşağıdaki gibi seçilip,

$$U=S^1\setminus\{(0,1)\}$$
$$V=S^1\setminus\{(0,-1)\}$$

kümelerine karşılık gelen koordinat sistemleri,

$$\varphi:U\subset S^1\to\varphi(U)\subset\mathbb{R} \qquad\qquad \psi:V\subset S^1\to\psi(V)\subset\mathbb{R}$$
$$\varphi(x,y)=\frac{x}{1-y} \qquad , \qquad \psi(x,y)=\frac{x}{1+y}$$

olarak alınırsa (U,φ) , (V,ψ) haritaları C^∞ bağdaşır ve S^1 1-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olarak elde edilir.

Uyarı 2.2.1.2: Diferansiyellenebilir bir manifold inşa etmek istiyorsak sadece yapmamız gereken bu yapıyı C^∞ bağdaşan haritalar ile kaplamaktır. Yani Tanım 2.2.1.1'deki (i) ve (ii) koşulunu sağlatmak yeterlidir çünkü Teorem 2.2.1.1'e göre,

$\{(U_\gamma,\phi_\gamma) | \gamma\in\Gamma\}$ kümesini tek bir yolla Tanım 2.2.1.1'deki üç koşulu sağlayan haritaların ailesine genişletebiliriz.

Örnek 2.2.1.3: $\mathbb{R}^3$'teki birim küre olan S^2, 2-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Haritaları S^1 kümesi için yapılan işlemlere benzer olarak seçelim. S^2'nin 6 koordinat komuşuluğu $x>0$, $x<0$, $y>0$, $y<0$, $z>0$, $z<0$ yarım küreleri olmak üzere , ϕ_i $i=(1,...,6)$ fonksiyonları koordinat düzlemleri üzerine dik izdüşümler olsun. Açık olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}
U_1&=\{(x,y,z)\in S^2 | x>0\}\\
U_2&=\{(x,y,z)\in S^2 | x<0\}\\
U_3&=\{(x,y,z)\in S^2 | y>0\}\\
U_4&=\{(x,y,z)\in S^2 | y<0\}\\
U_5&=\{(x,y,z)\in S^2 | z>0\}\\
U_6&=\{(x,y,z)\in S^2 | z<0\}
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
\phi_1(x,y,z)&=(y,z)\\
\phi_2(x,y,z)&=(y,z)\\
\phi_3(x,y,z)&=(x,z)\\
\phi_4(x,y,z)&=(x,z)\\
\phi_5(x,y,z)&=(x,y)\\
\phi_6(x,y,z)&=(x,y)
\end{aligned}
\tag{2.2.9}$$

dir. ϕ_i'lerin $i=(1,...,6)$ görüntüsü o düzlemdeki açık birim disktir. Örneğin, ϕ_1'in görüntüsü (y,z)-düzlemindeki açık birim disktir. Örnek 2.2.1.2'deki adımlar uygulanarak Tanım 2.21.1'in (i) koşulu kolayca gerçeklenir. Örneğin, (U_2,ϕ_2) ve (U_5,ϕ_5) haritaları için bağdaşma koşulunu kontrol edelim.

$$U_2\cap U_5=\{(x,y,z)\in S^2 | x<0, z>0\}$$

$$\phi_2\circ\phi_5^{-1}:\phi_5(U_2\cap U_5)\to\phi_2(U_2\cap U_5)$$

ve

$$\phi_5(U_2\cap U_5)=\{(q_1,q_2) | -1<q_1<0,-1<q_2<1\}$$

dir.

$\left(q_1,q_2\right)\in\phi_5\left(U_2\cap U_5\right)$ olsun.

$$\phi_5\left(x,y,z\right)=\left(x,y\right)\ \Rightarrow\ \phi_5^{-1}\left(x,y\right)=\left(x,y,z\right)$$

$$\Rightarrow\ \phi_5^{-1}\left(x,y\right)=\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

bulunur. Böylece ,

$$\phi_2\circ\phi_5^{-1}\left(q_1,q_2\right)=\phi_2\left(q_1,q_2,\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}\right)=\left(q_2,\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}\right) \tag{2.2.10}$$

şeklinde elde edilir.

(2.2.10)'a göre $\phi_2\circ\phi_5^{-1}$ fonksiyonu sürekli ve birebirdir. Bu fonksiyonun tersi olan $\phi_5\circ\phi_2^{-1}$ fonksiyonu,

$$\phi_5\circ\phi_2^{-1}:\phi_2\left(U_2\cap U_5\right)\to\phi_5\left(U_2\cap U_5\right)$$

şeklindedir ve

$$\phi_2\left(U_2\cap U_5\right)=\left\{\left(q_1,q_2\right)\middle|\,0<q_1<1,-1<q_2<1\right\}$$

dir.

$\left(q_1,q_2\right)\in\phi_2\left(U_2\cap U_5\right)$ olsun. Bu durumda,

$$\phi_2\left(x,y,z\right)=\left(y,z\right)\ \Rightarrow\ \phi_2^{-1}\left(y,z\right)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2},y,z\right)$$

ve

$$\phi_5\circ\phi_2^{-1}\left(q_1,q_2\right)=\phi_5\left(-\sqrt{1-q_1^2-q_2^2},q_1,q_2\right)=\left(-\sqrt{1-q_1^2-q_2^2},q_1\right) \tag{2.2.11}$$

olarak elde edilir. Böylece $\phi_5\circ\phi_2^{-1}$ fonksiyonu süreklidir. O halde $\phi_2\circ\phi_5^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. Benzer şekilde diğer haritaların da C^∞ bağdaştığı gösterilebilir.

Dolayısıyla $\left\{ \left(U_\gamma, \phi_\gamma \right) \middle| \gamma = (1,...,6) \right\}$ kümesi Tanım 2.2.1.1'deki (i) ve (ii) koşullarını gerçekler. Buna göre S^2, 2-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

Uyarı 2.2.1.3: S^2'nin 2-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olduğunu göstermek için aşağıda verilen koordinat komşuluklarını ve koordinat sistemlerini seçmek yeterlidir.

$$\begin{array}{lcl} U = S^2 \setminus \{(0,0,1)\} & & \varphi(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z} \right) \\ & , & \\ V = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} & & \psi(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z} \right) \end{array}$$

olsun.

Bu durumda $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ kümesi Tanım 2.2.1.1'deki (i) ve (ii) koşullarını gerçekler. Böylece S^2, 2-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

Örnek 2.2.1.2 ve Örnek 2.2.1.3'de yaptıklarımızı genelleştirirsek,

$$S^n = \left\{ \left(x_1, ..., x_{n+1} \right) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| x_1^{\,2} + ... + x_{n+1}^{\,2} = 1 \right\}$$

olarak verilen n-boyutlu küre, n-boyutlu bir diferansiyellenebir manifold olur. Bunun için,

$$\begin{array}{ll} U_i = \left\{ p = \left(x_1, ..., x_{n+1} \right) \in S^n \middle| x_i > 0 \right\} & \\ & , \quad 1 \le i \le n+1 \\ V_i = \left\{ p = \left(x_1, ..., x_{n+1} \right) \in S^n \middle| x_i < 0 \right\} & \end{array}$$

olarak seçmek ve

$$\varphi_i : U_i \to B^n = \left\{ \left(y_1, ..., y_n \right) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < 1 \right\}$$

$$\psi_i : V_i \to B^n = \left\{ \left(y_1, ..., y_n \right) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < 1 \right\}$$

fonksiyonlarını

$$\varphi_i\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_{n+1}\right)=\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{n+1}\right)$$
$$\psi_i\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_{n+1}\right)=\left(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{n+1}\right)$$

şeklinde tanımlamak yeterlidir, [4].

Bu genelleştirmeyi S^n üzerinde iki harita inşa ederek de yapabiliriz :

$$U=S^n\setminus\left\{(0,...,0,1)\right\}$$

$$V=S^n\setminus\left\{(0,...,0,-1)\right\}$$

ve

$$\varphi\left(x_1,x_2,...,x_{n+1}\right)=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},...,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$
$$\psi\left(x_1,x_2,...,x_{n+1}\right)=\left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\frac{x_2}{1+x_{n+1}},...,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

olsun. Bu durumda $\left\{(U,\varphi),(V,\psi)\right\}$ kümesi Tanım 2.2.1.1'deki (i) ve (ii) koşullarını gerçekler. $\mathbb{R}^{n+1}$ topolojik uzay olduğundan S^n de bir topolojik uzaydır. $\mathbb{R}^{n+1}$ Hausdorff uzayı olduğundan S^n de Hausdorff uzayıdır. O halde S^n, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur, [5].

Örnek 2.2.1.4: $n\times n$'lik tekil olmayan bütün matrislerin genel lineer grubu olan $Gl(n,\mathbb{R})$, n^2-boyutlu bir manifolddur.

$\mathbb{R}^{n\times n}\simeq\mathbb{R}^{n^2}$ olduğundan, $\mathbb{R}^{n^2}$'nin topolojisi $\mathbb{R}^{n\times n}$ için de verilebilir. Böylece, $Gl(n,\mathbb{R})$'yi $\mathbb{R}^{n^2}$'deki bir açık küme ile,

$$\left[a_{ij}\right]\to\left(a_{11},...,a_{1n},a_{21},...,a_{2n},...,a_{nn}\right) \tag{2.2.12}$$

tasviri aracılığıyla belirleyebiliriz. $\mathbb{R}^{n\times n}$ üzerindeki determinant fonksiyonunu

$$\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R} \tag{2.2.13}$$

olarak gösterelim.

Bu fonksiyon $\mathbb{R}^{n\times n}$ üzerinde süreklidir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^{n^2}$ üzerinde de sürekli olur. $\{0\}\subset\mathbb{R}$ kümesi, $\mathbb{R}$ 'de kapalıdır. Sürekli bir fonksiyon altında kapalı bir kümenin ters görüntüsü de kapalı olduğundan $\det^{-1}(\{0\})$ kapalıdır. Benzer şekilde, sürekli bir fonksiyon altında açık kümelerin ters görüntüleri de açık olduğundan ve $\mathbb{R}-\{0\}$ açık olduğundan $\det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$ kümesi açıktır. $Gl(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$, olduğundan $Gl(n,\mathbb{R})$ kümesi de açıktır. Böylece , $Gl(n,\mathbb{R})$ için $\mathbb{R}^{n^2}$ 'nin açık alt kümeleri koordinat komşulukları ve bunlara karşılık determinant fonksiyonunu koordinat sistemi olarak alınırsa $Gl(n,\mathbb{R})$, n^2 -boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur, [4].

2.2.2.Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar ve Diferansiyellenebilir Dönüşümler

Diferansiyellenebilirlik yerel (lokal) bir koşul olduğundan, bu kavram tanım kümesi diferansiyellenebilir bir manifold ve değer kümesi $\mathbb{R}$ olan sürekli tasvirlere genişletilebilir. Burada temel amaç haritaları kullanarak durumu Öklid uzayına taşıyabilmektir.

Tanım 2.2.2.1: M , n -boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold ve f , M 'nin bir V açık alt kümesi üzerinde tanımlı reel-değerli bir fonksiyon olsun. M 'deki bütün (U,ϕ) haritaları için $f\circ\phi^{-1}$, $\mathbb{R}^n$ 'de $\phi(m)$ noktasında diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna $m\in V$ noktasında **diferansiyellenebilirdir** ya da $\boldsymbol{C^\infty}$ **sınıfındandır** denir. Her $m\in V$ için f diferansiyellenebilirse, f 'e V üzerinde **diferansiyellenebilirdir** denir.

V üzerindeki bütün diferansiyellenebilir, reel-değerli fonksiyonların kümesini $C^\infty(V)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.2.2.1. [6]: f 'in m noktasındaki diferansiyellenebilirliği m 'yi kapsayan haritaların seçiminden bağımsızdır.

İspat: M 'deki bir $\left(U,\phi\right)$ haritası için $f\circ\phi^{-1}$, $\mathbb{R}^n$ 'de $\phi\left(m\right)$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. $\left(V,\psi\right)$, M 'de m 'yi içeren başka bir harita ve $U\bigcap V\neq\varnothing$ olsun. $f\circ\psi^{-1}$ fonksiyonunun da diferansiyellenebilir olduğunu göstermeliyiz.

$$f\circ\psi^{-1}=\left(f\circ\phi^{-1}\right)\circ\left(\phi\circ\psi^{-1}\right) \tag{2.2.14}$$

şeklinde yazılabilir. $\left(U,\phi\right)$ ve $\left(V,\psi\right)$ haritaları C^∞ bağdaştığından, Tanım 2.2.1.1'deki $\left(ii\right)$ koşuluna göre $\phi\circ\psi^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. $f\circ\phi^{-1}$ diferansiyellenebilir olduğundan ve diferansiyellenebilir fonksiyonların bileşkesi de diferansiyellenebilir olduğundan $f\circ\psi^{-1}$ fonksiyonu da m noktasında diferansiyellenebilirdir. M 'deki bütün haritalar için bu işlemler tekrarlanabileceğinden f fonksiyonu m noktasında diferansiyellenebilirdir. □

Tanım 2.2.2.2: M, m-boyutlu ve N, n-boyutlu iki diferansiyellenebilir manifold olmak üzere f, M 'den N 'ye giden bir dönüşüm olsun. $\left(U,\phi\right)$ ve $\left(W,\psi\right)$, M ve N 'nin sırasıyla m ve $f\left(m\right)$ noktalarında haritaları olsun. $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ dönüşümü $\phi\left(m\right)$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa f 'e m noktasında **diferansiyellenebilir dönüşüm** denir. Her $m\in M$ için f dönüşümü diferansiyellenebilir ise f 'e, M 'den N 'ye bir **düzgün dönüşüm** adı verilir.

$f:M\to N$ diferansiyellenebilir dönüşümünün tersi varsa ve tersi de diferansiyellenebilir ise f dönüşümüne bir **difeomorfizm** adı verilir. M ve N manifoldları verildiğinde M 'den N 'ye giden bir difeomorfizm varsa M manifoldu N manifolduna **difeomorfiktir**, denir.

Teorem 2.2.2.2. [6]: f 'in m noktasındaki diferansiyellenebilirliği $\left(U,\phi\right)$ ve $\left(W,\psi\right)$ haritalarının seçiminden bağımsızdır. Bir başka deyişle; M manifoldunun bir $\left(U,\phi\right)$ haritası ve N manifoldunun bir $\left(W,\psi\right)$ haritası için $\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ dönüşümü diferansiyellenebilir ise f dönüşümü M üzerinde düzgündür.

İspat: ϕ_1 ve ψ_1, sırasıyla M ve N'de koordinat sistemleri olsun. $\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ dönüşümünün diferansiyellenebilir olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$$\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \to \psi_1(W_1) \tag{2.2.15}$$

$\phi_1(m) \in \psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ olsun. Hipoteze göre, m noktasında en az bir ϕ ve $f(m)$ noktasında en az bir ψ koordinat sistemi için $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ dönüşümü $\phi(m)$ noktasında diferansiyellenebilirdir. (U_1, ϕ_1) ile (U, ϕ) ve (W_1, ψ_1) ile (W, ψ) haritaları C^∞ bağdaştığından,

$$\phi \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U \cap U_1) \to \phi(U \cap U_1)$$

$$\psi_1 \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap W_1) \to \psi_1(W \cap W_1)$$

homeomorfizmaları C^∞ sınıfındandır. Zincir kuralından dolayı,

$$\left(\psi_1 \circ \psi^{-1}\right) \circ \left(\psi \circ f \circ \phi^{-1}\right) \circ \left(\phi \circ \phi_1^{-1}\right) \tag{2.2.16}$$

dönüşümü $\phi_1(m)$ noktasında diferansiyellenebilirdir. (2.2.16) ifadesi $\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ dönüşümüne eşit olduğundan istenilen elde edilmiş olur. M'deki her (U_1, ϕ_1) ve N'deki her (W_1, ψ_1) haritası için benzer işlemler yapılabileceğinden, f dönüşümü M üzerinde düzgündür. □

Şimdi diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve diferansiyellenebilir dönüşümlerle ilgili örnekler verelim.

Örnek 2.2.2.1: (U, ϕ), n-boyutlu bir M manifoldunun bir haritası olsun. Bu durumda, ϕ homeomorfizması diferansiyellenebilirdir. n-boyutlu bir M manifoldunun iki haritası, sırasıyla, (U, ϕ) ve (V, ψ) olsun. Tanım 2.2.1.1, (ii) koşuluna göre bu haritalar C^∞ bağdaştığından $\phi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizması C^∞ sınıfındandır. Dolayısıyla ϕ fonksiyonu diferansiyellenebilirdir. Böylece, u_i'ler $\mathbb{R}^n$'in doğal koordinat fonksiyonları olmak üzere, $x_i = u_i \circ \phi\left(1 \le i \le n\right)$ fonksiyonlarına ϕ'nin **koordinat fonksiyonları** denir.

Bu fonksiyonlar U üzerinde C^{∞} sınıfından olan reel-değerli fonksiyonlardır. Her $p \in U$ için, $\phi(p) = \left(x_1(p), \dots, x_n(p)\right)$ dir. O halde,

$$\phi = \left(x_1, \dots, x_n\right) : U \to \mathbb{R}^n \tag{2.2.17}$$

şeklinde yazılabilir, [7].

Tanım 2.2.2.3: $\left(X_i, \tau_i\right)_{i \in I}$ topolojik uzaylar ailesi verilsin.

$$X = \prod_{i \in I} X_i \tag{2.2.18}$$

çarpım kümesi üzerinde her $i \in I$ için, $\pi_i : X \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan X kümesi üzerindeki en kaba topolojiye verilen $\left(X_i, \tau_i\right)_{i \in I}$ uzaylarının **çarpım topolojisi** denir. Bu topoloji $\mathfrak{P}$ ile gösterilir ve $\left(X, \mathfrak{P}\right)$ uzayına verilen $\left(X_i, \tau_i\right)_{i \in I}$ uzaylarının çarpım uzayı, $\left(X_i, \tau_i\right)_{i \in I}$ uzaylarının herbirine de **çarpan uzayı** denir.

Tanım 2.2.2.4: $\left(X, \tau\right)$ bir topolojik uzay olsun. X kümesi üzerinde bir **topoloji tabanı** diye her bir elemanı X kümesinin bir alt kümesi olan ve aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir $\mathfrak{B}$ kümesine denir.

