



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NÖTRAL SİSTEMLERİN DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bilg. Yük. Müh. Rüya ŞAMLI
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Danışman
Prof.Dr. Sabri ARIK

İSTANBUL



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NÖTRAL SİSTEMLERİN DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bilg. Yük. Müh. Rüya ŞAMLI
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

Danışman
Prof.Dr. Sabri ARIK

İSTANBUL

Bu çalışma 12/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı Bilgisayar Mühendisliği Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Prof. Dr. Sabri ARIK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. Ahmet SERTBAŞ
İstanbul Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi



Prof. Dr. İbrahim EKSİN
İstanbul Teknik Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Fakültesi



Prof. Dr. İlhami YAVUZ
Maltepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü



Prof. Dr. Serdar ÖZOĞUZ
İstanbul Teknik Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Fakültesi

Bu alışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 10409 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Çok değerli hocam Prof. Dr. Sabri ARIK'a en içten ve samimi dileklerle teşekkür ederim. Lisans, yüksek lisans, doktora öğrenimim sırasında, tez çalışmam boyunca ve her zaman gösterdiği her türlü destek ve yardım için, paylaştığı engin bilgiler için...

Her daim fikir ve görüş dayanışması içerisinde olduğum, senelerce uyum içerisinde aynı odayı paylaştığım arkadaşlarım Şafak DURUKAN ODABAŞI ve Özgür Can TURNA'ya teşekkür ederim.

Tez çalışmam sırasında zaman zaman gerçekleşen yardım isteklerimi geri çevirmeyen çalışma arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Ve aileme...

Rüya ŞAMLI

Temmuz, 2011

İSTANBUL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	V
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
SEMBOL LİSTESİ.....	X
KISALTMA LİSTESİ	XI
ÖZET.....	xii
SUMMARY	XIV
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ	4
2.2. LİTERATÜRDEKİ NÖTRAL SİSTEM MODELLERİ	9
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	18
3.1. KULLANILAN GENEL MALZEME VE YÖNTEMLER.....	18
3.1.1. Normlar.....	18
3.1.2. Matris Sınıfları.....	21
3.1.3. Aktivasyon Fonksiyonları.....	24
3.2. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİNDE KULLANILAN MALZEME VE YÖNTEMLER.....	30
3.2.1 Kararlılık Kavramı.....	33
3.2.2. Dinamik Sistemlerin Kararlılık Analizi	38
4. NÖTRAL SİSTEMLERİN DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ.....	43
4.1 GENEL DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞI MODELİ.....	43
4.2. NÖTRAL YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ.....	52
4.2.1. Nötral Yapay Sinir Ağı Modeli - 1	52
4.2.2. Nötral Yapay Sinir Ağı Modeli – 2	59
5. BULGULAR	67

5.1. GENEL YSA MODELİ İLE İLGİLİ SİMÜLASYON.....	67
5.2. NÖTRAL SİSTEM İLE İLGİLİ SİMÜLASYON.....	77
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	84
KAYNAKLAR	89
ÖZGEÇMİŞ.....	100

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1: Özdeşlik fonksiyonunun genel grafiği.....	27
Şekil 3.2: Sigmoid fonksiyonunun genel grafiği.....	27
Şekil 3.3: Tanh fonksiyonunun genel grafiği.....	28
Şekil 3.4: Adım fonksiyonunun genel grafiği.....	28
Şekil 3.5: Eşik fonksiyonunun genel grafiği.....	29
Şekil 3.6: Parçalı doğrusal fonksiyonunun genel grafiği.....	29
Şekil 3.7: Signum fonksiyonunun genel grafiği.....	30
Şekil 3.8: Kararlılık.....	34
Şekil 3.9 : Asimtotik kararlılık.....	35
Şekil 5.1: $a = 1/5$, $c = 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	70
Şekil 5.2: $a = 1$, $c = 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	70
Şekil 5.3: $a = 1/5$, $c = 4$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	71
Şekil 5.4: $a = 1$, $c = 4$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	71
Şekil 5.5: $a = 1/5$, $f(x) = e - x(t) - 1/e - x(t) + 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	72
Şekil 5.6: $a = 1$, $f(x) = e - x(t) - 1/e - x(t) + 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	72
Şekil 5.7: $a = 1/5$, $\tau = 1,5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	74
Şekil 5.8: $a = 1/5$, $\tau = 3$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	74
Şekil 5.9: $a = 1/5$, $\tau = 5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	75
Şekil 5.10: $a = 1$, $\tau = 1,5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	75
Şekil 5.11: $a = 1$, $\tau = 3$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	76
Şekil 5.12: $a = 1$, $\tau = 5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri.....	76
Şekil 5.13: $b = 1/5$, $c = 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri.....	80
Şekil 5.14: $b = 1$, $c = 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri.....	80
Şekil 5.15: $b = 1/5$, $c = 4$ için sistemin kararlılık özellikleri.....	81
Şekil 5.16: $b = 1$, $c = 4$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri.....	81

Şekil 5.17: $b = 1/5, f(x) = e - x(t) - 1/e - x(t) + 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri.....	82
Şekil 5.18: $b = 1, f(x) = e - x(t) - 1/e - x(t) + 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri.....	82

SEMBOL LİSTESİ

A ya da P gibi büyük harfler	: Matrisler
A^T	: A matrisinin transpozu
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$\lambda_i(A)$: A matrisinin i . özdeğeri
$\lambda_M(A)$: A matrisinin maksimum özdeğeri
$\lambda_m(A)$: A matrisinin minimum özdeğeri
$\det(A)$: A matrisinin determinantı
$P = \text{diag}\{p_i > 0\}$: Pozitif köşegensel matris
$P = \text{diag}\{p_i \geq 0\}$: Negatif olmayan köşegensel matris
$ A $: A matrisinin her elemanının mutlak değeri alındıktan sonra oluşan matris
$\ A\ $: A matrisinin ikinci normu (Öklit normu)
$\mu(A)$: A matrisinin ölçümü
$p[A]$: A matrisinin özdeğerlerinin en geniş modülü (A matrisinin spektral yarıçapı)
I	: Uygun boyutlu birim matris
$I(0)$: Uygun boyutlardaki 0 matrisi
x, y gibi küçük harfler	: Vektörler
$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: n elemanlı bir x vektörünün elemanları
x^T	: x vektörünün transpozu
$ x $: x vektörünün tüm elemanlarının mutlak değeri alındıktan sonra oluşan vektör
$\ x\ $: x vektörünün ikinci normu (Öklit normu)
R^n	: n boyutlu Öklit uzayı
R^1	: Tüm gerçel sayıların kümesi
$R^{m \times n}$: Tüm $m \times n$ boyutlu gerçel matrislerin kümesi
$R^{n \times n}$: Tüm $n \times n$ boyutlu (kare) gerçel matrislerin kümesi
R_z	: z kompleks sayısının gerçel kısmı
$P > 0$: Simetrik pozitif tanımlı matris
$P < 0$: Simetrik negatif tanımlı matris
$P \geq 0$: Simetrik pozitif yarı-tanımlı matris
$P \leq 0$: Simetrik negatif yarı-tanımlı matris
$P > Q$: $P - Q$ matrisinin simetrik pozitif tanımlı olması
$P < Q$: $P - Q$ matrisinin simetrik negatif tanımlı olması
$P \geq Q$: $P - Q$ matrisinin simetrik pozitif yarı-tanımlı olması
$P \leq Q$: $P - Q$ matrisinin simetrik negatif yarı-tanımlı olması

KISALTMA LİSTESİ

- YSA : Yapay Sinir Ağı
ANN : Artificial Neural Network
HYSA : Hücresel Yapay Sinir Ağları
CNN : Cellular Neural Networks
LMI : Linear Matrix Inequality – Lineer Matris Eşitsizliği
BAM : Bidirectional Associative Memory
ÇBA : Çağrışımlı Bellek Ağları
ABST : Absolutely Stable – Kesin Kararlı
İBYSA : İleri Beslemeli Yapay Sinir Ağları
GBYSA : Geri Beslemeli Yapay Sinir Ağları
GAS : Global Asymptotic Stability – Global Asimtotik Kararlılık

ÖZET

NÖTRAL SİSTEMLERİN DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bu tez çalışması gecikmeli yapay sinir ağlarının özel bir tipi olan nötral sistemlerin dinamik davranışlarını incelemek amacıyla gerçekleştirilmiştir.

Gecikmeli yapay sinir ağlarının dinamik davranış analizi, literatürde oldukça geniş yer tutan, pek çok araştırmacının üzerinde çalıştığı bir konudur. Bunun sebepleri arasında bu tip sistemlerin farklı uygulama alanlarında, bir çok problemin çözümünde kullanılabilmesi, klasik bazı yöntemlerin uygulanamadığı kimi durumlarda uygulanabilmesi, modellerin analizi yapılırken hangi tip fonksiyonların kullanılacağına artık iyi bir şekilde tahmin edilebilmesi vb. gösterilebilir. Uygulama ve probleme göre gecikmeli yapay sinir ağı modelleri zaman içerisinde çeşitlenmiştir.

Nötral sistemler diferansiyel denklemin her iki tarafında da sahip olduğu gecikme ile oldukça karmaşık bir gecikmeli yapay sinir ağı tipidir. Kararlılık analizinin gerçekleştirilebilmesi için yüksek matematik bilgisi kullanılarak oldukça uzun işlemlerin yapılması gerekmektedir. Bu şekliyle dezavantajlı gibi görünen nötral sistemler, klasik gecikmeli yapay sinir ağlarından daha karmaşık problemlere uygulanabilmeleri gibi bir avantaja da sahiptirler.

Tez çalışmamızda, öncelikle klasik bir gecikmeli yapay sinir ağı modeli alınarak modelin global asimtotik robust kararlılığı incelenmiş ve bu şekilde nötral sistemlere geçiş yapılmıştır. Ardından iki adet birbirinden farklı özelliklere sahip nötral sistem incelenerek global asimtotik kararlılıkları için yeterli şartlar bulunmuştur. Tüm bu kararlılık analizlerinde uygun Lyapunov fonksiyonları kullanılarak çeşitli teoremler elde edilmiştir. Ayrıca ele alınan bu modeller dışındaki genel modellerin analizi için de yol göstermeye çalışılmıştır.

Elde edilen kararlılık özelliklerinin daha anlaşılır bir şekilde ifade edilmesi için çeşitli simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Simülasyonlar çeşitli parametreler değiştirilerek tekrarlanmış, her seferinde tezde elde edilen kriterlerin kararlılığı sağladığı, diğer aralıkların kararsızlığa neden olduğu görülmüştür. Böylece tez çalışması ismine uygun olarak nötral sistemlerin dinamik davranış analizini gerçekleştirmiş, gerek genel olarak gerekse ele aldığı özel modeller hakkında çeşitli kararlılık şartları türetmiştir.

SUMMARY

ANALYSIS OF DYNAMICAL BEHAVIOUR OF NEUTRAL SYSTEMS

The work for this thesis is done to investigate the dynamic behaviour of neutral systems, which are special types of delayed neural networks.

Dynamic behaviour analysis of delayed neural networks is a subject which finds itself a wide place in literature and an important number of researchers study. Among the reasons for this include the possibility of using this type of systems in different application areas, and different problems, their applicability in some of the cases where the classical methods cannot be used, the ease of predicting which types of functions to be used when analysing models. Depending on the applications and problems, models for delayed neural networks has varied in time.

Neutral systems are more complex delayed neural network types which have delays in both sides of the differential equation. In order to analyse its stability, a great deal of mathematical knowledge must be utilized and very complex operations must be done. This seems to make neutral systems disadvantageous; on the other hand, they do possess an advantage since they can be used in more complex problems than the classical neural networks.

In the work for this thesis, first, a model for a classical delayed neural network model was created and the global asymptotic robust stability of this model was investigated, from there, the transition to neutral systems was made. Afterwards, two neutral systems with different properties were observed and sufficient criteria are obtained for their asymptotic stability. In all of these stability analyses, various theorems are obtained by using appropriate Lyapunov functions. In addition, with the exception of investigated models, significant effort was made to guide about the analysis of general models.

Some simulations are implemented to make the stability analysis more comprehensible. Simulations are repeated by sweeping some parameters and at every turn, it has been seen that the criteria in the thesis provide stability while the other intervals cause instability. So, the thesis work makes dynamic behaviour analyses appropriate to its title and it produces various stability criteria in both general models and special models in it.

1. GİRİŞ

En basit ve genel tanımıyla “özellikle insan olmak üzere herhangi bir canlıda bulunan beyin ve sinir sistemlerinin özelliklerini modelleyerek, yapay olarak öğrenebilen, düşünebilen, karar verebilen sistemler geliştirmeyi amaçlayan bilgi işleme yöntemleri” olarak ifade edilebilecek yapay sinir ağları, genetik algoritma, bulanık mantık, uzman sistemler, robotik, bilgisayarlı görü, doğal dil işleme, karınca kolonisi gibi kavramlar ile birlikte yapay zekanın temel yöntemlerinden birini oluşturmaktadır. Özellikle yakın geçmişte yapay zeka uygulamalarının artmasına paralel olarak yapay sinir ağlarının da kullanım alanlarının ve gerçekleştirdiği uygulamaların sayısı büyük bir artış göstermiştir. Yapay sinir ağları, günümüzde tıp, savunma sanayi, finans ve bankacılık, elektrik ve otomotiv gibi alanlarda görüntü işleme ve optimizasyon gibi problemlerin çözümünde çokça kullanılmaktadır.

Yapay sinir ağlarının kullanım alanlarının ve uygulamalarının çeşitlenmesi, farklı yapay sinir ağı modellerine ihtiyaç duyulmasına neden olmuştur. Bu ihtiyaçla beraber Hopfield, Cohen-Grossberg, Lotka-Volterra, Hücresel Yapay Sinir Ağları (HYSA veya Cellular Neural Networks - CNN) gibi farklı yapay sinir ağı modelleri ortaya çıkmıştır. Kullanıldığı alan ve uygulamaya göre yapay sinir ağı modelleri ile birlikte bu modellerin denge noktasının varlık-teklik ve kararlılık analizleri de farklılaşmıştır. Örneğin yapay sinir ağı, herhangi bir optimizasyon problemini çözmek için kullanılıyorsa, bu durumda yapay sinir ağının, “global asimtotik kararlı” olan tek bir denge noktasına sahip olması istenir ve buna uygun olarak bir denge noktasının varlığı ve kararlılık özellikleri araştırılır. Daha fazla sayıdaki denge noktasının varlığı, yanılırlara sebebiyet verebileceğinden çözüm için dezavantaj olacaktır. Öte yandan çağrışimli bellek tasarımı için kullanılan bir yapay sinir ağının ise birden çok denge noktasına sahip olması ve tam kararlılığının sağlanması istenir. Böylece yapay sinir ağında bir örüntü için daha fazla bilgi depolama olanağı oluşacaktır ve yapay sinir ağı, verilen herhangi bir örüntüye karşılık bellekte depolanmış ilişkili örüntülerden birini üretebilecektir. Buna karşın, pek kullanılmasa da, bir giriş örüntüsüne bellekte

depolanmış sadece bir ilişkili örüntü ile cevap veren çağrışımlı bellek sistemleri de mevcuttur.

Yapay sinir ağlarının denge noktası ve kararlılık analizini etkileyen en önemli bileşen, sistemin sahip olduğu gecikmedir. Teorik olarak yapay sinir ağını oluşturan nöronlar arasındaki veri alışverişinin diğer bir deyişle sinyal iletiminin kusursuz olduğu varsayılmaktadır ancak gerçek dünya uygulamalarında böyle bir durum mümkün değildir. Yapay sinir ağlarının donanımsal olarak gerçekleşmesinde nöronlar arasındaki sinyal iletimi sırasında çeşitli gecikmelerin olduğu gözlenmektedir. Yapay sinir ağlarının kararlılığı incelenirken bu gecikmeleri ele alarak analiz yapmak daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Yakın geçmişte pek çok araştırmacı yapay sinir ağları üzerine çalışmış ve farklı gecikmeye sahip olan farklı tipteki yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının kararlılık analizi için çeşitli yeterli koşullar elde etmiştir. [1–27] referansları ile ifade edilen çalışmalar bunlardan yalnızca bazılarıdır.

Hem durum denkleminde hem de türev denkleminde gecikme bulunan yapay sinir ağı tipi olarak ifade edilebilecek olan ve bu tez çalışmasının asıl konusunu teşkil eden nötral tipteki yapay sinir ağlarının kararlılığı ile ilgili yakın geçmişte çeşitli çalışmalar yapılmış ve kimilerinde zamandan bağımsız, kimilerinde ise zamana bağlı yeni yeterli koşullar türetilmiştir [28–50]. Bu tez çalışmasında, nötral tipteki bazı yapay sinir ağı modelleri ele alınarak bu modellerin kararlılık analizleri gerçekleştirilmiş ve söz konusu modellerin kararlılığı ile ilgili yeni koşullar elde edilmiştir. Bu analizler gerçekleştirilirken Lyapunov Kararlılık Teoremi kullanılmıştır. Ayrıca bu koşullar türetildikten sonra, elde edilen koşulların uygulanabilirliğini göstermek ve sonuçların literatürde daha önceden elde edilmiş diğer kararlılık koşulları ile karşılaştırılıp avantajlarını ifade etmek için sayısal örnekler sunulmuş ve bu örneklerin MATLAB programında simülasyonları gerçekleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasının içeriği şu şekilde düzenlenmiştir :

Genel Kısımlar başlıklı ikinci bölümde, gecikmeli yapay sinir ağlarından ve nötral sistemlerden bahsedilerek, literatürde son 10 yılda üzerinde çalışılmış nötral sistem

modelleri ve bu modellerin üzerinde gerçekleştirilen kararlılık analizleri sistemlerin daha iyi anlaşılabilmesi amaçlanarak incelenmiştir.

Malzeme ve Yöntem başlıklı üçüncü bölümde dinamik sistemlerin kararlılık analizi gerçekleştirilirken faydalanılacak olan vektör ve matris normları, matris sınıfları gibi matematiksel kavramlar açıklanmıştır. Ayrıca dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizini gerçekleştirmek amacıyla öncelikle kararlılık kavramı açıklanmış, kararlılık çeşitlerinden bahsedilmiş, daha sonra bu analizleri gerçekleştirmek için kullanılan yöntemler (Lyapunov Kararlılık Teoremi, Hurwitz Teoremi, LaSalle'nin değişmezlik ilkesi) anlatılmıştır. Bu bölümde, ayrıca yapay sinir ağlarının kararlılığını etkileyen faktörlerden biri olan aktivasyon fonksiyonları ve çeşitleri üzerinde durulmuştur.

Tez çalışmasının temelini, "Nötral Sistemlerin Dinamik Davranış Analizi" başlıklı dördüncü bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde, tezde incelenen modeller verilerek bu modellerin dinamik davranış analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu analizler için gerekli olan varsayımlar, teoremler, matematiksel işlemler verilerek elde edilen yeni yeterli kararlılık koşulları sunulmuştur.

Beşinci bölüm olan Bulgular bölümünde, elde edilen kararlılık koşullarının uygulanabilir olduğunu ve bu koşulların literatürdeki diğer koşullardan daha avantajlı olduğunu göstermek amacıyla çeşitli sayısal örnekler verilmiştir. Ayrıca bu sayısal örneklerin MATLAB programında simülasyonları gerçekleştirilerek kararlılık durumları çeşitli grafiklerle gösterilmiştir.

Son olarak Tartışma ve Sonuç bölümünde tezde gerçekleştirilen çalışmalar özetlenmiş, elde edilen koşullardan bahsedilmiş, Bulgular kısmında verilen sonuçlar yorumlanmış, gerçekleştirilen kararlılık analizlerinin farklı yapay sinir ağı modellerine uygulanmasını sağlayacak dönüşümlerden ve ileride gerçekleştirilebilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde tez çalışmasının anlaşılabilmesi için gerekli olan bazı temel kavramlardan bahsedilmiştir. Buna göre ilk olarak gecikmeli yapay sinir ağları ele alınarak, gecikme kavramı ve gecikme çeşitleri anlatılmış ayrıca her gecikme tipi için farklı birer yapay sinir ağı modeli örneği verilmiştir. Daha sonra nötral sistem kavramı ele alınarak bu sistemlerle ilgili son yıllarda incelenen modeller verilmiş ve bu modeller üzerinde yapılan kararlılık analizleri ile elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

2.1. GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ

Literatürde ilk kullanılan yapay sinir ağı modeli, Hopfield tarafından 1980li yılların ortalarında ortaya atılan zamana bağlı oldukça genel bir modeldir ve aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilir [51]:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

Burada,

n : sistemin içerdiği nöron sayısı

x_i : i . nöronun durumu

c_i : i . nöron için sabit katsayılar

a_{ij} : i . ve j . nöronlar arasındaki ağırlık katsayısı

f_j : j . nöron için kullanılan aktivasyon fonksiyonu

u_i : i . nöron için giriş değerleridir.

Bu denklemin ifade ettiği sistemin denge noktası (veya noktaları) genelde $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki doğrusal olmayan cebirsel denklemin sabit çözümü (veya çözümleri) olarak tanımlanır :

$$x_i^* = \frac{1}{c_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j^*(t)) + u_i \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Aynı denklemi vektörel şekilde yazmak istersek içerdiği ifadelerin durumlarına bakmamız gerekir.

x durumu hem nöron için tanımlı olduğundan n boyutlu bir vektördür, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ şeklinde ifade edilebilir. $f(x)$ aktivasyon fonksiyonları aynı şekilde her nöron için tanımlı olduğundan n boyutlu bir vektördür, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ şeklinde ifade edilebilir. Bir yapay sinir ağı modelinde nöronların hepsi aynı aktivasyon fonksiyonuna sahip olabileceği gibi, gruplar halinde bölünerek farklı aktivasyon fonksiyonlarına da sahip olabilirler veya her nöronun ayrı fonksiyonu olması da olası bir durumdur. u girişleri de her nöron için tanımlı olduğundan n boyutlu bir vektör olur ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ şeklinde yazılabilir. a_{ij} , her i . ve j . nöron arasındaki ağırlığı temsil ettiğinden $n \times n$ boyutlu bir matris olur $A = (a_{ij})_{n \times n}$ şeklinde ifade edilebilir. Her nöron durumu için tanımlı bir katsayı olan c_i 'ler, her aşamada tek bir elemanın ilgili nöron ile çarpımını sağlayabilmek için pozitif diyagonal bir matris olarak tanımlanır ve $C = \text{diag}(c_i > 0)$ şeklinde gösterilir.

Buna göre (2.1) sisteminin vektörel formu

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Af(x(t)) + u \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Dikkat edilirse, bu modelde herhangi bir gecikme parametresinin kullanılmadığı görülebilir. Ancak yapay sinir ağının gerçekte donanımsal olarak gerçekleştirirken yapay sinir ağını oluşturan nöronlar arasındaki veri alışverişi sırasında mutlaka gecikmeler olduğu bilinmektedir. Bu yüzden yapay sinir ağları matematiksel olarak modellenirken gecikme parametresi de eklenmekte ve analizler buna göre gerçekleştirilmektedir. Analizler gerçekleştirilirken gecikmenin ilave edilmesinin diğer bir nedeni de söz konusu gecikmelerin yapay sinir ağının kararlılığı üzerinde direkt olarak etkili olmasıdır. Gecikmeler, sistemin osilasyon yapmasına ve dolayısıyla kararlı durumdan kararsız duruma geçmesine sebep olabilir. Bu yüzden kararlılık analizlerinin, gecikmeler ile birlikte gerçekleştirilmesi, daha gerçekçi bir yaklaşımdır.

Yapay sinir ağlarına eklenebilecek zaman gecikmeleri üç şekilde olabilir :

- i. Tüm nöronlar arasındaki gecikmenin aynı olduğu kabul edilerek modele eklenen ve sabit bir sayı olan τ gecikmesi.

Bir gecikmenin mevcut olduğu en basit yapay sinir ağı modeli olarak ifade edilebilir [52]. Genel olarak diferansiyel denklemi şu şekilde olur :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Bu denklem, (2.1) ile verilen Hopfield yapay sinir ağı modeline yalnızca τ sayısı eklenerek oluşturulmuştur.

Aynı şekilde bu denklem vektörel formu da Hopfield yapay sinir ağı modelinin vektör formuna gecikme eklenerek elde edilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Af(x(t - \tau)) + u \quad (2.5)$$

Gecikmeyi sabit bir sayı olarak alan bu tip bir yaklaşım, yapılacak kararlılık analizleri açısından kolaylık sağlamaktadır. Bu yüzden sıklıkla kullanılmaktadır

ancak nöronların veri alışverişi sırasındaki gecikmelerin tamamının eşit olması pratik olarak mümkün olmadığından çok gerçekçi bir yaklaşım olduğu söylenemez.

- ii. j . nöronun diğer tüm nöronlarla arasındaki gecikmenin sabit olduğu düşünülerek modele eklenen tek boyutlu τ_j gecikmesi.

Aşağıdaki diferansiyel denklemle ifade edilebilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Burada τ_j , j . nöronun diğer nöronlarla arasındaki gecikmeyi ifade etmektedir.

Bu modeldeki gecikme, tek bir sayı değil, her nöron için bir sayı olacak şekilde n elemanlı bir vektördür.

İlk yaklaşıma göre bir adım daha gerçekçi bir yaklaşımdır. Her nöronun oluşturduğu gecikmenin farklı olduğu kabul edilir. Ancak yine de bir nöronun diğer tüm nöronlarla oluşturduğu gecikme sabit olarak kabul edildiğinden donanımsal gerçeklemelerin durumu ile tam olarak uyuşmaz.

- iii. Her nöron çifti (i . ve j . nöronlar) arasındaki gecikmenin farklı olabileceği kabul edilerek modele eklenen çift boyutlu τ_{ij} gecikmesi [53].

Aşağıdaki diferansiyel denklemle ifade edilebilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Burada τ_{ij} , i . nöron ile j . nöron arasındaki gecikmeyi ifade etmektedir.

Gecikme burada $n \times n$ 'lik bir matris haline gelmiştir.

Yapay sinir ağlarının donanımsal gerçeklenmelerine en uygun yaklaşımdır. Ancak matematiksel olarak analizleri oldukça zorlaştırır.

Her üç durumda da gecikmenin $\tau > 0$ olması gerektiği açıkça görülebilir.

Bu denklemlerin her birinde fonksiyonlar yalnızca gecikme parametresi olan elemanlara uygulanmaktadır. Bununla birlikte hem gecikmesiz elemanın hem de ayrıca gecikme parametresinin olduğu elemanın modelde bulunduğu durumlar da olabilir. Bu şekilde geliştirilmiş en genel yapay sinir ağını ifade eden diferansiyel denklem şu şekildedir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Dikkat edilirse, her model, bir öncekinin daha geliştirilmiş halidir ve amacı gerçek dünyadaki donanım uygulamalarına en uygun modeli oluşturmaktır.

