İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

L_p UZAYLARINDA KONVOLÜSYON VE SÜREKLİLİK

Neşe GÜNÇAVDI
Matematik Anabilim Dalı

I.Danışman
Yrd.Doç.Dr. Gülseren ÇİÇEK

II.Danışman
Prof.Dr. A.Muhammed ULUDAĞ

Eylül , 2011

İSTANBUL

Bu çalışma 20 Eylül 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Üye	Üye	Üye
I.Danışman		
Yrd. Doç. Dr. Gülseren ÇİÇEK	Prof. Dr.Leyla ZEREN AKGÜN	Prof. Dr.Müfit GİRESUNLU
İ.Ü. Matematik Bölümü	İ.Ü. Matematik Bölümü	İ.Ü. Matematik Bölümü

Üye	Üye
Doç. Dr. Meral TOSUN	Yrd. Doç. Dr. Kadri Ulaş AKAY
G.S.Ü. Matematik Bölümü	İ.Ü. Matematik Bölümü

ÖNSÖZ

Tez danışmanım olmayı kabul eden Sayın Yrd. Doç. Dr. Gülseren ÇİÇEK' e, Yüksek Lisans eğitimine başlayıp, derslerini aldığım daha sonra da diğer tez danışmanım olmayı kabul eden ve de ders çalışmamda, tezimde yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. A. Muhammed ULUDAĞ' a, benden yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Cemal ÇİÇEK' e ve derslerini aldığım tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 2011 **Neşe GÜNÇAVDI**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\{\mathbb{S}_n\}$	: Kısmi toplamlar dizisi
$\{f_n\}$	: Fonksiyonlar dizisi
$(X, \mathcal{M}, \mu)$	: Ölçü uzayı
$L_p(\mathbb{R})$	: $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir ve $\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \right|^p dx < +\infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayı
L_+	: Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
L_1^+	: Pozitif değerli integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
χ_E	: E kümesinin karakteristik fonksiyonu
C^∞	: Pürüzsüz fonksiyonlar
C	: Birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar uzayı
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar uzayı
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar uzayı
$f * g$	: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu (girişimi)
$\rightrightarrows$	: Düzgün (uniform) yakınsama
$X \sim N(\eta, \sigma^2)$	: Ortalama değeri η ve varyansı σ^2 olan X rassal değişkenin normal dağılımı

ÖZET

L_p UZAYLARINDA KONVOLÜSYON VE SÜREKLİLİK

Bu tez çalışmasında L_p uzaylarında sürekli fonksiyonların konvolüsyonları ile ilgilenilecek ve bu konvolüsyonların her zaman sürekli olamayacağı üzerine yine bu çalışmada ortaya konulacak bazı özel örnekler ile bir takım gözlemler yapılacaktır.

Bu çalışmayı, dört bölüme ayırmak mümkündür. Birinci bölümde; genel manada konvolüsyon kavramına ve bununla ilgili bazı yargılara değinilmiştir.

İkinci bölümde; "fonksiyon dizileri ve fonksiyon serileri için yakınsaklık kavramlarından", "ölçülebilir küme ve ölçülebilir fonksiyonlar ile ilgili bazı temel özelliklerden", " L_p uzaylarında norm ve normun bazı özelliklerden ve bir takım eşitsizliklerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ise; konvolüsyonun; olasılık teorisinde ifade edilişinden, basit cebirsel özelliklerinden, hangi şartlar altında varolduğu gibi bazı sonuçlarından ve özel olarak Young Eşitsizliğinden bahsedilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde, sürekli fonksiyonların konvolüsyonlarının daima sürekli olmadıkları sonucuyla ve özel olarak süreksiz fonksiyonların konvolüsyonları ile ilgili bir takım örnekler yer almaktadır.

SUMMARY

CONVOLUTION AND CONTINUITY IN L_p SPACES

This study focuses on convolution of continuous functions in L_p spaces and will provide some observations based on some specific examples providing that such convolutions cannot always be continuous.

This study is divided into four sections. First section defines convolution term in its broad meaning and some relevant conclusions.

Section two describes “concept of convergence in function sequences and series”, “some basic attributes of measurable sets and measurable functions”, “Norm in L_p spaces and some attributes of norm” and various inequalities.

Section three refers to convolution as defined in probability theory, its simple algebraic attributes, some conclusions including the conditions under which it occurs and specifically Young’s inequality

Final section of the study provides examples regarding the convolutions of continuous functions are not necessarily continuous and specifically some examples convolutions of discontinuous functions.

1. GİRİŞ

Konvolüsyon (girişim) kavramı, olasılık kuramında bağımsız rassal değişkenlerin toplamlarıyla ilişkili bir kavramdır. Genel manada analizde ve özel manada Fourier analizinde konvolüsyon, iki fonksiyon üzerinde bir matematiksel işlemle tanımlanan yeni bir fonksiyon şeklindedir.

Genel bir kanaat olarak fonksiyonların konvolüsyonlarının pürüzsüzlük özelliklerinin, işleme katılan fonksiyonların pürüzsüzlük özelliklerinden daha gelişmiş olduğu düşünülür. Örneğin; $[0,1]$ aralığında 1, bu aralığın dışında ise sıfır değerini alan f fonksiyonunu ele alalım. f sürekli olmadığı halde f ' nin kendisi ile konvolüsyonu, yani $f*f$ fonksiyonunun sürekli olduğu gösterilebilir. Benzer şekilde $f*f*f$ fonksiyonunun türevlenir, $\underbrace{f*f*...*f}_{n}$ fonksiyonunun $n-2$ kez türevlenir olduğu gösterilebilir. Bu ve benzeri örnekler dolayısıyla konvolüsyon işleminin, fonksiyonların pürüzsüzlük (yani süreklilik, türevlenirlik gibi) özelliklerini daima geliştirdiği ve bu özellikleri bozmadığı yönünde bir kanaat oluşmuştur. Bu kanaat olasılık kuramı ile ilgili çalışmaları olan ünlü Fransız matematikçi Paul Levy tarafından şu şekilde ifade edilmiştir. " *D'une manière gėnérale, toute condition de continuité ou d'analyticité imposée à une seule des lois composantes, toute condition limitant l'irrégularité de sa fonction de répartition et des dérivées de cette fonction, est vérifiée pour la loi résultante. La composition ne peut qu'améliorer la continuité et la régularité*" (Genel itibariyle konvolüsyonu alınan fonksiyonlardan biri üzerine koşulan her süreklilik veya analitiklik şartı, dağılım fonksiyonunun ve bu fonksiyonun türevlerinin düzenliliğini kısıtlayan her şart, sonuçtaki kanun için de geçerlidir. Konvolüsyon sürekliliği ve düzensizliği ancak geliştirebilir) [1]. Buna karşın 1939'da D.A. Raikov, konvolüsyon işlemi altında pürüzsüzlüğün bozulduğunu analitik dağılım fonksiyonlarının simetrizasyonu ile örneklemiştir [2].

Bu çalışmanın amacı, L_p uzaylarında sürekli fonksiyonların konvolüsyonlarının daima sürekli olmadıkları örnekler belirlemektir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. FONKSİYON DİZİLERİ VE SERİLERİ

Bu bölümde genel olarak, $\mathbb{R}$ 'nin boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli $\{f_n\} := \{f_n : E \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizileri ile çalışacağız [3], [4], [5].

2.1.1. Fonksiyon Dizilerinin Yakınsaması ve Bazı Sonuçlar

Tanım 2.1.1.1. Bir $x \in E$ için $\{f_n(x)\}$ reel sayı dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $x \in E$ *noktasında yakınsaktır* denir. Her bir $x \in E$ için $\{f_n\}$ dizisi x noktasında yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi E *üzerinde noktasal yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.1.2. $\{f_n\}$ dizisi E üzerinde noktasal yakınsak olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan f fonksiyonuna, $\{f_n\}$ dizisinin *(noktasal) limit fonksiyonu* adı verilir ve kısaca $f_n \underset{E}{\to} f$ şeklinde gösterilir:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad ,\forall x \in E .$$

Bir başka ifadeyle;

$$f_n \underset{E}{\to} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0 \ ,\forall x \in E \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in E ,\ \forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N(\varepsilon, x) \in N \\ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon, x) . \end{array} \right. \blacksquare$$

Şimdi, noktasal limit işlemi altında fonksiyonların hangi özelliklerinin korunduğu sorusu ile ilgileneceğiz.

