İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR KONTROL EDİLEBİLİRLİK KARAKTERİZASYONU

Zekiye İnanç DEMİRTAŞ
Matemetik Anabilim Dalı

I.Danışman
Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN
II. Danışman
Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN

Ekim, 2011

İSTANBUL

Bu çalışma 14/10/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr.Leyla ZEREN AKGÜN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr.Nuri KURUOĞLU
Bahçeşehir Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr.Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültes

Prof.Dr.Ulviye BAŞER
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç.Dr. Fatma ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmam sırasında gösterdikleri her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocalarım Prof. Dr. Ayşe KARA HANSEN ve Prof. Dr. Leyla ZEREN AKGÜN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışması dönemim boyunca desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım, Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU ve Doç. Dr. Fatma ÖZDEMİR'e teşekkürü borç bilirim.

Doktora öğrenimim boyunca göstermiş olduğu sabır ve yardımlardan dolayı eşim Onur DEMİRTAŞ'a teşekkür ederim.

Ekim, 2011 **Z. İnanç DEMİRTAŞ**

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$ **:** n-boyutlu topolojik manifold

$\mathfrak{F}$ **:** koordinat komşulukları kolleksiyonu

$\boldsymbol{v}.$ **:** R^n uzayının bir p noktasındaki vektörü

$\boldsymbol{T_p M}$ **:** *M*'nin bir p noktasındaki teğet uzayı

$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$ **:** *X,Y* vektör alanlarının Lie parantezi

$\boldsymbol{\gamma_m}$ **:** *X* vektör alanının bir *m* noktasındaki integral eğrisi

$(\boldsymbol{L_X Y})_{\boldsymbol{m}}$ **:** *Y*' nin *X*' e göre $m \in M$ noktasındaki Lie türevi

$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{M})$ **:** *M*'nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı olan bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının bir kümesi

$\boldsymbol{\Sigma}$ **:** kontrol sistemi

$\boldsymbol{D}$ **:** sistemin dinamiği

$\boldsymbol{G_\Sigma}$ **:** sözde (pseudo) grubu

$\boldsymbol{S_\Sigma}$ **:** sözde yarı (pseudo-semi) grubu

$\boldsymbol{Af}(\boldsymbol{R^n})$ **:** R^n ‘nin afin grubu

$\boldsymbol{af}(\boldsymbol{R^n})$ **:** R^n ‘nin afin cebiri

$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$ **:** *G* bağlantılı bir Lie grubu

$\boldsymbol{Af}(\boldsymbol{G})$ **:** *G*‘nin afin grubu

$\boldsymbol{af}(\boldsymbol{G})$ **:** *G*‘nin afin cebiri

$\boldsymbol{Af}(\boldsymbol{1})$ **:** $''\ ax + b\ ''$ afin grubu

$\boldsymbol{af}(\boldsymbol{1})$ **:** $''\ ax + b\ ''$ afin grubunun Lie cebri

ÖZET

LIE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR KONTROL EDİLEBİLİRLİK KARAKTERİZASYONU

’Lie Grupları Üzerindeki Afin Kontrol Sistemleri İçin Bir Kontrol Edilebilirlik Karakterizasyonu’’ adlı bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Afin sistemlerin kontrol edilebilirliği bilineer kısmının kontrol edilebilirliğine bağlı olarak çalışılmıştır. Bilineer sistemlerin incelenmesi ilk olarak 1972 ‘de Brockett [18]**,** ve daha sonra 1973 ‘te Mohler [19], tarafından başlatılmıştır. Bilineer sistemler için temel obje olarak Lie cebirinin kullanılması yine 1972 ‘de Brockett [18], ve daha sonra 1997 ‘de Jurdjevic ‘in [6],çalışmaları ile başlamıştır. Jurdjevic ve Sallet 1984 yılında R^n üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğini karakterize etmişlerdir [12]. Daha sonra benzer tekniklerle, 2006’da Kara ile San Martin Genelleştirilmiş Heisenberg [13], ve 2010’da da Kara ile Kule Carnot grupları, [14] üzerinde karakterizasyonu genelleştirmişlerdir.

İlk bölüm de, konu hakkındaki genel kavramlar verilmektedir.

İkinci bölüm de, genel kontrol sistemi verilerek, R^n ve Lie grupları üzerinde afin kontrol sistemleri incelenmektedir..

Genel bir kontrol sistemi, $\sum$=(M,D) şeklinde bir ikiliden oluşmaktadır. Burada, M diferansiyellenebilir bir manifold ve D de M manifoldunun açık altkümeleri üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının bir topluluğu olan X(M) ‘nin bir altkümesidir.

M ‘ye $\sum$**’**nın durum uzayı ve D’ nin elemanlarına sistemin stratejileri denir.

$\sum$ kontrol sistemi;

$$G_\Sigma = \left\{ X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \in R, r \in N \right\}$$

sözde (pseudo) grubunu tanımlar ve $\sum$’nın, M’nin p noktasındaki yörüngesi

$$G_\Sigma(p) = \{\varphi(p) \mid \varphi \in G_\Sigma\}$$

p ’de G_Σ ’ nın etkisi ile verilir. Ayrıca $\sum$ ‘ya ilişik

$$S_\Sigma = \left\{ X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N \right\}$$

sözde yarı (pseudo-semi) grubu vardır.

$$S_\Sigma(p) = \{\varphi(p) | \varphi \in S_\Sigma\}$$

sistemin pozitif yörüngesidir. Genel olarak, $\forall p \in M$ için,

$$S_{\Sigma}(p) \subseteq G_{\Sigma}(p) \subseteq M$$

dir.

Kontrol edilebilirlik problemi durum uzayı M, p ve dinamik D üzerindeki hangi koşullar altında bir p noktasından başlayarak pozitif zamanla M ‘nin tüm noktalarına ulaşma problemidir, yani; ne zaman $S_{\Sigma}(p) = M$ olur.

R^n üzerindeki bütün endomorfizmaların uzayını $EndR^n$ ve bütün lineer otomorfizmaların kümesini de $AutR^n$ ile gösterirsek, $AutR^n$ ile R^n ‘nin semi-direkt çarpımı; yani,

$$AfR^n = AutR^n \otimes R^n$$

R^n ’nin afin grubunu tanımlar ve bu grubun Lie cebiri ;

$$afR^n = \ EndR^n \otimes R^n$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $A \in EndR^n$ ve $a \in R^n$ için,

$$X(p) = Ap + a$$

vektör alanına afin vektör alanı denir.

R^n üzerinde $exptX$, R^n üzerindeki difeomorfizmaların 1-parametreli grubunu oluşturur ve bunun sonsuz küçük üreteçleri

$$X(p) = Ap + a$$

afin vektör alanlarıdır. Burada, $X_0, X_1, \dots, X_m$ afin vektör alanlarının herhangi bir sonlu topluluğu,

$$X_i(p) = A_i p + a \quad i = 0,1,\dots,m$$

olmak üzere bir kontrol sistemi tanımlar.

$$\frac{dp}{dt} = X_0(p) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(p) = (A_0 p + a_0) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(A_i p + a_i)$$

şeklindeki kontrol parametreli diferensiyel denklemler R^n üzerindeki afin sistemlerin dinamiğini oluştururlar. Burada, $u_i \in U \subset R^n$ fonksiyonları kontrollerle ilgili keyfi fonksiyonlar, $A_0, A_1, \dots, A_m$ ler $n \times n$ ‘lik matrisler ve $a_0, a_1, \dots, a_m$’ ler ise R^n içindeki sütun vektörleridirler.

G bağlantılı bir Lie grubu ve g ’de onun Lie cebiri olmak üzere,

$$\dot{p}(t) = (D + X)(p) + \sum_{j=1}^{d} u_j(t)(D^j + X^j)(p)$$

diferansiyel denklem ailesi, G üzerindeki afin kontrol sistemini belirler. Burada, $p \in G$ $D, D^1,...,D^d \in aut(G)$; $X, X^1,...,X^d \in g$ ve u^j de kontrolleri göstermektedir. Sistemin dinamiği

$$D = \left\{ D + X + \sum_{j=1}^{d} u_j (D^j + X^j) \middle| u \in R^d \right\}$$

şeklindedir.
Çalışmanın özgün kısmını oluşturan, üçüncü bölüm de ise, $'' ax + b''$ grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri incelenmiştir.

$Af(1)$, $2x2$ 'lik reel matrislerin bir grubu olduğundan dolayı $\mathbb{R}^4$' de geometrik bir nesnedir ve diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$' ün sınırsız bir alt kümesidir. Çünkü, $Af(1)$' in tanımı gereği, b herhangi bir sayı ve a ise pozitif herhangi bir sayıdır. Ayrıca, tıkız olmayan bir Lie grubudur. Tüm bu özellikleri ile değişmeli olmayan bağlantılı 2-boyutlu tek Lie grubudur.

$Af(1)$ basit (simple) bir grup değildir. Ayrıca, φ' nin çekirdeğindeki matrislerin normal alt grubu, kendi matris Lie grubudur. $Af(1)$ grubunun çekirdeği, bütün matrislerini birim matrise gönderen bir grup homomorfizmasıdır. Yani, $a \to 1$ ve $b = 0$ için,

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

Geometrik olarak, bu alt grup bir doğrudur, ve

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan dolayı, grup işlemi doğru üzerinde toplamaya tekabül etmektedir.

$Af(1)$, 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$' de sonsuz bir düzlemin yarısı olduğundan dolayı, geometrik olarak birim elemandaki teğet düzlem şeklindedir. Bununla beraber, teğet uzayın matrislerini bulmak için, $Af(1)$'in birim elemanı $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$' dan $Af(1)$' in yakın noktalarına olan vektörlere bakılır. Burada, düzlemdeki Lie doğrultuları aşağıdaki vektörlerle gerilirler;

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu baz vektörlerinin Lie parantezi ;

$$\begin{aligned} [J, K] &= JK - KJ \\ &= K \end{aligned}$$

şeklindedir. $af(1)$ bir Lie cebiri yapısına sahip olduğu için aşağıdaki özellikleri sağlar;

• $[J,K] = -[K,J] \quad \forall J,K \in af(1)$

•$\big[I,[J,K]\big] + \big[J,[K,I]\big] + \big[K,[I,J]\big] = 0; \quad \forall I,J,K \in af(1)$ (Jacobi Özdeşliği)

$af(1)$'in Lie grubu olan $Af(1)$' in merkezinin birim elemandan meydana geldiği bulunmuştur.

$''\, ax + b\, ''$ grubunun cebirsel özelliklerinin bazıları incelenmiş ve çözülebilir ancak nilpotent olmayan bir Lie grubu olduğu gösterilmiştir.

Sistemin kontrol edilebilirlik karakterizasyonunda kullanabilmek için, grubun otomorfizm yörüngesi hesaplanmıştır.

Ayrıca, sistemin durum uzayı $Af(1)$' in yerel tıkız bir Hausdorff uzayı olduğu ispat edilmiştir.

Son olarak, $Af(1)$ grubunun otomorfizm yörüngesi $Aut\big(Af(1)\big)$' in yoğun olduğu gösterilmiş ve $Af(1)$ durum uzayı üzerindeki afin sistemin kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşulun afin kontrol sistemine ilişik olan $Aut\big(Af(1)\big) -$ yörüngesi üzerindeki bilineer sistemin kontrol edilebilmesi olduğu ispat edilmiştir.

SUMMARY

A CONTROLLABILITY CHARACTERIZATION FOR AFFINE CONTROL SYSTEMS ON LIE GROUPS

This thesis titled ‘’*A Controllability Characterization for Affine Control Systems on Lie Groups*’’ consistof three parts.

Controllability of Affine systems is studied related to the conrtollability of bilinear control systems. Study on bilinear systems has been initiated by the first in 1972 by Brockett, [18], and later in 1973 by Mohler, [19]. The use of Lie algebra as a fundamental object for Bilinear systems has been initiated again in 1972 by the work of Brockett, [18], and later in 1997 by the book of Jurdjaveic, [6]. Jurdjevic and Sallet in 1984 have characterized the controllability of affine control systems on R^n [12]. Later, by the similar techniques, on Generalized Heisenberg groups in 2006 Kara and San Martin, [13], and on Carnot groups in 2010 Kara and Kule, have generalized the characterization.

The first chapter, it is given the general concept on the subject.

In the second chapter, giving the general control system, the affine control systems on R^n and on Lie groups are studied.

A general control system consists of a pair of the form $\sum = (M, D)$. Here, M is a diffrentiable manifold and D is a subset of $X(M)$ which is collection of all smooth vector fields on open subsets of M.

It is called that M is a state space of $\sum$ and the elements of D are the strategies of of the system.

Control system $\sum$,

$$G_{\sum} = \left\{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \in R, r \in N\right\}$$

defines so-called pseudo group and the orbit of $\sum$ at the point of p of M.

$$G_{\sum}(p) = \{\varphi(p) | \varphi \in G_{\sum}\}$$

is given by the action of $G_{\sum}$ at p. Moreover, associated to $\sum$, there exist

$$S_{\sum} = \left\{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\right\}$$

so-called pseudo-semi group,

$$S_{\sum}(p) = \{\varphi(p) | \varphi \in S_{\sum}\}$$

is the positive orbit of the system. In general, $\forall p \in M$,

$$S_{\Sigma}(p) \subseteq G_{\Sigma}(p) \subseteq M$$

Controllability problem is to find under which conditions on the state p, state space M and the dynamic D to reach all points of M by starting from p with positive over time, i.e.; when $S_{\Sigma}(p) = M$?

If we denote space of the all endomorphisms of R^n by $EndR^n$ and denote the set of all linear automorphisms by $AutR^n$, then the semi direct product of $EndR^n$ and $AutR^n$, i.e.;

$$AfR^n = AutR^n \otimes R^n$$

defines the affine group of R^n and Lie algebra of this group is of the following from

$$afR^n = EndR^n \otimes R^n$$

Therefore, for $A \in EndR^n$ and $a \in R^n$, the vector field

$$X(p) = Ap + a$$

is called affine vector field.