Yukarıda incelenen gecikmeli modellerde, gecikme parametresi herhangi başka bir parametreye bağlı değildir. Ancak donanım gerçeklemelerine daha uygun olması amacıyla parametrelerin zamana bağlı olarak değiştiği ve bu modellerin daha geliştirilmiş hali olan modeller de söz konusudur. Bu modeller “gecikmesi zamanla değişen modeller” olarak adlandırılır ve en genel halinin diferansiyel denklemi şu şekildedir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + u_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

Gecikmesi zamanla değişen yapay sinir ağı modelleri, günümüzde optimizasyon problemlerinin çözümü, paralel hesaplama, çağrışımlı bellek tasarımı, sınıflandırma ve analogdan dijitale dönüştürücü tasarımı gibi pek çok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır.

2.2. LİTERATÜRDEKİ NÖTRAL SİSTEM MODELLERİ

Nötral tipteki yapay sinir ağı modelleri özellikle son yıllarda üzerinde çalışılan bir konudur. Bu bölümde, tez çalışmasında incelenen nötral sistem kararlılık analizlerinin daha rahat anlaşılabilmesi amacıyla 2000 yılından sonra literatürde üzerinde çalışılan modeller, bu sistemlerin kararlılık analizleri ve bu analizler sonucunda elde edilen kriterler verilmiştir.

Nötral sistemler ile ilgili verilen ilk modellerden biri 2000 yılında [54] ile verilen ve aşağıdaki diferansiyel denklemlerle ifade edilebilen modeldir :

$$\frac{d}{dt}(x(t) + c(t)x(t - \tau)) + p(t)x(t) + q(t)x(t - \sigma) = 0 \quad (2.10)$$

veya

$$\frac{d}{dt}(x(t) + c(t)x(t - \tau)) = -p(t)x(t) - q(t)x(t - \sigma)$$

Pozitif gerçel τ ve σ 'nın gecikmeyi ifade ettiği bu modelin asimtotik kararlılığı üzerine çalışılmıştır.

[55] ve [56] çalışmalarında verilen modellere sırasıyla bakıldığında benzerlikler gösterdiği görülebilir:

$$\frac{d}{dt}[x(t) - \sum_{j=1}^m B_j x(t - h_j)] = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^m A_j x(t - h_j), \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

$$x(0) = g^0, \quad x(t) = g^1(t), \quad t \in [-h, 0)$$

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=0}^m D_i \dot{x}(t - h_i) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - h_i), \quad (2.12)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

Burada lineer gecikmeli nötral tipteki sistemlerin kararlılığı için yeni Lyapunov-Krasovskii fonkiyonları sunulmuştur. Gecikmeye bağlı/gecikmeden bağımsız koşullar, LMI (Linear Matrix Inequality – Lineer Matris Eşitsizliği) terimleri cinsinden elde edilmiştir. Çeşitli dönüşümler ile bu modeller başka analiz ve sentezlere uygulanabilir.

Aynı şekilde, [57] ile verilen çalışma, [58] ile verilen çalışmadaki modeli geliştirmiştir. Her iki model sırasıyla aşağıdaki gibidir :

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - h) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t - h), \quad t \geq 0 \quad (2.13)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t - h(t)) = (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))x(t - h(t)), \quad (2.14)$$

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\bar{h}, 0], \quad (t_0, \phi) \in R^+ \times C_t^v$$

Bu modeller arasındaki önemli fark, birindeki gecikmelerin zamandan bağımsız, diğerlerinin zamana bağlı olmasıdır.

[58]'de, Lyapunov yöntemini kullanarak belirsiz nötral gecikme-diferansiyel sistemlerinin asimtotik kararlılığı için yeni, gecikmeden bağımsız yeterli koşullar geliştirilmiştir. Bu koşullar, daha az sınırlayıcı koşullar bulmak için LMI terimleri ile ifade edilmiştir ve daha farklı durumlarda da uygulama alanı bulabilir. [57]'de, [58] çalışmasında ele alınan model geliştirilerek, zamana bağlı bir modele dönüştürülmüş ve Lyapunov yöntemi kullanılarak, zamana bağlı gecikmesi olan belirsiz nötral-diferansiyel sistem sınıfının robust kararlılığı için yeni, gecikmeden bağımsız kriterler geliştirilmiştir.

[59] çalışmasında ele alınan model ise, benzer şekilde [57] çalışmasında ele alınan modelin geliştirilmiş halidir. Bu çalışmada bir durum-geri besleme kontrolörü bulma problemi üzerine çalışılmıştır. Bir Lyapunov fonksiyonu kullanılarak matris eşitsizlikleri cinsinden yazılan gecikmeye bağlı kriterler türetilmiştir. İncelediği model şu şekildedir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x(t) - A_2x(t-h)] \\ = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-h) + (B + \Delta B(t))u(t) \\ x(s) = \emptyset(s), \quad s \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (2.15)$$

[60] çalışmasında ele alınan ve kararlılığı incelenen modeli ifade eden diferansiyel denklem aşağıdaki şekildedir :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + A_2\dot{x}(t-h) \quad x(s) = \emptyset(s), \quad s \in [-h, 0] \quad (2.16)$$

Burada $x_t = x(t+s)$, $s \in [-h, 0]$ ve $A \in R^{n \times n}$ gerçel elemanlı bir matristir. Burada bir nötral sistem sınıfının asimtotik kararlılığı için yeni bir kararlılık kriteri sunulmuştur. Orijinal sistem çeşitli dönüşümlerle eşdeğer olan nötral sistem formuna dönüştürülmüştür. Ardından, bağımsız ağırlık matrislerine sahip olan Lyapunov fonksiyonları oluşturularak LMI formunda gecikmeden bağımsız kararlılık kriterleri türetilmiş ve numerik örnekler ile, türetilen kriterlerin literatürdeki diğer çalışmalardan daha az sınırlayıcı olduğu gösterilmiştir.

[61] çalışmasında daha gelişmiş bir model ve söz konusu modelin asimtotik kararlılığı incelenmektedir :

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]x(t-h) + [C + \Delta C(t)]\dot{x}(t-\tau) \quad (2.17)$$

[62] ve [63] çalışmalarında incelenen modeller sırasıyla şu şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \\ & -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij1} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n w_{ij2} g_j(x_j(t-\tau)) + \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{x}_j(t-\tau) + g_i \\ i = 1, 2, \dots, n \quad & x_i(t) = \phi_i(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \\ (2.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & \\ & -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 \bar{f}_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^2 \bar{g}_j(x_j(t-h)) + \sum_{j=1}^n v_{ij} \dot{x}_j(t-h) + b_i \\ i = 1, 2, \dots, n \quad & x_i(t) = \phi_i(t), \quad -h \leq t \leq 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

[62] çalışmasında üstel kararlılık üzerine çalışılırken [63]'te global asimtotik kararlılık için gerekli koşullar elde edilmiştir.

Nötral sistemlerin oldukça genel bir modeli ve bu modelin kararlılığı [64]'te incelenmiştir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C\dot{x}(t-\tau) \quad (2.20)$$

[65] ve [66] çalışmalarına bakıldığında da, modellerin birbirine benzediği, ancak [66] çalışmasının daha gelişmiş bir modeli incelediği kolaylıkla görülebilir.

$$\dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau) = Ax(t) + Bx(t-h(t)) + f(x(t), t) + g(x(t-h(t)), t) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) - C\dot{x}(t-\tau_2) \\ & = Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + f_1(x(t), t) + f_2(x(t-\tau_1(t)), t) + f_3(\dot{x}(t-\tau_2), t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Her iki çalışma da ele aldığı modelin robust kararlılığı için yeterli koşullar elde etmek için analizler gerçekleştirmiştir. [65]'te Lyapunov-Krasovskii fonksiyonları ve bazı serbest ağırlıklı matrisler kullanarak, zamana göre değişen gecikmesi olan nötral tipteki sistemler için yeni, gecikmeye bağlı robust kararlılık kriterleri elde edilmiştir.

[67]'de klasik yapay sinir ağlarında olduğu gibi nötral sistemlerin de çift yönlü olabileceği gösterilmiştir. İncelenen ve global asimtotik kararlılığı ele alınan model şu şekildedir :

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m w_{1ji} g_j(y_j(t-d)) + \sum_{j=1}^n w_{2ij} \dot{x}_j(t-h) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{y}_j(t) &= -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n r_{1ij} g_i(x_i(t-h)) + \sum_{i=1}^m r_{2ji} \dot{y}_i(t-d) + J_j, \quad j = 1, 2, \dots, m\end{aligned}\quad (2.23)$$

Burada, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ nöron durum vektörleri, $w_{1ji}, w_{2ij}, r_{1ji}, r_{2ij}$, t anındaki bağlantı ağırlıkları, I_i ve J_j dış girdilerdir. Bu model ile BAM (Bidirectional Associative Memory – Çift Yönlü Çağrışimli Bellek Ağları – ÇBA) ağlarının kararlılığı için yeni bir gecikmeye bağlı kriter elde edilmiştir. Çalışmada kullanılan yaklaşım, zamana göre değişen gecikmeleri olan BAM'ler için kullanılabilecek şekilde genelleştirilebilir. Ayrıca, sunulan kriterin etkinliği sayısal bir örnekle gösterilmiştir.

[67]'de incelenen çift yönlü modele benzer diğer bir çift yönlü model [68] ile verilen çalışmada incelenmiştir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m w_{1ji} \tilde{f}_j(y_j(t-\tau)) + \sum_{j=1}^n w_{2ij} \dot{x}_j(t-h) + I_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_j(t) &= -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n v_{1ij} \tilde{g}_i(x_i(t-\sigma)) + \sum_{i=1}^m v_{2ji} \dot{y}_i(t-d) + J_i, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (2.24)$$

[68]'de Lyapunov – Krasovskii fonksiyonları ile birlikte integral belirsizlik tekniği kullanılarak nötral tipteki yapay sinir ağları için asimtotik kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir.

[69] çalışmasında verilen model,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau) &= A_{0\sigma}x(t) + A_{1\sigma}x(t - h(t)), \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \emptyset(t), \quad t \in [-H, 0] \end{aligned} \quad (2.25)$$

denklemleri ile ifade edilen [70] çalışmasındaki modelin geliştirilmiş halidir ve şu şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau) &= [A_{0\sigma} + \Delta A_{0\sigma}(t)]x(t) + [A_{1\sigma} + \Delta A_{1\sigma}(t)]x(t - h(t)), \quad t \geq 0 \\ x(t) &= \emptyset(t), \quad t \in [-H, 0] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Her iki çalışmada da zamana göre değişen durum gecikmeleri bulunan belirsiz anahtarlı nötral sistemlerin global üstel kararlılığı üzerine çalışılmıştır. Sonuçların geliştirilmesi için LMI ve Razumikhin-tipli yaklaşımlar kullanılmıştır. Sayısal simülasyonlar ile, elde edilen sonuçların öncekilerden daha az sınırlayıcı olduğu gösterilmiştir.

Diğer bir nötral sistem modeli [71] çalışmasında incelenmiştir.

$$E_0 = \begin{cases} \dot{x}(t) - C_{\sigma(t)}\dot{x}(t - \tau) = A_{\sigma(t)}(t)x(t) + B_{\sigma(t)}(t)x(t - \tau) \\ \quad + f_{\sigma(t)}(t, x(t)) + g_{\sigma(t)}(t, \dot{x}(t - \tau)) \\ x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \forall \theta \in [-p, 0] \end{cases} \quad (2.27)$$

[71]'de anahtarlı bir nötral sistem sınıfının kararlılığı için yeni kurallar elde edilmiştir. Anahtarlı nötral sistemler için daha uygun olan parçalı Lyapunov fonksiyonları kullanılarak kararlılık için daha esnek, anahtarlama kuralları oluşturulmuştur. Bu kurallar Lyapunov – Metzler LMI'lar cinsinden ifade edilmiştir. Ana sonuçları gösterebilmek için simülasyon örnekleri verilmiştir.

[72]'de incelenen model aşağıdaki gibidir :

$$\frac{d}{dt}[x(t) + Cx(t - h)] = A_0x(t) + A_1x(t - h) + \int_{-h}^0 G(\theta)x(t + \theta)d\theta, \quad t \geq 0 \quad (2.28)$$

Bu problemin çözülebilmesi zaman gecikmeli sistemlerinin bir sınıfı sunulmuştur. Ele alınan modelin üstel kararlılığı araştırılmıştır.

[73] çalışmasında yeni Lyapunov-Krasovskii fonksiyonları kullanılarak asimtotik kararlılık problemi incelenen nötral tipteki model aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir :

$$\frac{d}{dt}[x(t) + px(t - \tau)] = -ax(t) + b \tanh[x(t - \sigma)] \quad (2.29)$$

Bu çalışmada kullanılan fonksiyonlar, orijinal denklemlerin nötral tipli dönüşümlerine eş değerdir. LMI formunda gecikmeye bağlı ve gecikmeden bağımsız koşullar elde edilmiştir.

Benzer şekilde [74] ile verilen çalışmadaki model şu şekildedir :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau)) \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^t k_j(t-s) g_j(x_j(s)) ds + \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{x}_j(t - \tau) + \phi_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\dot{x}_i(t) = \phi_i(t), \quad -\infty \leq t \leq 0$$

[74]'te gecikmeli yapay sinir ağının denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılığını garantileyen gecikmeye bağlı kararlılık koşulları elde edilmiştir. Bir LMI yaklaşımı gerçekleştirilmiştir. Ayrıca elde edilen koşulların etkinlik ve sınırlayıcılığını diğer koşullar ile karşılaştırmak için sayısal örnekler verilmiştir.

Oldukça yakın bir geçmişte yayınlanan ve robust kararlılık üzerine analizler yapan [75] çalışmasındaki model ve modeldeki bileşen ve varsayımlar aşağıdaki gibidir :

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_1 \bar{f}(x(t)) + W_2 \bar{f}(x(t - h(t))) + V\dot{x}(t - \tau(t)) + b \quad (2.31)$$

Burada, n yapay sinir ağındaki nöronların sayısı, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ nöron durum vektörü, $\bar{f}(x(t)) = [\bar{f}_1(x_1(t)), \dots, \bar{f}_n(x_n(t))]^T \in R^n$ aktivasyon fonksiyonları, $A = \text{diag}(a_i)$, bir pozitif köşegensel matris, $W_1 = (w_{ij}^1)_{n \times n}$, $W_2 = (w_{ij}^2)_{n \times n}$ ve $V = (v_{ij})_{n \times n}$ nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrisleri, $h > 0$ ve $\tau > 0$ aksonal sinyal iletim gecikmesinin sınırlı hızıdır. [75]'te saturasyon nonlinearlığına sahip olan nötral tipli gecikmeli yapay sinir ağları için yeni bir gecikmeye bağlı kararlılık koşulu üretilmiştir. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu ile, daha az sınırlayıcı LMI koşulları türetilmiştir. Sunulan kararlılık koşulunun verimliliği iki sayısal örnek ile doğrulanmıştır.

Bunlar dışında [76 -79] çalışmalarında incelenen farklı modeller mevcuttur ve sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler :

$$\frac{dx(t)}{dt} + D_1 \frac{dx(t-h)}{dt} + A_0 x(t) + A_1 x(t-h) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.32)$$

Burada, denklemi çözebilmek için başlangıç fonksiyonu bilinmelidir. Bu başlangıç fonksiyonlarının $[-h, 0]$ aralığında parçalı ve sürekli olduğu kabul edilir. Bu çalışmada, üstel kararlılık için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmeye çalışılmıştır. Çalışmada tekli gecikmeli sistemler ele alınmıştır ancak çalışma, kolaylıkla çoklu gecikmeli sistemlere uygulanabilecek şekilde genişletilebilir.

$$\frac{d}{dt} [x(t) - E(\sigma)x(t-r)] = A(\sigma)x(t) + A_d(\sigma)x(t-\tau) + B_u(\sigma)u(t) + B_w(\sigma)w(t)$$

$$x(t) = \emptyset(t) \quad \forall t \in [-\bar{\tau}, 0] \quad (2.33)$$

Yukarıda denklemi verilen [77] çalışmasında belirsiz nötral sistemlerin robust H_∞ analiz ve sentez problemi ele alınmıştır. Uygun bir Lyapunov - Krasovskii fonksiyonunun seçimi için bir LMI tabanlı yaklaşım türetilmiştir. Söz konusu yaklaşımla elde edilen sonuçlar H_∞ problemlerinin analiz ve dizaynı için daha az sınırlayıcı sonuçlar oluşturmuştur. Önerilen yöntemin verimliliği, sayısal iki örneğin literatürdeki benzerleri ile karşılaştırılması sayesinde gösterilmiştir.

[78]'de incelenen ve robust kararlı olduğu gösterilen gecikmeli sistemin modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^1 \bar{f}_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n w_{ij}^2 \bar{g}_j(x_j(t-h(t))) \\
&+ \sum_{j=1}^n y_{ij} \dot{x}_j(t-\tau(t)) + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
x_i(t) &= \phi_t(t), \quad -\max[h(t), \tau(t)] \leq t \leq 0 \text{ veya denk olarak} \\
\dot{x}(t) &= -Ax(t) + W_1 \bar{f}(x(t)) + W_2 \bar{g}(x(t-h(t))) + V \dot{x}(t-\tau(t)) + b \quad (2.35)
\end{aligned}$$

[79] çalışmasında,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i(t,y)}{\partial t} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D_{ik} \frac{\partial x_i(t,y)}{\partial y_k} \right) - a_i x_i(t,y) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \tilde{f}_j(x_j(t,y)) \\
&+ \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{g}_j(x_j(t-\tau, y)) + \sum_{j=1}^n h_{ij} \frac{\partial x_j(t-\tau, y)}{\partial t} + I_i, y \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.35)
\end{aligned}$$

ile verilen modelin global üstel kararlılığı için gerekli koşullar elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar, zaman gecikmesinin boyutunda ve uzayın büyüklüğüne bağlıdır. Bunlar çoğunlukla gecikmeden ve uzaydan bağımsız olanlara göre daha az sınırlayıcıdır.

3. MALZEME ve YÖNTEM

Bu bölümde, tez çalışması içerisinde amaca ulaşmak için kullanılan malzeme, araç ve yöntemler anlatılmıştır. Bunlar tezin tamamında kullanılan genel malzeme, araç ve yöntemler ve dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılanlar olmak üzere iki bölüm halinde incelenmiştir.

3.1. KULLANILAN GENEL MALZEME VE YÖNTEMLER

Bu bölümde vektör ve matrisler ile ilişkili temel kavramlar; önemli olduğu düşünülen matris sınıfları ve bu matris sınıflarına ait bazı önemli özellikler; vektör ve matris normları ile ilgili tanımlamalar verilmiştir.

3.1.1. Normlar

Vektör ve matris normları genel olarak dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizlerinde sıklıkla kullanıldığı gibi, nötral sistemlerin analiz edildiği bu tezde de kendisine yer bulmuştur. Bu açıdan bu bölümde vektör ve matris normları anlatılmış, özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu kavramların anlaşılabilmesinde faydası olacağı düşünülen Öklit Uzayı kavramı da açıklanmıştır.

3.1.1.1. Öklit Uzayı

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ reel sayılar olmak üzere $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ şeklinde n -boyutlu vektörlerin kümesi, R^n ile gösterilen Öklit uzayını ifade etmektedir.

Bir boyutlu R ile gösterilen Öklit uzayı tüm reel sayıları kaplar.

R^n uzayı ile ilgili özellikler şu şekilde sıralanabilir :

- R^n 'deki eşit boyutlu vektörler, karşılıklı bileşenler ilave edilerek toplanabilir ve aynı boyutlu bir başka vektör oluşturabilir.
- R^n 'deki bir vektörün bir skaler ile çarpımı, her elemanın söz konusu skaler ile çarpımıyla elde edilen yeni bir vektördür.
- R^n 'deki iki vektörün (örneğin x, y) iç çarpımı $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ şeklinde hesaplanan bir tamsayıdır. İki vektörün çarpılabilmesi için biri satır, biri sütun vektörü olmalıdır.

3.1.1.2. Vektör Normları

Herhangi bir x vektörünün normu $\|x\|$ ile gösterilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan reel değerli bir fonksiyondur.

- $\|x\| \begin{cases} = 0 & x = 0 \\ > 0 & \forall x \in R^n \end{cases}$
 $\|x\|$, yalnızca $x = 0$ olması halinde 0; diğer tüm durumlarda ise pozitif bir sayıdır.
- $\forall x, y \in R^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\forall \alpha \in R$ ve $\forall x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Herhangi bir x vektörünün p . normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

En sık kullanılan üç norm olan birinci norm $\|x\|_1$, ikinci norm (ya da diğer adıyla Öklit normu) $\|x\|_2$ ve sonsuz norm $\|x\|_\infty$ şu şekilde yazılabilir:

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$\|x\|_\alpha$ ve $\|x\|_\beta$ x vektörünün 2 ayrı p normu ise $\forall x \in R^n$ için $c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha$ şartını sağlayan c_1 ve c_2 pozitif sabitleri vardır.

n boyutlu gerçel herhangi bir x vektörünün ($x \in R^n$) çeşitli normları ile ilgili aşağıdaki gibi eşitsizlikleri yazmak mümkündür.

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

p -normlarıyla ilgili yazılabilecek diğer bir eşitsizlik Hölder Eşitsizliği'dir.

Şu şekilde ifade edilir.

$\forall x, y \in R^n$ için $|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan p, q sayıları mevcuttur.

3.1.1.3. Matris Normları

Reel elemanlı ve $m \times n$ boyutlu bir A matrisinin p -normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin $p = 1, 2, \infty$ normları şu şekilde ifade edilebilir :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Herhangi $m \times n$ boyutlu bir A reel matrisi ve $n \times q$ boyutlu B matrisi için

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$ şeklinde eşitsizlikler yazmak mümkündür.

Normlar kullanılırken, genellikle sadece herhangi bir norm tarafından sağlanan üç temel özellikten çıkarılan sonuçların özellikleri kullanılır. Bu gibi durumlarda p indisi, normun herhangi bir p -normu olabileceğini belirtmek amacıyla, istenirse gösterim sırasında düşürülür, yazılmaz.

3.1.2. Matris Sınıfları

Dinamik sistemlerin kararlılık analizleri gerçekleştirilirken, sistemi ifade eden diferansiyel denklemdeki her bileşen ayrı bir önem arz etmektedir. Kullanılan fonksiyonların çeşidi, katsayılar gibi matrislerin sahip olduğu özellikler de kararlılık analizini direkt olarak etkileyebilmektedir.

Bu bölümde dinamik sistemlerin kararlılık analizlerinde sık kullanılan bazı matris sınıfları tanımlanmıştır. Bu matris sınıflarının kararlılık analizindeki rolünden, tez içerisinde, yeri geldikçe bahsedilmiştir.

- $n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin tüm özdeğerleri pozitif veya 0 ise bu matris *pozitif tanımlıdır*. $A > 0$ şeklinde gösterilir.
- $n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bazı özdeğerleri sıfırdan büyük, geriye kalanı da sıfıra eşitse (tüm özdeğerleri nonnegatifse) ise bu matris *pozitif yarıtanımlıdır*. $A \geq 0$ şeklinde gösterilir.

- $n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bütün özdeğerlerinin gerçekte kısmı sıfırdan büyük ise bu matris *pozitif kararlıdır*. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H -kararlı matrisi olarak da adlandırılır. $A \in H$ şeklinde gösterilir.
- $n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin tüm özdeğerlerinin gerçekte kısmı pozitif veya sıfır ise bu matris *pozitif yarıkararlıdır*. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H_0 -kararlı matrisi olarak da adlandırılır. $A \in H_0$ şeklinde gösterilir.
- Herhangi bir A matrisinin elemanlarının $a_{ij} \geq 0$ ve $a_{ij} \leq 0$ özelliklerini taşıyorsa bu özelliklere sahip A matrisi için “ Z_n kümesinin bir elemanıdır” denir ve $A \in Z_n$ şeklinde gösterilir.
- A matrisi Z_n kümesinin elemanı olsun. Eğer bu matris aynı zamanda pozitif kararlı ise, bu durumda bu matrise *tekil olmayan M -matrisi* denir ve $A \in K$ şeklinde gösterilir.

Bu matris sınıfı için aşağıdaki kurallar geçerlidir :

$A\psi > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $\psi > 0$ vektörü bulunabilir [80].

Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan pozitif köşegensel bir D matrisi vardır [80].

$$q_{ii}d_i > \sum_{j=1, j \neq i}^n d_j |q_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- A matrisi Z_n kümesinin elemanı olsun. Eğer bu matris aynı zamanda pozitif yarıkararlı ise, bu durumda bu matrise *M -matrisi* denir ve $A \in K_0$ şeklinde gösterilir.
- $n \times n$ boyutlu herhangi bir A matrisinin *kıyas matrisi* $C = \{c_{ij}\}$ olarak ifade edilir ve $c_{ii} = a_{ii}$, $c_{ij} = -|a_{ij}|$ olarak tanımlanır.

- Herhangi bir A matrisinin köşegen elemanları $a_{ii} > 0$ olarak verilmiş olsun. Eğer A matrisinin kıyas matrisi, M -matris özelliği taşıyorsa bu durumda A matrisine *tekil olmayan \mathcal{H} -matris* denir ve $A \in \mathcal{C}$ şeklinde ifade edilir.
- Herhangi bir A matrisinin köşegen elemanları $a_{ii} \geq 0$ olarak verilmiş olsun. Eğer A matrisinin kıyas matrisi, M -matrisi özelliği taşıyorsa bu durumda A matrisine *\mathcal{H} -matris* denir ve $A \in \mathcal{C}_0$ şeklinde ifade edilir.
- A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle söz konusu matrisin her köşegen elemanı, o satırdaki köşegen olmayan elemanlarının mutlak değerlerinin toplamlarından büyükse bu matrise *kesin köşegen satır baskın* matris denir.

- A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları

$$a_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle söz konusu matrisin her köşegen elemanı, o satırdaki köşegen olmayan elemanlarının mutlak değerlerinin toplamlarından büyük eşitse bu matrise *köşegen satır baskın* matris denir.

- A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad i = 1, \dots, n$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle söz konusu matrisin her köşegen elemanı, o sütundaki köşegen olmayan elemanlarının mutlak değerlerinin toplamlarından büyükse bu matrise *kesin köşegen sütun baskın* matris denir.

- A , $n \times n$ boyutlu bir matris olsun. Eğer A matrisinin elemanları

$$a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \quad i = 1, \dots, n$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, diğer bir deyişle söz konusu matrisin her köşegen elemanı, o sütundaki köşegen olmayan elemanlarının mutlak değerlerinin toplamlarından büyük veya toplamlarına bu matrise *köşegen sütun baskın* matris denir.

Matris sınıflarına ait, bilinmesinde fayda görülen bazı özellikler şunlardır :

- Eğer bir A matrisi C_0 elemanı ise her zaman $\alpha > 0$ olmak üzere $\alpha I + A \in C$ olan bir α sabiti mevcuttur.
- Z_n kümesindeki bir matrisin kıyas matrisi kendisine eşit olduğundan K_0 kümesi C_0 kümesinin bir alt kümesidir.
- $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin köşegen elemanları pozitif olsun. Eğer A 'nın kıyas matrisi tekil olmayan M -matris ise

$$d_i a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n d_j |a_{ji}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif d_i , $i = 1, \dots, n$ katsayıları mevcuttur.