(1) Her $x \in X$ için $\mathfrak{B}$ kümesinde x elemanını içeren en az bir eleman vardır.
(2) X kümesinin bir x elemanı $\mathfrak{B}$'deki B_1 ve B_2 kümelerinin arakesitinde ise $\mathfrak{B}$'nin $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak biçimde x elemanını içeren en az bir B_3 elemanı vardır.

Teorem 2.2.2.3. [8]: $\left(X_1, \tau_1\right)$ ve $\left(X_2, \tau_2\right)$ topolojik uzayları verilsin. Bu takdirde her $T_1 \in \tau_1$ ve $T_2 \in \tau_2$ kümesi için,

$$\mathfrak{B}=\left\{T_1\times T_2 \middle| T_1\in\tau_1, T_2\in\tau_2\right\} \tag{2.2.19}$$

ailesi $X=X_1\times X_2$ çarpım uzayı için bir tabandır.

X kümesi üzerinde bir $\mathfrak{B}$ topoloji tabanı varsa , X üzerinde bu tabanın ürettiği bir τ topolojisi vardır. τ kümesinin elemanları şu şekilde tanımlanır: X'in bir U alt kümesini göz önüne alınsın. Her $x\in U$ için $\mathfrak{B}$'nin, $x\in\mathfrak{B}$ ve $B\subset U$ olacak biçimde en az bir B alt kümesi varsa $U\in\tau$ 'dur. τ'nun X üstünde bir topoloji olduğu kolayca görülebilir, [3].

Yukarıdaki verilen tanımlar ve teoremden faydalanarak bir örnek verelim.

Örnek 2.2.2.2: M_1 ve M_2 sırasıyla n_1 ve n_2 boyutlu manifoldlar olsun. $\left\{(U_\gamma,\varphi_\gamma)\middle|\gamma\in A\right\}$ ve $\left\{(V_\beta,\psi_\beta)\middle|\beta\in B\right\}$,sırasıyla, M_1 ve M_2 için diferansiyellenebilir yapılar olsun. Bu durumda,

(i) $\left\{U_\gamma\times V_\beta\right\}_{\gamma\in A,\beta\in B}$, $M_1\times M_2$'nin bir açık örtüsüdür.

(ii) $\varphi_\gamma\times\psi_\beta : U_\gamma\times V_\beta\to\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

$$(p,q)\mapsto\varphi_\gamma\times\psi_\beta(p,q)=\left(\varphi_\gamma(p),\psi_\beta(q)\right)$$

olarak tanımlanan $\varphi_\gamma\times\psi_\beta$ dönüşümü,

$$\varphi_\gamma\times\psi_\beta:\left(U_\gamma\times V_\beta\right)\to\varphi_\gamma\left(U_\gamma\right)\times\psi_\beta\left(V_\beta\right)\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}=\mathbb{R}^{n_1+n_2}$$

şeklinde bir homeomorfizmadır.

Dolayısıyla $\left(U_\gamma\times V_\beta,\varphi_\gamma\times\psi_\beta\right)$, $M_1\times M_2$ için bir koordinat haritasıdır ve $\left\{\left(U_\gamma\times V_\beta,\varphi_\gamma\times\psi_\beta\right)\middle|\gamma\in A,\beta\in B\right\}$ kümesi Tanım 2.2.1.1'deki (i) ve (ii) koşullarını sağlar. Böylece $M_1\times M_2$ çarpım uzayı (n_1+n_2)-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olur. Bu manifolda M_1 ve M_2 manifoldlarının **çarpım manifoldu** denir.

$$\pi_i : M_1\times M_2\to M_i \qquad (i=1,2)$$

izdüşüm dönüşümleri diferansiyellenebilirdir, [6].

Tanım 2.2.2.5: G boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan G kümesine n-boyutlu bir **Lie Grubu** adı verilir.

1) G bir gruptur,
2) G, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur,
3) $\xi : G \to G$, $\varphi : G \times G \to G$

$$g \mapsto \xi(g) = g^{-1} \qquad (g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_1, g_2) = g_1.g_2$$

dönüşümleri C^∞'dur.
$g \in G$ için,

$$R_g(x) = \varphi(x, g) = x.g \tag{2.2.20}$$

olarak tanımlanan $R_g : G \to G$ dönüşümüne G üzerinde ***g* kadar sağ öteleme** adı verilir. $g \in G$ için,

$$L_g(x) = \varphi(g, x) = g.x \tag{2.2.21}$$

biçiminde tanımlanan $L_g : G \to G$ dönüşümüne G üzerinde ***g* kadar sol öteleme** adı verilir. (2.2.20) ve (2.2.21) ile tanımlanan dönüşümler ,G'den G'ye C^∞ dönüşümlerdir, [6].

Tanım 2.2.2.5'i açıklayan bir örnek aşağıdaki gibi verebiliriz.

Örnek 2.2.2.3: Örnek 2.2.1.4'te yer alan $Gl(n, \mathbb{R})$ kümesini G ile gösterelim. G kümesi matrislerin çarpımına göre bir gruptur, [9]. $A = \left(A_i^j\right) \in G$, $B = \left(B_i^j\right) \in G$ olmak üzere,

$$(A.B)_i^j = \sum_{k=1}^{n} A_i^k B_k^j \tag{2.2.22}$$

şeklindedir. (2.2.22)'nin sağ tarafı A ve B matrislerinin elemanlarının bir polinomudur. Böylece, $\varphi(A,B)=A.B$ dönüşümü C^{∞}'dur. Üstelik A^{-1} matrisinin elemanları A_i^j elemanlarının rasyonel fonksiyonları olduğundan $\xi(A)=A^{-1}$ dönüşümü de C^{∞}'dur. Dolayısıyla, Tanım 2.2.2.5'e göre G kümesi bir Lie grubudur.

$Gl(n,\mathbb{R})$ üzerindeki determinant fonksiyonu, bir polinomun $\mathbb{R}^{n^2}$'nin bir açık alt kümesine kısıtlanmışı olduğundan bu fonksiyon C^{∞}'dur, [2].

Şimdi kısaca alt manifold kavramından bahsedelim:

Tanım 2.2.2.6: M ve $\bar{M}$ sırasıyla k-boyutlu ve n-boyutlu iki diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $p\in M$ için $U=\left\{m\in\bar{U}\,\middle|\,\bar{x}_{k+1}(m)=\bar{x}_{k+2}(m)=...=\bar{x}_n(m)=0\right\}$ kümesi $x_1=\bar{x}_1\big|_U, x_2=\bar{x}_2\big|_U,...,x_k=\bar{x}_k\big|_U$ koordinat fonksiyonlarıyla birlikte M'de p'nin bir koordinat komşuluğu olacak şekilde $\bar{M}$'nin bir $\bar{U}=(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ koordinat komşuluğu varsa M'ye $\bar{M}$'nin k-boyutlu bir **alt manifoldu** denir. Bu koordinat sistemlerine de **özel** koordinat sistemleri veya **adapte edilmiş** koordinat sistemleri adı verilir, [10].

2.2.3. Teğet Vektörler, Vektör Alanları ve Eğriler

Öklid uzayındaki diferansiyellenebilir bir eğri her noktasında bir teğet vektöre sahipse, bir diferansiyellenebilir manifold da her noktasında bir lineer uzay oluşturan teğet vektörlerin kümesine sahiptir.

Teğet vektörler $\mathbb{R}^n$'deki doğrultu türevinin genelleştirilmişidir. X_m, $\mathbb{R}^n$'in m noktasındaki herhangi bir vektörü ve f, m'nin bir komşuluğunda C^{∞} sınıfından olan bir fonksiyon ise ∇f, f'in gradiyent vektör alanı olmak üzere f'in X_m doğrultusundaki türevi,

$$X_m f = X_m\cdot(\nabla f)_m \qquad (2.2.23)$$

ile verilir, [10].

Tanım 2.2.3.1: M **,** n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold ve $m \in M$ olsun. $X_m : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları gerçekliyorsa X_m'e , M'nin m noktasında bir **teğet vektörü** denir.

Her $a,b \in \mathbb{R}$, $f,g \in C^\infty(M)$ için ,

(i) $X_m(af+bg) = aX_m(f) + bX_m(g)$,

(ii) $X_m(fg) = f(m)X_m(g) + g(m)X_m(f)$

dir.

Lemma 2.2.3.1. [11]: X_m , M'nin m noktasında bir teğet vektörü olsun. Bu durumda,

(i) c sabit bir fonksiyon olmak üzere , $X_m(c) = 0$ 'dır.

(ii) $f,g \in C^\infty(M)$ olmak üzere; f ve g , m'yi içeren bir açık küme üzerinde eşitlerse

$$X_m(f) = X_m(g)$$

dir.

Tanım 2.2.3.2: M'nin m noktasındaki teğet vektörlerinin kümesine, M'nin m noktasındaki **teğet uzayı** denir ve T_mM ile gösterilir.

T_mM uzayı, aşağıda belirtilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır: $X_m, Y_m \in T_mM$, $f \in C^\infty(M)$ ve $a \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} (X+Y)_m(f) &= X_m(f) + Y_m(f) \\ (aX)_m(f) &= aX_m(f) \end{aligned} \qquad (2.2.24)$$

dir.

M'nin m noktasındaki teğet uzayının dual uzayına ise M'nin m noktasındaki **kotanjant uzayı** (*cotangent space*) denir ve $T_m^*(M)$ ile gösterilir.

$\left(U,\phi\right)$, M 'nin bir haritası, $m \in U$ ve $x_i = u_i \circ \phi$ $\left(1 \le i \le n\right)$ olsun. $f \in C^\infty\left(M\right)$ için,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(f\right) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(f \circ \phi^{-1}\right) \tag{2.2.25}$$

şeklinde

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m : C^\infty\left(M\right) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

(2.2.25)'nın sağ tarafı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki reel-değerli bir fonksiyonun kısmi türevidir. Kısmi türevin çarpım kuralı, lineerlik özelliği ve (2.2.25)'i kullanarak, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$ fonksiyonunun M 'nin m noktasında bir teğet vektörü olduğunu gösterelim: $a,b \in \mathbb{R}$, $f,g \in C^\infty\left(M\right)$ için ,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(af + bg\right) = \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left[\left(af + bg\right) \circ \phi^{-1}\right]$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left[\left(af\right) \circ \phi^{-1} + \left(bg\right) \circ \phi^{-1}\right]$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(af \circ \phi^{-1}\right) + \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(bg \circ \phi^{-1}\right)$$

$$= a\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(f \circ \phi^{-1}\right) + b\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(g \circ \phi^{-1}\right)$$

$$= a\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(f\right) + b\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(g\right)$$

olduğundan Tanım 2.2.3.1'in (i) koşulu gerçeklenir. Benzer şekilde,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f\cdot g)=\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)}\left[(f\cdot g)\circ\phi^{-1}\right]$$

$$=\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)}\left[\left(f\circ\phi^{-1}\right)\cdot\left(g\circ\phi^{-1}\right)\right]$$

$$=\left.\left(f\circ\phi^{-1}\right)\right|_{\phi(m)}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)}\left(g\circ\phi^{-1}\right)+\left.\left(g\circ\phi^{-1}\right)\right|_{\phi(m)}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)}\left(f\circ\phi^{-1}\right)$$

$$=\left.\left(f\circ\phi^{-1}\right)\right|_{\phi(m)}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(g)+\left.\left(g\circ\phi^{-1}\right)\right|_{\phi(m)}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(f)$$

$$=\left(f\circ\phi^{-1}\right)\left(\phi(m)\right)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(g)+\left(g\circ\phi^{-1}\right)\left(\phi(m)\right)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(f)$$

$$=f(m)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(g)+g(m)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{m}(f)$$

olarak bulunur. Buna göre Tanım 2.2.3.1'in (ii) koşulu da gerçeklenir ve istenilen elde edilmiş olur.

$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f)$ ifadesi yerine $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_m$ ifadesini yazabiliriz.

Lemma 2.2.3.2. [10]: M bir diferansiyellenebilir manifold ve $m\in M$ olsun. m'nin bir U civarında bir $\phi=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ koordinat sistemi her $i=1,\dots,n$ için $x_i(m)=0$ olacak şekilde seçilmiş olsun. Bu durumda her $f\in C^\infty(m)$ için,

$$f_i(m)=\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f) \tag{2.2.26}$$

olacak şekilde $f_1,...,f_n \in C^\infty(m)$ fonksiyonları mevcuttur ve

$$f = f(m) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \tag{2.2.27}$$

dir.

İspat : $F = f \circ \phi^{-1}$ olsun. Bu durumda F, $\mathbb{R}^n$ 'de orijin civarındaki bir topta tanımlıdır. Bu topu B ile gösterelim ve $a = (a_1,...,a_n) \in B \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
F(a_1,...,a_n) &= F(a_1,...,a_n) - F(a_1,...,a_{n-1},0) \\
&\quad + F(a_1,...,a_{n-1},0) - F(a_1,...,a_{n-2},0,0) \\
&\quad + ... \\
&\quad + F(a_1,0,...,0) - F(0,...,0) \\
&\quad + F(0,...,0) \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} F(a_1,...,a_{i-1},ta_i,0...,0)\Big|_{t=0}^{1} \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(a_1,...,a_{i-1},ta_i,0...,0)dt \\
&= F(0,...,0) + \sum_{i} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(a_1,...,a_{n-1},ta_i,0...,0)a_i dt
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

bulunur.

$$F_i(a_1,...,a_n) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(a_1,...,a_{n-1},ta_i,0...,0)dt$$

olsun. $\dfrac{\partial F}{\partial u_i}$ fonksiyonları C^∞ sınıfından olduğundan F_i 'ler de C^∞ sınıfındandır.

Böylece (2.2.28) ifadesi,

$$F(a_1,...,a_n) = F(0,...,0) + \sum_i a_i F_i(a_1,...,a_n) \tag{2.2.29}$$

olarak düzenlenir.

$f_i = F_i \circ \phi$ olsun. Bu durumda,

$$(a_1,...,a_n) = a = \phi(p) = (x_1(p),...,x_n(p))$$

$$F(a_1,...,a_n) = F(a) = F(\phi(p)) = f(p)$$

$$F(0,...,0) = F(\phi(m)) = (F \circ \phi)(m) = f(m)$$

olarak elde edilir. Bu bulduklarımızı (2.2.29)'da yerine yazarsak,

$$f(p) = f(m) + \sum_{i=1}^{n} x_i(p) f_i(p)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla,

$$f = f(m) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

bulunur. Böylece (2.2.27) ifadesi elde edilmiş olur. Öte yandan,

$$f_i(m) = (F_i \circ \phi)(m) = F_i(\phi(m)) = F_i(0,...,0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(0...,0)dt$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u_i}(0...,0)\int_0^1 dt = \frac{\partial F}{\partial u_i}(0...,0) = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(f \circ \phi^{-1}\right)(\phi(m))$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f)$$

olarak bulunur. □

Teorem 2.2.3.1. [10]: M bir diferansiyellenebilir manifold ve $x_1,...,x_n$ M 'nin m civarında bir koordinat sistemi olsun. Bu durumda $X_m \in T_m M$ olmak üzere,

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} X_m\left(x_i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \qquad (2.2.30)$$

şeklinde yazılabilir ve $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$ koordinat vektörleri $T_m M$ için bir baz oluşturur. Böylece,

$$\dim\left(M\right) = \dim\left(T_m M\right) = n$$

dir.

İspat: $m \in M$, $X_m \in T_m M$ ve $f \in C^{\infty}\left(m\right)$ olsun. Her $i = 1,...,n$ için $x_i\left(m\right) \neq 0$ ise

$$y_i = x_i - x_i\left(m\right)$$

olsun. Bu durumda,

$$y_i\left(m\right) = x_i\left(m\right) - x_i\left(m\right) = 0$$

dır. O halde $y_1,...,y_n$ Lemma 2.2.3.2'deki koşulları sağlayan bir koordinat sistemidir. Buradan, $f \in C^{\infty}\left(m\right)$ için ,

$$f = f\left(m\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$$

ve

$$f_i\left(m\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_m \left(f\right)$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler ve Tanım 2.2.3.1 kullanılarak,

$$X_m\left(f\right) = X_m\left(f\left(m\right) + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \right)$$

$$= X_m\left(f(m)\right) + X_m\left(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i\right)$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n} X_m\left(y_i f_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[X_m\left(y_i\right) f_i(m) + y_i(m) X_m\left(f_i\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_m\left(y_i\right) f_i(m)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_m\left(x_i - x_i(m)\right) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_m (f)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[X_m\left(x_i\right) - X_m\left(x_i(m)\right)\right] \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_m\left(x_i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m (f) \tag{2.2.31}$$

olarak bulunur. Her $f \in C^{\infty}(m)$ için (2.2.31) yazılabileceğinden,

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} X_m\left(x_i\right) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$$

bulunur. Böylece (2.2.30) elde edilir.

Şimdi $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$ vektörlerinin $T_m M$ için bir baz teşkil ettiğini gösterelim:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m = 0$$

olsun.

Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(x_j\right)=0$$

dır. Öte yandan, (2.2.25) kullanılarak,

$$\sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \left(x_j\right)=\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(x_j\circ\phi^{-1}\right)=\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_{\phi(m)} \left(u_j\right)=\delta_{ij}$$

bulunur. Şu halde,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij}=a_j=0 \qquad , \quad \left(j=1,...,n\right)$$

şeklinde elde edilir. O halde, $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$ koordinat vektörleri lineer bağımsızdır ve (2.2.30)'dan dolayı T_mM 'yi gererler. Dolayısıyla, $\dim\left(T_mM\right)=n$ olarak elde edilir. □

Teorem 2.2.3.1'deki yöntemle her $q\in U$ için T_qM 'ye bir baz bulabiliriz.

Tanım 2.2.3.3: Her $m\in M$ noktasını T_mM 'nin bir X_m elemanına götüren bir X fonksiyonuna M üzerinde bir **vektör alanı** adı verilir.

$f:M\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$Xf:M\to\mathbb{R}$$

$$m\mapsto\left(Xf\right)\left(m\right)=X_m\left(f\right) \tag{2.2.32}$$

ile verilir.

Biz C^∞ sınıfından olan vektör alanları ile ilgileneceğiz. Bu özellik yerel olarak kontrol edilebilir. X, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. $f \in C^\infty(M)$ olarak alınsın. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

(i) Her $f \in C^\infty(M)$ için $Xf \in C^\infty(M)$'dir,

(ii) M üzerindeki her (U,ϕ) haritası için,

$$X_m = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m$$

şeklinde tanımlanan $a_i : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ sınıfındandır, [2].

