



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**D-BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN
SKALAR CASİMİR ETKİ**

Hatice ÖZER

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

I. Danışman

Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ

II. Danışman

Doç.Dr. Mustafa ÖZCAN

Aralık, 2011

İSTANBUL

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Bu çalışma 27/12/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



Jüri üyesi(Danışman)
Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ



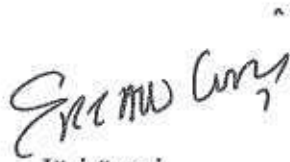
Jüri üyesi
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ



Jüri üyesi
Prof.Dr. Sehban KARTAL



Jüri üyesi
Prof.Dr. Hasan TATLIPINAR



Jüri üyesi
Yard.Doç.Dr. Ertan GÜDEKLİ

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı tez danışmanım, çok değerli hocam Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ'e, tez çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; çalışmalarımın yönlendirilmesi ve sonuçlandırılmasında büyük emeği geçen tez danışmanım, çok değerli hocam Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN'a ve çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Yurt içi Yüksek Lisans Burs programı'na çok teşekkür ederim.

Kasım, 2011

Hatice ÖZER

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	3
3. MALZEME VE YÖNTEM	7
3.1. D BOYUTLU KÜRESEL GEOMETRİDE DALGA FONKSİYONU.....	7
3.2. DIRICHLET SINIR KOŞULUNDA SKALAR CASİMİR ETKİ.....	19
3.3. NEUMANN SINIR KOŞULUNDA SKALAR CASİMİR ETKİ.....	28
4. BULGULAR	35
4.1. 4 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİ.....	35
4.1.1. Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	36
4.1.2. Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	39
4.2. 6 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİ.....	41
4.2.1. Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	41
4.2.2. Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	43
4.3. 8 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİ.....	44
4.3.1. Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	44
4.3.2. Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	46
4.4. 10 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİ.....	48

4.4.1. Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	48
4.4.2. Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etki.....	51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
KAYNAKLAR	55
EKLER	57
ÖZGEÇMİŞ	65

SEMBOL LİSTESİ

ω_s	: Elektromanyetik alanın klasik öz frekansı
$\bar{\omega}_s$: Geri planda seçilen referans boşluğun öz frekansı
j_ℓ	: Birinci tür Küresel Bessel fonksiyonu
h_ℓ	: Küresel Hankel fonksiyonu
r	: Küresel kabuğun yarıçapı
n	: Baş kuantum sayısı
ℓ	: Yörüngesel açısal momentum kuantum sayısı
m	: Magnetik moment kuantum sayısı
$J_\nu(y)$: Birinci tür Bessel fonksiyonu
$Y_n(x)$: İkinci tür Bessel fonksiyonu
$H_\nu^{(1)}(y)$: Hankel fonksiyonu veya Üçüncü tür Bessel fonksiyonu
$I_\nu(y)$: Birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu
$K_\nu(y)$: İkinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu
$\zeta(z, q)$: Hurwitz zeta fonksiyonu
$\zeta(z)$: Riemann zeta fonksiyonu
$B_n(x)$: Bernoulli polinomu
$C_n^\lambda(x)$: Gegenbauer polinomu
$P_\ell^m(x)$: Associated Legendre polinomu

ÖZET

D-BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİ

Bu tezde küresel kabuk geometride skalar Casimir etkisi çalışılmıştır. İlk olarak üç boyutlu küresel kabukta Dirichlet ve Neumann sınır koşulu altındaki kütleli skalar alanın Casimir enerjisi, öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrali ile modların doğrudan toplamı yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Daha sonra D boyutlu küresel geometri için dalga fonksiyonu ve kuantum sayıları incelenmiştir. Son olarak skalar alanın çift boyutlu küresel kabuktaki kuantum boşluk enerjisi, modların toplamı yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Çift boyutlu küresel kabuklardaki kuantum boşluk enerjisi, tekillikler içermektedir. Bu tekillikleri kaldırmak için Zeta fonksiyon regülarizasyon tekniği kullanılmış ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

SUMMARY

SCALAR CASIMIR EFFECT FOR D-DIMENSIONAL SPHERICAL SHELL

In this thesis the scalar Casimir effect for a spherical shell geometry was studied. First the Casimir energy of a massless scalar field satisfying Dirichlet and Neumann boundary conditions on the shell calculated by using a direct mode summation with counter integration in the complex plane of eigenfrequencies. Then the wave equation and quantum numbers were studied for D dimensional spherical shell. Finally the vacuum energy of scalar field for even dimensional spherical shell was calculated by using the direct mode summation. The vacuum energy for even dimensional spherical shell geometry have singularities. In order to overcome these singularities, Zeta function regularization technique was used and obtained results were discussed.

1. GİRİŞ

Klasik mekaniğin ilk zamanlarında vakum düşüncesi oldukça basitti. Klasik fiziğe göre uzayı mutlak sıfır sıcaklık sınırına kadar soğutarak, tüm ısı ışınımı yok edebilir ve mutlak boşluğa ulaşabiliriz. Bununla beraber kuantum kuramının gelişmesiyle vakum anlayışı tamamiyle değişti. Bu kurama göre, boş uzayın her santimetre küpü büyük miktarda enerji içerir [Bordag, 2001]. En boş sanılan uzay bile tam olarak boş değildir, etkileşimler bölgesidir ve alanlar vardır. Bu alanların dalgalanması sonucu boşluktan sanal parçacık çiftleri üretilir. Bu parçacıklar pozitif enerji ile ortaya çıkıp, negatif enerji ile kaybolurlar yani boşluktan ödünç enerji alırlar. Bu parçacıkların yaratılışlarından yok oluşlarına dek gittikleri uzaklık ve momentumları, enerji korunumu ilkesini bozar. Kuantum kuramına göre, böyle bir bozulma olağandır; çünkü bunların son derece kısa olan yaşamları gözlemlenilmelerine izin vermez. Boşluktan doğan bir sanal parçacık çiftinin kendisi gözlemlenemez; ancak bu çiftler etkileşirse gözlemlenebilir. Vakum dalgalanmalarının makroskobik sonuçlarından biri bu sanal parçacıkların yaratılış ve yok oluşlarıdır; bir diğeri ise Casimir etkisidir.

1948 yılında ilk defa Hollandalı fizikçi H.G.B. Casimir yüksüz ideal iletken iki paralel levhanın birbirini çekeceğini ve bu çekici kuvvetin elektromanyetik alanın sıfır nokta enerjisindeki değişimden kaynaklandığını göstermiştir [Casimir, 1948]. Casimir etkisini gösteren düzenek şöyledir; içi boş bir kapalı kaba iki paralel levha yerleştirilir ve sistem soğutulur. Sıfır nokta enerjisine ulaşmadan önce ısı ışınımına iki levhayı birbirine yaklaştırmaya çalışır. Sıfır nokta değerinde ise elektromanyetik ışınım kuvveti levhaları birbirine doğru çeker. Bu olay bize boşluğun boş olmadığını söyler. Geri zeminde elektromanyetik alan vardır ve bu alanın enerjisi sonsuzdur. Casimir'in yaptığı gibi boşluğa iki paralel düzlem yerleştirdiğimizde, geri zeminde yer alan elektromanyetik alanın modlarının dağılımı paralel levhalar aracılığı ile yeniden şekillenir. Kimi modlar düzlemler arasında kalır; diğerleri ise düzlemleri delerek

salınımlarına devam eder. Düzlemlerin arasında yer alan elektromanyetik alanın sıfır noktasındaki ışınım basıncı Casimir kuvvetin kaynağını teşkil eder [D.Ölmez, 2010].

Bu çalışmada ilk olarak Küresel kabuğun Casimir enerjisi, öz frekansların kompleks düzlemdeki kontür integrali ile doğrudan mod toplama yöntemi kullanılarak çözülecek. Casimir enerjisi hesabında ortaya çıkan sonsuz ifadeler Riemann Zeta fonksiyonu regularizasyon tekniği kullanılarak sonlu ifadelerden ayrıştırılıp, dışarı atılacak. Daha sonra Dirichlet ve Neumann sınır şartlarına uyan kütesiz skalar alanın 3 boyutlu küresel kabukta sahip olduğu modlar hesaplanacak ve bu modların dağılımından kuantum sıfır nokta enerjisi bulunacak. Bu zamana kadar Kuantum Alan Teori çalışmalarında dörtten büyük uzay zaman boyutu pertürbasyon parametresi olarak kullanılmamıştır. Fakat son gelişmelerden de anlaşıldığı gibi uzay zamanın boyutunun bilinenden farklı olabileceği yani dörtten büyük boyutlar olabileceği öngörüsü ortaya çıkmıştır. Kuantum alan teorisinin ölçülebilir bir sonucu olarak güncelliğini koruyan Casimir etki, boyuta bağlı sonuçlar üretmektedir. Yüksek boyutlu elektromanyetik alanda çalışmak matematiksel olarak oldukça zordur. Skalar alan elektromanyetik alan için basit bir model oluşturmaktadır. Bu yüzden boyutla yaptığımız hesaplamaları skalar alanda inceleyeceğiz. 3'ten büyük boyutlarda Klein Gordon denkleminin çözümlerini, Ultra Küresel Harmonikler yani Gegenbauer polinomu ve Bessel fonksiyonlarıyla tanımlayacağız. D boyut için Klein Gordon denklemini ayrıntılı olarak çözüp, modların dağılımını veren sayıların boyutla olan ilişkisini irdeleyeceğiz. Ayrıca D boyutlu Klein Gordon denkleminin çözümleri, çift boyutlu küresel kabuktaki skalar alanın çözümlerini incelememize olanak sağlayacak. Bu çözümlerden hareketle kütesiz skalar alanın modlarının dağılımı ve kuantum sıfır nokta enerjisi elde edilecek.

2. GENEL KISIMLAR

Casimir boşlukta iki paralel plaka arasındaki çekici kuvvetin,

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} S$$

olduğunu buldu. Burada c ışık hızı, a levhalar arasındaki uzaklık, \hbar Planck sabiti ve S 'de yüzey alanıdır. Bu çekici kuvvet elektrik yükü gibi değerlerden bağımsızdır. M.J.Sparnaay [Sparnaay, 1958] ve D. Tabor [Tabor ve Winterton, 1969] bu kuvveti deneysel olarak 1958'de gözlemlediler. Deneyci fizikçiler mikro-makinelerin çalışmalarını etkileyen Casimir kuvvetini çok duyarlı ölçüm aletleri geliştirerek gözlemlemeye devam ettiler. Bu çekici kuvvet, 1997 yılında S.K. Lamoreaux tarafından %5 deneysel hatayla ölçüldü. Yapılan deneylerden görüldüğü üzere bu kuvvetin büyüklüğü 1cm^2 alan başına, $1\ \mu\text{m}$ uzaklıkta 1.3×10^{-7} N'dur. Kabaca bir su damlasının ağırlığı kadardır. Aradaki mesafe tipik bir atomun 100 katı olan $1\ \text{nm}$ 'ye indirilirse, bu etki 1 atm basıncına çıkar. Casimir'in orijinal teorisi sadece ideal metallere ve dielektrik malzemelere uygulanmasına rağmen, 1950 ve 1960'lı yıllarda Rus fizikçi Lifshitz Casimir teorisini gerçek metalleri içerecek şekilde genişletti.

Casimir'in elde ettiği sonuçlardan sonra küresel kabukla sınırlandırılmış elektromanyetik alanın sıfır nokta enerjisi, T.H.Boyer [Boyer, 1970] tarafından pozitif değerli ve küresel kabuğun yarıçapına bağlı olarak elde edilmiştir. Bu da Casimir'in elektron modeli kurma ümidini yok etmiştir. Bu pozitif enerjinin anlamı küresel kabuğun üzerinde itici bir kuvvet ürettiğidir. Boyer'in hesaplamaları eksponansiyel kesici fonksiyonların seçimine bağlıdır ve kullandığı yöntem oldukça karışık bir yöntemdir. Daha sonra 1972 yılında küresel kabuk için Casimir enerjisi, B.Davies tarafından Boyer'in çalışmasındaki enerjinin işareti ile aynı olarak bulunmuştur. 1978 yılında da J.Schwinger ile K.A.Milton ve L.L. DeRaad yüksüz ideal iletken küresel kabuğun Casimir enerjisini Green Fonksiyon Formalizmi ile yine pozitif ve

$$E=0.09235 \frac{\hbar c}{2a}$$

olarak bulmuşlardır. 1998-99 yılları arasında Nesterenko ve Hagen [Nesterenko ve Pirozhenko, 1998] [Bowers ve Hagen, 1999] çalışmalarından görüleceği üzere elektromanyetik alanın küresel kabuk için kuantum boşluk enerjisi, modların toplama metodu ile bulunmuş ve aynı sonuç elde edilmiştir. Küre için yapılan teorik çalışmaları doğrulayan deneysel çalışmalar da çok geçmeden yapılmıştır. Fakat deneysel olarak küre ile çalışmak zor olduğundan bu çalışmalar küresel kabukla değil, küre ve levha ile yapılmıştır.