3.1.3. Aktivasyon Fonksiyonları

Yapay sinir ağlarının kararlılığını belirleyen etkenlerden biri, kullanılan aktivasyon fonksiyonudur. Farklı tipteki yapay sinir ağı modellerinde farklı tipteki kararlılıklar incelenirken kullanılan aktivasyon fonksiyonları da farklı olacaktır. Örneğin Hopfield yapay sinir ağı modelinde denge noktasının varlığının, tekliğinin ve kararlı oluşunun belirlenebilmesi için kullanılan aktivasyon fonksiyonunun sınırlı ve sürekli artan olması faydalı olacaktır. Çünkü bu tip bir yapay sinir ağı modelinde Lyapunov fonksiyonları daha kolay bulunur ve sistem parametreleri üzerinde daha az kısıtlama vardır. Ancak her türlü problemde aynı tipte aktivasyon fonksiyonu kullanılamaz. Örneğin bazı

optimizasyon problemlerinde sınırlı olmayan ve sürekli artmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması daha iyi sonuç vermektedir. Denge noktasının varlığını garanti eden sınırlı aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı yapay sinir ağı modellerinde kararlılık analizi gerçekleştirmek, sınırsız aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı modellere göre çok daha kolaydır.

Litaratürde daha önceden gerçekleştirilmiş yapay sinir ağlarının kararlılık analizi çalışmaları sırasında kullanılan aktivasyon fonksiyonları şu şekilde sınıflandırılabilir :

3.1.3.1. Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları :

Aşağıdaki şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonları sınırlı fonksiyonlardır :

$$|f_i(x)| \leq M_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Burada M_i pozitif sabitlerdir. Bu şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in \mathcal{B}$ şeklinde gösterilir.

3.1.3.2. Sürekli Artan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları :

Aşağıdaki şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonları sürekli artan türevi sınırlı fonksiyonlardır :

$$0 < \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y$$

Burada μ_i pozitif sabitlerdir. Bu şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in S$ şeklinde gösterilir.

Fonksiyonun sürekli artan olması sınırlayıcı bir durumdur ve birçok durumda kullanılan aktivasyon fonksiyonunun karakteristiğini ifade ederken yetersiz kalabilir. Bu nedenle yapay sinir ağlarında kullanılacak aktivasyon fonksiyonları kümesini geniş tutmakta

yarar vardır. Daha geniş tutulan bir aktivasyon fonksiyonu kümesi, yapay sinir ağlarının kullanıldığı uygulamalarda daha başarılı olmasını sağlayacaktır.

3.1.3.3. Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları :

Aşağıdaki şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonları azalmayan türevi sınırlı fonksiyonlardır :

$$0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y$$

Burada μ_i pozitif sabitlerdir. Bu şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in K$ şeklinde gösterilir.

K sınıfı, bir önceki maddede verilen S sınıfından daha geniş bir kümedir çünkü daha fazla aktivasyon fonksiyonu içerir. Ancak buna rağmen monoton artan bir özelliğe sahiptir. Bu kümedeki fonksiyonların kesin olarak arttığı söylenemez ancak azalmadığı kesin olarak bilinmektedir. Bu da, bu fonksiyonların türevlerinin sıfır ya da pozitif olabileceği anlamına gelmektedir.

3.1.3.4. Lipschitz Aktivasyon Fonksiyonları :

Aşağıdaki şartı sağlayan aktivasyon fonksiyonları Lipschitz aktivasyon fonksiyonları olarak adlandırılır.

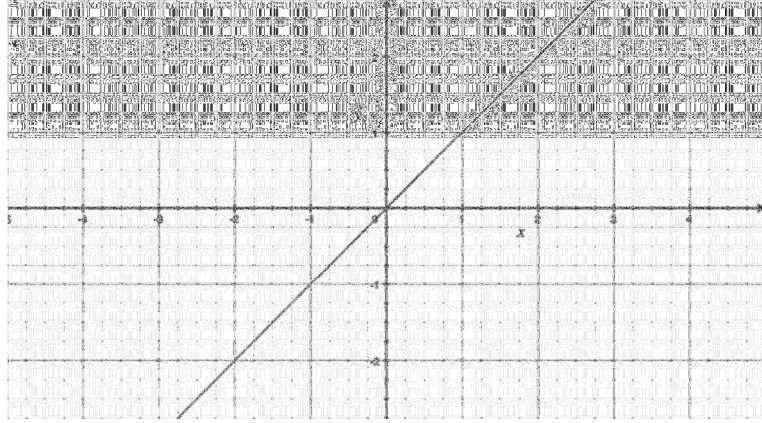
$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \mu_i |x - y|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall x, y \in R, \quad x \neq y$$

Burada $\mu_i > 0$ Lipschitz sabitleridir. Bu özelliği sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in \mathcal{L}$ şeklinde gösterilir. Bu tip aktivasyon fonksiyonları, S ve K sınıfında olmayıp, türevi negatif olabilen aktivasyon fonksiyonlarındandır. Literatürde sıkça kullanılmaktadırlar.

Aşağıda yapay sinir ağlarının kararlılık analizlerinde sıklıkla kullanılan aktivasyon fonksiyonları tek tek ele alınarak tanımları ve genel grafikleri verilmiştir.

Özdeşlik fonksiyonu:

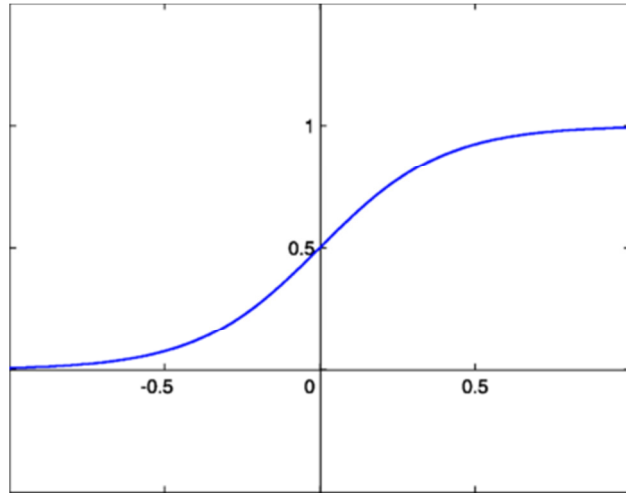
$f(x) = x$ şeklinde ifade edilen fonksiyondur. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [81].



Şekil 3.1: Özdeşlik fonksiyonunun genel grafiği

Sigmoid fonksiyon :

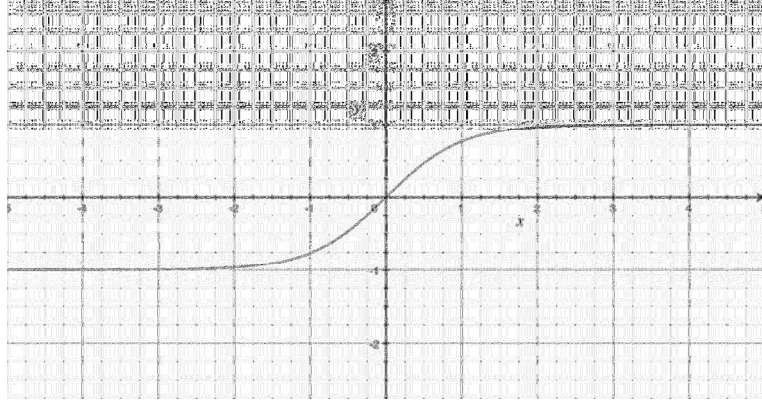
$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ şeklinde ifade edilir. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [82].



Şekil 3.2: Sigmoid fonksiyonunun genel grafiği

Tanh fonksiyonu :

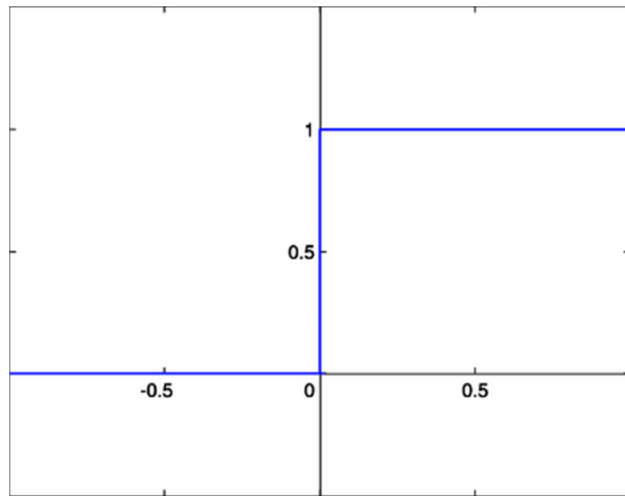
$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ şeklinde ifade edilir. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [83].



Şekil 3.3: Tanh fonksiyonunun genel grafiği

Adım fonksiyonu :

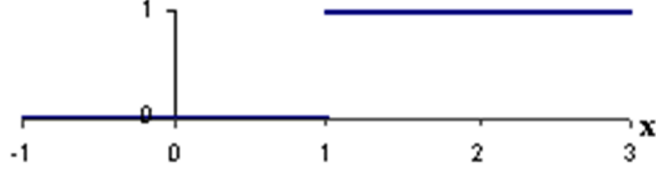
$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ şeklinde tanımlanır. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [84].



Şekil 3.4: Adım fonksiyonunun genel grafiği

İkili adım fonksiyonu (eşik fonksiyonu) :

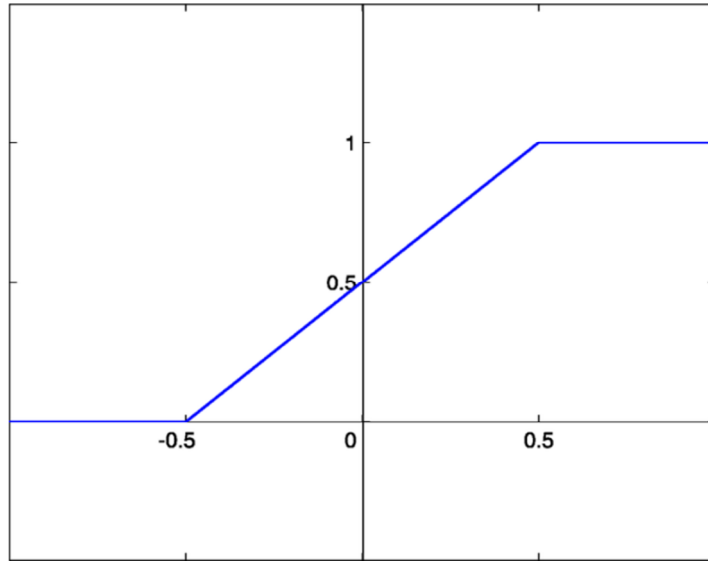
$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases}$ şeklinde tanımlanır. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [85].



Şekil 3.5: Eşik fonksiyonunun genel grafiği

Parçalı doğrusal fonksiyon :

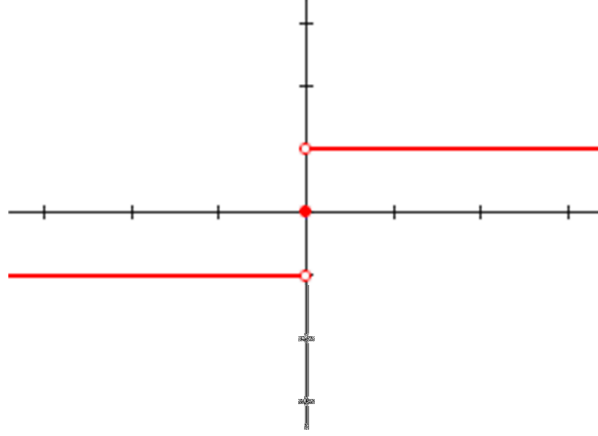
$f(x) = \begin{cases} 1 & v \geq \frac{1}{2} \\ v & -\frac{1}{2} > v > \frac{1}{2} \\ 0 & v \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ şeklinde tanımlanır. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [86].



Şekil 3.6: Parçalı doğrusal fonksiyonunun genel grafiği

Signum fonksiyonu :

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \text{ şeklinde tanımlanır. Genel grafiği aşağıdaki gibidir [87].}$$



Şekil 3.7: Signum fonksiyonunun genel grafiği

3.2. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİNDE KULLANILAN MALZEME VE YÖNTEMLER

Günümüzde pek çok alanda ve uygulamada kullanılan yapay sinir ağlarını farklı kriterlere göre sınıflandırmak mümkündür. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

- Mimari yapılarına göre sınıflandırma (ileri beslemeli, geri beslemeli) :

İleri beslemeli yapay sinir ağlarında (İBYSA) nöronlar girişten çıkışa doğru düzenli katmanlar şeklindedir.

Bir katmandan sadece kendinden sonraki katmanlara bağ bulunmaktadır. Kendisine veya daha önceki katmanlara bir geri dönüş söz konusu değildir. Yapay sinir ağına gelen bilgiler giriş katmanına daha sonra sırasıyla ara katmanlardan ve çıkış katmanından işlenerek geçer ve daha sonra dış dünyaya çıkar.

Geri beslemeli yapay sinir ağlarında (GBYSA) ileri beslemeli olanların aksine bir nöronun çıktısı sadece kendinden sonra gelen nöron katmanına girdi olarak verilmez. Kendinden önceki katmanda veya kendi katmanında bulunan herhangi bir nörona girdi

olarak bağlanabilir. Bu yapısı ile geri beslemeli yapay sinir ağları doğrusal olmayan dinamik bir davranış göstermektedir [88].

- Öğrenme yaklaşımlarına göre sınıflandırma (danışmanlı, danışmansız, destekleyici) :

Danışmanlı (veya öğreticili) öğrenme sırasında ağa verilen giriş değerleri için çıktı değerleri de verilir. Ağ verilen girdiler için istenen çıkışları oluşturabilmek için kendi ağırlıklarını günceller. Ağın çıktıları ile beklenen çıktılar arasındaki hata hesaplanarak ağın yeni ağırlıkları bu hata payına göre düzenlenir. Hata payı hesaplanırken ağın bütün çıktıları ile beklenen çıktıları arasındaki fark hesaplanır ve bu farka göre her nörona düşen hata payı bulunur. Daha sonra her nöron kendine gelen ağırlıkları günceller.

Danışmansız (veya öğreticisiz) öğrenmede ağa öğrenme sırasında sadece örnek girdiler verilmektedir. Herhangi bir beklenen çıktı bilgisi verilmez. Girişte verilen bilgilere göre ağ her bir örneği kendi arasında sınıflandıracak şekilde kendi kurallarını oluşturur. Ağ bağlantı ağırlıklarını aynı özellikte olan dokuları ayırabilecek şekilde düzenleyerek öğrenme işlemini tamamlar. Örneğin sürücüsüz bir akıllı araçta kullanılan bir yapay sinir ağı, dışarıdan herhangi bir örnek verilmeksizin zamanla “trafiğin az olduğu günler” veya “trafiğin yoğun olduğu günler” gibi kavramları kendi deneyimlerine dayanarak oluşturabilir.

Destekleyici (veya ödül ile) öğrenme yaklaşımında ağın her iterasyonu sonucunda elde ettiği sonucun iyi veya kötü olup olmadığına dair bir bilgi verilir. Bunlar durumun avantajlı olup olmamasına göre, ödül, ceza, yaptırım gücü gibi değişik isimler alabilirler. Ağ bu bilgilere göre kendini yeniden düzenler. Bu sayede ağ herhangi bir girdi dizisiyle hem öğrenerek hem de sonuç çıkararak işlemeye devam eder.

Örneğin satranç oynayan bir yapay sinir ağı yaptığı hamlenin iyi veya kötü olduğunu anlık olarak ayırt edememesine rağmen yine de hamleyi yapar. Eğer oyun sonuna geldiğinde program oyunu kazandıysa yaptığı hamlelerin iyi olduğunu varsayacaktır ve bundan sonraki oyunlarında benzer hamleleri iyi olarak değerlendirerek oynayacaktır [88, 89].

- Öğrenme zamanına göre sınıflandırma (statik, dinamik):

Statik öğrenme kuralıyla çalışan yapay sinir ağları kullanmadan önce eğitilmektedir. Eğitim tamamlandıktan sonra ağ istenilen şekilde kullanılabilir. Ancak bu kullanım sırasında ağıın üzerindeki ağırlıklarda herhangi bir değişiklik olmaz.

Dinamik öğrenme kuralı ise yapay sinir ağlarının çalıştığı süre boyunca öğrenmesini öngörerek tasarlanmıştır. Yapay sinir eğitim aşaması bittikten sonra da daha sonraki kullanımlarında çıkışların onaylanmasına göre ağırlıklarını değiştirerek çalışmaya devam eder [88].

- Aktivasyon fonksiyonuna göre sınıflandırma (doğrusal, sigmoid) :

Yapay Sinir Ağı kullandığı aktivasyon fonksiyonunun tipine göre de sınıflandırılabilir. Aktivasyon fonksiyonlarının farklı türleri, Bölüm 3.1.3'te açıklandığından burada daha fazla bilgi verilmeyecektir.

- Kullandığı uygulama metoduna göre sınıflandırma (kümeleme, sınıflandırma) :

Sınıflandırma, öğreticili bir öğrenme tipidir, sınıflandırmada amaç verilerin belli bir sınıfa ait olup olmadığının tespit edilmesidir. Kümeleme ise öğreticisiz bir öğretim kullanır. Kümelemede amaç benzer grupların bir topluluk oluşturmasını sağlamasıdır.

Bunlar gibi farklı ayrımlar yapmak da mümkündür ancak yapay sinir ağları arasındaki en önemli ayırım, sistemin sabit (herhangi bir gecikmesi yok) veya dinamik (gecikmeli) oluşudur.

Yapay sinir ağlarını oluşturan hücrelerde ağırlıkların sabit olduğu ve hücrede geri besleme ya da geciktirilmiş sinyaller kullanılmadığı durumlarda bu hücre statik bir işlevi gerçekleştireceğinden bu model, statik bir hücre modeli olur. Ancak gerçek dünya uygulamalarında girdilerin zamanlamasının aynı çizgi üzerinde olmadığı ve gecikmeler

yaşanmasının muhtemel olduğu gerçeği bilinmekte olduğundan daha çok gecikmeli yani dinamik hücre modelleri üzerinde çalışılmaktadır.

Nötral sistemleri incelemeden önce genel gecikmeli yapay sinir ağı modelleri üzerindeki analizleri ele almakta yarar vardır. Dolayısıyla, bu bölümde, öncelikle kararlılık kavramından ve çeşitlerinden bahsedilmiş, daha sonra da genel dinamik sistemlerin kararlılık analizleri üzerinde durulmuştur.

3.2.1 Kararlılık Kavramı

Daha önce de belirtildiği gibi kullanıldıkları farklı uygulamalara göre yapay sinir ağlarının sahip olması istenen kararlılık özellikleri de çeşitlenmektedir. Bu bölümde önce kararlılık kavramının ve herhangi bir sistemin kararlı olmasının “ne anlama geldiğinin” açıklanması, daha sonra literatürde yapay sinir ağları üzerinde incelenen kararlılık çeşitlerinin incelenmesi uygun görülmüştür.

Yapay sinir ağları dahil olmak üzere herhangi bir bilim dalında, kararlı bir sistemin en genel tanımı “denge konumuna gitmeye eğilimli veya denge konumuna ulaşmış sistemler” şeklinde yapılabilir. Sistemlerin kararlı olup olmayışı genel bir kanının aksine, dış etmenlere bağlı değildir, sistem kendi tepkisiyle denge konumuna gitmeye eğilimlidir. Dış etkenler, ancak herhangi bir sistemin dengeye ulaşma süresini değiştirebilir. Kararlılık kavramı, gerçekte süreklilik ifade etmesi kesin olan bir durum değildir, ancak teorikte genelde bir sistemin kararlı konuma geçtikten sonra bir daha kararsız hale geçmeyeceği kabul edilir.

Bir sistemin kararlı olarak ifade edilebilmesi için sistemlerin en az bir denge noktasının bulunması gerektiği oldukça açıktır. Daha önce de belirtildiği gibi sistemin özellikleri, kullanıldığı uygulamalar gibi etkenler denge noktasının sayısını ve aranan kararlılık türünü değiştirebilir.

Yapay sinir ağları için üzerinde çalışılan kararlılık çeşitlerinin bazıları ve denge noktası kavramı aşağıda verilmiştir :

Denge noktası :

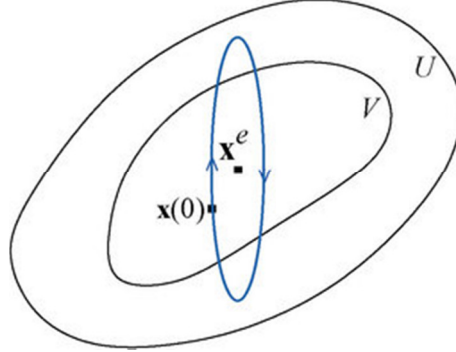
Her $t \geq t_0$ için $f(x_e, t) = 0$ şartını sağlamıyorsa, bu durumda x_e için “ $\dot{x} = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ sisteminin denge noktasıdır” denir.

Kararlılık :

Bir dinamik sistemin belli bir denge noktasının kararlı olması, diğer yörüngelerin söz konusu noktanın belli komşuluğunda kalması olarak ifade edilebilir. Eğer x_e ’nin her U komşuluğunda, x_e ’nin V ($x(0) \in V$) ile başlayan her $x(t)$ çözümünün her $t \geq 0$ için U ’da kalmasını sağlayan bir $V \subseteq U$ komşuluğu varsa bu durumda x_e kararlı bir denge noktasıdır. Burada $x(t)$ ’nin, x_e ’ye yaklaşması gerekmez. Bu kararlılık çeşidi bazı kaynaklarda Lyapunov kararlılığı olarak da isimlendirilir [90].

Diğer bir şekilde, kararlılık aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

x_e denge noktası, her t_0 ve $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - x_e| < \delta$ ’nin $|x(t) - x_e| < \varepsilon$ şartını sağlayacağı bir $\delta(\varepsilon, t_0)$ bulunabilirse kararlıdır. (Burada $x(t)$, nonlinear sistemin çözümüdür.)



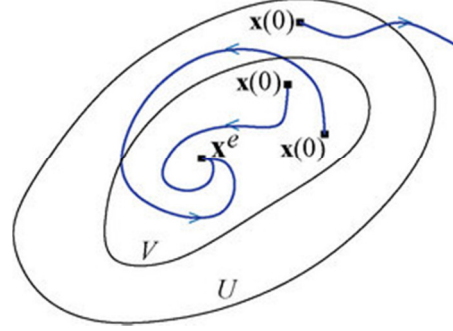
Şekil 3.8: Kararlılık

Asimtotik kararlılık :

Asimtotik kararlılık, kararlılığa ek olarak denge noktasının, komşuluğundaki diğer yörüngeler ile uzun bir zaman limitinde bir çekim etkisine sahip olması olarak ifade edilebilir.

Bir x_e denge noktası, kararlılığı sağlıyorsa, buna ek olarak da her $x(0) \in V$ için $t \rightarrow \infty$ ’a giderken $|x(t) - x_e| \rightarrow 0$ şeklinde seçilebilecek bir V mevcutsa, asimtotik

kararlıdır [90]. Diğer bir deyişle, asimtotik kararlılıkta $|x_0 - x_e| < \delta(t_0)$ olması $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_e| = 0$ olmasını garantiler.



Şekil 3.9 : Asimtotik kararlılık

Şunu önemle belirtmek gerekir ki, bir sistemin denge noktası, yerel veya global asimtotik kararlılık sağlıyorsa, bu durumda söz konusu nokta, sistemin tek denge noktası olmak zorundadır. Buna göre birden fazla denge noktası olan bir sistem için asimtotik kararlılık söz konusu değildir.

Asimtotik kararlılık, kararlılığın bir alt kümesidir denebilir. Diğer bir deyişle, kararlı olan her denge noktası için asimtotik kararlıdır ifadesi kullanılamazken, asimtotik kararlı olan her noktanın kararlı olduğu kolaylıkla söylenebilir.

Kesin kararlılık :

Bazı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan yapay sinir ağlarının belli tek bir aktivasyon fonksiyonu yerine, belirli özellikleri sağlayan bir aktivasyon fonksiyonu seti için tek ve global asimtotik kararlı denge noktasına sahip olması istenir. Bunun gerçekleşmesi sağlanırsa, örneğin, sistem belirli bir sınıfa ait olan her nonlineer sistem için tek ve global asimtotik bir denge noktasına sahipse bu durumda o sistem için “kesin kararlı” (Absolutely Stable - ABST) ifadesi kullanılır. ABST özelliği taşıyan yapay sinir ağlarının ideal bir karakteristiğe sahip olduğu ifade edilir. Bu yapay sinir ağları kullanıldıkları uygulamada herhangi bir aktivasyon fonksiyonu için en optimal cevapları bulmaya eğilimli olduğundan pek çok uygulamada oldukça talep gören sistemlerdir [91].

Üstel kararlılık :

Bir x_e denge noktası, bir V komşuluğuna sahipse ve her $x(0) \in V$ için $t \rightarrow \infty$ 'a giderken $|x(t) - x_e| < e^{-at}$ 'yi sağlayan bir pozitif a sayısı bulunabiliyorsa üstel kararlıdır. Üstel kararlı sistemler aynı zamanda asimtotik kararlı ve dolayısıyla da kararlıdır [90].

Buraya kadar verilen kavramlar kararlılık derecesine göre belirlenmiş kararlılık kavramları idi. Bunun dışında farklı şekillerde kararlılık sınıflandırmaları yapmak da mümkündür.

Global kararlılık :

Lineerleşme teoremi, doğrusal olmayan bir sistemin denge noktasındaki davranışlarının birçok durumda doğrusal sistemi andırdığını göstermektedir. Bununla birlikte bu sonuç, lineerleştirme işlemi basit bir işlem değilse ya da yalnızca tek bir merkezi gösteriyorsa çok sağlıklı bir sonuç alınmasını sağlayamaz, yalnızca belirli, yerel bir bölge için doğru sonuçları gösterir. Bu duruma yerel kararlılık denir. Yerel kararlılık durumunda yerel minimuma yaklaşan 1'den fazla denge noktası olabilir ki bu da çoğu uygulama için istenen bir durum değildir. Bunun üstesinden gelmek için, tek bir denge noktası olan ve global kararlı olan yapay sinir ağları tasarlanmak istenir. Sistemin global kararlı olması demek, her noktadaki çözümünün lineer sistemi andırması veya diğer bir deyişle her noktada kararlı olması demektir.

Yerel kararlılık, global kararlılık için gerekli bir şarttır ancak yeterli değildir.

Bir sistemin global kararlı olması durumunda başlangıç koşullarını belirlemeye gerek yoktur çünkü herhangi bir yerden başlayan yörüngeler de sonuçta aynı tek denge noktasına erişecektir. Bu denge noktasının değişmesi yalnızca dış etkenlere bağlıdır.