$exptX$ on R^n creats 1-parameter group of diffeomorphisms on R^n and these infinitesimal generators,

$$X(p) = Ap + a$$

are affine vector fields. Here, any finite number of affine vector fields $X_1, X_2, \dots, X_m$ such that

$$X_i(p) = A_i p + a \qquad i = 1,2,\dots,m$$

defines a control system.

$$\frac{dp}{dt} = X_0(p) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(p) = (A_0 p + a_0) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(A_i p + a_i)$$

Such control-parameter differential equations on R^n form the dynamics of affine systems. Here, $u_i \in U \subset R^n$ functions are of arbitrary functions of controls, $A_1, A_2, \dots, A_m$ are nxn matrices and $a_1, a_2, \dots, a_m$ are the column vectors of R^n.

Let G be a connected Lie group and g its Lie algebra, and then the family of differential equations

$$p(t) = (D + X)(p) + \sum_{j=1}^{d} u_j(t)\left(D^j + X^j\right)(p)$$

Determines the affine control system on G. Here, $p \in G$, $D, D^1, \dots, D^d \in aut(G)$, $X, X^1, \dots, X^d \in$ g and u_i denotes the controls. The dynamics of the system is in the following form

$$D = \left\{ D + X + \sum_{j=1}^{d} u_j \left(D^j + X^j \right) \middle| u \in R^d \right\}$$

In the third section which contains the original part of the study, the affine control systemson $''ax + b''$ group have been investigated.

Since $Af(1)$ is a group of $2x2$ real matrices, it is a geometric object in R^4 and on the other hand it is an infinite subset of R^4. Because of the definition of $Af(1)$,b is any number and a is any positive number. In addition, $Af(1)$ is a non-compact Lie group. $Af(1)$, with all of these properties, is the only non-abelian 2-dimensional connected Lie group.

$Af(1)$ is not a simple group. Moreover, normal subgroup of matrices in kernel of φ is their matrix Lie group. Kernel of $Af(1)$ is a group homomorphism that sends al of matrices to unit matrix. So, for $a \to 1$ and $b = 0$.

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geometrically, this subgroup is a line and

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Because of that, the group operation corresponds to the addition on the line. Since $Af(1)$ is the half of a plane in the four-dimensional Euclidean space R^4, it is geometrically clear that it is of the form of the tangent space at the identity element. However, to find explicit matrices for the elements of the tangent space we look at the vectors from the identity element of $Af(1)$. Here, Lie directions in the plane are stretched by the following vectors;

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lie brackets of these base vectors have the following form;

$$[J, K] = JK - KJ$$

$$= K$$

Since, $af(1)$ has a Lie algebra structure, provides the following properties,

• $[J, K] = -[K, J] \quad \forall J, K \in af(1)$

•$\left[I, [J, K]\right] + \left[J, [K, I]\right] + \left[K, [I, J]\right] = 0; \quad \forall I, J, K \in af(1)$ (Jacobi Identity)

That the center of the Lie group $Af(1)$ which is the Lie group of $af(1)$ consists of the identity element has been found.

Some of the algebraic properties $''ax + b''$ group has been studied and, that $''ax + b''$ group is not nilpotent but solvable Lie group has been showed.

To use the characterization of the controllability of the system, the authomorphism orbit of the group has been calculated.

In addition, that the system's state space $Af(1)$ is a locally compact Hausdorff space has been proven.

Finally, it has been shown that the authomorphism orbit of $Af(1)$ group is dense and it has been proven that the affine control system on the state space $Af(1)$ is controllable if and only if associated to affine control system on $Aut\big(Af(1)\big)$-orbit is controllable.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, diferensiyel geometrik bakış açısı ile, topolojik ve cebirsel yaklaşımlar kullanılarak Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği için genel bir sonuç bulmaktır. Kontrol edilebilirlik problemi, Geometrik Kontrol Teorideki klasik temel en önemli problemlerden biridir. Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri ise, lineer, bilineer ve invariant sistemlerden daha genel bir sistem olarak önemli bir yer tutmaktadır. Bu problem ve yaklaşım ile ilgili olarak ilk çalışma 1984 yılında Jurdjevic ve Sallet tarafından yapılmıştır, [11]. Jurdjevic ve Sallet, n-boyutlu Öklid uzayı üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğini cebir seviyesindeki homoteti fonksiyonu yardımıyla ilişik bilineer sistemin kontrol edilebilirliğini taşıyarak sağlıyorlar. Benzer teknik kullanılarak, daha genel bir durum olan, Genelleştirilmiş Heisenberg Lie Grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerin kontrol edilebilirliği Kara ve San Martin tarafından verilmiştir, [12]. Bu çalışmada, Lie cebiri seviyesinde bir otomorfizma tanımlanarak yoğun otomorfizm yörüngedeki bilineer sistemin kontrol edilebilirliği sağlanmıştır. Daha sonra ise, Kara ve Kule, 2.dereceden nilpotent bir Lie grubu olan Carnot grubu üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliğine genişletmişlerdir, [13]. Bu çalışmada da, benzer tekniği kullanabilmek için Carnot grubunun ve Lie cebirinin özellikleri kullanılmıştır.

Genel kontrol sistemi $\sum$=(M,D) şeklinde bir ikiliden oluşmaktadır. Burada, M diferansiyellenebilir bir manifold ve D de M’ nin açık altkümeleri üzerinde tanımlı olan tüm düzgün vektör alanlarının kümesi X(M)’ nin bir altkümesidir.

M’ ye $\sum$ **’**nın durum uzayı ve D ’ye de sistemin dinamiği denir.

$\sum$ kontrol sistemi;

$$G_{\Sigma} = \left\{ X^1_{t_1} \circ X^2_{t_2} \circ \ldots X^r_{t_r} \mid X^j \in D, t_j \in R, r \in N \right\}$$

sözde (pseudo) grubunu tanımlar ve $\sum$’ nın M’ nin p noktasındaki yörüngesi

$$G_{\Sigma}(p) = \{\varphi(p) \mid \varphi \in G_{\Sigma}\}$$

p ’de G_{Σ} ’ nın etkisi ile verilir . Ayrıca, $\sum$ ’ ya ilişik

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^{1} \circ X_{t_2}^{2} \circ \ldots X_{t_r}^{r} \mid X^{j} \in D, t_j \geq 0, r \in N\}$$

sözde yarı (pseudo-semi) grubu vardır.

$$S_{\Sigma}(p) = \{\varphi(p) | \varphi \in S_{\Sigma}\}$$

sistemin pozitif yörüngesidir. Genel olarak, $\forall p \in M$ için,

$$S_{\Sigma}(p) \subseteq G_{\Sigma}(p) \subseteq M$$

dir.

Kontrol edilebilirlik problemi durum uzayı M, p ve dinamik D üzerindeki hangi koşullar altında bir p noktasından başlayarak pozitif zamanla M ‘nin tüm noktalarına ulaşma problemidir. Hedef, M’ nin herhangi bir p noktasından başlayarak

$$S_{\Sigma} = \{X_{t_1}^{1} \circ X_{t_2}^{2} \circ \ldots X_{t_r}^{r} \mid X^{j} \in D, t_j \geq 0, r \in N\}$$

sözde yarı (pseudo-semi) grubunun tüm elemanları yoluyla durum uzayının her noktasına varmaktır.

Manifold üzerinde genel bir sonuç elde etmek olanaklı olmadığından, manifold özelliğine sahip olan Lie grubu durum uzayı olarak önem kazanmıştır. Lie grupları üzerindeki kontrol sistemlerinin en geneli olan afin kontrol sistemini tanımlayalım. G bağlantılı bir Lie grubu ve g ’de onun Lie cebiri olmak üzere,

$$\dot{p}(t) = (D + X)(p) + \sum_{j=1}^{d} u_j(t)(D^{j} + X^{j})(p)$$

diferansiyel denklem ailesi, G üzerindeki afin kontrol sistemini belirler. Burada, $p \in G$ $D, D^{1}, \ldots, D^{d} \in aut(G)$; $X, X^{1}, \ldots, X^{d} \in g$ ve u^{j} de kontrolleri göstermektedir. Sistemin dinamiği

$$D = \{D + X + \sum_{j=1}^{d} u_j (D^{j} + X^{j}) \big| u \in R^{d}\}$$

şeklindedir. Durum uzayı olarak G’ nin ikinci dereceye kadar nilpotent basit bağlantılı Lie grupları hariç, bilineer kısmının kontrol edilebilirliği yoluyla yapılmış bir çalışma bulunmamaktadır.

Üç bölümden oluşan bu tez çalışmasında ise, farklı özelliklere sahip olan $'' ax + b ''$ grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri incelenerek kontrol edilebilirlik karakterize edilmiştir.

Birinci bölümde, konu hakkında temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, genel kontrol sistemleri R^n üzerindeki afin kontrol sistemleri ve Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri tanımları verilmiştir. Son bölümde ise, $'' ax + b ''$ grubunun topolojik özellikleri incelenmiştir. Bunun sonucunda, $Af(1)$ Lie grubunun merkezsiz ve çözülebilir bir Lie grubu olduğu ancak nilpotent olmadığı gösterilmiştir. Grubun yörüngesi bulunup, $Af(1)$ durum uzayı üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilmesi için gerek ve yeter koşul ispat edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. MANİFOLD

Tanım 2.1.1. M bir Hausdorff uzayı olmak üzere, M ’nin herbir noktası R^n ’nin açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde bir komşuluğa sahip ise M ’ye n-boyutlu topolojik manifold veya yerel Öklid uzayı denir.

$U \subset M$ açık kümesi olmak üzere,

$$\varphi: U \to B \subset R^n$$

homeomorfizması vardır ve (U, φ) çiftine de M ’nin bir koordinat komşuluğu denir. Eğer $p \in U$ ise $\varphi(p)$ de R^n ‘nin bir noktasıdır ve böylece $\varphi(p)$ n-katlı reel sayıdır. $\varphi(p)$ ’nin i. koordinatı $x^i(p)$ olsun. Böylece,

$$\varphi(p) = \left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right)$$

dır. φ sürekli olduğundan, her bir x^i ,U üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, φ 1-1 olduğundan, eğer $p, q \in U$ için $x^i(p) = x^i(q)$ $(i = 1, \dots, n)$ ise $p = q$ dur. Yani, U’ nun bir p noktası, $\left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right)$ gibi n-katlı reel sayı ile belirlenir ve $\left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right)$’ ye (U, φ) koordinat komşuluğuna göre U nun bir p noktasının yerel koordinatlarının kümesi denir. U üzerindeki fonksiyonların $(x^1, \dots, x^n)$ gibi n-katlı reel sayısına ise, (U, φ) üzerindeki yerel koordinat sistemi denir. Bu durumda, U daki p nin (U, φ)’e göre yerel koordinatları, R^n’ deki $\varphi(p)$ nin koordinalarına eşittir.

‘’Yerel’’ kelimesini, M’ nin sadece U üzerinde tanımlı koordinatlarını belirlemek için kullanıyoruz. M’ nin tamamı üzerinde, sadece M, R^n’ nin bir açık kümesine homeomorfik ise yerel koordinat sistemi tanımlanır.

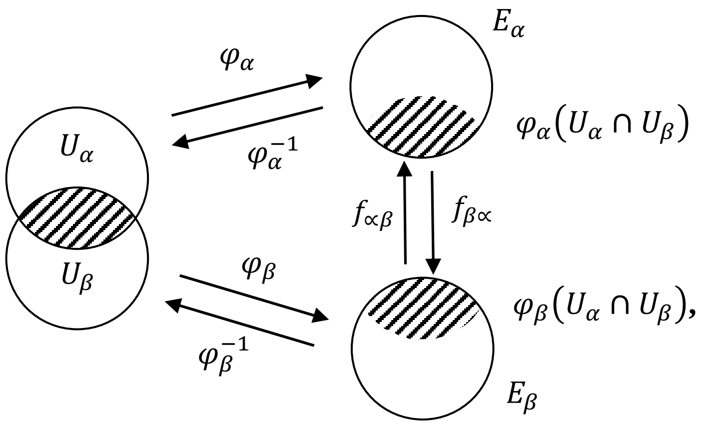
M n-boyutlu topolojik manifold olduğundan, M, R^n deki açık kümelere homeomorfik olan U_α açık kümelerinin $\{U_\alpha\}$ ailesi ile örtülür. A, U_α açık kümelerinin α indislerinin kümesi olsun ve $\{U_\alpha\}$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ile gösterelim. B_α, U_α' ya homeomorfik $R^{n'}$ nin açık bir kümesi ve φ_α da U_α dan E_α üzerine bir homeomorfizma olsun. Koordinat komşulukları kolleksiyonu $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, koordinat komşuluğu sistemi veya atlas olarak adlandırılır ve $\mathfrak{F} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ile gösterilir. Eğer M den p gibi bir nokta alınırsa, bu p için birden fazla yerel koordinatlar olabilir. Çünkü, her bir p' yi içeren U_α için, R^n deki $\varphi_\alpha(p)$ nin koordinatları gibi yerel koordinatlar hesaplanır. Herbir $\alpha \in A$ için, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ üzerindeki yerel koordinat sistemini $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ile gösterelim. Eğer

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$$

İse, $U_\alpha \cap U_\beta$ nın herbir noktasında aşağıdaki şekilde iki koordinat sistemi tanımlanır:

$(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ve $\left(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n\right)$ dirler.

Bu iki koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



Şekil 2.1: İki koordinat sistemi arasındaki ilişki

R^n nin açık kümeleri $\varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ ve $\varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$ sırasıyla, B_α ile B_β da içerilen açık kümelerdir.

$$\varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to U_\alpha \cap U_\beta$$

ters fonksiyonu bir homeomorfizmadır ve ayrıca,

$$\varphi_\beta\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

fonksiyonu da bir homeoemorfizmadır. Bu iki homeomorfizmanın bileşiminden ise aşağıdaki tasvir elde edilir;

$$f_{\beta\alpha}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Bu durum, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ‘nın herhangi bir u noktası için

$$f_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(u))$$

ifadesinin yazılabildiğini gösterir. u’nun koordinatları $(u^1, \dots, u^n)$ olmak üzere, $f_{\beta\alpha}(u)$’nın koordinatları $\left(f_{\beta\alpha}^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f_{\beta\alpha}^n(u^1, \dots, u^n)\right)$ olsun. Burada, $f_{\beta\alpha}^n(u^1, \dots, u^n)$’ler n-değişkenli sürekli fonksiyonlardır.