Örnek 2.1.1.1. Her n için f_n fonksiyonları sürekli ise $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin noktasal limiti de sürekli olur mu? Bir başka deyişle,

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) \tag{2.1.1.1}$$

eşitliği sağlanır mı inceleyelim.

Çözüm 2.1.1.1. Genel terimi $f_n(x) = x^n$ sürekli fonksiyonlar dizisi her $x \in [0,1]$ için $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. Gerçekten $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = f(x)$ dir. Fakat her bir f_n fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde sürekli olmasına rağmen f fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli değildir. Dolayısıyla eşitlik (2.1.1.1) sağlanamaz. ▪

Örnek 2.1.1.2. $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin her bir terimi türevlenir bir fonksiyon ise bu dizinin limiti de noktasal türevlenir olur mu? Şayet türevlenirse,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \tag{2.1.1.2}$$

eşitliği sağlanır mı inceleyelim.

Çözüm 2.1.1.2. Genel terimi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ olan fonksiyonlar dizisi verilsin. Dikkat edilirse $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ ve $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ bulunur. Bu durumda (2.1.1.2) (yani $\left\{f_n'\right\} \to f'$ özelliği) geçerli olmaz .

Örnek 2.1.1.3. $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin her bir terimi $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirse bu dizinin noktasal limiti de bu aralıkta integrallenebilir midir?. Şayet integrallenebilirse,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,. \tag{2.1.1.3}$$

eşitliği sağlanır mı inceleyelim.

Çözüm 2.1.1.3. Genel terimi $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ $(0 \le x \le 1, n = 1,2,...)$ ile verilen $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olduğu için $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin integrali:

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2n+2}$$

dir. Bu integralin limiti

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

olur. Fakat limitin integrali

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0$$

şeklindedir. Bu durumda (2.1.1.3) geçerli olmaz. Yani integralin limiti, limitinin integraline eşit olmak zorunda değildir.

Sonuç 2.1.1.1. Genel olarak noktasal limit altında fonksiyonların süreklilik, türevlenirlik, integrallenebilirlik gibi özellikleri korunmaz. ▪

Bu özelliklerin korunmasını sağlayan uygun yakınsaklık tanımı, noktasal yakınsamadan daha kuvvetli bir şart olan düzgün (uniform) yakınsamadır. Şimdi bu kavramı inceleyelim.

Tanım 2.1.1.3. (***Düzgün Yakınsama***) Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\{ f_n \}$ fonksiyonlar dizisi verilsin ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$ sağlanıyorsa $\{f_n\}$ dizisi *E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor* denir ve $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ şeklinde gösterilir[1].

Başka bir deyişle;

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 ,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \\ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in E \end{cases}$$

Not 2.1.1.1. (a) Yukarıdaki tanımdan E kümesi üzerinde düzgün yakınsak her fonksiyon dizisinin aynı zamanda E üzerinde noktasal yakınsak olacağı kolayca görülür.

(b) Dikkat edilirse düzgün yakınsama ile noktasal yakınsama tanımları arasındaki fark, tanımlarda sözü geçen N doğal sayısının noktasal yakınsamada $x \in E$ noktasına bağlı iken; düzgün yakınsama da $x \in E$ den bağımsız her $x \in E$ için geçerli olacak şekilde bulunmasıdır. ▪

Şimdi $\{f_n(x)\}$ dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsaması için gerek ve yeter şartı ifade eden ve düzgün yakınsaklık için Cauchy şartı diye adlandırılan teoremi verelim.

Teorem 2.1.1.1. (Cauchy Şartı) [13] Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\{ f_n \}$ fonksiyonlar dizisi verilsin. $\{f_n\}$ dizisinin E

---

[1] Buradaki norm: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$ şeklinde tanımlı supremum normdur.

üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısının $m,n \geq N$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in E$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde var olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall x \in E$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Böylece her $m,n \geq N$ ve her $x \in E$ için

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

$\Leftarrow$: "$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m,n \geq N$, $\forall x \in E$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ " özelliğini sağlayan $\{f_n(x)\}_{n \in N}$ sağlayan fonksiyon dizisini göz önüne alalım. Bu dizi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir dolayısıyla yakınsaktır: $f_n \to f$. $n \geq N$ ve $x \in E$ için

$$\lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

özelliğinden yakınsamanın düzgün olduğu elde edilir.

Sonuç 2.1.1.2. Cauchy şartı gereğince, $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisinin E üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısının $m,n \geq N$ özelliğindeki her $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

olacak şekilde var olmasıdır.

Not 2.1.1.2. $\{f_n(x)\}$ dizisinin terimleri $[a,b]$ aralığında sürekli ve bu dizinin limit fonksiyonu $f(x)$ olsun. Sonuç 2.1.1.1 den $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli olması gerekmez. Öte yandan terimleri bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyon dizisi, bu aralıkta düzgün yakınsak olmadığı halde sürekli bir limit fonksiyonuna sahip olabilir (bkz. Çözüm 2.1.1.3).

Şimdi fonksiyon dizilerinin süreklilik, türevlenirlik, integrallenirlik gibi özelliklerinin düzgün yakınsama altında korunması ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 2.1.1.2. Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\{f_n\}$ sürekli fonksiyonlar dizisi, E üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor ise f fonksiyonu E üzerinde süreklidir (ve böylece her $x \in E$ için (2.1.1.1) eşitliği sağlanır).

Not 2.1.1.3. Not 2.1.1.2 de açıklananlardan ötürü, yukarıdaki teoremin tersi için her zaman doğrudur diyemeyiz.

Teorem 2.1.1.3. $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Şayet $\{f_n\}$ dizisi $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise f de $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olur ve (2.1.1.3) eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.1.4. $\{f_n\}$ terimleri $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenen fonksiyon dizisi ve bir $x_0 \in [a,b]$ için $\{f_n(x_0)\}$ dizisi yakınsak olsun. $\{f_n'\}$ dizisi $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi $[a,b]$ üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olur ve her $x \in [a,b]$ için (2.1.1.2) eşitliği sağlanır .

2.1.2. Fonksiyon Serilerinin Yakınsaması

Tanım 2.1.2.1. Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi verilsin. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ bir fonksiyon serisi, $S_n(x)$ serinin kısmi toplamlar serisi ($S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$) ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) $\{S_n\}$ dizisi E üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir.

(ii) $\{S_n\}$ dizisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir.

(iii) Her $x \in E$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ serisi E üzerinde yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde *mutlak yakınsaktır* denir.

Teorem 2.1.2.1. Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon verilsin.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor ise f E üzerinde sürekli olur.

(ii) $E = [a,b]$, $\{f_n\}$ terimleri E üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Bu durumda f de E üzerinde integrallenebilir olur ve

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{b=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

eşitliği sağlanır.

(iii) $E=(a,b)$, $\{f_n\}$ terimleri E üzerinde türevlenen bir fonksiyon dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ serisi E üzerinde düzgün yakınsak olsun. Bir $x_0 \in E$ için $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır, f E üzerinde türevlenirdir ve her $x \in E$ için

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

eşitliği sağlanır. ▪

Şimdi ise serilerin düzgün yakınsaklığı için kullanılan testlerden en çok kullanılan iki testi verelim.

Teorem 2.1.2.2. [Weierstrass M-Test] Reel sayıların boştan farklı bir E alt kümesi üzerinde tanımlı bir $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi olsun. Sabit ve pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ serisi yakınsak ve her $x \in E$, $k \in N$ için $|f_k(x)| \le M_k$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar.

Teorem 2.1.2.3. [Dirichlet' in Düzgün Yakınsaklık Testi] E, reel sayıların boştan farklı bir alt kümesi olsun ve $k \in N$ için $f_k, g_k : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları tanımlansın. Şayet $n \in N$ ve $x \in E$ için $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le M < \infty$ ve $k \to \infty$ iken g_k E üzerinde 0 sayısına yakınsıyor ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ serisi de E üzerinde düzgün yakınsar.

2.2. L_P UZAYLARI İÇİN GEREKLİ TANIM VE TEOREMLER

L_p uzaylarına giriş niteliğinde olan bu bölümde öncelikle L_p uzayları tanımında geçen ölçü konusunu ele alacağız. Ancak bu konu çok kapsamlı olduğundan tezimiz için gerekli olan bazı tanım ve teoremleri, daha sonra da Lebesgue integrallenebilirlik tanımını ve teoremlerini vereceğiz[5], [6], [7], [8] , [9] ,[10].