Literatürde gerçekleştirilen çalışmalarda, Hopfield modelinde kullanılan bağlantı matrisinin köşegensel kararlı oluşunun denge noktasının varlığını, tekliğini ve global kararlı oluşunu garantilediği gösterilmiştir. Ayrıca negatif simetrik yarı-tanımlı bir bağlantı matrisi kullanılmasının bir Hopfield ağının global kararlılığını garantilediği de ifade edilmiştir, çünkü global kararlı demek, sistemin tüm çözümlerinin kararlı bir denge noktasına yakınsaması demektir. Fakat bu şekildeki bir bağlantı matrisinin

kullanımı, denge noktasının tek ya da çok olması konusunda yorum yapılmasını sağlayamaz. Bu konuda yorum yapılabilmesi için iki parametrenin daha belirlenmesi gerekir. Bu parametreler, aktivasyon fonksiyonlarının karakteristiği ve nöronlar arasındaki bağlantı katsayılarının değerleridir.

Global kararlılık analizinin temel amaçlarından biri, yapay sinir ağlarının global yakınsaklığını sağlayan ve genellikle göz önüne alınan yapay sinir ağı modelinin sistem parametreleri arasında ilişki kuran koşulları elde etmektir. Ancak bu koşulların elde edilmesi oldukça zor ve karmaşık analizler gerektirmektedir. Bunun nedeni de yapay sinir ağlarının doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemleri ile tanımlanmasıdır.

Global kararlılık, kararlılığın derecesine göre değil, etki alanına göre yapılan bir sınıflandırmadır.

Kararlılık sınıflandırma şekillerinden biri de sapmalardan etkilenip etkilenmemesidir. Bununla alakalı olarak robust kararlılık kavramı açıklanmıştır.

Robust kararlılık :

Yapay sinir ağlarında çoğunlukla osilasyon, kararsızlık gibi durumlara sebep olan zaman gecikmelerinin olduğu görülmüştür veya daha iyi ve doğru sonuç elde edebilmek için modellere zaman gecikmesi eklenerek inceleme yapılmıştır. İyi tasarlanmış bir yapay sinir ağında zaman gecikmelerinin etkisi yok edilse bile, dış etkenler, model oluştururken gerçekleştirilen hatalar ve parametre iniş-çıkışlarından olumsuz etkilenmemek olası değildir. Bu yüzden özellikle zaman gecikmesi için içine girdiğinde yapay sinir ağların robust kararlılığını sağlamak önemlidir [92]. Robust kararlılık bir yapay sinir ağının hiçbir sapmadan etkilenmemesi demektir. Türkçe’de kelime anlamı dayanıklı veya güçlü olarak ifade edilen robust kelimesi, kararlılıkla bir arada kullanıldığında kelime anlamına uygun bir şekilde güçlü bir kararlılığı ifade eder.

Bir sistemin sahip olduğu kararlılık özelliklerinden bahsedilirken genelde yalnızca “robust kararlı”, yalnızca global kararlı” veya “asimtotik kararlı” demek yeterli olmaz. Bunun yerine kararlılığın hem derecesi, hem etki alanı hem sapmalardan etkilenip etkilenmediği belirtilerek “global asimtotik kararlı”, “global üstel kararlı” veya

“asimtotik robust” kararlı gibi tanımlamalar yapmak daha uygun olur. Bunlar arasında en çok arananlardan bir tanesi global asimtotik kararlılıktır (global asymptotic stability-GAS).

3.2.2. Dinamik Sistemlerin Kararlılık Analizi

Bir dinamik sistem incelenirken, bu sistemin denge noktasının kararlı olması, kullanıldığı uygulamanın istenilen sonucu vermesi açısından oldukça büyük önem taşımaktadır. Bu açıdan bu bölümde dinamik nonlineer sistemlerin kararlılık analizlerinin nasıl gerçekleştirildiğine dair bazı bilgiler verilecektir.

Doğrusal olmayan bir dinamik sistem aşağıdaki denklem kümesi ile ifade edilebilir :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}$$

Bu dinamik sistem daha kısa olarak

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde de yazılabilir.

Sistemi, $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ durum vektörü şeklinde alınarak aşağıdaki vektörel formda yazmak da mümkündür.

$$\dot{x} = f(x)$$

Bu durumda, $f(x^*) = 0$ koşulunu sağlayan bir sabit x^* vektörü, diğer bir deyişle bu vektörün elamanı olan noktalar, bu dinamik sistemin denge noktalarını oluşturmaktadır. Çoğu uygulama alanında dinamik sistemlerin denge noktasının tek olması

istenmektedir. Bu da $\dot{x} = f(x)$ eşitliğinin denge noktası olacak şekildeki çözümünün tek olması anlamına gelir. Bu çözümün tek olması için $f(x)$ fonksiyonu üzerinde bazı kısıtlamalar bulunmalıdır. Öncelikle ele alınması gereken bir çözümün varlığının kontrol edilmesi gerekir. En azından bir çözümün bulunduğundan emin olduktan sonra bu çözümün tek olup olmadığı araştırılır. Bir çözümün bulunabilmesi için yeterli bir koşul $f(x)$ 'in tüm argümanlarının zamana göre sürekli olmasıdır. Ancak en az bir denge noktasının varlığını garantileyen bu koşul, çözümün tek olmasını garanti etmez.

$\dot{x} = f(x)$ sistemi analiz edilirken genel olarak fonksiyonun Lipschitz olduğu varsayılır. Bir $f(x)$ fonksiyonun Lipschitz sürekli olması x ve y vektörleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlamasına bağlıdır :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Bu eşitsizlikte L pozitif bir sabit sayıdır ve Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Dinamik sistemlerin analizleri gerçekleştirilirken işlemleri sadeleştirmek ve basitleştirmek amacıyla bazı kabuller gerçekleştirilmektedir. Örneğin çoğunlukla denge noktasının orijinde olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım oldukça mantıklıdır çünkü hem herhangi bir denge noktasını, değişkenleri değiştirme yolu ile kolaylıkla orijine ötelemek ve işlemleri basitleştirmek mümkündür, hem de bu şekilde yapılan bir analizde orijinin kararlı çıkması halinde, ötelenen noktanın da kararlı olacağı garantilenebilir.

Doğrusal olmayan dinamik bir sistemin denge noktası x^* , $t > 0$ için herhangi bir pozitif ε için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir δ olması durumunda kararlıdır.

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \rightarrow \quad \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

Söz konusu x^* denge noktası, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir δ olması durumunda ise asimtotik kararlıdır.

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Genel olarak dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılık analizi yapılırken üç adet yöntemden yararlanılır. Bunlar, Lyapunov Kararlılık Teoremi, Hurwitz Kararlılık Teoremi ve LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi'dir.

3.2.2.1. Lyapunov Kararlılık Teoremi

Yapay sinir ağlarının denge noktasının kararlılığı genellikle, bir pozitif enerji fonksiyonunun tanımlandığı ve bu fonksiyonun zamana bağlı türevinin incelendiği Lyapunov yöntemiyle elde edilir. Enerji her daim pozitif bir değer olduğundan, bu yöntemde kullanılan fonksiyon da pozitifdir. Söz konusu fonksiyonun türevi elde edildikten sonra bu türevin değerine göre kararlılık analizi yapılır. Bu teorem Lyapunov'un Direkt Metodu olarak adlandırılır. Bu metodun üstünlüklerinden biri denge noktasının kararlılık özelliklerini, sisteme ait karmaşık diferansiyel denklemleri çözmeden belirleyebilmesidir.

Lyapunov teoremi ile yapay sinir ağının kararlılık analizinin yapılabilmesi, uygun bir fonksiyon bulunabilmesine bağlıdır. Ancak günümüzde hala uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulmak için her zaman işe yarayan geçerli bir yöntem bulunmamaktadır. Bu yüzden bazı durumlarda fonksiyon bulunamaz. Fakat bu durumda incelenen yapay sinir ağının kararsız olduğu anlamına gelmez, yalnızca başka bir yöntemle incelenmesinin daha doğru olacağı anlamına gelir.

Lyapunov Kararlılık Teoremi aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası $x^* = 0$ olsun. Burada $f(0) = 0$ olduğunu varsayalım.

Lyapunov fonksiyonu olarak ele alınan $V(x(t)): R^n \rightarrow R$ pozitif tanımlı, sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmalıdır. Bu şekilde uygun bir fonksiyon bulunduğunu varsayalım. $V(x(t))$ fonksiyonunun zamana göre türevi olan $\dot{V}(x(t))$ aşağıdaki gibi ifade edilir :

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} f_i(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t))$$

$x^* = 0$ denge noktasının kararlılığı, $V(x(t))$ fonksiyonunun ve türevinin değerlerine göre şu şekilde belirlenir :

$V(0) = 0$ ve $\forall x(t) \neq 0$ iken $V(x(t)) > 0$ olmak üzere

$\dot{V}(x(t)) \leq 0, \forall x(t) \in R^n$ ise denge noktası $x^* = 0$ kararlıdır.

$\dot{V}(x(t)) < 0, \forall x(t) \neq R^n$ ise denge noktası $x^* = 0$ asimtotik kararlıdır.

$\dot{V}(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ ise denge noktası $x^* = 0$ kararsızdır.

3.2.2.2. LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi

Lyapunov Teoremi'nin daha genel bir hali olan LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi şu şekildedir :

- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemi için denge noktası $x^* = 0$ olsun. $V(x(t)): D \rightarrow R$ orijin civarındaki D kümesi üzerinde tanımlı, türevlenebilir, pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca D kümesi içerisinde $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ şartı sağlanıyor olsun. Buna göre aşağıdaki gibi tanımlı bir S kümesi olduğunu varsayalım.

$$S = \{x(t) \in D \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Bu küme içerisinde orijin dışında hiçbir çözümün sonsuza kadar kalmayacağını varsayalım. Buna göre orijin asimtotik kararlıdır.

- $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemi için denge noktası $x^* = 0$ olsun. $V(x(t)): R^n \rightarrow R$ sürekli, türevlenebilir, pozitif tanımlı ve radyal sınırsız ($\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x(t)) \rightarrow \infty$) bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ şartı sağlanıyor olsun.

Buna göre aşağıdaki gibi tanımlı bir S kümesi olduğu varsayalım.

$$S = \{x(t) \in R^n | \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Bu küme içerisinde orijin dışında hiçbir çözümün sonsuza kadar kalmayacağını varsayalım. Buna göre orijin global asimtotik kararlıdır.

LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi ile gerçekleştirilen kararlılık analizlerinde kullanılan fonksiyonun pozitif tanımlı olması gerekmez. Ancak pozitif tanımlı fonksiyonlar ile kararlılık analizi gerçekleştirmek daha kolaydır.

3.2.2.3. Hurwitz Kararlılık Teoremi

$x = \mathbf{0}$, $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ile tanımlanan sistemin denge noktası olsun. Buna göre $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin $x = \mathbf{0}$ civarında lineerleştirilmiş modeli şu şekildedir :

$$A = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=\mathbf{0}} \quad (\text{Bu modele göre } A, \dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ sisteminin Jacobianı'dır.})$$

Bu durumda $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin orijininin kararlılığının A 'ya aşağıdaki şekilde bağlı olduğunu söyleyebiliriz :

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin orijini, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmının negatif ya da sıfır olması durumunda kararlıdır.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin orijini, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise asimtotik kararlıdır.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin orijini, A 'nın reel kısmı pozitif olan en az bir özdeğeri olması halinde kararsızdır.

Bu üç teoremden biri (çoğunlukla Lyapunov Teoremi) kullanılarak dinamik yapay sınır ağlarının kararlılık çeşitleri için (global kararlılık, global asimtotik kararlılık, robust kararlılık vb) için gerekli olan kriterler bulunur. Teoremin doğru seçilmesi ve doğru bir şekilde uygulanması burada büyük önem taşımaktadır.

4. NÖTRAL SİSTEMLERİN DİNAMİK DAVRANIŞ ANALİZİ

Bu tez çalışmasının amacı nötral sistemlerin dinamik davranış analizini gerçekleştirmektir. Bu amaçla toplamda üç adet model incelenmiş ve kararlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. İncelenen ilk model, nötral olmayan klasik gecikmeli bir yapay sinir ağı modelidir. Bu modelde bir nöronun diğerleri ile arasında oluşturduğu gecikme miktarı sabit olarak varsayılmış ve dolayısıyla tek boyutlu bir gecikme ele alınmıştır. Bu modelin incelenme sebebi, analizlere genel bir giriş yapabilmektir. İncelenen ikinci ve üçüncü modeller nötral modellerdir. Bu şekilde hem gecikmeli bir yapay sinir ağı modelinin, hem de nötral modellerin kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir. Söz konusu analizler yapılırken çeşitli matematiksel kavramlardan ve Lyapunov kararlılık teoremlerinden faydalanılarak her model için yeni yeterli kararlılık koşulları türetilmiştir. Daha sonra bu koşullar, önceden elde edilen kararlılık koşulları ile karşılaştırılmış ve elde edilen koşulların daha az sınırlayıcı, dolayısıyla daha avantajlı olduğu gösterilmiştir. Bu karşılaştırmaları yapabilmek amacıyla çeşitli sayısal örnekler ve simülasyonlar gerçekleştirilmiştir.

4.1 GENEL DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞI MODELİ

Bu tez kapsamında ele alınan ve kararlılık analizi gerçekleştirilen genel dinamik yapay sinir ağı modeli şu şekildedir [93].

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Burada, n nöron sayısını, $x_i(t)$ i . nöronun t anındaki durumunu, $f_i(\cdot)$ aktivasyon fonksiyonlarını, a_{ij} ve b_{ij} sırasıyla t ve $t - \tau_j$ anlarında j . ve i . nöronlar arasındaki bağlantıları, τ_j j . nöronun i . nörona bir sinyal gönderilirken ihtiyaç duyulan zaman

gecikmesini, u_i sabit girdileri, c_i i . nöronun yüklenme hızını ifade etmektedir. Burada tek boyutlu bir zaman gecikmesi ele alınmıştır.

Bu denklemdeki bileşenlerin her biri, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ durum vektörü, $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ bir pozitif diyagonal matris, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bağlantı matrisi, $B = (b_{ij})_{n \times n}$ gecikmeli bağlantı matrisi, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ sabit girdi vektörü olarak ifade edilecek şekilde vektörel formlara sokulduğunda söz konusu dinamik yapay sinir ağı sisteminin denklemi

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau)) + u \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca a_{ij} , b_{ij} ve c_i nicelikleri ile ilgili aşağıdaki eşitsizlikler verilebilir.

$$\begin{aligned} C_I &= \{C: 0 < \underline{C} \leq C \leq \overline{C}, \text{ i. e., } 0 < \underline{c}_i \leq c_i \leq \overline{c}_i\} \\ A_I &= \{A: \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, \text{ i. e., } \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}\} \\ B_I &= \{B: \underline{B} \leq B \leq \overline{B}, \text{ i. e., } \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \overline{b}_{ij}\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Daha sonra denklemdeki aktivasyon fonksiyonları ile ilgili aşağıdaki şart ele alınır :

μ_i 'ler bazı pozitif sabitler olmak üzere f_i fonksiyonlarının $0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\forall x, y \in R$, $x \neq y$ koşullarını sağladığı varsayılırsa bu fonksiyon sınıfı $f \in K$ olarak ifade edilir.

Kararlılık analizini gerçekleştirebilmek için aşağıdaki lemmaları vermekte fayda vardır.

Lemma 1 [12] : $A \in A_I := \{A: \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$ ise bu durumda herhangi bir pozitif diyagonal P matrisi için $PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$ eşitsizliği geçerlidir. Burada $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, ve $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$ 'dir.

Lemma 2 [11] : $B \in B_1 := \{B: \underline{B} \leq B \leq \overline{B}\}$ ise bu durumda herhangi bir pozitif diyagonal P matrisi için $\|B\|_2^2 \leq \|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*|\|_2$ eşitsizliği geçerlidir. Burada $B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B})$, ve $B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$ 'dir.

(4.1) sisteminin denge noktasını x^* olarak isimlendirelim. Bu noktanın kararlılığını incelemek için öncelikle noktayı, orijine öteleyecek dönüşümler yapmak (4.1) sistemin, sadeleştirilim. Orijine öteleme işlemi kararlılık analizine herhangi bir zarar vermez, çünkü orijin için yapılan işlemler diğer noktalara da kolayca uygulanabilir. Ayrıca bu öteleme işlemi matematiksel işlemleri basitleştireceğinden kararlılık analizini de basitleştirir. Bu açıdan da tercih edilen bir yöntemdir.

Buna göre, $z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümü yapılarak, denge noktası orijine taşınır. Denge noktasını orijine taşımak kararlılık analizi için herhangi bir sorun teşkil etmez, çünkü orijine taşındığı haliyle sistemin denge noktasının kararlı çıkması, orijinal sistemin denge noktasının da kararlı olması anlamına gelecektir. Bu dönüşümden sonra $\dot{z}_i(\cdot)$ aşağıdaki şekilde türetilir :

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(z_j(t - \tau_j)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

veya

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau)) \quad (4.4)$$

Bu denklemler (4.1) ve (4.2) denklemleri ile aynı yapıdadır.

Burada,

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T, \quad g(z(\cdot)) = (g_1(z_1(\cdot)), g_2(z_2(\cdot)), \dots, g_n(z_n(\cdot)))^T \text{ 'dir.}$$

Ayrıca, $g_i(z_i(\cdot)) = f_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - f_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 'dir.

g_i fonksiyonunun f_i üzerindeki tüm kabulleri sağladığı kolaylıkla doğrulanabilir. Buna göre (4.1) sisteminin denge noktası olan x^* 'ın kararlılık analizini yapmak yerine, dönüştürülmüş sistem olan (4.4)'ün orijininin kararlılık analizini yapmak aynı anlama gelecektir.

(4.1) ile verilen yapay sinir ağının robust kararlılığı ile ilgili koşullar şu şekildedir :

Teorem 4.1.1 : $f \in K$ olduğu varsayalım. Buna göre, (4.3)'ü sağlamak koşuluyla verilen yapay sinir ağı modeli (4.1), aşağıdaki şartı sağlayan bir $P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ pozitif diyagonal matrisinin mevcut olması halinde tek ve global asimtotik robust kararlı bir denge noktasına sahiptir.

$$\Omega = 2P\underline{C}\Lambda^{-1} - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)} I > 0$$

Burada, $\Lambda = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B})$ ve $B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$ 'dir.

İspat : (4.1) ile ifade edilen yapay sinir ağının tek bir denge noktası olduğunu gösterebilmek için, (4.4) ile ifade edilen sistemin orijininin (4.4)'ün tek denge noktası olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Buna göre, (4.4) için şu eşitlik ele alınsın.

$$H(z) = -Cz + Ag(z) + Bg(z) \quad (4.5)$$

Bu denklemde durumları tek tek inceleyelim.

Burada $z = 0$ ise, $H(z) = 0$ olacaktır. $z \neq 0$ ve $g(z) = 0$ ise, bu durumda C 'nin pozitif köşgensel bir matris olması sebebiyle $H(z) \neq 0$ olur.

Geriye kalan $z \neq 0$ ve $g(z) \neq 0$ olduğu durumu incelenir. Bunun için P bir pozitif köşgensel matris olsun. (4.5) ile ifade edilen denklemin her iki tarafını $2g^T(z)P$ ile çarpıldığında

$$\begin{aligned} 2g^T(z)PH(z) &= -2g^T(z)PCz + 2g^T(z)PAg(z) + 2g^T(z)PBg(z) \\ &= -2g^T(z)PCz + g^T(z)(PA + A^T P)g(z) + 2g^T(z)PB(z) \end{aligned} \quad \text{olur.}$$

Lemma 1'den $PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$ olduğu biliniyordu.

Buna göre,

$$g^T(z)(PA + A^T P)g(z) \leq g^T(z)(PA^* + A^{*T}P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I)g(z) \quad (4.6)$$

olur.

Ayrıca, $2g^T(z)PBg(z) \leq 2\|P\|_2\|B\|_2\|g(z)\|_2^2$ yazılabileceği de açıktır.

Lemma 2, $\|B\|_2^2 \leq \|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*|\|_2$ anlamına gelmektedir. Bu da

$$2g^T(z)PBg(z) \leq 2\|P\|_2\sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*|\|_2)}\|g(z)\|_2^2 \quad (4.7)$$

olmasını sağlar.

Ayrıca aşağıdaki denklemin sağlandığı da kolayca görülebilir.

$$-2g^T(z)PCz = -2\sum_{i=1}^n p_i c_i g_i(z_i)z_i \leq -2g^T(z)P\underline{C}\Lambda^{-1}g(z) \quad (4.8)$$

(4.6)-(4.8) kullanılarak, (4.5) aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} 2g^T(z)PH(z) &\leq -g^T(z)(2P\underline{C}\Lambda^{-1} - PA^* - A^{*T}P)g(z) - g^T(z)(\|PA_* + A_*^T P\|_2 I)g(z) \\ &\quad - \|P\|_2\sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*|\|_2}\|g(z)\|_2^2 \\ &= -g^T(z)\Omega g(z) \end{aligned}$$

$\Omega > 0$ ise, $g(z) \neq 0$ için, $2g^T PH(z) < 0$ elde edilir. Bu da, tüm $g(z) \neq 0$ için $H(z) \neq 0$ olması ile devam eder. $g(z) \neq 0$, $z \neq 0$ olması anlamına geldiğinden her $z \neq 0$ için $H(z) \neq 0$ ve yalnızca $z = 0$ olduğunda $H(z) = 0$ olması ile sonuçlanır. $H(z) = 0$, (4.4) sisteminin bir denge noktası olduğundan, (4.4) sisteminin orijininin tek denge noktası olduğu ya da denk olarak (4.1) sisteminin her sabit u girişi için tek bir denge noktasına sahip olduğu sonucuna varılabilir.

$\Omega > 0$ durumunun (4.4)'ün orijininin global asimtotik kararlı olması anlamına geldiğini göstermekte fayda vardır. Öncelikle aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu tanımlansın.

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + 2\alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{z_1(t)} p_i g_i(s) ds + (\alpha\gamma + \beta) \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_1}^t g_i^2(z_i(\zeta)) d\zeta$$

Burada p_i, α, β ve γ bazı pozitif sabitlerdir. (4.4) sisteminin yörüngeleri üzerindeki fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki gibidir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) \\
&\quad -2\alpha g^T(z(t))PCz(t) + 2\alpha g^T(z(t))PAg(z(t)) \\
&\quad +2\alpha g^T(z(t))PBg(z(t-\tau)) + \alpha\gamma\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha\gamma\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
&\quad +\beta\|g(z(t))\|_2^2 - \beta\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Buna göre

$$-z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \leq g^T(z(t))A^TC^{-1}Ag(z(t)) \leq \|A\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
-z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) &\leq g^T(z(t-\tau))B^TC^{-1}Bg(z(t-\tau)) \\
&\leq \|B\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$\|B\|_2^2 \leq \|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2$ ve $\|A\|_2^2 \leq \|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T|A^*\|_2$ (Lemma 2) olur. (4.10) ve (4.11) sırasıyla şu şekilde yazılabilir :

$$-z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \leq (\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T|A^*\|_2)\|C^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
&-z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) \\
&\leq (\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)\|C^{-1}\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Ayrıca aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir :

$$\begin{aligned}
&2\alpha g^T(z(t))PBg(z(t-\tau)) \\
&\leq 2\alpha\|P\|_2\|B\|_2\|g(z(t))\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2 \\
&\leq \alpha\|P\|_2\|B\|_2(\|g(z(t))\|_2^2 + \|g(z(t-\tau))\|_2^2) \\
&\leq \alpha\|P\|_2\sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)}\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
&\quad +\alpha\|P\|_2\sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)}\|g(z(t))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
2\alpha g^T(z(t))PAg(z(t)) &= \alpha g^T(z(t))(PA + A^T P)g(z(t)) \\
&\leq \alpha g^T(z(t))(PA^* + A^{*T} P)g(z(t)) \\
&\quad + \alpha g^T(z(t))\|PA_* + A_*^T P\|_2 g(z(t))
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$-2\alpha g^T(z(t))PCz(t) \leq -2\alpha g^T(z(t))PC\Lambda^{-1}z(t) \tag{4.16}$$

(4.12)-(4.16) kullanarak (4.9)'un aşağıdakileri ifade ettiği söylenebilir.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq (\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T|A^*\|_2)\|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 \\
&\quad + (\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)\|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
&\quad - 2\alpha g^T(z(t))PC\Lambda^{-1}g(z(t)) \\
&\quad + \alpha g^T(z(t))(PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2)g(z(t)) \\
&\quad + \alpha \|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)} \|g(z(t))\|_2^2 \\
&\quad + \alpha \|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)} \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
&\quad + \alpha \gamma \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \gamma \|g(z(t-\tau))\|_2^2 + \beta \|g(z(t))\|_2^2 - \beta \|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned}$$

$\beta = (\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)\|\underline{C}^{-1}\|_2$, $\gamma = \|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)}$ ve $\beta_A = (\|A^*\|_2^2 + \|A_*\|_2^2 + 2\|A_*^T|A^*\|_2)\|\underline{C}^{-1}\|_2$ olduğu varsayılınsın Buna göre $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi olur :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq (\beta_A + \beta)\|g(z(t))\|_2^2 - 2\alpha g^T(z(t))PC\Lambda^{-1}g(z(t)) \\
&\quad + \alpha g^T(z(t))(PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2)g(z(t)) \\
&\quad + 2\alpha \|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)} \|g(z(t))\|_2^2
\end{aligned}$$

Bu da aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması anlamına gelir.

$$\dot{V}(z(t)) \leq (\beta_A + \beta)\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha g^T(z(t))\Omega g(z(t))$$

$$\leq (\beta_A + \beta) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \lambda_m(\Omega) \|g(z(t))\|_2^2$$

$\alpha > \frac{\beta_A + \beta}{\lambda_m(\Omega)}$ seçimi, $\dot{V}(z(t))$ 'nin her $g(z(t)) \neq 0$ için negatif tanımlı olmasını garantiler.

Buna göre, $g(z(t)) = 0$ ve $z(t) \neq 0$ ise $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki formda olur :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) - \alpha \gamma g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \\ &\leq -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - \beta \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \end{aligned}$$

$\beta = (\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)\|\underline{C}^{-1}\|_2$ için (4.14) aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$-2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - \beta \|g(z(t-\tau))\|_2^2 \leq 0$$

Bu durumda, $\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)\underline{C}z(t)$ olur. Bu da tüm $z(t) \neq 0$ ve $g(z(t)) = 0$ durumu için $\dot{V}(z(t)) < 0$ anlamına gelir.

$g(z(t)) = 0$ ve $z(t) = 0$ durumu ise

$\dot{V}(z(t)) = -\beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) - \alpha \gamma g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau))$ olması ile sonuçlanır.

Açıkça görülmektedir ki, tüm $g(z(t-\tau)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ negatif tanımlıdır. Bu da, $\dot{V}(z(t))$ değerinin yalnızca $z(t) = g(z(t-\tau)) = g(z(t-\tau)) = 0$ olması durumunda 0'a eşit olması, diğer durumlarda ise negatif olması anlamına gelir.

$$\dot{V}(z(t)) \begin{cases} = 0 & z(t) = g(z(t)) = g(z(t-\tau)) = 0 \\ < 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ olması halinde $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğundan $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Bu, (4.4) sisteminin orijininin global asimtotik kararlı olması anlamına gelir. (4.1) sisteminin global robust kararlılığı [13-15] arasında belirtilen referans çalışmalarda incelenmiştir ve şu sonuçlar türetilmiştir.