Buna göre, X vektör alanı $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanlarının lineer kombinasyonudur. X bu özelliklere sahipse X'e **diferansiyellenebilir vektör alanı** ya da $\boldsymbol{C^\infty}$ **vektör alanı** adı verilir. M üzerinde C^∞ sınıfından olan bütün vektör alanlarının kümesini $\mathfrak{X}(M)$ ile göstereceğiz.

Uyarı 2.2.3.1: $f \in C^\infty(M)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ ise bu durumda $fX \in \mathfrak{X}(M)$'dir. Oysa, $Xf \in C^\infty(M)$'dir.

Tanım 2.2.3.4: $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. X ve Y'nin **Lie Çarpımı** *(Lie Bracket)* olan $[X,Y]$, her $m \in M$ ve her $f \in C^\infty(M)$ için,

$$[X,Y]_m f = X_m(Yf) - Y_m(Xf) \tag{2.2.33}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.3.3. [11]: $[X,Y]$, M üzerinde bir vektör alanıdır.

İspat: (i) $f,g \in C^\infty(M)$ ve $r \in \mathbb{R}$ için Tanım 2.2.3.4 kullanılırsa,

$$[X,Y]_m(f+g)=X_m\left(Y(f+g)\right)-Y_m\left(X(f+g)\right)$$

$$=X_m(Yf+Yg)-Y_m(Xf+Xg)$$

$$=X_m(Yf)+X_m(Yg)-Y_m(Xf)-Y_m(Xg)$$

$$=[X,Y]_m f+[X,Y]_m g$$

ve

$$[X,Y]_m(rf)=X_m\left(Y(rf)\right)-Y_m\left(X(rf)\right)$$

$$=X_m(rYf)-Y_m(rXf)$$

$$=rX_m(Yf)-rY_m(Xf)$$

$$=r[X,Y]_m f$$

olarak elde edilir ve Tanım 2.2.3.1'in birinci koşulu gerçeklenmiş olur. $[X,Y]_m\in T_mM$ olduğunu göstermek için $[X,Y]_m(fg)$ ifadesi hesaplanmalıdır.

$$Y_m(fg)=f(m)Y_mg+g(m)Y_mf$$

olduğundan,

$$Y(fg)=fY(g)+gY(f)$$

dir. Bu ifade ve (2.2.32) kullanılarak,

$$(ii)\quad [X,Y]_m(fg)=X_m\left(Y(fg)\right)-Y_m\left(X(fg)\right)$$

$$=X_m\left(fY(g)+gY(f)\right)-Y_m\left(fX(g)+gX(f)\right)$$

$$=f(m)X_m(Yg)+X_m(f)Yg(m)+g(m)X_m(Yf)+X_m(g)Yf(m)$$

$$-f(m)Y_m(Xg)-Xg(m)Y_m(f)-g(m)Y_m(Xf)-Xf(m)Y_m(g)$$

$$=f(m)\big(X_m(Yg)-Y_m(Xg)\big)+g(m)\big(X_m(Yf)-Y_m(Xf)\big)$$

$$+Xf(m)Yg(m)+Xg(m)Yf(m)-Xg(m)Yf(m)-Xf(m)Yg(m)$$

$$=f(m)[X,Y]_m\, g+g(m)[X,Y]_m\, f$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $[X,Y]_m \in T_mM$ 'dir. $Xf\,,Yf \in C^\infty(M)$ olduğundan $X(Yf),Y(Xf)\in C^\infty(M)$'dir. O halde $[X,Y]\in \mathfrak{X}(M)$'dir. □

Lemma 2.2.3.4. [11]: $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, $f,g\in C^\infty(M)$ ve $r\in\mathbb{R}$ ise bu durumda,

(a) $[X,Y]=-[Y,X]$ ve $[rX,Y]=r[X,Y]$,

(b) $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$ ve $[Z,X+Y]=[Z,X]+[Z,Y]$,

(c) $\big[[X,Y],Z\big]+\big[[Y,Z],X\big]+\big[[Z,X],Y\big]=0$ (Jacobi Özdeşliği) ,

(d) $[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$,

dir.

(a) ve (d) özelliklerine göre, $\mathfrak{X}(M)$ üzerindeki Lie çarpımı $\mathbb{R}$-bilineerdir fakat $C^\infty(M)$ bilineer değildir, [7].

Şimdi $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0 \quad (i,j=1,...,n)$ olduğunu gösterelim: $f\in C^\infty(M)$ olsun. (2.2.25)'e göre,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)(m)=\left[\frac{\partial}{\partial u_i}\left(f\circ\phi^{-1}\right)\circ\phi\right](m)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f = \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \circ \phi \right]$$

bulunur. Burada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ’ler $\left(i = 1, ..., n \right)$ koordinat vektör alanları olurlar.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial u_j} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \circ \phi \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \circ \phi \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u_j} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \circ \phi \right] \circ \phi^{-1} \right\} \circ \phi - \frac{\partial}{\partial u_j} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u_i} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \circ \phi \right] \circ \phi^{-1} \right\} \circ \phi \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \right] \circ \phi - \left[\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_i} \left(f \circ \phi^{-1} \right) \right] \circ \phi \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve istenilen elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.3.5: $f : M \to N$ bir C^∞ dönüşüm olsun. Her $m \in M$ için,

$$f_* : T_m M \to T_{f(m)} N \qquad (2.2.34)$$

$$X_m \mapsto f_* \left(X_m \right)$$

dönüşümüne f ’in m noktasındaki **diferansiyel dönüşümü** ya da **türev dönüşümü** adı verilir ve bu dönüşüm her $g \in C^\infty \left(N \right)$ ve her $X_m \in T_m M$ için,

$$\left[f_* \left(X_m \right) \right] \left(g \right) = X_m \left(g \circ f \right) \qquad (2.2.35)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.3.5. [11]: f_* diferansiyel dönüşümü iyi tanımlıdır. Başka bir deyişle, $f: M \to N$ bir C^∞ dönüşüm ve $X_m \in T_m M$ ise bu durumda $f_*\left(X_m\right) \in T_{f(m)}N$ 'dir.

Lemma 2.2.3.6. [11]: Her $m \in M$ için f_* diferansiyel dönüşümü $T_m M$ 'den $T_{f(m)}N$ 'ye bir lineer dönüşümdür.

İspat: $a, b \in \mathbb{R}$, $X_m, Y_m \in T_m M$ ve $g \in C^\infty\left(N\right)$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.2.3.5 kullanılarak,

$$\left[f_*\left(aX_m + bY_m\right)\right]\left(g\right) = \left(aX_m + bY_m\right)\left(g \circ f\right)$$

$$= aX_m\left(g \circ f\right) + bY_m\left(g \circ f\right)$$

$$= a\left[f_*\left(X_m\right)\right]\left(g\right) + b\left[f_*\left(Y_m\right)\right]\left(g\right)$$

olarak bulunur. □

$\left(U, \varphi\right)$ ve $\left(V, \psi\right)$, M ve N manifoldlarının sırasıyla m civarındaki ve $f\left(m\right)$ civarındaki haritaları olsun. Bu durumda f 'in m noktasındaki diferansiyeli, $T_m M$ ve $T_{f(m)}N$ için belirlenen bazlara göre bir matris olarak ifade edilebilir. $\left\{x_1, ..., x_{n_1}\right\}$ ve $\left\{y_1, ..., y_{n_2}\right\}$, sırasıyla M ve N üzerinde lokal koordinatlar olsun. Bu takdirde,

$$f_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m\right) = \sum_j \left[f_* \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m\right]\left(y_j\right) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(m)} \qquad , \qquad \begin{pmatrix} 1 \le i \le n_1 \\ 1 \le j \le n_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j \left.\frac{\partial\left(y_j \circ f\right)}{\partial x_i}\right|_m \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(m)}$$

dir. Gösterelim: $w = f_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m\right)$ olsun. $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_m \in T_m M$ olduğundan $w \in T_{f(m)}N$ 'dir.

Dolayısıyla (2.2.30)'dan

$$w = \sum_{j=1}^{n_2} w\left(y_j\right) \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(m)} \tag{2.2.36}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan,

$$w\left(y_j\right) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m\right)\left(y_j\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m \left(y_j \circ f\right)$$

olarak bulunur. Elde ettiklerimizi (2.2.36)'da yerine yazarsak,

$$w = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m\right) = \sum_j \frac{\partial\left(y_j \circ f\right)}{\partial x_i}\bigg|_m \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(m)}$$

olarak bulunur.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_{f(m)}\right\}$ bazlarına göre f_* diferansiyel dönüşümü,

$$J_{f(m)} = \left[\frac{\partial\left(y_i \circ f\right)}{\partial x_j}\bigg|_m\right] \tag{2.2.37}$$

matrisinin transpozesi ile temsil edilebilir, [2].

Tanım 2.2.3.6: (2.2.37)'de gösterilen $J_{f(m)}$ matrisine f'in m noktasındaki **Jakobiyeni** adı verilir.

Lemma 2.2.3.7. [7]: $f : M \to N$ ve $g : N \to L$, C^∞ dönüşümler olmak üzere her $m \in M$ için,

$$\left(g \circ f\right)_*\Big|_m = g_*\Big|_{f(m)} \circ f_*\Big|_m$$

dir.

İspat: $X_m \in T_m M$ ve $h \in C^\infty\left(L\right)$ olmak üzere (2.2.35) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left[\left(g \circ f\right)_*\Big|_m \left(X_m\right)\right]\left(h\right) &= X_m\left(h \circ \left(g \circ f\right)\right)\\ &= X_m\left(\left(h \circ g\right) \circ f\right)\\ &= \left[f_*\left(X_m\right)\right]\left(h \circ g\right)\\ &= \left[g_*\left(f_*\left(X_m\right)\right)\right]\left(h\right)\\ &= \left(g_*\Big|_{f(m)} \circ f_*\Big|_m\right)\left(X_m\right)\left(h\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$X_m \in T_m M$ ve $h \in C^\infty\left(L\right)$ keyfi olduğundan,

$$\left(g \circ f\right)_*\Big|_m = g_*\Big|_{f(m)} \circ f_*\Big|_m$$

şeklinde elde edilir. □

Tanım 2.2.3.7: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I \to M$, C^∞ dönüşümüne M ’de bir **eğri** adı verilir.

Tanım 2.2.3.8: $\alpha_*\left(\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{\alpha(t_0)}M$ vektörüne α ’nın $t = t_0$ noktasındaki **teğet vektörü** adı verilir ve $\dot{\alpha}\left(t_0\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3.9: Her $t \in I$ için $\dot{\alpha}\left(t\right) = X_{\alpha(t)}$ koşulunu sağlayan α eğrisine X vektör alanının bir **integral eğrisi** denir.

Teorem 2.2.3.2. [10]: $X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda herhangi bir $b \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon > 0$ reel sayısı ve $\alpha(b) = m$ olacak şekilde bir $\alpha : (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \to M$ eğrisi vardır ve bu eğri tektir. Üstelik α , X 'in bir integral eğrisidir.

İspat: $x_1,...,x_n$ m 'nin civarında tanım kümesi U olan bir koordinat sistemi olsun. (2.2.30)'i teğet vektörlerden vektör alanlarına genişletirsek, f_i 'ler $(i = 1,...,n)$ U üzerinde reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \tag{2.2.38}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda ; α 'nın X 'in bir integral eğrisi olması koşulu, α 'nın tanım kümesi üzerinde,

$$\frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} = f_i \circ \alpha \tag{2.2.39}$$

olmasını gerektirir. Gerçekten,

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$$

ve

$$\dot{\alpha}(t_0) = \alpha_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (x_i \circ \alpha) \Big|_{t_0} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha(t_0)}$$

olduğu dikkate alınırsa ve (2.2.38) kullanılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (x_i \circ \alpha) \Big|_{\alpha(t_0)} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha(t_0)} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Big|_{\alpha(t_0)} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\alpha(t_0)}$$

şeklinde bulunur. Buradan da (2.2.39) ifadesi elde edilir. $\phi = (x_1,...,x_n)$ olmak üzere,

$$\frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt}(t) = (f_i \circ \alpha)(t)$$

$$=\left(f_i \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \alpha\right)(t)$$

$$=\left(f_i \circ \phi^{-1}\right)\left[\left(x_1,\ldots,x_n\right)\left(\alpha(t)\right)\right]$$

$$=\left(f_i \circ \phi^{-1}\right)\left(x_1 \circ \alpha,\ldots,x_n \circ \alpha\right)(t) \qquad (2.2.40)$$

şeklinde elde edilir. $f_i \circ \phi^{-1} = F_i$ ve $x_i \circ \alpha = \gamma_i$ olsun. Bu durumda (2.2.40) ifadesi,

$$\frac{d\gamma_i}{dt}(t) = F_i\left(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)\right) \qquad (2.2.41)$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoremine göre, (2.2.41) sisteminin $\gamma_i(t_0) = \dot{\gamma}_i \quad (i = 1,\ldots,n)$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü vardır ve bu çözüm tektir. □

Örnek 2.2.3.1: $X_{(x,y)} = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ **,** $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir vektör alanı olsun. X 'in $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki integral eğrisini bulalım.

$$c(t) = \left(x(t), y(t)\right)$$

olsun. $c(t)$ 'nin , X 'in bir integral eğrisi olması koşulu,

$$c'(t) = X_{c(t)}$$

dır. Başka bir deyişle,

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

olmasıdır.

$$x'(t) = -y(t)$$
$$y'(t) = x(t)$$

1.mertebeden adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü,

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$
$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

olarak bulunur, [12].

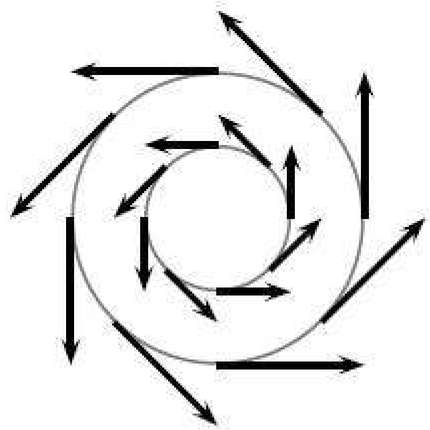
$(x(0), y(0)) = (1,0)$ başlangıç koşulundan c_1 ve c_2 sabitleri,

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 0$$

olarak bulunur. Böylece X 'in $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki integral eğrisi,

$$c(t) = (\cos t, \sin t)$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.2.2

Bu eğri ise birim çemberin parametrik denklemlerle gösterilmiş halidir (Şekil 2.2.2).

3. MALZEME VE YÖNTEM

Genel kısımlarda ele aldığımız diferansiyellenebilir manifoldlar üzerinde bir lineer konneksiyon tanımlayacağız. Bunun için §2.2'de tanımlanan diferansiyellenebilir manifold, teğet vektör, vektör alanı ve eğri gibi kavramları kullanacağız. Diferansiyel denklemlerin temel varlık ve teklik teoremini kullanarak, manifoldun her noktası ve bu noktadaki her teğet vektör için belli koşulları sağlayan bir jeodeziğin var olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, bir eğri boyunca paralel öteleme tanımını vererek lineer konneksiyonla olan ilişkisini ortaya koyacağız. Daha sonra, Riemann manifoldu kavramını ifade ederek bu manifold üzerindeki yapıları açıklayacağız. Öte yandan, Levi-Civita konneksiyonunu (Riemann konneksiyonunu) tanımlayarak, bu konneksiyonun sağladığı koşulları saptayacağız. Bu koşulları §2.2'de verilen lemma ve teoremlerden yararlanarak kanıtlayacağız. Ayrıca paralel ötelemenin Riemann konneksiyonu ile olan ilişkisini de vereceğiz. Bunlara ek olarak, Levi-Civita konneksiyonunun standart Öklid konneksiyonuna benzerlikleri ile ilgili teoremleri vereceğiz. Bir Riemann manifoldu üzerindeki bir eğrinin jeodezik olması koşulunu da ifade ederek, jeodeziklerin eğri uzunluğu ile olan bağlantısını da göstereceğiz. Son olarak, bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde tensör demeti, vektör demeti kavramlarını açıklayarak, ikinci kısımda tanımlanan çarpım manifoldu kavramını, lif demeti kavramına genişleteceğiz. Bunun için de yine §2.2'de verilen teğet uzay, genel lineer grup ve çapım manifoldu gibi tanımlardan faydalanacağız.

4. BULGULAR

4.1. BİR LİNEER KONNEKSİYONUN GEOMETRİSİ

Bu kısımda bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde $\mathbb{R}^n$'de olduğu gibi bir vektör alanının başka bir vektör alanına göre diferansiyeline yöneltecek geometrik yapılar tanıtıldı. Bunların sayesinde bir doğrunun teğet vektörünün kendisine göre türevinin sıfır olduğu gösterildi.

Tanım 4.1.1: Her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f \in C^{\infty}(M)$ için,

$(i)\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

$(ii)\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

$(iii)\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$(iv)\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

koşullarını sağlayan $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ fonksiyonuna M üzerinde bir **lineer konneksiyon** ya da **kovaryant türev** adı verilir.

Uyarı 4.1.1: Verilen bir manifold üzerinde farklı pek çok lineer konneksiyon vardır. Başka bir deyişle, bir uzay üzerinde farklı geometrileri barındırabilir.

Tanım 4.1.2: $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. Eğer $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0$ ise, α eğrisine ∇ konneksiyonuna göre bir **jeodezik** adı verilir.

X, $X_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t)$ koşulunu sağlayan bir vektör alanı ise $\nabla_X X(\alpha(t))$, X'in genişlemesinden bağımsızdır. Dolayısıyla $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)$ ile $\nabla_X X(\alpha(t))$ olduğunu anlayacağız, [2].

Tanım 4.1.3. [11]: $\alpha : I \to M$ bir eğri , $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ve X, $X_{\alpha(t_0)} = \dot{\alpha}(t_0)$ olacak şekilde M üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda Y'nin α'ya göre kovaryant türevi olan $\nabla_{\dot{\alpha}} Y$,

$$\left(\nabla_{\dot{\alpha}(t)} Y\right)_{\alpha(t_0)} = \left(\nabla_X Y\right)_{\alpha(t_0)}$$

olarak tanımlanır.

