İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERDE YANLILIK PARAMETRESİNİN TAHMİN EDİLMESİ

Fatma Sevinç KURNAZ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY

Haziran, 2011

İSTANBUL

Bu çalışma 05/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Yard.Doç.Dr.Kadri Ulaş AKAY (Danışman)
İstanbul Üniversitesi

Prof.Dr.Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi

Prof.Dr.İ.Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

Prof.Dr.Müjgan TEZ
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Türker ÖZKAN
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamda engin bilgileriyle beni büyük bir özenle yetiştiren tez danışmanım Sn. Yard. Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. Bizlere matematiğin yanında hayatta yürüyeceğimiz doğru yolları da gösteren Sn. Prof. Dr. Kazım KAYA' ya teşekkür ederim. Bu çalışmam boyunca manevi desteklerini hiç eksik etmeyen anneme, babama ve kardeşime teşekkür ederim. Ayrıca, beni bugünlere getiren bütün hocalarıma ve bölümümüzdeki diğer arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Haziran, 2011 **Fatma Sevinç KURNAZ**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{y}$	: $n \times 1$ tipinde yanıt vektörü
$\mathbf{X}$	: $n \times p$ tipinde açıklayıcı değişkenlerin gözlem matrisi
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Hata vektörü
$\boldsymbol{\beta}$	: Bilinmeyen parametre vektörü
$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$	: Herhangi bir yanlı tahmin edici
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$	: *EKK* tahmin edicisi
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{R}$	: Ridge tahmin edici
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{d}$	: Liu tahmin edici
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	: İki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edici
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	: *k-d* sınıf tahmin edici
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$	: Kanonik form için $p \times 1$ tipinde parametre tahmin vektörü
EKK	: En Küçük Kareler
SHKO	: Skaler Hata Kareler Ortalaması
MHKO	: Matris Hata Kareler Ortalaması
GHKO	: Genelleştirilmiş Hata Kareler Ortalaması
$\mathbf{X}'\mathbf{X}$	: Korelasyon Matrisi
r_{ij}	: Korelasyon Katsayısı
R_j^2	: Çoklu Belirleme Katsayısı
VIF	: Varyans Şişirme Faktörü
$SS_{\mathrm{Res},k}$	: Ridge tahmin edicisi kullanılarak elde edilen artık kareler toplamı
$SS_{\mathrm{Res},d}$	: Liu tahmin edicisi kullanılarak elde edilen artık kareler toplamı
k	: Ridge tahmin edicisine ait yanlılık parametresi
d	: Liu tahmin edicisine ait yanlılık parametresi
$\mathbf{Z}$	: Kanonik formda açıklayıcı değişkenlerin gözlem matrisi
$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$	: Kanonik formda korelasyon matrisi
$\boldsymbol{\Lambda}$	: $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan köşegensel matris
λ_i	: $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleri

(Koyu renkle yazılmış karakterler birer vektör ve matris belirtmektedir)

ÖZET

BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLERDE YANLILIK PARAMETRESİNİN TAHMİN EDİLMESİ

Çoklu lineer regresyon modelinde açıklayıcı değişkenler arasındaki lineer ilişki çoklu iç ilişki olarak adlandırılır. Modelde çoklu iç ilişkinin varolması durumunda, en küçük kareler (*EKK*) tahmin edicisi yine en iyi yansız tahmin edicidir. Ancak, varyansı çok büyüktür. Bu nedenle, *EKK* tahmin edicisi parametrenin gerçek değerinden uzaklaşmaktadır. İç ilişkinin etkisini azaltabilmek için önerilen tahmin süreçleri yanlı tahmin edicilerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Modelde çoklu iç ilişki olması durumunda, *EKK* tahmin edicisine alternatif olarak önerilen yanlı tahmin edicilerden ikisi, Ridge ve Liu tahmin edicileridir. Fakat, Ridge ve Liu tahmin edicileri *EKK* tahmin edicisine bağlıdır. Bu nedenle, *EKK* tahmin edicisinin kararsızlığı Ridge ve Liu tahmin edicilerini etkilemektedir. Bu durumun üstesinden gelmek için iki yanlılık parametresi içeren yanlı tahmin ediciler ileri sürülmüştür. Bu tezin amacı, modelde çoklu iç ilişki olması durumunda önerilen bazı yanlı tahmin edicilerin tanıtılması, yanlılık parametrelerinin seçimi ve bu tahmin edicilerin birbirleriyle karşılaştırılmasıdır.

"Bazı Yanlı Tahmin Edicilerde Yanlılık Parametresinin Tahmin Edilmesi" adlı bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çoklu iç ilişki problemi ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Ayrıca, çoklu iç ilişkinin belirlenmesi, neden olduğu sonuçlar ve çözüm yöntemleri verilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerdeki teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, modelde çoklu iç ilişki olması durumunda *EKK* tahmin edicisine alternatif olarak önerilen Ridge ve Liu tahmin edicileri tanıtılmış ve yanlılık parametrelerinin bulunması için çeşitli yöntemler verilmiştir. Bu tahmin ediciler önce *EKK* tahmin edicisiyle ve daha sonra ise birbirleriyle skaler hata kareler ortalaması (*SHKO*) ve matris hata kareler ortalaması (*MHKO*) ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, modeldeki çoklu iç ilişki probleminin etkisini giderebilmek için *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerini içeren iki tane yanlılık parametresine bağlı tahmin ediciler tanıtılmıştır. Bu tahmin edicilerin yanlılık parametrelerinin bulunması için yöntemler verilmiştir. Ayrıca, tanıtılan iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerin *EKK*, Ridge, Liu tahmin edicileriyle ve birbirleriyle *MHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Beşinci bölümde, Hald veri kümesi yeniden analiz edilmiştir. Teorik olarak verilen karşılaştırmalar grafiksel olarak gösterilmiştir.

Son bölümde, elde edilen sonuçlar verilmiştir.

SUMMARY

ESTIMATION OF THE BIASED PARAMETER IN SOME BIASED ESTIMATORS

In multiple linear regression model, the linear relationship among independent variables is called as multicollinearity. In the present multicolinearity, the ordinary least squares (*OLS*) estimator is still the best linear unbiased estimator. But, its variance is very large. Therefore, *OLS* estimator may be far from parameter's true value. Estimation processes to reduce collinearity effect has led to the emergence of biased estimators. When multicollinearity is present in model, two of biased estimators, which are suggested as alternative to *OLS* estimator, are Ridge and Liu estimators. But, Ridge and Liu estimators are depended on *OLS* estimator. Therefore, unstable of *OLS* estimator effects Ridge and Liu estimators. To overcome this problem, biased estimators which include two biasing parameters are proposed. The aim of this thesis, some biased estimators are suggested are introduction, selection of parameters, and comparison of these estimator with each other in the present of multicollinearity.

The thesis entitled as "Estimation of the Biased Parameter in Some Biased Estimators" consists of six chapter.

In the first chapter, multicollinearity problem is examined as comprehensive. In addition, the determination of multicollinearity, results caused by its, and methods of solution are given.

In the second chapter, definitions and theorems, which are used proof of theorems in later sections, are given.

In the third chapter, in the present multicolinearity in model, Ridge and Liu estimators, which are suggested as alternative to *OLS* estimator, are introduced and various methods for finding biasing parameters are given. These estimators have comparisoned previously *OLS* estimator and then each other according to the scalar mean squared error (*SMSE*) criteria and the matrix mean squared error (*MMSE*) criteria.

In the fourth chapter, estimators which include as special cases *OLS* estimator, Ridge estimator and Liu estimator are introduced. Methods for finding biasing parameters of these estimators are given. In addition, estimators which include two biasing parameters are made comparisons with *OLS* estimator, Ridge estimator, Liu estimator and each other according to the *MMSE* criterion.

In the fifth chapter, Hald dataset is analysed again. Comparisons which are given theoretical are showed as graphically.

In the last chapter, conclusions are gained are given.

1. GİRİŞ

Regresyon analizi, bir bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi analiz eden ve modelleyen analitik ve grafiksel tekniklerden oluşur. Daha özel olarak, regresyon analizi bağımsız değişkenlerden herhangi birindeki değişim sonucunda bağımlı değişkende meydana gelen değişim hakkında bilgi verir. Lineer regresyon analizi, mühendislik, yönetim, bilim ve tıp araştırmaları başta olmak üzere bir çok alanda kullanılan en yaygın istatistiksel yöntemlerden biridir. Regresyon analizi; veri toplama, parametre tahmini, öngörü ve kontrol olmak üzere dört genel kullanım alanına sahiptir (Montgomery ve diğ., 2001).

Genel olarak, lineer regresyon model matris formunda

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanır. (1.1) modelinde $\mathbf{y}$ $(n \times 1)$ tipinden yanıt vektörü, $\mathbf{X}$ $(n \times p)$ tipinden açıklayıcı değişkenlerin gözlem matrisi, $\boldsymbol{\beta}$ $(p \times 1)$ tipinde bilinmeyen parametreler vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ ise $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ ve $\operatorname{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$ olmak üzere $(n \times 1)$ tipinde hata vektörüdür. (1.1) modelindeki $\boldsymbol{\beta}$ parametrelerini tahmin etmek için en küçük kareler (*EKK*) tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır. Gauss-Markov teoremi gereğince $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin tüm yansız tahmin edicileri arasında minimum varyansa sahiptir. *EKK* tahmin edicisinin bu özelliği teorik olarak tatmin edici görünmektedir. Ancak, açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağımlılığa yakın bir ilişki varsa daha küçük varyansa sahip yanlı bir tahmin edici bulunabileceğinden *EKK* tahmin edicisi pratikte kullanılabilir değildir. Bu durum, yani açıklayıcı değişkenler arasında lineer bağımlılığa yakın bir ilişki, regresyon analizinde çoklu iç ilişki (*multicollinearity*) problemi olarak adlandırılmaktadır.

1.1. ÇOKLU İÇ İLİŞKİ PROBLEMİ

Çoklu lineer regresyon modelinde, $\mathbf{X}$ matrisinin sütunlarını oluşturan açıklayıcı değişkenlerin bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Ancak, uygulamada genellikle $\mathbf{X}$ matrisinin sütunları arasında yaklaşık bir lineer ilişki var olabilir. Bu durumda, açıklayıcı değişkenler arasında olduğu varsayılan bağımsızlık varsayımı geçerli olmadığından modelde çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkabilmektedir.

$\mathbf{x}_j$, $\mathbf{X}$ matrisinin j- inci sütun vektörü olsun. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p\}$ vektörleri,

$$\sum_{j=1}^{p} t_j \mathbf{x}_j = 0 \tag{1.3}$$

olacak biçimde yazıldığında, eğer t_j skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı oluyorsa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p\}$ vektörleri lineer bağımlıdır ve modelde "tam çoklu iç ilişki vardır" denir. Böyle bir durumda $rank(\mathbf{X}'\mathbf{X}) < p$ olur ve bu nedenle $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi tekil olacağından $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ matrisi bulunamaz. Bu durum, (1.2) ile verilen *EKK* tahmin edicisinin hesaplanmasını engeller. Eğer, modelde çoklu iç ilişki varsa bu durumda $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisindeki çok küçük bir değişime karşılık $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ matrisinde çok büyük değişim meydana gelir. Ayrıca, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ matrisinin köşegenindeki bazı elemanlar çok fazla büyüyeceğinden, *EKK* tahmin edicisinin bazı elemanları çok büyük varyansa sahip olacaktır. Diğer taraftan, (1.3) eşitliği $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin bazı alt kümeleri için yaklaşık olarak doğru ise $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_p\}$ vektörleri yaklaşık olarak lineer bağımlıdır ve modelde "yaklaşık çoklu iç ilişki vardır" denir. Eğer açıklayıcı değişkenler arasında lineer bir ilişki yoksa, açıklayıcı değişkenler ortogonaldir denir ve $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{I}$ ile gösterilir.

Çoklu iç ilişkinin bir çok nedeni olabilir (Montgomery ve diğ., 2001). Bu nedenlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

1. Kullanılan örnekleme teknikleri: Gerçekte olmamasına rağmen analizcinin bağımsız değişkenler kümesinden sadece bir alt kümeyi örnekleme alması durumunda çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkmaktadır.
2. Modeldeki veya kitledeki kısıtlar: Model veya kitle üzerindeki fiziksel kısıtlardan kaynaklanan çoklu iç ilişki, kitlede var olan gerçek ilişkinin yani güçlü bağımlılığın örneklemde de korunmasıyla oluşur.
3. Modelin belirlenmesi: $\mathbf{X}$ matrisindeki açıklayıcı değişkenlerin değişim aralığının küçük olması durumunda regresyon modeline polinom terim eklenmesiyle çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkmaktadır.
4. Modelin aşırı tanımlanması: Gözlem sayısından çok değişken sayısının olduğu durumlarda çoklu iç ilişki ortaya çıkar. Bu tip modellerle daha çok davranış bilimleri ve tıp gibi alanlarda karşılaşılır. Modelin aşırı tanımlanması durumunda önem sırasına göre bağımsız değişkenlerden bazılarının modelden çıkarılması gerekir.

Çoklu iç ilişkinin belirlenmesi için birçok yöntem vardır. Bunlardan bazıları:

1. Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı: $\mathbf{X'X}$ matrisinin köşegen dışındaki elemanları korelasyon katsayısı olarak adlandırılır ve r_{ij} ile gösterilir. Geometrik olarak; r_{ij} , $\mathbf{x}_i$ ve $\mathbf{x}_j$ vektörleri arasındaki açının kosinüsüdür (Farrar ve Glauber, 1967). Eğer $|r_{ij}|$ bire yakın bir değerse, bu durumda $\mathbf{x}_i$ ve $\mathbf{x}_j$ vektörleri arasında yüksek derecede çoklu iç ilişki olmaktadır.
2. Bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon matrisinin determinantı: $|\mathbf{X'X}|$ determinant değeri $[0,1]$ aralığındadır. Eğer $|\mathbf{X'X}| = 0$ ise $\mathbf{X}$ matrisinin sütun vektörleri lineer bağımlıdır denir. $|\mathbf{X'X}| = 1$ olması durumunda ise $\mathbf{X}$ matrisinin sütunları birbirine diktir denir ve bu durumda lineer bağımlılıktan söz edilemez. Diğer bir deyişle, $|\mathbf{X'X}|$ değeri sıfıra yaklaştıkça çoklu iç ilişkinin derecesi artmaktadır (Farrar ve Glauber, 1967).
3. Çoklu belirleme katsayısı: $\mathbf{x}_j$ değişkeninin $p-1$ bağımsız değişken üzerindeki regresyonundan elde edilen çoklu belirleme katsayısı R_j^2 ile gösterilir. Yani, C_{jj}^{-1} , korelasyon matrisinin tersinin köşegen elemanları ve

$$R_j^2 = 1 - C_{jj}^{-1}, \qquad j = 1,2,...,p \tag{1.4}$$

olmak üzere, çoklu belirleme katsayısı bire yakın ise $\mathbf{x}_j$ ile $\mathbf{X}$ matrisinin geri kalan sütunlarının bir alt kümesi arasında yaklaşık lineer bağımlılık vardır denir.

4. Varyans Şişirme Faktörü (VIF): Farrar ve Glauber (1967) tarafından çoklu iç ilişkiyi belirlemek için önerilmiş olan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ matrisinin j- inci köşegen elemanı Marquardt (1970) tarafından VIF olarak adlandırılmıştır. (1.4) eşitliğinde $C_{jj} = VIF_j$ olarak alınması halinde,

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

olarak yazılabilir. İncelenen modelde kaç tane bağımsız değişken varsa o kadar VIF değeri hesaplanmaktadır. $\mathbf{x}_j$ ile diğer bağımsız değişkenler arasında lineer bağımlılık yoksa R_j^2 değeri çok küçük olacağından VIF_j değeri bire yaklaşır. Diğer bir deyişle, $\mathbf{x}_j$ ile diğer bağımsız değişkenler arasında bir lineer bağımlılık varsa, R_j^2 değeri bire yakın olacağından VIF_j değeri çok büyük olacaktır. Herhangi bir VIF değeri 10 dan büyükse çoklu iç ilişki vardır denir.

5. Koşul sayısı ölçütü: Bir matrisin koşul sayısı, iç ilişkiyi tanımlamada kullanılabilmektedir. Eğer tekil olmayan $\mathbf{A}$ matrisindeki çok küçük bir değişime karşılık $\mathbf{A}^{-1}$ matrisinde çok büyük bir değişim meydana geliyorsa, $\mathbf{A}$ matrisi kötü koşulludur (*ill-condition*) denir. Bu durum gözönüne alınırsa, modelin kötü koşullu olması ile iç ilişkili olmasının birbiriyle bağlantılı olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, kötü koşulluluğun derecesini ölçmek için de koşul sayısı kullanılabilmektedir. Koşul sayısı, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin en büyük özdeğeri λ_i ve en küçük özdeğeri λ_j olmak üzere;

$$\text{Koşul sayısı} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$$

olarak hesaplanır. Diğer bir ifade ile, koşul sayısı, verilerdeki küçük değişmelere karşı regresyonun duyarlılığını ölçmektedir (Montgomery ve diğ., 2001). Hesaplanan koşul sayısı 1000 den büyükse yüksek derecede bir çoklu iç ilişki vardır denir.

1.2. ÇOKLU İÇ İLİŞKİNİN NEDEN OLDUĞU SONUÇLAR

(1.1) ile verilen lineer regresyon modelinde (1.3) şeklinde bir lineer ilişkinin varlığı *EKK* tahmin edicisinde ve hipotez testlerinde birtakım problemlere yol açar. Çoklu iç ilişkinin *EKK* tahminleri üzerindeki etkilerini açıklayabilmek için; x_1 ve x_2 gibi iki tane açıklayıcı değişken içeren lineer regresyon model,

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

şeklinde alınsın. Bu model için normal denklemler,

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

şeklinde elde edilir. Buradan (1.2) eşitliği ile verilen *EKK* tahmin edicisi elde edilir. (1.5) denklemlerinde, r_{12}, x_1 ve x_2 arasındaki basit korelasyon, r_{jy} ise $j = 1, 2$ olmak üzere x_j ile y arasındaki basit korelasyondur. Buradan,

$$\mathbf{C} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1-r_{12}^2} & \dfrac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} \\ \dfrac{-r_{12}}{1-r_{12}^2} & \dfrac{1}{1-r_{12}^2} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

matrisi elde edilir. (1.6) matrisinin (1.5) eşitliğinde yerine yazılması sonucu regresyon katsayılarının tahmini,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_{1y} - r_{12} r_{2y}}{1-r_{12}^2} \quad , \quad \hat{\beta}_2 = \frac{r_{2y} - r_{12} r_{1y}}{1-r_{12}^2}$$

şeklinde bulunur. x_1 ve x_2 arasında tam bir lineer ilişkinin olması durumunda $|r_{12}| = 1$ olacağından $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin rankı düşer ve dolayısıyla (1.2) ile verilen *EKK* tahmin edicisi bulunamaz. x_1 ve x_2 vektörleri arasında yaklaşık lineer ilişki olması durumunda ise $|r_{12}| \approx 1$ olacaktır. Bu durumda ise, $\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \to \pm\infty$ yakınsayacaktır. Yani, x_1 ve x_2 vektörleri arasındaki yaklaşık çoklu iç ilişki, regresyon katsayılarının

EKK tahminlerinin varyanslarının büyümesine neden olmaktadır. Böylece çoklu iç ilişki EKK tahminlerinin mutlak değerce büyük olmasına neden olmaktadır (Montgomery ve diğ., 2001). Bu durum, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ arasındaki uzaklığın karesi incelenerek görülebilir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ arasındaki uzaklığın karesi $L^2 = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} - \boldsymbol{\beta})'(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} - \boldsymbol{\beta})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
E(L^2) &= E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} - \boldsymbol{\beta})'(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} - \boldsymbol{\beta}) \\
&= \sum_{j=1}^{p} E(\hat{\beta}_j - \beta_j)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{p} \operatorname{var}(\hat{\beta}_j) \\
&= \sigma^2 tr(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j}
\end{aligned}$$

dir. Bu durum en az bir λ_j özdeğerinin çok küçük olması halinde, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ arasındaki uzaklığın çok büyük olacağı anlamına gelir. Yani, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin vektörü $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektöründen büyüktür. Dolayısıyla, EKK yönteminin regresyon katsayılarının mutlak değerce büyük tahmin değerlerini ürettiğini gösterir.

Yaklaşık çoklu iç ilişki, parametreler üzerinde kurulan hipotez testlerini olumsuz yönde etkiler. Modelde yaklaşık çoklu iç ilişki olması durumunda, regresyon katsayılarının EKK tahmin edicilerinin varyansları büyük olacağı için standart hataları da büyük olacaktır. Test istatistiği olarak kullanılan t değeri hesaplanırken, varyansın büyük olması nedeniyle t değeri mutlak değerce küçülecektir. Bu durum, bağımsız değişkenlerin gerçekte bağımlı değişkeni açıklama da önemli olsa bile önemsiz olarak nitelendirilmesine neden olacaktır. Her bir bireysel parametrenin istatistiksel anlamlılığını test etmek için kurulan

$$\begin{aligned}
&H_0 : \beta_j = 0 \\
&H_1 : \beta_j \neq 0
\end{aligned}$$

hipotez testinde, H_0 hipotezini H_1 hipotezine karşı test etmekte kullanılan t istatistiği;

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\sqrt{\sigma^2 / (1 - R_j^2)}} = \hat{\beta}_j \sqrt{\frac{1 - R_j^2}{\sigma^2}}$$

olduğundan çoklu iç ilişki olması durumunda; $R_j^2 \to 1$ yaklaşacağından t_j değeri sıfıra yaklaşır. Bunun sonucu olarak gerçekte önemli olsa bile, t testi sonucunda β_j parametresinin sıfırdan farklı olmadığı ve $\mathbf{x}_j$ bağımsız değişkeninin bağımlı değişkeni etkilemediğine karar verilebilir. Diğer yandan, parametrelerin birlikte anlamlılığının incelendiği F testinde parametrelerin anlamlı olduğu sonucuna varılsa bile, her bir parametre için ayrı ayrı t testi yapıldığında parametrelerin anlamsız olduğu sonucuna varılabilir. Bu durum çoklu iç ilişkiden kaynaklanan bir problemdir.