Teorem 4.1.2 [13] : $f \in K$ olduğu varsayılınsın. Buna göre, verilen yapay sinir ağı modeli, aşağıdaki şartı sağlayan bir $P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ pozitif diyagonal matrisinin mevcut olması halinde global asimtotik robust kararlıdır.

$$Y = 2PC\underline{\Lambda}^{-1} + S - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I > 0$$

Burada, $\Lambda = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $S = (s_{ij})_{n \times n}$, $s_{ii} = -2p_i \bar{a}_{ii}$, $i \neq j$,
 $s_{ij} = -\max(|p_i \bar{a}_{ij} + p_j \bar{a}_{ji}|)$, $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$ ve $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$ 'dir.

Teorem 4.1.3 [14] : $f \in K$ olduğu varsayılınsın. Buna göre, verilen yapay sinir ağı modeli, aşağıdaki şartı sağlayan bir $P = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ pozitif diyagonal matrisinin mevcut olması halinde global asimtotik robust kararlıdır.

$$\psi = 2PC\underline{\Lambda}^{-1} - PA^* - A^{*T}P - 2\|P\|_2\|A_*\|_2I - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I > 0$$

Burada $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$ ve
 $\Lambda = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ 'dir.

Teorem 4.1.4 [15] : $f \in K$ olduğu varsayılınsın. Buna göre, verilen yapay sinir ağı modeli, aşağıdaki şartı sağlayan α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitlerinin mevcut olması halinde global üstel robust kararlıdır.

$$\alpha_i \left(\frac{c_i}{\mu_i} - \bar{a}_{ii} \right) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j \alpha_{ji}^* - \sum_{j=1}^n \alpha_j b_{ji}^* > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Burada, $\alpha_{ij}^* = \max\{|a_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}$ ve $b_{ij}^* = \max\{|\underline{b}_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$ 'dir.

4.2. NÖTRAL YAPAY SİNİR AĞI MODELLERİ

Bu tez kapsamında yapılan çalışmalarda, biri bölüm 4.1'de ele alınan dinamik yapay sinir ağından elde edilmiş, diğeri bağımsız olmak üzere iki adet nötral sistem modeli incelenmiş ve bu modellerin kararlılık analizi yapılmıştır.

4.2.1. Nötral Yapay Sinir Ağı Modeli - 1

İlk olarak aşağıdaki denklem ile tanımlanmış, nötral yapay sinir ağı sistemi göz önüne alınmıştır [94].

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{x}_j(t - \tau) &= -d_i(x_i) \left[c_i(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) - \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau)) + u_i \right], \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.17)$$

(4.17) denkleminde n , ağdaki nöronların sayısını, x_i , i . nöronun durumunu, $d_i(x_i)$ yükseltgenme fonksiyonları kümesini, $c_i(x_i)$, (4.17) ile belirtilen sistemi sınırlı hale getirecek fonksiyon kümesini, a_{ij} sabiti, ağdaki nöron bağlantılarının büyüklüğünü, b_{ij} sabiti, $\tau(t)$ gecikme parametresi ile birlikte ağdaki nöron bağlantılarının büyüklüğünü, e_{ij} katsayıları, gecikmeli durumların zamana göre türev katsayılarını, $f_j(\cdot)$, nöron aktivasyon fonksiyonlarını ve u_i , bazı haricî girişleri ifade etmektedir.

Söz konusu modelin kararlılık koşullarını elde edebilmek için ilk olarak d_i , c_i ve f_i fonksiyonları hakkında literatürde sıklıkla kullanılan kabulleri vermekte fayda vardır.

A₁: $d_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ fonksiyonları sürekli sınırlı fonksiyonlardır ve $0 < m_i \leq d_i(x) \leq M_i, \forall x \in R$ şartını sağlayan pozitif m_i ve M_i sabitleri mevcuttur.

A₂: $c_i(x)$ fonksiyonları süreklidir ve $0 < \gamma_i \leq \frac{c_i(x) - c_i(y)}{x - y} = \frac{|c_i(x) - c_i(y)|}{|x - y|} \leq \psi_i$, $i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x, y \in R, x \neq y$ şartını sağlayan pozitif γ_i ve ψ_i sabitleri vardır.

A₃: aktivasyon fonksiyonları Lipschitz fonksiyonlarıdır. $|f_i(x) - f_i(y)| \leq L_i |x - y|$, $\forall x, y \in R, x \neq y, i = 1, 2, \dots, n$ şartını sağlayan pozitif $L_i > 0$ sabitleri vardır.

(4.17) ile tanımlanmış nötral sistemin denge noktasının global kararlılığı için yeni yeterli koşullar bulmaya çalışılırken ilk olarak (4.17) sisteminin denge noktası orijine taşınır. $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ 'nin (4.17)'nin bir denge noktasını olduğu varsayalım. Bu durumda $z(t) = x(t) - x^*$ dönüşümü gerçekleştirilerek, x^* denge noktası orijine taşınmış olur. Buna göre (4.17) ile ifade edilen nötral tipteki sistem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{z}_j(t - \tau) &= \alpha_i(z_i(t)) - \left[-\beta_i(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(z_j(t)) + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(z_j(t - \tau)) \right], \quad \forall i \\ (4.18) \end{aligned}$$

Aynı model aşağıdaki kompakt formda da yazılabilir.

$$\dot{z}(t) + E\dot{z}(t - \tau) = \alpha(z(t))[-\beta(z(t)) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau))] \quad (4.19)$$

Bu denklemde,

$$\begin{aligned} z(t) &= [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T, \quad g(z(t)) = [g_1(z_1(t)), g_2(z_2(t)), \dots, g_n(z_n(t))]^T \\ g(z(t - \tau)) &= [g_1(z_1(t - \tau_1)), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n))]^T, \\ \alpha(z(t)) &= \text{diag}(\alpha_1(z_1(t)), \dots, \alpha_n(z_n(t))) \\ \beta(z(t)) &= [\beta_1(z_1(t)), \beta_2(z_2(t)), \dots, \beta_n(z_n(t))]^T, \quad A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad B = (b_{ij})_{n \times n} \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur.

(4.18) sistemi için aşağıdaki eşitlikler de söz konusudur.

$$\begin{aligned} \alpha_i(z_i(t)) &= d_i(z_i(t) + x_i^*), & i &= 1, 2, \dots, n \\ \beta_i(z_i(t)) &= c_i(z_i(t) + x_i^*) - c_i(x_i^*), & i &= 1, 2, \dots, n \\ g_i(z_i(t)) &= f_i(z_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*), & i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

A_1, A_2, A_3 varsayımları, sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} 0 < m_i \leq \alpha_i(z_i(t)) \leq M_i, & \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \gamma_i z_i^2(t) \leq z_i(t) \beta_i(z_i(t)) \leq \psi_i z_i^2(t), & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$|g_i(z_i(t))| \leq L_i |z_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Herhangi bir yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılığı incelenirken denge noktasının istenilen kararlılık özelliklerini sağlayan yeni yeterli koşullar, çoğunlukla incelenen sistemin aktivasyon fonksiyonu ve parametreleri üzerinde farklı varsayımlar yapılarak geliştirilen Lyapunov fonksiyonları kullanılarak elde edilir. Elde edilen koşullar, nöronların bağlantı matrisleri ele alınıp incelenerek test edilir. Matrisler bu testler için kullanıldığında parametre değerlerindeki küçük sapmaların bile test sonucunu etkilediği görülmüştür. Verilen yapay sinir ağı modellerinin bu sapmalardan etkilenmemesi için sistem parametrelerinin, belirli sınırlar arasında olması gereklidir. Buna göre verilen yapay sinir ağı modelinde yer alan matrisler için kullanılan tanım aralıkları aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

Teorem 4.2.1 : (4.18) ile tanımlanan nötral sistem için, $\|E\|_2 < 1$ olduğu varsayalım. Buna göre (4.18) sisteminin orijini, aşağıdaki şartları sağlayan p, \hat{p}, q, \hat{q} pozitif sabitlerinin mevcut olması halinde global asimtotik kararlıdır.

$$\begin{aligned} \epsilon &= (2 - r)m\gamma - (p + q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2 > 0 \\ \Omega &= \epsilon I + L^2\Phi = \epsilon I + L^2 \left(r\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)A^T A - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)B^T B \right) > 0 \end{aligned}$$

Burada $m = \min_{1 \leq i \leq n}(m_i)$, $M = \max_{1 \leq i \leq n}(M_i)$, $\gamma = \min_{1 \leq i \leq n}(\gamma_i)$, $\psi = \max_{1 \leq i \leq n}(\psi_i)$,
 $L = \max_{1 \leq i \leq n}(L_i)$, $\mathcal{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$,
 $\mathcal{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n)$, $0 \leq r \leq 2$ dir.

İspat : $y(t) = z(t) + Ez(t - \tau)$, ve k ile h daha sonra incelenecek bazı pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov Fonksiyonu ele alınsın.

$$V(y(t)) = y^T(t)y(t) + k \int_{t-\tau}^t z^T(s)z(s)ds + h \int_{t-\tau}^t g^T(z(s))B^T Bg(z(s))ds$$

Buna göre, $V(y(t))$ 'nin sistemdeki yörüngelere göre zamana göre türevi şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{V}(y(t)) &= 2y^T(t)\dot{y}(t) + kz^T(t)z(t) - kz^T(t-\tau)z(t-\tau) + hg^T(z(t))B^T Bg(z(t)) \\ &\quad - hg^T(z(t-\tau))B^T Bg(z(t-\tau))\end{aligned}$$

$$\dot{y}(t) = \dot{z}(t) + E\dot{z}(t-\tau) = \alpha(z(t))[-\beta(z(t)) + Ag(z(t)) + Bg(z(t-\tau))]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\dot{V}(y(t)) &= 2[z^T(t) + z^T(t-\tau)E^T]\alpha(z(t))[-\beta(z(t)) + Ag(z(t)) + Bg(z(t-\tau))] \\ &\quad + kz^T(t)z(t) - kz^T(t-\tau)z(t-\tau) + hg^T(z(t))B^T Bg(z(t)) \\ &\quad - hg^T(z(t-\tau))B^T Bg(z(t-\tau)) \\ &= -2z^T(t)\alpha(z(t))\beta(z(t)) + 2z^T(t)\alpha(z(t))Ag(z(t)) + 2z^T(t)\alpha(z(t))Bg(z(t-\tau)) \\ &\quad - 2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))\beta(z(t)) + 2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))Ag(z(t)) \\ &\quad + 2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))Bg(z(t-\tau)) + kz^T(t)z(t) - kz^T(t-\tau)z(t-\tau) \\ &\quad + hg^T(z(t))B^T Bg(z(t)) - hg^T(z(t-\tau))B^T Bg(z(t-\tau))\end{aligned}$$

yazılabilir.

Ayrıca aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned}-2z^T(t)\alpha(z(t))\beta(z(t)) &= -2\sum_{i=1}^n \alpha_i(z_i(t))\beta_i(z_i(t))z_i(t) \leq -2\sum_{i=1}^n m_i\gamma_i z_i^2(t) \\ &= -(2-r)\sum_{i=1}^n m_i\gamma_i z_i^2(t) - r\sum_{i=1}^n m_i\gamma_i z_i^2(t) \\ &\leq -(2-r)\sum_{i=1}^n m\gamma z_i^2(t) - r\sum_{i=1}^n \frac{m_i\gamma_i}{L_i^2} g_i^2(z_i(t)) \\ &= (2-r)m\gamma\|z(t)\|_2^2 - rg^T(z(t))\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2}g(z(t)), \quad 0 \leq r \leq 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))\beta(z(t)) &\leq 2\|z(t-\tau)\|_2\|E\|_2\|\alpha(z(t))\|_2\|\beta(z(t))\|_2 \\ &\leq 2M\psi\|E\|_2\|z(t)\|_2\|z(t-\tau)\|_2 \\ &\leq M\psi\|E\|_2(\|z(t)\|_2^2 + \|z(t-\tau)\|_2^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2z^T(t)\alpha(z(t))Ag(z(t)) &\leq pz^T(t)\alpha(z(t))\alpha(z(t))z(t) + \frac{1}{p}g^T(z(t))A^T Ag(z(t)) \\ &\leq pM^2\|z(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}g^T(z(t))A^T Ag(z(t))\end{aligned}$$

$$2z^T\alpha(z(t))Bg(z(t-\tau)) \leq qz^T(t)\alpha(z(t))\alpha(z(t))z(t) + \frac{1}{q}g^T(z(t-\tau))B^T Bg(z(t-\tau))$$

$$\begin{aligned}
&\leq qM^2\|z(t)\|_2^2 + \frac{1}{q}g^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau)) \\
2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))Ag(z(t)) \\
&\leq \hat{p}z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))\alpha(z(t))Ez(t-\tau) + \frac{1}{\hat{p}}g^T(z(t))A^TAg(z(t)) \\
&\leq \hat{p}\|E\|_2^2M^2\|z(t-\tau)\|_2^2 + \frac{1}{\hat{p}}g^T(z(t))A^TAg(z(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))Bg(z(t-\tau)) \\
&\leq \hat{q}z^T(t-\tau)E^T\alpha(z(t))\alpha(z(t))Ez(t-\tau) + \frac{1}{\hat{q}}g^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau)) \\
&\leq \hat{q}\|E\|_2^2M^2\|z(t-\tau)\|_2^2 + \frac{1}{\hat{q}}g^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau))
\end{aligned}$$

[18]'teki yukarıdaki eşitsizlikler aşağıdaki eşitsizlikler ile sonuçlanır :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y(t)) &\leq -(2-r)m\gamma\|z(t)\|_2^2 - rg^T(z(t))\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2}g(z(t)) + pM^2\|z(t)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{p}g^T(z(t))A^TAg(z(t)) + qM^2\|z(t)\|_2^2 + \frac{1}{q}g^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau)) \\
&\quad + M\psi\|E\|_2\|z(t)\|_2^2 + M\psi\|E\|_2\|z(t-\tau)\|_2^2 + \hat{p}\|E\|_2^2M^2\|z(t-\tau)\|_2^2 \\
&\quad + \hat{q}\|E\|_2^2M^2\|z(t-\tau)\|_2^2 + \frac{1}{\hat{q}}g^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau)) + k\|z(t)\|_2^2 \\
&\quad - k\|z(t-\tau)\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{\hat{p}}g^T(z(t))A^TAg(z(t)) + hg^T(z(t))B^TBg(z(t)) - hg^T(z(t-\tau))B^TBg(z(t-\tau))
\end{aligned}$$

$h = \frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}$ seçimi, eşitsizlikleri aşağıdaki hale getirir.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y(t)) &\leq -((2-r)m\gamma - pM^2 - qM^2 - M\psi\|E\|_2)\|z(t)\|_2^2 - rg^T(z(t))\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2}g(z(t)) \\
&\quad + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)g^T(z(t))A^TAg(z(t)) \\
&\quad + (M\psi\|E\|_2 + \hat{p}\|E\|_2^2M^2 + \hat{q}\|E\|_2^2M^2 - k)\|z(t-\tau)\|_2^2 \\
&\quad + k\|z(t)\|_2^2 + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)g^T(z(t))B^TBg(z(t))
\end{aligned}$$

$k = M\psi\|E\|_2 + (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2$ seçimi, aşağıdaki denklem ve eşitsizlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(y(t)) &\leq -\left((2-r)m\gamma - (p+q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2\right)\|z(t)\|_2^2 \\
&\quad -g^T(z(t))\left(r\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)A^T A - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)B^T B\right)g(z(t)) \\
&= \epsilon\|z(t)\|_2^2 - g^T(z(t))\Phi g(z(t)) \leq -\frac{\epsilon}{L^2}\|g(z(t))\|_2^2 - g^T(z(t))\Phi g(z(t)) \\
&= -\frac{1}{L^2}\left(\epsilon g^T(z(t))g(z(t)) + g^T(z(t))L^2\Phi g(z(t))\right) = -\frac{1}{L^2}g^T(z(t))\Omega g(z(t))
\end{aligned}$$

Açık olarak görülmektedir ki tüm $g(z(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(y(t)) < 0$ 'dır. $g(z(t)) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(y(t)) < -\epsilon\|z(t)\|_2^2$ her $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(y(t)) < 0$ olmasını sağlamaktadır.

$\|E\|_2 < 1$ kabul edildiğinden, $y(t) = z(t) + Ez(t - \tau)$ kararlıdır [49]. Bununla birlikte, $z(t)$, 0'a asimtotik olarak dönüşür [44, 50], bu da (4.17) nötral sisteminin denge noktasının asimtotik kararlı olması anlamına gelir. Kararlılık analizi için kullanılan Lyapunov fonksiyonu radyal sınırsız olduğundan, (4.17)'deki nötral sistemin denge noktası global asimtotik kararlı olduğu sonucuna da varılabilir.

Teorem 4.2.2 : Teorem 4.2.1'in özel bir durumunu ele alan bir teorem şu şekilde ifade edilebilir :

(4.18) ile tanımlanan nötral sistemde, $\|E\|_2 < 1$ varsayalım. Bu durumda, (4.18) sisteminin orijini, aşağıdaki şartları sağlayan p, \hat{p}, q, \hat{q} pozitif sabitlerinin mevcut olması halinde global asimtotik kararlıdır.

$$\begin{aligned}
\epsilon &= (2-r)m\gamma - (p+q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2 > 0 \\
\Phi &= r\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)A^T A - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)B^T B \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Burada } m &= \min_{1 \leq i \leq n}(m_i), \quad M = \max_{1 \leq i \leq n}(M_i), & \gamma &= \min_{1 \leq i \leq n}(\gamma_i), \\
\psi &= M = \max_{1 \leq i \leq n}(\psi_i), \quad L = \max_{1 \leq i \leq n}(L_i), & \mathcal{M} &= \text{diag}(m_1, \dots, m_n), \\
\Gamma &= \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n), & \mathcal{L} &= \text{diag}(L_1, L_2, \dots, L_n)
\end{aligned}$$

$0 \leq r \leq 2$ 'dir.

İspat : Teorem 4.2.2'nin ispatı, direkt olarak $\epsilon > 0$ ve $\Phi \geq 0$ olmasını sağlayan $\Omega = \epsilon I + L^2 \Phi > 0$ eşitliği ile elde edilir.

[44]'de verilen kararlılık sonuçlarının, Teorem 4.2.1'de verilen sonuçların özel bir durumu olduğunu gösterebilmek amacıyla aşağıdaki teorem incelenmiştir.

Teorem 4.2.3 [44]: (4.18) ile tanımlanan nötral sistem için, $\|E\|_2 < 1$ varsayalım. Buna göre (4.18)'deki sistemin orijini, aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda global asimtotik kararlıdır.

$$\delta = m\gamma - LM\|A\|_2(1 + \|E\|_2) - LM\|B\|_2(1 + \|E\|_2) - M\psi\|E\|_2 > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Burada } m &= \min_{1 \leq i \leq n}(m_i), & M &= \max_{1 \leq i \leq n}(M_i), & \gamma &= \min_{1 \leq i \leq n}(\gamma_i), \\ \psi &= M = \max_{1 \leq i \leq n}(\psi_i), & L &= \max_{1 \leq i \leq n}(L_i) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Teorem 4.2.1'deki p, \hat{p}, q, \hat{q} değerlerinin bazı özel seçimlerinin Teorem 4.2.3'ü direkt olarak sağladığı gösterilsin. Teorem 4.2.1'deki Ω aşağıdaki denklem ve eşitsizlikleri sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} \Omega &= ((2-r)m\gamma - (p+q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2)I \\ &\quad + L^2 \left(r\mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)A^T A - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)B^T B \right) \\ &\geq \left((2-r)m\gamma - (p+q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2 + rm\gamma - L^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right) \|A\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. - L^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right) B^T B \right) \\ &= \left(2m\gamma - (p+q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2 + L^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right) \|A\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. - L^2 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right) \|B\|_2^2 \right) I \end{aligned}$$

p, q, \hat{p}, \hat{q} değerlerini aşağıdaki gibi olsun :

$$p = \frac{L\|A\|_2}{M}, \quad q = \frac{L\|B\|_2}{M}, \quad \hat{p} = \frac{L\|A\|_2}{M\|E\|_2}, \quad \hat{q} = \frac{L\|B\|_2}{M\|E\|_2}$$

Bu durumda aşağıdaki denklemler ve eşitsizlikler elde edilir :

$$\begin{aligned} \Omega &> \left(2m\gamma - \left(\frac{L\|A\|_2}{M} + \frac{L\|B\|_2}{M}\right)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - \left(\frac{L\|A\|_2}{M\|E\|_2} + \frac{L\|B\|_2}{M\|E\|_2}\right)M^2\|E\|_2^2\right. \\ &\quad \left. - L^2\left(\frac{M}{L\|A\|_2} + \frac{M\|E\|_2}{L\|A\|_2}\right)\|A\|_2^2 - L^2\left(\frac{M}{L\|B\|_2} + \frac{M\|E\|_2}{L\|B\|_2}\right)\|B\|_2^2\right)I \\ &= 2(m\gamma - LM\|A\|_2(1 + \|E\|_2) - LM\|B\|_2(1 + \|E\|_2) - M\psi\|E\|_2)I = 2\delta I. \end{aligned}$$

Yukarıdaki p, q, \hat{p}, \hat{q} değerlerine ek olarak $r = 0$ değeri ele alındığında, Teorem 4.2.1'deki ϵ , aşağıdaki formu alır :

$$\begin{aligned} \epsilon &= (2 - r)m\gamma - (p + q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})M^2\|E\|_2^2 \\ &= 2m\gamma - \left(\frac{L\|A\|_2}{M} + \frac{L\|B\|_2}{M}\right)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - \left(\frac{L\|A\|_2}{M\|E\|_2} + \frac{L\|B\|_2}{M\|E\|_2}\right)M^2\|E\|_2^2 \\ &= 2m\gamma - LM\|A\|_2(1 + \|E\|_2) - LM\|B\|_2(1 + \|E\|_2) - 2M\psi\|E\|_2 \\ &= 2\delta + LM\|A\|_2(1 + \|E\|_2) + LM\|B\|_2(1 + \|E\|_2) \end{aligned}$$

$\delta > 0$ 'ın $\Omega > 0$ ve $\epsilon > 0$ olmasını sağladığı açıktır. Buna göre, Teorem 4.2.3'ün, Teorem 4.2.1'de elde edilen sonuçların özel bir hali olduğu gösterilmiş olur.

4.2.2. Nötral Yapay Sinir Ağı Modeli – 2

Doktora tez çalışmamızda ele alınan ikinci nötral model şu şekildedir [95]:

$$\dot{x}_i(t) = a_i x_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{x}_j(t - \tau_j) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.20)$$

(4.20) denkleminde n , ağdaki nöron sayısını, x_i , i . nöronun durumu, a_i , (4.20) denklemini sınırlı hale getiren bazı sabitler, w_{ij} , $\tau_j(t)$ gecikme parametresi ile nöron bağlantılarının genişliğini ifade eden sabitler, e_{ij} , gecikmeli durumların

zamana göre türev katsayıları, $f_j(\cdot)$ nöron aktivasyon fonksiyonları, u_i , bazı harici giriş sabitleri anlamına gelmektedir.

Öncelikle söz konusu modelin kararlılık koşullarını elde edebilmek için faydalı olabileceği düşünülen bazı bilgiler verilsin :

- $\tau_j \geq 0$, $\tau = \max(\tau_j)$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere gecikme parametresini vermektedir.
- Söz konusu sistem $C([- \tau, 0], R)$, $[- \tau, 0]$ 'dan R 'ye tüm sürekli fonksiyonların bir kümesi olacak şekilde $x_i(t) = \phi_i(t) \in C([- \tau, 0], R)$ 'nin bir başlangıç durumudur.
- Söz konusu sistemi incelemek için $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$ aktivasyon fonksiyonlarının birer Lipschitz süreklisi olduğu kabul edilmektedir. Yani $|f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|$, $i = 1, 2, \dots, n \forall x, y \in R$, $x \neq y$ şartını sağlayan $l_i > 0$ sabitleri vardır.

Sistemin $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ denge noktasının global robust kararlılığını kanıtlamak için, ilk olarak (4.20) sistemi şu şekilde sadeleştirilir :

$$z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ olsun.}$$

$z_i(\cdot)$ 'ler de

$$\dot{z}_i(t) = -a_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ij} g_j(z_j(t - \tau_j)) + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{z}_j(t - \tau_j), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.21)$$

'den türetilmiştir.

Burada

$$g_i(z_i(\cdot)) = f_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - f_i(x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ dir.}$$

g_i fonksiyonlarının f_i fonksiyonlarındaki varsayımları sağladığı, örneğin $|g_i(z_i(t))| \leq l_i |z_i(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$ olduğu kolayca doğrulanabilir.

Ayrıca $g_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

Bu, (4.20) sisteminin x^* noktası yerine dönüştürülmüş (4.21) sisteminin orijininin kararlılığını kanıtlamak için yeterlidir.

(4.21) sistemi aşağıdaki kompakt forma sokulabilir :

$$\dot{z}(t) = -Az(t) + Wg(z(t - \tau)) + E\dot{z}(t - \tau)$$

Burada $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T$ dönüştürülmüş durum vektörüdür.

Bunun dışında, $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $W = (w_{ij})_{n \times n}$, $E = (e_{ij})_{n \times n}$

$g(z(t - \tau)) = [g_1(z_1(t - \tau_1)), g_2(z_2(t - \tau_2)), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n))]^T$, olduğu görülebilir.

$g_i(z_i(t)) = f_i(z_i(t) + x_i^*) - f_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 'dir.

Ayrıca $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in R^n$ ve $Q = (q_{ij})_{n \times n}$ olduğu takdirde $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ ve

$\|Q\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(Q^T Q)}$ olduğunu söyleyebiliriz.

Buna göre verilen modelin kararlılık analizi aşağıdaki gibi yapılmıştır.

Teorem 4.2.4 :

(4.21) sisteminin orijini, $\theta = A^2 \mathcal{L}^{-2} - 2W^T W > 0$ ve $\Omega = I - 2E^T E > 0$ şartlarının sağlanması halinde global asimtotik karardır.

Burada $\mathcal{L} = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ 'dir ve I , $n \times n$ boyutlu birim matrisi ifade etmektedir.