Şimdi bir vektör alanı doğrultusunda başka bir vektör alanının türevini tanımlayalım:

Tanım 4.1.4. [10]: X, p noktasında $\mathbb{R}^n$'in bir teğet vektörü ve $Y = (f_1, ..., f_n)$ bir C^∞ vektör alanı olsun. Dolayısıyla f_i'ler $(i = 1, ..., n)$ Y'nin tanım kümesi üzerinde tanımlı reel-değerli C^∞ fonksiyonlardır. Y'nin X vektörü doğrultusundaki türevi,

$$\nabla_X Y = \left(X_p f_1, ..., X_p f_n\right)$$

olarak tanımlanır ve $\nabla_X Y$ ile gösterilir.

X, W $\mathbb{R}^n$'in p noktasında teğet vektörleri ve Y, Z, p'nin civarında C^∞ vektör alanları olsun. Bu durumda f, reel değerli bir C^∞ fonksiyon olmak üzere Tanım 4.1.4 kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
(i)\nabla_{X+W} Y &= \left((X+W)_p f_1, ..., (X+W)_p f_n\right) \\
&= \left(\left(X_p + W_p\right) f_1, ..., \left(X_p + W_p\right) f_n\right) \\
&= \left(X_p f_1 + W_p f_1, ..., X_p f_n + W_p f_n\right) \\
&= \left(X_p f_1, ..., X_p f_n\right) + \left(W_p f_1, ..., W_p f_n\right) \\
&= \nabla_X Y + \nabla_W Y
\end{aligned}
$$

$$(ii)\nabla_{f(p)X}Y=\left(\left(f\left(p\right)X\right)_p f_1,...,\left(f\left(p\right)X\right)_p f_n\right)$$

$$=f\left(p\right)\left(X_p f_1,...,X_p f_n\right)$$

$$=f\left(p\right)\nabla_X Y$$

(iii) $Y=\left(f_1,...,f_n\right)$ ve $Z=\left(g_1,...,g_n\right)$ olmak üzere,

$$\nabla_X\left(Y+Z\right)=\left(X_p\left(f_1+g_1\right),...,X_p\left(f_n+g_n\right)\right)$$

$$=\left(X_p f_1+X_p g_1,...,X_p f_n+X_p g_n\right)$$

$$=\left(X_p f_1,...,X_p f_n\right)+\left(X_p g_1,...,X_p g_n\right)$$

$$=\nabla_X Y+\nabla_X Z$$

$$(iv)\nabla_X\left(fY\right)=\left(X_p\left(f f_1\right),...,X_p\left(f f_n\right)\right)$$

$$=\left(X_p f f_1\left(p\right)+f\left(p\right)X_p f_1,...,X_p f f_n\left(p\right)+f\left(p\right)X_p f_n\right)$$

$$=X_p f Y\left(p\right)+f\left(p\right)\nabla_X Y$$

koşulları gerçeklenir.

Burada X teğet vektörünü bir vektör alanı olarak da almak mümkündür. Böylece ∇ fonksiyonu Tanım 4.1.1'e göre $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer konneksiyon oluşturur. Bu konneksiyona $\mathbb{R}^n$'in **standart konneksiyonu** denir. Bu konneksiyonda X ve Y vektör alanlarını özel olarak baz vektör alanları olarak alırsak yani $X=\dfrac{\partial}{\partial u_i}$ ve $Y=\dfrac{\partial}{\partial u_j}$ $\left(i,j=1,...,n\right)$ ise Tanım 4.1.4'e göre,

$$\nabla_{\partial/\partial u_i}\frac{\partial}{\partial u_j}=0$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.1.5. [2]: $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ 'yı $Y_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M$ 'ye götüren Y fonksiyonuna α **eğrisi boyunca bir vektör alanı** denir.

Her $f \in C^{\infty}(M)$ için $Y_{\alpha(t)}f$, I üzerinde reel değerli bir C^{∞} fonksiyondur.

Tanım 4.1.6. [10]: Y , α eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. Her $t \in I$ için $\nabla_{\dot{\alpha}(t)}Y = 0$ ise Y vektör alanı α eğrisi boyunca **paralel kayıyor** denir.

Bir α eğrisi boyunca bir Y vektör alanı verilsin. $\alpha(0) = p$ ve $\dot{\alpha}(0) = X_p$ olsun. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$ ve $Y_{\alpha(t)} = (f_1(t), ..., f_n(t))$ ise bu durumda zincir kuralından,

$$\frac{df_i}{dt}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p) \frac{du_j}{dt}(0) = X_p \cdot (\nabla f_i)_p = X_p \cdot \nabla f_i \big|_{t=0}$$

bulunur. Doğrultu türevi tanımı kullanılarak $\mathbb{R}^n$ 'in standart konneksiyonu için ,

$$\nabla_{X_p} Y = (X_p f_1, ..., X_p f_n)$$

$$= (X_p \cdot \nabla f_1, ..., X_p \cdot \nabla f_n)$$

$$= \left(\frac{df_1}{dt}(0), ..., \frac{df_n}{dt}(0) \right)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla Y, $\mathbb{R}^n$ 'in bir α eğrisi boyunca bir C^{∞} vektör alanı ise α 'nın teğeti $\dot{\alpha}$ olmak üzere $\nabla_{\dot{\alpha}}Y$, iyi tanımlı bir $\mathbb{R}^n$- vektör alanıdır. Özetle, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$ ve $Y_{\alpha(t)} = (f_1(t), ..., f_n(t))$ ise

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} Y = \left(\frac{d(f_1 \circ \alpha)}{dt}, ..., \frac{d(f_n \circ \alpha)}{dt} \right) \qquad (4.1.1)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.1)'e göre Y vektör alanının α eğrisi boyunca paralel kayması için gerek ve yeter koşul ,

$$\frac{d\left(f_i \circ \alpha\right)}{dt} = 0 \quad , \quad \left(i = 1, \ldots, n\right)$$

olmasıdır. Buradan da , c_i 'ler sabitler olmak üzere ,

$$f_i \circ \alpha = c_i$$

olarak elde edilir. Örneğin, $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \right\}$, $\left(i = 1, \ldots, n\right)$ baz vektör alanları herhangi bir eğri boyunca paraleldir.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'in standart konneksiyonuna göre jeodezikleri belirleyelim:

$\alpha\left(t\right) = \left(\alpha_1\left(t\right), \ldots, \alpha_n\left(t\right)\right)$ olsun. Buna göre,

$$\dot{\alpha}\left(t\right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\left(t\right), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}\left(t\right) \right)$$

dir. Buradan da ,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}\left(t\right) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right), \ldots, \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right) \right)$$

$$= \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right)$$

olarak bulunur. Yani,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (4.1.2)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.2) ve Tanım 4.1.2'ye göre α eğrisinin bir jeodezik olması için,

$$\frac{d^2\alpha_i}{dt^2}=0 \qquad (i=1,\dots,n)$$

koşulları gerçeklenmelidir. Buradan a_i ve b_i'ler sabitler olmak üzere,

$$\alpha_i = a_i t + b_i \qquad (i=1,\dots,n) \tag{4.1.3}$$

olarak bulunur. (4.1.3)'deki denklemler de α eğrisinin bir doğrunun lineer parametrelenişi olduğunu gösterir.

Uyarı 4.1.2: Eğrinin parametrelenişi jeodezik tanımı açısından önemlidir.

Örnek 4.1.1: $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(\cos t,\sin t)$ eğrisi verilsin. Bu durumda,

$$\dot{\alpha}(t)=(-\sin t,\cos t)$$

ya da

$$\dot{\alpha}(t)=(-\sin t)\frac{\partial}{\partial u_1}+(\cos t)\frac{\partial}{\partial u_2}$$

olarak bulunur.

$$X_{(u_1,u_2)}=-u_2\frac{\partial}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial}{\partial u_2} \qquad \text{olmak üzere,}$$

$$X_{\alpha(t)}=X_{(\cos t,\sin t)}=-\sin t\frac{\partial}{\partial u_1}+\cos t\frac{\partial}{\partial u_2}$$

şeklindedir. Yani,

$$X_{\alpha(t)}=\dot{\alpha}(t)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t)=\nabla_X X(\alpha(t))$$

$$= X\left(-u_2\right)\left(\alpha\left(t\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_1} + X\left(u_1\right)\left(\alpha\left(t\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_2}$$

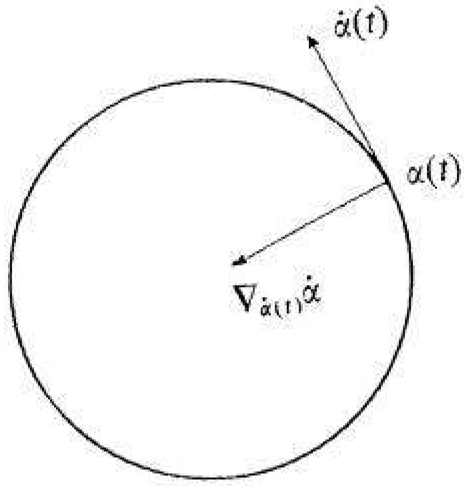
$$= \left[-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right]\left(-u_2\right)\frac{\partial}{\partial u_1} + \left[-u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}\right]\left(u_1\right)\frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$= -u_1\frac{\partial}{\partial u_1} - u_2\frac{\partial}{\partial u_2}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}\left(t\right) \neq 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla çember $\mathbb{R}^2$ 'nin bir jeodeziği değildir, [2]. (Şekil 4.1.1).



Şekil 4.1.1

Bir $m \in M$ noktası verildiğinde başlangıcı bu nokta olan jeodezikler bulmak daima mümkündür fakat bu jeodezikler geniş bir aralık üzerinde tanımlı olmayabilir. Şimdi vereceğimiz teoremle bir başlangıç teğet vektörü belirleyebileceğimizi göreceğiz. Bu teoremin ispatı da Teorem 2.2.3.2'de olduğu gibi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoremine dayanmaktadır. Yukarıda sözü edilen teoremi ifade edelim.

Teorem 4.1.1. [2]: $m \in M$ olsun. Her $X_m \in T_m M$ için $\alpha(0) = m$ ve $\dot{\alpha}(0) = X_m$ olacak şekilde bir $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ $(\varepsilon > 0)$ jeodeziği vardır.

İspatı ise ileride verilecektir.

Tanım 4.1.7: ∇ **,** M üzerinde bir konneksiyon ve (U, ϕ), M **'**de bir harita olsun.

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

şeklinde tanımlanan $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ fonksiyonlarına (U, ϕ) haritasına göre ∇ 'nın **Christoffel Sembolleri** adı verilir.

Uyarı 4.1.3: Tanım 4.1.7'ye göre Γ_{ij}^k Christoffel Sembollerinin simetrik olduğu kararına varmak mümkün değildir. Genel olarak bu durum doğru değildir.

Teorem 4.1.2. [2]: α, M 'de bir eğri ve $m = \alpha(0)$ olsun. Her $X_m \in T_m M$ için $Y_m = X_m$ ve Y, α eğrisi boyunca paralel olacak şekilde α boyunca tanımlı olan bir ve yalnız bir Y vektör alanı vardır.

İspat: Kanıtı yerel olarak yapalım. $\alpha(0)$ 'ın bir U koordinat komşuluğunda ,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

olarak yazılabilir. Yani $\alpha_i = x_i \circ \alpha$ şeklindedir ve (2.2.30) denklemine göre,

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_i (d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)$$

bulunur. $Y = \sum_j f_j(\partial/\partial x_j)$ ise bu durumda Tanım 4.1.1 kullanılırsa,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)} Y = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\sum_i (d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)}\left(\sum_j f_j(\partial/\partial x_j)\right) = \sum_i \sum_j \nabla_{(d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)} f_j(\partial/\partial x_j) = 0 \qquad (4.1.4)$$

şeklinde bulunur. (4.1.4) denklemi, Tanım 4.1.1'in koşulları ve Tanım 4.1.7 kullanılarak,

$$0=\sum_i\sum_j \nabla_{(d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)} f_j\left(\partial/\partial x_j\right)=\sum_i\sum_j \frac{d\alpha_i}{dt}\nabla_{\partial/\partial x_i} f_j\left(\partial/\partial x_j\right)$$

$$=\sum_{i,j}\frac{d\alpha_i}{dt}\left(f_j\nabla_{\partial/\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_{i,j}\frac{d\alpha_i}{dt}\left(f_j\sum_k\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$=\sum_{i,j}\left[\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_k f_j\frac{d\alpha_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}\right] \qquad (4.1.5)$$

olarak elde edilir. (4.1.5) ifadesini x_k'ya göre düzenlersek,

$$\sum_i\left[\sum_k\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_j\sum_k f_j\frac{d\alpha_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}\right]=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_i\sum_k\left[\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_j f_j\frac{d\alpha_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right]\frac{\partial}{\partial x_k}=0$$

bulunur. Buradan da ,

$$\sum_i\left[\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_j f_j\frac{d\alpha_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\right]=0 \qquad (4.1.6)$$

olarak elde edilir. $f_k\circ\alpha\left(0\right)$'lar X_m'in bileşenleri olarak verilirse (4.1.6) denklemi,

$$\frac{d\left(f_k\circ\alpha\right)}{dt}+\sum_{i,j}\left(f_j\circ\alpha\right)\frac{d\alpha_i}{dt}\Gamma_{ij}^k\circ\alpha=0 \qquad , \left(\forall k=1,\ldots,n\right) \qquad (4.1.7)$$

şeklinde bulunur. $f_k\circ\alpha$'lar bilinmeyenler, Γ_{ij}^k ve $\frac{d\alpha_i}{dt}$'ler bilinenler olmak üzere (4.1.7) sistemi bir adi diferansiyel denklem sistemidir. Diferansiyel denklemlerin temel varlık ve teklik teoreminden (4.1.7) sisteminin çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Bu sistemin çözümü bize $f_k \circ \alpha$ 'ları verecektir. Bu yolla devam edilerek α eğrisi boyunca iyi tanımlı olan bir Y vektör alanı edilir. □

Şimdi de α eğrisinin bir jeodezik olmasının koşulunu bulalım:

$$\dot{\alpha}(t) = \sum_i (d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)$$

olmak üzere,

$$\nabla_{\dot{\alpha}(t)}\dot{\alpha}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{\sum_i (d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)}\left(\sum_j (d\alpha_j/dt)(\partial/\partial x_j)\right) = 0$$

şeklinde bulunur. Bu denklemde Tanım 4.1.1'in koşullarını kullanalım ve Teorem 4.1.2'in ispatındaki hesaplara benzer adımları takip edelim. Bu takdirde Tanım 4.1.7 kullanılarak,

$$0 = \nabla_{\sum_i (d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)}\left(\sum_j (d\alpha_j/dt)(\partial/\partial x_j)\right)$$

$$= \sum_i \nabla_{(d\alpha_i/dt)(\partial/\partial x_i)}\left(\sum_j (d\alpha_j/dt)(\partial/\partial x_j)\right)$$

$$= \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\sum_j (d\alpha_j/dt)(\partial/\partial x_j)\right)$$

$$= \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}\left[\sum_j \nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{d\alpha_j}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$= \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}\left[\sum_j \frac{d\alpha_j}{dt}\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\alpha_j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

$$= \sum_{i,j}\left[\sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\alpha_j}{dt}\right)\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

$$= \sum_k \left[\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_j}{dt}\right]\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_k \left[\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\right)\frac{d\alpha_i}{dt}\right]\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$= \sum_k \left[\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_j}{dt} + \frac{d^2\alpha_k}{dt^2} \right] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

sonucuna ulaşılır. O halde α 'nın bir jeodezik olması için,

$$\frac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_j}{dt} = 0 \quad , \ (k = 1,...,n) \qquad (4.1.8)$$

koşulu gerçeklenmelidir. $\{\alpha_i(0)\}$ ve $\{d\alpha_i/dt|_0\}$ verildiğinde (4.1.8) sisteminin çözümü tektir. Böylece Teorem 4.1.1 de ispatlanmış olur.

Tanım 4.1.8: $\tau_{\alpha(t)} : T_{\alpha(0)}M \to T_{\alpha(t)}M$

$$X_m \mapsto \tau_{\alpha(t)}(X_m) = Y_{\alpha(t)}$$

biçiminde tanımlanan τ_α dönüşümüne $\boldsymbol{\alpha}$ **eğrisi boyunca paralel öteleme** adı verilir.

Teorem 4.1.3. [7]: $\tau_{\alpha(t)}$ dönüşümü $T_{\alpha(0)}M$ 'den $T_{\alpha(t)}M$ üzerine bir izomorfizmadır.

Teorem 4.1.3'e göre her lineer konneksiyon bir paralel ötelemeyi mümkün kılar.

$\mathbb{R}^n$ 'in standart konneksiyonu için $\Gamma_{ij}^k = 0 \ (i, j, k = 1,...,n)$ olduğundan τ_α bağımsızdır. Başka bir deyişle,

$$\tau_{\alpha(t)}\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(0)} \right) = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

dir. Bu durum $\mathbb{R}^n$ 'i özgün kılar çünkü diğer bir çok geometri için geçerli değildir.

Not: $x_1,...,x_n$, $\alpha(t_0)$'ın komşuluğunda bir koordinat sistemi oluşturuyorsa, a_i 'ler $(i = 1,...,n)$ reel-değerli fonksiyonlar olmak üzere t_0 'ın komşuluğundaki her t için

$$\tau_{\alpha(t)} X_{\alpha(0)} = \sum_i a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\alpha(t)}$$

olarak yazabiliriz.

Paralel öteleme, kovaryant türevin global halidir. Aşağıdaki önerme, bu durumu ifade edecektir.

Önerme 4.1.1. [11]: α, $\alpha(0)=m$ olacak şekilde X_m'in bir integral eğrisi ve $Y \in \mathfrak{X}(M)$ olsun. Bu durumda,

$$(\nabla_X Y)(m) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\tau_{\alpha(t)}^{-1} Y_{\alpha(t)} - Y_m\right) \tag{4.1.9}$$

dir.

İspat: Z_s, α boyunca paralel olan bir vektör alanı olsun. Bu vektör alanını

$$(Z_s)_{\alpha(0)} = \left(\tau_{\alpha(s)}^{-1} Y_{\alpha(s)}\right)$$

olacak şekilde seçelim. Bir harita üzerinde

$$(Z_s)_{\alpha(t)} = \sum_i Z_s^i(t)\left(\partial/\partial x_i\right)_{\alpha(t)}$$

$$X_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t) = \sum (d\alpha_i/dt)\left(\partial/\partial x_i\right)_{\alpha(t)}$$

$$Y_{\alpha(t)} = \sum Y^i(t)\left(\partial/\partial x_i\right)_{\alpha(t)}$$

olarak yazalım.