Yapılan çalışmalardan da görüldüğü gibi Casimir enerji hesaplarında yegane bir yöntemle sahip değiliz. Bu hesaplamalarda farklı farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar; Green Fonksiyonu Formalizmi, Stress Tensör Metodu, Heat Kernel Serileri, Zeta Fonksiyonu Regularizasyon Tekniği ve Kontür İntegrasyonu ile Mod Toplama yöntemidir.

Yapılan teorik ve deneysel çalışmaların sonucu olarak paralel düzlemler ve küresel kabuğun Casimir enerjisi birbirinden farklı olarak bulunmuştur. Casimir kuvveti paralel düzlemlerde çekici iken, küresel kabukta iticidir. Bu işaret farkının kaynağı henüz bilinmemektedir. Silindir kabuk için yapılan hesaplamaların sonucunda da Casimir enerjinin işareti paralel düzlemdeki gibi negatif olarak bulunmuştur. Casimir enerjisinin değeri geometriden geometriye, topolojiden topolojiye ve boyuttan boyuta değişmektedir [M.Özcan, 2006].

Şimdi Casimir enerji hesabının çıkış noktası olan skalar alanın sıfır nokta enerjisini inceleyelim. Sınır koşullarının olmadığı bir durumda boşluk enerjisi, boş uzayın öz frekanslarının toplamı olarak ifade edilir ve bu enerjiye sıfır nokta enerjisi denir. Skalar alanın dalga fonksiyonu $\varphi(t, x)$, $0 < x < a$ aralığında ve

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, a) = 0 \quad (2.1)$$

sınır şartı altında tanımlanır. Skalar alan denklemini genel olarak,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi(t, x) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem Klein-Gordon denklemi olarak bilinir. Burada m alanın kütesidir. (2.1) ve (2.2) denklemleri ile ilişkili sonsuz skalar çarpım ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$(f, g) = i \int_0^a dx (f^* \partial_{x_0} g - \partial_{x_0} f^* g) \quad (2.3)$$

burada f ve g (2) denkleminin iki çözümüdür, $x_0 \equiv ct$ dir. (2.2) denkleminin (2.1) sınır koşulu altında pozitif ve negatif frekans çözümleri,

$$\varphi_n^{(\pm)}(t, x) = \left(\frac{c}{aw_n} \right)^{1/2} e^{\pm iw_n t} \sin k_n x \quad (2.4)$$

şeklinindedir. Daha sonra dalga fonksiyonumuzun zamana ve konuma bağlı ikinci derece türevlerini hesaplayıp (2.2) denkleminde yerine yazarsak

$$-\frac{w^2}{c^2} \varphi_n(t, x) + k^2 \varphi_n(t, x) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi_n(t, x) = 0 \quad (2.5)$$

ifadesine ulaşırız ve (5) denkleminde de görüldüğü üzere,

$$w_n = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right)^{1/2}, \quad k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n=1,2,\dots \quad (2.6)$$

ile verilir.. Skalar alanın standart kuantizasyonu ise aşağıdaki ifadeyle sağlanır.

$$\varphi(t, x) = \sum_n \left[\varphi_n^{(-)}(t, x) a_n + \varphi_n^{(+)}(t, x) a_n^+ \right] \quad (2.7)$$

Burada a_n , a_n^+ nicelikleri yokediciler ve yaratıcı operatörlerdir. Aralarındaki komütasyon ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$[a_n, a_{n'}^+] = \delta_{n,n'}, \quad [a_n, a_{n'}] = [a_n^+, a_{n'}^+] = 0 \quad (2.8)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Kuantize edilmiş alan boşluğu

$$a_n |0\rangle = 0 \quad (2.9)$$

olarak tanımlıdır. İki boyutlu uzay zamanda skalar alanın enerji yoğunluğu ifadesi

$$T_{00}(x) = \frac{\hbar c}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} [\partial_t \varphi(x)]^2 + [\partial_x \varphi(x)]^2 \right\} \quad (2.10)$$

ile verilir.

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{-i\omega_n t} \sin k_n(x) a_n + \left(\frac{c}{a\omega_n} \right)^{1/2} e^{i\omega_n t} \sin k_n(x) a_n^+ \right]$$

Bu ifadenin zamana ve x bileşenine göre türevlerini alıp (2.9) denkleminde yerine koyalım. Yaratıcı ve yokediciler operatörlerin özellikleri olan (2.7) denkleminin de yardımıyla,

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \frac{\hbar}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2 c^4}{2a\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k_n(x)}{\omega_n} \quad (2.11)$$

elde ederiz. (0,a) aralığındaki toplam enerjiyi aşağıdaki şekilde ifade ederiz.

$$E_0(a) = \int_0^a \langle 0|T_{00}|0\rangle dx = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \quad (2.12)$$

buluruz. Görüldüğü gibi $E_0(a)$ sonsuza giden bir ifadedir.

Casimir enerji hesaplarının doğası gereği ürettiği sonlu ifadeleri, matematiksel olarak sonsuz ifadelerin içinden elde ederiz. Sonsuzlukları belirlemeye regülarizasyon, sonsuzlukları dışarı çıkarmaya da renormalizasyon denir [Selçuk Bayın,2004]. Kuantum sıfır nokta enerjisi hesaplarında değişik regülarizasyon ve renormalizasyon yöntemleri kullanılır. Farklı yöntemlerin kullanılması sonucu olarak Casimir enerji hesaplarında şüpheli noktalar ortaya çıkmıştır. Bazı problemlerde, farklı matematiksel metotlar kullanıldığında farklı sonuçlar üretilmiştir. Bu nedenle matematiksel olarak daha basitleştirilmiş yeni avantajlar üreten metodları göz önüne alarak sonuçların tutarlılığı elde edilmelidir.

Bu çalışmada Malzeme ve Yöntem bölümünde, kütleli skalar alanda bulunan D boyutlu küresel kabuğun dalga fonksiyonu hesabı yapılacak. Ardından Dirichlet ve Neumann sınır koşulu altındaki 3 boyutlu küresel kabuk geometride, skalar Casimir etkisi yeniden incelenecek [Nesterenko ve Pirozhenko, 1997]. Bulgular bölümünde ise, Malzeme ve Yöntem bölümünde elde edilen tecrübelerle çift boyutlu küresel kabuklardaki kuantum boşluk enerjisi, kontur integrali ile modların toplama yöntemi kullanılarak elde edilecek. Tartışma ve sonuç bölümünde de elde ettiğimiz bulguların literatürdeki diğer çalışmalarla uyumlu olup olmadığına bakılacak.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 D BOYUTLU KÜRESEL GEOMETRİDE DALGA FONKSİYONU

D boyutlu küresel geometride Klein-Gordon denklemini kullanarak dalga fonksiyonumuzu ve kuantum sayılarımızı inceleyeceğiz. Küresel kordinatlarda metrik tensörü $g_{\mu\nu}$ ve sonsuz yakın iki nokta arasındaki mesafe elemanını,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta_1^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2 + \dots + r^2 \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{D-2} d\theta_{D-1}^2)$$

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 \sum_{i=1}^{D-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2 \theta_j \right) d\theta_i^2 \quad \begin{array}{l} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta_i \leq \pi \\ 0 \leq \phi = \theta_{D-1} \leq 2\pi \end{array} \quad 1 \leq i \leq D-2 \quad (3.1.1)$$

olarak yazarız. Burada r kürenin yarıçapını; $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-2}, \phi$ ise açısal kordinatları göstermektedir. Kütesiz skalar alanın dalga denklemi

$$\square \Psi = \bar{\nabla}^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (3.1.2)$$

ile verilir. Burada dalga operatörü \square ,

$$\square = \bar{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.1.3)$$

olarak tanımlanmıştır. D boyutlu skalar alanda bulunan küre için dalga fonksiyonumuz,

$$\psi = \psi(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-3}, \theta_{D-2}, \phi, t) \quad (3.1.4)$$

şeklinde değişkenlere bağlıdır. D boyut için $\bar{\nabla}^2$ ifadesini,

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^{D-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^{D-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^{D-3} \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin^{D-3} \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \dots + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^{D-4} \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \sin^{D-5} \theta_4} \frac{\partial}{\partial \theta_4} \left(\sin^{D-5} \theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_4} \right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^2 \theta_{D-3} \sin \theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} \left(\sin \theta_{D-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^2 \theta_{D-2}} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.1.5)$$

şeklinde buluruz. (3.1.2) denkleminde

$$\psi = \psi(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-3}, \theta_{D-2}, \phi, t) = R(r) \Theta_1(\theta_1) \Theta_2(\theta_2) \dots \Theta_{D-3}(\theta_{D-3}) \Theta_{D-2}(\theta_{D-2}) \Phi(\phi) T(t) \quad (3.1.6)$$

şeklinde ayrılabilir bir çözümü denersek,

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{D-3} \Theta_{D-2} \Phi T}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{D-1} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R \Theta_2 \Theta_3 \dots \Theta_{D-3} \Theta_{D-2} \Phi T}{r^2 \sin^{D-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^{D-2} \theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta_1} \right) + \frac{R \Theta_1 \Theta_3 \dots \Theta_{D-3} \Theta_{D-2} \Phi T}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^{D-3} \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin^{D-3} \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) \\ & + \dots + \frac{R \Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{D-2} \Phi T}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-3}} \left(\sin^2 \theta_{D-3} \frac{\partial \Theta_{D-3}}{\partial \theta_{D-3}} \right) + \frac{R \Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{D-3} \Phi T}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3} \sin \theta_{D-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-2}} \left(\sin \theta_{D-2} \frac{\partial \Theta_{D-2}}{\partial \theta_{D-2}} \right) \\ & + \frac{R \Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{D-3} \Theta_{D-2} T}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} - \frac{R \Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_{D-3} \Theta_{D-2} \Phi}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemden T ve Φ için çözülmesi gereken denklemlere bakalım,

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad T(t) = e^{-i\omega t} \quad (3.1.8)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.9)$$

Bulduğumuz bu denklemleri (3.1.7) denkleminde koyup denklemi yeniden düzenleriz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R r^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta_1 r^2 \sin^{D-2} \theta_1} \frac{d}{d\theta_1} \left(\sin^{D-2} \theta_1 \frac{d\Theta_1}{d\theta_1} \right) + \frac{1}{\Theta_2 r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^{D-3} \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin^{D-3} \theta_2 \frac{d\Theta_2}{d\theta_2} \right) + \dots + \\ & \frac{1}{\Theta_{D-3} r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3}} \frac{d}{d\theta_{D-3}} \left(\sin^2 \theta_{D-3} \frac{d\Theta_{D-3}}{d\theta_{D-3}} \right) + \frac{1}{\Theta_{D-2} r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3} \sin \theta_{D-2}} \frac{d}{d\theta_{D-2}} \left(\sin \theta_{D-2} \frac{d\Theta_{D-2}}{d\theta_{D-2}} \right) \\ & \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-2}} = -\omega^2 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Bu denklemi daha genel halde aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$\frac{1}{Rr^{D-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{D-1} \frac{dR}{dr} \right) + \sum_{j=1}^{D-2} \left[\frac{1}{\Theta_{D-j-1} r^2 \sin^j \theta_{D-j-1} \prod_{i=1}^{D-j-2} \sin^2 \theta_i} \frac{d}{d\theta_{D-j-1}} \left(\sin^j \theta_{D-j-1} \frac{d\Theta_{D-j-1}}{d\theta_{D-j-1}} \right) \right] - \frac{m^2}{r^2 \prod_{i=1}^{D-2} \sin^2 \theta_i} = -\omega^2 \quad (3.1.11)$$

Açısal kısmın çözümü için (3.1.10) denkleminde iterasyon yöntemi uygulayalım.