Eğer $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ise, $(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)) \in \varphi_\alpha(p)$ ve $\left(x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p)\right) \in \varphi_\beta(p)$ dır. $\varphi_\alpha(p) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ olduğundan yukarıdaki denklemde u yerine $\varphi_\alpha(p)$ konursa denklem

$$f_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(u)) \qquad (\mathbf{1})$$

$$f_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p)))$$

$$f_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(p)$$

şeklini alır. Dolayısıyla, eşitliğin sol tarafı

$$\left(f_{\beta\alpha}^1(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)), \dots, f_{\beta\alpha}^n(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p))\right)$$

iken sağ tarafı

$$\left(x_\beta^1(p), \dots, x_\beta^n(p)\right)$$

olur. Böylece,

$$x_\beta^i(p) = f_{\beta\alpha}^i(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)) \qquad (i = 1, \dots, n;\ \beta \in U_\alpha \cap U_\beta)$$

ilişkisi elde edilir. Dolayısıyla;

$$x_\beta^i = f_{\beta\alpha}^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

dır ve $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerindeki $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ve $\left(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n\right)$ gibi iki yerel koordinat sistemi arasındaki dönüşüm formülüdür.

f , $p \in M$'nin bir komşuluğunda tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. p, U_α gibi bir koordinat komşuluğunda içerilir ve U_α'nın noktaları onların yerel koordinatları ile belirlenir. Böylece f, n −değişkenli sürekli bir fonksiyon gibi düşünülebilir. Eğer bu n −değişkenli fonksiyon $\left(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)\right)$ noktasında diferensiyellenebilir ise, f'ye p noktasında diferensiyellenebilirdir diyebiliriz. f' nin p'nin bir V komşuluğunda tanımlandığı kabul edilsin. $V \cap U_\alpha = V_\alpha$ olmak üzere $p \in V_\alpha$ dır. R^n' nin $\varphi_\alpha(V_\alpha)$ açık kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlansın

$$F_\alpha(u) \qquad \left(u = (u^1, \dots, u^n) \in \varphi_\alpha(V_\alpha)\right)$$

olmak üzere,

$$F_\alpha(u^1, \dots, u^n) = f\left(\varphi_\alpha^{-1}(u)\right)$$

dır. Daha önce tanımlanan f'in p' deki diferensiyellenebilirliği, $F_\alpha(u^1, \dots, u^n)$' nin $\left(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p)\right)$ $\left(\in \varphi_\alpha(V_\alpha)\right)$ da diferensiyellenebilirliğini verir. p' nin aynı zamanda U_α'da da içerildiği kabul edilsin. $V \cap U_\alpha = V_\alpha$ olmak üzere $\varphi_\beta\left(V_\beta\right)$'da sürekli fonksiyonu

$$F_\beta(v) \qquad \left(v = (v^1, \dots, v^n) \in \varphi_\beta\left(V_\beta\right)\right)$$

olmak üzere,

$$F_\beta(v^1, \dots, v^n) = f\left(\varphi_\beta^{-1}(v)\right)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $u \in \varphi_\alpha\left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$ ise, $f_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta\left(\varphi_\alpha^{-1}(u)\right)$, $\varphi_\beta\left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$' nın bir noktasıdır. F_α, F_β'nın tanımından

$$F_\alpha(u^1, \dots, u^n) = F_\beta\left(f_{\beta\alpha}^1(u^1, \dots, u^n), \dots, f_{\beta\alpha}^n(u^1, \dots, u^n)\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde, eğer $v \in \varphi_\beta\left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$ ise, $f_{\alpha\beta}(v) = \varphi_\alpha\left(\varphi_\beta^{-1}(v)\right)$, $\varphi_\alpha\left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$' nin bir noktasıdır ve;

$$F_\beta(v^1,\dots,v^n)=F_\alpha\left(f_{\alpha\beta}^1(v^1,\dots,v^n),\dots,f_{\alpha\beta}^n(v^1,\dots,v^n)\right)$$

elde edilir. **(1)'**den dolayı

$$f_{\beta\alpha}\left(x_\alpha^1(p),\dots,x_\alpha^n(p)\right)=\left(x_\beta^1(p),\dots,x_\beta^n(p)\right)$$

ve

$$f_{\alpha\beta}\left(x_\beta^1(p),\dots,x_\beta^n(p)\right)=\left(x_\alpha^1(p),\dots,x_\alpha^n(p)\right)$$

dir. f' nin p' deki diferensiyellenebilirliği ise, p'yi içeren bir U_α'nın seçimi ve $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ koordinat komşuluğu kullanılarak yapılır. Ancak, yerel koordinat sistemlerinin hepsi aynıdır, yani, $F_\beta(v^1,\dots,v^n)$ 'de $\left(x_\beta^1(p),\dots,x_\beta^n(p)\right)$' de diferensiyellenebilirdir. F_α ve F_β arasında yukarıda yazdığımız şekilde bir ilişki olmasına ve $f_{\beta\alpha}^i$ ile $f_{\alpha\beta}^i$' nın sadece $(u^1,\dots,u^n)$' nın sürekli fonksiyonları olmasına rağmen, F_α, $\left(x_\alpha^1(p),\dots,x_\alpha^n(p)\right)$'da diferensiyellenebilir olsa bile F_β'nın $\left(x_\beta^1(p),\dots,x_\beta^n(p)\right)$'da diferensiyellenebilir olmasının hiçbir garantisi yoktur ve tersi içinde aynı şeyler söylenebilir. Ancak, verilen yerel koordinat sistemlerinin dönüşümleri, n-değerli $f_{\beta\alpha}^i$, $f_{\alpha\beta}^i$ 'lar üzerindeki fonksiyonlar, bütün α ve β' lar için diferensiyellenebilir olmak üzere bu güçlük ortadan kalkar. Dolayısıyla, f'in diferensiyellenebilirliğini koordinat komşuluklarının seçiminden bağımsız olarak tanımlayabiliriz. [1]

Tanım 2.1.2. M n-boyutlu yerel Öklid uzayı olmak üzere

$$\mathfrak{F}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|U_\alpha\subset M \text{ açık bağlantılı alt kümesi}\}$$

topluluğu aşağıdaki üç özelliği sağlıyor ise, $(M,\mathfrak{F})$' ye C^∞ sınıfından diferensiyellenebilen bir manifold denir:

1) $U=\cup_\alpha U_\alpha$
2) $\forall\alpha,\beta$ için $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\in C^\infty$ $\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\in C^\infty\right)$
3) $\mathfrak{F}$ topluluğu maksimaldir.

Yani, 1) ve 2)' yi sağlayan $\forall$ $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ koordinat sistemi $\mathfrak{F}$ 'nin içinde yer alır. $(M,\mathfrak{F})$ diferensiyellenebilir manifoldu yerine kısaca M manifoldu diyeceğiz.

Örnek 2.1.3. $S^2 = \{x \in R^3 : |x| = 1\}$ birim küre yüzeyi 3-boyutlu bir manifolddur. R^3 ün bir alt uzayı olarak, S^2 yi kendi topolojisi ile birlikte ele alalım. Bazı açık $\widetilde{U} \subset R^3$ için $U = \widetilde{U} \cap S^2$ ise U, S^2 de açıktır. Bu durumda S^2 sayılabilir bir tabana sahip bir Hausdorff uzayıdır. S^2 yerel öklid uzayı olduğunu gösterelim. $i = 1,2$ ya da 3 için $\widetilde{U}_i^+ = \{(x^1, x^2, x^3) : x^i > 0\}$ ve $\widetilde{U}_i^- = \{(x^1, x^2, x^3) : x^i < 0\}$ olsun, $\widetilde{U}_i^\pm$ iki açık kümeleri $x_i = 0$ hiperdüzlem koordinatı ile R^3 ü böler.Açık kümeler arasındaki ilişki $\widetilde{U}_i^\pm$ =$\widetilde{U}_i^\pm \cap S^2$ olup , $i = 1,2,3$; S^2 yi örter. İzdüşümleri ile birlikte

$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to R^2$ tasvirini tanımlayalım.

$$\varphi_1^\pm(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3) \ ,$$

$$\varphi_2^\pm(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3) \ ,$$

$$\varphi_3^\pm(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2)$$

Kolayca görüldüğü gibi bu tasvirlerden $W = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ açık kümelerine homeomorfizma vardır. Böylece S^2 yerel öklid ve topolojik bir manifold dur.Ancak koordinatların değişimi için formül C^∞ dur, ve böylece bu koordinat komşulukları da C^∞ olur. Örneğin $\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1}$ tasviri, $(\varphi_2^-)^{-1}$ ve φ_1^+ tasvirlerinin birleşmesiyle $U_1^+ \cap U_2^-$ üzerinde verilir.

$$(\varphi_2^-)^{-1} : (x^1, x^3) \to \left(x^1, -(1 - (x^1)^2 - (x^3)^2)^{1/2},\ x^3\right)$$

$$\varphi_1^+ : \left(x^1, -(1 - (x^1)^2 - (x^3)^2)^{1/2},\ x^3\right) \to \left(-(1 - (x^1)^2 - (x^3)^2)^{1/2},\ x^3\right).$$

O takdirde gösterimin değiştirilmesiyle, U_2^- koordinatı için (x^1, x^3) yerine (u^1, u^2); U_1^+ koordinatı için (x^2, x^3) yerine (v^1, v^2) kullanılarak,

$v^1 = -(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^{1/2}, u^2 = v^2$ olur.

$\{(u^1, u^2) : (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ üzerinde terimin karekökü hiçbir zaman 0 olmadığından dolayı u^i nin C^∞ (sürekli türetilebilir) fonksiyonları v^i dir.

Benzer hesaplamalar yardımıyla, $\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1}$, $\{(v^1, v^2) : (v^1)^2 + (v^2)^2 < 1\}$ kümesi üzerinde sürekli türetilebilen bileşke tasviri elde edilir.

Böylece (U_1^+, φ_1^+) ve (U_2^-, φ_2^-) koordinat komşulukları da C^∞ dur. Paralel argumanlar diğer durumlar için de uygulanır. Doğal olarak bu durum, sekiz koordinat komşuluğunun tek bir C^∞ yapısını belirlemesi ile S^2 örtüsü tanımlar.

Böylece S^2, R^3 manifoldunun bir alt kümesi olarak manifolda bir örnektir ve de diğer koşulları da sağlamasından dolayı S^2 bir manifolddur [2].

Örnek 2.1.4. Özel Üniter Grup

$$SU(2,\mathbb{C}) = \left\{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \overline{A}^t = A^{-1}, detA = 1\right\}$$

kümesini gözönüne alalım ve bunun diferansiyellenebilir bir manifold olduğunu gösterelim. Bu küme $2x2$ lik tersi transpozesinin kompleks eşleniğine eşit ve determinantı 1 olan kompleks elemanlı matrislerin kümesidir ve Özel Üniter grup olarak adlandırılır.

$z, w \in \mathbb{C}$ için $|z|^2 + |w|^2 = 1$ olmak üzere, $SU(2,\mathbb{C})$ ‘nin elemanları

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$$

şeklinde yazılabilir.

Denk olarak, herhangi bir $A \in SU(2,\mathbb{C})$ için, $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ olacak şekilde $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ kompleks sayıları bulunabilir. $SU(2,\mathbb{C})$ 'nin manifold yapısını oluşturmak için açık alt kümelerini ve koordinat tasvirlerini inceleyelim.

$$U_1 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : x < 0\}$$

$$U_2 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : x > 0\}$$

$$U_3 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : y < 0\}$$

$$U_4 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : y > 0\}$$

$$U_5 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : u < 0\}$$

$$U_6 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : u > 0\}$$

$$U_7 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}) : v < 0\}$$

$$U_8 = \{A \in SU(2,\mathbb{C}): v > 0\}$$

kümeleri birleşimleri $SU(2,\mathbb{C})$' yi veren açık alt kümeleridir.

Açık kümeleri taşıyan koordinat tasvirleri;

$$\varphi_1(A) = (y,u,v) \quad , \quad \varphi_2(A) = (y,u,v)$$

$$\varphi_3(A) = (x,u,v) \quad , \quad \varphi_4(A) = (x,u,v)$$

$$\varphi_5(A) = (x,y,v) \quad , \quad \varphi_6(A) = (x,y,v)$$

$$\varphi_7(A) = (x,y,u) \quad , \quad \varphi_8(A) = (x,y,u)$$

şeklindedir.

$\tilde{F} = \{(U_i,\varphi_i): i = 1,2,3 \dots ,8\}$ kümesi $SU(2,\mathbb{C})$ 'nin bir diferansiyellenebilir yapısını oluşturur. $SU(2,\mathbb{C})$ S^3'e homeomorfik olup 3-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifolddur.

Tanım 2.1.5. v , R^n uzayının bir p noktasında, $v_1, \dots , v_n$ bileşenleri ile verilen bir vektör olsun. Bunu diferensiyellenebilir fonksiyonlar üzerinde bir operatör olarak düşünebiliriz. Özellikle, f, p nin bir komşuluğunda diferensiyellenebilir ise, p noktasının v yönünde f nin yönlü türevi olarak $v(f)$ reel sayısı aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$v(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial r_1}\bigg|_p + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial r_n}\bigg|_p \tag{1}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar üzerindeki v vektörünün bu operatörü iki önemli özelliği sağlar;

a) $v(f + \lambda g) = v(f) + \lambda v(g)$,
b) $v(f.g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ (2)

burada f ve g, p noktasının komşuluğunda diferensiyellenebilir fonksiyonklar ve λ reel bir sayıdır. Birinci özellik, v nin bir lineer fonksiyon görevi gördüğünü, diğer özellik ise bir türev operatörü işlevi gördüğünü belirtmektedir. Bu özelliklerden dolayı v, manifoldun bir p noktasındaki teğet vektörüdür.