1.3. ÇOKLU İÇ İLİŞKİNİN GİDERİLMESİ İÇİN YÖNTEMLER

Çoklu iç ilişkinin etkilerini önemli bir ölçüde giderebilmek için kullanılacak yöntemlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

1. Ek veri toplanması: Farrar ve Glauber (1967), çoklu iç ilişkiye gidermek için ek veri toplanmasını önermişlerdir. Ancak, modeldeki veya kitledeki kısıtlar nedeniyle bu yöntemi kullanmak her zaman mümkün olmaz.
2. Çoklu iç ilişkiye neden olan değişkenlerin modelden çıkartılması: Çoklu iç ilişkiye neden olan değişkenler belirtilen yöntemler yardımıyla tespit edilir ve modelden atılır. Bu yöntem kullanıldığında değişkenler ortogonalliğe yaklaşır ve *EKK* tahmin edicisinin varyansı küçülür. Fakat, bu durumda bağımlı değişken üzerinde etkili olan bir veya daha fazla değişken modelden atılabilir.
3. Değişkenler üzerinde dönüşüm yapılması: Bağımsız değişkenlere uygun bir dönüşüm uygulanarak çoklu iç ilişki sorununun giderilmesi sağlanabilir. Fakat, bu durumda bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkinin değişmesine neden olabilir.

Bu yöntemler veriler üzerinde değişiklik yapmaya yöneliktir. Fakat, veriler üzerinde değişiklik yapmak her zaman mümkün olmayabilir. Zaman, maddi açıdan yetersizlikler veya yeterli veri kaynağının olmaması gibi sebeplerden dolayı bu yöntemler uygulanamayabilir. Uygulanabilse bile her zaman kesin çözüm vermeyebilir.

Lineer regresyon modelinde çoklu iç ilişki varsa, bu durumda (1.2) ile verilen EKK tahmin edicisi yine en iyi yansız tahmin edicidir. Fakat varyansı çok büyüktür. Dolayısıyla EKK tahmin edicisi kararsız olacaktır. Bu nedenle, açıklayıcı değişkenleri değiştirmeden modelde tutarak çoklu iç ilişki problemini çözmeye yönelik alternatif yaklaşımlar kullanılabilinir. Bu problemin çözümüne yönelik olarak parametre varyanslarını küçültebilecek yanlı tahmin edicilerin kullanılmasının uygun bir yaklaşım olduğu sonucuna varılmıştır. Bu amaçla Stein (1956) tarafından , $0 < c < 1$ olmak üzere $\hat{\boldsymbol{\beta}}_s = c\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisi önerilmiştir. Hoerl ve Kennard (1970a) tarafından önerilen ridge tahmin edicisi uzun yıllar en yaygın çözüm yöntemi olarak kullanılmıştır. Ridge tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y},\quad k > 0$ olarak tanımlanmaktadır. Ridge yanlı tahmin edicisi $k > 0$ olmak üzere k yanlılık parametresinin karmaşık bir fonksiyonudur. Bu nedenle k yanlılık parametresini seçmek için kullanılan çeşitli yöntemler sonucunda çoğunlukla karmaşık denklemlerle karşılaşılmaktadır. Ridge tahmin edicisi $\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}$, $k > 0$ matrisi ile kurgulandığından $\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}$ matrisinin koşul sayısı önemlidir. $\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}$ matrisinin koşul sayısı k parametresinin azalan bir fonksiyonu olduğu için k parametresi $\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}$ matrisinin koşul sayısını indirgeyecek kadar yeterli büyüklükte seçilmelidir. Ancak uygulamada k değeri oldukça küçük seçilmektedir. Bu durum kötü koşulluluk problemini düzeltmek için yeterli büyüklükte bir k değeri seçilmesini engelleyebilir. Bu durumda ridge tahmin edicisi kararsız olabilir.

Ridge ve Stein tahmin edicileri bazı avantaj ve dezavantajlara sahiptirler. Ridge tahmin edici pratikte etkili olmasına rağmen k parametresinin karmaşık bir fonksiyonudur. Stein tahmin edicinin avantajı c nin lineer bir fonksiyonu olmasıdır. Fakat $\hat{\boldsymbol{\beta}}_s$ tahmin vektörünün her elemanının büzülmesi aynıdır. Bu durum pratikte iyi değildir.

k yanlılık parametresinin seçilmesi için ortak bir görüş olmayışı ve ridge tahmin edicisinin kararsız olması durumu göz önüne alınarak çoklu iç ilişki problemini gidermek için yeni tahmin ediciler önerilmiştir. Bu amaçla Liu (1993), Stein tahmin ediciyle Ridge tahmin edicinin avantajlarını birleştiren yeni bir tahmin edici ileri sürmüştür. Liu (1993) tarafından önerilen tahmin edici, $0<d<1$ olmak üzere $\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ şeklindedir. Bu yeni tahmin edici d yanlılık parametresinin lineer fonksiyonudur. Böylece d yanlılık parametresinin seçimi daha kolaydır. Bu yeni tahmin edici Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) ve Gruber (1998) tarafından Liu tahmin edici olarak adlandırılmıştır.

- Liu tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisine bağlıdır. Fakat lineer modelde çoklu iç ilişki olması durumunda *EKK* tahmin edicisinin kararsız olduğu bilinmektedir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisinin kararsızlığının Liu tahmin edicisini de etkileyeceği açıktır. Bu durumun üstesinden gelmek için iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin ediciler önerilmiştir. Bu amaçla Liu tarafından (KEJIAN, 2003), $k>0$ ve $-\infty<d<\infty$ olmak üzere iki tane yanlılık parametresi içeren $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k,d} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y}-d\hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right)$ tahmin edicisinin kullanılmasını önermiştir. Burada, $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi bir tahmin edicisidir. Alternatif olarak, Özkale ve Kaçıranlar (2007), *EKK*, Ridge, Liu tahmin edicilerini içeren $\tilde{\boldsymbol{\beta}}\left(k,d\right) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y}+kd\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)$, $k>0$, $0<d<1$ tahmin edicisini ileri sürmüştür. Alternatif olarak, Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2008), $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y}+d\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right)$ $k>0$, $-\infty<d<\infty$ $k-d$ sınıf tahmin edicisini önermişlerdir. Bu tahmin edicilere alternatif olarak, Yang ve Chang (2010) çoklu iç ilişki problemini gidermek için *EKK*, Ridge, Liu tahmin edicilerini içeren $\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(k,d\right) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$, $k>0$ ve $0<d<1$ yeni iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin ediciyi tanımlamıştır.

1.4. AMAÇ

Lineer regresyon modelinde *EKK* tahmin edicilerinin çoklu iç ilişkiden etkilenmesi nedeniyle son yıllarda alternatif tahmin ediciler üzerinde önemli ilerlemeler olmuştur. Bu tahmin edicilerin en önemlileri Ridge ve Liu tahmin edicileridir. Ancak bu tahmin ediciler sırasıyla k ve d yanlılık parametrelerine bağlıdır. Dolayısıyla, yanlılık parametresinin keyfi olarak belirlenmesinin regresyon katsayıları üzerinde olumsuz etkileri olabilir. Örneğin Ridge tahmin edicisinde, k değerinin sonsuza gitmesi durumunda regresyon parametreleri sıfıra yakınsamaktadır. Bu nedenle bu parametrelerin belirlenmesi için belli bazı ölçütlerin kullanılması gerekmektedir.

Bu tezin amacı, yanlı tahmin edicilerin yanlılık parametrelerinin belirlenmesi için önerilen ölçütleri incelemektir. Bu nedenle, ikinci bölümünde ilk olarak daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Ridge ve Liu tahmin edicilerini tanıtıp, yanlılık parametrelerinin seçimi için yöntemler verilmiştir. Bu tahmin ediciler önce EKK tahmin edicisiyle karşılaştırılmış, daha sonra ise birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümde, lineer regresyon modelindeki çoklu iç ilişkinin etkisini hafifletmek için EKK, Ridge ve Liu tahmin edicilerini kullanan iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin ediciler incelenmiştir. Bu tahmin edicilerin k ve d yanlılık parametrelerinin tahmin edilmesi için farklı yöntemler verilmiştir. Beşinci Bölümde verilen tahmin edicilerin yanlılık parametrelerinin belirlenmesi için Hald veri kümesi ele alınmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. MATRİS CEBRİ

Tanım 2.1: $\mathbf{A}$ $n\times n$ tipinde simetrik bir matris ve $\mathbf{y}$ $n\times 1$ tipinde herhangi bir vektör olsun. $Q(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j$ biçiminde tanımlanan fonksiyona kuadratik form adı verilmektedir.

Tanım 2.2: $\mathbf{A}$ $n\times n$ tipinde simetrik bir matris ve $Q = \mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y}$ bir kuadratik form olmak üzere, sıfırdan farklı $n\times 1$ tipinde her $\mathbf{y}$ vektörü için $Q > 0$ oluyorsa A matrisine pozitif tanımlı matris denir. Eğer, en az bir $\mathbf{y} \neq 0$ için $Q = 0$ ve her $\mathbf{y}$ için $Q \geq 0$ ise $\mathbf{A}$ matrisine yarı pozitif tanımlı denir. $\mathbf{A}$ matrisi pozitif tanımlı ya da yarı pozitif tanımlı ise negatif olmayan tanımlıdır denir.

Tanım 2.3: $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$, $m\times m$ tipinde iki matris olsun. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ negatif olmayan tanımlı ise $\mathbf{B}$ matrisi $\mathbf{A}$ matrisinden büyüktür denir ve sembolik olarak $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ yazılmaktadır.

Tanım 2.4: $\mathbf{A}$ $m\times m$ tipinde bir matris olmak üzere $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$ eşitliğini sağlarsa $\mathbf{A}$ matrisi ortogonaldir denir.

Teorem 2.1 (Rao ve diğ., 2008)**:** $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ $m \times m$ tipinde iki matris olsun. $\mathbf{H}$ ortogonal matris olmak üzere, $\mathbf{H'AH}$ ve $\mathbf{H'BH}$ matrisleri köşegenseldir $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri değişmelidir, yani, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ dir.

Tanım 2.5: $\mathbf{A}$ $p \times p$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ ise, $\mathbf{A}$ matrisi simetriktir denir.

Tanım 2.6: $\mathbf{A}$ $p \times p$ tipinde bir matris olmak üzere, $q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ karakteristik denklemi λ nın p. dereceden bir polinomudur. $q(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ karakteristik denkleminin p tane $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ kökleri $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri olarak adlandırılmaktadır. $|\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}| = 0$ olduğundan $\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}$ matrisi tekildir. Bu nedenle, $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{v}_i = 0$ denkleminin çözümünden sıfırdan farklı bir $\mathbf{v}_i$ vektörü elde edilmektedir ve bu vektöre $\mathbf{A}$ matrisinin λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör adı verilmektedir.

Teorem 2.2 (Rao ve diğ., 2008)**:** $\mathbf{A}$ $p \times p$ tipinde bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ eşitliği ile verilmektedir.

Teorem 2.3 (Rao ve diğ., 2008)**:** $\mathbf{A}$ $p \times p$ tipinde simetrik bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere,

1- $\mathbf{A}$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$ olmasıdır.

2- **A** matrisinin yarı pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,...,p$ olmasıdır.

Teorem 2.4 (Spektral Parçalanış Teoremi)**:** **A** $p \times p$ tipinde simetrik bir matris olsun. $\boldsymbol{\Lambda} = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\right)$, **A** matrisinin özdeğerlerinden oluşan matris ve **T** bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri sütun kabul eden ortogonal matris olmak üzere, **A** matrisi;

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}' = \sum \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i'$$

biçiminde yazılabilmektedir.

Teorem 2.5 (Theobald, 1974)**:** **N** , $n \times n$ tipinde simetrik bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{N} \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul, bütün negatif olmayan tanımlı **B** matrisleri için $tr\left(\mathbf{BN}\right) \geq 0$ olmasıdır.

İspat: $n \times n$ tipinde **N** simetrik matrisi Teorem 2.4 kullanılarak $\mathbf{N} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}' = \sum \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i'$ biçiminde yazılabilir. Buradan, $\mathrm{tr}\left(\mathbf{BN}\right) = tr\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{q}_i' \mathbf{B}\mathbf{q}_i$ eşitliği elde edilir.

$\Rightarrow$ Varsayalım ki $\mathbf{N} \geq 0$ olsun. Teorem 2.3 den $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,...p$ olduğu görülür. Bu durumda, **B** negatif olmayan tanımlı matris olarak verildiğinden $tr\left(\mathbf{BN}\right) \geq 0$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$ Tersine varsayalım ki bütün negatif olmayan tanımlı **B** matrisleri için $tr\left(\mathbf{BN}\right) \geq 0$ olsun. Bu durumda, uygun $i = 1,2,...,p$ değerleri için $\mathbf{B} = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i'$ seçilerek $0 \leq \mathrm{tr}\left(\mathbf{BN}\right) = tr\left(\mathbf{B}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i'\right) = tr\left(\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i' \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i'\right) = \lambda_i$, $i = 1,2,...,p$ biçiminde yazılabilir ve böylece Teorem 2.3 den $\mathbf{N} \geq 0$ olduğu görülür.

Teorem 2.6 (Rao ve diğ., 2008)**:** $\mathbf{A}$ simetrik bir matris olmak üzere $\mathbf{A} = \mathbf{T\Lambda T}'$ spektral parçalanışına sahip olsun. Bu durumda, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{\Lambda}$ matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.

2.2. İSTATİSTİKSEL KARAR TEORİSİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ VE BAZI TEOREMLER

Tanım 2.7: $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$**,** $p \times 1$ tipinde $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün tahmin vektörü olsun. Eğer, $E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$ ise $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$**,** $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün yansız tahmin edicisidir. Eğer $E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \neq \boldsymbol{\beta}$ ise, bu durumda $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ yanlı bir tahmin edicidir ve yanlılık $yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

Teorem 2.7: $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisi $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün yansız bir tahmin edicisidir.

İspat: $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right) &= E\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\right] = E\left[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\right)\right] \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.8: σ^2 parametresinin yansız tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-p}$ dir.

İspat: $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} = \left[\mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\right]\mathbf{y}$ eşitliğinde (1.1) modeli göz önüne alındığında,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} = \left[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\right]\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \left[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\right]\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}$$

biçiminde yazılabilir. $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ simetrik, idempotent bir matris olduğundan,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

dir. İz operatörü kullanılarak (2.1) eşitliğinin beklenen değeri hesaplandığında,

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}) = E\big(tr(\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon})\big) = E\big(tr(\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\big) = tr\big(\mathbf{M}E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\big) \\ &= \sigma^2 tr\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right] = \sigma^2 tr\left[\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_p\right] = \sigma^2(n-p) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $E\left(\dfrac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n-p}\right) = \sigma^2$ olduğundan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-p} = \frac{\mathbf{y}\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right]\mathbf{y}}{n-p} \tag{2.2}$$

eşitliği σ^2 parametresinin yansız tahmin edicisidir.

Teorem 2.9 (Gauss-Markov Teoremi): Eğer $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ ve $\operatorname{cov}(\mathbf{y}) = \sigma^2\mathbf{I}$ ise $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisi, diğer bütün lineer yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahiptir. Diğer bir deyişle, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ en iyi lineer yansız tahmin edici (BLUE) dir.

Tanım 2.8: Lineer regresyon modelinin $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ lineer tahmin edicisi, $\mathbf{C}$ $n \times p$ tipinde ve $\mathbf{d}$ $n \times 1$ tipinde matrisler olmak üzere,

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d} \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.3) eşitliğinde $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ise $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün homojen tahmin edicisidir denir. Aksi durumda; $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörünün homojen olmayan tahmin edicisidir denir.

Tanım 2.9: $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi bir tahmin edicisi olmak üzere, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ tahmin edicisinin Genelleştirilmiş Hata Kareler Ortalaması (*GHKO*),

$$GHKO(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = E[(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{B}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})] \tag{2.4}$$

eşitliği ile verilmektedir. (2.4) ifadesinde, $\mathbf{B}$ negatif olmayan tanımlı matristir. Eğer (2.4) eşitliğinde, özel olarak $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ negatif olmayan tanımlı matrisi kullanılırsa, Skaler Hata Kareler Ortalaması (*SHKO*) olarak adlandırılan,

$$\begin{aligned} SHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) &= E\left[(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right] = E\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right]'\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right] \\ &= E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)'\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) + \left(E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right)'\left(E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right) \\ &= tr\left(\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)' yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ifadesi elde edilir. İstatistik karar teorisinde, $E\left[\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)'\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)\right]$ ifadesi karelenmiş kayıp fonksiyonun beklenen değeri veya karelenmiş kayıp fonksiyonuna karşılık gelen risk fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.10: $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi bir tahmin edicisi olmak üzere Matris Hata Kareler Ortalaması (*MHKO*),

$$\begin{aligned} MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) &= E\left[(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\right] = E\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right]\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right]' \\ &= E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)' + \left(E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right)\left(E\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{\beta}\right)' \\ &= \mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)' \end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde ifade edilmektedir. (2.5) ve (2.6) eşitlikleri arasındaki bağıntının

$$SHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) = tr\left(MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) = tr\left(\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)'\right)$$
$$= tr\left(\mathrm{var}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)' yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) \tag{2.7}$$

biçiminde olduğu görülür.

Tanım 2.11 (Theobald, 1974)**:** Bütün negatif olmayan tanımlı **B** matrisleri için $GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) \leq GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) \geq 0$ olmasıdır.

Tanım 2.12: $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi iki tahmin edicisi $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ ve $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2$ olsun. $MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ matrisi negatif olmayan tanımlı ise, yani $MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) \geq MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ ise $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2$ tahmin edicisi $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ tahmin edicisinden daha iyidir.

Teorem 2.10 (Rao ve diğ., 2008)**:** $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi iki tahmin edicisi $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ ve $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2$ olsun. Bu durumda, $MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ matrisinin negatif olmayan tanımlı olması için gerek ve yeter koşul tüm negatif olmayan tanımlı $\mathbf{B} = \mathbf{bb}'$ matrisleri için $GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) \geq 0$ olmasıdır.

İspat: (2.7) ifadesinden $tr\left(\mathbf{B}\left(MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)\right)\right) = GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - GHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ eşitliği yazılabilir. Yazılış kolaylığı açısından $\mathbf{N} = MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ ile gösterilsin. **N** simetrik matrisinin özdeğerleri $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, ..., \mathbf{q}_p$ olmak üzere Teorem 2.4 den,

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i' \tag{2.8}$$

biçiminde yazılabilir. (2.8) ifadesinden,

$$tr(\mathbf{BN}) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{q}_i' \mathbf{B} \mathbf{q}_i \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilir.

$\Rightarrow$ **N** simetrik matrisi negatif olmayan tanımlı olsun. Bu durumda, Teorem 2.5 den $tr(\mathbf{BN}) \geq 0$ dır.

$\Leftarrow$ $GHKO(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1) - GHKO(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2) \geq 0$ olsun. Yani,

$tr(\mathbf{BN}) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{q}_i' \mathbf{B} \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \mathbf{q}_i' \mathbf{b}\mathbf{b}' \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i (\mathbf{b}'\mathbf{q}_i)^2 \geq 0$ olsun. Bu durumda, $\forall i = 1, 2, ..., p$ için $\mu_i \geq 0$ ise Teorem 2.5 den **N** simetrik matrisi negatif olmayan tanımlıdır.

Uyarı 2.1: *SHKO* ölçütünün kullanılması durumunda, *MHKO* matrisindeki köşegen dışı elemanlar göz ardı edileceğinden hesaplamalar daha kolay olacaktır. Ancak, *MHKO* ölçütü, *SHKO* ölçütüne göre daha kapsamlı ve daha iyi bir ölçüttür. Diğer yandan, Teorem 2.10 da keyfi olarak seçilen negatif olmayan tanımlı bir $\mathbf{B} = \mathbf{bb}'$ matrisi, **N** matrisinin pozitif tanımlı olmasını her zaman garanti etmez.

Teorem 2.11 (Farebrother, 1976)**:** **M** $p \times p$ pozitif tanımlı bir matris, yani $\mathbf{M} > \mathbf{0}$ ve $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ $p \times 1$ bir vektör olsun. Bu durumda, $\mathbf{M} - \mathbf{bb}' \geq \mathbf{0}$ dır $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \leq 1$ dir.

İspat: $\mathbf{M} - \mathbf{bb}' \geq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \geq \mathbf{bb}' &\Leftrightarrow \mathbf{c}'\mathbf{Mc} \geq \mathbf{c}'\,\mathbf{bb}'\mathbf{c},\ \forall\, \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \text{ için} \\
&\Leftrightarrow \mathbf{c}'\mathbf{Mc} \geq (\mathbf{c}'\,\mathbf{b})^2,\ \forall\, \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \text{ için} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\mathbf{b}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}} \geq \frac{(\mathbf{c}'\,\mathbf{b})^2}{\mathbf{c}'\mathbf{Mc}\mathbf{b}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

olacaktır. Burada Cauchy-Schwartz eşitsizliği, yani $\left(\mathbf{c}'\mathbf{b}\right)^2 \le \left(\mathbf{c}'\mathbf{M}\mathbf{c}\right)\left(\mathbf{b}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}\right)$ kullanılırsa, eşitsizliğin sağ tarafı maksimum 1 olacağından,

$$\mathbf{b}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \le 1$$

elde edilecektir.

Teorem 2.12 (Trenkler, 1980): $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{y},\ j = 1,2$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin iki homojen lineer tahmin edicisi ve $\mathbf{C}$ pozitif tanımlı bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2'$ olmak üzere, eğer $\boldsymbol{\beta}'\left(\mathbf{A}_2\mathbf{X} - \mathbf{I}\right)'\mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{A}_2\mathbf{X} - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\beta} < \sigma^2$ ise $MHKO(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1) - MHKO(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2)$ pozitif tanımlı bir matristir.

İspat: Teorem 2.11' de $\left(\mathbf{A}_2\mathbf{X} - \mathbf{I}\right)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{M}$ alınması halinde elde edilir.

Teorem 2.13 (Trenkler ve Toutenburg, 1990)**:** $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{y},\ j = 1,2$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin iki homojen lineer tahmin edicisi ve $\mathbf{C}$ pozitif tanımlı bir matris olsun. Bu durumda, $\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2'$ olmak üzere, $MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{b}_2'\left(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{C} + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1'\right)^{-1}\mathbf{b}_2' < 1$ olmasıdır.