İspat :

Aşağıdaki pozitif Lyapunov fonksiyonunu tanımlayalım.

$$V(z(t)) = \sum_{i=1}^n a_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t a_i^2 z_i^2(s) ds + \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t \dot{z}_i^2(s) ds$$

$V(z(t))$ zaman türevi şu şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= \sum_{i=1}^n 2a_i z_i(t) \dot{z}_i(t) + \sum_{i=1}^n a_i^2 z_i^2(t) - \sum_{i=1}^n a_i^2 z_i^2(t - \tau_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \dot{z}_i^2(t) - \sum_{i=1}^n \dot{z}_i^2(t - \tau_i) \\ &= 2\dot{z}^T(t)Az(t) + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t - \tau)A^2z(t - \tau) \\ &\quad + \dot{z}^T(t)\dot{z}(t) - \dot{z}^T(t - \tau)\dot{z}(t - \tau) \end{aligned}$$

Bu da şu şekilde yeniden yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= \\ \dot{z}^T(t)[2Az(t) + \dot{z}(t)] + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \\ \dot{z}(t) &= -Az(t) + Wg(z(t-\tau)) + E\dot{z}(t-\tau) \text{ olduğundan } \dot{V}(z(t)) \text{ şu hale gelir :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= \dot{z}^T(t)[2Az(t) - Az(t) + Wg(z(t-\tau)) + E\dot{z}(t-\tau)] \\ &\quad + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \\ &= \dot{z}^T(t)[Az(t) + Wg(z(t-\tau)) + E\dot{z}(t-\tau)] \\ &\quad + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \\ &= [-Az(t) + Wg(z(t-\tau)) + E\dot{z}(t-\tau)]^T [Az(t) + Wg(z(t-\tau)) + E\dot{z}(t-\tau)] \\ &\quad + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \\ &= -z^T(t)A^2z(t) - z^T(t)AWg(z(t-\tau)) - z^T(t)AE\dot{z}(t-\tau) \\ &\quad + g^T(z(t-\tau))W^T Az(t) + g^T(z(t-\tau))W^T Wg(z(t-\tau)) \\ &\quad + g^T(z(t-\tau))W^T E\dot{z}(t-\tau) + \dot{z}^T(t-\tau)E^T Az(t) \\ &\quad + \dot{z}^T(t-\tau)E^T Wg(z(t-\tau)) + \dot{z}^T(t-\tau)E^T E\dot{z}(t-\tau) \\ &\quad + z^T(t)A^2z(t) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \end{aligned}$$

Aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} z^T(t)AWg(z(t-\tau)) &= g^T(z(t-\tau))W^T Az(t), \quad z^T(t)AE\dot{z}(t-\tau) = \dot{z}^T(t-\tau)E^T Az(t) \\ g^T(z(t-\tau))W^T E\dot{z}(t-\tau) &= \dot{z}^T(t-\tau)E^T Wg(z(t-\tau)) \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemleri kullanarak $\dot{V}(z(t))$ şu şekilde sonuçlanır :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= g^T(z(t-\tau))W^T Wg(z(t-\tau)) + 2g^T(z(t-\tau))W^T E\dot{z}(t-\tau) \\ &\quad + \dot{z}^T(t-\tau)E^T E\dot{z}(t-\tau) - z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \quad (4.22) \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz :

$$\begin{aligned} 2g^T(z(t-\tau))W^T E\dot{z}(t-\tau) &\leq g^T(z(t-\tau))W^T Wg(z(t-\tau)) + \dot{z}^T(t-\tau)E^T E\dot{z}(t-\tau) \\ z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau) &= \sum_{i=1}^n a_i^2 z_i^2(t-\tau) \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{l_i^2} g_i^2 z_i(t-\tau) \\ &= g^T(z(t-\tau))A^2 \mathcal{L}^{-2} g(z(t-\tau)) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikleri kullanarak (4.22) aşağıdaki gibi olur :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &\leq g^T(z(t-\tau))W^TWg(z(t-\tau)) + g^T(z(t-\tau))W^TWg(z(t-\tau)) + g^T \\
&\quad + \dot{z}^T(t-\tau)E^TE\dot{z}(t-\tau) + \dot{z}^T(t-\tau)E^TE\dot{z}(t-\tau) \\
&\quad - g^T(z(t-\tau))A^2\mathcal{L}^{-2}g(z(t-\tau)) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \\
&= g^T(z(t-\tau))(A^2\mathcal{L}^{-2} - W^TW - W^TW)g(z(t-\tau)) \\
&\quad - \dot{z}^T(t-\tau)(I - E^TE - E^TE)\dot{z}(t-\tau) \\
&= -g^T(z(t-\tau))\Theta g(z(t-\tau)) - \dot{z}^T(t-\tau)\Omega\dot{z}(t-\tau)
\end{aligned}$$

$\Theta > 0$ ve $\Omega > 0$, her $g(z(t-\tau)) \neq 0$ veya $\dot{z}(t-\tau) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmasını sağlar. $g(z(t-\tau)) = 0$ ve $\dot{z}(t-\tau) = 0$ olsun. Bu durumda $\dot{V}(z(t))$ şu formdadır :

$$\dot{V}(z(t)) = -z^T(t-\tau)A^2z(t-\tau)$$

Bu da direkt olarak her $z(t-\tau) \neq 0$ durumu için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olması ile devam eder.

Şimdi yalnızca denge noktasında sağlanan $g(z(t-\tau)) = \dot{z}(t-\tau) = z(t-\tau) = 0$ kabul edelim.

Bu durumda her $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ ve sadece $z(t) = 0$ 'da $\dot{V}(z(t)) = 0$ 'ı sağlayan $\dot{V}(z(t)) = 0$ şartı sağlanır.

Diğer taraftan $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olur. Bu da kararlılık analizi için kullanılan Lyapunov fonksiyonunun radyal sınırsız olduğu anlamına gelir.

Bu da standart Lyapunov teoremleri sayesinde (4.21) sisteminin orijinin veya denk olarak (4.20) sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlı olduğu ile sonuçlanır.

Teorem 4.2.4'ün özel bir durumu aşağıdaki teoremde ele alınır :

(4.21) sisteminin orijini aşağıdaki şartların sağlanması halinde global asimtotik kararlı olur.

$$\|W\|_2 < \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \|E\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Burada $\gamma = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{l_i}$ dir.

Teorem 4.2.4'ün ispatı direkt olarak $\|W\|_2 < \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$ 'nin $\theta > 0$ ve $\|E\|_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 'nin $\Omega > 0$ şartlarını sağlaması gerçeği ile devam eder.

(4.20) ile tanımlanan sistem için alternatif bir kararlılık koşulu aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2.5:

(4.21) sisteminin orijini, aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif bir $k < 1$ sabitinin bulunması halinde global asimtotik kararlıdır.

$$\Phi = A^2 \mathcal{L}^{-2} - W^T W - \frac{1}{k} W^T E E^T W > 0 \text{ ve } \Phi = (1 - k)I - E^T E > 0$$

Burada $\mathcal{L} = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ 'dir.

İspat :

Teorem 4.2.4'ün ispatında kullanılan $V(z(t))$ Lyapunov fonksiyonunun şu eşitsizliği sağladığını not alalım:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq g^T(z(t - \tau))W^T W g(z(t - \tau)) + 2g^T(z(t - \tau))W^T E \dot{z}(t - \tau) \\ &\quad + \dot{z}^T(t - \tau)E^T E \dot{z}(t - \tau) - \dot{z}^T(t - \tau)\dot{z}(t - \tau) - g^T(z(t - \tau))A^2 \mathcal{L}^{-2} g(z(t - \tau)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Herhangi bir pozitif k sabiti için, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz :

$$2g^T(z(t - \tau))W^T E \dot{z}(t - \tau) \leq \frac{1}{k} g^T(z(t - \tau))W^T E E^T W g(z(t - \tau)) + k \dot{z}^T(t - \tau)\dot{z}(t - \tau)$$

(4.23)'teki eşitsizliklerden, şunlar elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq g^T(z(t - \tau))W^T W g(z(t - \tau)) + \frac{1}{k} g^T(z(t - \tau))W^T E E^T W g(z(t - \tau)) \\ &\quad + k \dot{z}^T(t - \tau)\dot{z}(t - \tau) + \dot{z}^T(t - \tau)E^T E \dot{z}(t - \tau) \\ &\quad - g^T(z(t - \tau))A^2 \mathcal{L}^{-2} g(z(t - \tau)) - \dot{z}^T(t - \tau)\dot{z}(t - \tau) \\ &\quad - g^T(z(t - \tau)) \left(A^2 \mathcal{L}^{-2} - W^T W - \frac{1}{k} W^T E E^T W \right) g(z(t - \tau)) \\ &\quad - g^T(z(t - \tau))\Phi g(z(t - \tau)) - \dot{z}^T(t - \tau)\psi \dot{z}(t - \tau) \end{aligned}$$

$\Phi > 0$ ve $\psi > 0$ sonucu ve ardından (4.21) sisteminin orijini veya denk olarak (4.20) sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlı olması ile sonuçlanır.

Teorem 4.2.5'ün özel bir durumu aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir :

(4.21) sisteminin orijini, aşağıdaki şartı sağlayan pozitif bir $k < 1$ sabiti olması durumunda global asimtotik kararlıdır :

$$\|W\|_2^2 \left(1 + \frac{1}{k} \|E\|_2^2\right) < \gamma^2 \quad \text{ve} \quad \|E\|_2^2 < 1 - k$$

Burada $\gamma = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{l_i}$ dir.

Teorem 4.2.5'in ispatı, $\|W\|_2^2 \left(1 + \frac{1}{k} \|E\|_2^2\right) < \gamma^2$ 'nin $\Phi > 0$ ve $\|E\|_2^2 < 1 - k$ 'nin $\psi > 0$ sağlanması ile devam eder.

Nötral tipteki gecikmeli YSA için son kararlılık sonucu aşağıdaki teoremden sunulmaktadır.

Teorem 4.2.6 :

(4.21) sisteminin orijini, aşağıdaki şartı sağlayan pozitif bir r sabiti olması halinde global asimtotik kararlı olur :

$$\alpha = \gamma^2 - \|W\|_2^2 - \frac{1}{r} \|W\|_2 \|E\|_2 > 0 \quad \text{ve} \quad \beta = 1 - \|E\|_2^2 - r \|W\|_2 \|E\|_2 > 0$$

Burada $\gamma = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{a_i}{l_i}\right)$ dir.

(4.23) ile verilen Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevini ele alalım.

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq g^T(z(t-\tau))W^T W g(z(t-\tau)) + 2g^T(z(t-\tau))W^T E \dot{z}(t-\tau) \\ &\quad + \dot{z}^T(t-\tau)E^T E \dot{z}(t-\tau) - g^T(z(t-\tau))A^2 \mathcal{L}^{-2} g(z(t-\tau)) - \dot{z}^T(t-\tau)\dot{z}(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Bu da şu şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \|W\|_2^2 \|g(z(t-\tau))\|_2^2 + 2\|W\|_2 \|E\|_2 \|\dot{z}(t-\tau)\|_2 \|g(z(t-\tau))\|_2 \\ &\quad + \|E\|_2^2 \|\dot{z}(t-\tau)\|_2^2 - \gamma^2 \|g(z(t-\tau))\|_2^2 - \|\dot{z}(t-\tau)\|_2^2 \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$2\|\dot{z}(t - \tau)\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2 \leq \frac{1}{r} \|g(z(t - \tau))\|_2^2 + r\|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2$$

Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak sistem şu hale gelir.

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \|W\|_2^2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2 + \|W\|_2 \|E\|_2 \left(\frac{1}{r} \|g(z(t - \tau))\|_2^2 + r\|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2 \right) \\ &\quad + \|E\|_2^2 \|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2 - \gamma^2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2 - \|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2 \\ &= - \left(\gamma^2 - \|W\|_2^2 - \frac{1}{r} \|W\|_2 \|E\|_2 \right) \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \\ &\quad - (1 - \|E\|_2^2 - r\|W\|_2 \|E\|_2) \|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2 \\ &= -\alpha \|g(z(t - \tau))\|_2^2 - \beta \|\dot{z}(t - \tau)\|_2^2 \end{aligned}$$

Bu da $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ ise (4.21) sisteminin orijini veya denk olarak (4.20) sisteminin denge noktasının global asimtotik kararlı olması anlamına gelir.

Basit ve uygun bir Lyapunov fonksiyonu kullanarak, ayırık zaman gecikmeli nötral tipli bir YSA sınıfının global asimtotik kararlı olduğunu tahmin etmek için yeni gecikmeden-bağımsız yeterli koşullar türettik. Yakın geçmişte literatürde, pek çok araştırmacı, nötral tipli YSA'ların kararlılık özelliğini incelemiş ve denge noktasının global asimtotik kararlılığı için birçok yeterli koşul elde edilmiştir.

Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar, LMI formunda ifade edilebilir. Nötral tipli YSA'ların kararlılık problemi için LMI yaklaşımı, ağ parametrelerindeki sınırlı koşulları belirlemede bazı zorluklarla karşılaşılır çünkü yüksek boyutlu matrislerin test edilmesi gerecektir. Bununla birlikte, bu çalışmada elde edilen sonuçlar, yalnız ağ parametreleri arasında farklı ilişkiler kurmaktadır. Bu yüzden, bu çalışmanın sonucu önceki literatür sonuçları ile karşılaştırıldığında kolayca doğrulanabilir.

5. BULGULAR

Bu bölümde, verilen yapay sinir ağ modelleri için elde edilen kararlılık sonuçları, detaylı analizleri yapılarak değerlendirilmiş ve elde edilen sonuçlar daha önceden literatürde elde edilmiş olan diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca analizler sayısal örneklerle desteklenmiş ve bu örneklerin MATLAB programında simülasyonları gerçekleştirilmiştir. Bu sayede elde edilen sayısal aralık değerlerinin sistemin kararlılığını sağladığı, aralık dışında kalan değerlerin sistemi kararsız bir hale getirdiği ispatlanmaya ve gösterilmeye çalışılmıştır.

5.1. GENEL YSA MODELİ İLE İLGİLİ SİMÜLASYON

Öncelikle 4.1. bölümünde incelenen dinamik yapay sinir ağ modeli ele alınmış ve bu model ile ilgili örnekler ve simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

İlk olarak (4.1) denklemleri ile verilen gecikmeli yapay sinir ağı modelini hatırlatmakta fayda vardır.

(4.1) ile verilen sistem

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde idi.

Burada, n nöron sayısını, $x_i(t)$ i . nöronun t anındaki durumunu, $f_i(\cdot)$ aktivasyon fonksiyonlarını, a_{ij} ve b_{ij} sırasıyla t ve $t - \tau_j$ anlarında j . ve i . nöronlar arasındaki bağlantıları, τ_j j . nöronun i . nörona bir sinyal gönderirken ihtiyaç duyulan zaman gecikmesini, u_i sabit girdileri, c_i i . nöronun yüklenme hızını ifade etmekteydi.

Buna göre (4.1) ile tanımlanan yapay sinir ağının ağ parametreleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 2a & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = C = \bar{C} = \Lambda = I$$

Burada $a > 0$ gerçel bir sayı olsun. Buna göre A^*, A_*, B^*, B_* matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_* = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_* = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

Ayrıca $\|B^*\|_2 = a$, $\|B_*\|_2 = 2a$, $\|B_*^T|B^*\|_2 = \sqrt{2}a^2$ ve $\sqrt{\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2} \cong 2.8a$ olur.

Bu değerler eşliğinde verilen teoremlerdeki bileşenler ve koşullar aşağıdaki gibi şekillenir :

Teorem 4.1'e göre

$$\Omega = 2P\underline{C}\Lambda^{-1} - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2 \sqrt{(\|B^*\|_2^2 + \|B_*\|_2^2 + 2\|B_*^T|B^*\|_2)} I > 0$$

olması, modelin tek ve global asimtotik robust kararlı bir denge noktası olmasını garantilemekteydi.

Örnekte verilen değerlere göre $\Omega = \begin{bmatrix} 2 - 9.6a & 0 \\ 0 & 2 - 9.6a \end{bmatrix}$ haline gelir. Dolayısıyla kararlılık analizi bu matrisi pozitif tanımlı hale getiren (veya getirmeyen) bir a değeri bulunarak gerçekleştirilir.

Gerekli işlemler gerçekleştirildikten sonra buradaki a 'nın $\frac{2}{9.6} = \frac{1}{4.8}$ 'den küçük (büyük) olmasının $\Omega > 0$ ($\Omega < 0$) olmasını sağladığı görülür. Diğer bir deyişle $a < \frac{1}{4.8}$ sağlayan değerler, modelin tek ve global asimtotik robust kararlı bir denge noktası olmasını garantilemektedir.

Bununla ilgili bir simülasyon aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir.

Bu simülasyonda,

$c : 1$,

nöron sayısı : 2,

başlangıç noktaları : [0.5 0.5]

gecikme değeri : 1,5

aktivasyon fonksiyonu : piece-wise aktivasyon fonksiyonu alınmıştır.

Kararlı ve kararsız durumları gösterebilmek için iki adet a değeri seçilir ve bu a değerine göre iki adet A matrisi şekillenir.

a değerlerinden biri $a < \frac{1}{4.8}$, diğeri $a > \frac{1}{4.8}$ sağlamalıdır.

Buna uygun olarak örneğin $a = \frac{1}{5}$ ve $a = 1$ alınabilir ve A matrislerinin de bu şekilde oluşturulması sağlanabilir.

$$a = \frac{1}{5} \longrightarrow A = \underline{A} = \begin{bmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

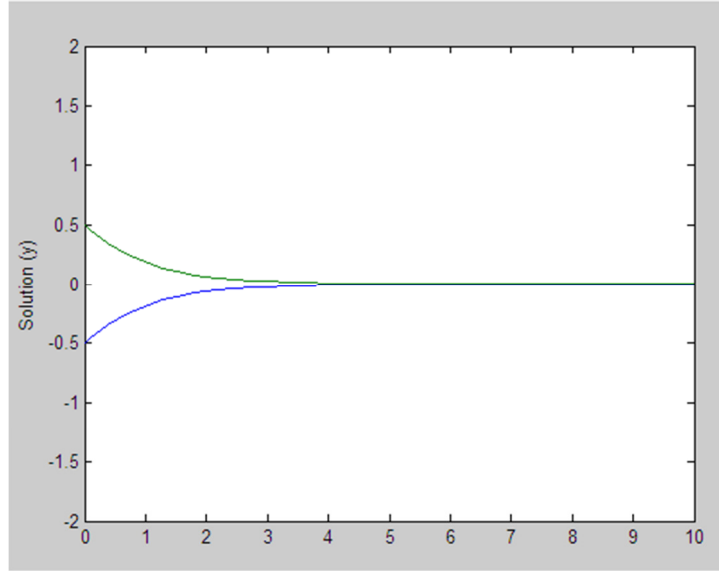
(teoreme göre kararlılık ifade etmesi gereken değerler) ve

$$a = 1 \longrightarrow A = \underline{A} = \begin{bmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{teoreme göre kararsızlık ifade}$$

etmesi gereken değerler) olarak alınsın.

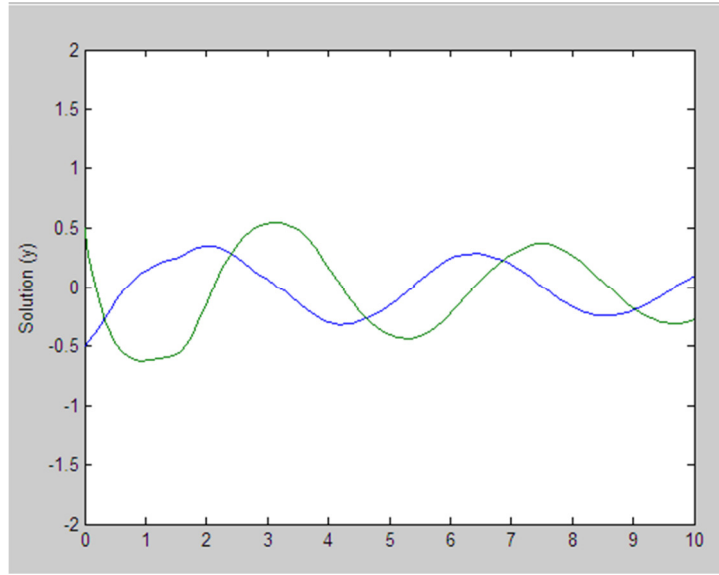
Bu iki a değerine göre MATLAB ile gerçekleştirilen simülasyonlar şu şekildedir :

$a = 1/5$ için



Şekil 5.1: $a = 1/5$, $c = 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1$ için

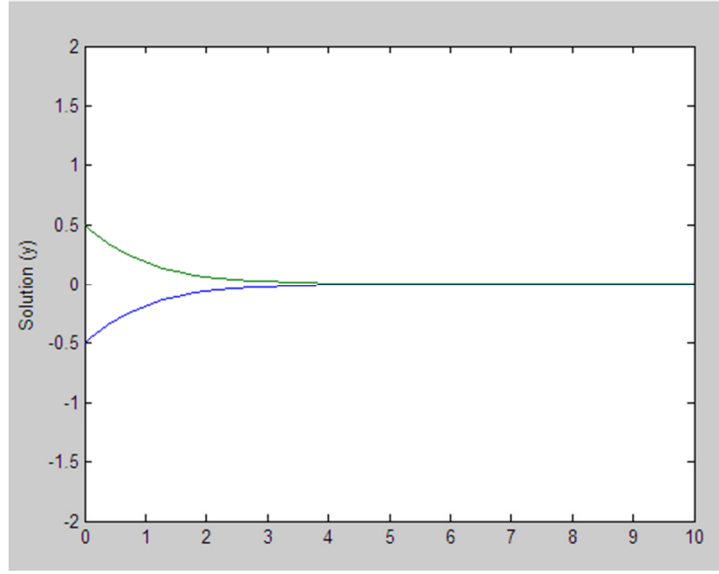


Şekil 5.2: $a = 1$, $c = 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

Şekillere bakıldığında a değerine göre modelin kararlılığının değişimi görülebilir.

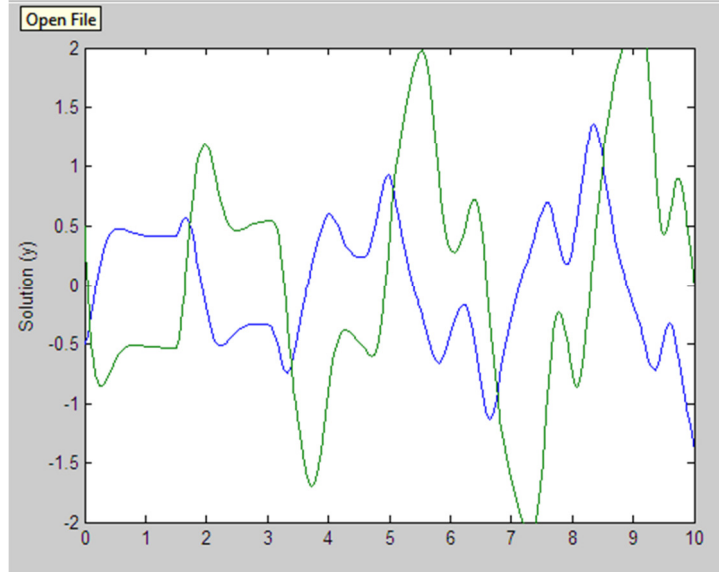
Modeli oluşturan denklemdeki c , aktivasyon fonksiyonu gibi parametrelerden herhangi biri değiştirildiğinde, örneğin diğer değerler ilk baştaki durumda sabit kalmak üzere $c = 4$ alındığında elde edilen sonuçlar şu şekilde olur :

$a = 1/5$ için



Şekil 5.3: $a = 1/5$, $c = 4$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1$ için

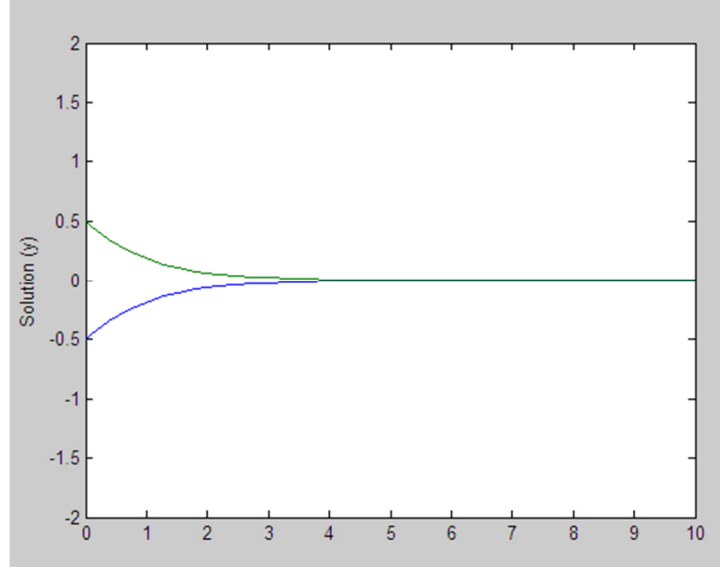


Şekil 5.4: $a = 1$, $c = 4$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

Şekillere bakıldığında c değerinin değişmesinin yalnızca kararsızlık osilasyon aralıklarını değiştirdiği, ancak davranış şeklinde bir farklılaşma yaratmadığı görülebilir. Kararlı-kararsız olma durumunu etkileyen yine a değeridir.

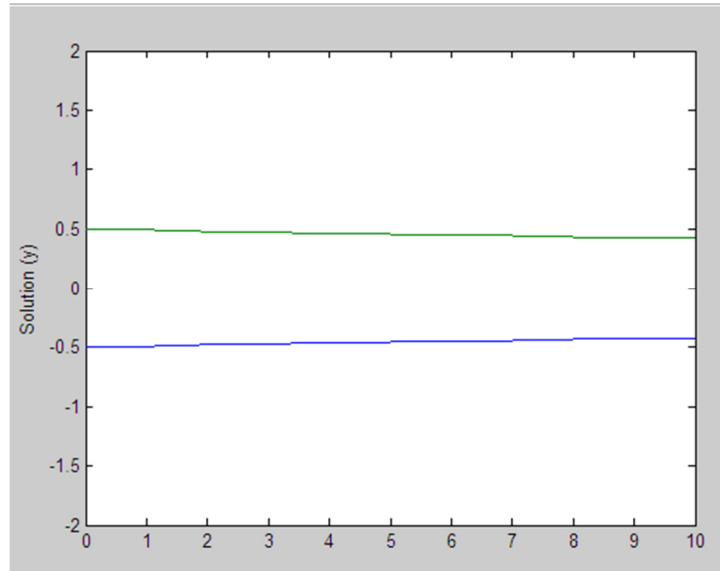
Modeli oluşturan denklemdeki c , aktivasyon fonksiyonu gibi parametrelerden herhangi biri değiştirildiğinde, örneğin diğer değerler ilk baştaki durumda sabit kalmak üzere aktivasyon fonksiyonu $\frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ alındığında elde edilen sonuçlar şu şekilde olur :

$a = 1/5$ için



Şekil 5.5: $a = 1/5$, $f(x) = e^{-x(t)} - 1/e^{-x(t)} + 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1$ için



Şekil 5.6: $a = 1$, $f(x) = e^{-x(t)} - 1/e^{-x(t)} + 1$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

Şekillere bakıldığında aktivasyon fonksiyonun değişmesinin sistemin kararlı olup olmamasını etkilemediği görülebilir. Kararlı-kararsız olma durumunu etkileyen yine a değeridir.

Bu tarz simülasyonlarda gecikme değerinin sistemi nasıl etkilediği merak edilebilir.

Yapay sinir ağlarının genel tanımından bahsederken gecikme değerlerinin sistemlerin kararlı-kararsız oluşunu etkilemediği ancak kararlılığa ulaşma süresini değiştirdiği ifade edilmişti.