Z_s, α boyunca paralel olduğundan Teorem 4.1.2'den

$$\begin{aligned} &\frac{dZ_s^k}{dt} + \sum_{i,j}\frac{d\alpha_i}{dt} Z_s^j(t)\Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) = 0 \qquad , \qquad (k=1,\dots,n) \\ &Z_s^k(s) = Y^k(s) \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

şeklinde yazılabilir. $Z_s^k(t)$ fonksiyonuna $0 \le t \le s$ aralığı üzerinde Ortalama Değer Teoremi'ni uygularsak $0 < \xi_k < s$ için,

$$Z_s^{k\prime}(\xi_k) = \frac{Z_s^k(s) - Z_s^k(0)}{s - 0}$$

olarak bulunur. Buradan da,

$$Z_s^k(s) = Z_s^k(0) + sZ_s^{k\prime}(\xi_k) \tag{4.1.11}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla (4.1.11) kullanılarak,

$$\frac{\tau_{\alpha(s)}^{-1}\left(Y_{\alpha(s)}\right) - Y_{\alpha(0)}}{s}$$

ifadesinin k -ıncı bileşeni,

$$\frac{Z_s^k(0) - Y^k(0)}{s} = \frac{Z_s^k(s) - sZ_s^{k\prime}(\xi_k) - Y^k(0)}{s}$$

$$= -Z_s^{k\prime}(\xi_k) + \frac{Z_s^k(s) - Y^k(0)}{s}$$

şeklinde bulunur. (4.1.10) kullanılırsa yukarıdaki denklem,

$$\frac{Z_s^k(0) - Y^k(0)}{s} = \sum_{i,j} \frac{d\alpha_i}{dt}(\xi_k) Z_s^j(\xi_k) \Gamma_{ij}^k\left(\alpha(\xi_k)\right) + \frac{Y^k(s) - Y^k(0)}{s}$$

olarak elde edilir. $s \to 0$ iken limite geçelim. Bu durumda $\xi_k \to 0$ olduğundan,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\tau_{\alpha(s)}^{-1} Y_{\alpha(s)} - Y_{\alpha(0)}}{s}$$

ifadesinin k -ıncı bileşeni (4.1.10) kullanılarak,

$$\sum_{i,j} \frac{d\alpha_i}{dt}(0) Z_0^j(0) \Gamma_{ij}^k\left(\alpha(0)\right) + \frac{dY^k}{dt}(0) = \sum_{i,j} \frac{d\alpha_i}{dt}(0) Y^j(0) \Gamma_{ij}^k\left(\alpha(0)\right) + \frac{dY^k}{dt}(0)$$

şeklinde bulunur. Yukarıda bulunan ifade de Teorem 4.1.2'nin ispatını yaparken elde ettiğimiz $(\nabla_X Y)(m)$'nin k -ıncı bileşenidir. Böylece (4.1.9) ifadesi elde edilmiş olur. □

Öte yandan, (4.1.9) formülü şu anlama gelmektedir: Kovaryant türev, verilen bir vektör alanının eğri boyunca paralel olmaktan ne kadar saptığını ölçer.

Paralel ötelemeyi kullanarak M'nin herhangi iki noktasındaki teğet uzayları karşılaştırabiliriz. Başka bir deyişle,

$$\prod\nolimits_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_1)} = \tau_{\alpha(t_1)} \circ \tau_{\alpha(t_0)}^{-1} : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_1)}M$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu durumda $\prod_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_1)}$ bir izomorfizma olur ve teğet uzayları karşılaştırmamıza olanak verir. Bu izomorfizma genel olarak α eğrisine bağlıdır.

4.2. BİR RİEMANN METRİĞİNİN GEOMETRİSİ

Bu kısımda bir M manifolduna adına "Riemann Metriği" denilen bir yapı eklendi. Bu yapı sayesinde M üzerinde bir doğal konneksiyon tanımlandı ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde olduğu gibi jeodeziklerin kümesinin minimum uzunluklu eğrilerin kümesi olup olmadığı gösterildi.

Tanım 4.2.1: M bir diferansiyellenebilir manifold ve $m \in M$ olsun. Her $X_m, Y_m, Z_m \in T_mM$ ve $r \in \mathbb{R}$ için,

$(i)\, g_m(X_m + Y_m, Z_m) = g_m(X_m, Z_m) + g_m(Y_m, Z_m)$ ve

$g_m(rX_m, Y_m) = rg_m(X_m, Y_m)$

$(ii)\, g_m(X_m, Y_m) = g_m(Y_m, X_m)$

$(iii)\, g_m(X_m, X_m) \geq 0$ ve $g_m(X_m, X_m) = 0 \Leftrightarrow X_m = 0$

koşullarını sağlayan $g_m : T_mM \times T_mM \to \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir **metrik alanı** adı verilir.

Uyarı 4.2.1: Tanım 4.2.1'deki (i) ve (ii) koşulları ,

$$g_m(X_m, Y_m + Z_m) = g_m(X_m, Y_m) + g_m(X_m, Z_m)$$

$$g_m\left(X_m, rY_m\right) = rg_m\left(X_m, Y_m\right)$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla bir metrik ile T_mM üzerindeki iç çarpımı kastederiz. Tanım 4.2.1 ve Uyarı 4.2.1'de verilen koşullara göre g metrik alanı bilineerdir, simetriktir ve pozitif tanımlıdır (pozitif definittir).

g, M üzerinde bir metrik alanı ve $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ise bu durumda $g(X, Y)$, m'deki değeri $g_m\left(X_m, Y_m\right)$ olan reel-değerli bir fonksiyondur.

Tanım 4.2.2: Her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için $g(X, Y) \in C^\infty(M)$ olacak biçimdeki g metrik alanına M manifoldu üzerinde bir **Riemann Metriği** adı verilir. Bir Riemann metriği ile birlikte M manifolduna **Riemann Manifoldu** denir.

Uyarı 4.2.2: Geometride metrik kavramını uzaklık fonksiyonu olarak değil de iç çarpım olarak değerlendireceğiz.

Şimdi bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı olan eğrilerin ve T_mM üzerindeki teğet vektörlerin uzunluk tanımlarını verelim:

Tanım 4.2.3: Bir T_mM iç çarpım uzayında bir X_m teğet vektörünün **uzunluğu**,

$$\left\|X_m\right\| = \left[g_m\left(X_m, X_m\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.1}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.2.4: $\alpha : [a, b] \to M$ bir C^∞ eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin **uzunluğu,**

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \left\|\dot{\alpha}(t)\right\| dt \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

$\left\|\dot{\alpha}(t)\right\|$, t'nin sürekli fonksiyonu olduğundan (4.2.2)'deki integral mevcuttur. α'nın parçalı bir C^{∞} eğri olması durumunda ise α eğrisinin uzunluğu C^{∞} parçaların uzunlukları toplamı olarak tanımlanır. $L_a^b(\alpha)$ yerine kısaca $L(\alpha)$ olarak göstereceğiz.

Şimdi de bir M Riemann manifoldu için uzaklık fonksiyonu tanımına geçmeden önce bağlantılı uzay tanımını verelim:

Tanım 4.2.5: S bir topolojik uzay olsun. S'de hem açık hem de kapalı olan kümeler sadece S ve $\varnothing$ ise bu uzaya **bağlantılı uzay** adı verilir.

Teorem 4.2.1. [13]: S topolojik uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $S = V_1 \bigcup V_2$ olacak şekilde kesişimleri boş olan $V_1 \neq \varnothing$, $V_2 \neq \varnothing$ açık kümelerinin birleşimi olarak ifade edilememesidir.

Tanım 4.2.5 ve Teorem 4.2.1'in M manifoldu açısından önemi, M bağlantılı bir Riemann manifoldu ise M'nin herhangi iki noktasından geçen en az bir parçalı C^{∞} eğrinin var olmasıdır.

Tanım 4.2.6: Aşağıdaki gibi tanımlanan $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna m ve q noktaları arasındaki **uzaklık** adı verilir.

$$d(m,q) = \inf\left\{L(\alpha)\middle|\alpha \text{ , } M\text{'de bitiş noktaları } m \text{ ve } q \text{ olan bir } C^{\infty} \text{ parçalı eğri}\right\}$$

$d(m,q) \geq 0$ ve $d(m,m) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca, $d(m,q) = d(q,m)$ koşulu sağlanır. Öte yandan $r \in M$ olmak üzere,

$$d(m,q) \leq d(m,r) + d(r,q)$$

koşulu da gerçeklenir, [14]. O halde d fonksiyonu M manifoldu için g ile belirlenen bir metriktir. Böylece g değiştikçe M manifoldu için farklı metrikler elde ederiz.

Bu kısımda ele aldığımız Riemann metriği ve eğri uzunluğu tanımı ile ilgili bir kaç örnek verelim:

Örnek 4.2.1: $\{u_i\}$'ler $(i=1,...,n)$ $\mathbb{R}^n$'in koordinat fonksiyonları olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart Riemann metriği,

$$g_m\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_m,\left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_m\right)=\delta_{ij} \tag{4.2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak $n=2$ durumunda, $\partial/\partial u_1|_m$ ve $\partial/\partial u_2|_m$ teğet vektörleri $T_m\mathbb{R}^2$ için bir ortonormal baz oluşturur. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathbb{R}^2$'de bir eğri olsun.

$$\dot{\alpha}=\left(\frac{d\alpha_1}{dt},\frac{d\alpha_2}{dt}\right)$$

ve $\alpha_i=u_i\circ\alpha$ $(i=1,2)$ olduğundan (2.2.30) kullanılarak,

$$\dot{\alpha}=\frac{d}{dt}(u_1\circ\alpha)\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{d}{dt}(u_2\circ\alpha)\frac{\partial}{\partial u_2}$$

ve

$$\|\dot{\alpha}\|=\left[\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Şimdi sırasıyla, $(-1,0)$'dan $(1,0)$'a olan doğru parçasının ve yarım çemberin uzunluklarını hesaplayalım: İlk durumda, $t\in[0,1]$ için $\alpha(t)=(2t-1,0)$ eğrisini göz önüne alalım. Bu takdirde, $\dot{\alpha}=2(\partial/\partial u_1)$ ve her $t\in[0,1]$ için $\|\dot{\alpha}(t)\|=2$ olarak bulunur. Böylece,

$$L(\alpha)=\int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|\,dt=\int_0^1 2dt=2$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de $t\in[0,1]$ için $\alpha(t)=(-\cos\pi t,\sin\pi t)$ eğrisini gözönüne alalım. Bu durumda,

$$\dot{\alpha}=\pi\sin\pi t\frac{\partial}{\partial u_1}+\pi\cos\pi t\frac{\partial}{\partial u_2}$$

bulunur. Buradan da,

$$\|\dot{\alpha}(t)\|=\left[(\pi\sin\pi t)^2+(\pi\cos\pi t)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\pi$$

olarak elde edilir. Böylece $(-1,0)$ 'dan $(1,0)$ 'a olan eğri uzunluğu,

$$L(\alpha)=\int_0^1 \|\dot{\alpha}(t)\|\,dt=\int_0^1 \pi dt=\pi$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2.2: H**,** olağan alt uzay manifold yapısı ile birlikte $\mathbb{R}^2$ 'nin üst yarı düzlemi olsun. Başka bir deyişle, $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y>0\right\}$ olsun. g 'yi,

$$g_{(u_1,u_2)}\left(\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right)=\frac{\delta_{ij}}{u_2^2} \tag{4.2.4}$$

olarak tanımlayalım.

$\varepsilon>0$ olmak üzere $\alpha_\varepsilon(t)=(0,t)$ ile verilen $\alpha_\varepsilon:[\varepsilon,1]\to H$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayalım: $\dot{\alpha}_\varepsilon=\partial/\partial u_2$ olduğundan Tanım 4.2.3 kullanılarak,

$$\|\dot{\alpha}_\varepsilon(t)\|=\left[g(\dot{\alpha}_\varepsilon,\dot{\alpha}_\varepsilon)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[g_{(0,t)}\left(\frac{\partial}{\partial u_2},\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\delta_{22}}{t^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{t}$$

bulunur. Buradan da Tanım 4.2.4 kullanılırsa,

$$L(\alpha_\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \left\| \dot{\alpha}_\varepsilon(t) \right\| dt = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_\varepsilon^1 = -\ln \varepsilon$$

olarak elde edilir.

Tanım 4.2.7. [11] : M bir N manifoldunun alt manifoldu olsun. N manifoldu bir g^N Riemann metriğine sahipse ve $X_m, Y_m \in T_m M \subset T_m N$ ise bu durumda ,

$$g_m^M (X_m, Y_m) = g_m^N (X_m, Y_m)$$

olarak tanımlanan g^M metriğine g^N ile **indirgenmiş Riemann metriği** ya da **indirgenmiş metrik** adı verilir.

Örnek 4.2.3: $h : S^2 \to \mathbb{R}^3$ kapsama dönüşümü (*inclusion map*) olsun. g^3 ile $\mathbb{R}^3$ üzerindeki standart metriği gösterelim. S^2 üzerindeki g indirgenmiş metriğini

$$g(X,Y) = g^3 (h_* X, h_* Y)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda S^2'deki bir eğrinin uzunluğunu hesaplamak istiyorsak, bu eğriye $\mathbb{R}^3$'te bir eğri gözüyle bakarak işlemlerimizi yapabiliriz. $t \in [0,1]$ için, $\beta(t) = (0, \sin \pi t, \cos \pi t)$ eğrisini gözönüne alalım. Tanım 2.2.3.5 kullanılarak $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere,

$$\left[h_* (\dot{\beta}) \right](g) = \dot{\beta}(g \circ h) = \dot{\beta}(g)$$

bulunur. Buradan da,

$$h_* (\dot{\beta}) = \pi \cos(\pi t) \frac{\partial}{\partial u_2} - \pi \sin(\pi t) \frac{\partial}{\partial u_3}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\left\|\dot{\beta}(t)\right\|=\left\|h_*\left[\dot{\beta}(t)\right]\right\|=\left[g\left(\dot{\beta}(t),\dot{\beta}(t)\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\pi$$

ve

$$L(\beta)=\int_0^1\left\|\dot{\beta}(t)\right\|dt=\pi$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi ise amacımız,

$$L_t^s(\beta)=d\left(\beta(t),\beta(s)\right) \tag{4.2.5}$$

koşulunu sağlayan β eğrilerinin jeodezik olduğunu kanıtlamaktır. Bunun için Riemann metriğinden bir ∇ lineer konneksiyonu elde etmemiz gerekmektedir. $\mathbb{R}^n$'deki düşüncelerden hareketle bir jeodeziği "kendi kendine paralel" olan ve uzaklığı minimum yapan bir eğri olarak tanımlamaya çalışacağız. Kendi kendine paralel olmak yerel bir koşuldur. Bir örnek vererek açıklayalım: Örnek 4.2.3'te ele aldığımız β eğrisinin tanım kümesini $[0,1]$ aralığından $[0,2]$ aralığına genişletirsek, β'nın görüntüsü S^2 üzerinde bir büyük çember gösterir ve $L(\beta)=2\pi$ olur. Oysa $\beta(0)$'dan $\beta(2)$'ye olan uzaklık 2π değildir çünkü $\beta(0)=\beta(2)$'dır. Fakat (4.2.5) denklemi küçük $(s-t)$ için gerçeklenir. Böylece tanım kümesi genişletildiğinde β eğrisinin global olarak minimum uzunluk özelliği geçerli olmaz. Dolayısıyla bu problemi, yerel olarak uzunluğu minimum yapan ve kendi kendine paralel olan bir eğri için bir konneksiyon bularak çözmeliyiz. Şimdi yukarıda ifade ettiğimiz kavramları, tanım ve teoremler vererek ayrıntılı bir şekilde açıklayalım.

Tanım 4.2.8: Her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$2g_m\left(\nabla_{X_m}Y,Z_m\right)=X_m g(Y,Z)+Y_m g(X,Z)-Z_m g(X,Y)$$

$$+g_m\left([X,Y]_m,Z_m\right)+g_m\left([Z,X]_m,Y_m\right)+g_m\left([Z,Y]_m,X_m\right) \tag{4.2.6}$$

ile tanımlanan ∇ konneksiyonuna **Levi-Civita Konneksiyonu** ya da **Riemann Konneksiyonu** adı verilir.

Tanım 4.2.8'de verilen $g(Y,Z)$, $g(X,Z)$, $g(X,Y)$'ler M üzerinde fonksiyonlardır ve "[,]" simgesi, Tanım 2.2.3.4'te verilen Lie Çarpımı'nı göstermektedir. Koordinat fonksiyonları $x_1,...,x_n$ olan bir U komşuluğunda $\partial/\partial x_i$ vektör alanlarını X_i ile gösterelim. Bu durumda, $\left[X_i, X_j\right]=0$, $(i,j=1,...,n)$ olduğunu §2.2.3'de kanıtlamıştık. Böylece (4.2.6) denklemi,

$$2g\left(\nabla_{X_i}X_j, X_k\right)=X_i g\left(X_j,X_k\right)+X_j g\left(X_k,X_i\right)-X_k g\left(X_i,X_j\right) \tag{4.2.7}$$

şekline indirgenir.

(4.2.6)'da verilen ∇ konneksiyonunun Tanım 4.1.1'in koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla, ∇ bir lineer konneksiyondur, [2]. ∇'nın bu şekildeki seçimi ile aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz:

Teorem 4.2.2. [15] : Her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için (4.2.6)'daki gibi tanımlanan ∇ konneksiyonu M üzerinde,

$$Xg(Y,Z)=g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right) \tag{4.2.8}$$

ve

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0 \tag{4.2.9}$$

koşullarını gerçekleyen yegane konneksiyondur.