İspat: Teorem 2.11' de $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$ ve $\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{C} + \mathbf{b}_1\mathbf{b}_1' = \mathbf{M}$ alınması halinde elde edilir.

Tanım 2.13 (Standartlaştırılmış Model)**:** (1.1) modeli için *EKK* tahmin edicisi hesaplanırken $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin tersinin bulunması gerekmektedir. Ancak, (1.1) modelinde bağımsız değişkenlerin hepsi veya bazıları iç ilişkiye sahipse $\left|\mathbf{X}'\mathbf{X}\right|$ determinantı sıfıra yakın bir değer olarak bulunmaktadır. Bu durum, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin tersinin hesaplanması sırasında önemli problemlere neden olmaktadır. Bu problemi gidermek için kullanılabilecek bir yöntem, değişkenleri belli bir kurala göre dönüştürmektir. Böylece belli bir kurala göre ölçeklendirilip parametrelendirilmiş olan regresyon modeli üzerinde hesaplamalar yapmaktır. Bu ölçeklendirme işleminden sonra elde edilen modele standartlaştırılmış model denir. Standartlaştırılmış modeldeki parametreler de standartlaştırılmış formdadır ve elde edilen tahminler ilişkisizdir.

Standartlaştırma işlemi, gözönüne alınan modellerin yapısına göre değişiklik göstermektedir. Eğer gözönüne alınan model sabit terim içeriyorsa homojen olmayan model olarak adlandırılmaktadır. Homojen olmayan modeller için standartlaştırma işlemi; birim uzunluk ölçeklendirme yöntemi ya da standartlaştırma yöntemi olmak üzere iki türlü yapılabilmektedir. Genellikle, birim uzunluk ölçeklendirme yöntemi tercih edilmektedir. Birim uzunluk ölçeklendirme yöntemi ile **y** yanıt değişkeninin ve $\mathbf{x}_j$ bağımsız değişkeninin bileşenleri,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j &= \frac{y_j - \overline{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}} , j = 1,2,...,p \\ \tilde{z}_j &= \frac{x_j - \overline{x}_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \overline{x}_j\right)^2}} , \quad j = 1,2,...,p \end{aligned} \tag{2.10}$$

biçimindedir. (2.10) eşitlikleri, sıfır ortalamaya ve birim uzunluğa sahiptir. Verileri standartlaştırmanın avantajlarından biri; regresyon katsayılarının sayısal birimlerle karşılaştırılabilir olmasını sağlamasıdır. Birim uzunluk ölçeklendirme yöntemi ile ölçeklendirilen veri için,

$$cor\left(x_j, x_k\right) = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} z_{ik} \tag{2.11}$$

eşitliği yazılabilir. Yani, x_j ve x_k orijinal değişkenleri arasındaki korelasyon katsayıları ölçeklendirilmiş formdaki değişkenlerin çarpımlarının toplamı olarak ifade edilebilir.

Veri kümelerinin analizi için ayrıca sabit terim içermeyen modeller de gözönüne alınabilmektedir. Sabit terim içermeyen modeller, homojen model olarak adlandırılmaktadır. Homojen modeller, homojen olmayan modellerden faklı bir ölçeklendirme yöntemi ile standartlaştırılmaktadır. Burada yapılan işlemlerde, değişkenlerin ortalama değerlerinden farkı (yani merkezileştirme) kullanılmamaktadır. Bu durumda yapılan ölçeklendirme işlemi

$$\tilde{y}_j = \frac{y_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}} \quad, j = 1, 2, ..., p$$
$$\tilde{z}_j = \frac{x_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}, \quad j = 1, 2, ..., p \tag{2.12}$$

şeklindedir.

Çoklu iç ilişki problemini gidermek için bir çok yanlı tahmin edici ileri sürülmüştür. Bu tahmin edicilerin hesaplanması sırasında birtakım zorluklar ortaya çıkabilmektedir. Bu zorlukları ortadan kaldırmak için modelin kanonik formda ifade edilmesi iyi bir çözüm yöntemidir.

Tanım 2.14 (Kanonik Model): (1.1) lineer regresyon model,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{XT})(\mathbf{T}'\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

biçiminde kanonik formda yazılabilmektedir. Burada $\mathbf{T}$ matrisi, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri sütun kabul eden ortogonal matristir. (1.1) denkleminde $\mathbf{Z} = \mathbf{XT}$ ve $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}'\boldsymbol{\beta}$ olduğu kullanılarak,

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.13}$$

kanonik modeli elde edilmektedir. Burada, $\mathbf{y}$ vektörü ve $\mathbf{Z}$ matrisi, $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ ve $\mathbf{Z}'\mathbf{y}$ katsayılarının korelasyon matrisleri olmak üzere (2.10) birim uzunluk ölçeklendirme dönüşümleri yardımıyla merkezileştirilmiş ve standartlaştırılmıştır. $\boldsymbol{\Lambda}$ ve $\mathbf{T}$ kare matrisleri,

$$\mathbf{T}'(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})\mathbf{T} = \boldsymbol{\Lambda} \quad \text{ve} \quad \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{TT}' = \mathbf{I}$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Ayrıca, $\mathbf{T}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ bağıntısı yardımıyla istenildiği takdirde kanonik formdaki parametrelerden orijinal parametrelere geçilebilmektedir.

3. BAZI YANLI TAHMİN EDİCİLER VE KARŞILAŞTIRILMALARI

Bu bölümde *EKK* tahmin edicisine alternatif olarak önerilen iki önemli tahmin edici ele alınacaktır. Bu tahmin ediciler Ridge ve Liu tahmin edicileridir. Ayrıca, bu tahmin edicilerin yanlılık parametrelerinin seçimi ile birlikte birbirleri ile karşılaştırmaları verilecektir.

3.1. RİDGE TAHMİN EDİCİSİ

Ridge tahmin edicisi, ilk kez Hoerl ve Kennard (1970a) tarafından $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisindeki iç ilişkiyi gidermek amacıyla önerilmiştir. Bu amaçla Hoerl ve Kennard (1970a),(1970b), $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif küçük bir k sabitini ekleyerek parametrelerin tahmin edilmesi için kullanmayı önermişlerdir. Kısaca, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ yerine k yanlılık parametresini içeren $\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}$ matrisi kullanılmaktadır. Çoklu iç ilişki olması durumunda (1.2) ile verilen *EKK* tahmin edicisi yerine, Ridge tahmin edicisi olarak adlandırılan k parametresine bağlı yanlı bir tahmin edici,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \qquad k>0 \tag{3.1}$$

olarak tanımlanmaktadır. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ Ridge tahmin edicisiyle $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisi arasında,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R &= \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\\ &= \left[\mathbf{I}+k\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right]^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\\ &= \left[\mathbf{I}+k\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right]^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\end{aligned}$$

bağıntısı vardır. k yanlılık parametresinin seçimi, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin performansını etkilemektedir

Hoerl ve Kennard (1970a) Ridge tahmin edicisini aşağıdaki yolu izleyerek elde etmiştir. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin hata kareler toplamı,

$$\begin{aligned} SS_{\mathrm{Res},\hat{\boldsymbol{\beta}}_R} &= \left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right) \\ &= \left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)+\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)'\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yazılmaktadır. (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim, *EKK* tahmin edicisi yerine $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin kullanılmasından kaynaklanan yanlılığın karesidir. $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi kötü koşullu iken $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ ile $\boldsymbol{\beta}$ arasındaki uzaklık artmaktadır. Yani, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin değeri $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin gerçek değerinden uzaklaşmaktadır. Bu nedenle, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R'\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin uzaklığının karesinin minimum yapılması istenmektedir. $\phi_0 > 0$ hata kareler toplamı için verilen bir sabit olsun. Buna göre, $SS_{\mathrm{Res},\hat{\boldsymbol{\beta}}_R} = SS_{\mathrm{Res},\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}} + \phi_0$ koşulunu sağlayan bir $\left\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right\}$ kümesi vardır. Bu küme içerisinde $\boldsymbol{\beta}$ parametresine en yakın olan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin bulunması istenir. Eğer bu bir Lagrange problemi olarak değerlendirilirse

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R'\hat{\boldsymbol{\beta}}_R + \frac{1}{k}\left[\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right)'\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right)-\phi_0\right] \tag{3.3}$$

ifadesinin minimize edilmesi sonucu Ridge tahmin edicisi bulunabilmektedir. Burada $1/k$ Lagrange çarpanıdır. (3.3) eşitliğinin $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ ve $1/k$ terimlerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R + (1/k)(\mathbf{X}'\mathbf{X})\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right) = 0 \tag{3.4}$$

ve

$$\phi_0 = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right)'\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right) \tag{3.5}$$

normal denklemleri elde edilmektedir. (3.4) denkleminin çözümünden,

$$
\begin{aligned}
&\frac{k}{k}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R+\frac{1}{k}\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\frac{1}{k}\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}=0\\
&\left(k\mathbf{I}+\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\\
&\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\\
&\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

(3.1) ile verilen $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisi elde edilir. Diğer yandan, k yanlılık parametresi (3.5) ifadesinin iteratif olarak türevlenmesiyle elde edilebilmektedir (Rao ve diğ., 2008).

Diğer yandan, Ridge tahmin edicisi, (1.1) ile verilen lineer regresyon modeline $\mathbf{0}=k^{1/2}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}'$ eşitliğinin eklenip, *EKK* yönteminin uygulanmasıyla elde edilebilmektedir. Kısaca, (1.1) modeli için $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{X}'\mathbf{y}$ normal denklemi ele alınsın. Burada $\mathbf{X}$ matrisine, $k^{1/2}\mathbf{I}$ matrisi satır olarak eklenildiğinde elde edilen matris $\bar{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ k^{1/2}\mathbf{I}\end{bmatrix}$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$
\bar{\mathbf{X}}'\bar{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}' & k^{1/2}\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ k^{1/2}\mathbf{I}\end{bmatrix}=\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}
$$

ifadesi normal denklemin sol tarafındaki $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi yerine kullanıldığında,

$$
(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\beta}=\mathbf{X}'\mathbf{y}
$$

normal denklemi elde edilmektedir. Böylece, (3.1) ile verilen Ridge tahmin edicisi elde edilmektedir.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisinin *MHKO* değeri,

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)&=E[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}]\\
&=E[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})]\\
&=[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'E(\boldsymbol{\varepsilon})]\\
&=(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
yan(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) &= E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) - \boldsymbol{\beta} \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathrm{k}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \\
&= [(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathrm{k}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} - \mathbf{I}]\boldsymbol{\beta} \\
&= \{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}k\mathbf{I}]^{-1} - \mathbf{I}\}\boldsymbol{\beta} \\
&= [(\mathbf{I} + k(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})^{-1} - \mathbf{I}]\boldsymbol{\beta} \\
&= \{\mathbf{I} - k[\mathbf{I} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}k]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - \mathbf{I}\}\boldsymbol{\beta} \\
&= \{\mathbf{I} - k[\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}]^{-1} - \mathbf{I}\}\boldsymbol{\beta} \\
&= -k(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathrm{k}\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) &= \mathrm{cov}[(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}] \\
&= (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\,\mathrm{cov}(\mathbf{y})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} \\
&= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} \\
&= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} + k(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]^{-1} \\
&= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{I} + k(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]^{-1} \\
&= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{I} - k(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}] \\
&= \sigma^2[(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} - k(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}]
\end{aligned}$$

eşitliklerinin (2.6) ifadesinde yerlerine yazılması sonucu,

$$MHKO(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \sigma^2[(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} - k(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}] + k^2\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathrm{k}\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\beta}' \quad (3.6)$$

dir. (3.6), (2.7) ifadesinde yerine yazılarak,

$$SHKO(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \sigma^2[tr(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1} - ktr(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}] + k^2\boldsymbol{\beta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\beta} \quad (3.7)$$

elde edilmektedir.

(2.13) kanonik modelinde $\boldsymbol{\alpha}$ parametresinin $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} \quad (3.8)$$

biçiminde ifade edilmektedir. (3.8) tahmin edicisi için (3.6) ve (3.7) eşitlikleri yardımıyla $MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ ve $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ değeri,

$$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R) = \sigma^2[(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-1} - k(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-2}] + k^2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha}' \quad (3.9)$$

$$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R) = \sigma^2[tr(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+k\mathbf{I})^{-1} - ktr(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+k\mathbf{I})^{-2}] + k^2\boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha} \tag{3.10}$$

dir.

Tanım 2.14 den $\mathbf{Z} = \mathbf{XT}$ olmak üzere $\mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{T}'\mathbf{X}'\mathbf{XT} = \boldsymbol{\Lambda}$ ifadesinin (3.10) eşitliğinde yerine yazılması sonucu,

$$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R) = \sigma^2[tr(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1} - ktr(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}] + k^2\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha} \tag{3.11}$$

ifadesi elde edilir. (3.9) eşitliğindeki matris ifadeleri,

$$(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+k\mathbf{I})^{-1} = (\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1+k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2+k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_p+k} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ve

$$(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+k\mathbf{I})^{-2} = (\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda_1+k)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\lambda_2+k)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\lambda_p+k)^2} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

biçiminde açık olarak yazılabilmektedir. Teorem 2.2 den (3.12) ve (3.13) ifadeleri,

$$tr(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i+k)} \tag{3.14}$$

ve

$$tr(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2} = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\lambda_i+k)^2} \tag{3.15}$$

biçiminde yazılabilir. (3.14) ve (3.15) eşitlikleri (3.11) ifadesinde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R) &= \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(\lambda_i+k)} - k\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(\lambda_i+k)^2}\right] + k^2\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{p}\frac{(\lambda_i+k)-k}{(\lambda_i+k)^2}\right] + k^2\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2} + k^2\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \qquad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. (3.16) eşitliğinde,

$$f_1(k) = \sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2} \ ,$$

$$f_2(k) = k^2\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\boldsymbol{\alpha}$$

olarak alınsın. Burada, $f_1(k)$ ile gösterilen toplam varyans değeri, k yanlılık parametresinin sürekli ve monoton azalan bir fonksiyonu, $f_2(k)$ ile gösterilen yanlılık değerinin karesi ise k yanlılık parametresinin sürekli ve monoton artan bir fonksiyonudur (Hoerl ve Kennard, 1970a). Böylece, toplam varyanstaki azalmanın, yanlılığın karesindeki artıştan fazla olduğu durumlarda *EKK* tahmin edicisine göre, Ridge tahmin edici iyi bir tahmin edici olmaktadır.

3.1.1. *k* Yanlılık Parametresinin Seçimi

Ridge regresyonda k yanlılık parametresinin seçimi için kullanılabilecek birçok yöntem vardır. k yanlılık parametresinin seçimi için önerilen yöntemlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

1. Ridge İzi Yöntemi: Hoerl ve Kennard (1970b) k yanlılık parametresinin seçimi için grafiksel bir yöntem olan Ridge izi yöntemini önermişlerdir. Bu yöntemde $0 \leq k$ olmak üzere k değerleri yatay eksende, Ridge regresyon katsayıları olan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicileri ise düşey eksende alınarak iki boyutlu kartezyen düzlemde ridge izi grafiği elde edilmektedir. Böylece her bir k değeri için elde edilen parametre tahmini grafikle gösterilmiş olmaktadır. k yanlılık parametresinin değeri arttıkça, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahminlerinin

$SHKO$ değeri azalmaktadır. Burada EKK yöntemiyle elde edilen regresyon katsayılarının $SHKO$ değerinden daha küçük değerler veren kararlı bir tahmin edicinin bulunması amaçlandığı için katsayıların dengeye geldiği, yani k parametresi belli bir değere kadar arttıktan sonra $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ değerindeki değişimin durağan olduğu ve yatay eksene paralel bir konuma ulaştığı noktaya karşılık gelen en küçük k değeri yanlılık değeri olarak seçilmektedir. Hoerl ve Kennard (1970a) bu değer için $0 \leq k \leq 1$ aralığını önermişlerdir.

2. $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ değerinin minimize edilmesi: (3.16) ile verilen

$$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + \sum_{i=1}^{p} k^2 \alpha_i' \alpha_i \frac{1}{(\lambda_i + k)^2} = g(k)$$

ifadesinin k yanlılık parametresine göre türevi alındığında;

$$g'(k) = -2\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} + 2k \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i (\lambda_i + k)}{(\lambda_i + k)^3} - 2k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i}{(\lambda_i + k)^3}$$

eşitliği elde edilmektedir. Bu ifade sıfıra eşitlendiğinde,

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} - k \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i (\lambda_i + k)}{(\lambda_i + k)^3} + k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i}{(\lambda_i + k)^3} = 0$$

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} - k \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i \lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} - k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i}{(\lambda_i + k)^3} + k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i}{(\lambda_i + k)^3} = 0 \qquad (3.17)$$

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} - k \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i' \alpha_i \lambda_i}{(\lambda_i + k)^3} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \left(\sigma^2 - k\alpha_i'\alpha_i\right)}{(\lambda_i + k)^3} = 0$$

elde edilir. (3.17) denkleminin yaklaşık olarak bir çözümü,

$$k_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

dir.

Hoerl ve Kennard (1970a), $\boldsymbol{\alpha}$ ve σ^2 parametrelerinin (yansız) tahmin edicileri $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ ve $\hat{\sigma}^2$ değerlerinin (3.17) eşitliğinde kullanılması sonucu k parametresinin tahmin edicisinin,

$$\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}^2_{\max}} \tag{3.18}$$

biçiminde seçilmesini önermişlerdir. (3.18) de $\hat{\alpha}_{\max}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ tahmin edicisinin en büyük elemanıdır (Kibria, 2003). Ancak, (3.18) ile verilen $\hat{k}_{HK}$ ifadesine alternatif bir yaklaşım ise,

$$\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{p} \hat{\beta}_i^2}$$

biçimindedir. Dikkat edilirse, bu tahmin değerleri (3.17) ifadesinin minimum değerine bir yaklaşımdır. Alternatif olarak, (3.17) ifadesini minimum yapabilecek çeşitli yaklaşımlar da kullanılabilir.

3. α_i değerleri çok küçük ise bu durumda k yanlılık değeri aşırı büyük olması nedeniyle aritmetik ortalama iyi bir seçim olmaz. Bu nedenle, Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) k değerlerinin harmonik ortalamasını kullanılmasını, yani

$$k = \frac{1}{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{k_{HK}}}$$

ifadesinden k yanlılık parametresinin,

$$\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^2} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{p} \hat{\beta}_i^2} \tag{3.19}$$

biçiminde seçilmesini önermişlerdir.

(3.19) ile verilen yanlılık parametresinin bulunması için alternatif bir yöntem ise, (3.17) ifadesinin değişik bir yaklaşımla minimize edilmesine dayanır. Eğer, (3.17) deki, $\left(\sigma^2 - k\alpha_i^2\right)$, $i = 1,2,...,p$, ifadesinin her bileşeni ayrı ayrı minimize edilmeyip, toplam değer minimize edilirse, yani; $\sum_{i=1}^{p}\left(\sigma^2 - k\alpha_i^2\right) = 0$ ifadesi dikkate alınırsa, (3.19) eşitliği elde edilir.

4. Modelde çoklu iç ilişki olduğunda, $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{EKK}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ değeri çok büyük olacaktır. Bu durum, (3.18) ve (3.19) ile verilen k yanlılık parametresinin tahmininin çok küçük olmasına neden olabilir. Bu durumda, $E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{EKK}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right) = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta} + \sigma^2 tr\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)$ olacağından, $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{EKK}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ beklenen değerinin $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}$ değerinden daha büyük olduğu görülür. Ridge regresyonun karelenmiş uzunluğu olan $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_R\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{EKK}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ değerinden daha küçüktür. (3.8) ile verilen Ridge tahmin edicisinin bileşenleri, $\hat{\alpha}_{R(i)} = \dfrac{\lambda_i\hat{\alpha}_i}{\lambda_i + k}$ ile ifade edilebilir. Lawless ve Wang (1976) bu durumu göz önüne alarak,

$$\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\hat{\alpha}_i^2} \tag{3.20}$$

yanlılık tahmin edicisini önermişlerdir. Lawless ve Wang (1976), (3.20) ile önerilen $\hat{k}_{LW}$ tahmini, (3.17) eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\left(\sigma^2 - k\alpha_i'\alpha_i\right)}{(\lambda_i + k)^3} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(\sigma^2 - k\alpha_i'\alpha_i\right) = 0$$

ve $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = p$ olarak düşünülmesi halinde elde edilebilir.

5. Hoerl ve Kennard (1976) tarafından geliştirilen iterasyon yöntemi:

k yanlılık parametresinin seçilmesi için diğer bir yöntem Hoerl ve Kennard (1976) tarafından geliştirilen iterasyon yöntemidir. (3.19) eşitliği için k yanlılık parametresinin iterasyon tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad : \; k_0 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_{EKK}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R(k_0), \qquad : \; k_1 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R{}'(k_0)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R(k_0)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R(k_1), \qquad : \; k_2 = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R{}'(k_1)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R(k_1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

dir. İterasyon $T = tr(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}/p$ olmak üzere, $\dfrac{k_{j+1}-k_j}{k_j} > 20T^{(-1.3)}$ olduğunda sonlandırılır. j. değeri için iterasyonun sonlandırıldığı varsayılırsa, $\boldsymbol{\alpha}$ parametresini tahmin etmek için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R(k_j)$ terimi kullanılacaktır.