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3}} \left[\frac{1}{\Theta_{D-2} \sin \theta_{D-2}} \frac{d}{d\theta_{D-2}} \left(\sin \theta_{D-2} \frac{d\Theta_{D-2}}{d\theta_{D-2}} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_{D-2}} \right] = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-3}} \quad (3.1.12)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-4}} \left[\frac{1}{\Theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-3}} \frac{d}{d\theta_{D-3}} \left(\sin^2 \theta_{D-3} \frac{d\Theta_{D-3}}{d\theta_{D-3}} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \theta_{D-3}} \right] = -\frac{N_2(N_2+2)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{D-4}} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3} \left[\frac{1}{\Theta_4 \sin^{D-5} \theta_4} \frac{d}{d\theta_4} \left(\sin^{D-5} \theta_4 \frac{d\Theta_4}{d\theta_4} \right) - \frac{N_{D-6}(N_{D-6}+D-6)}{\sin^2 \theta_4} \right] = -\frac{N_{D-5}(N_{D-5}+D-5)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3} \quad (3.1.14)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2} \left[\frac{1}{\Theta_3 \sin^{D-4} \theta_3} \frac{d}{d\theta_3} \left(\sin^{D-4} \theta_3 \frac{d\Theta_3}{d\theta_3} \right) - \frac{N_{D-5}(N_{D-5}+D-5)}{\sin^2 \theta_3} \right] = -\frac{N_{D-4}(N_{D-4}+D-4)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2} \quad (3.1.15)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \left[\frac{1}{\Theta_2 \sin^{D-3} \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} \left(\sin^{D-3} \theta_2 \frac{d\Theta_2}{d\theta_2} \right) - \frac{N_{D-4}(N_{D-4}+D-4)}{\sin^2 \theta_2} \right] = -\frac{N_{D-3}(N_{D-3}+D-3)}{r^2 \sin^2 \theta_1} \quad (3.1.16)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\Theta_1 \sin^{D-2} \theta_1} \frac{d}{d\theta_1} \left(\sin^{D-2} \theta_1 \frac{d\Theta_1}{d\theta_1} \right) - \frac{N_{D-3}(N_{D-3}+D-3)}{\sin^2 \theta_1} \right] = -\frac{N_{D-2}(N_{D-2}+D-2)}{r^2} \quad (3.1.17)$$

$$\sum_{j=1}^{D-2} \frac{1}{\sin^j \theta_{D-j-1}} \frac{d}{d\theta_{D-j-1}} \left(\sin^j \theta_{D-j-1} \frac{d\Theta_{D-j-1}}{d\theta_{D-j-1}} \right) - \frac{N_{j-1}(N_{j-1}+j-1)\Theta_{D-j-1}}{\sin^2 \theta_{D-j-1}} = -N_j(N_j+j)\Theta_{D-j-1} \quad (3.1.18)$$

(3.1.12)-(3.1.17) arası açısız kısmın çözümlerini, (3.1.18) denklemi şeklinde genelleştirebiliriz. Açısız kısmın çözümlerinden birini içeren (3.1.17) denklemini (3.1.10) denklemde yerine koyduğumuzda radyal kısım için

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + (D-1)r \frac{dR}{dr} + \left[\omega^2 r^2 - N_{D-2}(N_{D-2} + D - 2) \right] R(r) = 0 \quad (3.1.19)$$

buluruz. Bu Bessel denklemini, EK-B denklem (7)'ye benzeterek çözdüğümüzde,

$$R(r) = Ar^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)} J_{N_{D-2+\left(\frac{D-2}{2}\right)}}(\omega r) + Br^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)} Y_{N_{D-2+\left(\frac{D-2}{2}\right)}}(\omega r) \quad (3.1.20)$$

elde ederiz. D boyutlu Küresel koordinatlarda dalga fonksiyonumuzun radyal kısmı (3.1.20) denkleminden görüldüğü üzere Bessel fonksiyonlarıyla tanımlanır. (3.1.20) denklemi kullanılarak istenilen boyut için radyal kısım rahatça yazılabilir. (3.1.17) açısız kısmın çözümüne bakalım. $x = \cos \theta_1$ değişken dönüşümü yardımıyla,

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta_1}{dx^2} - (D-1)x \frac{d\Theta_1}{dx} + \left[N_{D-2}(N_{D-2} + D - 2) - \frac{N_{D-3}(N_{D-3} + D - 3)}{(1-x^2)} \right] \Theta_1 = 0 \quad (3.1.21)$$

buluruz. Bu denklem Gegenbauer diferansiyel denklemidir ve çözümü de Gegenbauer polinomudur. D boyutlu küresel simetrik problemlerde veya D boyutta bir hiper-kürenin yüzey salınımlarında küresel harmoniklerin doğal uzantısı olan Gegenbauer polinomları kullanılır. (3.1.21) denklemde 2 terimli tekrarlama bağıntısı elde etmek için denklemin tanım aralığının uç noktalarındaki davranışına bakalım. $x = \pm 1$ noktasının yakını için $y=(1-x)$ ve $y=(1+x)$ şeklinde iki değişken tanımlayalım. $y=(1-x)$ 'i (3.1.21) numaralı denklemde yerine koyup, $y \rightarrow 0$ limitinde denkleme bakalım.

$$2y \frac{d^2 C(y)}{dy^2} + (D-1) \frac{dC(y)}{dy} - \frac{N_{D-3}(N_{D-3} + D - 3)}{2y} C(y) = 0 \quad (3.1.22)$$

Yukarıdaki denkleme $\rho = \ln y$ dönüşümünü uygularsak $K = \frac{d}{d\rho}$ olmak üzere,

$$\left[K^2 + \frac{(D-3)}{2} K - \frac{N_{D-3}(N_{D-3} + D - 3)}{4} \right] C(y \rightarrow 0) = 0$$

(3.1.23) diferansiyel denklemini buluruz. Bu denklemin çözülmesiyle $y \rightarrow 0$ için sonlu çözümü $y^{N_{(D-3)/2}}$ yani $(1-x)^{N_{(D-3)/2}}$ olarak buluruz. $y=(1+x)$ değişkeni için de aynı

hesapları yaptığımızda sonlu çözüm $(1+x)^{N_{(D-3)/2}}$ olur. Bu bulduğumuz sonuçları kullanarak,

$$\Theta_1 = (1+x)^{N_{(D-3)/2}} (1-x)^{N_{(D-3)/2}} = (1-x^2)^{N_{(D-3)/2}} C(\cos \theta_1) \quad (3.1.24)$$

şeklinde bir çözüm deneyelim. (3.1.24) çözümünü (3.1.21) denkleminde yazarsak,

$$(1-x^2) \frac{d^2 C(x)}{dx^2} - (2N_{D-3} + (D-1))x \frac{dC(x)}{dx} + [N_{D-2}(N_{D-2} + D-2) - N_{D-3}(N_{D-3} + D-2)] C(x) = 0 \quad (3.1.25)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin $x = \pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil noktası vardır. $[-1, 1]$ aralığında ve sıfır noktası etrafında $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$ gibi seri çözümü

Gegenbauer denkleminde yerine koyarsak,

$$K = N_{D-2}(N_{D-2} + D-2) - N_{D-3}(N_{D-3} + D-2) \quad \text{olmak üzere ,}$$

$$a_0 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1 \alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+2}(n+\alpha+2)(n+\alpha+1) + [-(n+\alpha)(n+\alpha-1) - (2N_{D-3} + D-1)(n+\alpha) + K] a_n \right\} x^{n+\alpha} = 0 \quad (3.1.26)$$

özdeşliğini buluruz. (3.1.26) denkleminde x 'in en küçük kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek indis denklemini buluruz. Yani,

$$a_0 \alpha(\alpha-1) = 0 \quad (3.1.27)$$

$$a_1 \alpha(\alpha+1) = 0$$

$\alpha = 0$ kökü için $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ 'dır. Ayrıca $\alpha = 0$ kökü, indis denkleminin ikinci kökünün de çözümünü içermektedir. Buna göre tekrarlılama bağıntısı,

$$a_{n+2} = a_n \frac{(n)(n-1) + (2N_{D-3} + D-1)(n) - K}{(n+2)(n+1)} \quad n=0,1,2,3,\dots \quad (3.1.28)$$

ile gösterilir. Genel çözümü de,

$$C(x) = a_0 \left[1 - \frac{K}{2} x^2 - \left(\frac{2+2(2N_{D-3} + D-1) - K}{3.4} \right) \left(\frac{K}{2} \right) x^4 + \dots \right] + a_1 \left[x + \frac{(2N_{D-3} + D-1) - K}{2.3} x^3 + \dots \right] \quad (3.1.29)$$

olarak buluruz. Elde ettiğimiz bu serilerin yakınsak olup olmadığını araştıralım. $x \neq \pm 1$ olduğunda, oran testi ile genel terimi $u_k = a_{2k} x^{2k}$ olan serinin yakınsaklık testi aşağıdaki gibi bulunur [Arfken, 1970].

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{a_{2k+2} x^{2k+2}}{a_{2k} x^{2k}} \right| = \left| \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \right|$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \right| = 1$$

Görüldüğü üzere oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığında serimiz yakınsaktır. $x = \pm 1$ durumu için oran testi sonuç vermez. Bu noktaların yakınsak olup olmadığını bulmak için Raabe testini kullanalım. Raabe testini uygulamak için,

$$u_n = a_n x^n \quad u_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] = P \quad (3.1.30)$$

limitini hesaplamamız gerekir. $P > 1$ için bu seri yakınsak; $P < 1$ için iraksaktır. $P=1$ için Raabe testi sonuç vermez. Şimdi D boyut için bulduğumuz tekrarlılama bağıntısına bu testi uygulayalım.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(10-2D)n - 2N_{D-3}(2n) + N_{D-2}(N_{D-2} + D - 2) - N_{D-3}(N_{D-3} + D - 2)}{4n^2 - 2n + 4N_{D-3}n + (D-1)2n - N_{D-2}(N_{D-2} + D - 2) + N_{D-3}(N_{D-3} + D - 2)} \right]$$

$$\frac{(10-2D)n - 4nN_{D-3}}{4n} = \frac{(10-2D)}{4} - N_{D-3} < 1$$

Raabe testi, serinin iraksak olduğunu gösterir. Iraksaklık bizim aradığımız çözüm değildir. Sonlu bir çözüm elde etmek için seriyi bir yerde kesmeliyiz. Kesme işlemini $a_{n+2} = 0$ ve $a_n \neq 0$ olacak şekilde yaparız. O halde,

$$(n)(n-1) + (2N_{D-3} + D - 1)(n) - N_{D-2}(N_{D-2} + D - 2) + N_{D-3}(N_{D-3} + D - 2) = 0$$

$$n = N_{D-2} - N_{D-3} \quad (3.1.31)$$

buluruz. D boyutta kuantum sayılarına ve aralarındaki ilişkiye bakalım,

$$\begin{aligned}
m &= -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell \\
\ell &= 0, 1, 2, \dots, N_2 \\
N_2 &= 0, 1, 2, \dots, N_3 \\
N_3 &= 0, 1, 2, \dots, N_4 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
N_{D-3} &= 0, 1, 2, \dots, N_{D-2} \\
k = N_{D-2} &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

için yaptığımız hesaplamaları diğer açısız denklemler için de yaparız. O halde D boyut için dalga fonksiyonunu en genel olarak aşağıdaki gibi gösteririz,

$$\Psi = \left[Ar^{-\frac{D-2}{2}} J_{\left(k+\frac{D-2}{2}\right)}(\omega r) + Br^{-\frac{D-2}{2}} Y_{\left(k+\frac{D-2}{2}\right)}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\theta_{D-2}, \phi) \prod_{\mu=1}^{D-3} \sin^{N_{D-2-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{D-2-\mu} + \left(\frac{D-\mu-1}{2}\right)}^{N_{D-2-\mu} - N_{D-2-\mu}}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\alpha} \tag{3.1.33}$$

D=4, 5, 6,

D boyut için bulduğumuz dalga fonksiyonunu 4 boyut için örneklendirelim. 4 boyutlu küresel koordinatlarda dalga fonksiyonumuz, $\Psi = \Psi(r, \theta_1, \theta_2, \phi, t)$ şeklinde değişkenlere bağlıdır.

$$\Box \Psi = \vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{3.1.34}$$

Ψ kütleless skalar alan olmak üzere, alan denkleminiz yukarıdaki gibidir. İlk olarak 4 boyut için $\vec{\nabla}^2$ ifadesini (3.1.34) denkleminde yerine koyalım ve dalga fonksiyonunun değişkenlerine olan bağımlılığını ayıralım.

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^2 \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

$$\Psi = \Psi(r, \theta_1, \theta_2, \phi, t) = R(r)\Theta_1(\theta_1)\Theta_2(\theta_2)\Phi(\phi)T(t) \tag{3.1.35}$$

Klein Gordon denkleminde gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra aşağıdaki 5 temel denklemi elde ederiz.