Bunu destekleyecek birkaç simülasyon sonucu aşağıda gösterilmiştir.

Simülasyona başlangıç değerlerine geri dönerek

$c : 1$

nöron sayısı : 2

başlangıç noktaları : [0.5 0.5]

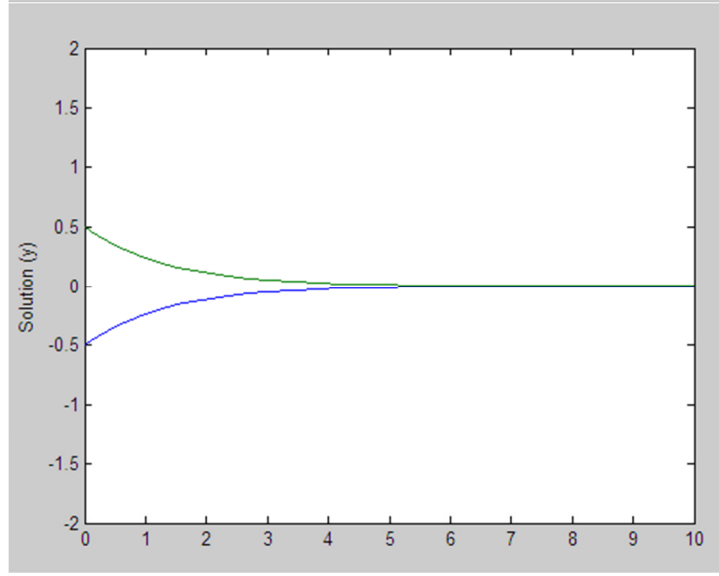
aktivasyon fonksiyonu : piece-wise aktivasyon fonksiyonu alınır.

Gecikmenin kararlılığı nasıl etkilediğini (veya etkileyip etkilemediğini) göstermek için ilk etapta daha önceden kararlılık durumunu garantilediği gösterilen $a = \frac{1}{5}$ değeri için çeşitli gecikmeler (1,5 – 3 – 5) alınıp simülasyonlar gerçekleştirilmiştir.

Farklı değerler alınarak söz konusu simülasyonlar kolayca tekrarlanabilir.

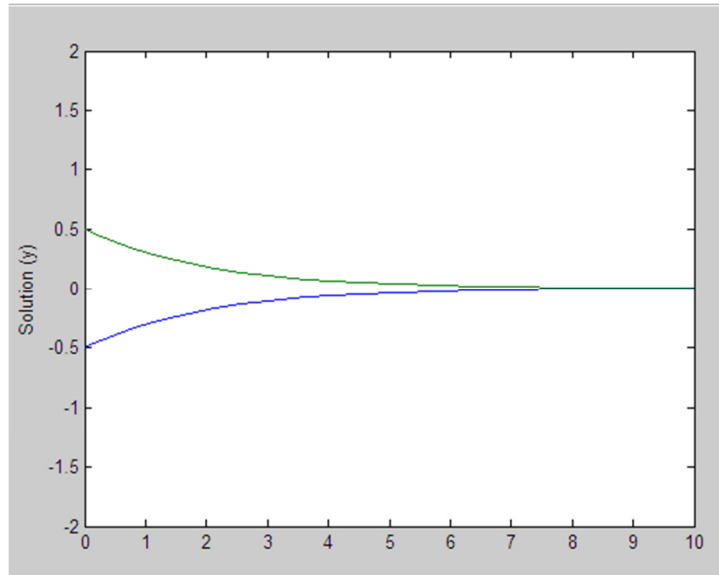
Elde edilen sonuçlar aşağıdadır :

$a = 1/5$ için



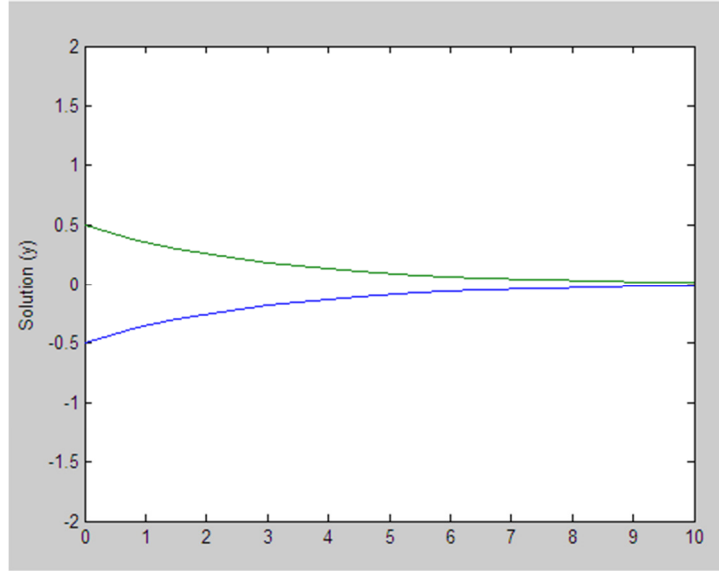
Şekil 5.7: $a = 1/5$, $\tau = 1,5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1/5$ için



Şekil 5.8: $a = 1/5$, $\tau = 3$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1/5$ için

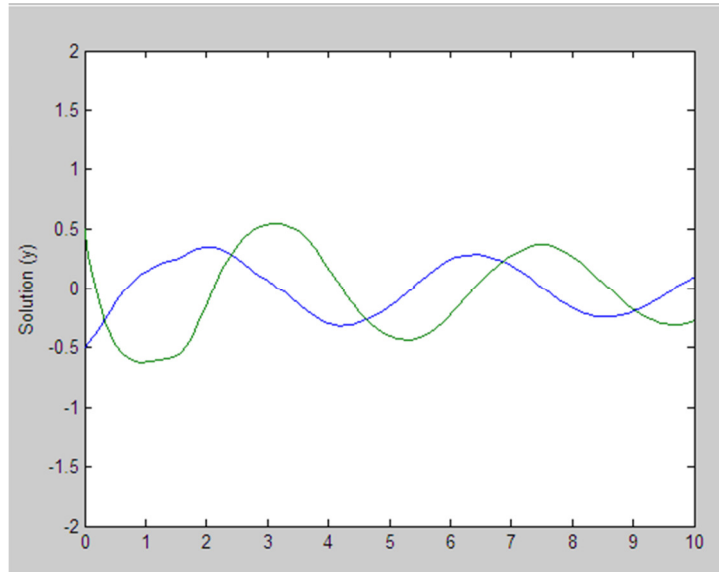


Şekil 5.9: $a = 1/5, \tau = 5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

Dikkat edilirse, gecikme değerine göre sistemin kararlı olmasının değişmediği, sadece kararlılık durumuna daha geç geldiği görülebilir.

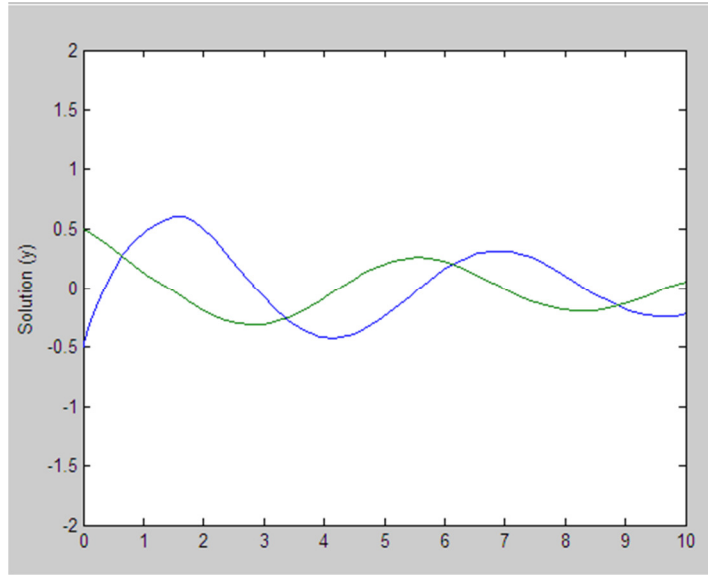
Gecikmenin kararsızlığı nasıl etkilediğini göstermek için daha önceden kararsızlık durumunu garanti ettiği gösterilen $a = 1$ değeri için çeşitli gecikmeler (1,5 – 3 – 5) alıp simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdadır :

$a = 1$ için



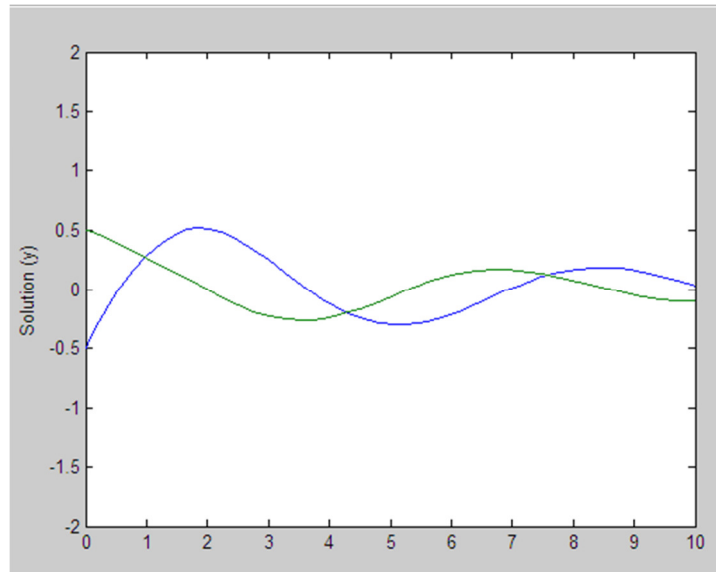
Şekil 5.10: $a = 1, \tau = 1,5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1$ için



Şekil 5.11: $a = 1$, $\tau = 3$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

$a = 1$ için



Şekil 5.12: $a = 1$, $\tau = 5$ için (4.1) sisteminin kararlılık özellikleri

Dikkat edilirse, gecikme değerine göre sistemin kararsız olmasının değişmediği, sadece kararsızlık durumundaki osilasyonların aralıklarının değiştiği görülebilir.

Teorem 4.1.1'i ispatlamak için kullanılan bu örnek Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'te kullanılmaya kalkılırsa Υ ve Ψ aşağıdaki formlarda olur :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 2 - 8a & -2a \\ -2a & 2 - 8a \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 2 - 10a & 0 \\ 0 & 2 - 10a \end{bmatrix}.$$

Υ üzerinde işlem yapıldığında $a = \frac{1}{5}$ ve $a = \frac{1}{3}$ olmak üzere iki adet kıyas değeri ile karşılaşılır. Ψ üzerinde işlem gerçekleştirildiğinde elde edilen kıyas değeri $a = 5$ 'tir. Teorem 4.1.1'de ele alınan kıyas değerleri ile bu değerler örtüşmediğinden söz konusu örnek bu teoremlerde kullanılamaz.

Benzer şekilde Teorem 4.1.4'te de, $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} > 0$ olmasını ele alınarak, yalnızca $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 - 4a & -2a \\ -2a & 1 - 3a \end{bmatrix}$ 'in bir nonsingular M-matrisi olması halinde bu teoremin doğrulanabileceği gösterilmiştir. Teorem 4.1.1'de kullanılan değerler bu değerle de örtüşmez, bu yüzden söz konusu örnek Teorem 4.1.4'de de kullanılamaz. Ancak başka örnekler ele alınarak teoremlerin simülasyon olarak ispatları gerçekleştirilebilir. Burada bir teoremin ispatı yeterli görüldüğünden diğerlerinin ispatı gerçekleştirilmemiştir.

5.2. NÖTRAL SİSTEM İLE İLGİLİ SİMÜLASYON

Bu kısımda tez çalışmasında ele alınan ilk nötral sistem ile ilgili simülasyon çalışması yapılmıştır.

(4.17) ile tanımlanan nötral sistem

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) + \sum_{j=1}^n e_{ij} \dot{x}_j(t - \tau_j) &= -d_i(x_i) \left[c_i(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j) - \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau)) + u_i \right], \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

şeklinde idi.

Burada n , ağdaki nöronların sayısını, x_i , i . nöronun durumunu, $d_i(x_i)$ yükseltgenme fonksiyonları kümesini, $c_i(x_i)$, (4.17) ile belirtilen sistemi sınırlı hale getirecek fonksiyon kümesini, a_{ij} sabiti, ağdaki nöron bağlantılarının büyüklüğünü, b_{ij} sabiti, $\tau_j(t)$ gecikme parametresi ile birlikte ağdaki nöron bağlantılarının büyüklüğünü,

e_{ij} katsayıları, gecikmeli durumların zamana göre türev katsayılarını, $f_j(\cdot)$, nöron aktivasyon fonksiyonlarını ve u_i , bazı haricî girişleri ifade etmekte idi.

Bu sistemin sistemin ağ parametreleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad b > a > 0, \quad m_1 = m_2 = M_1 = M_2 = 1$$

$$L_1 = L_2 = 1, \quad \gamma_1 = \psi_1 = 1, \quad \gamma_2 = \psi_2 = \xi > 1, \quad \|E\|_2 = \frac{1}{8\xi} < 1$$

İlk olarak $m = 1$, $M = 1$, $L = 1$, $\gamma = 1$ ve $\psi = \xi$ olduğu dikkat çekmektedir.

$p = q = \frac{1}{4}$ ve $\hat{p} = \hat{q} = \xi^2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $r = 1$ için, Teorem 4.2.1'deki ϵ ve Ω değerleri şu şekilde hesaplanır :

$$\epsilon = m\gamma - (p + q)M^2 - 2M\psi\|E\|_2 - (\hat{p} + \hat{q})\|E\|_2^2 = \frac{1}{8} > 0$$

$$\Omega = \mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}}\right)A^T A - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}}\right)B^T B = \mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \left(4 + \frac{1}{4\xi^2}\right)A^T A - \left(4 + \frac{1}{4\xi^2}\right)B^T B$$

$$= \mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - 2\left(4 + \frac{1}{4\xi^2}\right)A^T A = \mathcal{M}\Gamma\mathcal{L}^{-2} - \frac{(16\xi^2+1)}{2\xi^2}A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} - \frac{(16\xi^2+1)}{2\xi^2} \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{16\xi^2+1}{2\xi^2}\right)a^2 & 0 \\ 0 & \xi - \left(\frac{16\xi^2+1}{2\xi^2}\right)b^2 \end{bmatrix}$$

Ω pozitif tanımlı olduğundan $a^2 \leq \frac{2\xi^2}{16\xi^2+1}$ ve $b^2 \leq \frac{2\xi^3}{16\xi^2+1}$ koşulları sağlanmalıdır :

$\xi > 1$ olduğundan, $\frac{2\xi^2}{16\xi^2+1} > \frac{2}{17}$ ve $\frac{2\xi^3}{16\xi^2+1} > \frac{2\xi}{17}$ olur.

Bu örnekte verilen ağ parametreleri için, (4.16) ile ifade edilen sistemin kararlılığı için yeterli koşullar aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$$a^2 \leq \frac{2}{17} \quad \text{ve} \quad b^2 \leq \frac{2\xi}{17}$$

Buna göre, aynı örnek için Teorem 4.2.3 ile ifade edilen kararlılık koşullarını belirlemeye çalışalım. Teorem 4.2.3 aşağıdaki denklemleri içermektedir.

$$\begin{aligned}
\delta &= m\gamma - LM\|A\|_2(1 + \|E\|_2) - LM\|B\|_2(1 + \|E\|_2) - M\psi\|E\|_2 \\
&= 1 - b\left(1 + \frac{1}{8\xi}\right) - b\left(1 + \frac{1}{8\xi}\right) - \frac{\xi}{8\xi} > 0 \\
&= \frac{7}{8} - 2b\left(1 + \frac{1}{8\xi}\right) > 0 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Bu da $b < \frac{7\xi}{2(8\xi+1)}$ olmasını sağlar.

Bu durumda, b için söylenebilecek gerekli bir kısıtlama aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

$$b < \frac{7}{16}.$$

Bununla ilgili bir simülasyon aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir. Bu simülasyonda,

$c : 1,$

nöron sayısı : 2,

başlangıç noktaları : [0.5 0.5]

gecikme değeri : 1,5

aktivasyon fonksiyonu : piece-wise aktivasyon fonksiyonu alınmıştır.

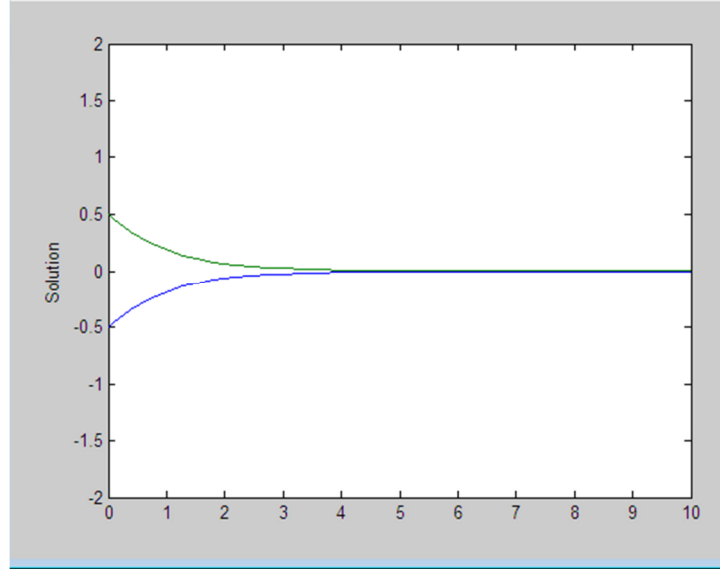
Kararlı ve kararsız durumları gösterebilmek için iki adet b değeri seçilir ve bu b değerine göre iki adet B matrisi şekillenir. b değerlerinden biri $b < \frac{7}{16}$, diğeri $b > \frac{7}{16}$ sağlamalıdır. Buna uygun olarak örneğin $b = \frac{1}{5}$ ve $b = 1$ alınabilir ve B matrislerinin de bu şekilde oluşturulması sağlanabilir.

$b = \frac{1}{5} \longrightarrow A = B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$ (teoreme göre kararlılık ifade etmesi gereken değerler) ve

$b = 1 \longrightarrow A = \underline{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (teoreme göre kararsızlık ifade etmesi gereken değerler) olarak alınsın.

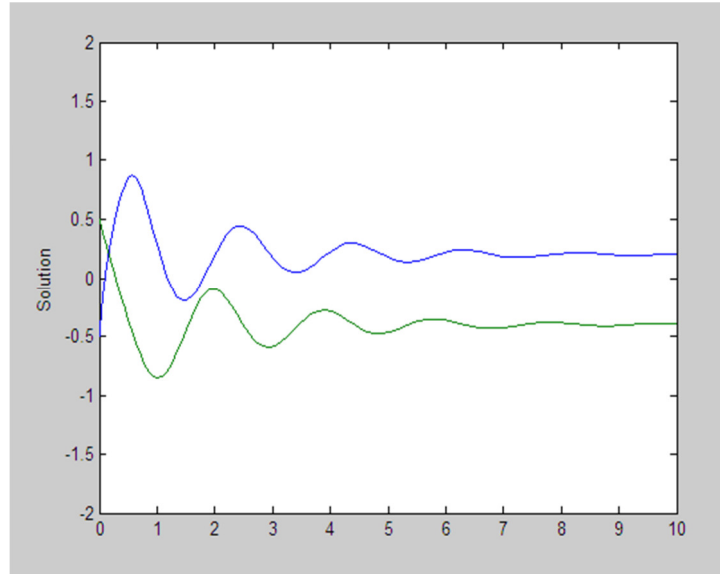
Bu iki b değerine göre MATLAB ile gerçekleştirilen simülasyonlar şu şekildedir :

$$b = \frac{1}{5} \text{ için}$$



Şekil 5.13: $b = 1/5$, $c = 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri

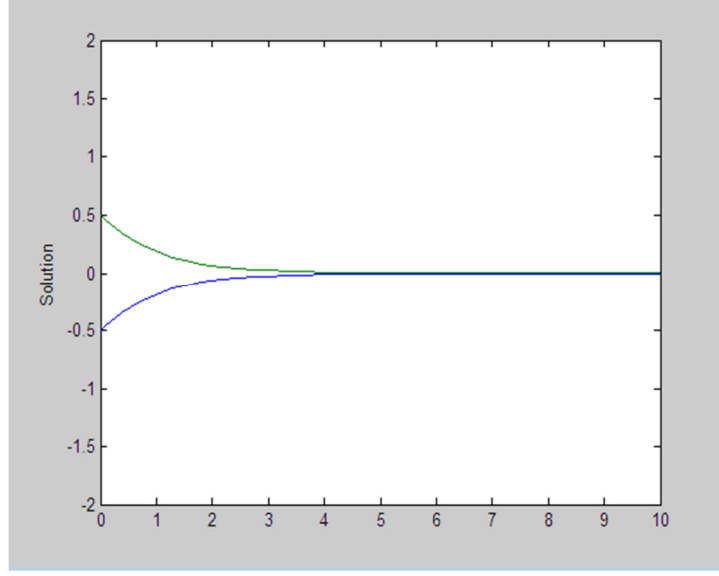
$$b = 1 \text{ için}$$



Şekil 5.14: $b = 1$, $c = 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri

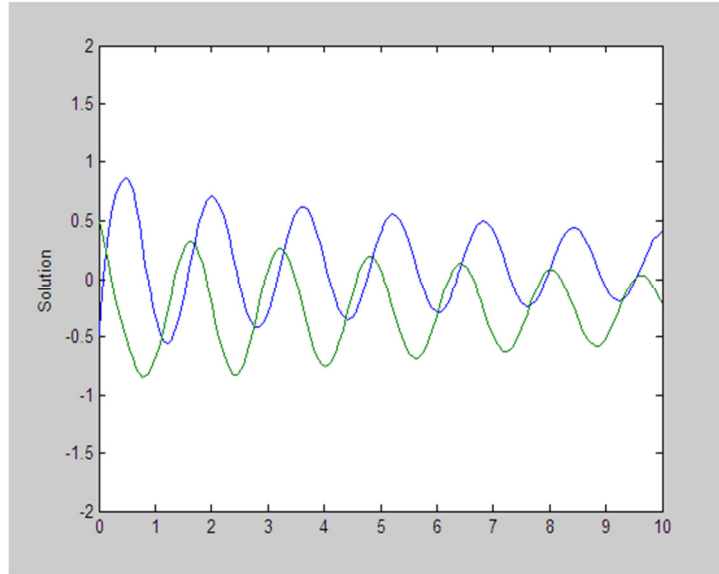
Modeli oluşturan denklemdeki c , aktivasyon fonksiyonu gibi parametrelerden herhangi biri değiştirildiğinde, örneğin diğer değerler ilk baştaki durumda sabit kalmak üzere $c = 4$ alındığında elde edilen sonuçlar şu şekilde olur :

$$b = 1/5$$



Şekil 5.15: $b = 1/5$, $c = 4$ için sistemin kararlılık özellikleri

$$b = 1$$

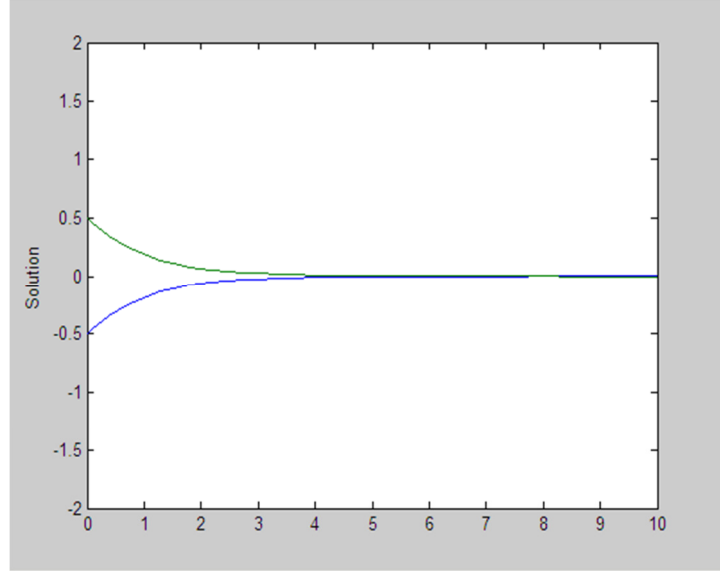


Şekil 5.16: $b = 1$, $c = 4$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri

Şekillere bakıldığında c değerinin değişmesinin yalnızca kararsızlık osilasyon aralıklarını değiştirdiği, ancak davranış şeklinde bir farklılaşma yaratmadığı görülebilir. Kararlı-kararsız olma durumunu etkileyen yine b değeridir.

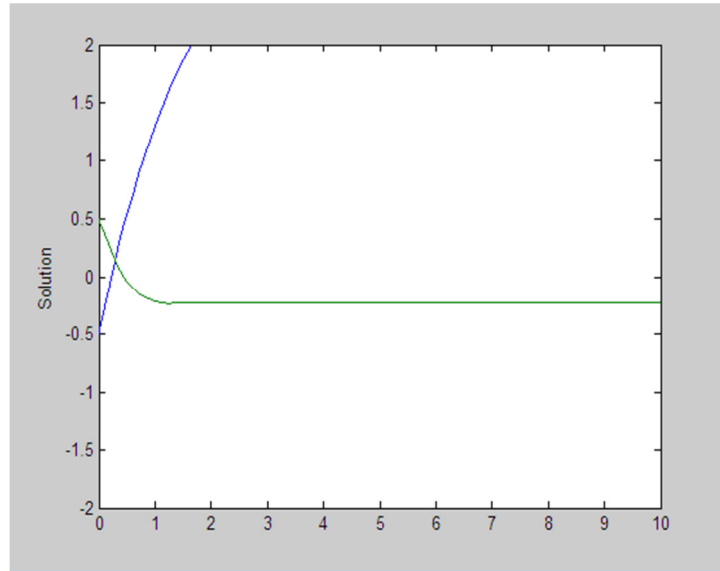
Modeli oluşturan denklemdeki c , aktivasyon fonksiyonu gibi parametrelerden herhangi biri değiştirildiğinde, örneğin diğer değerler ilk baştaki durumda sabit kalmak üzere aktivasyon fonksiyonu $\frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ alındığında elde edilen sonuçlar şu şekilde olur :

$$b = 1/5$$



Şekil 5.17: $b = 1/5$, $f(x) = e^{-x(t)} - 1/e^{-x(t)} + 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri

$$b = 1$$



Şekil 5.18: $b = 1$, $f(x) = e^{-x(t)} - 1/e^{-x(t)} + 1$ için (4.17) sisteminin kararlılık özellikleri

Şekillere bakıldığında aktivasyon fonksiyonun değişmesinin sistemin kararlı olup olmamasını etkilemediği görülebilir. Kararlı-kararsız olma durumunu etkileyen yine b değeridir.