T_pM ile gösterilen teğet vektörlerin kümesine $p \in$ M noktasındaki teğet uzayı denir. Ayrıca, $dim(T_pM) = dim(M)$ dır, [3].

Tanım 2.1.6. $\psi: M \to N$, C^∞ sınıfından bir tasvir olsun. $p \in M$ olmak üzere ψ ' nin p deki diferensiyeli

$$d\psi: M_p \to N_{\psi(p)}$$

olacak şekilde tanımlanmış bir lineer tasvirdir. Eğer $v \in M_p$ ise, o takdirde $d\psi(v)$, $\psi(p)$'de bir teğet vektördür ve şöyle tanımlanır;

$g \in C^\infty$, $\psi(p)$'nin komşuluğunda bir fonksiyon olmak üzere;

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi)$$

dir. Aynı tasvirin dualini tanımlayalım;

$$\delta\psi: N^*_{\psi(p)} \to M^*_p$$

$$\delta\psi(w)(v) = w\big(d\psi(v)\big)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $w \in N^*_{\psi(p)}$ ve $v \in M_p$ dir. Özel olarak $f: M \to R$ fonksiyonu için $v \in M_p$ ve $f(p) = r_0$ ise, bu takdirde

$$df(v) = v(f)\left.\frac{d}{dr}\right|_{r_0}$$

dır. Bu durumda df'i M^*_p'nin elemanı olarak alırız ve

$$df(v) = v(f)$$

şeklinde tanımlanır, [3].

Tanım 2.1.7. $M \in C^\infty$ sınıfından ve $\mathfrak{F}$ diferensiyellenebilir yapıya sahip bir manifold olsun;

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} M_p$$

ve

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} M_p^*$$

olmak üzere,

$$v \in M_p\ ,\ \ \pi: T(M) \to M\ \ ,\ \ \pi(v) = p$$

$$\tau \in M_p^*\ ,\ \ \pi^*: T^*(M) \to M\ \ ,\ \ \ \ \pi^*(\tau) = p$$

doğal iz düşümleri yazılabilir. $x_1, x_2, \dots x_n$ koordinat fonksiyonları olmak üzere, $(U, \varphi) \in \mathfrak{F}$ olsun. Buna göre

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \to R^{2n}$$

ve

$$\tilde{\varphi}^*: (\pi^*)^{-1}(U) \to R^{2n}$$

tasvirleri aşağıdaki şekilde yazılabilir; her $v \in \pi^{-1}(U)$ ve her $\tau \in (\pi^*)^{-1}(U)$ lar için;

$$\tilde{\varphi}(v) = \Big(x_1\big(\pi(v)\big), \dots, x_n\big(\pi(v)\big), dx_1(v), \dots, dx_n(v)\Big)$$

ve

$$\tilde{\varphi}^*(\tau) = \left(x_1\big(\pi^*(\tau)\big), \dots, x_n\big(\pi^*(\tau)\big), \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \tau\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right)$$

dir. Burada, $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\varphi}^*$' ın her ikiside R^{2n}' nin açık alt kümeleri üzerine $1-1$ tasvirlerdir.

a) Eğer (U, φ) ve $(V, \psi) \in \mathfrak{F}$ ise, $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in C^\infty$ dır.

b) $\left\{\tilde{\varphi}^{-1}(w): w\ ,\ R^{2n'}\text{de açık}\ , (U, \varphi) \in \mathfrak{F}\right\}$ kolleksiyonu $T(M)$ üzerindeki bir topoloji için baz formunda ise $dim\big(T(M)\big) = 2n$ dir.

c) $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}): (U, \varphi) \in \mathfrak{F}\}$ içeren bir maksimal koleksiyon olsun. Dolayısıyla, $\tilde{\mathfrak{F}}$, $T(M)$ üzerinde diferensiyellenebilir bir yapıdır.

O halde, $T(M)$ ve $T^*(M)$' e bu diferensiyellenebilir yapılar ile birlikte sırasıyla teğet ve eşteğet demeti denir [3].

Tanım 2.1.8. Bir σ eğrisi boyunca X vektör alanını şu şekilde tanımlayabiliriz;

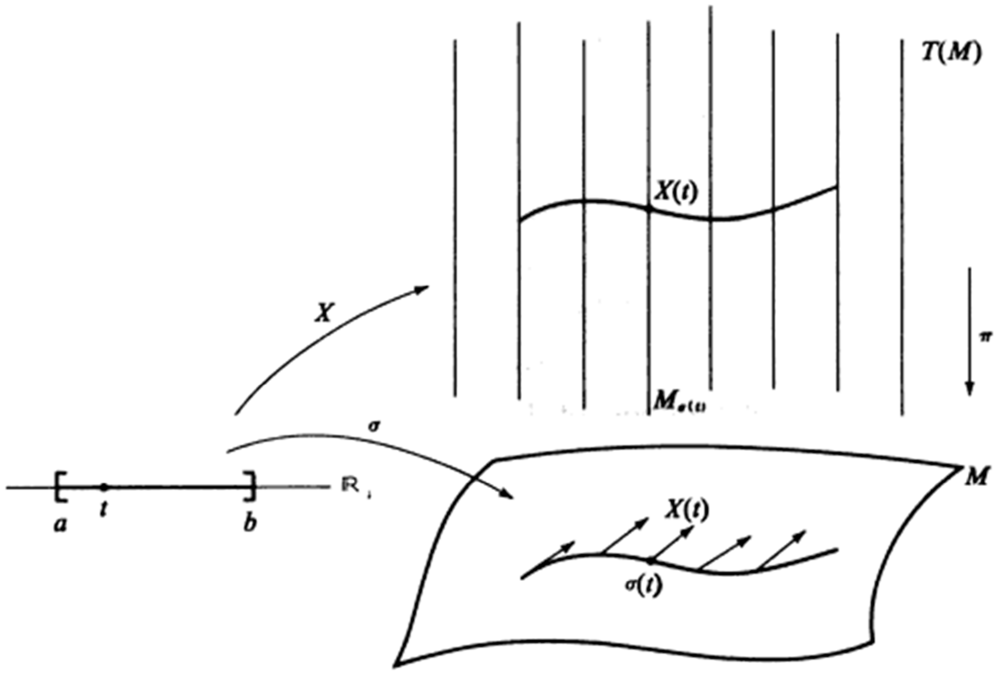
$$\sigma: [a, b] \to M$$

olmak üzere,

$$X: [a, b] \to T(M)$$

tasviri σ eğrisini $T(M)$' e taşır, yani,

$$\pi \circ X = \sigma$$



Şekil 2.2: σ eğrisi boyuncaki X vektör alanı

dir. X vektör alanı, eğer $X: [a, b] \to T(M)$ C^∞ sınıfından ise σ eğrisi boyunca C^∞ sınıfındandır. M deki U açık kümesi üzerindeki bir vektör alanı U'nun $T(M)$' e bir taşınmasıdır, yani,

$$X: U \to T(M)$$

tasviri

$$\pi \circ X = id|_U$$

şeklindedir, [3].

Önerme 2.1.9.X, M üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir;

a) $X \in C^{\infty}$ dur.

b) Eğer $(U, x_1, \dots, x_n), M$ üzerinde bir koordinat sistemi ve $\{a_i\}$ de

$$X|U = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlanmış U üzerindeki fonksiyonların bir kolleksiyonu ise,

$$a_i \in C^{\infty}(U)$$

dur.

c) V, M'de açık ve $f \in C^{\infty}(V)$ ise $X(f) \in C^{\infty}(V)$ dir.[3]

Tanım 2.1.10. X ve Y, M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanları olmak üzere, $[X, Y]$ Lie parantezi

$$f \in C^{\infty}, p \in M \text{ } için, \qquad [X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

şeklinde tanımlıdır ve M üzerinde yine bir vektör alanıdır.

2.2. LİE PARANTEZİNİN ÖZELLİKLERİ:

1) $[X, X] = 0$

2) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-simetri özelliği)

3) $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] = 0$ (Jacobi özelliği)

Tanım 2.2.1

♦ M ve N birer manifold olmak üzere, eğer $\varphi(p)$ de diferensiyellenebilen

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \theta \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\theta \circ f \circ \varphi^{-1}} & \theta(V) \end{array}$$

ve yukarıdaki şekilde olan, p için (U, φ) ve $f(p)$ için (V, θ) koordinat sistemleri varsa $f: M \to N$ fonksiyonuna $p \in M$ de diferensiyellenebilir olduğu söylenebilir.

♦ M ve N iki manifold ve $f: M \to N$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

f' in türevi

$$df : TM \to TN$$

$$df(X)(g) = X(g \circ f), \quad \forall X \in TM \text{ ve her bir } g \in C^{\infty}(N)$$

tasviri ile tanımlıdır, [5].

2.3. LİE GRUPLARI

Bir Lie grubu hem manifold hemde grup yapısına sahip bir kümedir.

Tanım 2.3.1. G ,

♦ diferansiyellenebilir bir manifold,

♦ $(G, .)$ bir grup

♦ $G \times G \to G$

$(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma\tau^{-1}$

tasviri diferensiyellenebilir ise G ye bir Lie grubu denir.

Teorem 2.3.2. G bir Lie grubu ise,

$$\varphi : G \times G \to G$$

$$\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$$

tasvirinin diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi_1 : GxG \to G \qquad\qquad \varphi_2 : G \to G$$

$$\varphi_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau \qquad \text{ve} \qquad \varphi_2(\tau) = \tau^{-1}$$

tasvirlerinin diferensiyellenebilir olmasıdır.

İspat : φ diferensiyellenebilir bir tasvir olsun. Bu durumda

$$G \xrightarrow{e \times Id} \{e\}xG \xrightarrow{\varphi} G$$

$$\tau \longmapsto (e, \tau) \longmapsto \tau^{-1}$$

$\varphi_2 = \varphi \circ (e \times Id)$ şeklinde düşünülürse, diferensiyellenebilir tasvirlerin bileşimleri de diferensiyellenebilir olduğundan,

$$\varphi_2 = G \to G$$

$$\varphi_2(\tau) = \tau^{-1}$$

tasviri de diferensiyellenebilirdir.

Benzer şekilde,

$$G \times G \xrightarrow{Id \times \varphi_2} G \times G \xrightarrow{\varphi} G$$

$$(\sigma, \tau) \longmapsto (\sigma, \tau^{-1}) \longmapsto \sigma\tau$$

$\varphi_1 = \varphi \circ (Id \times \varphi_2)$ şeklinde düşünülürse diferensiyellenebilir tasvirlerin bileşimleri de diferensiyellenebilir olduğundan,

$$\varphi_1 = G \times G \to G$$

$$\varphi_1(\sigma, \tau) = \sigma\tau$$

tasviri de diferensiyellenebilirdir.

φ_1 ve φ_2 tasvirleri diferensiyellenebilir olsunlar. Bu takdirde,

$$G \times G \xrightarrow{Id \times \varphi_2} G \times G \xrightarrow{\varphi_1} G$$

$$(\sigma, \tau) \longmapsto (\sigma, \tau^{-1}) \longmapsto \sigma\tau^{-1}$$

$\varphi = \varphi_1 \circ (Id \times \varphi_2)$ şeklinde düşünülürse diferensiyellenebilir tasvirlerin bileşimleri de diferensiyellenebilir olduğundan,

$$\varphi = G \times G \to G$$

$$\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$$

tasviri de diferensiyellenebilirdir.

Örnek 2.3.3. $S^{\mathbf{1}} = \{(x, y) \in R^{\mathbf{2}}: x^{\mathbf{2}} + y^{\mathbf{2}} = 1\}$

birim çemberinin bir diferensiyelenebilir manifold yapısına sahip olduğunu biliyoruz. $S^{\mathbf{1}}$de kompleks sayılardaki çarpma işlemine göre bir Lie grubudur.

Örnek 2.3.4. $SU(2,\mathbb{C}) = \left\{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \overline{A}^t = A^{-1}, detA = 1\right\}$

Özel Üniter grubun diferansiyellenebilir bir manifold olduğu daha önce gösterilmişti. Burada ise Lie grubu yapısını inceliyoruz. $SU(2,\mathbb{C})$ matris çarpımı altında soyut bir gruptur. Bu durumda,

$$\varphi: SU(2,\mathbb{C}) \to R^4$$

$$\varphi(A) = (x, y, u, v)$$

tasviri göz önüne alınsın. Burada, $z = x + iy$ ile $w = u + iv$ kompleks sayılar ve $\overline{z} = x - iy$ ile $\overline{w} = u - iv$ de kompleks eşlenikleri olmak üzere;

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$$

dir. $z_1 = x_1 + iy_1$, $w_1 = u_1 + iv_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$, $w_2 = u_2 + iv_2$ için,

$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ matrislerini göz önüne alalım.

$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \overline{w}_2 & z_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A_1 A_2^{-1}$ çarpımını inceleyelim;

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_2 & -w_2 \\ \overline{w}_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & u_1 + iv_1 \\ -u_1 + iv_1 & x_1 - iy_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - iy_2 & -u_2 - iv_2 \\ u_2 - iv_2 & x_2 + iy_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_3 & w_3 \\ -\overline{w}_3 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}$$

sonucu elde edilir. Burada,

$$x_3 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2$$

$$y_3 = -x_1 y_2 + y_1 x_2 - u_1 v_2 + v_1 u_2$$

$$u_3 = -x_1 u_2 + y_1 v_2 + u_1 x_2 - v_1 y_2$$

$$v_3 = -x_1 v_2 - y_1 u_2 + u_1 y_2 + v_1 x_2$$

olmak üzere $z_3 = x_3 + iy_3$, $w_3 = u_3 + iv_3$ şeklinde tanımlanmıştır. Sonuç olarak $\varphi(A_1A_2^{-1}) = \varphi(A_3) = (x_3, y_3, u_3, v_3)$ olup matris çarpımı diferensiyellenebilir olduğundan $SU(2,\mathbb{C})$ bir Lie grubudur.