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad T(t) = e^{-i\omega t} \quad (3.1.36)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.37)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \left[\frac{1}{\Theta_2 \sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin \theta_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial \theta_2} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_2} \right] = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2 \sin^2 \theta_1} \quad (3.1.38)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\Theta_1 \sin^2 \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^2 \theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial \theta_1} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2 \sin^2 \theta_1} \right] = -\frac{N_2(N_2+2)}{r^2} \quad (3.1.39)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 3r \frac{dR}{dr} + [\omega^2 r^2 - N_2(N_2+2)] R(r) = 0 \quad (3.1.40)$$

(3.1.40) radyal denklemini EK-B Denklem (7)'den faydalanarak çözeriz. Radyal kısmımız aşağıda görüldüğü gibi Bessel fonksiyonları cinsinden ifade edilir.

$$R = Ar^{-1} J_{N_2+1}(\omega r) + Br^{-1} Y_{N_2+1}(\omega r) \quad (3.1.41)$$

Klein Gordon denkleminin Θ 'lı kısmının çözümleri için ise (3.1.38) ve (3.1.39) denklemlerini incelemeliyiz. (3.1.38) denkleminin Assosiyel Legendre fonksiyonunu vereceği açıktır. (3.1.39) denklemini çözmek için $x = \cos \theta_1$, $x \in [-1, 1]$ gibi bir bağımsız değişken tanımlayarak değişken dönüşümü yapalım. Artık yeni denklemimiz,

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta_1}{dx^2} - 3x \frac{d\Theta_1}{dx} + \left[N_2(N_2+2) - \frac{\ell(\ell+1)}{(1-x^2)} \right] \Theta_1 = 0 \quad (3.1.42)$$

şeklini alır. (3.1.42) denkleminde $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$ şeklinde sıfır noktası etrafında bir seri

çözüm denersek, üç terimli bir tekrarlı bağıntısı elde ederiz. 2 terimli bir tekrarlı bağıntısı elde etmek için denklemin tanım aralığının uç noktalarındaki davranışına bakmalıyız. $x = \pm 1$ noktasının yakını için $y=(1-x)$ ve $y=(1+x)$ şeklinde iki değişken tanımlarız. $y=(1-x)$ değişkeni için denkleminizi düzenleyip, $y = \ln \rho$ şeklinde yeni bir dönüşüm altında ve $y \rightarrow 0$ limitinde bu denklemi inceleriz. Sonlu çözüm olarak

$(1-x)^{\ell/2}$ buluruz. Aynı işlemi $y=(1+x)$ için de yaptığımızda, $(1+x)^{\ell/2}$ sonucunu buluruz. Bulduğumuz bu sonuçları kullanarak $(1+x)^{\ell/2}(1-x)^{\ell/2}=(1-x^2)^{\ell/2}$ çözümünü (3.1.42) denkleminde deneriz. Sonuç olarak denkleminiz,

$$(1-x^2)\frac{d^2C(x)}{dy^2}-(2\ell+3)x\frac{dC(x)}{dx}+[N_2(N_2+2)-\ell(\ell+2)]C(x)=0 \quad (3.1.43)$$

şeklini alır. $x=\cos\theta_1$, $x\in[-1,1]$ idi. O halde,

$$\Theta_1(x)=(\sin^2\theta_1)^{\ell/2}C(\cos\theta_1) \quad (3.1.44)$$

olur. (3.1.43) denkleminin $x=\pm 1$ noktalarında iki tane düzgün tekil noktası vardır. $[-1,1]$ aralığında ve sıfır noktası etrafında Frobenius yöntemini kullanarak

$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$ şeklinde bir seri çözüm deneyelim.

$N_2(N_2+2)-\ell(\ell+2)=Z$ olsun.

$$a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+a_1\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{n+2}(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)+[-(n+\alpha)(n+\alpha-1)-(2\ell+3)(n+\alpha)+Z]a_n\}x^{n+\alpha}=0 \quad (3.1.45)$$

Kuvvet serilerin teklik özelliği gereği bu denklemin bütün x noktalarında sağlanması, ancak x'in bütün kuvvetlerinin katsayılarının aynı anda sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. O halde seri çözümdeki katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$a_{n+2}=a_n\frac{[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(2\ell+3)(n+\alpha)-Z]}{(n+\alpha+2)(n+\alpha+1)} \quad (3.1.46)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} a_0\alpha(\alpha-1) &= 0 \\ a_1\alpha(\alpha+1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

$\alpha=0$ indis kökü için seri çözümü bulursak, (3.1.47) numaralı denklem $a_0\neq 0$ ve $a_1\neq 0$ verir. Tekrarlama bağıntısı ise

$$a_{n+2}=a_n\frac{[(n)(n-1)+(2\ell+3)(n)-Z]}{(n+2)(n+1)} \quad n=0,1,2,3.. \quad (3.1.48)$$

bulunur. Genel çözüm de,

$$C(x) = a_0 \left[1 - \frac{Z}{2} x^2 - \frac{(2+2(2\ell+3)-Z)}{3.4} \left(\frac{Z}{2}\right) x^4 + \dots \right] + a_1 \left[x + \frac{(2\ell+3)-Z}{2.3} x^3 + \dots \right] \quad (3.1.49)$$

şeklinde olur. İlk olarak bu serilerin yakınsak olup olmadığına bakalım. Oran testine göre $(-1,1)$ açık aralığında serimiz yakınsaktır. Fakat oran testi $x = \pm 1$ noktalarında serilerin yakınsaklığı konusunda birşey söylemez. Bunun için (3.1.29) Raabe testini uygulamalıyız. Raabe testi bize tekrarlama katsayıları arasındaki ilişkinin ıraksak olduğunu söylüyor.

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad \alpha = 0 \text{ için}$$

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2}$$

Katsayılar artarak geliyor. Katsayılar arasındaki ilişki böyle sonsuza gittiği için bu seri bir yerde kesilmeli. Çünkü sonlu çözüm arıyoruz. Kesme işlemini $a_{n+2} = 0$ ve $a_n \neq 0$ olacak şekilde yaptığımızda, sonlu terimli bir kuvvet serisi elde etmiş oluruz.

(3.1.48) denklemine göre,

$$n(n-1) + (2\ell+3)n - N_2(N_2+2) + \ell(\ell+2) = 0$$

$$n = N_2 - \ell \quad (3.1.50)$$

Dolayısıyla 4 boyut için kuantum sayılarımız ve aralarındaki ilişki,

	\underline{N}_2	$\underline{\ell}$	\underline{m}	
	0	0	0	
$m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$	1	0	0	
$\ell = 0, 1, 2, \dots, N_2$		1	1, 0, -1	(3.1.51)
$N_2 = 0, 1, 2, \dots$	2	0	0	
		1	1, 0, -1,	
		2	2, 1, 0, -1, -2	

olur. 4 boyut için Klein-Gordon denkleminin $\Theta(\theta)$ 'lı kısmının çözümü bize Küresel Harmonik ve Gegenbauer polinomunu verdi. En genel halde Gegenbauer denklemi,

$$(1-x^2)\frac{d^2C_n^\lambda(x)}{dx^2}-(2\lambda+1)\frac{dC_n^\lambda(x)}{dx}+n(n+2\lambda)C_n^\lambda(x)=0 \quad (3.1.52)$$

şeklinde verilir. (3.1.52), (3.1.40) ve (3.1.43) denklemlerini kullanarak, 4 boyut için dalga fonksiyonunu aşağıdaki şekilde gösteririz,

$$\Psi = \left[Ar^{-1}J_{N_2+1}(\omega r) + Br^{-1}Y_{N_2+1}(\omega r) \right] Y_\ell^m(\theta_2, \phi) \sin^\ell \theta_1 C_{N_2-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_1) e^{-i\omega t} \quad (3.1.53)$$

Kütlesiz skalar alanda bulunan 5 boyutlu küresel kabuk için Klein Gordon denklemini çözdüğümüzde,

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad T(t) = e^{-i\omega t} \quad (3.1.54)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Phi(\phi) = e^{im\phi} \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1.55)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2} \left[\frac{1}{\Theta_3 \sin \theta_3} \frac{d}{d\theta_3} (\sin \theta_3 \frac{d\Theta_3}{d\theta_3}) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta_3} \right] = -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2} \quad (3.1.56)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_1} \left[\frac{1}{\Theta_2 \sin^2 \theta_2} \frac{d}{d\theta_2} (\sin^2 \theta_2 \frac{d\Theta_2}{d\theta_2}) - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \theta_2} \right] = -\frac{N_2(N_2+2)}{r^2 \sin^2 \theta_1} \quad (3.1.57)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\Theta_1 \sin^3 \theta_1} \frac{d}{d\theta_1} (\sin^3 \theta_1 \frac{d\Theta_1}{d\theta_1}) - \frac{N_2(N_2+2)}{\sin^2 \theta_1} \right] = -\frac{N_3(N_3+3)}{r^2} \quad (3.1.58)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 4r \frac{dR}{dr} + [\omega^2 r^2 - N_3(N_3+3)] R(r) = 0 \quad (3.1.59)$$

$$R = Ar^{-3/2} J_{N_3+3/2}(\omega r) + Br^{-3/2} Y_{N_3+3/2}(\omega r) \quad (3.1.60)$$

denklemlerini buluruz. (3.1.56) açısıl denklemin çözümü Assosiye Legendre Polinomunu verir. (3.1.57) ve (3.1.58) denklemleri de Gegenbauer polinomunu verir. (3.1.57) denklemini 4 boyut için çözmüştük. (3.1.58) denklemini de aynı yöntemle

çözeriz. İlk olarak $x = \cos \theta_1$ dönüşümünü uygularız. Ardından denklemin uç noktalarındaki davranışına bakıp, sonlu çözüm ararız. (3.1.58) denklemi,

$$(1-x^2) \frac{d^2 C(x)}{dx^2} - (2N_2 + 4)x \frac{dC(x)}{dx} + [N_3(N_3 + 3) - N_2(N_2 + 3)]C(x) = 0 \quad (3.1.61)$$

şeklinde gösterilir. (3.1.61) denkleminde $[-1, 1]$ aralığında ve sıfır noktası etrafında

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \text{ gibi bir seri çözüm uyguladığımızda } N_3(N_3 + 3) - N_2(N_2 + 3) = A$$

olmak üzere tekrarlı katsayıları arasındaki bağıntıyı,

$$a_{n+2} = a_n \frac{[(n)(n-1) + (2N_2 + 4)(n) - A]}{(n+2)(n+1)} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.62)$$

olarak buluruz. Bu serinin yakınsaklığı ilk önce oran testi ve ardından Raabe testi ile kontrol edilir. Raabe testimiz bize tekrarlı katsayıları arasındaki ilişkinin ıraksak olduğunu söyler. Katsayılar arasındaki ilişki sonsuza gittiği için bu seriyi $a_{n+2} = 0$ ve $a_n \neq 0$ olacak şekilde keseriz ve sonlu terimli bir polinom elde ederiz.

$$n(n-1) + (2N_2 + 4)n - N_3(N_3 + 3) + N_2(N_2 + 3) = 0$$

$$n = N_3 - N_2 \quad (3.1.63)$$

5 boyut için kuantum sayılarımıza ve aralarındaki ilişkiye bakalım,

	N_3	N_2	ℓ	m	
	0	0	0	0	
$m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$	1	0	0	0	
$\ell = 0, 1, 2, \dots, N_2$		1	0	0	
$N_2 = 0, 1, 2, \dots, N_3$			1	1, 0, -1	(3.1.64)
$N_3 = 0, 1, 2, \dots$	2	0	0	0	
		1	0	0	
			1	1, 0, -1	
		2	0	0	
			1	1, 0, -1	
		2	2, 1, 0, -1, -2		

Sonuç olarak 5 boyut için dalga fonksiyonumuz aşağıdaki gibidir.

$$\Psi = \left[A r^{-3/2} J_{N_3+3/2}(\omega r) + B r^{-3/2} Y_{N_3+3/2}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\theta_3, \phi) \sin^{\ell} \theta_2 C_{N_2-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_2) \sin^{N_2} \theta_1 C_{N_3-N_2}^{N_2+3/2}(\cos \theta_1) e^{-i\alpha} \quad (3.1.65)$$

3.2 DIRICHLET SINIR KOŞULUNDA SKALAR CASİMİR ETKİ

Dirichlet ve Neumann sınır şartı altındaki küresel alanda bulunan a yarıçaplı küresel kabuğun mod dağılımını yeniden inceleyeceğiz. Özfrekansların kompleks düzlemdeki kontur integrasyonu aracılığı ile doğrudan mod toplama yöntemine dayanan bir metotla a yarıçaplı küresel kabuğun Casimir enerjisini yeniden elde edeceğiz. [Nesterenko V.V. ve Pirozhenko I.G.1997].

Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi,

$$E = \frac{1}{2} \sum_s (\omega_s - \bar{\omega}_s) \quad (3.2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki ω_s göz önüne aldığımız geometrideki küresel alanın klasik öz frekanslarını temsil eder. $\bar{\omega}_s$ ise hiçbir sınır koşulu olmadan, geri planda seçilen referans boşluğun öz frekanslarıdır. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi hesaplayabilmek için, (3.2.1) numaralı denklemde ifade edilen öz frekansları bulmamız gerekir. Önce küresel alan içinde bulunan kürenin modlarının dağılımını veren öz frekans denklemlerini elde edelim. Daha sonra bu modların dağılımından Casimir enerjisini inceleyelim. a yarıçaplı kürenin içindeki ve dışındaki skalar alanın salınım frekanslarını belirlememiz gerekir. Dirichlet sınır koşullarında öz frekanslar $\Psi(r=a)=0$ şartına göre,

$$j_\ell(\omega a) = 0 \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.2)$$

$$h_\ell^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (3.2.3)$$

ile verilir. (3.2.2) küre içindeki; (3.2.3) denklemi de küre dışındaki skalar alanın salınımlarının frekansını belirler.