6. C_k ölçütünü kullanarak *k* yanlılık parametresinin bulunması:

Şimdiye kadar *k* yanlılık parametresinin seçilmesi için önerilen yöntemler, regresyon katsayılarının tahminlerinin daha kararlı olmasını amaçlamaktadır. Mallows (1973), *k* yanlılık parametresinin bulunması için model seçim ölçütlerinden C_p istatistiğine benzeyen C_k ölçütünü kullanmıştır. C_k ölçütü,

$$C_k = \frac{SS_{Res,\hat{\boldsymbol{\beta}}_R}}{\hat{\sigma}^2} + 2tr(\mathbf{XL}) - n + 2 \tag{3.21}$$

olarak önerilmiştir (Mallows, 1973). (3.21) ifadesinde, $SS_{Res,\hat{\beta}_R}$, *k'* nın bir fonksiyonu olan artık kareler toplamı ve $\mathbf{L} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'$ olarak tanımlanmaktadır. *EKK* tahmin edicisi kullanılması halinde, $C_k = C_p = \dfrac{SS_{\text{Res}}}{\hat{\sigma}^2} - n + 2p$ olarak elde edilmektedir. Mallows (1973), *p* değerlerine karşılık, C_p değerlerinin grafiğinin çizilmesinde, $E[C_p] \approx p$ olarak elde edilen modelin kullanılmasını önermiştir. Burada, *k* yanlılık parametresi için *p* değerlerine karşılık $V_k = 1 + tr(\mathbf{X}'\mathbf{XLL}')$ değeri kullanılmaktadır. V_k ifadesinden, *EKK* tahmin edicisi için *p* değeri elde edilmektedir. Dolayısıyla, ilk olarak

V_k değerlerine karşılık C_k istatistiğinin serpilme diagramı çizilir. k üzerinde C_k nın minimum değeri, V_k üzerindeki C_k nın minimum değerinden oluşur. Diğer bir yöntem olarak, C_k değerini minimum yapan k yanlılık parametresinin elde edilmesi için, (3.21) ifadesinin k değerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Ancak elde edilen ifade k parametresinin karmaşık bir fonksiyonudur. Özel olarak, ortogonal değişkenler için $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}$ olması nedeniyle daha basit bir şekilde ifade edilebilir. Bu durumda (3.21) eşitliği,

$$C_k = \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2 + k^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(1+k)^2}}{\hat{\sigma}^2} + 2\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{1+k} - (n-2)$$

biçimini alır. C_k ifadesinin minimize edilmesi sonucu,

$$C_k' = \frac{2k}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(1+k)^2} - \frac{2k^2}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(1+k)^3} - 2\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(1+k)^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{(1+k)k\hat{\alpha}_i^2 - k^2\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2(1+k)}{\hat{\sigma}^2(1+k)^3} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left(k\hat{\alpha}_i^2 + k^2\hat{\alpha}_i^2 - k^2\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2 - k\hat{\sigma}^2 \right) = 0$$

$$k\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^2 - p\hat{\sigma}^2 - kp\hat{\sigma}^2 = 0$$

$$k\left(\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^2 - p\hat{\sigma}^2 \right) = p\hat{\sigma}^2$$

$$\hat{k}_{CL} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i^2 - p\hat{\sigma}^2} \tag{3.22}$$

yanlılık parametresi elde edilir.

3.2.LİU TAHMİN EDİCİSİ

(1.1) ile verilen lineer regresyon modelinde çoklu iç ilişki olması durumunda *EKK* tahmin edicisi kararsızdır. Bu durumda modeldeki çoklu iç ilişki problemini gidermek için yanlı tahmin edici kullanılması önerilmiştir. Bu yanlı tahmin edicilerden en sık kullanılanlarından biri (3.1) ile verilen Ridge tahmin edicisidir. Diğer tahmin edici ise, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_s = c\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$, $0 < c < 1$ ile verilen Stein tahmin edicidir. Bu iki yanlı tahmin edici bazı avantaj ve dezavantajlara sahiptir. Ridge tahmin edicisi pratikte etkili olmasına rağmen, k yanlılık parametresini seçmek için kullanılan yaygın yöntemler sonucunda k nın karmaşık bir fonksiyonu ortaya çıkabilmektedir. Diğer yandan, k yanlılık parametresinin tahmin değeri büyüdükçe, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ tahmin edicisi sıfıra yaklaşır. Stein tahmin edicinin avantajı c nin lineer bir fonksiyonu olmasıdır. Fakat, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_s$ tahmin edicisinde her parametrenin büzülmesi aynıdır. Bu ise pratikte iyi değildir. Liu (1993) bu iki yanlı tahmin ediciyi birleştirerek,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y} + d\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}), \qquad 0 < d < 1 \tag{3.23}$$

tahmin edicisini elde etmiştir. Bu yeni tahmin edici hem Ridge hem de Stein tahmin edicisinin avantajlı yönlerine sahiptir. (3.23) tahmin edicisinde, Ridge tahmin edicisinde olduğu gibi $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin esas köşegenine $k = 1$ sabiti eklenmiştir ve Stein tahmin edicide olduğu gibi d yanlılık parametresinin lineer bir fonksiyonudur. (3.23) Liu tahmin edicisinin Ridge tahmin edicisine göre avantajı d yanlılık parametresinin lineer bir fonksiyonu olmasıdır. Bu nedenle d yanlılık parametresini seçmek daha kolaydır.

Liu tahmin edicisi, (1.1) ile verilen lineer regresyon modeline $d\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}'$ eşitliğinin eklenmesi ve bu durumda *EKK* yönteminin kullanılması ile elde edilebilmektedir. Kısaca, $\mathbf{X}$ matrisine $\mathbf{I}$ matrisinden oluşan bir satır eklendiğinde elde edilen matris $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{I}$ matrisi elde edilmektedir. (1.1) modeli için verilen $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ normal denkleminin sol tarafında $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi yerine $\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{I}$ matrisinin kullanılması ve sağ tarafında ise $d\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ teriminin eklenmesi ile normal denklem

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{I})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y} + d\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$$

biçimini almaktadır. Buradan ise (3.23) ile verilen Liu tahmin edicisi elde edilir. (3.23) tahmin edicisinin alternatif bir gösterimi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_d = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK} \tag{3.24}$$

biçimindedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d) &= E[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} yan(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d) &= E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d) - \boldsymbol{\beta} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} = [(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I}) - I]\boldsymbol{\beta} \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I}) - (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})]\boldsymbol{\beta} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I}-\mathbf{X}'\mathbf{X}-\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d) &= \operatorname{cov}[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}] \\ &= \operatorname{cov}[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\operatorname{cov}(\mathbf{y})\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{dI})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilmektedir. Bu eşitlikler yardımıyla, Tanım 2.10 dan

$$\begin{aligned} MHKO(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d) &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1} \\ &\quad + (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

bulunur.

3.2.1. *d* Yanlılık Parametresinin Seçimi

d yanlılık parametresinin seçimi yapılırken hesaplamaların kolay yapılabilmesi için (2.13) kanonik modeli kullanılacaktır.

EKK tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$

Liu tahmin edicisi $\quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}_d = (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$

$$= (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

ile verilmektedir. (3.23) ile verilen Liu tahmin edicisi için,

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) &= E\left(\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) &= E\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)-\boldsymbol{\alpha} \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha} = \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)-\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha} \\ &= \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)-\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\right]\boldsymbol{\alpha} \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left[\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}-\boldsymbol{\Lambda}-I\right] = \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) &= \operatorname{cov}\left(\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right) \\ &= \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\operatorname{cov}\left(\mathbf{y}\right)\mathbf{Z}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \end{aligned}$$

ifadelerinin Tanım 2.10 da kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) &= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \\ &\quad -\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilmektedir. (2.7) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) &= tr\left[\sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\right] \\ &\quad -tr\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\right] \\ &= \sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+d\right)^2}{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)^2}+\left(d-1\right)^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilmektedir.

d yanlılık parametresinin seçimi için aşağıdaki yöntemler kullanılmaktadır.

1. $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$ değerinin minimize edilmesi:

$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2} = g(d)$ ifadesinin d yanlılık parametresine göre türevi alındığında,

$$g'(d) = 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i + d}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2} + 2(d-1) \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2}$$

bulunmaktadır. $g'(d) = 0$ eşitliğinden d yanlılık parametresinin çekilmesi sonucu,

$$2\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i + d}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2} + 2(d-1) \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2} = 0$$

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2} + \sigma^2 d \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2} + d \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2} = 0$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i^2 - \sigma^2}{(\lambda_i+1)^2}}{\sum_{i=1}^{p} \frac{\sigma^2 + \alpha_i^2 \lambda_i}{\lambda_i(\lambda_i+1)^2}} \tag{3.27}$$

yanlılık parametresi bulunmaktadır. (3.27) ifadesinde, α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yansız tahmin edicileri kullanılarak d yanlılık parametresinin tahmin edicisi elde edilecektir. α_i^2 ve σ^2 parametrelerin yansız tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\alpha}_i^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}$ ve $\hat{\sigma}^2$ dir. Burada,

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}$$
$$E(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}) = E(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$$

olduğu kullanılarak,

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_{EKK}\right) &= E\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\mathbf{y}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'E\left(\mathbf{y}\mathbf{y}'\right)\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\left(\sigma^2 + \mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Z}'\right)\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ &= \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ &= \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\ &= \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}' \end{aligned}$$

ifadesi elde edilmektedir. Kısaca $E\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_{EKK}\right) = \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'$ eşitliğinin her i için yazılmasıyla $E(\hat{\alpha}_i^{\,2}) = \sigma^2 \dfrac{1}{\lambda_i} + \alpha_i^{\,2}$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$E\left(\hat{\alpha}_i^{\,2} - \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}\right) = E\left(\hat{\alpha}_i^{\,2}\right) - E\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}\right) = \frac{\sigma^2}{\lambda_i} + \alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} = \alpha_i^2$$

ifadesi elde edilmektedir.

(3.27) eşitliğinde α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yerine bunların yansız tahmin edicileri olan $\hat{\alpha}_i^2 - \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ifadeleri kullanılırsa d yanlılık parametresinin tahmin edicisi,

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2 - \dfrac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i} - \hat{\sigma}^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}_i^2\lambda_i - \hat{\sigma}^2}{\lambda_i\left(\lambda_i + 1\right)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\dfrac{\hat{\alpha}_i^2\lambda_i - \hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}^2\lambda_i}{\lambda_i}}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2\lambda_i}{\lambda_i\left(\lambda_i + 1\right)^2}}$$

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2} - \hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\lambda_i + 1}{\lambda_i\left(\lambda_i + 1\right)^2}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}}$$

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}} - \frac{\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{p} \dfrac{1}{\lambda_i\left(\lambda_i + 1\right)}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2}}$$

$$\hat{d}_{\min} = 1 - \hat{\sigma}^2 \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \tag{3.28}$$

biçiminde elde edilmektedir. (3.28) ifadesinin sıfırdan küçük olması durumunu ortadan kaldırmak için $0 \le h \le 1$ olmak üzere bir h ile çarpılması sonucu,

$$\hat{d}_{\min h} = 1 - h\hat{\sigma}^2 \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} \Big/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir.

2. C_L ölçütü kullanılarak d yanlılık parametresinin bulunması: Mallows (1973), Ridge tahmin edicisinde k yanlılık parametresinin elde edilmesi için C_k ölçütünü kullanmıştır. Benzer yöntem,

$$C_L = \frac{SS_{\mathrm{Res},\hat{\boldsymbol{\beta}}_d}}{\hat{\sigma}^2} + 2tr(\mathbf{H_d}) - (n-2) \tag{3.30}$$

ile verilen denklemin minimize edilmesi ile d yanlılık parametresi bulunabilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} &= \left[(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} + d\mathbf{I}) - I \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} \\
&= \left[(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} + d\mathbf{I}) - (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}) \right] \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} \\
&= (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} (d\mathbf{I} - \mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK})' \Lambda (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}) &= \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}' (d\mathbf{I} - \mathbf{I}) (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1} (d\mathbf{I} - \mathbf{I}) \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} \\
&= (d-1)^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}
\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
SS_{\mathrm{Res},\hat{\boldsymbol{\beta}}_d} &= \left(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right) \\
&= \left(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)+\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d-\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)'\boldsymbol{\Lambda}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d-\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right) \\
&= \left(n-p\right)\hat{\sigma}^2+\left(d-1\right)^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

artık kareler toplamı elde edilmektedir. $\mathbf{H}_d=\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+d\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
tr\left(\mathbf{H}_d\right) &= tr\left(\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+d\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}Z'\right) \\
&= tr\left(\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}+d\mathbf{I}\right)\left(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\right) \\
&= tr\left(\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\Lambda\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i+d}{\lambda_i+1}
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

ifadesi elde edilmektedir. (3.31) ve (3.32) ifadeleri (3.30) denkleminde kullanıldığında,

$$
C_L=\frac{\left(n-p\right)\hat{\sigma}^2+\left(1-d\right)^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2}}{\hat{\sigma}^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i+d}{\lambda_i+1}-\left(n-2\right) \tag{3.33}
$$

eşitliği elde edilmektedir. (3.33) eşitliği d yanlılık parametresinin karesel bir fonksiyonudur. (3.33) eşitliği minimize edilerek d yanlılık parametresi elde edilecektir. Bunun için (3.33) eşitliğinin türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$
C_L'=2\left(1-d\right)\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2\left(\lambda_i+1\right)^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+1}
$$

$$
-2\left(1-d\right)\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2\left(\lambda_i+1\right)^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+1}=0
$$

$$
-\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2\left(\lambda_i+1\right)^2}+d\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2\left(\lambda_i+1\right)^2}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i+1}=0
$$

elde edilmektedir. Bu eşitlikten d yanlılık parametresi,

$$\hat{d}_{CL} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2 (\lambda_i + 1)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}{\hat{\sigma}^2 (\lambda_i + 1)^2}} - \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + 1}}{\displaystyle\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}$$

olmak üzere,

$$\hat{d}_{CL} = 1 - \hat{\sigma}^2 \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i + 1} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \tag{3.34}$$

biçiminde elde edilmektedir.

3. Hoerl ve Kennard tarafından geliştirilen iterasyon yöntemi:

d yanlılık parametresinin seçilmesi için diğer bir yöntem (3.28), (3.29) veya (3.34) eşitliklerinden birine Hoerl ve Kennard (1976) tarafından geliştirilen iterasyon yönteminin uygulanmasıdır. Örneğin, (3.28) eşitliği için d yanlılık parametresinin iterasyon tahmin edicisi

$$\begin{array}{ll}
\hat{\alpha}_d, & \hat{d}_0 = 1 - \hat{\sigma}^2 \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \\
\hat{\alpha}_d(d_0), & \hat{d}_1 = 1 - \hat{\sigma}^2 \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2(d_0)}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \\
\hat{\alpha}_d(d_1), & \hat{d}_2 = 1 - \hat{\sigma}^2 \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{p} \frac{\hat{\alpha}_i^2(d_1)}{(\lambda_i + 1)^2} \right] \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

dir. İterasyon $T = tr(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} / p$ olmak üzere $\left(d_j - d_{j+1}\right) / d_j < 20T^{-1/3}$ olduğu zaman sonlandırılır. j değeri için iterasyonun sonlandırıldığı varsayılırsa $\boldsymbol{\alpha}$ parametresini tahmin etmek için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\left(d_j\right)$ tahmin değeri kullanılacaktır.

3.3. *EKK* TAHMİN EDİCİSİ İLE RİDGE VE LİU TAHMİN EDİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Herhangi iki $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_j = \mathbf{A}_j\mathbf{y}$, $j = 1,2$ homojen tahmin edicileri için, Tanım 2.10 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta} &= MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - MHKO\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)\\ &= \operatorname{cov}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) - \operatorname{cov}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right)' - yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)' \\ &= \sigma^2\left(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1' - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2'\right) + yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1\right)' - yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right) yan\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2\right)'\end{aligned} \tag{3.35}$$

eşitliği elde edilmektedir.

EKK tahmin edicisi yansız tahmin edici olduğu için (2.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right) &= \operatorname{cov}\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right) = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\operatorname{cov}\left(\mathbf{y}\right)\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\\ &= \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\end{aligned} \tag{3.36}$$

dir.

EKK tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} = \mathbf{C}_1\mathbf{y}$ (3.37)

Ridge tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R = \left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{y}$ (3.38)

Liu tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d = \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + d\mathbf{I}\right)\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} = \mathbf{C}_3\mathbf{y}$ (3.39)

(3.37), (3.38) ve (3.39) ifadeleri (3.35) eşitliğinde kullanılarak karşılaştırmalar aşağıdaki gibi yapılabilmektedir.

3.3.1. *EKK* Tahmin Edicisi ile Ridge Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

(3.35) de (3.6) ve (3.36) eşitliklerinin kullanılması ile *EKK* tahmin edicisiyle Ridge tahmin edicisi aşağıdaki gibi karşılaştırılabilmektedir:

Teorem 3.1 (Theobald, 1974)**:** $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ tahmin edicileri için $k>0$ olmak üzere, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ tahmin edicisine göre daha iyi bir tahmin edicidir. Yani,

$MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)-MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)>0$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\left[\sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\right)\right]^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\alpha}<1$$

İspat: Bunun için Teorem 2.11 den

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)=\sigma^2\left[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\right]=\sigma^2\left[\frac{1}{\lambda_i}-\frac{\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2}\right]_{i=1}^{p}$$

Bu durumda, $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}>0$ dır $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda_i}-\dfrac{\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\lambda_i+1\right)^2-\lambda_i^2}{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)^2}>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda_i+1\right)^2-\lambda_i^2>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda_i+1-\lambda_i\right)\left(\lambda_i+1+\lambda_i\right)>0$$

olmak üzere $MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)-MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)>0$ eşitsizliği sağlanır.

3.3.2.*EKK* Tahmin Edicisi ile Liu Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

(3.35) eşitliğinde **(**3.26) ve (3.36) eşitliklerinin kullanılmasıyla aşağıdaki teorem Liu tahmin edicisinin *EKK* tahmin edicisinden daha iyi bir tahmin edici olduğunu verir.

Teorem 3.2 (Liu, 1993)**:** Öyle bir $0<d<1$ vardır ki $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d\right)<SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bu teoremin ispatında hesaplamaların kolay yapılabilmesi için kanonik formunun *SHKO* değeri kullanılacaktır. Bu durumda,

$$SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+d\right)^2}{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)^2}+\left(d-1\right)^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2}=g\left(d\right)$$

eşitliği yardımıyla,

$$g'\left(d\right)=2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i+d}{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)^2}+2\left(d-1\right)\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2}$$

türev ifadesi elde edilir. Bu durumda, $g\left(1\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i}>0$ olduğu görülür. $g\left(d\right)$ ifadesinin ikinci türevi alındığında $g''\left(d\right)=2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i\left(\lambda_i+1\right)^2}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2}$ elde edilir. *SHKO* ifadesinin ikinci türevi daima pozitiftir. Dolayısıyla, öyle bir $0<d<1$ vardır ki $g\left(d\right)<g\left(1\right)$ dir. Bu eşitsizlik $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)<SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right)$ biçiminde de ifade edilebilmektedir. Orijinal parametrelere geçilirse $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_d\right)<SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right)$ olduğu görülmektedir.

3.3.3.Ridge Tahmin Edicisi ile Liu Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

Ridge tahmin edicisi ve Liu tahmin edicisinin karşılaştırılması her iki tahmin edicinin yanlılık değerleri için ayrı ayrı ele alınacaktır.

Teorem 3.3 (Sakallıoğlu, Kaçıranlar ve Akdeniz, 2001),(Akdeniz ve Erol, 2003)**:**

a. Eğer $yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)'\left(\mathbf{C_2C_2'}-\mathbf{C_3C_3'}\right)^{-1}yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)<\sigma^2$ ise bu durumda $0<k<k_{1j}$ için

$MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)-MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)$ pozitif tanımlıdır.

b. Eğer $yan(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)'\left(\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'\right)^{-1} yan(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)<\sigma^2$ ise bu durumda $0<k_{1j}<k$ için $MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ pozitif tanımlıdır.

Burada $k_{1j}=\dfrac{\lambda_j(1-d)}{\lambda_j+d}$, $j=1,2,...,p$ dir.

İspat: (3.10) ve (3.11) ile verilen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ tahmin edicileri kullanılarak,

a.
$$\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)=\sigma^2\left(\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'\right)$$
$$=\sigma^2\left[\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}-(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-2}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right]$$
$$=\sigma^2 diag\left[\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2}-\frac{(\lambda_j+d)^2}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}\right]_{i=1}^{p}$$

eşitliği elde edilmektedir.

Burada $\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2}-\dfrac{(\lambda_j+d)^2}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}>0$ dır. Sonuç olarak, $\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'>0 \Leftrightarrow \lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$ olduğu elde edilir.

$\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow \lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$

Bu eşitsizliğin çözümünden
$$\lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$$
$$\lambda_j^2+\lambda_j-\lambda_j^2-k\lambda_j-d\lambda_j-dk>0$$
$$k(\lambda_j+d)<\lambda_j(1-d)$$
$$k<\frac{\lambda_j(1-d)}{\lambda_j+d}=k_{1j}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 2.11 kullanılırsa teorem ispatlanmış olur.

b. Benzer biçimde,

$$\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)=\sigma^2\left(\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'\right)$$

$$=\sigma^2\left[\left(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-2}\left(\mathbf{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)^2\mathbf{\Lambda}^{-1}-\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-2}\right]$$

$$=\sigma^2 diag\left[\frac{\left(\lambda_j+d\right)^2}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}-\frac{\lambda_j}{\left(\lambda_j+k\right)^2}\right]_{i=1}^{p}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)>0$ demek $\frac{\left(\lambda_j+d\right)^2}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}-\frac{\lambda_j}{\left(\lambda_j+k\right)^2}>0$ demektir. Sonuç olarak, $\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'>0\Leftrightarrow\left(\lambda_j+d\right)\left(\lambda_j+k\right)-\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)>0$ olduğu elde edilir.

$\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow\left(\lambda_j+d\right)\left(\lambda_j+k\right)-\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)>0$ dır.

Bu eşitsizliğin çözümünden $\left(\lambda_j+d\right)\left(\lambda_j+k\right)-\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)>0$

$$0<\lambda_j^2+\lambda_j-\lambda_j^2-k\lambda_j-d\lambda_j-dk$$
$$\lambda_j\left(1-d\right)<k\left(\lambda_j+d\right)$$
$$\frac{\lambda_j\left(1-d\right)}{\lambda_j+d}=k_{1j}<k$$

elde edilir.Bu durumda Teorem 2.11 den teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4(Sakallıoğlu, Kaçıranlar ve Akdeniz, 2001) ,(Akdeniz ve Erol, 2003)**:**

a. Eğer $yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)'\left(\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'\right)^{-1}yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)<\sigma^2$ ise bu durumda $0<d<d_{1j}<1$ için $MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$ pozitif tanımlıdır.

b. Eğer $yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)'\left(\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'\right)^{-1}yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)<\sigma^2$ ise bu durumda $0<d_{1j}<d<1$ için $MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)-MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)$ pozitif tanımlıdır.

Burada, $d_{1j}=\frac{\lambda_j\left(1-k\right)}{\lambda_j+k}$, $j=1,2,...p$ dir.