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme olsun. X 'in boş olmayan bir $\mathcal{M}$ koleksiyonu için

i) $\varnothing, X \in \mathcal{M}$

ii) Her $E \in \mathcal{M}$ için $E^c \in \mathcal{M}$

iii) Her $n \in N$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{M}$ ' ye X üzerinde bir $\sigma -$ cebri denir. Bu durumda $(X,\mathcal{M})$ sıralı ikilisine *ölçülebilir uzay* ve $\mathcal{M}$ deki her bir kümeye de *ölçülebilir küme* denir.

Tanım 2.2.2. $(X,\mathcal{M})$ ölçülebilir uzay olmak üzere $\mathcal{M}$ $\sigma -$ cebri üzerinde tanımlı $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ fonksiyonu

i) $\mu(\varnothing) = 0$

ii) $\{E_j\}_1^{\infty}$, de ikişerli ayrık kümeler dizisi ise $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

koşullarını sağlıyorsa μ ' ye $\mathcal{M}$ üzerinde bir ölçü denir. Bu durumda $(X,\mathcal{M},\mu)$ sıralı üçlüsüne de *ölçü uzayı* denir.

Tanım 2.2.3. (Dış ölçü) $E \subset \mathbb{R}$ verilsin. I_k bir aralık ve $\ell(I_k)$ bu aralığın uzunluğu olsun. E ' nin $(Lebesgue)$ dış ölçüsü

$$\mu^*\left(E\right)=\inf_{E\subset\bigcup_k I_k}\sum_k \ell\left(I_k\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.4. Bir $E\subseteq\mathbb{R}$ kümesi verilsin. Her $S\subseteq\mathbb{R}$ için

$$\mu^*(S)=\mu^*\left(S\cap E\right)+\mu^*\left(S\cap E^c\right)$$

ise E kümesine *Lebesgue ölçülebilir* denir.

Tanım 2.2.5. $(X_1,\mathcal{M}_1),(X_2,\mathcal{M}_2)$ iki ölçülebilir uzay ve $f:X_1\to X_2$ bir fonksiyon olmak üzere her $E\in\mathcal{M}_2$ için $f^{-1}(E)\in\mathcal{M}_1$ oluyorsa, f ' ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.6. $(X,\mathcal{M},\mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer $E\subset X$ kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_E ile gösterirsek

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. χ_E ölçülebilirse E ' ye *ölçülebilir küme* denir.

Tanım 2.2.7. $(X,\mathcal{M},\mu)$ bir ölçü uzayı olsun. X üzerinde tanımlı ve sonlu sayıda değer alan fonksiyona *basit fonksiyon* denir.

Başka bir deyişle; $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir ve f ' in değer kümesi $\mathbb{R}$ ' nin sonlu bir alt kümesi ise f ' ye *basit fonksiyon* denir. Hakikaten $E_j=f^{-1}\left(\left\{z_j\right\}\right)$ ve $range(f)=\left\{z_1,z_2,...,z_n\right\}$ için

$$f=\sum_{j=1}^{n}z_j\chi_{E_j}$$

olur. Buna f ' nin standart gösterimi denir.

Bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesi küçükse Riemann integrali vardır. Daha geniş kümeler için Lebesgue integraline ihtiyaç vardır. Örneğin ; f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,x\in Q \\ 0 & ,x\notin Q \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun Riemann integrali tanımsızdır. Fakat f fonksiyonu basit fonksiyondur. Ayrıca $\mu(Q)=0$ olduğundan Lebesgue integrali ile hesaplanabilir.

Tanım 2.2.8. f , $\mathbb{R}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon, $\int_{\mathbb{R}} |f|\,d\mu$ integrali sonlu ise f ' ye *integrallenebilir fonksiyon* denir. Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar uzayı L_+ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. [Monoton Yakınsaklık] $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Her n için $f_n \leq f_{n+1}$ ve $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ ise

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu$$

dir.

Teorem 2.2.2. $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. $f=\sum_n f_n$ ise $\int f=\sum_n \int f_n$ sağlanır.

Önerme 2.2.1. $f \in L_+$ olsun. $\int f = 0$ ancak ve ancak $f = 0$ ise sağlanır.

Sonuç 2.2.1. $\{f_n\} \subset L_+$ olmak üzere

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dm$$

dir.

2.3. L_p UZAYLARI

Bu bölümde L_p uzayları ile ilgili tanım ve teoremlerden bahsedeceğiz [7], [8], [9]. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak integrallenebilir fonksiyonlar kümesi $L_1(\mathbb{R})$ kümesi ile gösterilir.

Yani, $L_1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ } ölçülebilir \text{ } ve \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right\}$.

Örnek 2.3.1.

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x) dx| < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{1+x^2} \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \arctan x \Big|_{\infty}^{-\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})$$

$$= \pi < \infty$$

olduğundan $f \in L_1$ dir.

$\mathbb{R}$ üzerinde sınırsız olduğu halde mutlak integrallenebilen fonksiyonlar vardır.

Örnek 2.3.2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x\in(-1,1)/\{0\}\\ 0 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2} & x\in\mathbb{R}\backslash(\text{-}1,1)\end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx+\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty^+}\int_{a}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{a\to-\infty^+}1-\frac{1}{a}=1$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{-x}}dx=\lim_{b\to0^-}\int_{-1}^{b}\frac{1}{\sqrt{-x}}dx=\lim_{b\to0^-}2-2\sqrt{a}=2$$

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{c\to0^+}\int_{c}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{c\to0^+}2\sqrt{a}-2=2$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{d\to\infty^-}\int_{1}^{d}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{d\to\infty^-}1-\frac{1}{d}=1$$

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=1+2+2+1<\infty$$

olduğundan $f\in L_1$ dir.

Tanım 2.3.1. ($ess\sup f$). f, ölçülebilir bir fonksiyon olsun

$$ess\sup f = \inf\{b \in R : \mu(\{x : f(x) > b\}) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır

Tanım 2.3.2. f, $\mathbb{R}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise f'nin L_p − normu

1) $1 \le p < \infty$ için $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

2) $p = \infty$ için $\|f\|_\infty = ess\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.3. $1 \le p < \infty$ için $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli p−inci kuvveti integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar kümesi $L_p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Başka bir deyişle;

$$L_p(\mathbb{R}) = \left\{f, \mathbb{R} \text{ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve } \|f\|_p < \infty\right\}$$

$p = \infty$ için $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar kümesi $L_\infty(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve

$$L_\infty(\mathbb{R}) = \left\{f \text{ , } \mathbb{R} \text{ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve } \operatorname{esssup}|f| < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Teorem 2.3.1. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (yani $q = \dfrac{p}{p-1}$) olmak üzere $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ için $\|f.g\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$ olur.

Buradan $f \in L_p$, $g \in L_q$ ise $f.g \in L_1$ olduğu çıkar. Bu durumda $(\alpha;\beta) \neq (0;0)$ şartını sağlayan α, β sabitleri için $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ ise

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.3.2. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f, g \in L_p$ olsun. Bu durumda

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p \, \|g\|_p$$

olur.

Ayrıca ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ özelliği sağlandığından Minkowski eşitsizliğine göre L_p uzayı $p \geq 1$ için vektör uzayıdır.

2.4. KONVOLÜSYON (GİRİŞİM)

Bu bölümde, ölçülebilir fonksiyonlar üzerindeki konvolüsyon işlemini tanımlayıp inceleyeceğiz [9], [11], [12], [13], [14], [15], [16].

Konvolüsyon işleminin ortaya çıkış yerlerinden biri, olasılık kuramıdır. Bağımsız rassal (random) değişkenlerin toplamının olasılık yoğunluk fonksiyonu bu rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyonu ile verilir.

Şimdi bunu biraz açalım ve ayrık rassal değişkenler için ne anlama geldiğine bakalım.

X ayrık bir rassal değişken olsun. Bu rassal değişkenin $\mathbb{Z}$ kümesinde değerler aldığını varsayalım. X 'in olasılık fonksiyonu $f:\mathbb{Z}\to[0,1]$ verilsin. O halde, her $A\subseteq\mathbb{Z}$ için

$$P\left(X\in A\right)=\sum_{n\in A}f(n)$$

olur.

Şimdi Y bir başka $\mathbb{Z}$ değerli ayrık rassal değişken ve olasılık fonksiyonu da g olsun. Eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenlerse, $X+Y$ rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P\left(X+Y=n\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P(X=m)P(Y=n-m) \qquad (2.4.1)$$

toplamı ile verilir.