$j_\ell(z)$ ve $h_\ell^{(1)}(z)$ küresel Bessel fonksiyonlarını Ek-B Denklem(12)'den faydalanarak

$$j_\ell^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\ell+1/2}(z) \quad (3.2.4)$$

$$h_\ell^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{\ell+1/2}^{(1)}(z) \quad (3.2.5)$$

ile gösteririz. Burada $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ 'dir. Bu denklemlerin pozitif kökleri $\omega_{n\ell} > 0$ $n=1, 2, \dots$ olduğu durumlar göz önüne alınmalıdır.

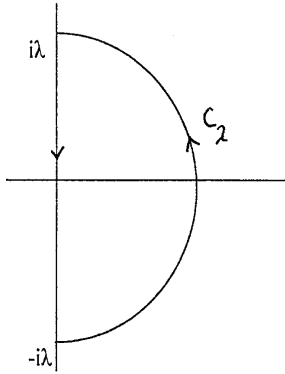
(3.2.1) denklemini şu şekilde yazılabilir,

$$\frac{1}{2} \sum_s \omega_s = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1/2) S_\ell \quad (3.2.6)$$

$$S_\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n\ell} \quad (3.2.7)$$

(3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerinin her biri $S_\ell^{(\alpha)}$ üretir. Burada $S_\ell^{(\alpha)}$ kısmi toplamlarını hesaplayabilmek için Cauchy Teoreminin integral gösterimini kullanabiliriz.

$$S_\ell^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z \frac{d}{dz} \ln f^{(\alpha)}(z, \alpha) dz \quad (3.2.8)$$



Şekil 3.1 Kompleks düzlemdeki kontur integrali

$$f^{(\alpha)}(\omega, a) = 0 \quad \alpha=1, 2 \quad (3.2.9)$$

Buradaki $f^{(\alpha)}$, (3.2.2) ve (3.2.3) denklemlerini tanımlayan fonksiyonlardır ve kapalı bir C yolu üzerinde ve içinde analitiktir. C konturu bu denklemlerin köklerini saat yönünün tersinde çevreler. Bu kontür iki kısma ayrılabilir. Bunlar yarım dairesel kısım

olan C_λ ve $[i\lambda \rightarrow -i\lambda]$ olan düz kısımdır. Yani C_λ konturu sanal ekseninde $[-i\lambda, i\lambda]$ ve λ yarıçaplıdır. λ sabit tutulduğunda (3.2.8) integrali bize göz önüne alınan frekansların toplamının değerini verir. C_λ kontürü $f^{(\alpha)}(\omega, a) = 0$ denkleminin sonlu sayıda köklerini içerir. Köklerin toplamı sonlu olduğundan yarıçap bir regularizasyon parametresidir ve bu bizim için önemli bir sonuçtur.

$$\omega \text{ argümanının negatif değerleri için } f^{(\alpha)}(-\omega, a) = f^{(\alpha)}(\omega, a); \quad \omega > 0 \quad (3.2.10)$$

$y \rightarrow iy$ değişken dönüşümü yapalım. C konturunun katkısıyla (3.2.8) denklemi şu şekli alır;

$$\begin{aligned} S_\ell^{(\alpha)} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\lambda}^{i\lambda} iy \frac{d}{idy} \ln f^{(\alpha)}(iy, a) idy + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} z \frac{d}{dz} \ln f^{(\alpha)}(z, a) dz \\ S_\ell^{(\alpha)} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} y \frac{d}{dy} \ln f^{(\alpha)}(iy, a) dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} z \frac{d}{dz} \ln f^{(\alpha)}(z, a) dz \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$S_\ell^{(\alpha)}$ 'nin ilk terimini kısmi integrasyonla açınca,

$$-\frac{1}{2\pi} \left[y \ln f^{(\alpha)}(iy, a) \right]_{-\lambda}^{\lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \ln f^{(\alpha)}(iy, a) dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} z d \ln f^{(\alpha)}(z, a)$$

buluruz. (3.2.1) enerji denklemindeki tanıma göre Casimir enerjisinde sonlu bir ifade elde etmek amacıyla (3.2.8) denkleminin $a \rightarrow \infty$ kısmı olan Minkowski uzayının katkısı çıkartılır. Bu kısmı da \overline{S}_ℓ^α ile gösterelim.

$$\overline{S}_\ell^\alpha = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} y \frac{d}{dy} \ln f^{(\alpha)}(iy, a \rightarrow \infty) dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} z \frac{d}{dz} \ln f^{(\alpha)}(z, a \rightarrow \infty) dz$$

$S_\ell^{(\alpha)}$ 'nin ilk kısmını da kısmi integrasyonla açalım ve denklemi düzenleyelim. Sonuçta aşağıdaki ifadeyi elde ederiz,

$$\overline{S}_\ell^\alpha = -\frac{1}{2\pi} \left[y \ln f^{(\alpha)}(iy, a \rightarrow \infty) \right]_{-\lambda}^{\lambda} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \ln f^{(\alpha)}(iy, a \rightarrow \infty) dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} z \frac{d}{dz} \ln f^{(\alpha)}(z, a \rightarrow \infty) dz \quad (3.2.12)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f^{(\alpha)}(z, a) = f^{(\alpha)}(z, a) \quad (3.2.13)$$

(3.2.13) eşitliğini kullanarak C_λ 'lı terimlerin $S_\ell^\alpha - \overline{S}_\ell^\alpha$ ifadesinde birisini götürdüğünü kolaylıkla görebiliriz. O zaman mod dağılımı için geriye şu ifade kalır,

$$S_\ell^{(\alpha)} - \overline{S}_\ell^\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln \left[\frac{f^{(\alpha)}(iy, a)}{f^{(\alpha)}(iy, a \rightarrow \infty)} \right] \quad (3.2.14)$$

Bu eşitlikteki $f^{(\alpha)}(iy, a)$ fonksiyonları öz frekans bağıntılarından hesaplanır. Yani (3.2.2) ve (3.2.3) öz frekans eşitliklerini (3.2.14) numaralı denklemde yerine koyacağız.

(3.2.2) denklemine göre $j_\ell(\omega a) = 0$ idi.

$$\frac{f^{(1)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \frac{J_\nu(iya)}{\lim_{a \rightarrow \infty} J_\nu(iya)} \quad \nu = \ell + 1/2 \quad (3.2.15)$$

(3.2.15) denklemde yer alan $J_\nu(z)$ ile Modifiye Bessel fonksiyonu olan $I_\nu(z)$ arasındaki $J_\nu(iz) = i^\nu I_\nu(z)$ ilişkisini kullanalım. Daha sonra $I_\nu(z)$ 'lerin asimptotik seriye genişletilmiş halini denklemde yerine koyalım. Yeterince büyük z ve sabit ν değeri için Modifiye Bessel fonksiyonu,

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.2.16)$$

şeklinde ifade edilir [Abromowitz ve Stegun, 1964]. Buna göre (3.2.15) denklemi şu hali alır,

$$\frac{f^{(1)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \sqrt{2\pi ay} e^{-ay} I_\nu(ay) \quad (3.2.17)$$

$f^{(2)}(z)$ fonksiyonunu da (3.2.14) denklemde yerine koyalım. $h_\ell^{(1)}(\omega a) = 0$ olduğunu biliyoruz.

$$\frac{f^{(2)}(iy, a)}{f^{(2)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \frac{H_\nu^{(1)}(iya)}{\lim_{a \rightarrow \infty} H_\nu^{(1)}(iya)} \quad (3.2.18)$$

$H_\nu^{(1)}(z)$ birinci tür Hankel fonksiyonudur. $K_\nu(z)$ ise Modifiye Bessel fonksiyonudur. Bunların arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir;

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right) i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) \quad (3.2.19)$$

Bu ilişkiyi (3.2.18) denklemde yerine koyalım. $K_\nu(z)$ Modifiye Bessel fonksiyonunun büyük z ve sabit ν değeri için asimptotik seriye genişletilmiş hali

$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2z} e^{-z}$ şeklindedir. Bu durumda,

$$\frac{f^{(2)}(iy, a)}{f^{(2)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \sqrt{\frac{2ay}{\pi}} e^{ay} K_\nu(ay) \quad (3.2.20)$$

bulunur. Böylece (3.1.2) ve (3.1.3) öz frekans eşitliklerinin enerji denkleminin katkısı

$$\sum_{\alpha=1}^2 S_\ell^{(\alpha)} - \overline{S}_\ell^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[2ay I_\nu(ay) K_\nu(ay)] \quad (3.2.21)$$

$$E = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^\infty \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[2y I_\nu(y) K_\nu(y)] \quad (3.2.22)$$

şeklinde gösterilir. Önce toplamın içindeki terimi hesaplayalım.

$$\Theta_\ell = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[2y I_\nu(y) K_\nu(y)] \quad (3.2.23)$$

(3.2.23) ifadesinde y sonsuza götürülüp ν sabit tutulduğunda sonlu bir sonuca ulaşılır; fakat ν sabit değilse Modifiye Bessel fonksiyonlarının asimptotik değerlerini kullanmak gerekir. Çünkü (3.2.23) denklemindeki Bessel fonksiyonları y 'nin artan kuvvetleri şeklinde bir seri oluşturur. Bu seri y 'nin bütün değerleri için yakınsaktır ama y 'nin çok büyük olduğu durumlarda yakınsaklık çok yavaştır. Bu davranış başlangıçtaki bazı terimleri kaçırmamıza neden olur. Bu yüzden Bessel fonksiyonları çok hızlı şekilde yakınsak yapılmalıdır. Bu hızlı yakınsaklığı da çok büyük ν değerlerinde $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü ile Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik açılımını kullanarak yapabiliriz.

$$I_\nu(\nu z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}} \frac{e^{\nu z}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{U_k(t)}{\nu^k} \right\} \quad (3.2.24)$$

$$K_\nu(\nu z) = \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} \frac{e^{-\nu z}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{U_k(t)}{\nu^k} \right\} \quad (3.2.25)$$

$$t = (1+z^2)^{-1/2} \quad \frac{dt}{dz} = -zt^3 \quad (3.2.26)$$

$$\sigma(y) = y I_\nu(y) K_\nu(y) \quad y \rightarrow \nu z \quad (3.2.27)$$

$$I_\nu(\nu z) K_\nu(\nu z) \cong \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{\nu^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1 U_3) + \Theta\left(\frac{1}{\nu^6} \dots\right) \right\} \quad (3.2.28)$$

$$\sigma(vz) = vz \frac{1}{2v(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{v^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{v^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1U_3) + \theta \left(\frac{1}{v^{2p}} \right); p \geq 3 \right] \quad (3.2.29)$$

(3.2.29) denklemindeki U_k ifadelerinin açılımı $U_0(t)=1$ olmak üzere,

$$U_{k+1}(t) = \frac{1}{2} t^2 (1-t^2) U_k'(t) + \frac{1}{8} \int_0^t (1-5t^2) U_k(t) dt \quad (3.2.30)$$

formülüyle verilir [Abromowitz ve Stegun,1964]. Biz 3 boyut için $\frac{1}{v^4}$ 'e kadar gidelim.