İspat: (3.10) ve (3.11) ile verilen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ tahmin edicileri kullanılarak,

a. $\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)=\sigma^2\left(\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'\right)$

$$=\sigma^2\left[\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}-(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-2}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right]$$

$$=\sigma^2 diag\left[\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2}-\frac{(\lambda_j+d)^2}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}\right]_{i=1}^p$$

eşitliği elde edilir. Burada $\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)>0$ demek $\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2}-\frac{(\lambda_j+d)^2}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}>0$ demektir. Sonuç olarak, $\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'>0\Leftrightarrow\lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$ olduğu elde edilir.

$\mathbf{C_2C_2}'-\mathbf{C_3C_3}'$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow\lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$

Bu eşitsizliğin çözümünden

$$\lambda_j(\lambda_j+1)-(\lambda_j+d)(\lambda_j+k)>0$$
$$\lambda_j^2+\lambda_j-\lambda_j^2-k\lambda_j-d\lambda_j-dk>0$$
$$d(\lambda_j+k)<\lambda_j(1-k)$$
$$d<\frac{\lambda_j(1-k)}{\lambda_j+k}=d_{1j}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 2.11 kullanılırsa teorem ispatlanmış olur.

b. Benzer biçimde,

$$\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)=\sigma^2\left(\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'\right)$$

$$=\sigma^2\left[(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-2}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-2}\right]$$

$$=\sigma^2 diag\left[\frac{(\lambda_j+d)^2}{\lambda_j(\lambda_j+1)^2}-\frac{\lambda_j}{(\lambda_j+k)^2}\right]_{i=1}^p$$

eşitliği elde edilir. Burada $\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)>0$ demek $\dfrac{\left(\lambda_j+d\right)^2}{\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)^2}-\dfrac{\lambda_j}{\left(\lambda_j+k\right)^2}>0$

demektir. Sonuç olarak, $\mathbf{C_3C_3}'-\mathbf{C_2C_2}'>0 \Leftrightarrow \left(\lambda_j+d\right)\left(\lambda_j+k\right)-\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)>0$ olduğu elde edilir. Bu eşitsizliğin çözümünden $\left(\lambda_j+d\right)\left(\lambda_j+k\right)-\lambda_j\left(\lambda_j+1\right)>0$

$$
\begin{aligned}
&0<\lambda_j{}^2+\lambda_j-\lambda_j{}^2-k\lambda_j-d\lambda_j-dk\\
&\lambda_j\left(1-k\right)< k\left(\lambda_j+k\right)\\
&\frac{\lambda_j\left(1-k\right)}{\lambda_j+k}=d_{1j}<d
\end{aligned}
$$

elde edilir.Bu durumda Teorem 2.11 kullanılırsa teorem ispatlanmış olur.

Sonuç olarak, Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 den hangi tahmin edicinin daha iyi olduğu hem $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 bilinmeyen parametrelerine hem de yanlılık parametresinin seçimine bağlıdır.

4. İKİ YANLILIK PARAMETRESİ İÇEREN YANLI TAHMİN EDİCİLER

Bu bölümde (1.1) ile verilen lineer regresyon modelindeki çoklu iç ilişkinin etkisini azaltabilmek için *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerini içeren iki tane yanlılık parametresine bağlı olan yeni tahmin ediciler ele alınacaktır.

(3.23) ile tanımlanan Liu tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisine bağlıdır. Fakat lineer modelde çoklu iç ilişki olması durumunda EKK tahmin edicisi kararsızlık gösterebilmektedir. Bu nedenle $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$ tahmin edicisinin kararsızlığı, Liu tahmin edicisini de etkilemektedir. Bu durumun üstesinden gelmek için araştırmacılar iki parametreli tahmin ediciler ileri sürmüşlerdir. Bu amaçla Liu (2003),

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k,d} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y} - d\hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right), \qquad k > 0\,,\ -\infty < d < \infty \tag{4.1}$$

olmak üzere iki yanlılık parametresi içeren tahmin edicisini önerdi. (4.1) tahmin edicisinde $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$, $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin herhangi bir tahmin edicisidir. Diğer yandan, Özkale ve Kaçıranlar (2007), EKK , Ridge, Liu tahmin edicilerini içeren

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}\left(k,d\right) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y} + kd\hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}\right), \qquad k > 0\,,\quad 0 < d < 1 \tag{4.2}$$

tahmin edicisini ileri sürmüşlerdir. Alternatif olarak, Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2008),

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{y} + d\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\right), \qquad k > 0\ \ , -\infty < d < \infty \tag{4.3}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. $k-d$ sınıf tahmin edici adını verdikleri (4.3) tahmin edicisi *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerini içeren genel bir tahmin edicidir. Yang ve Chang (2010) çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmek için *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerini içeren iki tane yanlılık parametresine bağlı olan alternatif bir tahmin ediciyi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d) = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\,, \quad k>0\,, \quad 0<d<1 \tag{4.4}$$

biçiminde tanımlamışlardır. Bu kısımda, (4.3) ve (4.4) ile verilen tahmin ediciler ile ilgilenilecektir. (4.3) ve (4.4) tahmin edicileri aynı gösterime sahip olarak verilmiştir. Bu durumun ileride karışıklığa neden olmaması için (4.3) ile verilen *k-d* sınıf tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$ ile gösterilecektir.

4.1. İKİ TANE YANLILIK PARAMETRESİ İÇEREN $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ TAHMİN EDİCİSİ

(4.4) ile tanımlanan tahmin edici için k ve d yanlılık parametrelerinin uygun biçimde seçilmesi halinde *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(0,1) = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,1) = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{R}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(0,d) = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{d}$$

biçiminde elde edilmektedir.

İki yanlılık parametresi içeren (4.4) tahmin edicisi, (1.1) ile verilen lineer regresyon denklemine $(d-k)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}'$ eşitliğinin eklenip *EKK* metodunun uygulanmasıyla elde edilebilmektedir. Kısaca, $\mathbf{X}$ matrisine, $\mathbf{I}$ matrisinden oluşan bir satır eklendiğinde elde edilen matris, $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}$ matrisi ile gösterilsin. Bu durumda, $\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}' & \mathbf{I}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I}$ matrisi (1.1) lineer regresyon modeli için verilen $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$ normal denkleminin sol tarafında $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi yerine kullanılıp, sağ tarafına da $(d-k)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ ifadesi eklenirse,

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y} + (d-k)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$$

eşitliği elde edilmektedir. Sonuç olarak, iki yanlılık parametresi içeren (4.4) ile verilen tahmin edici,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{y}+(d-k)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}[(\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_R+(d-k)\hat{\boldsymbol{\beta}}_R] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{X}+k\mathbf{I}+d\mathbf{I}-k\mathbf{I}]\hat{\boldsymbol{\beta}}_R \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}+d\mathbf{I})\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\end{aligned}$$

biçiminde elde edilmektedir.

(2.13) kanonik modeli için (4.4) tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d) = (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} \tag{4.5}$$

eşitliği ile verilmektedir. Bu tahmin edici için kovaryans matrisi ve beklenen değeri $\tilde{\mathbf{A}} = (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}$ olmak üzere sırasıyla,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) &= \operatorname{cov}((\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}) \\ &= (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\operatorname{cov}(\mathbf{y})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1} \\ &= \sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1} \\ &= \sigma^2\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$\begin{aligned}E(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) &= E((\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}) \\ &= (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}'E(\mathbf{y}) \\ &= (\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha} \\ &= \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\alpha}\end{aligned} \tag{4.7}$$

dir. Bulunan beklenen değer ifadesinden yararlanarak,

$$yan(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) = E(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) - \boldsymbol{\alpha} = [\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}]\boldsymbol{\alpha} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilmektedir. (4.6) ve (4.8) eşitliklerinden yararlanarak

$$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) = \sigma^2\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}' + \left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)' \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir. (2.7) eşitliğinden yararlanarak (4.9) eşitliği,

$$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\lambda_i + d\right)^2 \lambda_i}{\left(\lambda_i + 1\right)^2 \left(\lambda_i + k\right)^2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i + k\right)^2 \alpha_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2 \left(\lambda_i + k\right)^2} \tag{4.10}$$

biçiminde yazılabilmektedir.

4.2. *k-d* SINIF TAHMİN EDİCİ

k-d sınıf tahmin edicisi, (4.3) eşitliği ile tanımlanmakta olup, k ve d yanlılık parametrelerinin uygun seçimleri için *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicileri sırasıyla,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}\left(0,1\right) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{EKK}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}\left(k,1-k\right) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{R}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}\left(0,d\right) = \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(d\right)\ ,\ 0 < d < 1$$

biçiminde elde edilmektedir.

(2.13) kanonik modeli için *k-d* sınıf tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d) &= \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}'\mathbf{y} + d\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{R}}\right), \qquad k > 0\ \ , -\infty < d < \infty \\
&= \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left[\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} + d\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right] \\
&= \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I} + d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} \\
&= \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left[\boldsymbol{\Lambda} + \left(k + d\right)\mathbf{I}\right]\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dir.

(4.11) ile verilen *k-d* sınıf tahmin edicisinin kovaryans matrisi ve yanlılığı sırasıyla,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}\left(k,d\right)\right) = \operatorname{cov}\left[\left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \left(k+d\right)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}\right] \\
&= \left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \left(k+d\right)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\operatorname{cov}\left(\mathbf{y}\right)\mathbf{Z}\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \left(k+d\right)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \left(k+d\right)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda} + k\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \left(k+d\right)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$
\begin{aligned}
yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right) &= E\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)-\boldsymbol{\alpha} \\
&= \left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+(k+d)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha} \\
&= \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+(k+d)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{M}=\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+(k+d)\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}$ olmak üzere, (4.12) ve (4.13) ifadeleri,

$$
\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)=\sigma^2\mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{M}' \tag{4.14}
$$

ve

$$
yan\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)=\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right) \tag{4.15}
$$

eşitlikleriyle ifade edilebilir. (4.14) ve (4.15) ifadeleri (2.6) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$
MHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)=\sigma^2\mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{M}'+\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)' \tag{4.16}
$$

eşitliği elde edilir.

4.3. *k* ve *d* YANLILIK PARAMETRELERİNİN SEÇİMİ

İki yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerin pratik bir uygulamasının yapılabilmesi için k ve d yanlılık parametrelerinin en uygun değerlerinin bulunması gerekmektedir. İlk olarak, (4.4) ile verilen tahmin edicinin k ve d yanlılık parametrelerinin en uygun değerlerinin bulunması için (4.10) ile verilen *SHKO* değerinin minimize edilmesi kullanılabilmektedir. Öncelikle (4.10) eşitliği d yanlılık parametresinin uygun bir değeri, yani $0<d<1$ için, k yanlılık parametresine göre minimize edilsin. Buna göre, (4.10) eşitliğinin k yanlılık parametresine göre türevi alındığında,

$$\frac{\partial g(k,d)}{\partial k}=-2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^4\left(\lambda_i+k\right)^4}$$

$$+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left[\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\left(\lambda_i+1\right)\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^2\right]\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^4\left(\lambda_i+k\right)^4}$$

$$-2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left[\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)^2\right]\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^4\left(\lambda_i+k\right)^4}$$

$$=-2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}$$

$$+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\left[\left(\lambda_i+1\right)\left(\lambda_i+k\right)-\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\right]\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}$$

$$=-2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}$$

$$+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\left[\lambda_i^2+k\lambda_i+\lambda_i+k-k\lambda_i-\lambda_i+d\lambda_i-k\right]\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}$$

$$=-2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}+2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\lambda_i(\lambda_i+d)\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu eşitliğin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\lambda_i(\lambda_i+d)\alpha_i^2-\sigma^2\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^3}=0$$

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i+k\right)\lambda_i(\lambda_i+d)\alpha_i^2-\sigma^2\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i\right]=0$$

denklemlerinden, k_i yanlılık parametresi,

$$k_i=\frac{\sigma^2(\lambda_i+d)-\lambda_i(1-d)\alpha_i^2}{\alpha_i^2(\lambda_i+1)} \tag{4.17}$$

biçimindedir. Burada $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ifadeleri $\boldsymbol{\alpha}$ ve σ^2 parametrelerinin tahminleri olmak üzere k_i yanlılık parametresinin tahmin edicisi,

$$\hat{k}_i = \frac{\hat{\sigma}^2(\lambda_i + d) - \lambda_i(1-d)\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\alpha}_i^2(\lambda_i + 1)} \tag{4.18}$$

bulunmaktadır. (4.18) ifadesinde, $d = 1$ verildiğinde $\hat{\boldsymbol{\beta}}(1,k) = \hat{\boldsymbol{\beta}}(k)$ eşitliği elde edilecek ve (4.18) ifadesi Hoerl ve Kennard (1970a) tarafından önerilen,

$$\hat{k}_i = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2} \tag{4.19}$$

k yanlılık parametresinin tahmini değeri olacaktır.

k yanlılık parametresinin tahmini için Kibria (2003) tarafından (4.19) $\hat{k}_i$ değerlerinin aritmetik ve geometrik ortalamalarının kullanılabileceği ileri sürülmüştür. Buradan hareketle, (4.18) ile verilen k yanlılık parametresinin tahmini için aritmetik ortalama ve geometrik ortalama sırasıyla,

$$\hat{k}_{AO} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\sigma}^2(\lambda_i + d) - \lambda_i(1-d)\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\alpha}_i^2(\lambda_i + 1)} \tag{4.20}$$

ve

$$\hat{k}_{GO} = \left(\prod_{i=1}^{p}\frac{\hat{\sigma}^2(\lambda_i + d) - \lambda_i(1-d)\hat{\alpha}_i^2}{\hat{\alpha}_i^2(\lambda_i + 1)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.21}$$

biçiminde verilebilir.

Benzer biçimde, (4.10) eşitliği k yanlılık parametresinin uygun bir değeri için d yanlılık parametresine göre minimize edilsin. (4.10) eşitliğinin d yanlılık parametresine göre türevi alınıp,

$$\frac{\partial g(k,d)}{\partial d} = 2\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i + d\right)\lambda_i}{\left(\lambda_i + 1\right)^2\left(\lambda_i + k\right)^2} - 2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\left(k+1-d\right)\lambda_i + k\right)\lambda_i\alpha_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2\left(\lambda_i + k\right)^2}$$

ifadesi sıfıra eşitlensin. Bu durumda,

$$\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i + d\right)\lambda_i}{\left(\lambda_i + 1\right)^2\left(\lambda_i + k\right)^2} - \sum_{i=1}^{p}\frac{\left(k\lambda_i + \lambda_i - d\lambda_i + k\right)\lambda_i\alpha_i^2}{\left(\lambda_i + 1\right)^2\left(\lambda_i + k\right)^2} = 0$$

$$\sigma^2\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i^2}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}+d\sum_{i=1}^{p}\frac{\sigma^2\lambda_i}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}+d\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i^2\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}$$
$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{\left((k+1)\lambda_i+k\right)\lambda_i\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}=0$$

olarak elde edilen eşitlikten d yanlılık parametresi,

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{p}\frac{\left((k+1)\lambda_i+k\right)\lambda_i\alpha_i^2-\sigma^2\lambda_i}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\sigma^2+\lambda_i^2\alpha_i^2}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}} \tag{4.22}$$

biçiminde elde edilmektedir. Burada $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ ve $\hat{\sigma}^2$ ifadeleri $\boldsymbol{\alpha}$ ve σ^2 parametrelerinin yansız tahmin edicileri olmak üzere (4.22) ile verilen d yanlılık parametresinin tahmin edicisi,

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\frac{\left((k+1)\lambda_i+k\right)\lambda_i\hat{\alpha}_i^2-\hat{\sigma}^2\lambda_i}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i\hat{\sigma}^2+\lambda_i^2\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i+1)^2(\lambda_i+k)^2}} \tag{4.23}$$

biçiminde bulunmaktadır. Eğer (4.23) eşitliğinde $k=0$ alınırsa $\hat{\boldsymbol{\beta}}(0,d)=\hat{\boldsymbol{\beta}}_d$ ifadesi elde edilecek ve (4.23) ile verilen yanlılık parametresinin tahmin edicisi,

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\alpha}_i^2-\hat{\sigma}^2}{(\lambda_i+1)^2}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{\hat{\sigma}^2+\lambda_i\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i+1)^2\lambda_i}} \tag{4.24}$$

ifadesine eşit olacaktır. Eğer (4.24) eşitliğinde α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yansız tahmin edicileri kullanılırsa, Liu (1993) tarafından (3.28) ile verilen d yanlılık tahmin edicisi elde edilir.

(4.3) ile verilen *k-d* sınıf tahmin edicisinin pratik bir uygulaması için k ve d yanlılık parametrelerinin seçimi önem taşımaktadır. Benzer biçimde, k ve d yanlılık parametrelerinin seçimi için (4.16) ifadesinin k ve d yanlılık parametrelerine göre minimize edilmesi yöntemi kullanılabilir. Ancak, (4.16) ifadesinin minimizasyon işlemleri sırasında karmaşık ifadeler elde edilmektedir. Bu nedenle, minimizasyon yönteminin kullanılması tercih edilmeyebilir. Bunun yerine, grafiksel yöntemlerle k ve d yanlılık parametrelerinin seçimi yapılabilir.

4.5. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ TAHMİN EDİCİSİNİN BAZI BİLİNEN TAHMİN EDİCİLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

4.5.1. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ Tahmin Edicisinin *EKK* Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

(3.35) eşitliğinde, (3.36) ve (4.9) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}) - MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) = \sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}') - (\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{I})' \quad (4.25)$$

elde edilmektedir. $k > 0$ ve $0 < d < 1$ olmak üzere aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 4.1(Yang ve Chang, 2010)**:**

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ tahmin edicileri için $k > 0$ ve $0 < d < 1$ olmak üzere $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ iki parametreli tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}$ tahmin edicisine göre daha iyi bir tahmin edicidir. Yani,

$$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}) - MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) > 0 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}'(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{I})'[\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}')]^{-1}(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{I})\boldsymbol{\alpha} < 1$$

dır.

İspat: (3.36) ve (4.6) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK}\right) - \operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\left(k,d\right)\right) &= \sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}^{-1} - \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right)\\ &= \sigma^2 diag\left\{\frac{1}{\lambda_i} - \frac{\left(\lambda_i + d\right)^2 \lambda_i}{\left(\lambda_i + 1\right)^2\left(\lambda_i + k\right)^2}\right\}_{i=1}^{p}\end{aligned}$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu durumda,

$\mathbf{\Lambda}^{-1}-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'$ matrisi pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda_i}-\dfrac{\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i}{\left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^2}>0$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_i+1\right)^2\left(\lambda_i+k\right)^2-\left(\lambda_i+d\right)^2\lambda_i^2>0$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda_i+1\right)\left(\lambda_i+k\right)-\left(\lambda_i+d\right)\lambda_i>0$$

olmalıdır. Teoremdeki kabul göz önüne alınırsa Teorem 2.11 kullanıldığında ispat tamamlanmaktadır.

4.5.2. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ Tahmin Edicisinin Ridge Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

(3.35) eşitliğinde, (3.9) ve (4.9) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) &= \sigma^2\left[\left(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right] \\ &+k^2\left(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}-\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)', \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilmektedir. $k>0$ ve $0<d<1$ olmak üzere aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 4.2(Yang ve Chang, 2010)**:**

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ tahmin edicileri, $k>0$ ve $0<d<1$ olmak üzere, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ iki tane parametre içeren tahmin edicisi $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisine göre daha iyi bir tahmin edicidir. Yani,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\mathbf{\Lambda}\left(2\mathbf{\Lambda}+\left(1+d\right)\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}<\sigma^2\left(1-d\right) \\ &\Rightarrow MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))>0 \end{aligned}$$

dir.

İspat: Öncelikle,

$\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\boldsymbol{\Lambda}\left(2\boldsymbol{\Lambda}+\left(1+d\right)\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}<\sigma^2\left(1-d\right)$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, (4.26) ifadesi, $\mathbf{A}=\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))\\
&=\mathbf{A}[\sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)-\sigma^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)+k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\alpha\alpha'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\\
&\quad-\left(\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}-\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\Lambda}-\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)\right)]\mathbf{A}'\\
&=\mathbf{A}\{\boldsymbol{\Lambda}\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)-\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\right]\sigma^2+k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\\
&\quad-\left(\boldsymbol{\Lambda}^2+d\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^2-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}^2+d\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^2-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\}\mathbf{A}'\\
&=\mathbf{A}\{\boldsymbol{\Lambda}\left[\boldsymbol{\Lambda}^2+2\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}-\boldsymbol{\Lambda}^2-2d\boldsymbol{\Lambda}-d^2\mathbf{I}\right]\sigma^2+k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\\
&\quad-\left(d\boldsymbol{\Lambda}-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(d\boldsymbol{\Lambda}-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\}\mathbf{A}'\\
&=\mathbf{A}\{\boldsymbol{\Lambda}\left[2\left(1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+\left(1-d^2\right)\mathbf{I}\right]\sigma^2+k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\\
&\quad-\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\}\mathbf{A}'\\
&=\mathbf{A}\{\sigma^2\left[\left(1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(2\boldsymbol{\Lambda}+\left(1+d\right)\mathbf{I}\right)\right]+k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\\
&\quad-\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\}\mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilmektedir. Burada, $k^2\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)>0$ dir. $\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\boldsymbol{\Lambda}\left(2\boldsymbol{\Lambda}+\left(1+d\right)\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}<\sigma^2\left(1-d\right)$ olmasından dolayı Teorem 2.12 den

$\sigma^2\left[\left(1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(2\boldsymbol{\Lambda}+\left(1+d\right)\mathbf{I}\right)\right]-\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\left(d-k-1\right)\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right)>0$ dir.

4.5.3. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ Tahmin Edicisinin Liu Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

(3.35) eşitliğinde, (3.26) ve (4.9) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))&=\sigma^2\left[(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}-\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right]\\
&\quad+(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}-\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)'
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

elde edilmektedir. $k>0$ ve $0<d<1$ olmak üzere aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 4.3(Yang ve Chang, 2010)**:**

$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ tahmin edicileri, $k>0$ ve $0<d<1$ olmak üzere, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edici $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ Liu tahmin edicisine göre daha iyi bir tahmin edicidir. Yani,

$$\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(2\mathbf{I}+k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}<k\sigma^2$$
$$\Rightarrow MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))>0$$

dir.