Tanım 2.3.5. $\sigma \in G$ olmak üzere,

$$l_\sigma : G \to G$$

$$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau$$

tasvirine σ nın sol ötelemesi denir. l_σ nın türevi

$$dl_\sigma : TG \to TG$$

şeklindedir ve

$$dl_\sigma(T_\tau G) \subset T_{\sigma\tau}G$$

dir.

Tanım 2.3.6. X bir vektör alanı olmak üzere, $\forall\sigma \in G$ için, $X \circ l_\sigma = dl_\sigma \circ X$ ise, X'e G üzerinde sol invaryanttır denir.

Teorem 2.3.7. G bir Lie grubu ve g de G'nin sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olmak üzere g bir reel vektör uzayıdır.

$$\alpha : g \to T_eG$$

$$\alpha(X) = X_e$$

şeklinde tanımlı α tasviri bir izomorfizmadır. Sonuç olarak, $dimg = dimT_eG = dimG$ dir.

İspat: g nin reel vektör uzayı olduğu, sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olmasından dolayı açıktır.

$X, Y \in g$ ve $a, b \in R$ için vektör alanı özelliğinden

$$\alpha(aX + bY) = (aX + bY)e$$

$$= aX(e) + bY(e)$$

$$= a\alpha(X) + b\alpha(Y)$$

elde edilir, dolayısıyla α lineerdir.

$\forall\sigma \in G$ için $\alpha(X) = \alpha(Y)$ olsun. Sol invaryant tanımından;

$$\begin{aligned} X(\sigma) &= (X \circ l_\sigma)(e) \\ &= (dl_\sigma \circ X)(e) \\ &= dl_\sigma\big(X(e)\big) \\ &= dl_\sigma\big(Y(e)\big) \\ &= (dl_\sigma \circ Y)(e) \\ &= (Y \circ l_\sigma)(e) \\ &= Y(\sigma) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $X = Y$ ve α $1-1$ dir. Bununla birlikte, $\forall\sigma \in G$ ve $X \in T_eG$ için, $X(\sigma) = dl_\sigma(X)$ ise, α örtendir. Bu takdirde $\alpha(X) = X$ dir ve X sol invaryanttır. $\forall\sigma,\tau \in G$ için ise,

$$\begin{aligned} X(\sigma\tau) &= dl_{\sigma\tau}(X) \\ &= dl_\sigma dl_\tau(X) \\ &= dl_\sigma\big(X(\tau)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $g \cong T_eG$ dir ve dolayısıyla

$$dimg = dimT_eG = dimG$$

dır, [5].

2.4. LİE CEBİRİ

Tanım 2.4.1. g, K cismi üzerinde $(K = R, \mathbb{C})$ bir vektör uzayı olmak üzere,

$$g \times g \to g$$

$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

tasviri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, g ye bir Lie cebiri denir;

a) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$ ve $\forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in g$ için K cismi üzerinde

$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$ ve

$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]$

olduğundan bilineerdir.

b) $[X, Y] = -[Y, X]$ ters simetri özelliği

c) $\big[X, [Y, Z]\big] + \big[Z, [X, Y]\big] + \big[Y, [Z, X]\big] = 0$ Jakobi özelliği

G Lie grubunun g Lie cebiri, G üzerindeki bütün sol invaryant vektör alanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Ayrıca, G'nin g Lie cebirini birimdeki teğet uzayı $T_e G$ olarak da alabiliriz, [16].

Örnek 2.4.2. Herhangi bir vektör uzayı üzerindeki bütün Lie parantezleri sıfır olarak alınırsa bu vektör uzayı bir Lie cebiri oluşturur ve bu şekildeki Lie cebirine değişmeli Lie cebiri denir.

Örnek 2.4.3. $n \times n$ şeklindeki bütün matrislerin kümesi $gl(n, R)$ ile gösterilsin. $gl(n, R)$ nin bir vektör uzayı olduğu aşikardır. $gl(n, R)$ üzerindeki Lie parantezi ise $A, B \in gl(n, R)$ için $[A, B] = AB - BA$ olmak üzere $gl(n, R)$ bir Lie cebiri olur.

Örnek 2.4.4. 3-boyutlu Heisenberg grubu;

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in R \right\}$$

şeklindedir. $\forall t \in R$ için

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

ve $\gamma(0) = I = e$ olacak şekilde $\gamma(t)$, G üzerinde bir eğridir. Buna göre,

$$\dot{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ise,

$$\dot{\gamma(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_eG$$

olur. Benze şekilde $\forall t \in R$ için,

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

dir ve $\alpha(0) = I = e$ olacak şekilde $\alpha(t)$, G üzerinde bir eğridir.

Buna göre

$$\dot{\alpha(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ise,

$$\dot{\alpha(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Y \in T_eG$$

olur. Benzer şekilde, $\forall t \in R$ için,

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

dir ve $\gamma(0) = I = e$ olacak şekilde $\gamma(t)$, G üzerinde bir eğridir. Buna göre

$$\dot{\beta(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ise,

$$\dot{\beta(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z \in T_eG$$

olur. Böylece $T_eG = \{X, Y, Z\}$ olur. Bunların Lie parantezine bakacak olursak;

$$[X,Y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Z$$

$$[X,Z] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$[Y,Z] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

dır. Sonuç olarak, G Heisenberg grubunun g Lie cebiri $g \cong T_eG$ olduğundan $g = span\{X, Y, Z\}$ olur, [5].

2.5. ÜSTEL TASVİR

Bu paragrafta, bir parametreli alt grupların kümesi aracılığıyla G Lie grubunun yapısını inceleyeceğiz.

Tanım 2.5.1. $\varphi: R \to G$ şeklindeki bir homomorfizmaya G'nin 1-parametreli alt grubu denir.

G bir Lie grubu, g de onun bir Lie cebiri olmak üzere, $X \in g$ için

$$\lambda \frac{d}{dr} \longmapsto \lambda X$$

tasviri R nin Lie cebirinin g içine bir homomorfizmasıdır.

Reel eksen basit bağlantılı olduğundan,

$$d exp_X \left(\lambda \frac{d}{dr} \right) = \lambda X$$

olacak şekilde

$$exp_X : R \rightarrow G$$

1-parametreli tek bir alt grup vardır. Diğer bir deyişle

$$t \longmapsto exp_X(t)$$

tasviri, sıfır noktasındaki teğet vektörü $X(e)$ olan G nin 1-parametreli tek bir alt grubudur.

$$exp : g \rightarrow G$$

üstel tasviri

$$exp(X) = exp_X(1)$$

şeklinde tanımlanır, [5].

Teorem 2.5.2. G bir Lie grubu, g de onun bir Lie cebiri olmak üzere, $X \in g$ için aşağıdakiler sağlanır:

a) $exp(tX) = exp_X(t), \; \forall t \in R$

b) $exp(t_1 + t_2)X = \big(exp(t_1 X)\big)\big(exp(t_2 X)\big), \; \forall t_1, t_2 \in R$

c) $exp(-tX) = \big(exp(tX)\big)^{-1} \; \forall t \in R$, [5].

İspat:

a) φ ve ψ, R den G ye iki tasvir olsun. Ve
$\varphi(t) = exp_X(st)$ ve $\psi(t) = exp_{sX}(t)$

şeklinde tanımlansınlar. Burada $s \in R$ dir. sX integral eğrisi ψ dir ve tektir. Ayrıca $\psi(0) = e$ dir.

$$d\varphi\left(\frac{d}{dr}\Big|_{t}\right) = dexp_X\left(s\frac{d}{dr}\Big|_{st}\right) = sX|_{exp_X(st)}$$

olur ve böylece φ, sX in integral eğrisi olup $\varphi(0) = e$ dir. Ancak integral eğrileri tek olduğundan $\varphi = \psi$ dir. Böylece,

$$exp_{sX}(t) = exp_X(st) \quad s,t \in R\,; X \in g$$

olur. Bu eşitlikte öncelikle t yerine 1 ve daha sonrada s yerine t yazalım. Böylece,

$$exp_{tX}(1) = exp_X(t)$$

elde edilir. Tanımdan

$$exp_{tX}(1) = exp(tX)$$

olup,

$$exp(tX) = exp_X(t)$$

elde edilir.

b) $exp_{\boldsymbol{X}}$ **'**in R den G ye bir homomorfizma olmasından ve (a) şıkkından faydalanarak

$$\begin{aligned} exp(t_1 + t_2)X &= exp_X(t_1 + t_2) \\ &= exp_X t_1 . exp_X t_2 \\ &= exp(t_1X)exp(t_2X) \end{aligned}$$

elde edilir.

c) $exp(-tX) = exp_X(-t) = \left(exp_X(t)\right)^{-1} = \left(exp(tX)\right)^{-1}$ olur.

Teorem 2.5.3. $\varphi: H \to G$ tasviri bir homomorfizma olsun. Bu takrirde aşağıdaki diyagram değişmelidir, [5]

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ h & \xrightarrow{d\varphi} & g \end{array}$$

İspat: $X \in h$ olmak üzere $\varphi(expX) \in G$ olur. $t \longmapsto \varphi\big(exp(tX)\big)$ tasviri sıfırdaki teğeti $d\varphi\big(X(e)\big)$ olan G'de diferensiyellenen bir eğridir. φ bir homomorfizma olduğundan dolayı aynı zamanda G'nin bir 1-parametreli alt grubudur. Dolayısıyla,

$$\varphi\big(exp(tX)\big) = exp\left(t\big(d\varphi(X)\big)\right)$$

olur. Eğer $t = 1$ alırsak

$$\varphi\big(exp(X)\big) = exp\big(d\varphi(X)\big) \Rightarrow \varphi \circ exp = exp \circ d\varphi$$

olur.

Örnek 2.5.4. A , $n \times n$ lik bir matris olsun. $\varphi: R \to GL(n, R)$ tasviri

$$\varphi(t) = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nA^n}{n!} = exp(tA)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. $exp(tA) = exp_A(t)$ ve exp_A , R nin bir homomorfizması olup φ, $GL(n, R)$' nin 1-parametreli alt grubu olur. Dolayısıyla matris grubunun üstel tasviri

$$exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

şeklinde olur . Böylece, Lie cebiri bütün matrislerin vektör uzayının bir alt uzayı olur

Örnek 2.5.5. G Heisenberg grubunun Lie cebiri g olmak üzere, $exp: g \to G$ üstel tasviri için $exp(X)$' e bakalım; $X \in g$ için,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$$exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

şeklinde olup, $X^2 = X^3 = \cdots = 0$ olmasından dolayı,

$$exp(X) = I + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

olur. Şimdi de $exp(Y)$ e bakalım. $Y \in g$ için,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$$exp(Y) = I + Y + \frac{Y^2}{2!} + \frac{Y^3}{3!} + \cdots$$

şeklinde olup, $Y^2 = Y^3 = \cdots = 0$ olmasından dolayı,

$$exp(Y) = I + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

olur. Son olarak, $exp(Z)$ e bakalım. $Z \in g$ için

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$$exp(Z) = I + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \cdots$$

şeklinde olup, $Z^2 = Z^3 = \cdots = 0$ olmasından dolayı,

$$exp(Z) = I + Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

şeklinde bulunur.

2.6. ADJOİNT GÖSTERİLİM

Tanım 2.6.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve G de bir Lie cebiri olmak üzere

$$\mu: G \times M \to M$$

$$\mu(\sigma\tau, m) = \mu\big(\sigma, \mu(\tau, m)\big) \ \ , \ \ \mu(e, m) = m \qquad\qquad \forall \sigma, \tau \in G \ , \forall m \in M$$

şeklindeki diferensiyellenebilir tasvire G nin M üzerindeki sol etkisi denir. Ayrıca sabit bir $\sigma \in G$ noktası için $m \longmapsto \mu(\sigma, m)$ tasviride M'nin bir difeomorfizmasıdır ve μ_σ ile gösterilir. Benzer şekilde ,

$$\mu: M \times G \to M$$

$$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau) \ \ , \ \ \mu(m, e) = m \qquad\qquad \forall \sigma, \tau \in G \ , \forall m \in M$$

diffrensiyellenebilir tasvire de G nin M üzerindeki sağ etkisi denir.

Tanım 2.6.2. Bir G Lie grubunun kendi üzerindeki sol etkisi ile oluşan iç otomorfizması

$$i: G \times G \to G$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

şeklinde olup, birim elemanı bu etkinin sabit noktasıdır. Yani, $\forall \sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ dir. Bu takdirde,

$$\sigma \longmapsto di_\sigma|_e \qquad\quad T_eG \cong g$$

tasviri G nin $Aut(g)$ içine bir gösterilimidir. Bu gösterilime Adjoint gösterilim denir ve

$$Ad: G \to Aut(g)$$

şeklinde gösterilir. Adjoint gösterilimin diferensiyeli ise, [5]

$$d(Ad) = ad$$

dir.

Böylece,

$$Ad(\sigma) = Ad_\sigma \qquad\quad ve \qquad\quad ad(X) = ad_X$$

şeklindedir.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(g) \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ g & \xrightarrow{ad} & End(g) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ g & \xrightarrow{Ad_\sigma} & g \end{array}$$

değişmeli diyagramları

$$expt\big(Ad_\sigma(X)\big) = \sigma(exptX)\sigma^{-1}$$

olduğunu gösterir ve özel olarak, $G = Aut(V)$ alınırsa diyagramlar $B \in Aut(V)$ için

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{Ad} & Aut(EndV) \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ End(V) & \xrightarrow{ad} & End\big(End(V)\big) \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{a_B} & Aut(V) \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ End(V) & \xrightarrow{Ad_B} & End(V) \end{array}$$

şekline gelir. Ayrıca, $C \in End(V)$ alınırsa ,

$$Ad_B(C) = B \circ C \circ B^{-1}$$

olur, [5].