Dolayısıyla $X+Y$ rassal değişkenin olasılık fonksiyonu da,

$$h(n)=\sum f(m)g(n-m) \qquad m\in Z \qquad \text{olur.}$$

Bu h fonksiyonuna f ile g 'nin girişimi (konvolüsyonu) denir ve $f*g$ ile gösterilir. Yani bağımsız ayrık rassal değişkenlerin toplamının olasılık fonksiyonu, bu rassal değişkenlerin olasılık fonksiyonlarının konvolüsyonudur. Örneğin en çok kullanılan dağılımlardan biri olan Poisson dağılımını ele alalım.

X_1, X_2 Poisson rassal değişkenleri ve λ_1, λ_2 parametreleri olsun. Rassal değişkenlerin olasılık fonksiyonları

$$P(X_1=k)=\frac{\lambda_1^{\,k}e^{-\lambda_1}}{k!}\ ,\ P(X_2=k)=\frac{\lambda_2^{\,k}e^{-\lambda_2}}{k!}$$

şeklinde tanımlanır.

X_1, X_2 bağımsız rassal değişken olduğuna göre iki bağımsız rassal değişkenin olasılık fonksiyonu (2.4.1) denkleminden

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 = n) P(X_2 = k - n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{\,n} e^{-\lambda_1}}{n!} \frac{\lambda_2^{\,k-n} e^{-\lambda_2}}{(k-n)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\lambda_2^{\,k-n} \lambda_1^{\,n}}{(k-n)!n!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{\,k-n} \lambda_1^{\,n} k!}{(k-n)!n!}$$

$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

olur.

Parametreleri λ_1, λ_2 olan iki bağımsız Poisson rassal değişkeninin toplamı da Poisson kanununa uyar ve parametresi $\lambda_1 + \lambda_2$ dir. Şimdi bu dağılım kullanımına yapay bir örnek verelim.

Örnek 2.4.1. (Poisson Dağılımı) Boğaz köprüsünden Anadolu yakasına dakikada bir ortalama 12 araç, Avrupa yakasına ise her dakikada ortalama 16 araç geçmektedir. Bu dağılımın poisson dağılımına uyduğunu varsayarak gelecek 1 dakika içinde köprüden toplam 30 aracın geçiş yapma olasılığını hesaplayınız.

X_1 : Anadolu yakasına geçen araç sayısını veren rassal değişken

$$X_1 = \begin{cases} 0\ , & \text{hiç araç geçmiyorsa} \\ 1\ , & \text{1 araç geçiyorsa} \\ 2\ , & \text{2 araç geçiyorsa} \\ \vdots & \end{cases}$$

X_2 : Avrupa yakasına geçen araç sayısını veren rassal değişken

$$X_2 = \begin{cases} 0\ , & \text{hiç araç geçmiyorsa} \\ 1\ , & \text{1 araç geçiyorsa} \\ 2\ , & \text{2 araç geçiyorsa} \\ \vdots & \end{cases}$$

$$P(X_1 = k) = f(k, \lambda_1) = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \qquad \lambda_1 = 12$$

$$P(X_2 = k) = g(k, \lambda_2) = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} \qquad \lambda_2 = 16$$

şeklinde tanımlanır. $(2.4.1)$ ' den $X_1 + X_2$ ' nin olasılık fonksiyonu

$$P\left(X_1 + X_2 = k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n, \lambda_1) g(k-n, \lambda_2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1}}{n!} \frac{\lambda_2^{k-n} e^{-\lambda_2}}{\left(k-n\right)!}$$

$$= e^{-\lambda_1 + \lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n \lambda_2^{k-n}}{n!\left(k-n\right)!}$$

$$= e^{-\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^k}{k!}$$

beklenen değer $k = 30$ olduğundan λ_1, λ_2 değerlerini yerine yazarsak

$$P\left(X_1 + X_2 = 30\right) = e^{-(28)} \frac{(28)^{30}}{30!}$$

elde edilir.

Yukarıda ayrık rassal değişkenler için verdiğimiz konvolüsyon tanımını şimdi sürekli rassal degişkenler için verelim. X sürekli rassal değişken olsun X 'in olasılık fonksiyonu da $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ ile verilsin. O halde, her $A \subseteq R$ için

$$P\left(X \in A\right) = \int_A f(x)dx \qquad \text{olur.}$$

Şimdi Y bir başka sürekli rassal değişken olasılık fonksiyonu da g olsun. Eğer X ve Y bağımsız rassal değişkenler ise, $X + Y$ ' nin bir A kümesinde değer alma olasılığı

$$P\left(X + Y \in A\right) = \int_A f(x)g(y - x)dx$$

integrali ile verilir. Dolayısıyla $X + Y$ rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(y) = \int_A f(x)g(y - x)\ dx$ fonksiyonudur.

Bu h fonksiyonuna f ile g 'nin girişimi (konvolüsyonu) denir ve $f * g$ ile gösterilir. Yani bağımsız sürekli rassal değişkenlerin toplamının olasılık yoğunluk fonksiyonu, rassal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyonudur.

Örnek 2.4.2. Gauss dağılımı en çok kullanılan dağılımlardan biridir ve $-\infty \leq x \leq \infty$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada μ ortalama ve σ standart sapmadır. Bu durumu kolaylaştırmak için değişken dönüşümü yapılarak $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ ayarlanabilir. Dönüşüm yapılmış dağılıma standart normal dağılım denir.

$X \in A$ için f 'nin standart normal dağılım fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

olur.

Gauss dağılımı $x \rightarrow \pm\infty$ için hızla sıfıra gittiğinden integrallenir olduğu kolayca görülür. Bu integrali hesaplamak içinse özel bir teknik kullanarak

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

O halde X ve Y iki bağımsız rassal değişken ve ikisi de standart dağılımlıysa bu rassal değişkenlerin toplamının A kümesinde değer alma olasılığı

$$P\left(X + Y \in A\right) = \int_A f(x) g(y - x) dx$$

$$= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_A e^{-\frac{1}{2}(2x^2 + 2xy + y^2)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{4}} \int_A e^{-\frac{(\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}})^2}{2}} dx$$

fonksiyonu ile verilir. Şimdi ise $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}\int\limits_A e^{-\frac{(\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{2}})^2}{2}}dx$ integralinde $\sqrt{2}x-\frac{y}{\sqrt{2}}=u$ dönüşümü yapalım. $\sqrt{2}dx=du$ olur. O halde sırasıyla,

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\pi}\int\limits_A e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_A \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}$$

elde edilir.

Genel olarak X rassal değeri için ortalama değeri μ ve varyansı σ^2 olan bir normal dağılım

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

şeklinde ifade edilir.O halde $X_{1,}X_2$ bağımsız rassal değişkenleri için $X_1 \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^{\,2}\right)$ ve $X_2 \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^{\,2}\right)$ ifadeleri bağımsız normal rassal değişkenler ise bunların toplamı

$$X_1+X_2 \sim N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}\right)$$

olur. Standart normal dağılım için bu gösterim $\mu=0,\sigma=1$ olduğundan

$$X_1+X_2 \sim N\left(0,2\right)$$

şeklinde gösterilir.

f, g olasılık yoğunluk fonksiyonlarının konvolüsyonunun bağımsız rassal değişkenlerin toplamına karşılık geldiğini gösterdik. Konvolüsyon integrali f ve g fonksiyonlarının birer olasılık yoğunluğu olmadığı bir çok durumda da tanımlanabilir. Örneğin bu genel konvolüsyon işlemi Fourier analizi gibi konularda karşımıza çıkar ve kullanılır.

Tanım 2.4.1. f ve g fonksiyonları $\mathbb{R}$ de ölçülebilir fonksiyonlar olsun. f ve g 'nin konvolüsyonu integralin var olduğu her x için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left(f * g\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

Şimdi konvolüsyonun hangi şartlar altında mevcut olduğuna bakalım.

(i) f sınırlı ve kompakt desteğe sahip bir fonksiyon, g herhangi bir yerel integrallenebilir bir fonksiyon ise $f * g$,

(ii) $f \in L_1$ ve g sınırlı bir fonksiyon ise $f * g$,

(iii) $f, g \in L_2$ ise $f * g$,

(iv) f parçalı sürekli bir fonksiyon g sınırlı bir fonksiyon ise $f * g$,
fonksiyonları vardır.

Bu sonuçlar daha sonra vereceğimiz Young eşitsizliğinden çıkarılabilir. Ama önce konvolüsyonun basit cebirsel özelliklerinden sözedelim.

Teorem 2.4.1. Konvolüsyon aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$ (doğrusallık özelliği)

(ii) $f * g = g * f$ (değişme özelliği)

(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (birleşme özelliği)

İspat.