Bu şekilde gerek dinamik sistemle ilgili gerek nötral sistemle ilgili simülasyonlarla, matematiksel analizler sonucunda elde edilmiş kararlılık analizleri desteklenerek gösterilmiştir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Günümüzde gerek teknolojik gelişmelerin inanılmaz boyutlara ulaşması, gerek akademik çalışmaların sayısının artması, geçmişte çözülemeyen pek çok problem için farklı çözüm yolları bulunmasını sağlamıştır. Savunma sanayinden tıp sektörüne, inşaat sektöründen madencilığe, uzay araştırmalarından istatistiğe, coğrafi bilgi sistemlerinden bankacılığa kadar birçok sektörde kullanılmaya başlanan yapay sinir ağları da bu çözüm yollarından biri olarak düşünülebilir. Yapay sinir ağları, söz konusu sektörlerde, görüntü işleme uygulamalarında, veri analizlerinde, optimizasyon problemlerinin çözümünde, kümelemede, kalite kontrolde ve bunlar gibi farklı sorunları çözmeye kullanılmaktadır. Kullanım alanının bu kadar geniş boyutlarda olması sonucunda yapay sinir ağlarının çeşitleri ve konu ile ilgili yapılan çalışmaların sayısı her geçen gün artmaktadır.

Yapay sinir ağlarının, kullanıldığı uygulamada başarılı sonuçlar vermesini sağlayan en önemli etkenlerden biri, sistemin kararlı oluşudur. Bu yüzden yapay sinir ağları üzerine gerçekleştirilen çalışmaların çok büyük bir kısmı kararlılık üzerinedir. Çünkü kararlılığı için yeterli koşullar elde edilen bir yapay sinir ağı modeli, bir probleme kolaylıkla uygulanabilir. Ancak yapay sinir ağlarının tek bir çeşidi olmadığı gibi tek bir kararlılık özelliği de yoktur. Uygulamada kullanılacak yapay sinir ağı çeşidi ve bu sistemde aranacak kararlılık özellikleri tamamen uygulamanın kendisine ve amaca bağlıdır. Örneğin görüntü işlemede hücrel yapay sinir ağları kullanılmaktadır, optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir yapay sinir ağına aranan kararlılık özellikleri ile başka bir uygulamada kullanılan sistemin sahip olması gereken kararlılık özellikleri aynı olmayacaktır. Bu konuya tez içerisinde zaman zaman değinilmiştir.

Bu tez çalışmasında incelenen yapay sinir ağı modeli “nötral tipteki yapay sinir ağları”dır. Genel olarak gecikmeli yapay sinir ağı sınıfına ait olan nötral sistemler, gecikmeli sistemlerden oldukça önemli bir farkla ayrılmaktadırlar. Diferansiyel denkleminin her iki tarafında da gecikmeye sahip olan bu modellerin analizi oldukça karmaşık işlemler gerektirmektedir. Bu açıdan tez çalışmasında öncelikle klasik tipteki

bir gecikmeli sistemin kararlılık analizinin yapılması daha sonra konunun kavranması ile birlikte nötral sistemlere geçiş yapılması uygun görülmüştür.

Klasik gecikmeli yapay sinir ağı ve nötral sistemler incelenirken öncelikle bu kavramların tamamen ayırt edilebilmesi için gecikmeli yapay sinir ağlarından, farklı gecikme tiplerinden bahsedilmiş, bu tanıtımdan sonra nötral sistemlerin anlaşılmasını sağlamak için gerekli bilgiler verilmiştir. Bu bilgiler arasında literatürde yakın zamanda incelenen nötral sistem modelleri de bulunmaktadır. Sayısı oldukça sınırlı olan bu modeller ve modellerin kararlılık analizini gerçekleştiren yayınlar incelenerek birbirine benzer veya birbirini geliştiren modeller gruplanmış, farklı tipteki nötral sistemler ayıklanmıştır. Daha sonra bu modellerde aranan kararlılık tipleri belirlenmiş, analizler gerçekleştirilirken kullanılan yöntemler ve elde edilen sonuçlarla beraber kısa birer özet halinde tez çalışmasında sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında gerçekleştirilen analizlerin anlaşılabilmesi için yüksek seviyede matematik bilgisi gerekmektedir. Analizler yapılırken kullanılan tüm lemmaların, kuralların, teoremlerin, yöntemlerin, özelliklerin tez içerisinde ayrıntılı olarak anlatılması mümkün olmadığından temel bilgilerin verilmesinin önem taşıdığı düşünülmüştür. Bu açıdan Öklit uzayı, vektör ve matris normları, matris sınıfları gibi kullanılan çeşitli matematiksel kavramlar, Lyapunov Kararlılık Teoremi, LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi, Hurwitz Kararlılık Teoremi gibi dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan yöntemler ve özdeşlik fonksiyonu, sigmoid fonksiyon, tanh fonksiyonu, adım fonksiyonu, eşik fonksiyonu, parçalı doğrusal fonksiyon, signum fonksiyonu gibi aktivasyon fonksiyonları hakkında bilgi verilmiştir. Özellikle aktivasyon fonksiyonlarının bilinmesi burada büyük önem taşımaktadır. Aktivasyon fonksiyonunun sahip olduğu özellikler sistemin kararlılığını direkt olarak etkilemektedir. Literatürdeki çalışmaların neredeyse tamamı, sistemlerin kararlılık analizini gerçekleştirirken sürekli aktivasyon fonksiyonları kullanılmıştır. Sürekli olmayan aktivasyon fonksiyonlarının kullanılması sonucunda bu analizlerin nasıl etkileneceği, yeterli koşullar elde edilip edilemeyeceği bilinmemektedir. Aynı analizlerin sürekli olmayan fonksiyonlar kullanılarak da gerçekleştirilmesi, yapay sinir ağlarının gelişmesini ve daha fazla probleme uygulanabilmesini sağlayacağından tarafımızdan üzerinde çalışılmaya değer bir konu olduğu düşünülmektedir.

Literatürde yapay sinir ağı ile ilgili çalışmaların çok büyük bir kısmının, neredeyse tamamının kararlılık analizleri ile ilgili olduğu ve farklı tipte kararlılık özellikleri bulunduğu daha önceden belirtilmişti. Tez çalışmasının bu konuda bir rehber niteliği taşıyabilmesi açısından kararlılık tiplerinden bahsetmek gerekli görülmüştür ve kararlılık, asimtotik kararlılık, kesin kararlılık, üstel kararlılık, robust kararlılık, global kararlılık gibi farklı kararlılık tipleri; denklemleri, komşuluk değerleri, denge noktasının durumları gibi özellikleri ile birlikte açıklanmıştır.

Bu tez çalışmasında toplamda üç adet yapay sinir ağı modeli incelenmiş ve kararlılık analizleri gerçekleştirilmiştir. . Bu sistemlerden ilki, nötral sistemlere geçiş amacıyla faydası olacağı düşünülen klasik gecikmeli yapay sinir ağı sistemi, diğer ikisi ise farklı tiplerdeki nötral sistemlerdir. Bu üç modelin kararlılığı için tezde daha önce verilen matematiksel bilgilerden, yöntemlerden, fonksiyonlardan faydalanılarak yeni yeterli koşullar elde edilmiştir.

Ele alınan ilk modelde eğim-sınırlı bir aktivasyon fonksiyonu kullanılmış ve sonuç olarak modelin global robust kararlılığı için kolaylıkla doğrulanabilecek gecikmeden bağımsız yeterli koşullar elde edilmiştir. Bu koşullar, gecikme parametrelerinden bağımsız olarak modelin ağ parametreleri arasında bir ilişki oluşturmuştur. Modelin kararlılık analizinin gerçekleştirildiği çalışma [93] referansında bulunarak daha detaylı incelenebilir.

Nötral modeller olan ikinci ve üçüncü modeller, global asimtotik kararlılık için gecikmeden bağımsız yeni yeterli koşullar bulunmuştur. Bu modellerin kararlılık analizinin gerçekleştirildiği çalışmalar [94] ve [95] referansında bulunarak daha detaylı incelenebilir.

İncelenen üç modelin kararlılık analizi ile ilgili elde edilen yeni yeterli koşulların doğruluğunu ispatlayabilmek, ayrıca bu koşulların literatürde elde edilen benzer koşullardan daha az kısıtlayıcı olduğunu gösterebilmek amacıyla her modelin kararlılık koşulları ile ilgili sayısal örnekler verilmiştir. Daha sonra bu sayısal örnekler için MATLAB simülasyonları hazırlanmıştır. Simülasyonlarda gerçekleştirilen işlemler şu şekilde sayılabilir.

- Her örnek için elde edilen yeni yeterli koşulların bulunduğu sayısal aralıkta alınan değerlerin kararlılığı sağladığı gösterilmiştir.
- Her örnek için elde edilen yeni yeterli koşulların bulunduğu sayısal aralığın dışında alınan değerlerin kararsızlığa sebep olduğu gösterilmiştir.
- Katsayıların değişmesinin, kararlı-kararsız olma durumunu etkilemediği, yalnızca davranış şeklini veya süresini etkilediği gösterilmiştir.
- Benzer davranıştaki başka bir aktivasyon fonksiyonu kullanılmasının kararlı-kararsız olma durumunu etkilemediği, yalnızca davranış şeklini veya süresini etkilediği gösterilmiştir.
- Gecikme değerinin değişmesinin kararlı-kararsız olma durumunu etkilemediği, yalnızca süreyi etkilediği gösterilmiştir.
- Denenen her değer için grafikler çizdirilerek karşılaştırmaların kolaylaştırılması sağlanmıştır.
- Elde edilen değerlerin kolaylıkla test edilebileceği gösterilmiştir.
- Elde edilen değerlerin literatürde elde edilen değerlere göre daha az kısıtlayıcı olduğu gösterilmiştir.
- Her örneğin her teorem için uygulanamayacağı ancak farklı farklı örneklerin kullanılarak teoremlerde elde edilen değerlerin doğruluğunun ispatlanmasında bir sakınca olmadığı gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar her ne kadar belirli tipteki yapay sinir ağı modelleri için elde edilmiş olsa da çeşitli transformasyonlarla daha fazla sayıda yapay sinir ağı çeşidine de uygulanabilir. Örneğin $E = 0$ alındığı takdirde (4.1) sistemi, bir Cohen-Grossberg yapay sinir ağı haline gelir. Bir Cohen-Grossberg yapay sinir ağında $d_i(x_i) = 1$ ve $c_i(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ise, bu Cohen-Grossberg yapay sinir ağı, bir Hopfield ağını ifade eder. Benzer şekilde bir Hopfield ağı, parçalı doğrusal aktivasyon fonksiyonu kullanıyorsa bu Hopfield ağı, bir hücresel yapay sinir ağı haline gelir. Buna göre (4.1) ile ifade edilen sistemin kararlılık analizinin, kolaylıkla standart diğer yapay sinir ağı modellerine de uygulanabileceği açıkça görülmektedir.

Bir gecikmeli yapay sinir ağı modeli olmasına karşın oldukça farklı karakteristikler içeren nötral sistemler bu tez çalışmasının temelini oluşturmaktadır. Bu tezde tarafımızdan kısa bir süredir literatürde kendine yer bulan nötral sistemlerle alakalı doyurucu, anlaşılır ve geliştirilebilir bir çalışma yapılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla bilinmesi gerektiği düşünülen bilgiler, daha önceden yapılmış çalışmalar verilerek gerçekleştirilen kararlılık analizlerinin kolaylıkla anlaşılması için uğraş verilmiştir.

Nötral sistemlerin dinamik davranış analizi, diğer yapay sinir ağı modellerin kararlılık analizlerine göre üzerinde daha az çalışılan, daha az inceleme yapılan bir konudur ve tarafımızca gelişmeye çok açık olduğu dşnlmekte ve ileride bu tez çalışmasının devamını oluşturabilecek nitelikte çalışmalar yapılması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Cao, J., Wang, J., 2003, Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays, *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, 50, 34–44.
2. Li, X.M., Huang, L.H., Zhu, H., 2003, Global stability of cellular neural networks with constant and variable delays, *Nonlinear Analysis*, 53, 319–333.
3. Liao, X.F., Yu, J., 1998, Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay, *IEEE Trans. Neural Networks*, 9, 1042–1045.
4. Liao, X.F., Wong, K.W., Wu, Z., Chen, G., 2001, Novel robust stability for interval-delayed hopfield neural, *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, 48, 1355–1359.
5. Sun, C., Feng, C.B., 2003, Global robust exponential stability of interval neural Networks with delays, *Neural Processing Letters*, 17, 107–115.
6. Cao J., Wang, J., 2005, Global asymptotic and robust stability of recurrent neural Networks with time delays, *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, 52, 417–426.
7. Qiu, J., Zhang, J., Wang, J., Xia, Y., Shi, P., 2008, A new global robust stability criteria for uncertain neural networks with fast time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 37(2) 360–368.
8. Liao, X.F., Wong, K. 2004, Robust stability of interval bidirectional associative memory neural network with time delays, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics-Part B*, 34, 1142–1154.

9. Jiang, M., Shen, Y., 2008, Stability of non-autonomous bidirectional associative memory neural networks with delay, *Neurocomputing*, 71(4–6), 863–874.
10. Lou, X., Cui, B., Wu, W., 2008, On global exponential stability and existence of periodic solutions for BAM neural networks with distributed delays and reaction-diffusion terms, *Chaos, Solitons and Fractals*, 36(4), 1044–1054.
11. Ensari, T., Arik S., 2010, New results for robust stability of dynamical neural Networks with discrete time delays, *Expert Systems with Applications*, 37(8), 5925–5930.
12. Yucel, E., Arik, S., 2010, New Sufficient Criteria for Global Robust Stability of Neural Networks with Multiple Time Delays, *Proc. ECTICON*, pp. 403-406.
13. Cao, J., Li, H.X., Han, L., 2006, Novel results concerning global robust stability delayed neural networks, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 7, 458–469.
14. Qi, H., 2007, New sufficient conditions for global robust stability of delayed neural networks, *IEEE Trans. Circuits and Syst.I*, 54(5), 1131–1141.
15. Cao, J., Chen, T., 2004, Global exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22, 957–963.
16. Cohen M., Grossberg S., 1983, Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics*, 13(5), 815–826.
17. Wang L., Zou X., 2002, Exponentially stability of Cohen–Grossberg neural networks, *Neural Networks* 15(3), 415–422.

18. Mohamad S., Gopalsamy K., 2003, Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays, *Applied Mathematics and Computation* 135(1), 17–38.
19. Hopfield J.J., 1982, Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of the National Academy of Science USA*, 79(8), 2554–2558.
20. Chua L.O., Yang L., 1988, Cellular neural networks: theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 35(10), 1257–1272.
21. Cao J., 2001, Global stability conditions for delay CNNs, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 48(11), 1330–1333.
22. Arik S., 2000, Stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 47(7), 1089–1092.
23. Baldi P., Atiya A.F., 1994, How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(4), 612–621.
24. Wang Z., Lam J., Burnham K.J., 2002, Stability analysis and observer design for neutral delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3), 478–483.
25. Wang L., Zou X., 2002, Harmless delays in Cohen–Grossberg neural networks, *Physica D*, 170(2), 162–173.
26. Xu S., Lam J., Ho W.C., Zou Y., 2005, Delay-dependent exponential stability for a class of neural networks with time delays, *Journal of Computational Applied Mathematics*, 183(1), 16–28.

27. Arik S., Tavsanoğlu V., 2000, On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I*, 47(4), 571–574.
28. Lien C.H., 1999, Asymptotic criterion for neutral systems with multiple time delays, *Electron Letters*, 35(10), 850–852.
29. Agarwal R.P., Grace S.R., 2000, Asymptotic stability of differential systems of neutral type, *Applied Mathematics Letters*, 13(8), 15–19.
30. Park Ju.H., Park C.H., Kwon O.M., Lee S.M., 2008, A new stability criterion for bidirectional associative memory neural networks of neutral-type, *Applied Mathematics and Computation*, 199(2), 716–722.
31. Park Ju.H., Kwon O.M., Lee S.M., 2008, LMI optimization approach on stability for delayed neural networks of neutral-type, *Applied Mathematics and Computation*, 196(1), 236–244.
32. Rakkiyappan R., Balasubramaniam P., 2008, New global exponential stability results for neutral type neural networks with distributed time delays, *Neurocomputing*, 71(4–6), 1039–1045.
33. Yu K.W., Lien C.H., 2008, Stability criteria for uncertain neutral systems with interval time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(3), 650–657.
34. Zhang J., Shi P., Qiu J., 2008, Robust stability criteria for uncertain neutral system with time delay and nonlinear uncertainties, *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(1), 160–167.
35. Chen Y., Xue A., Lu R., Zhou S., 2008, On robustly exponential stability of uncertain neutral systems with time-varying delays and nonlinear perturbations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 68(8), 2464–2470.

36. Wang B., Liu X., Zhong S., 2008, New stability analysis for uncertain neutral system with time-varying delay, *Applied Mathematics and Computation*, 197(1),457–465.
37. Zhang W.A., Yu L., 2007, Delay-dependent robust stability of neutral systems with mixed delays and nonlinear perturbations, *Acta Automatica Sinica*, 33(8), 863–866.
38. Cao J., Zhong S., Hu Y., 2007, Global stability analysis for a class of neural networks with varying delays and control input, *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 1480–1490.
39. Xiong W., Liang J., 2007, Novel stability criteria for neutral systems with multiple time delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(5), 1735–1741.
40. Liu X.G., Wu M., Martin R., Tang M.L., 2007, Delay-dependent stability analysis for uncertain neutral systems with time-varying delays, *Mathematics and Computers in Simulation*, 75(1–2), 15–27.
41. Li H., Zhong S.M., Li H.B., 2007, Some new simple stability criteria of linear neutral systems with a single delay, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1), 441–447.
42. Wang F., 2007, Exponential asymptotic stability for nonlinear neutral systems with multiple delays, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 8 (1) 312–322.
43. Chen W.H., Zheng W.X., 2007, Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays, *Automatica*, 43(1), 95–104.
44. Cheng C.J., Liao T.L., Yan J.J., Hwang C.C., 2006, Globally asymptotic stability of a class of neutral-type neural networks with delays Cheng, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics–Part B*, 6(5), 1191–1195.

45. Kwon O.M., Park Ju.H., 2008, New delay-dependent robust stability criterion for uncertain neural networks with time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, 205, 417–427.
46. Balasubramaniam P., Rakkiyappan R., 2008, LMI conditions for global asymptotic stability results for neutral-type neural networks with distributed time delays, *Applied Mathematics and Computation*, 204, 317–324.
47. Chuanzhi Bai, 2008, Global stability of almost periodic solutions of Hopfield neural networks with neutral time-varying delays, *Applied Mathematics and Computation*, 203, 72–79.
48. Park Ju.H., Kwon O.M., 2008, Design of state estimator for neural networks of neutral-type, *Applied Mathematics and Computation*, 202, 360–369.
49. Mai H.H., Liao X.F., Li C.D., 2009, A semi-free weighting matrices approach for neutral-type delayed neural networks, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225(1), 44–55.
50. Hale J.K., Verduyn S.M., 1993, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
51. [51] Hopfield, J.J., 1984, Neuron with response have collective computational properties like those of two state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. I*, 81(5), 3088–3092.
52. Marcus, C.M., Westervelt, R.M., 1989, Stability of analog neural Networks with delay, *Physical Review A*, 39(1), 347–359.
53. Gopalsamy, K., He, X., 1994, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Physica D*, 76, 344–358.

54. Agarwal, R.P., Grace S. R., 2000, Asymptotic stability of certain neutral differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 31, 9-15.
55. Park J.Y., Kang Y.H., 2001, Optimal Problem of Cost Function for the Linear Neutral Systems. *IJMMS*, 12, 777-785.
56. Fridman E., 2001, New Lyapunov-Krasovski, functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 43, 309-319.
57. Park J.H., 2003, Robust Stability of a Class of Uncertain Linear Neutral Systems with Time-Varying Delay. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 43, 741 – 748.
58. Park J.H., 2002, Asymptotic Stability of Uncertain Neutral Delay-Differential Systems. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 907 – 915.
59. Park J.H., Kwon O., 2005, On robust stabilization for neutral delay-differential systems with parametric uncertainties and its application. *Applied Mathematics and Computation*, 162, 1167-1182.
60. Park J.H., Kwon O., 2005, On new stability criterion for delay - differential systems of neutral type. *Applied Mathematics and Computation*, 627-637.
61. Han Q. L., 2005, A new delay-dependent stability criterion for linear neutral systems with norm-bounded uncertainties in all system matrices. *International Journal of Systems Science*, 469-475.
62. Kharitonov V. L., 2005, Lyapunov Functionals and Lyapunov Matrices of neutraltype time delay systems - a single delay case. *International Journal of Control*, 783-800.

63. Park J. H., Park C. H., Kwon O.M., Lee S.M., 2008, A new stability criterion for bidirectional associative memory neural networks of neutral-type. *Applied Mathematics and Computation*, 199, 716-722.
64. Yang B., Wang J., Pan X., Zhong C., 2007, Delay-dependent criteria for robust stability of linear neutral systems with time-varying delay and nonlinear perturbations. *International Journal of Systems Science*, 38, 511-518.
65. Zhang W., Yu L., 2007, Delay-dependent Robust Stability of Neutral Systems with Mixed Delays and Nonlinear Perturbations. *Acta Automatica Sinica*, 863-866.
66. Kharitonov V. L., 2008, Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems. *International Journal of Control*, 81, 883-893.
67. Yu K.W., 2009, Switching Signal Design for Global Exponential Stability of Uncertain Switched Neutral Systems. *Mathematical Problems in Engineering*.
68. Deng S., Liao X., Guo S., 2009, Asymptotic stability analysis of certain neutral differential equations - A descriptor system approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 2981-2993.
69. Park J. H., Kwon O.M., 2009, Global stability for neural networks of neutral-type with interval time-varying delays. *Chaos, Solitons and Fractals*. 41, 1174-1181.
70. Xiong L., Zhong S., Ye M., 2009, New stabilization for switched neutral systems with perturbations. *International Journal of Applied Science, Engineering and Technology*.
71. Liu J., Zong G. 2009, New delay-dependent asymptotic stability conditions concerning BAM neural networks of neutral type. *Neurocomputing*, 72, 2549-2555.

72. Souza F. O., Palhares R. M., Leite J.S., 2008, Improved robust H_{∞} control for neutral systems via discretised Lyapunov-Krasovskii functional. *International Journal of Control*, 81, 1462-1474.
73. Liena C., Yua K.W., Chung Y. J., Lina Y.F., Chung L.Y., 2009, Exponential stability analysis for uncertain switched neutral systems with interval-time-varying state delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3, 334-342.
74. Jun-e Feng, Shengyuan Xu , Yun Zou, 2009, "Delay-dependent stability of neutral type neural networks with distributed delays", *Neurocomputing* 72, 2576–2580.
75. S.M.Lee, O.M.Kwon, JuH.Park, 2010, A novel delay-dependent criterion for delayed neural networks of neutral type, *Physics Letters A*.
76. Li H., Li S.Z., 2007, Some new simple stability criteria of linear neutral systems with a single delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200, 441-447.
77. Chen D., Zhang W., 2008, Sliding Mode Control of Uncertain Neutral Stochastic Systems with Multiple Delays. *Mathematical Problems in Engineering*.
78. Park J. H., Kwon O.M., Lee S.M., 2008, LMI optimization approach on stability for delayed neural networks of neutral – type. *Applied Mathematics and Computation*, 196, 236-244.
79. Qiu J., Cao J., 2009, Delay-dependent exponential stability for a class of neural networks with time delays and reaction–diffusion terms. *Journal of the Franklin Institute*, 346, 301-314.

80. Horn, R.A., Johnson, C.R., 1991, Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 0-521-46713-6.
81. Wikipedia, 2009, *Özdeşlik Fonksiyonu*, http://en.wikipedia.org/wiki/Identity_function, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
82. Wikipedia, 2008, *Sigmoid Fonksiyon*, http://en.wikipedia.org/wiki/Sigmoid_function, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
83. Wikipedia, 2007, *Hiperbolik Fonksiyon*, http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
84. Wikipedia, 2000, *Adım Fonksiyonu*, http://en.wikipedia.org/wiki/Step_function, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
85. Wikipedia, 2011, *Eşik Fonksiyonu*, http://en.wikipedia.org/wiki/Threshold_Logic_Unit, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
86. Wikipedia, 2011, *Parçalı Fonksiyon*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Piecewise>, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
87. Wikipedia, 2011, *Signum Fonksiyonu*, http://en.wikipedia.org/wiki/Sign_function, [Ziyaret Tarihi : Nisan 2011].
88. Kakıcı, A., 2009, *Yapay Sinir Ağlarının Sınıflandırılması*, <http://www.ahmetkakici.com/yapay-sinir-aglari/yapay-sinir-aglarinin-siniflandirilmasi/>, [Ziyaret Tarihi : Mayıs 2011].
89. Çölkesen, R., 2006, *Türkiye Bilişim Ansiklopedisi 1.0*, Papatya Yayıncılık, İstanbul, Makine Öğrenmesi ve Yapay Sinir Ağları Makaleleri, Sayfa, 584-586 ve 926-931.

90. Holmes, P., Shea-Brown, E., 2006, *Lyapunov Stability*, http://www.scholarpedia.org/article/Stability#Lyapunov_stability, [Ziyaret Tarihi : Ekim, 2010].
91. Sun, C., Fei, S., Zhang, K., Cao J., Feng C., 2002, Absolute Exponential Stability Of A Class Of Neural Networks, *15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain.
92. Jia, L., Guang-deng, Z., Yun-xi, Z., 2009, Robust asymptotic stability for BAM neural Networks with time-varying delays via LMI approach, *Appl. Math. J. Chinese Univ.* 24(3): 282-290.
93. Samli, R., Arik, S., 2010, Global Robust Stability of Dynamical Neural Networks with Time Delays, *ICONIP (17th International Conference on Neural Information)*, Sydney Australia.
94. Samli, R., Arik, S., 2009, New results for global stability of a class of neutral-type neural systems with time delays, *Applied Mathematics and Computation*, 210 (2009) 564–570.
95. Samli, R., Arik, S., 2011, New Results for Global Asymptotic Stability of Neutral-Type Delayed Neural Networks, *ICMSA 2011 (7th International Conference on Mathematics, Statistics and Applications)*, 21-23 July 2011, Bangkok, Thailand.

ÖZGEÇMİŞ

Rüya ŞAMLI 26.02.1983 tarihinde Bursa'da doğmuştur. İlköğretimi İstanbul Beyoğlu Namık Kemal İlköğretim Okulu'nda, ortaokul ve lise öğrenimini İstanbul Beşiktaş Atatürk Anadolu Lisesi'nde tamamlamıştır. 2000 yılında lise öğrenimini bitirerek İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü'nü kazanmıştır. Bu bölümdeki lisans öğrenimini 2004 yılında bitirerek İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 2006 yılında yüksek lisans öğreniminden mezun olmuş ve aynı yıl aynı programdaki doktora öğrenimine başlamıştır. 2005-2009 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışan Rüya ŞAMLI, şu anda halen aynı bölümde öğretim görevlisi olarak hizmet vermekte ve yapay sinir ağları, kararlılık analizi, lineer ve lineer olmayan sistemler üzerine çalışmalarına devam etmektedir.

Bu tez çalışması ile ilgili daha fazla bilgi ruyasamli@istanbul.edu.tr adresinden talep edilebilir.

İstanbul 2011