2.7. LİE TÜREVİ

Tanım 2.7.1. $\forall t \in R$ için tanım kümesi,

$$D_t = \{m \in M: t \in \big(a(m), b(m)\big)\}$$

olan

$$X_t(m) = \gamma_m(m)$$

için X_t dönüşümünü tanımlayalım. Burada,

$$\gamma_m\colon \big(a(m), b(m)\big) \to M \quad , \quad 0 \in \big(a(m), b(m)\big) \text{ ve } \gamma_m(0) = m$$

şeklinde X vektör alanlarının bir integral eğrisidir. Her t için $D_t = M$ ise X diferensiyellenebilir vektör alanı M üzerinde tamdır. O zaman X_t dönüşümleri reel sayılarla parametrelenen ve X in 1-parametreli grubu olarak adlandırılan M nin dönüşümlerinin bir grubu olur. Eğer X tam değil ise o zaman da tanım kümeleri t'ye bağlı olduğundan X_t dönüşümleri bir grup yapısı alamazlar. Bu durumda da X'in yerel 1-parametreli grubu olarak X_t dönüşümlerinin bir kolleksiyonunu alabiliriz.

Bir M manifoldu üzerinde sabit diferensiyellenebilir bir X vektör alanı alalım. X_t , X ile ilişkilendirilmiş dönüşümlerin 1-parametreli yerel grubunu göstermek üzere M manifoldu üzerindeki bir diğer diferensiyellenebilir vektör alanı Y olsun. Şimdi $m \in M$ noktasındaki Y'nin X'e göre türevini tanımlayacağız.

Öncelikle, X' in integral eğrisinde, $X_0(m)$ noktasından $X_t(m)$ noktasına gelelim ve Y' i burada değerlendirelim. Sonrada, $Y_{X_t(m)}$' yi X_{-t} difeomorfizmasının dX_{-t} diferensiyeli ile m noktasındaki teğet uzaya geri taşıyalım. T_mM de $dX_{-t}\big(Y_{X_t(m)}\big)$ ve Y_m vektörlerinin farkını alıp bu farkı t e bölüp $t \to 0$ için limit alalım. Yani türevin tanımını uygulayalım.

Sonuç olarak, T_mM de bir vektör olup bu vektöre Y' nin X' e göre $m \in M$ noktasındaki Lie türevi denir ve $(L_XY)_m$ ile gösterilir.

Yani,

$$(L_XY)_m = \lim_{t \to 0} \frac{dX_{-t}\big(Y_{X_t(m)}\big) - Y_m}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big[dX_{-t}\big(Y_{X_t(m)}\big)\Big]$$

olur, [5].

Önerme 2.7.2. X, M üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı olmak üzere M üzerindeki herbir diferensiyellenebilir Y vektör alanı için $L_XY = [X, Y]$ dir.

Önerme 2.7.3. G bir Lie grubu g de onun bir Lie cebiri olmak üzere $\forall X, Y \in g$ için

$$ad(X)(Y) = [X, Y]$$

dir.

Örnek 2.7.4. Lie cebiri ile birlikte 3-boyutlu Heisenberg grubunu alalım.

$$i = G \times G \to G$$

$$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon G \text{ ve } \tau = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \epsilon G$$

olsun. Bu durumda,

$$i_\sigma(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & -c + ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & z + ay - bx \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = di_\sigma$$

$$i_\sigma: (x, y, z) \to (x, y, z + ay - bx)$$

$$Jac(i_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$di_\sigma: (x, y, z) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -bx + ay + z \end{pmatrix}$$

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(exptX)(Y)$$

$$\rho(t,0,0)\epsilon Aut(\tilde{g})$$

öyleki,

$$\rho(t,0,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}$$

$$d\rho(X)(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = Z = [X,Y]$$

dir, [5].

2.8. GENEL KONTROL SİSTEMLERİ

M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere, $X(M)$, M' nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı olan bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının bir kümesini göstersin. Her bir $X \in X(M)$, M manifoldu üzerindeki yerel difeomorfizmaların 1-parametreli bir grubunu tanımlar. Manifoldlar üzerinde vektör alanları aracılığıyla üretilmiş adi diferensiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı, her bir $t \in R$ için,

$$X_t : dom(X_t) \subset M \to M$$

bir yerel difeomorfizması elde edilir. Ayrıca, $\gamma^X(.,x)$, x noktasından geçen X vektör alanının integral eğrisi

$$X_t(x) = \gamma^X(t,x)$$

şeklinde tanımlanır. X_t için aşağıdaki özellikleri sağlar;

1) $X_{\boldsymbol{t}} \circ X_{\boldsymbol{s}} = X_{\boldsymbol{t+s}}$, $\forall t,s \in R$

2) $(X_t)^{-1} = X_{-t}$, $\forall t \in R$ $(X_{-t}: X_t(dom(X_t)) \subset M \to dom(X_t) \subset M$)

3) $X_{\boldsymbol{0}} = Id$ [4].

Tanım 2.8.1. $\sum$ kontrol sistemi, $\sum = (M, D)$ şeklindeki bir ikiliden meydana gelmektedir. Burada, M diferensiyellenebilir bir manifold ve D ise $X(M)$ 'nin bir alt topluluğudur.

M 'ye $\sum$ 'nın durum uzayı ve D'nin elemanlarına da sistemin stratejileri denir.

$\sum$ kontrol sistemine ilişik

$$G_{\sum} = \left\{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \in R, r \in N\right\}$$

sözde (pseudo) grubu vardır ve

$$G_{\sum}(x) = \left\{\varphi(x) \middle| \varphi \in G_{\sum}\right\}$$

M ´de x 'in yörüngesidir.

Tanım 2.8.2. $G_{\sum}(x) = M$ olacak şekilde bir $x \in M$ varsa, $\sum$ sistemi geçişli bir sistemdir.

Şimdi de M üzerinde $'' \sim ''$ bağıntısını tanımlayalım;

$$x \sim y \Leftrightarrow G_{\sum}(x)$$

olsun. Buırada, $'' \sim ''$ bir denklik bağıntısıdır. Özel olarak, $\sum$ sistemi geçişli bir sistem ise,

$$G_{\sum}(x) = M, \quad \forall x \in M$$

dır. Ayrıca $\sum$ ile birlikte sözde yarı (pseudo-semi) grubu yazılır.

$$S_{\sum} \quad = \left\{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_r}^r \middle| X^j \in D, t_j \geq 0, r \in N\right\}$$

olur. Burada, $\sum$'nın ulaşılabilirlik kümesi olarak da adlandırılabilen $x \in M$'nin pozitif yörüngesi

$$S_{\sum} \quad (x) = \left\{\varphi(x) \middle| \varphi \in S_{\sum}\right\}$$

olur ve genel olarak,

$$\forall x \in M \text{ için } S_{\sum}(x) \subseteq G_{\sum}(x) \subseteq M$$

yazılır. M üzerindeki $S_{\sum}$ ile tanımlı $'' \sim ''$ bağıntısı simetrik değildir. Çünkü, $t > 0$ olduğunda $X_{-t}(x)$‘ in $S_{\sum}(x)$’a ait olması gerekmez.Başka bir deyiş ile;

$$X \in D \nRightarrow -X \in D$$

dir.

Kontrol teorideki en önemli temel problemlerden biri olan kontrol edilebilirlik problemi, $S_{\sum}(x) = M$ olacak şekilde M, D ve $x \in M$ üzerindeki koşulların bulunmasıdır. Amaç, bir x başlangıç noktasından başlayarak sistemin dinamiği ile verilen, negatif olmayan stratejileri ile M’nin her noktasına ulaşmaktır.

$S_{\sum}(x) \subseteq G_{\sum}(x) \subseteq M$ olduğundan sistemin geçişliliği bu problemi çözmek için gerek ama yeter bir koşul değildir. Örneğin,

$$\sum = \left(\mathbb{R}, \left\{\frac{d}{dr}\right\}\right)$$

sistemini gözönüne alalım,

$$S_{\sum}(0) = [0, \infty) \subsetneq G_{\sum}(0) = \mathbb{R}$$

dır ve dolayısıyla kontrol edilemezdir [4].

Tanım 2.8.3. $\sum = (M, D)$ bir kontrol sistemi ve $x \in M$ olmak üzere, $S_{\sum}(x) = M$ ise sisteme x’de kontrol edilebilirdir denir. Eğer sistem M’nin her noktasında kontrol edilebilir ise , sisteme kontrol edilebilirdir denir.

Teorem(orbit) 2.8.4. $\sum = (M, D)$ bir kontrol sistemi olmak üzere, her $x \in M$ için, $G_{\sum}(x)$ yörüngesi(orbiti) diferensiyellenebilir bir manifold yapsına sahiptir [15].

2.9. R^n ÜZERİNDEKİ AFİN KONTROL SİSTEMLERİ

R^n n-boyutlu Öklid uzayı üzerindeki afin kontrol sistemlerinin kontrol edilebilirliği Jurdjevic ve Sallet (1984) [12], tarafından karakterize edilmiştir.

Bu uzay üzerindeki bütün endomorfizmaların uzayını $EndR^n$ ve bütün lineer otomorfizmaların uzayını da $AutR^n$ ile gösterirsek, $AutR^n$ ile R^n ‘nin semi-direkt çarpımı yani,

$$AfR^n = AutR^n \otimes R^n$$

R^n'nin afin grunbunu tanımlar ve bu grubun Lie cebiri;

$$afR^n = \ EndR^n \otimes R^n$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $A \in EndR^n$ ve $a \in R^n$ için

$$X(x) = Ax + a$$

vektör alanına afin vektör alanı denir.

R^n üzerinde $exptX$, R^n üzerindeki difeomorfizmaların 1-parametreli grubunu doğurur ve bunun sonsuz küçük üreteçleri

$$X(x) = Ax + a$$

afin vektör alanlarıdır. Burada, $X_0, X_1, \dots, X_m$ afin vektör alanlarının herhangi bir sonlu topluluğu,

$$X_i(x) = A_i x + a \quad i = 0,1, \dots, m$$

olmak üzere, R^n üzerindeki afin ontrol sistemi

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(x) = (A_0 x + a_0) + \sum_{i=1}^{m} u_i(t)(A_i x + a_i)$$

şeklindeki diferansiyel denklemler ile tanımlıdır. Burada, $u_i \in U \subset R^n$ fonksiyonları kontrollerle ilgili keyfi fonksiyonlar, $A_0, A_1, \dots, A_m$ ler $n \times n$ ‘lik matrisler ve $a_0, a_1, \dots, a_m$ ‘ ler ise de R^n içindeki sütun vektörleridirler.

F bir afin sistemi göstermek üzere, $\forall X \in F$ ve $\forall x \in R^n$ için $X(x) \neq 0$ ise, bu takdirde F afin ailesinin tekil noktası yoktur denir.

Teorem 2.9.1. F $\boldsymbol{R^n}$ üzerindeki afin kontrol sistemi ve $\vec{F}$, F 'nin bilineer kısmını göstermek üzere;

i) F hiç bir tekil noktaya sahip değil ve

ii) $\vec{F}$; $\boldsymbol{R^n} - \{0\}$ üzerinde kontrol edilebilir ise, bu takdirde F afin ailesi R^{n} üzerinde kontrol edilebilirdir, [6].

2.10. LİE GRUPLARI ÜZERİNDE AFİN KONTROL SİSTEMLERİ

Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemlerinin incelenmesi oldukça yenidir.

Tıkız bağlantılı ve tıkız olmayan yarı-basit (semi-simple) Lie grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonu Ayala ve San Martin tarafından 2000 yılında yapılmıştır.

Daha sonra, Jurdjevic ve Sallet ‘ın 1984 yılında yayınladıkları çalışmalarındaki teknik kullanılarak, Kara ile San Martin 2006 yılında Genelleştirilmiş Heisenberg Lie Grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirlik karakterizasyonunu elde etmişlerdir. Benzer teknikle, Kara ile Kule 2010 yılında Carnot Grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirliğini vermişlerdir.

G bağlantılı bir Lie grubu ve $L(G)$ de onun Lie cebiri olmak üzere G nin afin grubu $Af(G)$, G ile $Aut(G)$’ nin semi-direkt çarpımıdır. Yani;

$$Af(G) = Aut(G) \otimes G \text{ dir.}$$

$Af(G)$ ‘de çarpım aşağıdaki gibi tanımlıdır;

$$(\Phi, g_1).(\psi, g_2) = \big(\Phi \circ \psi, g_1 \Phi(g_2)\big)$$

e ve 1 sırasıyla G ve $Aut(G)$ nin birim elemanıdır. $Af(G)$ nin birim elemanı $(1, e)$ ve $(\Phi, g) \epsilon\, Af(G)$’nin tersi ise $\big(\Phi^{-1}, \Phi^{-1}(g^{-1})\big)$ dir. $Af(G)$ ‘nin Lie cebiri $af(G)$, $aut(G)$ ile $L(G)$ nin semi-direkt çarpımıdır. Lie parantezi ise ;

$$[(D_1, X_1), (D_2, X_2)] = ([D_1, D_2], D_1X_2 - D_2X_1 + [X_1, X_2])$$

şeklinde tanımlıdır.

G bağlantılı bir Lie grubu ve g' de onun Lie cebiri olmak üzere ,

$$\dot{x}(t) = (D + X)(x) + \sum_{j=1}^{d} u_j\,(t)\big(D^j + Y^j\big)(x)$$

diferensiyel denklem ailesi , G üzerindeki afin kontrol sistemini belirler. Burada, $x\epsilon G$, $D, D^1, \dots, D^d \epsilon Der\big(L(G)\big)$ ve $X, Y^1, \dots, Y^d \epsilon L(G)$ $u\epsilon U$ için denklem U ile parametrize edilmiştir. U parçalı sabit reel değerli fonksiyonların ailesidir.

O takdirde, dinamik aşağıdaki gibi verilir.

$$D = \left\{ D + X + \sum_{j=1}^{d} u_j \big(D^j + Y^j\big) \,\Big|_{u \epsilon R^d} \right\}$$

Burada $X, Y^j \epsilon g$ olmak üzere $D = 0$ ise sistem invaryanttır. Eğer Lie cebirinin elemanları; yani, $X = 0$ ve $D = D^1 = D^2 = \cdots = D^j = 0$ ise, afin kontrol sisteminin elemanları lineer kontrol sistemin elemanları formuna dönüşür. Diğer bir durum olarak, Lie grubu üzerinde afin kontrol sistemi için $X = 0$ ve $Y^1 = Y^2 = \cdots = Y^j = 0$ olduğu düşünülürse, bilineer kontrol sistemi ortaya çıkar. Genel olarak, afin kontrol ailesi bilineer kontrol ailesinden daha zengin aile olarak tanımlanır. Lie grupları üzerindeki afin kontrol sistemleri, lineer , bilineer ve invariant sistemlerden daha genel bir sistemdir.