İspat: *Varlık.* (4.2.6)'dan her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için,

$$2g_m\left(\nabla_{X_m}Y,Z_m\right)=X_m g(Y,Z)+Y_m g(X,Z)-Z_m g(X,Y)$$

$$+g_m\left([X,Y]_m,Z_m\right)+g_m\left([Z,X]_m,Y_m\right)+g_m\left([Z,Y]_m,X_m\right)$$

ve

$$2g_m\left(\nabla_{Y_m}X,Z_m\right)=Y_m g\left(X,Z\right)+X_m g\left(Y,Z\right)-Z_m g\left(Y,X\right)$$

$$+g_m\left(\left[Y,X\right]_m,Z_m\right)+g_m\left(\left[Z,Y\right]_m,X_m\right)+g_m\left(\left[Z,X\right]_m,Y_m\right)$$

olarak yazabiliriz. Yukarıda elde edilen ifadeleri taraf tarafa çıkarıp Lemma 2.2.3.4 (a) özelliğini ve Tanım 4.2.1'i kullanırsak,

$$2g_m\left(\nabla_{X_m}Y,Z_m\right)-2g_m\left(\nabla_{Y_m}X,Z_m\right)=2g_m\left(\left[X,Y\right]_m,Z_m\right)$$

denklemi bulunur. Bu takdirde,

$$g_m\left(\nabla_{X_m}Y-\nabla_{Y_m}X,Z_m\right)-g_m\left(\left[X,Y\right]_m,Z_m\right)=0$$

olarak elde edilir. Buradan da her $Z\in\mathfrak{X}(M)$ için,

$$g_m\left(\nabla_{X_m}Y-\nabla_{Y_m}X-\left[X,Y\right]_m,Z_m\right)=0 \tag{4.2.10}$$

şeklinde bulunur. (4.2.10)'dan,

$$\nabla_{X_m}Y-\nabla_{Y_m}X-\left[X,Y\right]_m=0$$

bulunur. O halde her $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ için,

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right]=T\left(X,Y\right)=0$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde,

$$2g\left(\nabla_X Y,Z\right)=Xg\left(Y,Z\right)+Yg\left(X,Z\right)-Zg\left(X,Y\right)$$

$$+g\left(\left[X,Y\right],Z\right)+g\left(\left[Z,X\right],Y\right)+g\left(\left[Z,Y\right],X\right)$$

ve

$$2g\left(\nabla_X Z, Y\right) = Xg\left(Z, Y\right) + Zg\left(X, Y\right) - Yg\left(X, Z\right)$$

$$+g\left(\left[X, Z\right], Y\right) + g\left(\left[Y, X\right], Z\right) + g\left(\left[Y, Z\right], X\right)$$

olarak yazabiliriz. Bu ifadeleri taraf tarafa toplayıp Lemma 2.2.3.4 (a) özelliğini ve Tanım 4.2.1'i kullanırsak,

$$g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right) = Xg\left(Y, Z\right)$$

şeklinde istenilen elde edilmiş olur.

Teklik. (4.2.6)'nın sağ tarafı g metriği ile belirlendiğinden $\nabla_X Y$'nin değeri de belirlidir. Dolayısıyla ∇ konneksiyonu tek türlü belirlidir. Başka bir deyişle (4.2.6)'yı gerçekleyen $\tilde{\nabla}$ gibi bir konneksiyon alırsak (4.2.6)'dan $\tilde{\nabla} = \nabla$ sonucu elde edilir. Buna göre ∇ konneksiyonu tektir. □

Teorem 4.2.2, "Riemann Geometrsinin Temel Yardımcı Teoremi" olarak bilinir.

Tanım 4.2.9: (4.2.9)'da verilen,

$$T\left(X, Y\right) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \left[X, Y\right]$$

ifadesindeki T tensör alanına **burulma** adı verilir.

Tanım 4.2.10: (4.2.9)'u gerçekleyen bir konneksiyona **burulmasız konneksiyon** adı verilir.

(4.2.9)'da $X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ olarak alalım. Bu durumda, $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ $\left(i, j = 1, ..., n\right)$ olduğunu dikkate alırsak ve Tanım 4.1.7'yi kullanırsak,

$$0=T\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-\nabla_{\partial/\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]$$

$$=\sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x_k}-\sum_k \Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$=\sum_k\left(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

bulunur. Buradan da M 'deki her koordinat sistemi için,

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \qquad , \quad (i,j,k=1,...,n)$$

olarak elde edilir. O halde, Christoffel sembolleri simetriktir.

Tanım 4.2.11: (4.2.8)'i gerçekleyen bir lineer konneksiyona **metrik konneksiyon** adı verilir.

(4.2.8) denklemi metriğin doğrultu türevini kovaryant türevler cinsinden ifade eder, [2].

Paralel öteleme operatörü bir konneksiyonun geometrisinde önemli bir role sahiptir. Bu operatör Riemann metriğinin bir izometri olması ile de uygunluk gösterir. Bunun için aşağıdaki tanımı verebiliriz:

Tanım 4.2.12. [11] : $\tau : T_mM \to T_qM$ dönüşümü için $X_m, Y_m \in T_mM$ olmak üzere,

$$g_q\left(\tau X_m,\tau Y_m\right)=g_m\left(X_m,Y_m\right) \tag{4.2.11}$$

koşulu sağlanıyorsa τ dönüşümüne bir **izometri** denir.

Bir Riemann manifoldu üzerindeki bir "doğal" lineer konneksiyon için paralel öteleme bir izometridir. Şimdi vereceğimiz önermeyle, paralel ötelemenin bir izometri olmasının bir metrik konneksiyon için gerçeklendiğini göstereceğiz.

Önerme 4.2.1. [11] : Paralel ötelemenin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ için ∇ ’nın bir metrik konneksiyon olmasıdır.

İspat: (4.2.8)’in gerçeklendiğini varsayalım. α, M ’de herhangi bir eğri olsun. $Y,Z \in T_{\alpha(0)}M$ için Y_t ve Z_t ile sırasıyla $\tau_{\alpha(t)}Y$ ve $\tau_{\alpha(t)}Z$ paralel ötelemelerini gösterelim. α ’nın tanım kümesindeki her t için

$$g_{\alpha(t)}\left(Y_t,Z_t\right)=g_{\alpha(t)}\left(\tau_{\alpha(t)}Y,\tau_{\alpha(t)}Z\right)=g_{\alpha(0)}\left(Y,Z\right)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu, $f_t=g_{\alpha(t)}\left(Y_t,Z_t\right)$ fonksiyonunun sabit olduğunu göstererek de yapabiliriz. Y ve Z, α boyunca paralel olduğundan ∇ konneksiyonu (4.2.8)’i gerçekliyorsa bu durumda,

$$\dot{\alpha}(t)\,g\left(Y,Z\right)=g\left(\nabla_{\alpha(t)}Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_{\alpha(t)}Z\right)=0 \qquad (4.2.12)$$

olarak bulunur.

$\dot{\alpha}\left(t_0\right)=\alpha_*\left(\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t_0}\right)$ olduğundan (2.2.35) kullanılırsa (4.2.12)’den,

$$0=\alpha_*\left(\frac{d}{dt}\right)g\left(Y,Z\right)=\frac{d}{dt}g_{\alpha(t)}\left(Y_t,Z_t\right)$$

olarak elde edilir. Buna göre, $g_{\alpha(t)}\left(Y_t,Z_t\right)$ fonksiyonu sabittir. Başka bir deyişle,

$$g_{\alpha(t)}\left(Y_t,Z_t\right)=g_{\alpha(0)}\left(Y,Z\right)$$

dir. Dolayısıyla $\tau_{\alpha(t)}$ bir izometridir.

Tersine, herhangi bir α eğrisi için $\tau_{\alpha(t)}$ ’nin bir izometri olduğunu varsayalım ve $X_m \in T_mM$ olsun. α eğrisini $\alpha(0)=m$ ve $\dot{\alpha}(0)=X_m$ olacak şekilde seçelim. (4.2.8)’in her iki tarafı da α eğrisi boyunca sadece Y ve Z vektör alanlarına bağlıdır.

Öncelikle α eğrisi boyunca paralel olan Y ve Z vektör alanlarını göz önüne alalım. Bu durumda $g(Y,Z)$, α boyunca sabit olduğundan m noktasında (4.2.8)'in sol tarafı sıfırdır. Y ve Z, α boyunca paralel olduğundan,

$$\nabla_{X_m} Y = \nabla_{X_m} Z = 0$$

dır. O halde bu durum için (4.2.8) gerçeklenir. Şimdi $\{X_i\}$'ler $(i=1,...,n)$ T_mM'nin bir ortonormal bazı ve $\{X_i(t)\}$'ler α boyunca X_i'lerin paralel ötelemesi olsun. Paralel öteleme bir izometri olduğundan,

$$\delta_{ij} = g_m\left(X_i, X_j\right) = g_{\alpha(t)}\left(\tau_{\alpha(t)} X_i, \tau_{\alpha(t)} X_j\right) = g_{\alpha(t)}\left(X_i(t), X_j(t)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\{X_i(t)\}$'ler de $T_{\alpha(t)}M$ için bir ortonormal baz oluşturur. Y ve Z, α boyunca diferansiyellenebilir vektör alanları olduğundan a_i ve b_i'ler $(i=1,...,n)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$Y_{\alpha(t)} = \sum_i a_i(t) X_i(t)$$
$$Z_{\alpha(t)} = \sum_i b_i(t) X_i(t)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda,

$$X_m g(Y,Z) = \dot{\alpha}(0)\left(g(Y,Z)\right)$$

$$= \alpha_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) g(Y,Z)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g_{\alpha(t)}\left(Y_{\alpha(t)}, Z_{\alpha(t)}\right)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g_{\alpha(t)}\left(\sum_i a_i(t) X_i(t), \sum_i b_i(t) X_i(t)\right)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \sum_i a_i(t) b_i(t)$$

şeklinde bulunur. $\nabla_{X_m} X_i = \nabla_{\dot{\alpha}(0)} X_i = 0$, olduğundan

$$g_m\left(\nabla_{X_m} Y, Z_m\right) + g_m\left(Y_m, \nabla_{X_m} Z\right) = g_m\left(\sum_i \left[a_i(0)\nabla_{X_m} X_i + \left.\frac{da_i}{dt}\right|_0 X_i\right], \sum_j b_j(0) X_j\right)$$

$$+g_m\left(\sum_i a_i(0) X_i, \sum_j \left[b_j(0)\nabla_{X_m} X_j + \left.\frac{db_j}{dt}\right|_0 X_j\right]\right)$$

$$= g_m\left(\sum_i \left.\frac{da_i}{dt}\right|_0 X_i, \sum_j b_j(0) X_j\right)$$

$$+g_m\left(\sum_i a_i(0) X_i, \sum_j \left.\frac{db_j}{dt}\right|_0 X_j\right)$$

bulunur. $\{X_i\}$ ’ler ortonormal olduğundan yukarıdaki denklemi düzenlersek,

$$g_m\left(\nabla_{X_m} Y, Z_m\right) + g_m\left(Y_m, \nabla_{X_m} Z\right) = \sum_i \sum_j \left.\frac{da_i}{dt}\right|_0 b_j(0) g_m\left(X_i, X_j\right)$$

$$+\sum_i \sum_j a_i(0) \left.\frac{db_i}{dt}\right|_0 g_m\left(X_i, X_j\right)$$

$$= \sum_i \left.\frac{da_i}{dt}\right|_0 b_i(0) + \sum_i a_i(0) \left.\frac{db_i}{dt}\right|_0$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \sum_i a_i(t) b_i(t)$$

$$= X_m g(Y, Z)$$

şeklinde elde edilir. O halde, ∇ bir metrik konneksiyondur. □

Şimdi ileride kullacağımız bir ek bilgi verelim: $y_1, ..., y_n$, U üzerinde diğer bir koordinat sistemi olmak üzere, Tanım 4.1.7’ye göre,

$$\nabla_{\partial/\partial y_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)=\sum_\gamma \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \qquad , \qquad (\alpha,\beta,\gamma=1,...,n)$$

olduğundan Tanım 4.1.1'e göre

$$\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}=\sum_{i,j,k}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_j}{\partial y_\beta}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k}+\sum_\mu \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\mu} \qquad , \qquad (\mu=1,...,n) \tag{4.2.13}$$

olarak bulunur, [15].

(4.2.9)'u yerel olarak gerçekleyen bir konneksiyon aşağıda vereceğimiz önermeden dolayı standart Öklid konneksiyonuna benzerdir.

Önerme 4.2.2. [16] : Bir ∇ konneksiyonunun burulmasının sıfır olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M$ için m'nin civarında,

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}=0 \tag{4.2.14}$$

olacak şekilde bir $\{x_i\}$ koordinat sisteminin olmasıdır.

(4.2.14) ifadesi, klasik gösterimle $\Gamma^k_{ij}=0$ şeklinde de yazılabilir. Şimdi Önerme 4.2.2'yi kanıtlayalım.

İspat: m'nin civarında $\Gamma^k_{ij}(m)=0$ olacak şekilde bir $\{x_i\}$ koordinat sistemi olsun. Tanım 4.2.9'da $X=\frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y=\frac{\partial}{\partial x_j}$ olarak alalım. Bu durumda,

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_k\left(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

olduğundan, hipoteze göre $T\equiv 0$ bulunur. Tersine, ∇ konneksiyonunun burulması sıfır ise bir koordinat komşuluğunda $\Gamma^k_{ij}(m)=\Gamma^k_{ji}(m)$'dır.

$$x'_k(p)=\left[x_k(p)-x_k(m)\right]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}(m)\left[x_i(p)-x_i(m)\right]\left[x_j(p)-x_j(m)\right] \quad (4.2.15)$$

şeklinde tanımlayalım. (4.2.15)'te x_l'ye göre türev alıp $\Gamma_{ij}^{k}(m)=\Gamma_{ji}^{k}(m)$ olduğunu kullanırsak kolayca,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial x'_k}{\partial x_l}=\delta_l^k+\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{il}^{k}(m)\left[x_i-x_i(m)\right]\\&\frac{\partial x'_k}{\partial x_l}(m)=\delta_l^k\end{aligned} \quad (4.2.16)$$

bulunur. (4.2.16) ifadesi $\{x'_k\}$'ların m'nin bir komşuluğunda bir koordinat sistemi oluşturduğunu gösterir.

Öte yandan, (4.2.16)'daki ilk denklemde x_k'ya göre türev alırsak,

$$\frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_k \partial x_l}=\Gamma_{il}^{k}(m) \quad (4.2.17)$$

şeklinde bulunur. (4.2.13) ifadesini $\{x'_k\}$ 'lara göre düzenleyip (4.2.17) ifadesini burada yerine yazarsak,

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}(m)=0$$

olarak istenilen elde edilir. □

§4.1'de bir lineer konneksiyon verilince jeodeziklerin belirlenebileceğini gördük. Bu kısımda yaptığımız işlemler sonucunda da burulma tensörü ile metrik konneksiyonun belirlenebileceğini görmüş olduk. Bundan sonra, bir Riemann manifoldunun bir jeodeziği ile Levi-Civita konneksiyonunun jeodeziğini kastedeceğiz.

Şimdi de daha önce sözü edilen eğri uzunluğunun jeodezik açısından önemini gösteren bir teorem verelim.

Teorem 4.2.3. [17]: Bir M Riemann manifoldunun her m noktası için aşağıdaki koşulları sağlayan bir λ pozitif sayısı ve bir $U = \{q \in M \mid d(m,q) < \lambda\}$ komşuluğu vardır.

(i) U'daki herhangi iki q, r noktasından görüntüsü U'da olan bir tek α jeodeziği geçer.

(ii) α jeodeziği uzunluğu $d(q,r)$ olan, q ve r noktalarından geçen tek eğridir.

(iii) Her $q \in U$ için, U'da $\alpha(0) = q$ olan her α jeodeziği $\alpha(t) = (a_1 t, ..., a_n t)$, $(a_1, ..., a_n = sabit)$ biçiminde olacak şekilde q'nun bir civarında yerel bir koordinat sistemi vardır.

Bu teorem şu şekilde yorumlanabilir: Jeodezikler aynı bitiş noktasına sahip olan eğrilerden uzunluğu en küçük olanlarıdır. Öte yandan, manifoldun herhangi iki noktası minimum uzunluklu tek bir jeodezik ile birleştirilebilir. Bu durum yerel olarak $\mathbb{R}^n$'e benzerdir fakat global olarak gerçeklenmeyebilir. Başka bir deyişle bir Riemann manifoldunda m ve q gibi keyfi noktalar verildiğinde bu noktalardan geçen ve uzunluğu $d(m,q)$ olan bir eğri olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$'ı olağan Riemann metriği ile göz önüne alalım. $m = (-1,0)$ ve $q = (1,0)$ olsun. m'den q'ya olan bir eğrinin uzunluğu en azından 2'dir ve her $\varepsilon > 0$ için bu noktalardan geçen ve uzunluğu $2+\varepsilon$'dan küçük olan bir eğri vardır. O halde, $d(m,q) = 2$'dir. Öte yandan $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$'da uzunluğu 2 olan bir eğri yoktur. Bu durum $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$'ın tam metrik uzay olmamasından kaynaklanmaktadır. Aşağıdaki tanımı ve önemli bir teoremi vererek, yukarıda sözü edilen koşulu açıklayabiliriz:

Tanım 4.2.13. [17] : ∇ bir M manifoldu üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. ∇ ile belirlenen her $\alpha : [a,b] \to M$ jeodeziği tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan bir jeodeziğe genişletilebiliyorsa ∇ konneksiyonuna **jeodezik olarak tamdır** (*geodesically complete*) denir.

Teorem 4.2.4 (Hopf-Rinow Teoremi) [17] : Bir Levi-Civita konneksiyonuna sahip olan bir M Riemann manifoldunun jeodezik olarak tam olması için gerek ve yeter koşul M 'nin bir metrik uzay olarak tam olmasıdır. Üstelik, M 'deki herhangi iki m ve q noktasından uzunluğu $d(m,q)$ olan bir eğri geçer.

Teorem 4.2.4'de ifade edilen eğri bir jeodeziktir. Aşağıdaki teorem bunu gösterecektir.

Teorem 4.2.5. [2]: α, uzunluğu bitiş noktaları arasındaki uzaklık olan bir eğri ise bu durumda, α eğrisi bir jeodeziktir.