(i) : $\left(f * (ag + bh)\right)\left(x\right) = \int f(x)(ag + bh)(y - x)dx$

$$= \int \left[f(x).a.g.(y - x) + f(x).b.h.(y - x) \right] dx$$

$$= a \int f(x).g.(y - x)dx + b \int f(x).h.(y - x)dx$$

$$= a(f * g) + b(f * h)$$

(ii) : $z = x - y$ yazarsak

$$\left(f * g\right)(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int f(z)g(x - z)dz = g * f(x)$$

(iii) : $\left((f * g) * h\right)(x) = \int f * g(x - y)h(y)dy = \iint f(z)g(x - y - z)h(y)dzdy$

$$= \iint f(z)g(x - y - z)h(x - z)d(x - z)dz$$

$$= \int f(z)g * h(x - z)dz = f * (g * h)(x) . \quad ▪$$

İzleyen teorem konvolüsyonun varlığı için yeter bir şart vermektedir.

Teorem 2.4.2. (Young Eşitsizliği) $f \in L_1$ ve $g \in L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ise hemen hemen her x için $(f * g)(x)$ vardır. $(f * g)(x) \in L_p$ ve

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

olur.

Daha genel olarak, $1 \leq p.q.r \leq \infty$ ve $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $f * g \in L_r$ ve

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \text{ dir.}$$

Şimdi konvolüsyonun mevcut olduğu şartların bazılarını Young eşitsizliğini kullanarak gösterelim.

(i) $f \in L_1$ ve $g \in L_\infty$ olsun. Young eşitsizliğini kullanacak olursak $p = 1, q = \infty$ olduğundan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ denklemin çözümünden $r = \infty$ dur ve

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

sağlanır.

(ii) Benzer şekilde $f, g \in L_2$ olsun . $p = 2, q = 2$ olduğundan $r = \infty$ dur ve

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

sağlanır.

Önerme 2.4.1. $p^{-1}+q^{-1}=1$, $f\in L_p$ ve $g\in L_q$ ise her x için $\left(f*g\right)(x)$ sınırlı, düzgün sürekli ve

$$\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p\,\|g\|_q \text{ dir.}$$

Üstelik $1<p<\infty$ için $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f*g\right)(x)=0$ dır. Eğer $p=1$ ve g kompakt destekliyse aynısı doğrudur.

Önerme 2.4.2. f ve g kompakt destekli sınırlı fonksiyonlar olsunlar. Şayet $f, g\in C^\infty$ ise $f*g\in C^\infty$ dir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Birinci bölümde konvolüsyon (girişim) hakkında genel bilgi verilerek, olasılık kuramında bağımsız rassal değişkenlerin toplamından yola çıkarak konvolüsyonun tanımı verilmiştir.

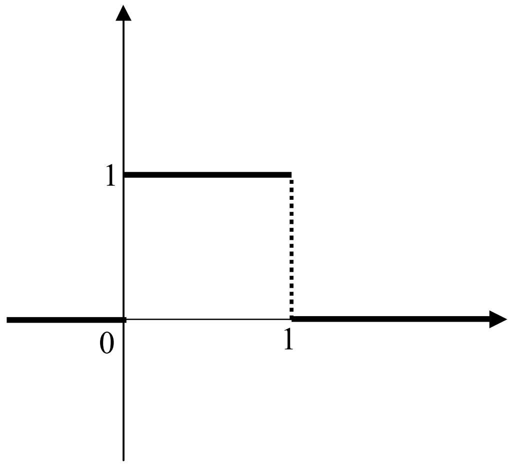
İkinci bölümde, Reel analize hazırlık yapıp asıl konumuz olan L_p uzaylarında süreklilik ve konvolüsyon için gerekli olan fonksiyon dizileri ile ilgili genel bilgiler, serilerin düzgün yakınsaması, L_p uzaylarında gerekli olan ölçü kavramı ile ilgili tanım ve teoremler, L_p uzayları, konvolüsyon, konvolüsyon ve süreklilik için gerekli koşullar hakkında bilgi verilmiştir.

İzleyen bölümde, 1. ve 2. bölümde tanımlanan ve temel özelliklerini verdiğimiz konvolüsyon işleminin fonksiyonların sürekliliği üzerindeki etkisi incelenmiştir.

4. BULGULAR

Bu bölümde konvolüsyonun, fonksiyonların sürekliliğini geliştirmesinin basit örnek üzerinde gösterelim. f olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyle verilsin.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ,0\le x\le 1 \\ 0 & ,x\in\mathbb{R}\setminus[0,1] \end{cases}$$

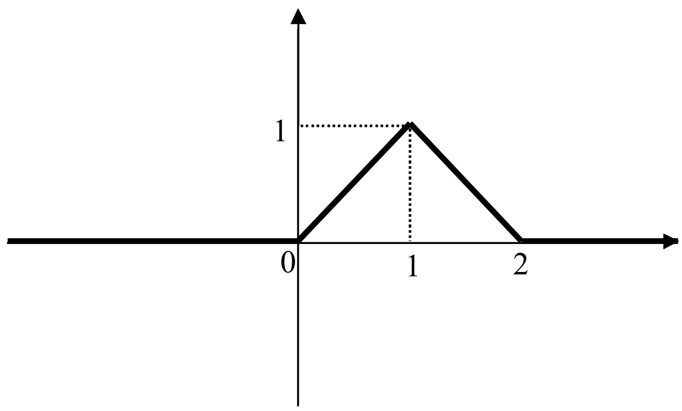


Şekil 4.1: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

Bu durumda $f*f$ konvolüsyonunu hesaplayalım:

$$(f*f)(x)=\begin{cases} x & ,0\le x\le 1 \\ -x+2 & ,1\le x\le 2 \\ 0 & ,diğerleri \end{cases}$$

bulunur ve grafiği



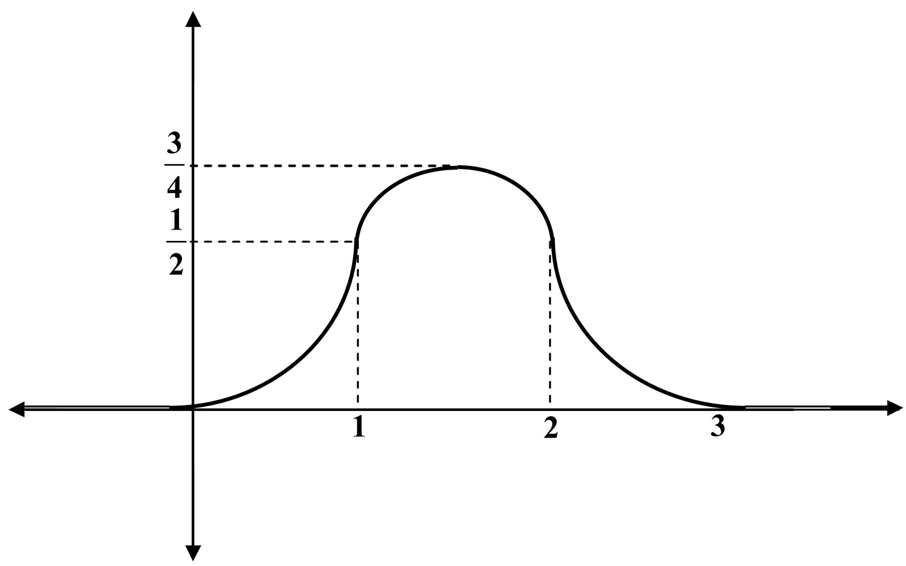
Şekil 4.2: $f*f$ fonksiyonunun grafiği

şeklindedir.

Şimdi de bir adım daha ilerleyip $f*f*f$ konvolüsyonunu hesaplayalım:

$$(f*f*f)(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & ,0\le x\le 1 \\ \dfrac{-2x^2+6x-3}{2} & ,1\le x\le 2 \\ \dfrac{(x-3)^2}{2} & ,2\le x\le 3 \\ 0 & ,\textit{diğerleri} \end{cases}$$

bulunur ve grafiği



Şekil 4.3: $f*f*f$ fonksiyonunun grafiği

şeklindedir.