Dördüncü Bölümde, $''\, ax + b\, ''$ grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri inceliyoruz.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Lie grupları üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirliği oldukça genel bir durum olduğu için ilk malzeme olarak sistemin durum uzayı olarak $'' \, ax + b \, ''$ nu inceliyoruz.

$a > o$ olmak üzere, $\forall a, b \epsilon \mathbb{R}$ için $f_{a,b}(x) = ax + b,$ şeklindeki afin dönüşüm için, herhangi iki afin dönüşümün çarpımı yine aynı şekilde olduğundan bir grup oluştururlar ve tersi de yine aynı dönüşümü verir. Bu şekilde ortaya çıkan grubu $Af(1)$ ile ve $f_{a,b}$ fonksiyonunu da $f_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi ile gösteriyoruz. Afin kontrol sistemimizi oluşturan diğer malzemeleri tanımak için aşağıdaki diferansiyel denklem ailesini inceleyelim.

$$\dot{x}(t) = (D + X)(x) + \sum_{j=1}^{d} u_j \, (t)\big(D^j + Y^j\big)(x)$$

diferansiyel denklem ailesi , $Af(1)$ üzerindeki afin kontrol sistemini belirler. Burada, $x\epsilon \ Af(1)$; $D, D^1, \dots, D^d \epsilon Der(af(1)\,)$; $X, Y^1, \dots, Y^d \epsilon \ af(1) \ ve \ \ u\epsilon U$ dir. U parçalı sabit reel değerli fonksiyonların ailesidir.

Bu takdirde, dinamik

$$D = \left\{ D + X + \sum_{j=1}^{d} u_j\big(D^j + Y^j\big) \, \Big|_{u\epsilon R^d} \right\}$$

şeklindedir.

Yöntem; afin sistemi bilineer parçasına bağlayan cebir seviyesindeki bir otomorfizma ile bilineer sistemin kontrol edilebilirliğini ters tasvir yoluyla afin sisteme genişletme tekniğidir. Bu yöntem için sistemi oluşturan malzemeler ve özellikleri analiz edilmektedir.

4. BULGULAR

Çalışmanın bu bölümü, kontrol edilebilirlik için hedeflenen özgün sonuçları içermektedir. Önce, $Af(1)$ grubunun cebirsel özelliklerini elde ediyoruz ve daha sonra sistemin kontrol edilebilirliğini karakterize ederek ispatlıyoruz.

4.1. $''\boldsymbol{ax+b}''$ GRUBU

$a > o$ olmak üzere, $\forall a, b \epsilon \mathbb{R}$ için $f_{a,b}(x) = ax + b$, şeklindeki dönüşüme afin dönüşüm denir. Herhangi iki afin dönüşümün çarpımı yine aynı şekilde olduğundan bir grup oluştururlar ve tersi de yine aynı dönüşümü verir. Bu grubu $Af(1)$ ile göstereceğiz. $f_{a,b}$ fonksiyonu $f_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi ile ilişkilendirilebilir.

Soldan $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir, [7]. $Af(1)$' in grup olduğunu gösterelim;

1) $f_{a,b}(x)$ **,** $f_{c,d}(x) \epsilon\ Af(1)$ ise $f_{a,b}(x).f_{c,d}(x) \epsilon Af(1)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acx+ad+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \ \epsilon\ \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad ac, ad + b\ \epsilon\ \mathbb{R}$

2) $f_{a,b}(x)\ \epsilon\ Af(1)$ ise $f_{a,b}^{-1}(x)\ \epsilon\ Af(1)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $a > 0$ olduğundan $\frac{1}{a} > 0$ dır. Ve $a, b \epsilon \mathbb{R}$ olduğundan $\frac{1}{a}\ , -\frac{b}{a}\ \epsilon \mathbb{R}$ dir.

3) $f_{a,b}(x) \neq f_{b,a}(x)$ yani $Af(1)$ değişmeli değildir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} bx+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Böylece, $Af(1)$, $2x2'$ lik reel matrislerin bir grubu olarak incelenebilir ve dolayısıyla $\mathbb{R}^4$' de geometrik bir nesnedir. Diğer tarafdan $Af(1)'$ in elemenları bir yarı-düzlem oluşturduğundan 2-boyutludur. Öncelikle $(a, b, 0,0)$ noktalarını içeren $\mathbb{R}^4$' ün 2-boyutlu alt uzayını düşünelim. Bu bir düzlemdir ve dördüncü koordinat doğrultusunda 1 birim kaydırılarak elde edilen $(a, b, 0,1)$ noktaların kümesidir. Sonuçta, ilk koordinatı $a > 0$ koşulu ile kısıtlayarak bu yarım düzlemi elde ederiz.

Tekil olmayan limit altında $Af(1)$ kapalıdır; yani, vektör toplamı ve $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ toru altında 2-boyutlu matris Lie grubudur. İki matris Lie gruplarından farklı olarak $Af(1)$ değişmeli değildir. Örneğin,

$$\begin{aligned} f_{2,1}f_{1,2}(x) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f_{1,2}f_{2,1}(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$Af(1)$ sadece bağlantılı, değişmeli olmayan 2-boyutlu Lie grubudur.

Geometrik bir nesne olarak, $Af(1)$, $\mathbb{R}^4$' ün sınırsız bir alt kümesidir. Çünkü, b herhangi bir sayı ve a ise pozitif herhangi bir sayıdır. Ayrıca, tıkız olmayan bir Lie grubudur. Tüm bu özellikleri ile 2-boyutlu tek Lie grubudur.

Bir grup olarak ise, homomorfizması aşağıdaki şekildedir;

$b \to 0$ oldukça,

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır. Yani, sonsuz çokluktaki b değerli $F_{a,b}$ matrislerini $F_{a,0}$ matrisine götürür. Dolayısıyla,

$$\varphi\left(F_{a_1,b_1}F_{a_2,b_2}\right) = \varphi\left(F_{a_1,b_1}\right)\varphi\left(F_{a_2,b_2}\right)$$

olduğunu şöyle görebiliriz;

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \varphi\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\varphi\left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\varphi\left[\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Af(1)$ basit(simple) bir grup değildir, ayrıca, φ ‘nin çekirdeğindeki matrislerin normal alt grubu kendi matris Lie grubudur. $Af(1)$ grubunun çekirdeği ise bütün matrislerini birim matrise gönderen bir grup homomorfizmasıdır. Yani, $a \to 1$ ve $b = 0$ için

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\colon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.

Geometrik olarak, bu alt grup bir doğrudur, ve grup işlemi doğru üzerinde toplamaya tekabül eder, çünkü

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dır.[7]

4.2. $Af(1)'$ İN LİE CEBİRİ

$Af(1)$, $2x2'$ lik matrislerin $\mathbb{R}^4$ uzayında bir düzlemin yarısı olduğundan, geometrik olarak birim elemandaki teğet uzayının bir düzlemi olduğu aşikardır. Bununla beraber, teğet uzayın elemanları için belirtilmiş matrisleri bulmak için, $Af(1)$'in birim elemanı $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Af(1)$'in yakın noktalarına vektörlere bakarız.

α ve β nın küçük değerleri için ,

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bunlar vektördür. Burada, düzlemde Lie doğrultuları aşağıdaki vektörlerle gerilir;

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu J, K baz vektörlerinin Lie parantezi;

$$[J, K] = JK - KJ$$

$$= K$$

dir, [7].

Teğet uzaydaki genel matris,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kullanılarak yapılacak kolay bir hesaplama ile üstel fonksiyon, teğet uzayı 1-1 ve üzerine olarak $Af(1)'$ e resmeder. Tümevarım yöntemi ile,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \beta\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir, [7].

İspat:

$n = 1$ için;

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\alpha^{1-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doğrudur. $n = k - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} & \beta\alpha^{k-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi de $n = k$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} & \beta\alpha^{k-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k-1} & \beta\alpha^{k-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} \alpha^{k-1}.\alpha + \beta\alpha^{k-2}.0 & \beta\alpha^{k-1} + \beta\alpha^{k-2}.0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yani;

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} \alpha^{k} & \beta\alpha^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Bu eşitliği J ve K cinsinden yazacak olursak,

$$(\alpha J + \beta K)^n = \alpha^n J + \beta\alpha^{n-1} K$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifade de tümevarım methodu ile gösterilebilir. Bu ifadeyi üstel fonksiyonda yerine koyarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha J + \beta K)^n}{n!} = I + \frac{1}{1!}(\alpha J + \beta K) + \frac{1}{2!}(\alpha J + \beta K)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\alpha J + \beta K)^n + \cdots$$

$$= I + \tfrac{1}{1!}(\alpha J + \beta K) + \tfrac{1}{2!}(\alpha^2 J + \beta\alpha K) + \tfrac{1}{3!}(\alpha^3 J + \beta\alpha^2 K) + \cdots + \tfrac{1}{n!}(\alpha^n J + \beta\alpha^{n-1} K) + \cdots$$

$$= I + \alpha J + \beta K + \tfrac{1}{2!}\alpha^2 J + \tfrac{1}{2!}\beta\alpha K + \tfrac{1}{3!}\alpha^3 J + \tfrac{1}{3!}\beta\alpha^2 K + \cdots + \tfrac{1}{n!}\alpha^n J + \tfrac{1}{n!}\beta\alpha^{n-1} K + \ldots$$

$$= I + \left(\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots\right) J + \beta \left(\frac{1}{1!} + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{n!} + \cdots\right) K$$

$$= I + e^{\alpha} J + \frac{\beta}{\alpha} \alpha \left(\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots\right) K$$

$$= I + e^{\alpha} J + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha} K$$

elde edilir. Matris formatında,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $af(1)$ de bir Lie cebiri yapısına sahip olduğu için aşağıdaki özelliklerде sağladığı gösterilebilir, [7].

• $[J, K] = -[K, J] \quad \forall J, K \in af(1)$

•$\big[I, [J, K]\big] + \big[J, [K, I]\big] + \big[K, [I, J]\big] = 0$ (Jacobi Özdeşliği), $\forall I, J, K \in af(1)$

4.3. $''\boldsymbol{ax + b}''$ GRUBU'NUN MERKEZİ

Tanım 4.3.1. G bir grup olsun. G' nin $\forall x \in G$ için $\alpha x = x\alpha$ şartını sağlayan $\alpha \in G$' lerin kümesine G' nin merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre $Af(1)$ grubunun merkezini araştıralım;

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

bu eşitlik ancak

$$\alpha_1 = \alpha_4 \text{ ve } \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

olduğunda gerçekleşir. Dolayısıyla, merkez$\big(Af(1)\big) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha I$ dir ve grubun tanımı gereği $\alpha = 1$ olmalıdır.

Yani, Merkez$\big(Af(1)\big)$ sadece birim elemandan ibarettir. Bunu, abelyen olmayan basit grupların merkezinin sadece birim elemandan oluşmasından dolayı da söyleyebiliriz. Dolayısıyla grubumuza merkezsizdir de diyebiliriz.

- $$exp\left({}^{af(1)}/_{merkez}\right) = exp\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = exp(\alpha I)$$

$$= I + \frac{1}{1!}(\alpha I) + \frac{1}{2!}(\alpha I)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\alpha I)^n$$

$$= I + \frac{1}{1!}\alpha I + \frac{1}{2!}\alpha^2 I + \cdots + \frac{1}{n!}\alpha^n I$$

$$= I + I\left(\frac{1}{1!}\alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\alpha^n\right)$$

$$= I + Ie^{\alpha}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{\alpha} & 0\\ 0 & e^{\alpha}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1+e^{\alpha} & 0\\ 0 & 1+e^{\alpha}\end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ için,

$$= \begin{pmatrix}1+e & 0\\ 0 & 1+e\end{pmatrix}$$

$$= (1+e)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

olur.

4.4. ÇÖZÜLEBİLİR LİE GRUBU

Tanım 4.4.1. Bir L Lie cebrinin ideallerinin serisi (the derived series) ;

$$L^{(0)} = L$$

$$L^{(1)} = [L, L]$$

$$L^{(2)} = \left[L^{(1)}, L^{(1)}\right]$$

.

.

.

$$L^{(i)} = \left[L^{(i-1)}, L^{(i-1)}\right]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bazı n’ ler için $L^{(n)} = 0$ oluyorsa L’ ye çözülebilirdir denir. Grubun değişmeli olması çözülebilir olmasını gerektirir, oysa simple cebirler kesinlikle çözülebilir değidir, [8].

$Af(1)$ grubunun çözülebilirlik durumuna bakacak olursak;

$$[J.K] = K$$

$$\left[[J,K],[J.K]\right] = [K,K] = 0$$

$$\left[\left[[J,K],[J,K]\right],\left[[J,K],[J,K]\right]\right] = \left[[K,K],[K,K]\right] = [0,0] = 0$$

.

.

.

$$\left[[J,K]^{(n)},[J,K]^{(n)}\right] = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, tanım gereği $Af(1)$ grubu çözülebilirdir.

4.5. NİLPOTENT LİE GRUBU

Tanım 4.5.1. Bir L Lie cebrinin ideallerinin serisi

$$L^0 = L$$

$$L^1 = [L,L]$$

$$L^2 = [L,L^1]$$

.

.

.

$$L^i = \left[L,L^{i-1}\right]$$

şeklinde tanımlanır. Eğer bazı n 'ler için $L^n = 0$ oluyorsa L' ye nilpotenttir denir. Örneğin, herhangi değişmeli cebir nilpotenttir. Bütün i ler için $L^{(i)} \subset L^i$ olacağından nilpotent cebirler çözülebilirdir ancak tersi doğru değildir, [8].