İspat: α, uzunluğu bitiş noktaları arasındaki uzaklık olan bir eğri olsun. Böyle bir eğri ile görüntüsündeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık ya da α 'nın bir parçası olan daha kısa bir eğri olması gerektiği anlaşılır. Teorem 4.2.3 ile α 'nın görüntüsündeki her noktanın komşuluğunda bir jeodezik olması gerektiğini ifade etmiştik. O halde α eğrisi bir jeodeziktir. □

Şimdi bir Levi-Civita konneksiyonu için Christoffel sembollerini hesaplayalım. $X_i = \partial/\partial x_i$ 'ler $(i=1,...,n)$ T_mM için bir ortonormal baz olmak üzere bir Levi Civita konneksiyonu için Christoffel sembolleri metriğin terimleri cinsinden $\Gamma_{ij}^k = g\left(\nabla_{X_i} X_j, X_k\right)$ olarak verilir. Bir koordinat komşuluğu üzerinde g metriğini $\left[g_{ij}\right] = \left[g\left(X_i, X_j\right)\right]$ şeklinde bir matris değerli fonksiyon olarak ifade etmek mümkündür. Bu matrisin tersini g^{-1} ile gösterelim. O halde, δ_i^k Kronecker deltası olmak üzere,

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \tag{4.2.18}$$

şeklindedir. Tanım 4.1.7'yi (4.2.7)'de kullanırsak,

$$2g\left(\sum_p \Gamma_{ij}^p X_p, X_k\right) = X_i g_{jk} + X_j g_{ik} - X_k g_{ij}$$

bulunur. Tanım 4.2.1 kullanılarak,

$$2\sum_p \Gamma_{ij}^p g_{pk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_p g_{pk}\Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) \qquad (4.2.19)$$

olarak bulunur. (4.2.19)'un her iki tarafını g^{kh} ile çarpıp k üzerinden toplam alırsak,

$$\sum_p \delta_p^h \Gamma_{ij}^p = \frac{1}{2}\sum_k g^{kh}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}\sum_k g^{kh}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

şeklinde bulunur. $k \leftrightarrow h$ indis değişimiyle yukarıdaki denklem,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_h g^{hk}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h}\right) \qquad (4.2.20)$$

olarak elde edilir.

Bu kısımla ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

Örnek 4.2.4: $\mathbb{R}^n$'deki standart metrikte $g\left(\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j\right)$ sabit fonksiyonunun $\partial/\partial u_k$'ya göre türevini alırsak her $i, j = 1,...,n$ için (4.2.3)'ten

$$\nabla_{\partial/\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} = 0$$

bulunur.

Tanım 4.1.7'den her $i, j, k = 1,...,n$ için, $\Gamma_{ij}^k = 0$ olarak bulunur. Dolayısıyla standart metriğin Levi-Civita konneksiyonu, $\mathbb{R}^n$'deki standart konneksiyondur.

Örnek 4.2.5 (Poincaré Üst Yarı Düzlemi): $H \subset \mathbb{R}^2$ metriği (4.2.4) ile verilen üst yarı düzlem olsun. Bu durumda Christoffel sembollerini hesaplayalım.

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{u_2^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u_2^2} \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad g^{ij}=\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_2^2 & 0 \\ 0 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

olduğundan (4.2.20)'den,

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{2} g^{h1}\left(\frac{\partial g_{1h}}{\partial u_2}+\frac{\partial g_{2h}}{\partial u_1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u_h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u_1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}\right)+\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_2}$$

şeklinde bulunur. Benzer hesaplar izlenerek sıfırdan farklı olan Christoffel sembolleri,

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=-\Gamma_{11}^{2}=\Gamma_{22}^{2}=-\frac{1}{u_2}$$

olarak elde edilir.

$\alpha_2>0$ olmak üzere bir $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ jeodeziği için (4.1.8)'den

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}-\frac{2}{\alpha_2(t)}\frac{d\alpha_1}{dt}\frac{d\alpha_2}{dt}=0 \\ &\frac{d^2\alpha_2}{dt^2}+\frac{1}{\alpha_2(t)}\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\alpha_2(t)}\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2=0 \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

denklemleri elde edilir. (4.2.21) sisteminin çözümleri, a,a',b,b',c,c',r ve r' sabitler olmak üzere,

$$\alpha_1(t)=a+b\tanh(rt+c)\quad,\quad \alpha_2(t)=b\sec h(rt+c) \tag{4.2.22}$$

ve

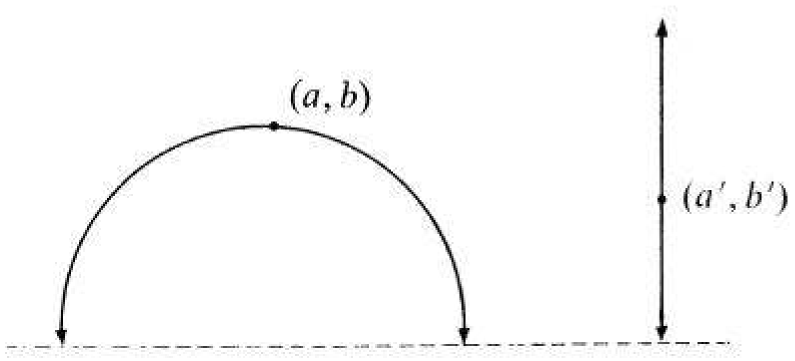
$$\alpha_1(t) = a' \quad , \quad \alpha_2(t) = b'e^{r't+c'} \tag{4.2.23}$$

olarak bulunur, [2].

(4.2.22) formundaki jeodezikler x-eksenine dik olan doğrulardır. (4.2.23) formundaki jeodezikler için,

$$\left(\alpha_1(t) - a\right)^2 + \left(\alpha_2(t) - 0\right)^2 = b^2 \tanh^2\left(rt + c\right) + b^2 \sec h^2\left(rt + c\right) = b^2$$

şeklinde olduğundan bu eğriler $(a,0)$ merkezli ve $|b|$ yarıçaplı üst yarım çemberlerdir (Şekil 4.2.1).



Şekil 4.2.1

Bu manifolda **hiperbolik üst yarı düzlem** adı verilir.

4.3. TENSÖR DEMETLERİ VE VEKTÖR DEMETLERİ

İki manifoldun çarpımı çok temel bir kavramdır. Bu kavramdan Örnek 2.2.2.2'de bahsetmiştik. Bu kısımda ise lif demeti (*fiber bundle*) kavramı tanıtılıp önceki kısımlarla olan bağlantısı ortaya kondu. Lif demetleri çarpım manifoldlarının genelleştirilmiş halidir. Diferansiyel geometride, temel olarak lif demetlerinin-vektör demetlerinin özel bir sınıfında çalışılır. Burada öncelikle tensör demeti kavramı işlendi. Sonra da daha genel olarak vektör demetlerinden bahsedildi. Verdiğimiz tanımlar için kullandığımız kaynakların bazıları [2], [6], [18], [20]'dir.

M , n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, T_p ve T_p^* , sırasıyla, M 'nin p noktasındaki teğet ve kotanjant (*cotangent*) uzayları olsun. Bu durumda p noktasında

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \ldots \otimes T_p}_{r-\text{tane}} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \ldots \otimes T_p^*}_{s-\text{tane}} \tag{4.3.1}$$

şeklinde (r,s) tipinden bir tensör uzayı vardır. Bu uzay, n^{r+s} boyutlu bir vektör uzayıdır, [6].

$$T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p) \tag{4.3.2}$$

olsun.

Tanım 4.3.1: (4.3.2) ile tanımlanan T_s^r uzayına M manifoldu üzerinde (r,s) tipinden bir **tensör demeti** denir.

Amacımız T_s^r üzerinde bir topoloji tanımlamak ve böylece T_s^r tensör demetinin bir Hausdorff uzayı olduğunu göstermektir. Yani T_s^r 'ye bir diferansiyellenebilir manifold yapısı kazandırmaktır. Öncelikle bazı kavramları tanıtalım:

V , $\mathbb{R}$ üzerinde n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. V 'nin lineer otomorfizmalarının grubunu $Gl(V)$ ile gösterelim. $\{e_1,...,e_n\}$, V 'nin bir bazı olsun. Bu durumda V , $\mathbb{R}^n$ 'e izomorf olur. V 'nin bir y elemanı,

$$y = \left(y^1,...,y^n\right) \tag{4.3.3}$$

şeklinde olsun. $Gl(V)$, $n \times n$'lik tekil olmayan bütün matrislerin çarpım grubudur. Yani Örnek 2.2.1.4'te bahsettiğimiz genel lineer gruptur. $a \in Gl(V)$ olmak üzere,

$$y \cdot a = \left(y^1,...,y^n\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

biçiminde sağdan çarpma işlemi tanımlansın.

V_s^r ile V vektör uzayı üzerindeki bütün (r,s) tipinden tensörlerin uzayını gösterelim ve bu uzay,

$$e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*j_1}\otimes\ldots\otimes e^{*j_s} \quad , \quad 1\le i_\alpha , j_\beta \le n \tag{4.3.5}$$

bazına sahip olsun. V_s^r'nin elemanlarını (4.3.3)'teki gibi gösterirsek (4.3.5)'teki baz elemanları da uygun bir şekilde sıralandırılmalıdır.

M üzerinde yerel koordinatları $u^1,\ldots,u^n$ olan bir U koordinat komşuluğu göz önüne alalım. Bu durumda herhangi bir $p\in U$ için T_p ve T_p^* uzaylarının, sırasıyla, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_p\right\}$ ve $\left\{\left(du^1\right)_p,\ldots,\left(du^n\right)_p\right\}$ bazları vardır. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p\otimes\left(du^{j_1}\right)_p\otimes\ldots\otimes\left(du^{j_s}\right)_p \quad , \quad 1\le i_\alpha , j_\beta \le n \tag{4.3.6}$$

$T_s^r(p)$'nin bir bazıdır.

$$\varphi_U : U\times V_s^r \to \bigcup_{p\in U} T_s^r(p) \tag{4.3.7}$$

$$(p,y)\mapsto \varphi_U(p,y)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. $\varphi_U(p,y)$'nin bileşenleri (4.3.6)'ya göre ve y'nin bileşenleri (4.3.5)'e göre yazılabileceğinden φ_U birebirdir.

M'nin bir $\{U,W,\ldots\}$ örtüsünü göz önüne alalım ve bu kümelere (4.3.7) ile verilen $\{\varphi_U,\varphi_W,\ldots\}$ dönüşümlerinin karşılık geldiğini varsayalım. φ_U dönüşümü altında $U\times V_s^r$'nin bütün açık alt kümelerinin görüntüsünün kümesini T_s^r için bir topolojik baz olarak seçelim. Bu topoloji ile birlikte T_s^r bir Hausdorff uzayı olur ve (4.3.7)'deki her dönüşüm bir homeomorfizma olur, [6].

Bir $p \in U$ noktasını sabitleyelim. Bu durumda,

$$\varphi_{U,p} : V_s^r \to T_s^r(p)$$

$$y \mapsto \varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y) \tag{4.3.8}$$

biçiminde tanımlayalım.

(4.3.7) ve (4.3.8)'e göre φ_U ve $\varphi_{U,p}$ dönüşümleri birer lineer izomorfizmadır, [6].

M'nin p'yi içeren ve yerel koordinatları $w^1, ..., w^n$ olan bir W koordinat komşuluğu göz önüne alalım.

$$g_{UW}(p) = \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : V_s^r \to V_s^r \tag{4.3.9}$$

olsun. Bu durumda $g_{UW}(p)$, V_s^r vektör uzayının bir otomorfizmasıdır. Yani $g_{UW}(p) \in Gl(V_s^r)$'dir. O halde (4.3.4)'te tanımlandığı üzere $Gl(V_s^r)$'deki herhangi bir eleman sağdan çarpma işlemini gerçekler. Dolayısıyla $y, y' \in V_s^r$ olmak üzere,

$$\varphi_U(p, y) = \varphi_W(p, y') \tag{4.3.10}$$

gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul

$$y' = y \cdot g_{UW}(p) \tag{4.3.11}$$

olmasıdır. Gerçekten, (4.3.10) koşulundan ve (4.3.9)'dan

$$\varphi_{U,p} = \varphi_{W,p} \circ g_{UW}(p)$$

yazılabilir. Buradan da φ_W'nun birebir olduğu kullanılarak (4.3.10)'dan

$$\varphi_{U,p}(y)=\left[\varphi_{W,p}\circ g_{UW}(p)\right](y) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_{W,p}(y')=\varphi_{W,p}\left[\left(g_{UW}(p)\right)(y)\right]$$

olduğundan (4.3.11) koşulu elde edilir. Tersine, benzer adımlar işlenerek (4.3.11) koşulu gerçekleniyorsa (4.3.10) koşulu sağlanır.

Şimdi , M 'nin herhangi iki U,W komşuluğu için $U\cap W\neq\varnothing$ ise (4.3.9) ile tanımlanan

$$g_{UW}:U\cap W\to Gl\left(V_s^r\right) \tag{4.3.12}$$

dönüşümünün diferansiyellenbilir olduğunu gösterelim.Genelliği bozmadan $r=s=1$ durumunu inceleyelim:

$w^1,...,w^n$ yerel koordinatlarına göre T_p ve T_p^* uzaylarının bazları, sırasıyla, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial w^1}\right)_p,...,\left(\frac{\partial}{\partial w^n}\right)_p\right\}$ ve $\left\{\left(dw^1\right)_p,...,\left(dw^n\right)_p\right\}$ olsun. $y,y'\in V_1^1$ 'i

$$y=y_j^i e_i\otimes e^{*j} \quad , \quad y'=y_j'^i e_i\otimes e^{*j} \tag{4.3.13}$$

şeklinde ifade edelim. Bu durumda,

$$\begin{cases}\varphi_U(p,y)=y_j^i\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p\otimes\left(du^j\right)_p\\[2ex] \varphi_W(p,y')=y_j'^i\left(\dfrac{\partial}{\partial w^i}\right)_p\otimes\left(dw^j\right)_p\end{cases} \tag{4.3.14}$$

olarak yazılabilir.

$$\begin{cases}du^i=\dfrac{\partial u^i}{\partial w^j}dw^j\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u^i}=\dfrac{\partial w^j}{\partial u^i}\dfrac{\partial}{\partial w^j}\end{cases} \tag{4.3.15}$$

bağıntıları $U \cap W$ üzerinde gerçeklenir. Burada $\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)$, yerel koordinatlarda yapılan değişken dönüşümünün Jakobiyen matrisidir. Bu matrisi J_{UW} ile gösterelim. (4.3.10)'da (4.3.14) ifadelerini yazarsak ve (4.3.15)'i kullanırsak,

$$y_l^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p \otimes \left(du^l\right)_p = y_j'^i \left(\frac{\partial}{\partial w^i}\right)_p \otimes \left(dw^j\right)_p \qquad \Rightarrow$$

$$y_l^k \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial w^i}\right)_p \otimes \left(dw^j\right)_p = y_j'^i \left(\frac{\partial}{\partial w^i}\right)_p \otimes \left(dw^j\right)_p$$

olarak bulunur. Buradan da,

$$y_j'^i = y_l^k \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p$$

sonucuna ulaşılır. (4.3.11) kullanılırsa yukarıdaki denklem,

$$\left(y \cdot g_{UW}(p)\right)_j^i = y_l^k \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p \qquad (4.3.16)$$

olarak elde edilir.

Şimdi de iki matrisin tensör çarpımı tanımını verip g_{UW} dönüşümü için yaptığımız işlemlere devam edelim:

Tanım 4.3.2: $A = \left(a_j^i\right)$ ve $B = \left(b_\beta^\alpha\right)$ matrislerinin tensör çarpımı,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_1^1 B & \dots & a_1^n B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 B & \cdots & a_n^n B \end{pmatrix}$$

blok matrisi ile verilir.

y elemanının bileşenlerini, $\left(y_1^1, y_2^1, ..., y_1^n, y_2^n, ..., y_n^n\right)$ şeklinde bir satır ile gösterelim. Bu durumda (4.3.16) denklemi $g_{UW}\left(p\right)$'yi temsil eden $\left(n^2 \times n^2\right)$'lik tekil olmayan matrisin J_{UW} matrisinin tensör çarpımı olduğunu gösterir ve

$$g_{UW} = J_{UW} \otimes J_{UW}^{-1} \tag{4.3.17}$$

şeklindedir. J_{UW} ve $J_{UW}^{-1} = J_{WU}$ Jakobiyen matrisleri $U \cap W$ üzerinde C^{∞} fonksiyonların bileşkesi olduğundan g_{UW} dönüşümü de $U \cap W$ üzerinde C^{∞}'dur.

T_s^r'nin topolojik yapısı ile birlikte $\left\{\varphi_U\left(U \times V_s^r\right), \varphi_W\left(W \times V_s^r\right), ...\right\}$ kümesi T_s^r'nin bir açık örtüsünü oluşturur. u^i'ler M manifoldunun bir U koordinat komşuluğundaki yerel koordinatları ve $y_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$, $y \in V_s^r$'nin (4.3.5)'te verilen baza göre bileşenleri olmak üzere, $\varphi_U\left(U \times V_s^r\right)$ koordinat komşuluğunda bir $\varphi_U\left(p, y\right)$ noktasının koordinatları

$$\left(u^i\left(p\right), y_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}\right) \tag{4.3.18}$$

şeklindedir. $U \cap W \neq \varnothing$ olmak üzere, $g_{UW} : U \cap W \to Gl\left(V_s^r\right)$ dönüşümü diferansiyellenebilir olduğundan (4.3.11)'den T_s^r'nin $\left\{\varphi_U\left(U \times V_s^r\right), \varphi_W\left(W \times V_s^r\right), ...\right\}$ koordinat örtüsü C^{∞}-bağdaşır. Böylece T_s^r bir diferansiyellenebilir manifold olur, [6].

$$\pi : T_s^r \to M \tag{4.3.19}$$

izdüşümü $T_s^r\left(p\right)$'deki elemanları $p \in M$ noktasına taşır ve üzerinedir.

Tanım 4.3.1'de, T_s^r diferansiyellenebilir manifoldunun M üzerinde $\left(r, s\right)$ tipinden bir tensör demeti olarak adlandırıldığını ifade etmiştik. π'ye ise bir **izdüşüm demeti** (*bundle projection*) denir. $T_s^r\left(p\right)$'ye de p noktasında T_s^r demetinin **lifi** (*fiber*) adı verilir.

$r=1$, $s=0$ olması durumunda M 'nin teğet demeti olan $T(M)$'yi elde edilir. $r=0$, $s=1$ olması durumunda ise M 'nin kotanjant demeti olan $T^*(M)$ elde edilir.

Şimdi de yukarıda yaptığımız tanımları genelleştirerek vektör demeti kavramını ifade edelim:

Tanım 4.3.3: E**,** M iki diferansiyellenebilir manifold , $\pi : E \to M$ bir diferansiyellenebilir üzerine dönüşüm ve $V=\mathbb{R}^q$, q-boyutlu bir vektör uzayı olsun. M **'**nin bir $\{U,W,Z...\}$ açık örtüsü ve $\{\varphi_U,\varphi_W,\varphi_Z...\}$ dönüşümlerinin kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa (E,M,π)'ye M üzerinde q-boyutlu bir (gerçel) **vektör demeti** (*vector bundle*) adı verilir.