Diğer terimlerden gelen katkılar küçük olduğu için onları ihmal edelim. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \frac{1}{24} (3t - 5t^3) \\ U_2(t) &= \frac{1}{1152} (81t^2 - 462t^4 + 385t^6) \\ U_3(t) &= \frac{1}{414720} (30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9) \\ U_4(t) &= \frac{1}{3993120} (4465125t^4 - 94121676t^6 + 349922430t^8 - 446185740t^{10} + 185910725t^{12}) \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

$U_k(t)$ değerlerini kullanacağız. Bu formülleri (3.2.29) denkleminde yerine koyarak,

$$2\sigma(vz) = \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{8v^2} (t^2 - 6t^4 + 5t^6) + \frac{1}{128v^4} (27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12}) \right] \quad (3.2.32)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\ln 2\sigma(vz) = \ln \frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} + \ln \left[1 + \frac{1}{8v^2} (t^2 - 6t^4 + 5t^6) + \frac{1}{128v^4} (27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12}) \right] \quad (3.2.33)$$

şeklindedir. $t=(1+z^2)^{-1/2}$ dönüşümü yapalım. İlk kısmı kısmi integrasyonla çözeriz ve

$$\int_0^{\infty} \ln \left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}} \right) dz = -\frac{\pi}{2} \quad (3.2.34)$$

sonucunu buluruz. İkinci kısım için de,

$$|x| < 1 \text{ için } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

Taylor yaklaşıklığını kullanalım.

$$x = \frac{1}{8\nu^2}(t^2 - 6t^4 + 5t^6) + \frac{1}{128\nu^4}(27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12})$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{64\nu^4}(t^4 + 46t^8 + 25t^{12} - 12t^6 - 60t^{10})$$

$$x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{8\nu^2}(t^2 - 6t^4 + 5t^6) + \frac{1}{128\nu^4}(26t^4 - 568t^6 + 2124t^8 - 2712t^{10} + 1130t^{12})$$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{8\nu^2}(t^2 - 6t^4 + 5t^6) + \frac{1}{128\nu^4}(26t^4 - 568t^6 + 2124t^8 - 2712t^{10} + 1130t^{12})$$

(3.2.35)

Θ_ℓ 'da bu ifadeleri yerine koyup integralleri rezidü yöntemi ile çözdükten sonra,

$$\int_0^\infty dy \ln[2yI_\nu(y)K_\nu(y)] = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{128\nu^2} + \frac{35\pi}{32768\nu^4} \quad (3.2.36)$$

buluruz. Yani enerji ifademiz

$$\Theta_\ell = \frac{\nu^2}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[2yI_\nu(y)K_\nu(y)] \quad \text{formülü uyarınca,}$$

$$\Theta_\ell = -\frac{\nu^2}{2} - \frac{1}{128} + \frac{35}{32768\nu^2} + O(\nu^{-3}) \quad (3.2.37)$$

$$E = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{\nu^2}{2} - \frac{1}{128} + \frac{35}{32768\nu^2} \right) \quad \nu = \ell + \frac{1}{2} \quad (3.2.38)$$

haline dönüşür. (3.2.38) denkleminde görüldüğü üzere, iraksak ifadeler ℓ 'ye göre toplamdaki ilk iki terimden gelir. Bu sonsuzluk, Zeta fonksiyonunun yardımıyla ortadan kaldırılabilir. İlk adım olarak enerji denkleminde sonsuzluğa yol açan terimleri toplayıp çıkartalım ve sonlu kısmı ayıralım. Sonlu kısmı $\bar{\Theta}_\ell$ ile gösterelim.

$$\bar{\Theta}_\ell = \Theta_\ell + \frac{\nu^2}{2} + \frac{1}{128} = \frac{35}{32768\nu^2} \quad (3.2.39)$$

$\nu \rightarrow \infty$ durumunda $\sum_{\ell=1}^{\infty} \bar{\Theta}_\ell$ yakınsaktır. Enerji denklemi de,

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Theta_{\ell} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\Theta_{\ell} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{128} \right) - \frac{1}{2a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{128a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^0 \quad (3.2.40)$$

olur. Enerji denkleminde sonsuzluğa yol açan terimleri Hurwitz Zeta fonksiyonu ile tanımlayalım. Hurwitz Zeta fonksiyonu en genel halde,

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+n)^z} \quad \text{Re}z > 1 \quad (3.2.41)$$

şeklinde tanımlanır. $q = \frac{1}{2}$ için Riemann Zeta fonksiyonuna indirgenir. Riemann Zeta fonksiyonu da,

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)^z} \quad \text{Re}z > 1 \quad \zeta(-z, q) = -\frac{B_{z+1}(q)}{z+1} \quad (3.2.42)$$

ile gösterilir. O halde (3.2.40) enerji denklemimiz,

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \Theta_{\ell} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\Theta}_{\ell} - \frac{1}{2a} \zeta\left(-2, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{128a} \zeta\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.43)$$

şeklinde Zeta fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanır. Riemann Zeta fonksiyonunun,

$$\zeta\left(z, \frac{1}{2}\right) = (2^z - 1)\zeta(z) \quad (3.2.44)$$

şeklinde bir gösterimi vardır. Bunu iraksak ifadelerimize uyguladığımızda,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^0 = \zeta\left(0, \frac{1}{2}\right) = (2^0 - 1)\zeta(0) = 0 \quad (3.2.45)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 = \zeta\left(-2, \frac{1}{2}\right) = (2^{-2} - 1)\zeta(-2) = \frac{-3}{4}\zeta(-2) = 0 \quad (3.2.46)$$

buluruz. Enerji denklemimiz olan (3.2.43) denklemi, (3.2.45) ve (3.2.46) özdeşliklerinden dolayı aşağıdaki şekli alır,

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{\Theta}_{\ell} \quad (3.2.47)$$

$$\bar{\Theta}_{\ell} = \Theta_{\ell} + \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{128}$$

Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerlerini kullanarak yukarıdaki yakınsak enerji ifadesini bulmuş olduk.

ν 'nün hızla artmasıyla Modifiye Bessel fonksiyonları olan $I_\nu(z)$ ve $K_\nu(z)$ hızla uniform asimptotik değerlerine yaklaşır. Bu yüzden ℓ 'nin nispeten büyük değerleri için,

$$\bar{\Theta}_\ell = \bar{\Theta}^{asym} = \frac{35}{32768\nu^2} \quad (3.2.48)$$

olarak alabiliriz. Fakat Modifiye Bessel fonksiyonlarının istenilen bütün z ve büyük ν değerlerinde doğrudan hesabı gereklidir. Bunun için (3.2.22) enerji denkleminimize geri dönelim.

$$E^{(D)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln[2yI_\nu(y)K_\nu(y)] \quad \text{idi.}$$

$\nu = \ell + \frac{1}{2}$ ve $\ell = 0, 1, 2, \dots$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki enerji ifadesinden görüldüğü gibi ℓ 'nin değerine bağlı olarak ν değeri ve buna bağlı olarak da Modifiye Bessel fonksiyonların çarpımı olan ifade değişmektedir. Bu çarpım $I_\nu(z)$ ve $K_\nu(z)$ fonksiyonlarının değerlerinin yerine konulmasıyla bulunur [Abromowitz ve Stegun, 1964].

ℓ	$\bar{\Theta}_\ell$	$\bar{\Theta}_\ell^{asym}$
0	0.001913	0.004273
1	0.000398	0.000474
2	0.000159	0.000171
3	0.000084	0.000087
4	0.000052	0.000053

(3.2.50)

Yukarıdaki veride $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ için $\bar{\Theta}_\ell$ değeri, hem asimptotik formül kullanılarak hem de nümerik hesabın yapılmasıyla bulunmuş ve karşılaştırılmıştır [Nesterenko ve Pirozhenko, 1997]. Sonuç olarak enerji ifadesinin tam değeri, $\ell > 3$ değerlerinde (3.2.48) denklemini kullanılmasıyla; $\ell \leq 3$ değerlerinde de Modifiye Bessel fonksiyonlarının çarpımının değerini (3.2.22) denklemine koyup, gerekli integrallerin hesaplanmasıyla bulunur [Nesterenko ve Pirozhenko, 1997].

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} 0.002819 \quad (3.2.51)$$

3.3 NEUMANN SINIR KOŞULUNDA SKALAR CASİMİR ETKİ

Bu bölümde de küre yüzeyinde Neumann sınır koşullarına uyan kütleli skalar alanın modlarının dağılımını inceleyeceğiz. Kürenin içindeki ve dışındaki öz frekanslar aşağıdaki denklemlerle verilir,

$$\frac{d}{dr} [j_\ell(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.3.1)$$

$$\frac{d}{dr} [h_\ell^{(1)}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.2)$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + 1/2) S_\ell \quad S_\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{n\ell}$$

olduğunu bir önceki hesabımızdan biliyoruz. (3.3.1) ve (3.3.2) özfrekanslarının ürettiği $S_\ell^{(\alpha)}$ 'ları Cauchy teoreminin integral gösteriminden yararlanarak bulabiliriz. Yeniden Normalleştirilmiş enerjiyi hesaplamak için bulduğumuz denklemden boş uzayın katkısını yani Minkowski uzayının katkısını çıkartmalıyız. Dirichlet sınırı için yaptığımız hesaplardan,

$$S_\ell^{(\alpha)} - \bar{S}_\ell^\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln \left[\frac{f^{(\alpha)}(iy, a)}{f^{(\alpha)}(iy, a \rightarrow \infty)} \right] \quad (3.3.3)$$

elde etmiştik. (3.3.1) ve (3.3.2) öz frekans eşitliklerini (3.3.3) numaralı denklemden yerine koyalım.

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \frac{d}{dr} [j_\ell(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \\ \frac{d}{dr} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\omega r}} J_\nu(\omega r) \right] \Big|_{r=a} &= 0 \\ f^{(1)} &= -\frac{J_\nu(ia)}{2} + ia J'_\nu(ia) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

olarak buluruz. Dirichlet sınır koşulu için yaptığımız hesabın sonucundan farkı işaretidir. (3.3.4) denklemini (3.3.3) eşitliğinde yerine koyarsak,

$$\frac{f^{(1)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \frac{-J_\nu(iya)/2 + iyaJ'_\nu(iya)}{\lim_{a \rightarrow \infty} [-J_\nu(iya)/2 + iyaJ'_\nu(iya)]} \quad (3.3.5)$$

buluruz. $J_\nu(iya) = i^\nu I_\nu(ya)$ ifadesini (3.3.5)'de yerine koyalım. $I'_\nu(ya)$ argumana göre türevi belirtmektedir. Bu durumda ;

$$\frac{f^{(1)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \frac{-I_\nu(ya)/2 + yaI'_\nu(ya)}{\lim_{a \rightarrow \infty} [-I_\nu(ya)/2 + yaI'_\nu(ya)]} \quad (3.3.6)$$

Sabit ν ve büyük y değerleri için, $I_\nu(ay) = \frac{e^{ay}}{\sqrt{2\pi ay}}$ asimptotik değerini kullanalım ve

bu ifadenin de türevini alıp (3.3.6) denkleminde yerine koyalım.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (-I_\nu(ay)/2 + ayI'_\nu(ay)) = \frac{e^{ay}}{\sqrt{2\pi}}(ay)$$

$$\left[\frac{f^{(1)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty)} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{ay}} e^{-ay} [-I_\nu(ay)/2 + ayI'_\nu(ay)] \quad (3.3.7)$$

'dır. Aynı hesapları $f^{(2)}(iy, a)$ için de yapalım,

$$\frac{d}{dr} [h_\ell^{(1)}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0$$

$$f^{(2)}(iy, a) = -\frac{H_\nu^{(1)}(iya)}{2} + iyaH_\nu^{(1)'}(iya) \quad (3.3.8)$$

$\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iay) = K_\nu(ay)$ olduğunu görmüştük. Bunu (3.2.8)'da yerine yazalım.

$$\frac{f^{(2)}(iy, a)}{f^{(2)}(iy, a \rightarrow \infty)} = \frac{-K_\nu(ay)/2 + yaK'_\nu(ay)}{\lim_{a \rightarrow \infty} [-K_\nu(ay)/2 + yaK'_\nu(ay)]} \quad (3.3.9)$$

Sabit ν ve büyük y değeri için $K_\nu(ay)$ fonksiyonunun asimptotik değeri,

$K_\nu(ay) = \sqrt{\frac{\pi}{2ay}} e^{-ay}$ idi. Türevini alıp (3.3.9) denkleminde yerine koyduktan sonra,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (K_\nu(ay)/2 + ayK'_\nu(ay)) = -\sqrt{\frac{\pi ya}{2}} e^{-ay} \text{ buluruz.} \quad (3.3.10)$$

$$\left[\frac{f^{(2)}(iy, a)}{f^{(2)}(iy, a \rightarrow \infty)} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi ay}} e^{ay} \left[-K_\nu(ay)/2 + ayK'_\nu(ay) \right] \quad (3.3.11)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 S_\ell^{(\alpha)} - \bar{S}_\ell^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln \left\{ \frac{-2 \left(\frac{I_\nu(ay)}{2} - ayI'_\nu(ay) \right) \left(\frac{K_\nu(ay)}{2} - ayK'_\nu(ay) \right)}{\dots} \right\} \quad (3.3.12)$$

olur. Buna göre enerji ifadesi,

$$E^{(N)} = \frac{1}{\pi a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty \ln \left[\frac{f^{(1)}(iy, a) f^{(2)}(iy, a)}{f^{(1)}(iy, a \rightarrow \infty) f^{(2)}(iy, a \rightarrow \infty)} \right] dy \quad (3.3.13)$$

Enerji ifadesinde $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ fonksiyonlarını yerine koyduğumuzda,

$$E^{(N)} = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty dy \ln \left\{ \frac{-2 \left(\frac{I_\nu(ay)}{2} - ayI'_\nu(ay) \right) \left(\frac{K_\nu(ay)}{2} - ayK'_\nu(ay) \right)}{\dots} \right\}$$

buluruz. Yukarıdaki ifadeden $E^{(N)}$ 'yi bulmak zor olduğundan, $E^{(D)} + E^{(N)}$ 'yi bulup $E^{(D)}$ 'nin katkısını bu ifadeden çıkarmalıyız.