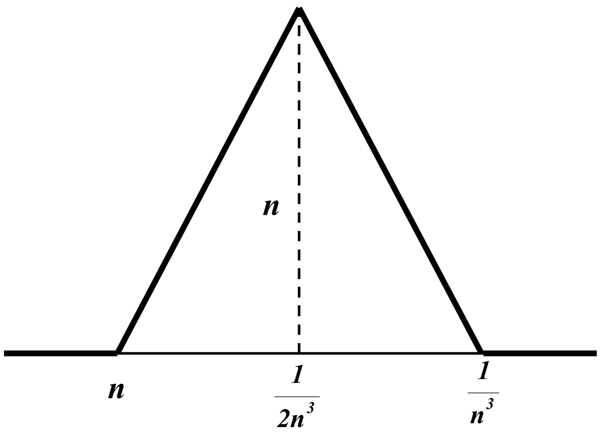
Sonuç 2.4.1. Süreksiz iki adım fonksiyonunun konvolüsyonu sürekli olabilir ve süreksiz adım fonksiyonu ile sürekli bir fonksiyonun konvolüsyonu süreklidir. ▪

Şimdiki amacımız bu sonucun her zaman geçerli olmadığını göstermektir.

Bunun için öyle sürekli f, g fonksiyonları bulalım ki, $f, g \in L_1$, fakat $f * g$ süreksiz olsun . Bu takdirde fonksiyon

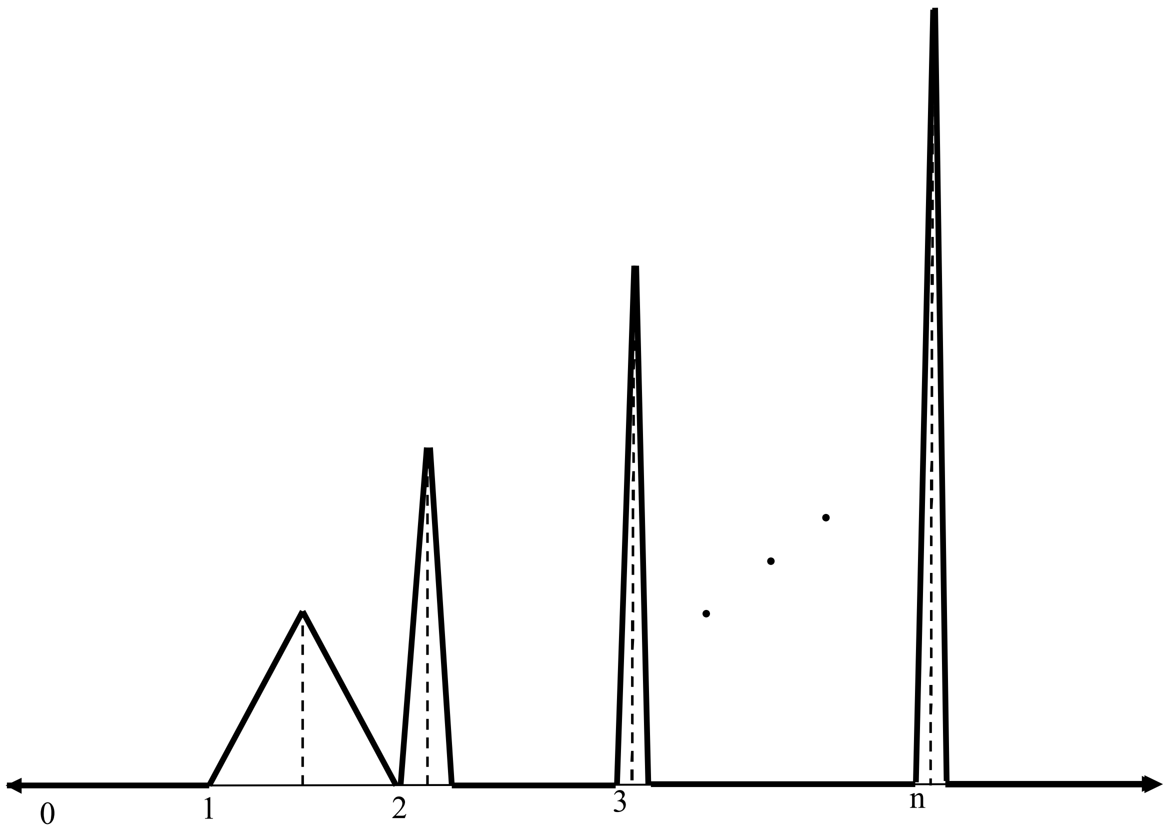
$$S_n(x) = \begin{cases} 2n^4(x-n) & , n \le x \le n + \dfrac{1}{2n^3} \\ -2n^4(x-n-\dfrac{1}{n^3}) & , n + \dfrac{1}{2n^3} < x \le n + \dfrac{1}{n^3} \\ 0 & , diğerleri \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve grafiği ise



Şekil 4.4: $S_n(x)$ fonksiyonunun grafiği

olarak elde edilir. Öte yandan $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)$ olarak tanımlanırsa, $f(x)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.5: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği

şeklinde bulunur.

f fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu sonuç2.2.1 ve S_n fonksiyonunun simetrik olduğu kullanılarak

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(x)dx \qquad (S_n \text{ simetrik olduğundan})$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}} 2n^4(x-n)dx$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}2n^4\int_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}}(x-n)dx$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}2n^4\left.\frac{(x-n)^2}{2}\right|_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}<\infty$$

elde edilir.Yani $f\in L_1$ olur. f fonksiyonunu normalize ederek ($\frac{\pi^2}{12}$ ile bölerek) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$ olan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu yapabiliriz.

Şimdi g fonksiyonunu $g(x)=f(-x)$ ile tanımlayalım. f ve g birer olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunda $f*g$ konvolüsyonunun hemen her x için tanımlı ve L_1^+ da olduğunu biliyoruz. Öte yandan $f*g$ konvolüsyonunu hesaplarsak

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)dt=\int_{\mathbb{R}}f(t)f(t-x)dt$$

$$=\int_{\mathbb{R}}(\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t)\sum_{m}^{\infty}S_m(t-x))dt \qquad \left(m\le n \; için \, a_x\le x<a_x+1, a_x\in Z\right)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}S_n(t)S_m(t-x)\,dt \qquad \left(S_m(t-x)=S_{n-a_x}(t-x)\right)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}S_n(t)S_{n-a_x}(t-x)\,dt \qquad \left(S_n\in L_+ \text{ olduğundan}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} S_n(t)S_{n-a_x}(t-x)\,dt$$

olur. Yukarıdaki integrali hesaplamak için önce $S_{n-a_x}(t-x)$ fonksiyonunu yazalım

$$S_{n-a_x}(t-x)=\begin{cases} 2(n-a_x)^4(t-n+a_x-x) & ,n-a_x+x\le t\le n-a_x+x+\dfrac{1}{2(n-a_x)^3} \\ -2(n-a_x)^4(t-n-x+a_x-\dfrac{1}{(n-a_x)^3}) & ,n-a_x+x+\dfrac{1}{2(n-a_x)^3}<t\le n-a_x+x+\dfrac{1}{(n-a_x)^3} \\ 0 & ,diğerleri \end{cases}$$

bulunur.Şimdi bu fonksiyonu x pozitif bir tam sayı olmak üzere $f*g$ konvolüsyonunda yerine yazarsak,

$$(f*g)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} S_n(t)\,S_{n-x}(t-x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}} 2n^4(t-n)2(n-x)^4(t-n)\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{n+\frac{1}{2n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} -2n^4\left(t-n-\frac{1}{n^3}\right)2(n-x)^4(t-n)\,dt\right]$$