İspat: Öncelikle,

$$\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(2\mathbf{I}+k\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]<k\sigma^2$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, (4.27) ifadesi, $\mathbf{A}=\left(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right)^{-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))\\
&\quad=\sigma^2\left[(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}-\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right]\\
&\qquad+(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(d\mathbf{I}-\mathbf{I}\right)(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}-\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)'\\
&\quad=\mathbf{A}\{\sigma^2\left[(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}-(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\right]\\
&\qquad+(d-1)^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\\
&\qquad-\left[(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}-(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\right]\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left[(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\boldsymbol{\Lambda}-(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\right]\}\mathbf{A}'\\
&\quad=\mathbf{A}\{\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\left[(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}\right](\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})+(d-1)^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\alpha\alpha'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\\
&\qquad-\left[\boldsymbol{\Lambda}^2+d\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^2-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left[\boldsymbol{\Lambda}^2+d\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}^2-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right]\}\mathbf{A}'\\
&\quad=\mathbf{A}\{\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\left[(\mathbf{I}+k\boldsymbol{\Lambda})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}\right](\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})+(d-1)^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\\
&\qquad-\left[d\boldsymbol{\Lambda}-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left[d\boldsymbol{\Lambda}-k\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda}-k\mathbf{I}\right]\}\mathbf{A}'\\
&\quad=\mathbf{A}\{\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\left[(\mathbf{I}+k\boldsymbol{\Lambda})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}-\boldsymbol{\Lambda}\right](\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})+(d-1)^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\\
&\qquad-\left[(k+1-d)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left[(k+1-d)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\}\mathbf{A}'\\
&\quad=\mathbf{A}\{\sigma^2k(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(2\mathbf{I}+k\boldsymbol{\Lambda}^{-1})(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})+(d-1)^2(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})\\
&\qquad-\left[(k+1-d)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'\left[(k+1-d)\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\}\mathbf{A}'
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada, ikinci terim, $(d-1)^2(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha\alpha}'(\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I})>0$ dır. Ayrıca,

$\boldsymbol{\alpha}'\left[\left(k+1-d\right)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\left[\left(\mathbf{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\left(2\mathbf{I}+k\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)\left(\mathbf{\Lambda}+d\mathbf{I}\right)\right]^{-1}\left[\left(k+1-d\right)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]<k\sigma^2$ kabulü göz önüne alınıp Teorem 2.12 kullanılarak,

$$\sigma^2 k(\mathbf{\Lambda}+d\mathbf{I})(2\mathbf{I}+k\mathbf{\Lambda}^{-1})(\mathbf{\Lambda}+d\mathbf{I})-\left[(k+1-d)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\alpha\alpha}'\left[(k+1-d)\mathbf{\Lambda}+k\mathbf{I}\right]>0$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği söylenir. Böylce, Teorem 4.3 ispatlanmış olmaktadır.

4.5.4. $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$ Tahmin Edicisinin *k-d* Sınıf Tahmin Edicisiyle Karşılaştırılması

(3.35) eşitliğinde, (4.9) ve (4.23) ifadeleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d))-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)) &= \sigma^2\left(\mathbf{M\Lambda M}'-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right) \\ &+\left[\left(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}'\left(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I}\right)'-\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)'\right] \end{aligned} \tag{4.28}$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu durumda, $k>0$ ve $0<d<1$ için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4: $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ tahmin edicileri için $k>0$ ve $-\infty<d<\infty$ olmak üzere $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edici, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)$ *k-d* sınıf tahmin edicisine göre daha iyi bir tahmin edicidir. Yani,

$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d))-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)'\left[\sigma^2\left(\mathbf{M\Lambda M}'-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right)+\left(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}'\left(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I}\right)'\right]^{-1}\left(\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha}<1 \tag{4.29}$$

dir.

İspat: (4.6) ve (4.12) eşitliklerinden,

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)\right)=\sigma^2\left(\mathbf{M\Lambda M}'-\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'\right)$$

$$=\sigma^2\left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\left(\mathbf{I}+d(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathbf{I}+d(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\right)(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\\ \qquad -(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\end{array}\right]$$

$$=\sigma^2(\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}\left[\begin{array}{l}\left(\mathbf{I}+d(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\right)\boldsymbol{\Lambda}\left(\mathbf{I}+d(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\right)\\ \qquad -(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+k\mathbf{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+d\mathbf{I})\end{array}\right](\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}$$

$$=\sigma^2 diag\left\{\left[\left(1+\frac{d}{\lambda_i+k}\right)^2\lambda_i-\frac{\lambda_i(\lambda_i+d)^2}{(\lambda_i+k)^2}\right]\frac{1}{(\lambda_i+1)^2}\right\}_{i=1}^{p}$$

$$=\sigma^2 diag\left\{\frac{\lambda_i(\lambda_i+k+d)^2}{(\lambda_i+k)^2(\lambda_i+1)^2}-\frac{\lambda_i(\lambda_i+d)^2}{(\lambda_i+k)^2(\lambda_i+1)^2}\right\}_{i=1}^{p}$$

$$=\sigma^2 diag\left\{\frac{\lambda_i(\lambda_i+k+d)^2-\lambda_i(\lambda_i+d)^2}{(\lambda_i+k)^2(\lambda_i+1)^2}\right\}_{i=1}^{p}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda,

$\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)\right)-\operatorname{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)\right)$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\lambda_i(\lambda_i+k+d)^2-\lambda_i(\lambda_i+d)^2>0\\&(\lambda_i+k+d)^2-(\lambda_i+d)^2>0\\&(\lambda_i+k+d+\lambda_i+d)(\lambda_i+k+d-\lambda_i-d)>0\\&\lambda_i+k+d+\lambda_i+d>0\\&k>0\\&d>\frac{-2\lambda_i-k}{2}\end{aligned}$$

dır. Teoremdeki kabul göz önüne alınarak Teorem 2.13' den ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1: $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d)$ ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d)$ tahmin edicileri için $k>0$ ve $-\infty<d<\infty$ olsun. Bu durumda,

$MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k,d))-MHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{k-d}(k,d))$ pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{\alpha}'(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I})'\left[\sigma^2\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\mathbf{A}}'-\mathbf{M\Lambda M}'\right)+\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\alpha\alpha}'\left(\tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Lambda}-\mathbf{I}\right)'\right]^{-1}(\mathbf{M\Lambda}-\mathbf{I})\boldsymbol{\alpha}<1 \qquad \text{dir.}$$

5. UYGULAMA

Bu bölümde, teorikte olarak verilen sonuçları örneklendirmek için Woods, Steinour ve Starke (1932) tarafından ilk olarak kullanılan ve daha sonra Hald (1952), Daniel ve Wood (1980) gibi çalışmalarda pek çok kez analiz edilen Portland çimento verisi incelenecektir. Bu veriler, Portland çimentosunun hazırlanması ve sertleştirilmesi sırasında açığa çıkan ısı miktarını göstermektedir. Çimentonun bileşenleri olan dört bağımsız değişken, tricalcium aluminate$\left(x_1\right)$, tetracalcium silicate $\left(x_2\right)$, tetracalcium alumino ferrite $\left(x_3\right)$ ve dicalcium silicate $\left(x_4\right)$ dir. Bağımlı değişken olan $\left(y\right)$ ise bir gram çimento başına düşen kalori cinsinden ısı miktarını göstermektedir. Hesaplamalar Mathematica 7 programıyla yapıldığından diğer hesaplamalarla arasında küçük farklılıklar olabilecektir. Hald veri kümesinin ham verileri üzerinden bağımlı ve bağımsız değişkenleri,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 78.5 \\ 74.3 \\ 104.3 \\ 87.6 \\ 95.9 \\ 109.2 \\ 102.7 \\ 72.5 \\ 93.1 \\ 115.9 \\ 83.8 \\ 113.3 \\ 109.4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 26 & 6 & 60 \\ 1 & 29 & 15 & 52 \\ 11 & 56 & 8 & 20 \\ 11 & 31 & 8 & 47 \\ 7 & 52 & 6 & 33 \\ 11 & 55 & 9 & 22 \\ 3 & 71 & 17 & 6 \\ 1 & 31 & 22 & 44 \\ 2 & 54 & 18 & 22 \\ 21 & 47 & 4 & 26 \\ 1 & 40 & 23 & 34 \\ 11 & 66 & 9 & 12 \\ 10 & 68 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilmektedir. Birçok araştırmacı, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisini korelasyon formda bir matris olarak elde etmek için verileri standartlaştırmayı önermektedir. Bu durum tamamen araştırmacıya ve ele alınan model yapısına göre değişmektedir. Homojen model kullanıldığında $\mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı 423.725 olarak bulunmaktadır. Bu durumda $\mathbf{X}$ matrisinin iç ilişkiden oldukça çok etkilenmediği düşünülebilir. Fakat, $\mathbf{X}$ matrisinine (2.10) eşitlikleri ile verilen standartlaştırma işlemi uygulandığı zaman $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ korelasyon matrisinin koşul sayısı 1376.8806 olmaktadır. Koşul sayısının 1000 den büyük olması modeldeki değişkenler arasında güçlü bir iç ilişkinin olduğunun bir göstergesidir. Bu durumda, *EKK* tahmin edicisi tutarlı olmayacağından Ridge ve Liu tahmin edicileri *EKK* tahmin edicisine alternatif oluşturacaktır. Diğer taraftan, sabit terim içeren standartlaştırılmamış model kullanıldığında $\mathbf{X}$ matrisinin koşul sayısı 3.63221×10^7 değerine yükselmektedir. Bu durum ise modelde çok yüksek derecede çoklu iç ilişki olduğunu göstermektedir (Yang ve Chang, 2010), (Liu, 2003), (Sakallıoğlu ve Kaçıranlar, 2008).

Bu tezde yanlı tahmin edicilerin her iki durum üzerine yapılan çalışmalarına yer verilecektir. Ridge ve Liu tahmin edicileri için homojen model ve standarlaştırılmış veriler, iki yanlılık parametresi içeren tahmin ediciler için homojen olmayan model ve standartlaştırılmamış veriler üzerinde çalışılacaktır.

Veriler standartlaştırıldığında, regresyon katsayıları karşılaştırılabilir sayısal birimlerle ifade edilebilmektedir. Standartlaştırma yapıldıktan sonra (1.1) lineer regresyon modeli $\mathbf{y}_s = \mathbf{X}_s\boldsymbol{\beta}_s + \boldsymbol{\varepsilon}$ lineer modeline dönüşecektir. Birim uzunluk ölçeklendirme yöntemiyle standartlaştırılan veriler,

$$\mathbf{y}_s = \begin{bmatrix} -0.324738 \\ -0.405332 \\ 0.170340 \\ -0.150118 \\ 0.009151 \\ 0.264366 \\ 0.139637 \\ -0.439873 \\ -0.044577 \\ 0.392933 \\ -0.223036 \\ 0.343042 \\ 0.268204 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} -0.022649 & -0.410983 & -0.260016 & 0.517395 \\ -0.317096 & -0.355329 & 0.145609 & 0.379423 \\ 0.173648 & 0.145557 & -0.169877 & -0.172465 \\ 0.173648 & -0.318227 & -0.169877 & 0.293191 \\ -0.022649 & 0.071351 & -0.260016 & 0.051739 \\ 0.173648 & 0.127005 & -0.124808 & -0.137972 \\ -0.218947 & 0.423827 & 0.235748 & -0.413916 \\ -0.317096 & -0.318227 & 0.461095 & 0.241451 \\ -0.268022 & 0.108454 & 0.280817 & -0.137972 \\ 0.664392 & -0.021405 & -0.350154 & -0.068986 \\ -0.317096 & -0.151265 & 0.506164 & 0.068986 \\ 0.173648 & 0.33107 & -0.124808 & -0.310437 \\ 0.124574 & 0.368173 & -0.169877 & -0.310437 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda $\mathbf{X}_s'\mathbf{X}_s$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2.235704$, $\lambda_2 = 1.576066$, $\lambda_3 = 0.186606$, $\lambda_4 = 0.001623$ olmak üzere, bu özdeğerlerden oluşan köşegensel matris,

$$\mathbf{\Lambda}_s = \begin{bmatrix} 2.235704 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.576066 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.186606 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001623 \end{bmatrix}$$

dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin oluşturduğu ortogonal matris ise,

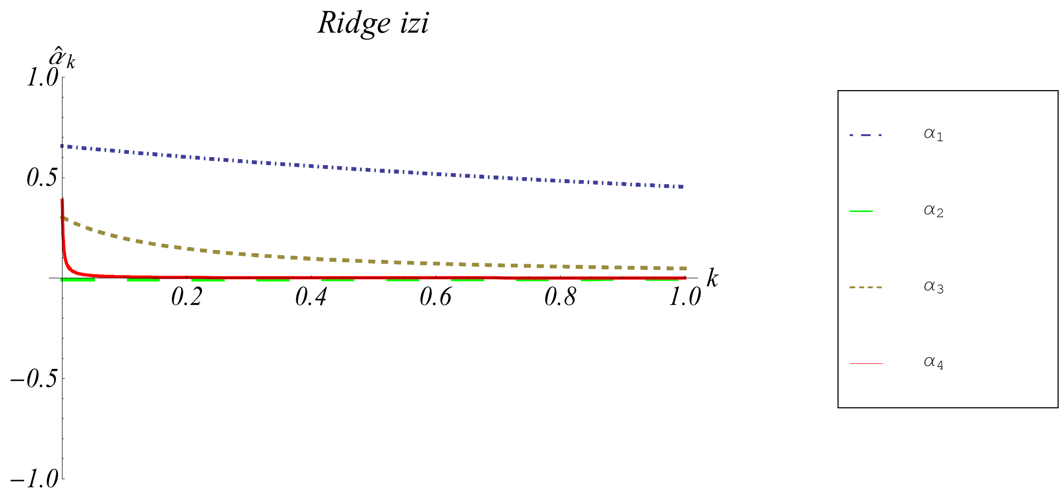
$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0.475955 & 0.508979 & 0.675500 & 0.241052 \\ 0.563870 & -0.413991 & -0.314420 & 0.641756 \\ -0.394067 & -0.604969 & 0.637691 & 0.268466 \\ -0.547931 & 0.451235 & -0.195421 & 0.676734 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, (1.1) lineer regresyon modeli Tanım 2.14 ile verilen (2.13) kanonik formunda ifade edilir. $\boldsymbol{\alpha}$ parametresinin *EKK* tahmin edicisi (1.2) eşitliğinden,

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{EKK} = \begin{bmatrix} 0.656958 \\ -0.008308 \\ 0.302770 \\ 0.388036 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca, σ^2 parametresinin *EKK* tahmin edicisi ise $\hat{\sigma}^2 = 0.001958$ olarak bulunmaktadır. Koşul sayısı, $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} = 1376.8806$ dir. Koşul sayısının değeri modelde çoklu iç ilişki olduğunu göstermektedir. Modelde çoklu iç ilişki olduğunda *EKK* tahmin edicisi, $\boldsymbol{\alpha}$ parametresinin gerçek değerinden oldukça uzak bir sonuç verecektir. Bu durumda, yanlı sonuç vermelerine rağmen alternatif olarak, Ridge ve Liu tahmin edicileri kullanılabilir.

İlk olarak, Ridge tahmin edicisi için yanlılık parametresinin değişimi ile elde edilen Ridge izi plotu Şekil 5.1'de verilmiştir.



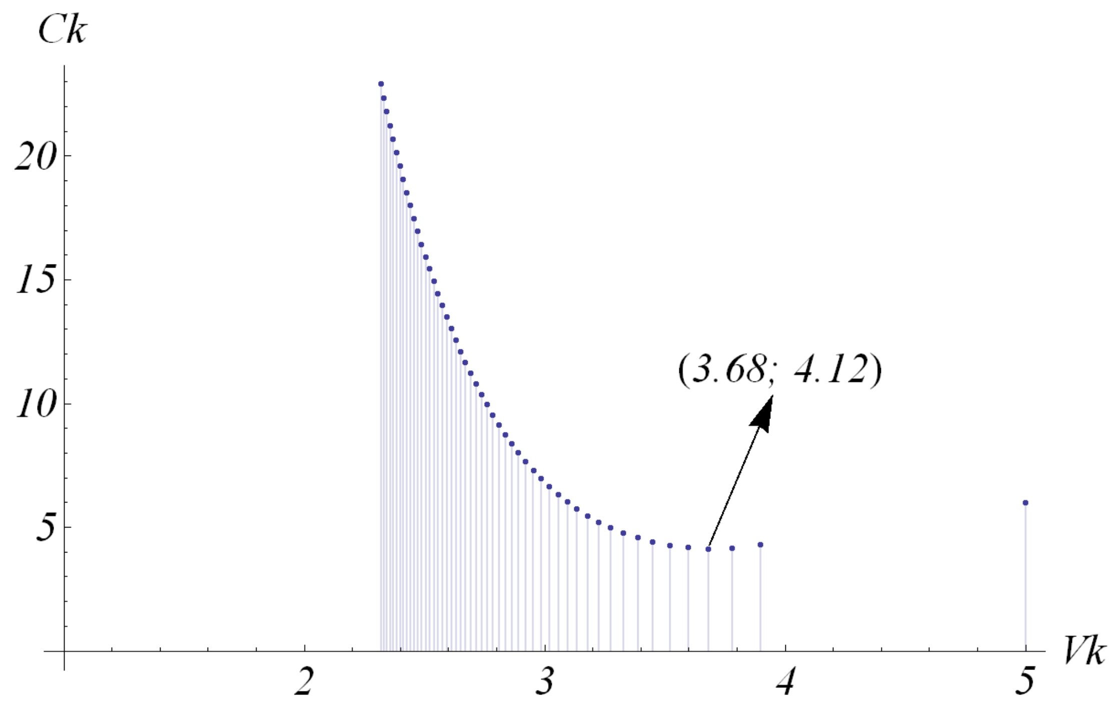
Şekil 5.1. Hald veri kümesi için elde edilen Ridge izleri

Şekil 5.1'de parametrelerin görsel olarak kararlı olduğu aralık $\left[0.2, 0.4\right]$ dır. Ancak, bu tahmini değer yaklaşıktır. k yanlılık parametresinin analitik yöntemler ile belirlenmesi halinde elde edilen tahmin değerleri ile birlikte regresyon parametreleri ve bu parametrelerin *SHKO* değerleri Tablo 5.1'de verilmiştir.

Tablo 5.1. Farklı k değerleri için parametre tahmini ve *SHKO* değerleri

	$\hat{k}_{HK} = 0.004537$	$\hat{k}_{HKB} = 0.011623$	$\hat{k}_{LW} = 0.007973$
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1$	0.655627	0.653560	0.654623
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2$	–0.00828	–0.00824	–0.00826
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_3$	0.295583	0.285017	0.290363
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_4$	0.102267	0.047562	0.065650
SHKO	0.177596	0.145759	0.150364

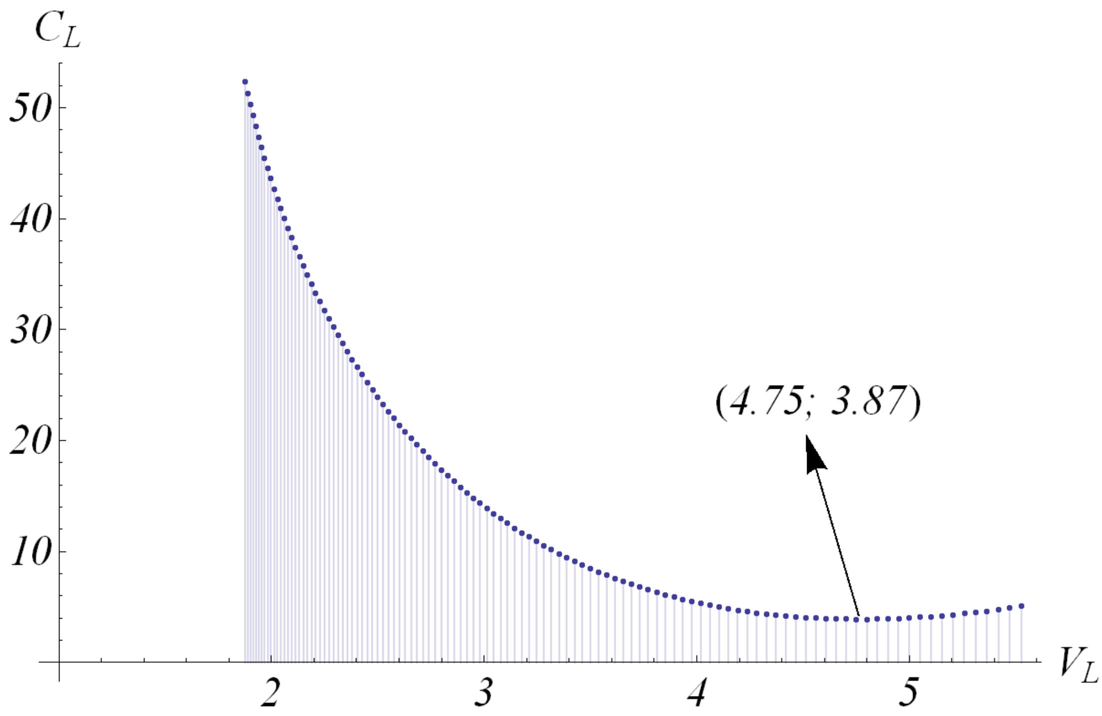
Ridge tahmin edicisindeki k yanlılık parametresinin alternatif bir tahmini, C_k ölçütü kullanılarak elde edilen $\hat{k}_{C_k} = 0.02646$ değeridir. Ayrıca, V_k değerlerine karşılık elde edilen C_k değerlerinin serpilme diagramı Şekil 5.2'de verilmiştir. Şekil 5.2'de V_k değerlerine göre elde edilen minimum C_k değeri $\hat{k}_{C_k} = 0.02646$ değeri ile tutarlıdır.