(i) φ_U 'lar , $U\times\mathbb{R}^q$'dan $\pi^{-1}(U)$'ya birer difeomorfizmdir ve her $p\in U$, $y\in\mathbb{R}^q$ için

$$\pi\circ\varphi_U(p,y)=p \tag{4.3.20}$$

dir.

(ii) Herhangi bir $p\in U$ için,

$$\varphi_{U,p}(y)=\varphi_U(p,y) \quad , \quad y\in\mathbb{R}^q \tag{4.3.21}$$

olsun. Bu durumda, $\varphi_{U,p}:\mathbb{R}^q\to\pi^{-1}(p)$ bir homeomorfizmadır. $U\bigcap W\neq\varnothing$ olmak üzere herhangi bir $p\in U\bigcap W$ için,

$$g_{UW}(p)=\varphi_{W,p}^{-1}\circ\varphi_{U,p}:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q \tag{4.3.22}$$

dönüşümü $V=\mathbb{R}^q$ 'nun bir lineer otomorfizmasıdır. Yani $g_{UW}(p)\in Gl(V)$'dir.

(iii) $U\bigcap W\neq\varnothing$ olmak üzere, $g_{UW}:U\bigcap W\to Gl(V)$ dönüşümü C^∞ 'dur.

E 'ye **demet uzayı** (*bundle space*) , M 'ye **taban uzayı** (*base space*) , π 'ye **izdüşüm demeti** (*bundle projection*) ve $V=\mathbb{R}^q$ 'ya da **tipik lif** (*typical fiber*) adı verilir.

(4.3.10) ve (4.3.11)'de yapılanlara benzer şekilde, (ii) koşulundan $y_U, y_W \in W$ olmak üzere,

$$\varphi_U(p, y_U) = \varphi_W(p, y_W) \tag{4.3.23}$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$y_U \cdot g_{UW}(p) = y_W \tag{4.3.24}$$

gerçeklenmesidir.

Tanım 4.3.4: Herhangi bir $p \in M$ için $E_p = \pi^{-1}(p)$ olarak tanımlanan dönüşüme (E, M, π) vektör demetinin p noktasındaki **lifi** (*fiber*) denir.

$M \times \mathbb{R}^q = E$ çarpım manifoldu en basit vektör demeti örneğidir ve M üzerinde **triviyal demet** ya da **çarpım demeti** adını alır. Öte yandan bu kısmın başında tanımladığımız T_s^r tensör demetleri de vektör demetidir.

Tanım 4.3.5: M, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. T_pM'nin bir bazı ile birlikte $p \in M$ noktasına M üzerinde bir **çatı** (*frame*) adı verilir. $p \in M$ noktasına da çatının **orijini** denir.

M üzerindeki bütün çatıların kümesini $L(M)$ ile gösterelim. $L(M)$'ye M'nin **çatı demeti** (*frame bundle*) adı verilir. Yani,

$$L(M) = \{(p, X_1, ..., X_n) | \, p \in M \text{ ve } \{X_i\},\ T_pM \text{'nin bir bazı}\} \tag{4.3.25}$$

dir.

$$\pi : L(M) \to M \tag{4.3.26}$$

dönüşümü, $(p, X_1, ..., X_n) \mapsto \pi[(p, X_1, ..., X_n)] = p$, şeklinde tanımlansın.

Şimdi $L(M)$'nin bir manifold yapısına sahip olduğunu gösterelim: (U_γ,ϕ_γ) , M'nin bir haritası ve $V_\gamma=\pi^{-1}(U_\gamma)$ olsun. Başka bir deyişle,

$$V_\gamma=\left\{(p,X_1,...,X_n)\in L(M)\,\middle|\,p\in U_\gamma\right\}$$

olsun. Herhangi bir $p\in U_\gamma$ için $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p,...,\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right\}$, T_pM'nin bir bazıdır. Öte yandan bir vektör uzayı verildiğinde bu uzayın herhangi iki bazı, bir tekil olmayan matris ile ayrılır. Dolayısıyla herhangi bir $(p,X_1,...,X_n)$ çatısı verildiğinde,

$$X_i=\sum_j a_{ij}\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \tag{4.3.27}$$

olacak şekilde bir $A=\left[a_{ij}\right]\in Gl(n,\mathbb{R})$ matrisi vardır. Yani A matrisi, $\left\{\partial/\partial x_i|_p\right\}$ bazını $\{X_i\}$ bazına taşır. $Gl(n,\mathbb{R})$ yerine kısaca G yazalım ve $\psi_\gamma\left[(p,X_1,...,X_n)\right]=(p,A^T)$ olarak tanımlanan $\psi_\gamma:V_\gamma\to U_\gamma\times G$ dönüşümlerini göz önüne alalım. $L(M)$ üzerinde bir $\left\{\psi_\gamma^{-1}(W)\,\middle|\,W,\ U_\gamma\times G\text{'de açık}\right\}$ bazı seçerek her bir ψ_γ'yı sürekli yapan bir topoloji kurabiliriz. Şimdi , $\tilde{\phi}_\gamma\left[(p,X_1,...,X_n)\right]=\left(x_1(p),...,x_n(p),a_{11},a_{12},...,a_{nn}\right)$ olarak verilen

$$\tilde{\phi}_\gamma:V_\gamma\to\mathbb{R}^{n+n^2}$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. Bu durumda, $(V_\gamma,\tilde{\phi}_\gamma)$, $L(M)$'nin bir haritasıdır. Verilen bu topoloji ve haritalarla birlikte $L(M)$, $n+n^2$-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur, [2].

Şimdi de $A=\left[a_{ij}\right]$ olmak üzere, $\Phi\left((p,X_1,...,X_n),A\right)=\left(p,\sum_j a_{j1}X_j,...,\sum_j a_{jn}X_j\right)$ olarak tanımlanan

$$\Phi:L(M)\times G\to L(M)$$

dönüşümünü ele alalım. $b \in L(M)$ olmak üzere, $\Phi(b,A) = b^A$ şeklinde gösterelim. Buradan her $b \in L(M)$ için, $\left(b^A\right)^B = b^{AB}$ olduğunu kanıtlayalım:

$\Phi(b,A) = \left(p, \sum_j a_{j1} X_j, ..., \sum_j a_{jn} X_j \right)$, $A = \left[a_{ij}\right], B = \left[b_{ij}\right] \in G$ ve $\sum_j a_{ji} X_j = Y_i$, $(i = 1, ..., n)$ olsun. Buna göre,

$$\Phi\left(\Phi(b,A), B\right) = \Phi\left(\left(p, Y_1, ..., Y_n\right), B\right) = \left(p, \sum_j b_{j1} Y_j, ..., \sum_j b_{jn} Y_j \right)$$

$$= \left(p, b_{11}Y_1 + b_{21}Y_2 + ... + b_{n1}Y_n, ..., b_{1n}Y_1 + b_{2n}Y_2 + ... + b_{nn}Y_n\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\Phi(b,A), B\right) = \left(p, b_{11} \sum_j a_{j1} X_j, + ... + b_{n1} \sum_j a_{jn} X_j, ..., b_{1n} \sum_j a_{j1} X_j + ... + b_{nn} \sum_j a_{jn} X_j \right)$$

$$= \left(p, \sum_j \left(b_{11} a_{j1} + ... + b_{n1} a_{jn}\right) X_j, ..., \sum_j \left(b_{1n} a_{j1} + ... + b_{nn} a_{jn}\right) X_j \right)$$

$$= \left(p, \sum_j \sum_i b_{i1} a_{ji} X_j, ..., \sum_j \sum_i b_{in} a_{ji} X_j \right)$$

$$= \Phi\left(\left(p, X_1, ..., X_n\right), AB\right)$$

$$= \Phi(b, AB)$$

$$= b^{AB}$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemler yapılarak şu sonuca da ulaşabiliriz: $b^A = b$ olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin G 'nin birim matrisi olmasıdır, [2].

Tanım 4.3.6: $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ koşulunu sağlayan $\tilde{\alpha} : I \to L(M)$ eğrisine α 'nın bir **lifti** adı verilir. $b = \pi^{-1}\left(\alpha(0)\right)$ olmak üzere $\tilde{\alpha}(0) = b$ ise $\tilde{\alpha}$ 'ya α 'nın b 'deki lifti denir.

Çatı demetleri için önem taşıyan bir teoremi ifade edelim:

Teorem 4.3.1. [2] : M **'**deki her α eğrisi boyunca bir τ_α paralel ötelemesi karşılık getirmek her α eğrisi, her $b=\pi^{-1}\left(\alpha(0)\right)$ ve α 'nın tanım kümesindeki her t için

$$\tilde{\alpha}_{b^A}(t)=\left[\tilde{\alpha}_b(t)\right]^A \qquad (4.3.28)$$

olacak şekilde tek bir lift karşılık getirmeye eşdeğerdir.

(4.3.28) koşulu α 'nın b^A 'daki liftinin, α 'nın A tarafından etki eden b 'deki lifti olması anlamına gelir. Bu koşula **eşdeğerlik özelliği** adını vereceğiz. Teorem 4.3.1'de ele aldığımız bu lifte α 'nın b 'deki **yatay lifti** (*horizontal lift*) denir. Şimdi Teorem 4.3.1'i kanıtlayalım:

İspat: $b=\left(\alpha(0),X_1,...,X_n\right)\in\pi^{-1}\left(\alpha(0)\right)$ olsun ve

$$\tau_{\alpha(t)}\left(\sum_i c_iX_i\right)=\sum_i c_iY_i\left(\alpha(t)\right) \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\alpha}_b(t)=\left(\alpha(t),Y_1\left(\alpha(t)\right),...,Y_n\left(\alpha(t)\right)\right)$$

biçiminde karşılık gelsin.

$\left\{Y_i\left(\alpha(t)\right)\right\}$, $T_{\alpha(t)}M$ 'nin bir bazı olmak üzere $\tilde{\alpha}_b(t)$ yukarıdaki gibi ifade edilsin. Bu durumda τ_α , yukarıdaki bağıntının sol tarafındaki gibi tanımlansın. Eşdeğerlikten dolayı τ_α , b 'nin seçiminden bağımsızdır ve τ_α bir izomorfizmadır. Başka bir deyişle,

$$\tau_\alpha : T_{\alpha(0)}M \to T_{\alpha(t)}M$$

$$X_p \mapsto \tau_{\alpha(t)}\left(X_p\right)=Y\left(\alpha(t)\right)$$

şeklindedir ve Teorem 4.1.3'e göre τ_α bir izomorfizmadır. Tersine, her α eğrisi için τ_α verilsin ve $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}_b(t)=\left(\alpha(t),Y_1\left(\alpha(t)\right),...,Y_n\left(\alpha(t)\right)\right)$ şeklinde tanımlansın. $\tau_{\alpha(0)}$,

$T_{\alpha(0)}M$ üzerinde birim dönüşüm olduğundan Tanım 4.3.6'ya göre $\tilde{\alpha}_b$, α eğrisinin bir liftidir. $\tilde{\alpha}(0) = (\alpha(0), X_1, ..., X_n) = b$ olduğundan $\tilde{\alpha}_b$, α eğrisinin b'deki liftidir.

$$\Phi(\tilde{\alpha}_b(t), A) = \Phi((\alpha(t), Y_1(\alpha(t)), ..., Y_n(\alpha(t))), A)$$

$$= \left(\alpha(t), \sum_j a_{j1} Y_j(\alpha(t)), ..., \sum_j a_{jn} Y_j(\alpha(t))\right)$$

$$= \tilde{\alpha}_{\Phi(b,A)}(t)$$

olduğundan (4.3.28) koşulu gerçeklenir. □

Bu ispat ile $\tilde{\alpha}_b$ eğrisini α'nın b ile temsil edilen bazının paralel ötelemesi olarak elde edeceğimizi görmüş olduk.

Son olarak asal lif demeti kavramından kısaca bahsedelim:

Tanım 4.3.7: P bir manifold ve G, bir Lie grubu olsun. Her $p \in P$ için,

$$(p^g)^h = p^{gh} \qquad (\forall g, h \in G)$$

$$p^g = p \quad \Leftrightarrow \quad g,\ G\text{'nin birimidir}$$

olacak şekilde bir $P \times G \to P$ dönüşümü varsa G grubu P üzerine **serbest etki eder** (*acts freely*) denir.

$p, q \in P$ olsun. Bir $g \in G$ için $q = p^g$ ise p ve q noktalarına G'nin etkisi altında **eşdeğerdir** denir.

Tanım 4.3.8. [19] : M, n-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, G bir Lie grubu ve $\pi : P \to M$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun.

(i) G, P üzerine serbest etki eder.

(ii) M manifoldu, G'nin etkisi altında P'nin bölüm uzayıdır. $\pi(p)=\pi(q)$ olması için gerek ve yeter koşul p ve q noktalarının G'nin etkisi altında eşdeğer olmasıdır.

(iii) M'nin her U_γ açık örtüsü için aşağıdaki koşulu sağlayan bir $\psi_\gamma : \pi^{-1}(U_\gamma) \to U_\gamma \times G$ difeomorfizmi vardır: $\psi_\gamma(p) = (\pi(p), h)$ ise $\psi_\gamma(p^g) = (\pi(p), hg)$'dir.

koşulları sağlanıyorsa (P, G, π) üçlüsüne M üzerinde diferansiyellenebilir bir **asal lif demeti** (*principal fiber bundle*) adı verilir.

P'ye **total uzay** (*total space*) ya da **demet uzayı** (*bundle space*) , M'ye **baz uzayı** (*base space*) ve G gurubuna da **yapısal grup** (*structural space*) adı verilir.

Tanım 4.3.8 ile önceki yapılanları birleştirerek aşağıdaki sonuca varabiliriz:

Sonuç: $L(M)$, M'nin çatı demeti, $Gl(n,\mathbb{R})$ genel lineer grup ve π, (4.3.26) ile tanımlanan dönüşüm olmak üzere Tanım 4.3.8'e göre $(L(M), Gl(n,\mathbb{R}), \pi)$ üçlüsü bir asal lif demeti oluşturur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında diferansiyel geometride temel bir yere sahip olan diferansiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldları ve bu manifoldlar üzerinde tanımlanan geometrik yapılardan bazılarını inceledik. Lineer konneksiyon kavramının manifold üzerinde tanımlanan diğer yapılarla olan ilişkisini ele aldık. Ayrıca bir Riemann konneksiyonunun Teorem 4.2.2'de ifade ettiğimiz gibi birtakım koşulları sağladığını gösterdik. Ayrıca bir Levi-Civita konneksiyonu için jeodeziklerinin ne şekilde belirlendiğini örneklerle açıklamaya çalıştık. Bunun dışında tensör demeti kavramını inceledik. Bunun sonucunda tensör demetlerinin de bir diferansiyellenebilir manifold yapısında olduğunu gördük. Daha sonra bu yapının genel hali olan ve global diferansiyel geometride temel bir yere sahip, vektör demetleri kavramına kısaca değindik. Son olarak da asal lif demeti kavramını yine kısaca inceleyerek tez çalışmamızı tamamladık.

Modern diferansiyel geometri açısından manifold kavramı önemli olduğu için çeşitli manifoldlar üzerinde pek çok çalışmalar yapılmaktadır. Ayrıca sadece soyut matematik alanında değil günümüzde teorik fizik, ekonometri, bilgisayar grafikleri gibi farklı alanlarda da manifold üzerindeki yapılar kullanılmaktadır. Öte yandan, manifold teorisinin genel rölativite ve klasik mekanik gibi uygulama alanları da bulunmaktadır. Bu teorilerin uygulanması diferansiyel denklem sistemleri çözmeyi gerektirmektedir. Dolayısıyla manifold teorisinde diferansiyel denklemler de sıkça kullanılmaktadır.

Yukarıdaki ifade ettiklerimize ek olarak, asal lif demetleri gibi pek çok yapı üzerinde konneksiyon tanımlama olanağı vardır. Ayrıca bu bilgilerin ışığında genel konneksiyon kavramı da detaylı bir şekilde incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. RUDIN, W., 1976, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book, New York, 0-07-054234-x.

2. MILLMAN, R.S. and STEHNEY, A.K., 1973, The Geometry of Connections, *The American Mathematical Monthly*, 80 (5), 475-500.

3. SABUNCUOĞLU, A., 2006, *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 975-591-237-1.

4. HACISALİHOĞLU, H., 2006, *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*, Hacısalihoğlu Yayıncılık, İstanbul, 9781111132101.

5. CONLON, L., 2008, *Differentiable Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 978-0-8176-4766-7.

6. CHERN, S.S., CHEN, W.H. and LAM, K.S., 2000, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific Publishing, Singapore, 9810234945.

7. O'NEILL, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 0-12-526740-1.

8. YÜKSEL, Ş., 2006, *Genel Topoloji*, Eğitim Kitabevi, Ankara, 975-8890-23-9.

9. BOOTHBY, W.M., 2003, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, USA, 0-12-116051-3.

10. HICKS, N., 1965, *Notes on Differential Geometry*, D. Van. Nostrand Company, London, 0442034059.

11. MILLMAN, R.S. and PARKER, G.D., 1977, *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, USA, 0-13-264143-7.

12. TU, L.W., 2008, *An Introduction to Manifolds*, Springer Science, New York, 978-0-387-48098-5.

13. SINGER, I. M. and THORPE, J. A., 1967, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, USA, 0-387-90202-3.

14. BISHOP, R. L. and CRITTENDEN, R. J., 1964, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, USA, 0-8218-2923-8.

15. YANO, K. and KON, M., 1984, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing, Singapore, 9971-966-15-8.

16. SPIVAK, M., 1975, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volume Two*, Publish or Perish, Inc, USA, 0-914098-88-8.

17. SPIVAK, M., 1970, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Volume One*, Publish or Perish, Inc, USA, 0-914098-84-5.

18. STEENROD, N. E., 1999, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, USA, 0-691-00548-6.

19. KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., 1996, *Foundations of Differential Geometry Volume I*, Wiley-Interscience Publication, USA, 0-471-15733-3.

20. LEE, J. M., 2009, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, USA, 978-0-8218-4815-9.

ÖZGEÇMİŞ

Bahar KIRIK 18.07.1987 tarihinde İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Nişantaşı Nuri Akın Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. 2010 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevi sürdürmektedir.