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \ln \left\{ \left[2ayI_\nu(ay)K_\nu(ay) \right] \left[\frac{-2 \left(\frac{1}{2} I_\nu(ay) - ayI'_\nu(ay) \right) \left(\frac{1}{2} K_\nu(ay) - ayK'_\nu(ay) \right)}{\dots} \right] \right\} \quad (3.3.14)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int_0^\infty dy \ln \left[-4I_\nu(ay)K_\nu(ay) \left(\frac{1}{2} I_\nu(ay) - yI'_\nu(ay) \right) \left(\frac{1}{2} K_\nu(ay) - yK'_\nu(ay) \right) \right] \quad (3.3.15)$$

İlk olarak $ay \rightarrow y$ dönüşümü yapalım. Daha sonra Modifiye Bessel fonksiyonlarının Wronskian ifadesinden yararlanarak ve terim ekleyip terim çıkartarak (3.3.15) denklemini aşağıdaki şekilde kısaltabiliriz.

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{\pi a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\infty} dy \ln \left[1 - \mu_{\ell}(y)^2 \right] \quad (3.3.16)$$

Burada $1 - \mu_{\ell}(y)^2 = -4I_{\nu}(y)K_{\nu}(y) \left[\frac{1}{2}I_{\nu}(y) - yI'_{\nu}(y) \right] \left[\frac{1}{2}K_{\nu}(y) - yK'_{\nu}(y) \right]$ 'dir.

$$\mu_{\ell}(y) = y^2 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y} I_{\nu}(y) K_{\nu}(y) \right) \quad (3.3.17)$$

şeklindedir. (3.3.16) enerji denklemindeki toplamın yakınsaklığı, büyük ℓ değerlerinde toplamın içindeki terimin davranışıyla belirlenir. Bu terimi P_{ℓ} ile gösterelim

$$P_{\ell} = \frac{\ell + 1/2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln \left[1 - \mu_{\ell}(y)^2 \right] \quad (3.3.18)$$

Yukarıdaki ifade de görüldüğü gibi y sonsuza götürülüp, ν sabit tutulduğunda sonlu bir sonuca ulaşılır. Fakat ν sabit değilse (3.3.18) denklemindeki integralli kısmı hesaplamak için hızlı bir şekilde yakınsaklık veren Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik açılımını kullanmalıyız. Bunun için $y \rightarrow \nu z$ gibi yeni bir değişken tanımlayalım. Uniform asimptotik açılımlarıyla y 'yi sabit tutup ν 'yü sonsuza götürdüğümüzde, Modifiye Bessel fonksiyonlarının (3.2.24) ve (3.2.25) denklemlerindeki formüllerini kullanmalıyız. Bu formüller uyarınca Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerlerinin çarpımının,

$$I_{\nu}(\nu z)K_{\nu}(\nu z) \cong \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{1}{\nu^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{\nu^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1U_3) + \Theta\left(\frac{1}{\nu^6} \dots\right) \right\} \quad (3.3.19)$$

olduğunu biliyoruz. (3.3.19) denkleminde yer alan U_k ifadelerinin açılımlarını (3.1.31) denkleminde elde etmiştik.

Enerji ifadesinin toplamı içindeki terime $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü uyguladığımızda,

$$\mu_{\ell}(\nu z) = z^2 \frac{d}{dz} [I_{\nu}(\nu z)K_{\nu}(\nu z)] \quad (3.3.20)$$

buluruz. Denklem(3.1.31) ve (3.3.19)'un yardımıyla

$$I_{\nu}(\nu z)K_{\nu}(\nu z) = \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{576\nu^2} (72t^2 - 432t^4 + 360t^6) + \frac{1}{128\nu^4} (27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12}) + \Theta\left(\frac{1}{\nu^{2p}}; p \geq 3\right) \right]$$

$$\mu_\ell(vz) = z^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \right) \left[1 + \frac{1}{576\nu^2} (72t^2 - 432t^4 + 360t^6) + \frac{1}{128\nu^4} (27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12}) + \Theta\left(\frac{1}{\nu^{2p}}; p \geq 3\right) \right] \quad (3.3.21)$$

bulunur. $(1+z^2)^{-1/2} = t$ olarak tanımlamıştık.

$$C = \left[1 + \frac{1}{576\nu^2} (72t^2 - 432t^4 + 360t^6) + \frac{1}{128\nu^4} (27t^4 - 580t^6 + 2170t^8 - 2772t^{10} + 1155t^{12}) \right]$$

olsun. (3.3.21) denklemi daha kısa şekilde,

$$\mu_\ell(vz) = \left[\frac{-t}{2\nu} C - \frac{z^2 t^3}{2\nu} C - \frac{z^2 t^4}{2\nu} \frac{d}{dt} C \right] \quad (3.3.22)$$

olarak yazılır. C'yi yerine koyalım ve denklemi düzenleyelim,

$$\mu_\ell(vz) = \left\{ \frac{-1}{2\nu} (t + t^3 z^2) - \frac{1}{1152\nu^3} [72t^3 - 432t^5 + 360t^7 + z^2(216t^5 - 2160t^7 + 2520t^9)] - \frac{1}{256\nu^5} [27t^5 - 580t^7 + 2170t^9 - 2772t^{11} + 1155t^{13} + z^2(135t^7 - 4060t^9 + 19530t^{11} - 30492t^{13} + 15015t^{15})] + \Theta\left(\frac{1}{\nu^{2p}}; p \geq 3\right) \right\} \quad (3.3.23)$$

$\mu_\ell(vz)^2$ için $\frac{1}{\nu^4}$ 'e kadar olan terimleri almamız yeterlidir.

$$\mu_\ell(vz)^2 = \frac{1}{4\nu^2} (t^2 + t^6 z^4 + 2z^2 t^4) + \frac{1}{1152\nu^4} (72t^4 - 432t^6 + 360t^8 + z^2(288t^6 - 2592t^8 + 2880t^{10}) + z^4(216t^8 - 2160t^{10} + 2520t^{12})) \quad (3.3.24)$$

$$P_\ell = \frac{\ell+1/2}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[1 - \mu_\ell(y)^2] \text{ idi.}$$

$|x| < 1$ için $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$ Taylor yaklaşıklığını kullanalım.

$$\mu_\ell(vz)^2 = x$$

$\mu_\ell(vz)^2 + \frac{\mu_\ell(vz)^4}{2}$ kadarlık kısmını alalım.

$$\ln(1-\mu_\ell(vz)^2) = \frac{1}{4v^2}(t^2 + t^6z^4 + 2z^2t^4) + \frac{1}{1152v^4} [72t^4 - 432t^6 + 360t^8 + z^2(288t^6 - 2592t^8 + 2880t^{10}) + z^4(216t^8 - 2160t^{10} + 2520t^{12})] + \frac{1}{2} \frac{1}{16v^4} (t^4 + z^8t^{12} + 6z^4t^8 + 4z^2t^6 + 4z^6t^{10}) \quad (3.3.25)$$

$(1+z^2)^{-1/2} = t$ 'yi (3.3.24) denkleminde yerine koyup ifadeleri sıfırdan sonsuza integre ettiğimizde,

$$P_\ell = \frac{v^2}{\pi} \int_0^\infty dy \ln[1 - \mu_\ell(y)^2] = -\frac{19}{64} + \frac{153}{16384v^2} + O(v^{-3}) \quad (3.3.26)$$

buluruz. O halde toplam enerji de,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(-\frac{19}{64} - \frac{153}{16384v^2} \right) \quad (3.3.27)$$

olarak elde edilir. (3.3.27) denkleminde görüldüğü gibi sonsuzluk, büyük ℓ değerlerinde ℓ 'ye göre toplamdaki ilk terimden gelir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için yine Hurwitz Zeta fonksiyonu regularizasyon yöntemini kullanacağız. Diğer hesaplamamızda yaptığımız gibi ilk önce sonsuzluğa yol açan terimleri enerji denkleminde toplayıp çıkartalım. Ardından sonlu ve sonsuz kısmı ayıralım.

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{P}_\ell - \frac{19}{64a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^0 \quad (3.3.28)$$

$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^0 = \zeta\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0$ olduğunu (3.2.19) denkleminde biliyoruz. O halde (3.3.28)

denklemini,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{P}_\ell$$

$$\bar{P}_\ell^{asym} = \bar{P}_\ell = P_\ell + \frac{19}{64} = -\frac{153}{16384v^2} \quad v = \ell + \frac{1}{2} \quad (3.3.29)$$

şeklinde olur.

ℓ	\bar{P}_ℓ	\bar{P}_ℓ^{asym}
0	-0.211491	-0.037351
1	-0.004800	-0.004150
2	-0.001582	-0.001494
3	-0.000775	-0.000762

(3.3.30)

Yukarıdaki tablodan görüldüğü üzere ℓ 'nin hızla artan değerleri için P_ℓ ifadesi (3.3.29) ile tanımlanan asimptotik değerine gitmektedir. $\ell \geq 3$ değerlerinde (3.3.29) denklemini kullanabiliriz. $\ell \leq 3$ değerlerinde de enerjinin değerini tam olarak hesaplayabilmek için, (3.3.18) denklemine $I_\nu(z)$ ve $K_\nu(z)$ Modifiye Bessel fonksiyonlarının değerlerini koyarız [Abromowitz ve Stegun,1964]. Ardından (3.2.51) enerji değerini toplam enerjiden çıkartırız ve Neumann sınır koşulu altındaki enerjiyi [Nesterenko ve Pirozhenko, 1997].

$$E^{(N)} = -\frac{1}{a} 0.223777 \quad (3.3.31)$$

olarak buluruz.

4. BULGULAR

Bu bölümde Dirichlet ve Neumann sınır şartlarına uyan kütleli skalar alanın çift boyutlu küresel kabukta sahip olduğu modlar hesaplanacak. 4 boyuttan itibaren Klein Gordon denkleminin çözümleri, Ultra Küresel Harmonikler ve Bessel fonksiyonlarıyla tanımlanacak. Daha sonra elde edilen modların dağılımı kullanılarak, yine çift boyutlu küresel kabuklardaki kuantum boşluk enerjisi incelenecek.

4.1. 4 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİSİ

Kütleli skalar alanda bulunan D boyutlu küresel kabuğun dalga fonksiyonunu,

$$\Psi = \left[Ar^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)} J_{\left(k+\frac{D-2}{2}\right)}(\omega r) + Br^{-\left(\frac{D-2}{2}\right)} Y_{\left(k+\frac{D-2}{2}\right)}(\omega r) \right] Y_{\ell m}(\theta_{D-2}, \phi) \prod_{\mu=1}^{D-3} \sin^{N_{D-2-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{D-2-\mu} - N_{D-2-\mu}}^{\left(\frac{D-\mu-1}{2}\right)}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\alpha t}$$

olarak bulmuştuk Buna göre Dirichlet sınır koşulunda öz frekanslar $\Psi(r=a)=0$ vermeli.

Buna göre,

$$J_{\frac{D-2}{2}+k}(\omega a) = 0 \quad N_{D-2} = k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

$$H_{\frac{D-2}{2}+k}^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (4.1.2)$$

şeklinde gösterilir. Neumann sınır koşulunda öz frekanslar ise $\partial_r \Psi(r=a) = 0$ şartını sağlamalı,

$$\frac{d}{dr} \left[J_{\frac{D-2}{2}+k}(\omega r) \right]_{r=a} = 0 \quad (4.1.3)$$

$$\frac{d}{dr} \left[H_{\frac{D-2}{2}+k}^{(1)}(\omega r) \right]_{r=a} = 0 \quad (4.1.4)$$

olur. Dirichlet sınır koşulu altındaki modların genel dağılımı da,

$$\frac{f^{(D)}(iy, a)}{f^{(D)}(iy, a \rightarrow \infty)} = 2ayI_\nu(ay)K_\nu(ay) \quad \nu = k + \frac{D-2}{2} \quad (4.1.5)$$

olarak bulunur

Neumann sınır koşulu altındaki modların genel dağılımı ise,

$$\mu(y) = y^{D-1} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y^{D-2}} I_\nu(y) K_\nu(y) \right) \quad \nu = k + \frac{D-2}{2} \quad (4.1.6)$$

şeklinde gösterilir.

i) Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

Denklem (3.1.33)'ten görüldüğü üzere 4 boyutta küresel kordinatlardaki dalga fonksiyonumuz $r < a$ için,

$$\Psi = \left[Ar^{-1} J_{k+1}(\omega r) \right] Y_\ell^m(\theta_2, \phi) \sin^\ell \theta_1 C_{k-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_1)$$

$r > a$ için,

$$\Psi = \left[Ar^{-1} J_{k+1}(\omega r) + Br^{-1} Y_{N_2+1}(\omega r) \right] Y_\ell^m(\theta_2, \phi) \sin^\ell \theta_1 C_{k-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_1) \quad (4.1.7)$$

şeklinindedir. Dirichlet sınır koşullarında özfrekanslar $\Psi(r=a)=0$ şartına göre,

$$J_{k+1}(\omega a) = 0 \quad N_2 = k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.8)$$

$$H_{k+1}^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (4.1.9)$$

Bessel fonksiyonları ile gösterilir. (4.1.2) küre içindeki skalar alanın salınımlarının, (4.1.3) ise küre dışındaki salınımların frekansını gösterir.