Şekil 5.2. (V_k, C_k) serpilme diagramı

Şimdi, Ridge tahmin edicisine alternatif olarak önerilen Liu tahmin edicisi ele alınsın. Liu tahmin edicisinin yanlılık parametresi seçimi için öncelikle *SHKO* eşitliğinin minimize edilmesi ile elde edilen (3.29) eşitliği kullanılırsa, yanlılık parametresi, $d_{\min} = -3.733050$ olarak elde edilir. Bu değer $0 < d < 1$ aralığında olmadığından bu yöntemin kullanılması uygun değildir. Ancak, (3.28) ile verilen d yanlılık parametresinin tahmini için α_i^2 ve σ^2 parametrelerinin yerine $\hat{\alpha}_i^2$ ve $\hat{\sigma}^2$ tahmini değerleri yazılırsa elde edilen d yanlılık parametresinin tahmini değeri $\hat{d} = 0.172274$ olarak bulunur. Bu değer için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'_{\hat{d}=0.172274} = \begin{bmatrix} 0.488901 & -0.005638 & 0.091570 & 0.067369 \end{bmatrix}$ ve $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\hat{d}}\right) = 0.214052$ olarak elde edilir. Diğer bir alternatif yaklaşım olarak, yanlılık parametresinin seçimi için C_L ölçütü kullanılabilir. Bu durumda, $\hat{d}_{C_L} = 0.952465$ olarak bulunur ve bu değer için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\hat{d}_{C_L}=0.9524} = \begin{bmatrix} 0.6473 & -0.0081 & 0.2906 & 0.3696 \end{bmatrix}$ ve $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\hat{d}_{C_L}}\right) = 1.106560$ ifadeleri elde edilir. Ridge tahmin edicisine benzer olarak

(V_L, C_L) serpilme diagramının oluşturulması halinde elde edilen d tahmin değeri $\hat{d}_{C_L} = 0.952465$ ile tutarlıdır. Şekil 5.3'de (V_L, C_L) serpilme diagramı verilmiştir.



Şekil 5.3. (V_L, C_L) serpilme diagramı

Tablo 5.2'de k yanlılık parametresinin farklı değerleri için $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ değeri ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisinin değerleri verilmiştir. Tablo 5.3'de ise d yanlılık parametresinin farklı değerleri için $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$ değeri ve $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ tahmin edicisinin değerleri hesaplanmıştır.

Tablo 5.2. Hald verinin kullanılmasıyla elde edilen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ ve $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ değerleri

k			$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$		$SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$
0.0001	0.656929	–0.008308	0.302608	0.365525	1.083250
0.0002	0.656899	–0.008307	0.302446	0.345482	0.970407
0.002	0.656371	–0.008298	0.299560	0.173873	0.300407
0.0116	0.653567	–0.008247	0.285051	0.047647	0.145767
0.04	0.645411	–0.008102	0.249326	0.015137	0.153302
0.02	0.651133	–0.008204	0.273461	0.029138	0.147134
0.5	0.536887	–0.006307	0.082287	0.001256	0.214722
0.8	0.483830	–0.005511	0.057265	0.000785	0.241618
0.99	0.455331	–0.005103	0.048018	0.000635	0.256798
0	0.656958	–0.008308	0.302770	0.388036	1.218630

Tablo 5.3. Hald verinin kullanılmasıyla elde edilen $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ ve $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$ değerleri

d			$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$		$HKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$
0.1	0.474227	–0.005405	0.073129	0.039369	0.221711
0.2	0.494531	–0.005728	0.098645	0.078110	0.215179
0.5	0.555441	–0.006695	0.175192	0.194333	0.371535
0.8	0.616351	–0.007663	0.251739	0.310555	0.791816
0.9	0.636655	–0.007986	0.277255	0.349295	0.990560
0.95	0.646806	–0.008147	0.290012	0.368666	1.100930
0.98	0.652897	–0.008244	0.297667	0.380288	1.170670
0.99	0.654928	–0.008276	0.300219	0.384162	1.194500
1	0.656958	–0.008308	0.302770	0.388036	1.218630

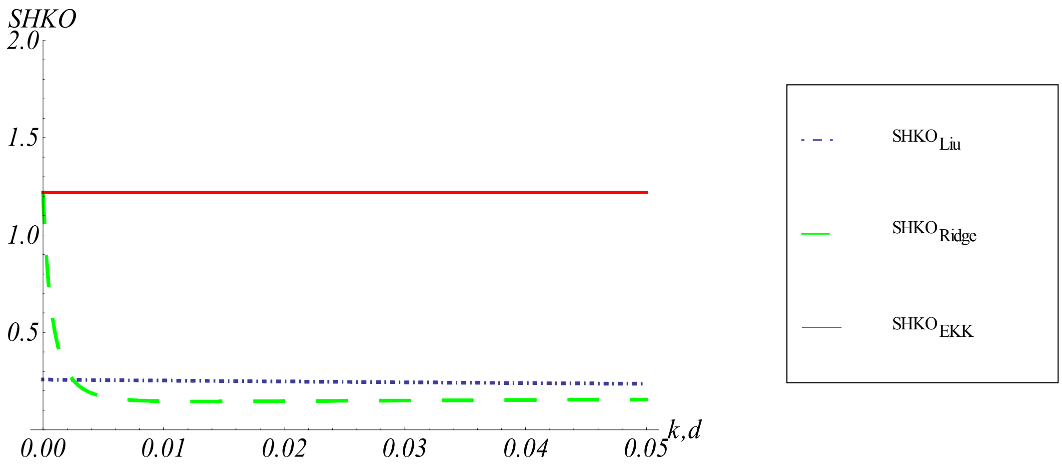
Tablo 5.2 ve Tablo 5.3 den aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilmektedir:

1. $k = 0.02$ değerini alalım. Bu durumda, Teorem 3.4'den, d_{1j} yanlılık parametresinin değerleri; $d_{11} = 0.971300$, $d_{12} = 0.967700$, $d_{13} = 0.884800$,

$d_{14} = 0.089000$ dir. Buradan görülür ki, $0 < 0.971300 < d < 1$ için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisinin *SHKO* değeri, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ tahmin edicisinin *SHKO* değerinden daha küçüktür. Örneğin, $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{R(k=0.02)}\right) = 0.153022 < SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{d=0.98}\right) = 1.170670$ olarak elde edilmektedir.

2. $d = 0.9$ değerini alalım. Bu durumda, Teorem 3.3'den k_{1j} yanlılık parametresini değerleri; $k_{11} = 0.071200$, $k_{12} = 0.063600$, $k_{13} = 0.017100$, $k_{14} = 0.000220$ dir. Benzer şekilde, $0 < 0.071200 < k < 1$ için $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d$ tahmin edicisinin *SHKO* değeri, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R$ tahmin edicisinin *SHKO* değerinden daha küçüktür. Örneğin, $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{R(k=0.02)}\right) = 0.153022 < SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{d=0.9}\right) = 0.99056$ olarak elde edilmektedir.

Grafiksel olarak bu üç tahmin edicinin *SHKO* değerleri Şekil 5.4'de verilmiştir.



Şekil 5.4: *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerinin *SHKO* değerleri

Şekil 5.4'de, *SHKO* değerleri grafik üzerinde incelenirse, *k* parametresinin yaklaşık olarak 0.003 değerinden büyük olması durumunda, Ridge tahmin edicisinin diğer tahmin edicilere göre daha iyi olduğu görülmektedir. Diğer yandan *d* parametresinin yaklaşık olarak 0.003 den küçük değerleri için Liu tahmin edicisi, Ridge tahmin edicisine göre daha iyidir. Sonuç olarak, *k* ve *d* yanlılık parametrelerinin seçimi tahmin edicilerin performansını etkilemektedir.

Şimdi Hald veri kümesi üzerinde iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin ediciler ele alınsın. İki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerden (4.3) ve (4.4) ile verilen tahmin edicilerinin öncelikle k ve d yanlılık parametreleri bulunacak ve *SHKO* değerleri önce Ridge ve Liu tahmin edicileriyle, sonra da birbirleriyle karşılaştırılacaktır.

Standartlaştırılmamış homojen olmayan model için $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin özdeğerleri, $\lambda_1 = 44676.2$, $\lambda_2 = 5965.42$, $\lambda_3 = 809.952$, $\lambda_4 = 105.419$, $\lambda_5 = 0.001218$ ve bu özdeğerlerin oluşturduğu köşegensel matris ise

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 44676.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5965.42 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 809.952 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105.419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001218 \end{bmatrix}$$

dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin oluşturduğu matris ise,

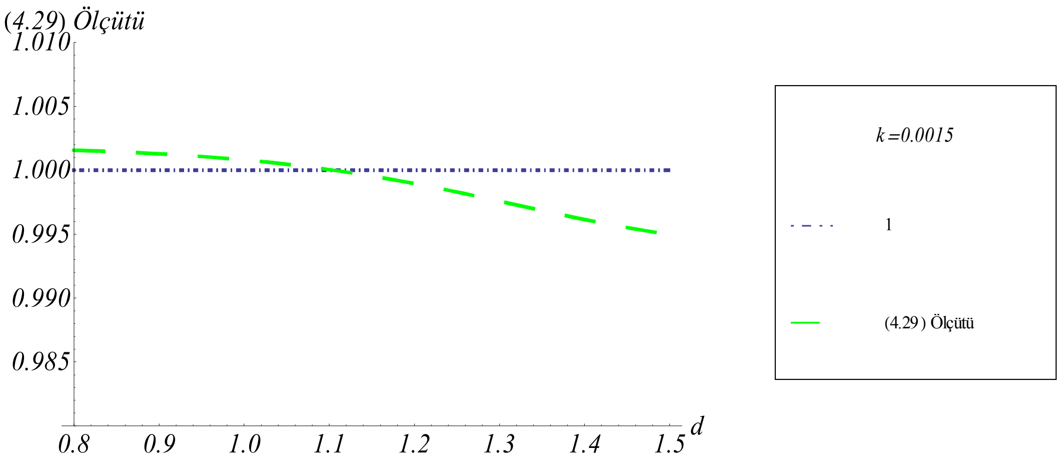
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.016994 & -0.127886 & -0.839675 & -0.198419 & -0.488807 \\ 0.003722 & -0.042775 & -0.509221 & 0.072109 & 0.856534 \\ 0.000042 & -0.645904 & -0.018120 & 0.755715 & -0.106651 \\ 0.011041 & 0.751344 & -0.187630 & 0.61985 & -0.126258 \\ 0.999788 & -0.010284 & -0.010303 & -0.010519 & 0.010099 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, koşul sayısı $\dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_5} = 3.63221 \times 10^7$, olarak bulunur. Yani, $\mathbf{X}$ matrisi çoklu iç ilişkiden oldukça fazla etkilenmektedir. Şimdi, iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerden (4.3) ve (4.4) ele alınacaktır. Tablo 5.4’de (4.4) ve (4.3) tahmin edicileri için elde edilen *SHKO* değerleri ile birlikte parametre tahminleri elde edilmiştir. k ve d değerlerinin elde edilmesi için Bölüm 4.3’de verilen yöntemler kullanılmıştır.

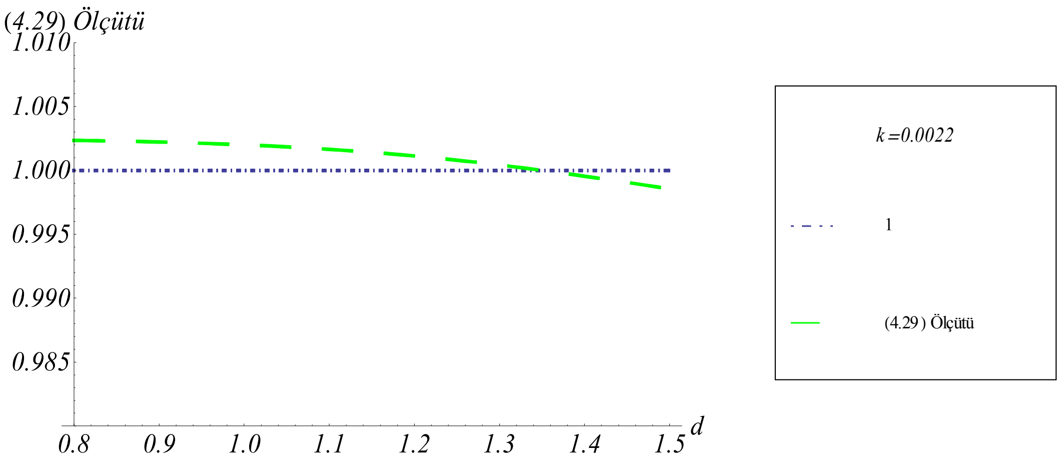
Tablo 5.4. İki yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerin karşılaştırılması

	k	d	*SHKO*	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0	1	4912.09	62.4054	1.5511	0.5101	0.1019	–0.1440
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0	1	4912.09	62.4054	1.5511	0.5101	0.1019	–0.1440
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.0015	1	2170.96	27.6164	1.9089	0.8687	0.4679	0.2073
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.0015	1	2170.97	27.6587	1.9085	0.8682	0.4675	0.2069
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0	0.95	4443.44	59.2913	1.5824	0.5424	0.1341	–0.1125
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0	0.95	4443.44	59.2913	1.5824	0.5424	0.1341	–0.1125
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.0022	0.95	2265.07	21.1591	1.9746	0.9354	0.5353	0.2726
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.0022	0.95	2263.65	21.2079	1.9742	0.9349	0.5348	0.2721
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.0015	0.95	2175.19	26.2396	1.9224	0.8830	0.4819	0.2213
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.0015	0.95	2174.93	26.2820	1.9220	0.8826	0.4814	0.2209
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.0015	0.4412	2706.07	12.2315	2.0595	1.0290	0.6242	0.3639
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.0015	0.4412	2703.13	12.2738	2.0591	1.0286	0.6238	0.3634
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.0076	0.98	2998.32	8.4886	2.1053	2.0659	0.6689	0.4006
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.0076	0.98	2992.67	8.5540	2.1047	2.0652	0.6683	0.3999
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.7948	0.45	3884.88	0.0900	2.1737	1.1566	0.7443	0.4881
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.7948	0.45	3875.46	0.1659	2.1837	1.1533	0.7513	0.4857
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	0.7948	0.95	3878.95	0.1378	2.1800	1.1545	0.7487	0.4866
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	0.7948	0.95	3869.54	0.2137	2.1900	1.1513	0.7556	0.4842
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	28.9913	0.98	3890.06	0.0454	1.8734	1.2253	0.5329	0.5329
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	28.9913	0.98	3880.47	0.1257	2.1887	1.1527	0.7547	0.4855
$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k,d)$	28.9913	0.95	3890.07	0.0454	1.8731	1.2254	0.5353	0.5329
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k-d}(k,d)$	28.9913	0.95	3880.48	0.1256	2.1883	1.1528	0.7545	0.4855

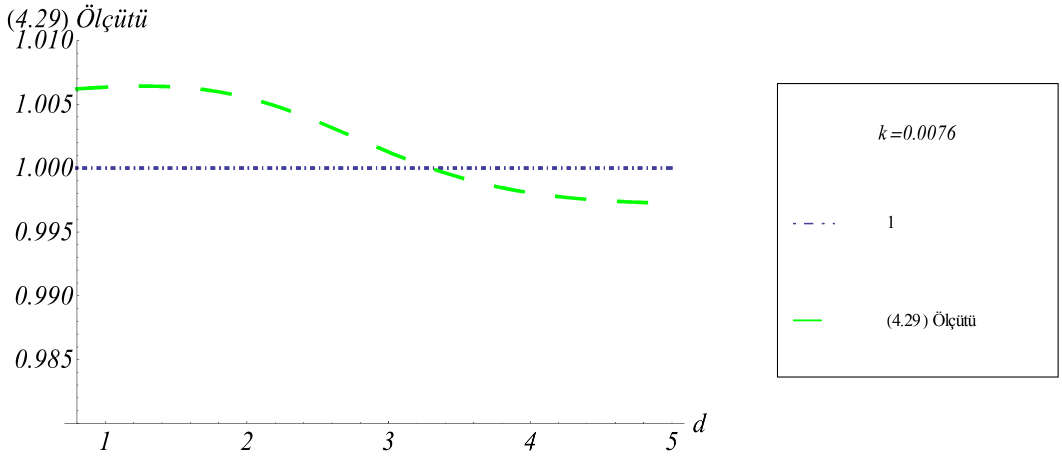
İki yanlılık parametresi içeren tahmin ediciler için analitik yöntemlerle belirlenebilen farklı k ve d değerleri elde edilmektedir. Buradaki amacımız, (4.3) ve (4.4) tahmin edicilerini farklı k ve d değerlerini kullanarak karşılaştırmaktır. Tablo 5.4'de, iki yanlı tahmin edicilerin noktasal k ve d tahmin değerlerine göre karşılaştırılmaları grafiksel yaklaşımlar kullanılarak daha kapsamlı olarak verilebilir. İlk olarak, *MHKO* ölçütüne göre, çeşitli sabit k değerleri için (4.4) tahmin edicisinin (4.3) tahmin edicisi ile karşılaştırılması Şekil 5.5a, Şekil 5.5b, Şekil 5.5c, Şekil 5.5d, Şekil 5.5e'de verilmiştir.



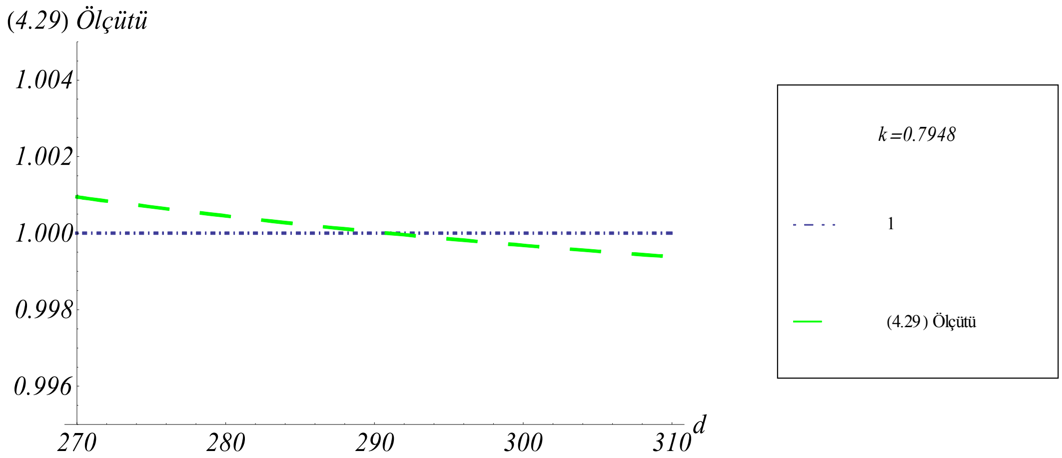
Şekil 5.5a. $k = 0.0015$ için tahmin edicilerin (4.29) ölçütüne göre karşılaştırılması



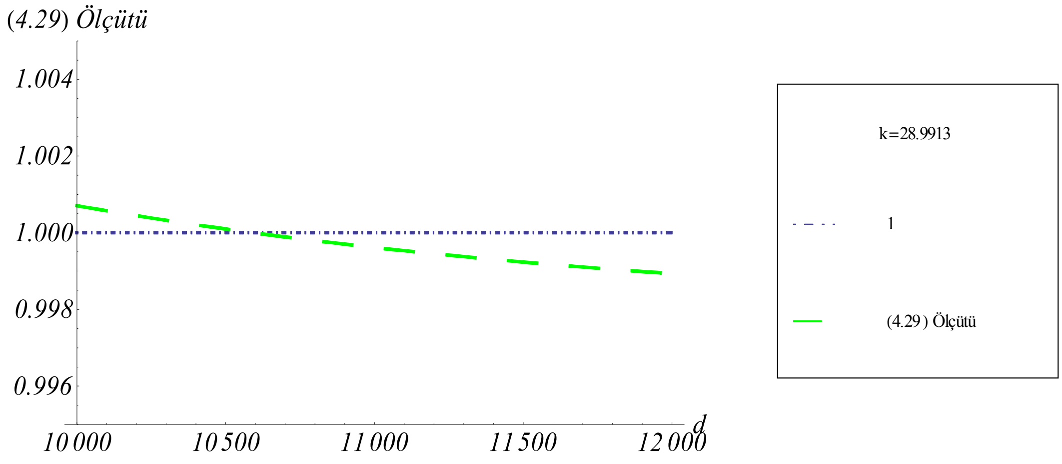
Şekil 5.5b. $k = 0.0022$ için tahmin edicilerin (4.29) ölçütüne göre karşılaştırılması



Şekil 5.5c. $k = 0.0076$ için tahmin edicilerin (4.29) ölçütüne göre karşılaştırılması



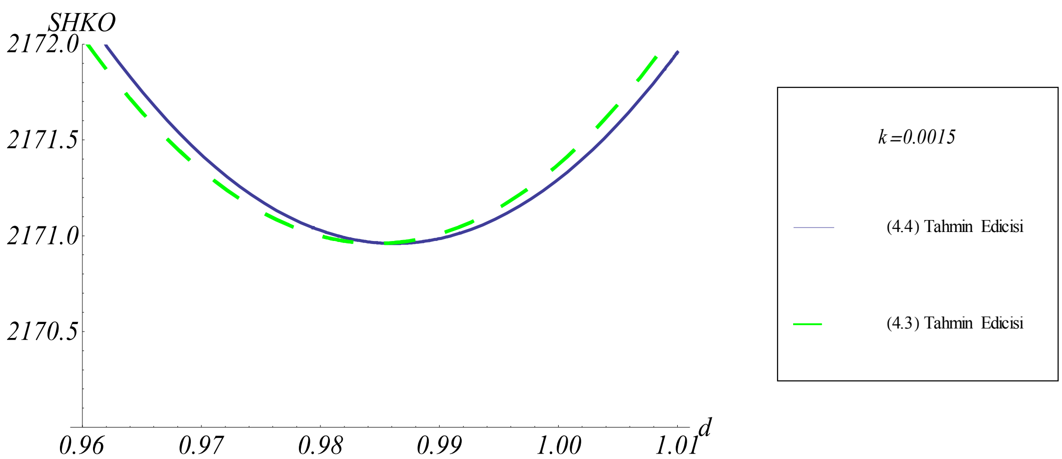
Şekil 5.5d. $k = 0.7948$ için tahmin edicilerin (4.29) ölçütüne göre karşılaştırılması



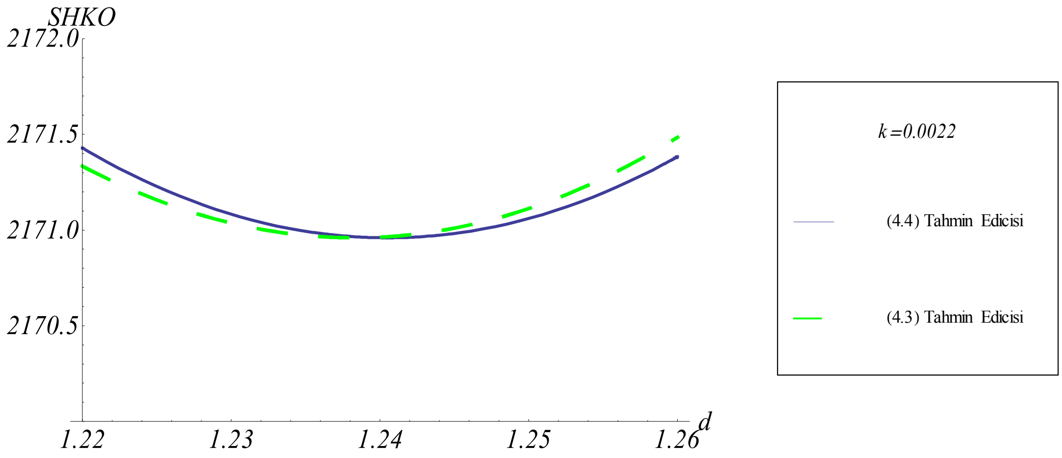
Şekil 5.5e. $k = 28.9913$ için tahmin edicilerin (4.29) ölçütüne göre karşılaştırılması

Şekil 5.5(a-e) tahmin edicilerinin (4.29) ölçütüne göre birbirlerine üstünlükleri farklı k değerleri için değiştiği görülmektedir. Özel olarak, $k = 0.0015$ için verilen grafik yorumlanırsa, yaklaşık olarak $d > 1.1$ değeri için (4.4) ile verilen Yang ve Chang tahmin edicisi, (4.3) ile verilen *k-d* sınıf tahmin edicisinden daha iyi bir tahmin edicidir. Diğer bir deyişle yaklaşık olarak $d < 1.1$ için (4.3) *k-d* sınıf tahmin edicisi, (4.4) ile verilen Yang ve Chang tahmin edicisine göre daha kötüdür.