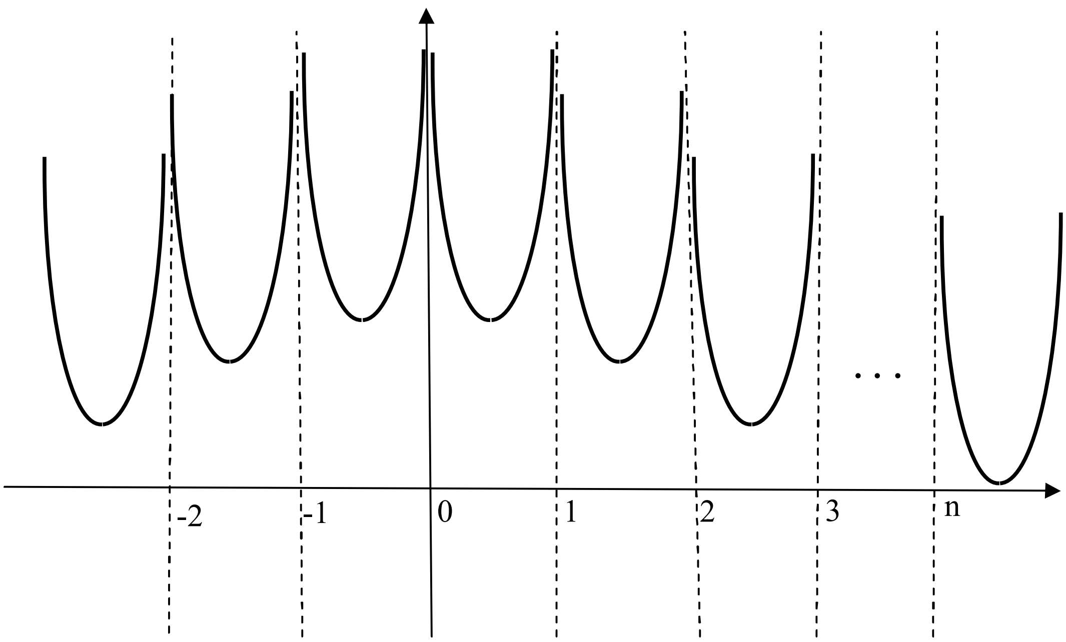
$$=\sum_{n=1}^{\infty}4n^4(n-x)^4\left[\int_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}}(t-n)^2dt-\int_{n+\frac{1}{2n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}}(t-n)^2-\frac{1}{n^3}(t-n)\,dt\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}4n^4(n-x)^4\left[\frac{(t-n)^3}{3}\Bigg|_{n}^{n+\frac{1}{2n^3}}-\left(\frac{(t-n)^3}{3}-\frac{(t-n)^2}{2n^3}\right)\Bigg|_{n+\frac{1}{2n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 4n^4 \left(n-x\right)^4 \frac{1}{8n^9}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n-x\right)^4}{2n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(1-\frac{x}{n}\right)^4$$

sonucuna ulaşılır. Bu elde edilen son toplam $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\right]$ toplamına benzerdir. Yani her x pozitif tamsayısı için seri ıraksaktır. Benzer şekilde $x \le 0$ durumunda da serimiz ıraksaktır. Yani her x tamsayısı için serimiz sonsuz değerini alır.

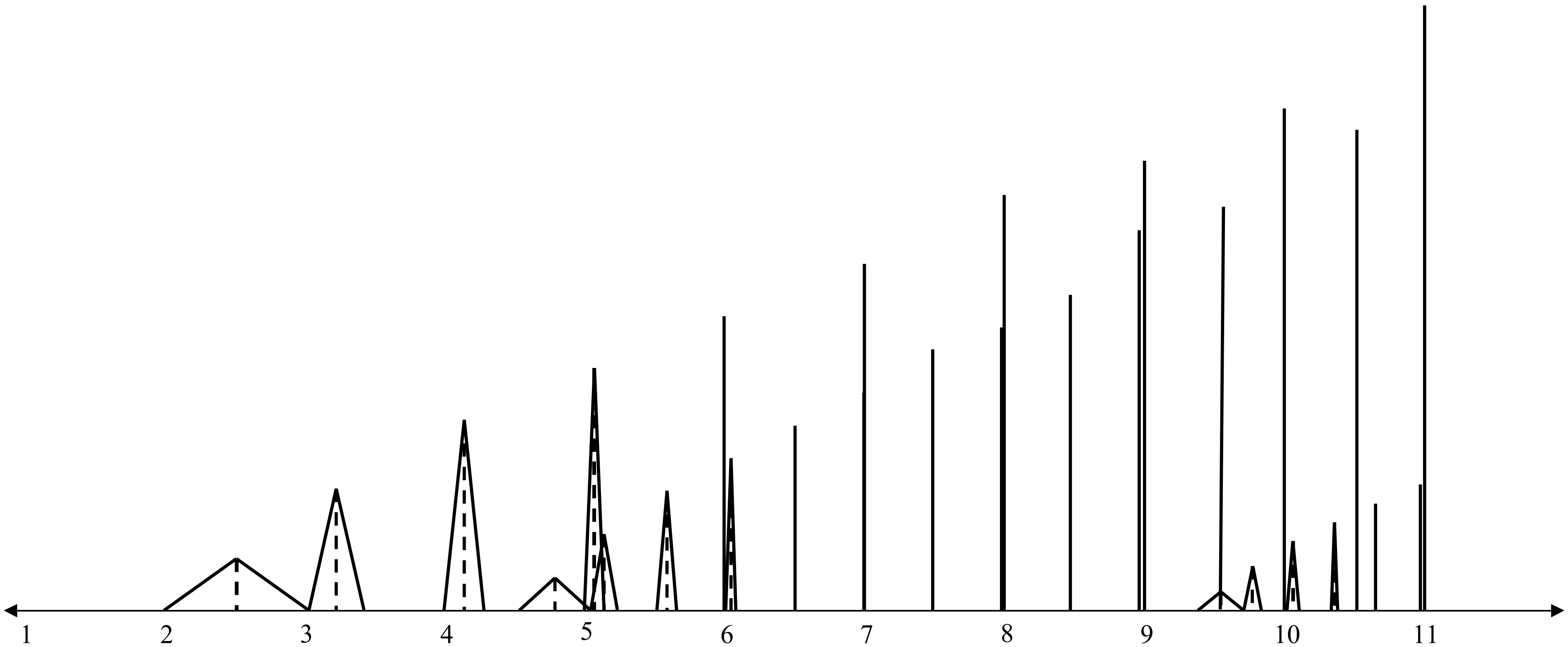


Şekil 4.6: $\left(f * g\right)(x)$ fonksiyonunun grafiği

f fonksiyonunu kullanarak, her rasyonel noktada ∞ olan bir h fonksiyonu da bulunabilir. Bu fonksiyonu

$$h\left(x\right) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f\left(kx-k^3\right)}{k}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun bileşenlerinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.7: $h(x)$ fonksiyonunun bileşenlerinin grafiği

O halde $S_n(kx-k^3)$ fonksiyonunu hesaplayalım :

$$S_n(kx-k^3)=\begin{cases} 2n^4(kx-k^3-n) & ,\frac{n}{k}+k^2\le x\le \frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3} \\ -2n^4(kx-k^3-n-\frac{1}{n^3}) & ,\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}< x\le \frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{kn^3} \\ 0 & ,\textit{diğerleri} \end{cases}$$

bulunur.

Önce h fonksiyonunun L_1 ‘e ait olup olmadığına bakalım.

$$\int_{\mathbb{R}}|h(x)|dx=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(kx-k^3)}{k}dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}S_n(kx-k^3)}{k}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{\infty}S_n(kx-k^3)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}S_n(kx-k^3) \qquad (S_n \text{ simetrik olduğundan})$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{n}{k}+k^2}^{\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}}2n^4(kx-k^3-n)dx$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}2n^4k\int_{\frac{n}{k}+k^2}^{\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}}(x-k^2-\frac{n}{k})dx$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2n^4\frac{\left(x-k^2-\dfrac{n}{k}\right)^2}{2}\Bigg|_{\frac{n}{k}+k^2}^{\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^4\frac{1}{4k^2n^6}$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^4}{72}<\infty$$

sonucu bulunur. Yani $h\in L_1$ olur. h fonksiyonunu normalize ederek ($\frac{\pi^4}{72}$ ile bölerek) $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx=1$ olan bir olasılık yoğunluk fonksiyonu yapabiliriz.