$Af(1)$ grubunun nilpotentlik durumuna bakacak olursak;

$$[J.K] = K$$

$$\big[J,[J,K]\big] = [J,K] = K$$

$$\Big[J,\big[J,[J,K]\big]\Big] = \big[J,[J,K]\big] = [J.K] = K$$

.

$$ad^n(J)(K) = K$$

$n = 0,1,2,\ldots$ için hiçbir zaman sıfır olmayacağından dolayı $Af(1)$ grubu nilpotent değildir.

4.6. $''ax + b''$ GRUBUNUN YÖRÜNGELERİ

$Af(1)$, 2x2 lik reel matrislerin bir grubu olarak gözönüne alınır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^4$'de geometrik bir nesnedir. Elemanları bir yarı düzlem oluşturur. O halde *2*-boyutludur. $\mathbb{R}^4$'ün *2*-boyutlu bir alt uzayı $(a, b, 0,0)$ noktalarını içerir. Bu noktaların dördüncü koordinatlarını bir birim öteleyerek elde edilen $(a, b, 0,1)$ noktaların kümesi bir düzlem oluşturur ve bunların ilk koordinatı $a > 0$ ile kısıtlanarak yarı düzlem elde edilir.

$Af(1)$ grubu *2*-boyutlu abelyen olmayan tek bağlantılı bir Lie grubudur. Geometrik bir nesne olarak $Af(1)$, $\mathbb{R}^4$'ün sonsuz alt kümesidir. Ayrıca, $Af(1)$ tıkız olmayan bir Lie grubudur.

$Af(1)$ grubunun aşağıdaki topolojik özelliğini elde ediyoruz.

Teorem 4.6.1. Sistemin durum uzayı $Af(1)$, yerel tıkız bir Hausdorff uzayıdır.

İspat: $Af(1)$ bir Lie grubu olduğundan Haussdorf uzayıdır. Yerel tıkız olduğunu göstermek için , $Af(1)$' in her x noktasının komşuluğu için $\bar{V}$ tıkız ve $\bar{V} \subset U$ olacak şekilde x'in bir V komşuluğu olduğunu [17], göstermeliyiz.

$Af(1)$ yarı-düzlemi üzerindeki topoloji $\mathbb{R}^2$'nin standard topolojisine homeomorfik olarak ortaya çıkar. Dolayısıyla, $\forall x \in Af(1)$ için, $x \in U$ komşuluğu yuvara homeomorfik olup, $\forall U \ni x$ komşuluğu için $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde V komşuluğu vardır. V de yuvara homeomorfik olup $\bar{V}$ kapanışı kapalı yuvardır. $\mathbb{R}^2$'deki kapalı sınırlı yuvarlar tıkız olduğundan homeomorfik görüntüleri de tıkızdır.

Tanım 4.6.2. G, sonlu bir grup , $Aut(G)$ de onun otomorfizm grubu olsun. Bu durumda, G, $Aut(G)$ etkisi altında denklik sınıflarına bölünmüştür. Eğer $\Phi \epsilon Aut(G)$ için $g^{\Phi} = h$ ise g, h'e denktir denir. Bu denklik sınıflarına otomorfizm-yörüngeleri denir. Eğer G, k tane otomorfizm yörüngeye sahip ise G'ye k-yörünge grubu denir. Birim eleman sadece 1-yörünge grubunu meydana getirir. 2-yörünge grup açıkça görülebilir ki asal kuvvetli elemanter abelyen bir gruptur [9].

$Af(1)$ grubunun aşağıdaki yörüngesini elde ediyoruz.

Yardımcı Teorem 4.6.3. $Af(1)$ grubunun yoğun bir $Aut\big(Af(1)\big) -$ yörüngesi vardır.

İspat:

$$Y := exp(af(1) - [af(1), af(1)])$$

$$= Af(1) - [Af(1), Af(1)]$$

kümesi $Af(1)$'in otomorfizm yörüngesidir. Klasik Hadamard Teoremi'ne göre; yüzeyin her noktasında, teğet uzaydan yüzeye olan üstel (exp.) tasvir global bir difeomorfizmadır [10]. Ayrıca, $\overline{g_1 g_2}$ doğru parçası $[Af(1), Af(1)]$'e paralel olacak şekilde $g_1, g_2 \in Y$ gibi iki elemanı gözönüne alınsın.

$$\Phi: Y \to Y$$

$$g_1 \to t_1 g_1 + t_2 = Y \qquad\qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

ile tanımlanan Φ bir otomorfizmadır. Ayrıca, bu doğruları dik doğrularla benzer yolla birbirine bağlamak mümkündür. $Aut\big(Af(1)\big) -$yörüngesi merkez$[Af(1), Af(1)]$ doğru formunda olduğu için açıktır.

Herhangi bir $x \in [Af(1), Af(1)]$ için herbir $B(x, \delta)$ yuvarı $Af(1)$'in x'de farklı bir elemanına sahiptir. Böylece;

$$\overline{Af(1) - [Af(1), Af(1)]} = Af(1)$$

dir.

Aşağıdaki kontrol edilebilirlik karakterizasyonunu elde ediyoruz.

Teorem 4.6.4. $\sum_a$, $Af(1)$ durum uzayı üzerindeki afin sistem olmak üzere, $\sum_a$'nın kontrol edilebilir olması için gerek ve yeter koşul, $\sum_a$'ya ilişik olan $Aut\big(Af(1)\big) -$ yörüngesi üzerindeki bilineer sistemin kontrol edilebilmesidir.

İspat: $\sum_b = \big(Aut\big(Af(1)\big), D_b\big)$ bilineer kontrol sistemin kontrol edilebilir olduğunu kabul edelim.

$$\Psi_\lambda = Id \times \frac{1}{\lambda} Id$$

şeklindeki $\partial g \times g$ 'den $\partial g \times g$'ye , Ψ_λ tasviri cebirler üzerinde bir otomorfizma tanımlar. $\forall D + X \in af\big(Af(1)\big) = \partial g \times g$ için,

$$\Psi_\lambda(D + X) = D + \frac{1}{\lambda} X$$

dir. $\lambda \to \infty$ iken, $\Psi_\lambda(D + X) = D$ olacağından dolayı, $\lambda \to \infty$ iken $\Psi_\lambda(D_a) \to D_b$' dir. Dolayısıyla, $\lambda \to \infty$ iken $\Psi_\lambda(\sum_a) \to \Psi_\lambda(\sum_b)$' dır. $\sum_b$ bilineer sistemi $Aut\big(Af(1)\big)$ otomorfizm yörüngesi üzerinde kontrol edilebilir ve $Aut\big(Af(1)\big) -$yörüngesi de Yardımcı Teorem 4.5.3. e göre $Af(1)$ durum uzayında yoğun olduğundan dolayı, $\sum_b$ bilineer sistemi her yörüngesinde kontrol edilebilirdir. Sussmann'ın Yörünge Teorem'ine [15], göre durum uzayının yörüngeleri diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olduğundan, sistemin tüm bilgileri saklı tutularak sistem yörüngesi üzerinde incelenebilmektedir. $\sum_b$' nin her yörüngesi üzerindeki kontrol edilebilirlik durum uzayına yansır.

1_e merkezli $B(1_e, 1)$ birim yuvarın sınırı olan 1_e merkezli $S(1_e, 1)$ birim küresini göz önüne alalım. Küçük bozulmalarda, tam kontrol edilebilirliğin korunması nedeni ile yeteri kadar büyük λ değeri için, $\Psi_\lambda(\sum_a)$ sistemi,

$$S(1_e, 1) - [Af(1), Af(1)]$$

üzerinde kontrol edilebilirdir, dolayısıyla, $S(1_e, 1)$ üzerinde normal kontrol edilebilir sistemler açık olduğundan dolayı [11], $\Psi_\lambda(\sum_a)$ sistemi,

$$B(1_e, 1) - [Af(1), Af(1)]$$

de kontrol edilebilirdir. O halde, $\sum_a$,

$$B(\Psi_\lambda(1_e), 1) - [Af(1), Af(1)]$$

üzerinde kontrol edilebilirdir. Burada,

$$\Psi_\lambda^{-1}(1_e) = Ide \times \lambda Ide$$

dir. O takdirde $\Psi_\lambda^{-1}(1_e) = Ide \times \lambda Ide$ den geçen afin sistemin pozitif yörüngesi açıktır ve $B\left(\Psi_\lambda^{-1}(1_e), 1\right) - [Af(1), Af(1)]$' i içerdiğinden içi boştan farklıdır. Dolayısıyla, $\sum_a$ sisteminin $\Psi_\lambda^{-1}(1_e)$ ‘den normal ulaşılabilir durum uzayı bağlantılı olduğundan, $\sum_a$ afin sistemi $Af(1)$ üzerinde kontrol edilebilirdir.

Tersine olarak, $\sum_a$ afin sistemin kontrol edilebilir olduğunu kabul edelim. Biz, otomorfizma-yörünge yardımı ile afin sistemimizi bilineer sisteme taşıdık ve bilineer sistemin kontrol edilebilirliğini kabul edip bunu afin sisteme genişlettik. Sürekli tasvir yardımı ile $\sum_a$’ nın kontrol edilebilirliği $\sum_b$ bilineer sisteme kısıtlanabilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kontrol edilebilirlik Kontrol Teorideki en temel klasik problemlerden biridir. Lie grupları üzerindeki çeşitli kontrol sistemleri üzerinde bir çok sonuç mevcuttur. Afin sistemler üzerindeki çalışmalar, 1984' de Jurdjevic ve Sallet' nin yayınladığı çalışmalarında n-boyutlu Öklid uzayı üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilirliğinin karakterizasyonu ile ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada elde edilen $'' ax + b ''$ grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri için kontrol edilebilirlik karakterizasyonu benzer bir teknik kullanılarak elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

Sistemin durum uzayı olarak kullanılan $Af(1)$ grubu, 2-boyutlu, değişmeli ve aynı zamanda tıkız olmayan tek Lie grubudur. Grubumuzun merkezsiz olduğu, çözülebilir ancak nilpotent olmadığı gösterilmiştir. $'' ax + b ''$ grubu üzerindeki afin kontrol sistemleri incelenmiştir. $Af(1)$ grubunun yerel tıkız bir Hausdorff uzayı olduğu ispatlanmıştır. $Af(1)$ grubunun yörüngesi hesaplanarak, $Af(1)$ durum uzayı üzerindeki afin sistemlerin kontrol edilebilmesi için gerek ve yeter koşul ifade ve ispat edilmiştir.

Bundan sonra ise, $'' ax + b ''$ grubunun $n > 2$ gruplarının özellikleri ve afin sistemlerde durum uzayı olarak kontrol edilebilirliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. MATSUSHIMA, Y., 1972, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker Inc., New York, 0-8247-1445-8

2. ARIKAN, E.E.,2009, *Lie Grupları Üzerindeki Afin ve Bilineer Kontrol Sistemlerinin Kontrol Edilebilirlik Bağlantısı,* Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

3. WARNER, F. W., 1971, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Scott, Foresman and Company, 0387908943

4. HACIBEKİROĞLU, A.K., 1996, *Lie Grupları Üzerinde Lineer Kontrol Sistemleri,* Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

5. HACIBEKİROĞLU, A.K., 1994, *A Controllability Theorem For Invariant Systems on Lie Groups*, Dissertation Thesis, 1993-1994 Diploma Courses in Mathematics, International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy

6. JURDJEVIC, V.,1997, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 0-521-49502-4

7. STILWELL, J., 2008, *Naive Lie Theory*, Springer, 978 1-4419-2681-4

8. HUMPHREYS, J. E., 1997, *Introduction To Lie algebras and Representation Theory*, Springer, New York, 0-387-90053-5

9. LAFFEY, T.J.,MacHale,D., 1986, Automorphism Orbits of Finite Groups, *Journal of Austral. Math. Soc. (Series A)* 40 253-260

10. HELGASON, S., 2001, *Differential Geometry , Lie Groups and Symmetric Space,* AMS Edition, 0-8218-2848-7

11. SUSSMANN, H.,1976, Some Properties of Vector Field Systems That are not Altered by Small Perturbations, *Journal of Differential Equations* 20, 292-315

12. JURDJEVIC, V., and SALLET, G., 1984, Controllability Properties of Affine Systems, *SIAM j. Control and Optimization*, 22:501-508

13. KARA, A., and SAN MARTIN, L.,A.,B.,2006, Controllability of Affine Control System for the Generalized Heisenberg Lie Groups, *Internatinal Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29(1), 1-6

14. KARA, A., and KULE, M., 2010, Controllability of Affine Control Systems on Carnot Groups, *Int. Contemp. Math. Sci*., 5(44), 2167-2172

15. SUSSMANN, H., 1973, Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, *Trans. American Math. Soc*., 180, 171-188

16. VARADARAJAN, V., 1974, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations,* Prentice-Hall Inc., 978-0387909691

17. MUNKRES, J.,R., 1975, *TOPOLOGY A First Course,* Prentice-Hall Inc., 0-13-925495-1

18. BROCKETT, R.,W., 1972, System Theory on Group Manifolds and Coset Space, *SIAM J. Control and Optimization,* 10(2), 265-284

19. MOHLER, R., R., 1973, *Bilineer Control Processes,* Academic Press Inc., New York, 0-12-504140-3

ÖZGEÇMİŞ

07.12.1967 tarihinde İstanbul'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi, sırasıyla, İlhami Ahmet Örnekal İlköğretim Okulu ve Erenköy Kız Lisesi'nde tamamladım. 1984 yılında öğrenime başladığım İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nden 1989 yılında mezun oldum Aynı yıl , aynı bölüme asistan olarak atandım. 1992-1996 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans eğitimimi yaparken 1994 Eylül-1995 Eylül tarihleri arasında İtalya'nın Trieste şehrindeki International Center For Theoritical Physics merkezinde Diplama Programı'na katıldım. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi'ndeki görevimden ayrıldım. Hemen ardından İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü'ne asistan olarak atandım. 2000 yılından beri ise aynı bölümde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evli ve bir çocuk annesiyim.