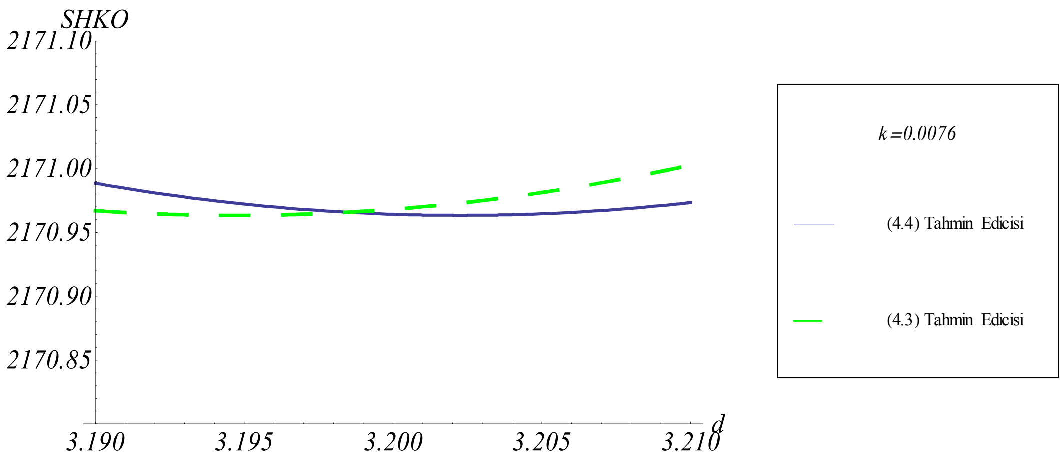
Son olarak, (4.4) tahmin edicisi ile (4.3) tahmin edicisinin *SHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması Şekil 5.6a, Şekil 5.6b, Şekil 5.6c, Şekil 5.6d ve Şekil 5.6e'de verilmiştir.



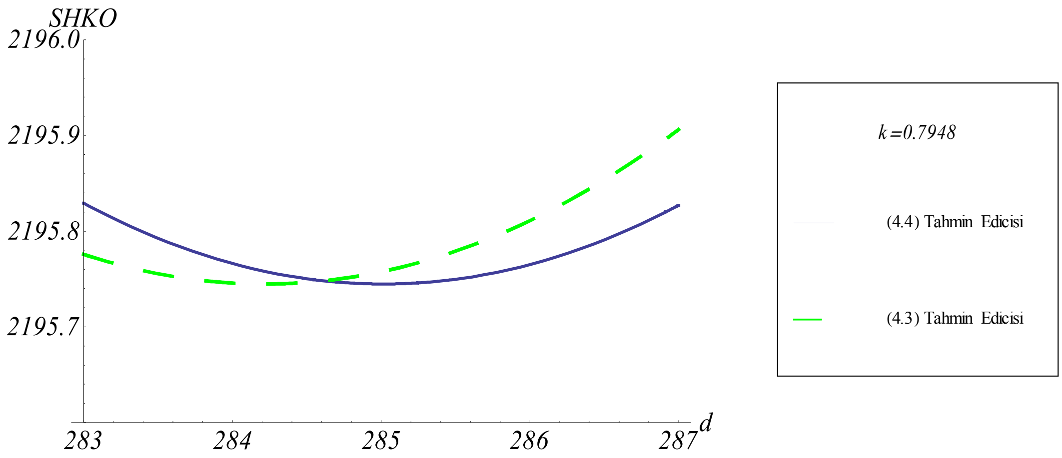
Şekil 5.6a. $k = 0.0015$ için tahmin edicilerin *SHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması



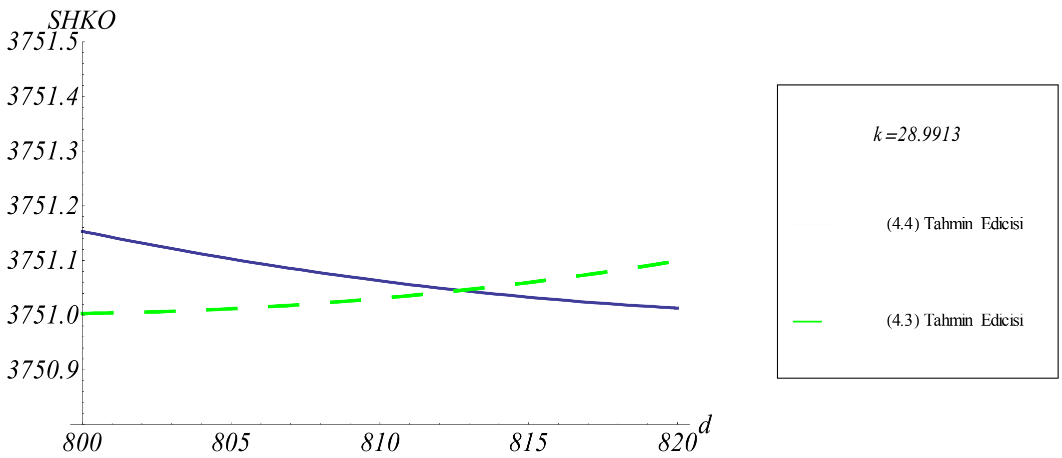
Şekil 5.6b. $k = 0.0022$ için tahmin edicilerin *SHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması



Şekil5.6c. $k = 0.0076$ için tahmin edicilerin *SHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması



Şekil 5.6d. $k = 0.7948$ için tahmin edicilerin *SHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması



Şekil 5.6e. $k = 28.9913$ için Tahmin Edicilerin *SHKO* ölçütüne göre Karşılaştırılması

Şekil 5.6(a-e) tahmin edicilerinin *SHKO* ölçütüne göre birbirlerine üstünlükleri farklı k değerleri için değişmektedir. Özel olarak, $k = 0.0015$ için verilen grafik yorumlanırsa, yaklaşık olarak $d < 0.984$ değeri için (4.4) ile verilen Yang ve Chang tahmin edicisi, (4.3) ile verilen *k-d* sınıf tahmin edicisinden daha iyi bir tahmin edicidir. Diğer taraftan, yaklaşık olarak $d > 0.984$ için (4.3) *k-d* sınıf tahmin edicisi, (4.4) ile verilen Yang ve Chang (2010) tahmin edicisine göre daha iyidir.

6. MALZEME VE YÖNTEM

Birinci bölümde, çoklu iç ilişki problemi tanıtılarak, çoklu iç ilişkinin belirlenmesi, neden olduğu sonuçlar ve çözüm yöntemlerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde yer alan teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, modelde çoklu iç ilişki olması durumunda *EKK* tahmin edicisine alternatif olarak önerilen Ridge ve Liu tahmin edicileri tanıtılmış ve yanlılık parametrelerinin bulunması için çeşitli yöntemler verilmiştir. Bu yöntemler; Ridge İzi yöntemi, $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R)$ ve $SHKO(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d)$ değerlerinin minimize edilmesi, $\hat{k}_{HKB}$, $\hat{k}_{LW}$, C_k ölçütü, C_L ölçütü ve İterasyon yöntemi'dir. Ayrıca, *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicileri birbirleriyle *SHKO* ve *MHKO* ölçütlerine göre karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, modeldeki çoklu iç ilişkiyi ortadan kaldırmak için *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicilerini içeren iki tane yanlılık parametresine bağlı tahmin ediciler tanıtılmıştır. Özellikle, Yang ve Chang (2010) tarafından tanımlanan iki tane yanlılık parametresi içeren yeni tahmin edici ile Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2008) tarafından tanımlanan *k-d* sınıf tahmin edici üzerinde durulmuş ve bu tahmin edicilerin *k* ve *d* yanlılık parametrelerinin bulunması için yöntemler verilmiştir. Bu yöntemler, *SHKO* değerinin minimize edilmesi ve grafiksel yöntemlerdir. Ayrıca, tanıtılan iki tane yanlılık parametresi içeren tahmin edicilerin *EKK*, Ridge, Liu tahmin edicileriyle ve birbirleriyle *MHKO* ölçütüne göre karşılaştırılması yapılmıştır.

Beşinci bölümde, Mathematica 7 programı kullanılarak literatürde yaygın olarak kullanılan Hald veri kümesi önerilen yaklaşımlarla yeniden analiz edilmiştir.

Sonuçta, modelde çoklu iç ilişki olması durumunda literatürde var olan tahmin edicilerden daha iyi bir tahmin edicinin önerilebileceği belirtilmiştir.

7. BULGULAR

Bu tezde, lineer regresyon model ve modelde çoklu iç ilişki olması durumu ayrıntılı bir şekilde tanıtılmış, çoklu iç ilişkinin belirlenmesi ve giderilmesi için yöntemler verilmiştir.

Çoklu iç ilişkinin giderilmesi için verilen yöntemler; ek veri toplanması, çoklu iç ilişkiye sebep olan değişkenlerin modelden çıkarılması gibi model üzerinde değişiklik yapmaya yönelik yöntemlerdir. Bu yöntemlere ek olarak, model üzerinde değişiklik yapılmadan yanlı sonuç vermelerine rağmen parametre varyansları küçük olan bazı yanlı tahmin ediciler kullanılabilir. Ancak, yanlı tahmin ediciler yanlılık parametrelerine bağlı olarak verilmektedir. Dolayısıyla yanlılık parametrelerinin regresyon katsayıları üzerinde olumsuz etkileri olabilmektedir. Örneğin, Ridge tahmin edicisinde, k değerinin sonsuza gitmesi durumunda regresyon parametreleri sıfıra yakınsamaktadır. Bu durum ise, yanlılık parametrelerinin nasıl seçileceği sorusunu gündeme getirmiştir. Buradan hareketle, yanlılık parametrelerinin seçimleri için çeşitli ölçütler ileri sürülmüştür. Bu ölçütlerden bazıları; Ridge izi yöntemi, $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_R\right)$ ve $SHKO\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_d\right)$ değerlerinin minimize edilmesi, $\hat{k}_{HKB}$, $\hat{k}_{LW}$, C_k ölçütü, C_L ölçütü ve iterasyon yöntemi'dir. İleri sürülen bu ölçütler incelendikten sonra üçüncü ve dördüncü bölümde verilen tahmin edicilerin birbirleriyle olan karşılaştırmaları verilmiştir. Bölüm 4'de, Sakallıoğlu, Kaçıranlar(2008) ve Yang ve Chang(2010) tarafından önerilen tahmin ediciler karşılaştırılmıştır. Buna ek olarak, *SHKO* ve *MHKO* ölçütlerine göre karşılaştırmaları hem grafiksel hem de teorik açıdan verilmiştir. Ayrıca, bu tezde *MHKO*, *SHKO* ve *GHKO* arasındaki ilişkiye dikkat çekilmiştir.

Sonuç olarak, yanlı tahmin edicilerden hangisinin daha iyi olduğunun belirlenmesinde, $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 bilinmeyen parametreleri ile yanlılık parametresinin seçiminin dikkate alınacağı vurgulanmıştır.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan çalışmalarda, lineer regresyon modelinde açıklayıcı değişkenlerin bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Ancak, uygulamada bu varsayım her zaman geçerli olmayabilir. Bu durum ise çoklu iç ilişki problemine neden olmaktadır. Modelde çoklu iç ilişki probleminin etkisini giderebilmek için çoklu iç ilişkiye neden olan değişkenler modelden çıkarılabilir, ek veri toplanabilir ya da değişkenler üzerinde dönüşüm yapılabilir. Bu yöntemler veriler üzerinde değişiklik yapmaya yöneliktir. Ancak, veriler üzerinde değişiklik yapmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle, veriler üzerinde hiçbir değişiklik yapmadan, çoklu iç ilişki probleminin üstesinden gelmek için parametre varyansları küçük olan yanlı tahmin edicilerin kullanılması önerilmiştir.

Bu tezde, yanlı tahmin edicilerden Ridge tahmin edici, Liu tahmin edici, *k-d* sınıf tahmin edici ve iki tane yanlılık parametresine bağlı olan alternatif tahmin edici incelenmiştir. Literatürde pek çok tahmin edici olduğundan hangi tahmin edicinin daha iyi olduğu sorusu doğmuştur. Buradan hareketle, tahmin edicilerin karşılaştırılması için *MHKO*, *GHKO* ve *SHKO* ölçütleri ileri sürülmüştür. Karşılaştırmalarda *SHKO* ölçütünün kullanılması durumunda, *MHKO* matrisinin köşegen dışındaki elemanları göz ardı edilmektedir. Bu nedenle, *MHKO* ölçütü daha iyi bir ölçüt olmakla birlikte, bazı durumlarda hesaplamalardaki kolaylık açısından *SHKO* ve *GHKO* ölçütü kullanılabilmektedir.

EKK tahmin edicisine alternatif olarak önerilen tahmin edicilerin daha iyi olduğunu görebilmek için her zaman iç ilişkiden yüksek derecede etkilenmiş $\mathbf{X}$ model matrislerin ele alınması gerekmektedir. Aksi takdirde, orta derecede iç ilişkiden etkilenmiş model matrislerde yanlı tahmin edicilerin etkisi çok azdır. Bu durumda, araştırmacılar yanlı tahmin ediciler yerine optimallik özelliklerinden dolayı *EKK* tahmin edicilerini kullanmayı tercih ederler.

Bu tezde yapılan analizler, kullanılan modelin yapısına ve modelde standartlaştırmanın yapılıp yapılmamasına bağlı olarak tahmin edicilerin birbirlerine olan üstünlüklerini yanlılık parametrelerinin seçimini göz önüne alarak inceler. Standartlaştırma işleminin yapılması genel olarak araştırmacıya bağlıdır. Bu durum göz önünde bulundurularak, literatürde yaygın olarak kullanılan Hald veri kümesi önce standartlaştırılmış, homojen model kullanılarak ele alınmış ve bu durumda Ridge ve Liu tahmin edicileri için veriler analiz edilmiştir. Daha sonra standartlaştırılmamış, homojen olmayan model ele alınmış ve bu durumda ise iki yanlılık parametresi içeren alternatif tahmin edici ve *k-d* sınıf tahmin edici için veriler analiz edilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerdeki yapılan karşılaştırma testlerinde, tahmin edicilerin birbirlerine göre üstünlükleri yanlılık parametrelerinin seçimine bağlıdır. Bu durumda, hangi tahmin edicinin daha iyi olduğuna karşılaştırma testlerinin sonuçlarına göre karar verilebildiğinden, yanlı tahmin edicilerden birinin diğerine göre her zaman daha iyi olmadığı söylenebilir. Bu durumda birkaç tahmin ediciyi içeren ve birden fazla yanlılık parametresine bağlı yeni bir tahmin edici önerilebilir. Önerilecek olan tahmin edicinin, içerdiği tahmin edicilerden daha iyi bir tahmin edici olması istenen bir durumdur.

Dördüncü bölümde, iki tane yanlılık parametresine bağlı tahmin ediciler esasında k ve d yanlılık parametrelerine verilen uygun değerler için elde edilen *EKK*, Ridge ve Liu tahmin edicileriyle karşılaştırılmıştır. Ancak, karşılaştırma testlerine göre iki yanlılık parametresine bağlı tahmin ediciler her zaman içerdikleri Ridge ve Liu tahmin edicilerinden daha iyi birer tahmin edici değildirler. Bu durum, verilen karşılaştırma testlerinin bir sonucu olarak ortaya konmuştur. Son olarak ise, Sakallıoğlu ve Kaçıranlar (2008) ve Yang ve Chang (2010) tarafından önerilen tahmin ediciler karşılaştırılmıştır ve yanlılık parametrelerinin seçimine bağlı olarak birbirlerine olan üstünlüklerinin değişebileceği görülmüştür.

Ayrıca, *SHKO* ve *MHKO* ölçülerine göre karşılaştırmaları hem teorik hem de grafiksel verilmiştir. Beşinci bölümde elde edilen sonuçlar, Şekil 5.6'da *SHKO* ölçütüne göre yapılan karşılaştırmalarda, tahmin edicilerin birbirlerine göre üstünlüklerinin Şekil 5.5 de *MHKO* ölçütüne göre yapılan karşılaştırmalardan oldukça farklı olduğunu göstermektedir. Bu ise, Teorem 4.4'de verilen (4.29) ölçütünün daha kapsamlı olduğunu yani *MHKO* ölçütünün daha iyi bir ölçüt olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

AKDENİZ, F., EROL, H., (2003), Mean Squared Error Comparisons of Some Biased Estimators in Lineer Regression, *Communications in Statistics Theory and Methods ,32(12),238- 2413*

AKDENİZ, F., KAÇIRANLAR, S., (1995), On the almost unbiased generalized liu estimator and unbiased estimation of the bias and mse, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 24(7), 1789-1797

DANIEL C. and WOOD F.S., *Fitting Equations to Data: Computer Analysis of Multifactor Data*, 2nd edition,Wiley, New York, 1980. 0471376841

FAREBROTHER, R.W., (1976), Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, Vol. 38, No. 3 (1976), 248-250.

FARRAR, D. E. and GLAUBER, R. R., (1967), Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited, *The Review of Economics and Statistics*, 49(1), 92-107.

GRUBER, M. H. J., (1998), Improving Efficiency by Shrinkage: The James-Stein and Ridge Regression Estimators. Marcell Dekker, Inc. New York. 9780824701567

HALD, A., (1952), *Statistical Theory with Engineering Applications*. New York: Wiley.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., (1970a), Ridge Regresssion: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12(1), 55-67.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., (1970b), Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems, *Technometrics,* Vol. 12, No. 1, 69-82.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., and BALDWIN, K. F., (1975), Ridge Regression: Some Simulation, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 4, 105-123.

HOERL, A.E., KENNARD, R.W., (1976), Ridge Regression: Iterative Estimation of the Biasing Parameter, *Communications in Statistics: Theory and Methods,* A5, 77-88.

KEJIAN, L., (1993), A New Class of Biased Estimate in Lineer Regression, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 22(2), 393-402.

KEJIAN, L., (2003), Using Liu-Type Estimator to Combat Collinearity. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 32 (5), 1009-1020.

KIBRIA, B.M.G., (2003), Performance of Some New Ridge Regression Estimators, *Simulation and Computation*, 32 (2), 419-435.

LAWLESS, J.F., WANG, P., (2010), A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 5 (4), 307-323.

MALLOWS, C.L., (1973), Some Comments on C_p., *Technometrics,* 15 (4), 661-675.

MARQUARDT, D. W., (1970). Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation. *Technometrics,* 12, 591-612.

MONTGOMERY, D.C., PECK, E.A., VINING, G.G (2001), *Introduction to Linear Regression Analysis* 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 8126510471.

ÖZKALE, M.R., KAÇIRANLAR, S.,(2007), The Restricted and Unrestricted Two-Parameter Estimators, *Communications in Statistics Theory and Methods, 36(10), 2707-2725.*

RAO, C. R., TOUTENBURG, H., SHALABH, HEUMANN, C., (2008), *Linear Models and Generalizations: Least Squares and Alternatives*, 3.th extended edition, Springer, New York, 978-3-540-74226-5.

SAKALLIOĞLU, S., KAÇIRANLAR, S., AKDENİZ, F., (2001), Mean Squared Error Comparisons of Some Biased Regression Estimator, *Communications in Statistics Theory and Methods,* 30(2), 347-361.

SAKALLIOĞLU, S., KAÇIRANLAR, S., (2008), A New Biased Estimator Based on Ridge Estimation, *Stat Papers,* 49, 669-689.

STEIN, C., (1956), Inadmissibility of Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley University of California Press, 197-206.

THEOBALD, C.M., (1974). Generalizations of Mean Squared Error Applied to Ridge Regression, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, Vol. 36, No. 1 (1974), 103-106

TRENKLER, G., (1980), Generalized Mean Squared Error Comparisations of Biased Regression Estimators, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, A9(12), 1247-1259.

TRENKLER, G., TOUTENBURG, H., (1990). Mean Squared Error Matrix Comparisons between Biased Estimator- An Overview of Recent Results, *Statistical Papers*, 31, 165-179.

YANG, H., CHANG, X., (2010). A New Two-Parameter Estimator in Lineer Regression, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 39 (6), 923-934.

WOODS, H., STEINOUR, H. H., and STARKE, H. R., (1932). Effect of Composition of Portland Cement on Heat Evolved During Hardening, *Industrial and Engineering Chemistry*, 24, 1207-1214.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma Sevinç KURNAZ, 1 Ağustos 1986 yılında Mersin'in Silifke ilçesinde doğdu. Lise eğitimini Bahçelievler Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2003 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2007 yılında Bölüm Birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına kabul edildi ve bir yıl lisan hazırlık sınıfında okudu. 2008 yılında Yüksek Lisans eğitimine başladı.