Şimdi g fonksiyonunu $g(x)=h(-x)$ ile tanımlayalım. h ve g birer olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunda $h*g$ konvolüsyonunun hemen her x için tanımlı ve L_1^+da olduğunu biliyoruz. Öte yandan $h*g$ konvolüsyonunu hesaplarsak

$$(h*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} h(t)g(x-t)dt=\int_{\mathbb{R}} h(t)h(t-x)dt$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(kt-k^3)}{k}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(kt-kx-k^3)}{k})dt$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{S}_n\frac{\left(kt-k^3\right)}{k}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{S}_m\frac{\left(kt-kx-k^3\right)}{k}\right)$$

$$\left(m\leq n\ için\, a\leq kx<a+1,\, a\in Z\right)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n\left(kt-k^3\right)S_{n-a}\left(kt-kx-k^3\right)dt}{k}$$

$$\left(\text{burada, } S_m(kt-kx-k^3)=S_{n-a}(kt-kx-k^3)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} S_n\left(kt-k^3\right)S_{n-a}\left(kt-kx-k^3\right)dt \qquad \left(S_n\in L_+ \text{ olduğundan}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$S_{n-a}(kt-kx-k^3)$ fonksiyonunu yazarsak,

$$S_{n-a}(kt-kx-k^3)=$$

$$=\begin{cases} 2(n-a)^4\left(kt-kx-k^3-n+a\right) & , \dfrac{n-a}{k}+k^2+x\le t\le \dfrac{n-a}{k}+k^2+x+\dfrac{1}{2(n-a)^3} \\ 2(n-a)^4\left(kt-kx-k^3-n+a-\dfrac{1}{(n-a)^3}\right), & \dfrac{n-a}{k}+k^2+x+\dfrac{1}{2(n-a)^3}\le t\le \dfrac{n-a}{k}+k^2+x+\dfrac{1}{(n-a)^3} \\ 0 & , \textit{diğerleri} \end{cases}$$

bulunur. Şimdi bu fonksiyonu kx pozitif tamsayı olmak üzere $f*g$ konvolüsyonunda yerine yazarsak,

$$(h*g)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} S_n\left(kt-k^3\right)S_{n-kx}\left(kt-kx-k^3\right)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} S_n\left(kt-k^3\right)S_{n-kx}\left(kt-kx-k^3\right)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\int_{\frac{n}{k}+k^2}^{\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}} 2n^4\left(kt-k^3-n\right)2\left(n-kx\right)^4\left(kt-k^3-n\right)dt\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{n}{k}+k^2}^{\frac{n}{k}+k^2+\frac{1}{2kn^3}} 2n^4\left(kt-k^3-n\right)2\left(n-kx\right)^4\left(kt-k^3-n-\frac{1}{n^3}\right)dt\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}4n^{4}\left(n-kx\right)^{4}k^{2}\left[\int_{\frac{n}{k}+k^{2}}^{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{2kn^{3}}}\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)^{2}dt\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{2kn^{3}}}^{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{kn^{3}}}\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)^{2}-\frac{\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)}{kn^{3}}dt\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}4n^{4}\left(n-kx\right)^{4}\left[\left.\frac{\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)^{3}}{3}\right|_{\frac{n}{k}+k^{2}}^{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{2kn^{3}}}\right.$$

$$\left.-\left.\left(\frac{\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)^{3}}{3}-\frac{\left(t-k^{2}-\frac{n}{k}\right)^{2}}{2kn^{3}}\right)\right|_{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{2kn^{3}}}^{\frac{n}{k}+k^{2}+\frac{1}{kn^{3}}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}k4n^{4}\left(n-kx\right)^{4}\left[\frac{1}{8k^{3}n^{9}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n-kx\right)^{4}}{2k^{2}n^{5}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(1-\frac{kx}{n}\right)^{4}$$

sonucu elde edilir. Bu elde edilen son toplam $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ serisine benzer olduğundan her kx pozitif tam sayısı için serimiz ıraksaktır. Benzer şekilde $kx \le 0$ olduğunda da serimiz ıraksaktır. Yani konvolüsyon her $\frac{n}{k}$ rasyonel degeri için sonsuz değerini alır. Şimdi bu fonksiyonun hangi p değerleri için L_p uzayına ait olduğuna bakalım.

$$h\in L_p \Rightarrow \int_R |h|^p d\mu < \infty$$

O halde fonksiyonumuzun p-inci kuvvetini alıp

$$\int_R |h|^p \, dx = \int_R \left| \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x) \right|^p dx$$

integralini hesaplayalım. Fonksiyonumuz simetrik olduğu için sadece $n \le x < n + \frac{1}{2n^3}$ aralığını hesaplamamız yeterlidir.

$$\int_R |h|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f\left(kx - k^3\right)}{k} \right|^p dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} S_n\left(kx - k^3\right)}{k} \right)^p dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} 2^{p+1} n^{4p} k^p \int_n^{n+\frac{1}{2n^3}} \left(x - k^2 - \frac{n}{k} \right)^p dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{p+1} n^{4p} \left. \frac{(x - k^2 - \frac{n}{k})^{p+1}}{p+1} \right|_n^{n+\frac{1}{2n^3}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p}}{(p+1) k^{p+1} n^{3p+3}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p-3}}{p+1}$$

$|h|^p$ integrallenebilir olması için $p - 3 < -1$ olmalıdır. Bu durumda $1 \le p < 2$ için fonksiyonumuz L_p uzayına ait olur. Aynı zamanda fonksiyonumuz bir L_q uzayına ait olsun. O halde $1 \le p, q < 2$ olur. Young eşitsizliğinden $f * f$ konvolüsyonunun L_r' ye ait olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla L_p ve L_q uzaylarında tanımlı iki sürekli fonksiyonun konvolüsyonu her rasyonel sayıda süreksiz olan bir fonksiyon olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, genel anlamda konvolüsyon kavramı ile ilgili bazı kanaatlere dikkat çekilerek, L_p uzayında konvolüsyon işlemi altında olasılık yoğunluk fonksiyonlarının süreklilik, türevlenirlik gibi özelliklerinin daima korunamayacağı gerçeği ile ilgili özel örnekler belirtilerek bazı gözlemler yapılmıştır.

Öte yandan olasılık yoğunluklarından en az birinin sonsuzdaki davranışları kontrol edilebilirse (mesela sınırlıysa, sonsuzda sıfırlanıyorsa v.b.) konvolüsyonun sürekli kaldığı gösterilebilir. Konvolüsyon uygulamalarının çoğunda bu şartlar sağlandığından söz konusu kanaatin literatürde hatalı sonuçlara yol açmadığı saptanmıştır. Böylece türevlenebilirlik ve analitiklik gibi daha kuvvetli özellikler konusunda ise daha dikkatli davranılması gerektiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **LEVY, P.,** 1954, *Theorie de L'Addition des Variables Aleatories***,** Gauther-Villars, Paris.

[2] **RAIKOV, D.A.**, 1939, *On Composition of Analytic Distribution Functions*, Doklady Akad, Nauk SSSR, 23, 511-514.

[3] **RUDİN, Walter**, 1976, *Principles of Mathematical Analysis Third Edition*, McGrow-Hill International Editions, Singapore.

[4] **WADE, R. W.,** 2010, *An Introduction to Analysis Fourth Edition*, Person Education Ltd., London.

[5] **SMITH, T. Kennan**, 1983, *Primer of Modern Analysis*, Springer, Berlin.

[6] **CAPI ́SKI, M., KOPP, E.**, 2003, *Measure, Integral and Probability Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[7] **KOROLOV, L., B., SINAI Y., G.,** 2007, *Theory of Probability and Random Processes Second Edition* ,Springer-Verlag, Berlin Heidelberg ..

[8] **KOLMOGOROV, A.N. and FOMİN, S. V**.,Translated and Edited By .R. A. Silverman, 1975, *Real Analysis*, Dover Publications, Inc., New York.

[9] **FOLLAND, G. B.**, 1999, *Real Analysis Modern Techniques And Their Applications Second Edition*, John Wihley And Sons,Inc., New York.

[10] **ŞUHUBİ, Erdoğan,** 2001, *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları No.38, İstanbul

[11] **FOLLAND, G. B.**, 1992, *Fourier Analysis And Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, New York.

[12] ULUDAĞ, A. Muhammed, 1996, *On possible deterioration of smoothness under the operation of convolution*, Yüksek Lisans.

[13] MUKHOPADHYAY, N., 2000, *Probability And Statistical Inference***,** Marcel Dekker, New York.

[14] STIRZAKER, D., 2003, *Probability and Random Variables*, Cambridge University Press, Cambridge.

[15] STEIN, M. Elias and SHARKARCHI, Rami, 2003, *Fourier Analysis An Inntroduction*, Princeton University Pres, Princeton and Oxford.

[16] KARA, İmdat, 1982, *Olasılığa Giriş*, Eskişehir İktisadi Ve Ticari İlimler Akademisi yayınları No. 247/167, Eskişehir.

ÖZGEÇMİŞ

Neşe GÜNÇAVDI 01.07.1982 yılında Giresun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun Kenan Evren İlköğretim okulunda bitirdi. Lise öğrenimini Giresun Atatürk Lisesinde (YDA) tamamladıktan sonra 2000 yılında Gaziantep Üniversitesi Gıda Mühendisliği (ing) Bölümüne girdi. Bu bölümü 2003 yılında bıraktı. Aynı yıl Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. Bu bölümden Şubat 2007 de mezun oldu. Haziran 2007 de İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans hakkı kazandı ve bir sene İngilizce Hazırlık Öğrenimi'nden sonra Eylül 2008 de yüksek Lisans Öğrenimine başladı.