4 boyutta aynı geometride kütleli skalar alanın boşluk enerjisini Ek-C Denklem (10)'dan faydalanarak,

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 S_k \quad (4.1.10)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} \quad k+1 = \nu \quad N_2=k=0, 1, 2, \dots \quad (4.1.11)$$

şeklinde gösteririz. (4.1.8) ve (4.1.9) denklemlerinin her biri S_k üretir. S_k kısmi toplamlarını hesaplayabilmek için Denklem (3.2.8)'de verilen Cauchy Teoreminin integral gösterimini kullanırız. Ardından sonlu bir değer elde etmek için ıraksak bir ifade olan boş uzayın yani Minkowski uzayının katkısını çıkartırız Daha sonra (4.1.8) ve (4.1.9) özfrekanslarını Cauchy teoreminden bulduğumuz eşitlikte yerine koyup, modların genel dağılımını buluruz.

$$S_k^{(\alpha)} - \bar{S}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln [2ay I_{\nu}(ay) K_{\nu}(ay)] \quad (4.1.12)$$

Bulduğumuz bu mod dağılımını, yeniden normalleştirilmiş enerji ifadesinde yerine koyduğumuzda ve $ay \rightarrow y$ dönüşümü uyguladığımızda,

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \nu^2 \int_0^{\infty} dy \ln [2y I_{\nu}(y) K_{\nu}(y)] \quad (4.1.13)$$

elde ederiz. (4.1.13) denklemindeki Bessel fonksiyonları y 'nin artan kuvvetleri şeklinde bir seri oluşturur ve y 'nin çok büyük değerleri için bu ifade çok yavaş yakınsaktır. Bessel fonksiyonlarını hızlı şekilde yakınsak yapmak için $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü altında Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerinin çarpımını kullanırız. Bu çarpımı 4 boyut için $\frac{1}{\nu^4}$ terimine kadar götürmeliyiz. Yani

$$I_{\nu}(\nu z) K_{\nu}(\nu z) = \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{\nu^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1U_3) \right] \quad (4.1.14)$$

olarak almalıyız. Denklem (3.2.30)'dan faydalanarak U_k terimlerini buluruz. Daha sonra Taylor seri açılımını kullanıp integralin içindeki kısmı hesaplarız. Son olarak da ortaya çıkan terimleri 0'dan ∞ 'a integre ederiz ve enerji değerimizi,

$$\theta_k = -\frac{\nu^3}{4} - \frac{\nu}{256} + \frac{35}{65536\nu} + O(\nu^{-2}) \quad \text{olmak üzere} \quad (4.1.15)$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\nu^3}{4} - \frac{\nu}{256} + \frac{35}{65536\nu} \right) \quad (4.1.16)$$

olarak buluruz. Görüldüğü gibi sonsuzluk N_2 'e yani k 'ya göre toplamdaki ilk 2 terimden gelir. (4.1.16) enerji denklemindeki iraksaklık veren ifadeleri Zeta fonksiyonu yardımı ile sonlu terimlerden ayırıp, dışarı atarız. Hurwitz Zeta fonksiyonu en genel halde

$$\zeta(s, a) = \sum_{p=0}^{\infty} (p+a)^{-s} \quad \text{Re } s > 1 \quad a \neq 0, -1, -2 \quad (4.1.17)$$

şeklinde tanımlanır. $\zeta(s, a)$ sadece $s=1$ noktasında tekillik içermektedir. Geri kalan kompleks s düzleminde analitik olarak süreklidir. Bernoulli polinomu cinsinden

$$\zeta(s, a) = -\frac{B_{s+1}(a)}{s+1} \quad s=0, 1, 2, \dots \quad (4.1.18)$$

ile gösterilir. $a=1$ olduğu zaman Hurwitz Zeta fonksiyonu, Riemann Zeta fonksiyonuna indirgenir. (4.1.16) denkleminde sonsuzluğa yol açan ilk iki terimi Riemann Zeta fonksiyonu cinsinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^3 = \zeta(-3, 1) = \zeta(-3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^1 = \zeta(-1, 1) = \zeta(-1) \quad (4.1.19)$$

olarak ifade ederiz. Enerji denkleminizde

$$\bar{\theta}_k = \theta_k + \frac{v^3}{4} + \frac{v}{256} = \frac{35}{65536v} \quad (4.1.20)$$

şeklinde sonsuzluktan arınmış kısmı ifade eden yeni bir değişken tanımlarız. O halde Dirichlet sınır koşulu altındaki enerji ifademiz,

$$E = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\theta}_k - \left(\frac{1}{4a} \zeta(-3) \right) - \left(\frac{1}{256a} \zeta(-1) \right) = \frac{35}{65536a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-1} = \frac{35}{65536a} \zeta(1) \quad (4.1.21)$$

şeklinindedir. (4.1.21) denkleminin ikinci ve üçüncü terimlerini Bernoulli polinomlarından yararlanarak buluruz. Fakat ilk terim, $\zeta(1)$ Riemann Zeta fonksiyonundan dolayı tekillik içermektedir. Çünkü $\zeta(1)$ terimi sonsuza gider. Yani Dirichlet sınır koşullarına uyan 4 boyutlu küresel kabuğun Casimir enerjisi sonlu değildir, tekillik içermektedir.

ii) Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

4 boyutta Neumann sınır koşulları altında öz frekanslar şartına göre,

$$\left. \frac{d}{dr} [J_{k+1}(\omega r)] \right|_{r=a} = 0 \quad (4.1.22)$$

$$\left. \frac{d}{dr} [Y_{k+1}(\omega r)] \right|_{r=a} = 0 \quad N_2 = k = 0, 1, 2.. \quad (4.1.23)$$

ile gösterilir. Enerji ifademiz ise,

$$E^{(N)} = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 S_k \quad \nu = k+1$$

ile verilir. (4.1.22) ve (4.1.23) denklemlerinin her biri $S_k^{(\alpha)}$ üretir. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisindeki toplamı hesaplamak için Cauchy teoreminin integral gösterimini kullanırız. Cauchy teoremi öz modlar üzerindeki toplamı bir integrale dönüştürerek hesaplamalarımızı kolaylaştırır. Neumann sınır koşulu için $E^{(N)}$ enerjisini gösteren ifadeyi hesaplamak zor olduğundan $E^{(D)} + E^{(N)}$ 'yi bulup, $E^{(D)}$ 'nin katkısını bu toplam enerjiden çıkarmalıyız. 4 boyut için Dirichlet ve Neumann sınırlarından gelen toplam mod dağılımı, (4.1.6) denkleminde de görüldüğü üzere,

$$\mu_k(y) = y^3 \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y^2} I_\nu(y) K_\nu(y) \right] \quad \begin{array}{l} \nu = k+1 \\ k = N_2 = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (4.1.24)$$

şeklinindedir. Modların bu dağılımını kullanarak toplam enerjiyi,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{2a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 \int_0^{\infty} dy \ln [1 - \mu_k(y)^2] \quad (4.1.25)$$

olarak buluruz. Modifiye Bessel fonksiyonlarının (3.2.24) ve (3.2.25) denklemleri ile verilen uniform asimtotik açılımını kullanarak y 'yi sabit tutup ν 'yü sonsuza götürelim ve $y \rightarrow \nu z$ şeklinde yeni bir değişken tanımlayalım. Hesaplamalar yapıldıktan sonra toplam enerji ifademiz için

$$P_k = \frac{\nu^2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln [1 - \mu_k(y)^2] \quad \text{olmak üzere,}$$

$$P_k = -\frac{19}{128} \nu - \frac{153}{32768\nu} + O(\nu^{-2}) \quad (4.1.26)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{19}{128} \nu - \frac{153}{32768\nu} \right) \quad (4.1.27)$$

değerini buluruz. (4.1.27) eşitliğinden görüldüğü üzere enerji ifademiz, k 'ya göre toplamdaki ilk terimden gelen ıraksaklıktan dolayı sonsuza gitmektedir. Bu sonsuzluğu sonlu hale getirmek için Hurwitz Zeta fonksiyonunu kullanalım. İlk olarak sonsuzluğa yol açan terimi enerji ifadesinde toplayıp çıkartalım. Yani sonlu ve sonsuz kısmı ayrıştıralım.

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \sum_{k=0}^{\infty} (P_k - P_{\infty} + P_{\infty}) \quad (4.1.28)$$

$$\bar{P}_k = P_k - P_{\infty} = P_k + \frac{19\nu}{128} = -\frac{153}{32768\nu} \quad (4.1.29)$$

Enerji ifadesinde yakınsaklık veren kısmı \bar{P}_k ile tanımlayıp, (4.1.28) denkleminde yerine koyalım. Sonsuzluk veren terimi ise Riemann Zeta fonksiyonu ile dışarı atalım. Riemann Zeta fonksiyonu,

$$\zeta(s) = \sum_{p=0}^{\infty} p^{-s} \quad \text{Re } s > 1 \quad (4.1.30)$$

ile verilir. O halde ıraksaklık veren kısmı Riemann Zeta fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n = \zeta(-n, 1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^1 = \zeta(-1, 1) = \zeta(-1) \quad (4.1.31)$$

olarak tanımlarız. (4.1.31) ve (4.1.29) denklemlerini (4.1.27)' de yerine koyduğumuzda toplam enerjii

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k - \frac{19}{128a} \zeta(-1) = -\frac{153}{32768a} \zeta(1) \quad (4.1.32)$$

olarak buluruz. $\zeta(s)$ fonksiyonu, $s=1$ noktası etrafındaki bölgede her noktada analitik; fakat $s=1$ noktasında analitik olmadığından $s=1$ noktası Riemann Zeta fonksiyonun tekil noktasıdır. Bu yüzden 4 boyut için toplam enerji sonlu değildir, tekillik içerir.

4.2 6 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİSİ

i) Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

6 boyutta küresel koordinatlardaki dalga fonksiyonumuzu (3.1.33) denkleminde göre $r < a$ için,

$$\Psi = \left[Ar^{-2} J_{k+2}(\omega r) \right] Y_\ell^m(\cos \theta_4, \phi) \sin^\ell \theta_3 C_{N_2-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_3) \sin^{N_2} \theta_2 C_{N_3-N_2}^{N_2+\frac{3}{2}}(\cos \theta_2) \sin^{N_3} \theta_1 C_{k-N_3}^{N_3+2}(\cos \theta_1) e^{-i\omega a}$$

$r > a$ için ise

$$\Psi = \left[Ar^{-2} J_{k+2}(\omega r) + Br^{-2} Y_{k+2}(\omega r) \right] Y_\ell^m(\cos \theta_4, \phi) \sin^\ell \theta_3 C_{N_2-\ell}^{\ell+1}(\cos \theta_3) \sin^{N_2} \theta_2 C_{N_3-N_2}^{N_2+\frac{3}{2}}(\cos \theta_2) \sin^{N_3} \theta_1 C_{k-N_3}^{N_3+2}(\cos \theta_1) e^{-i\omega a} \quad (4.2.1)$$

olarak yazarız. Dirichlet sınır koşullarında öz frekanslar $\Psi(r=a)=0$ şartına göre,

$$J_{k+2}(\omega a) = 0 \quad N_4 = k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

$$H_{k+2}^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (4.2.3)$$

ile gösterilir. (4.2.2) küresel kabuğun içindeki, (4.2.3) ise dışındaki alanın salınımlarını gösterir. 6 boyutta aynı geometride yeniden normalleştirilmemiş boşluk enerjisini EK-C denklem (12)'den faydalanarak,

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_3=0}^k \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{24} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^4 - \nu^2) S_k \quad (4.2.4)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} \quad \nu = k + 2 \quad k=N_4=0, 1, 2, \dots$$

şeklinde yazarız. (4.2.1) ve (4.2.2) öz frekansların her biri $S_k^{(\alpha)}$ üretir. Öz modlar üzerinden toplamı ifade eden $S_k^{(\alpha)}$ 'yi, Cauchy teoremini gösteren (3.2.8) denklemini kullanarak bir integral haline dönüştürebiliriz. Renormalize edilmiş boşluk enerjisini aradığımızdan hiçbir şeyin olmadığı boş uzayın katkısını çıkartırız. Son olarak integrale Dirichlet sınır koşulları altındaki özfrekanslarımızı yerleştirerek ve gerekli düzenlemeleri yaparak sırayla mod dağılımını ve enerjii,

$$S_k^{(\alpha)} - \bar{S}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln [2ay I_\nu(ay) K_\nu(ay)] \quad (4.2.5)$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{24a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^4 - \nu^2) \int_0^{\infty} dy \ln [2y I_\nu(y) K_\nu(y)] \quad (4.2.6)$$

buluruz. Yine $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü altında Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerlerinin çarpımını (4.2.6) denkleminde yerine koyup, çıkan terimleri Rezidü yöntemiyle sıfırdan sonsuza integre ettiğimizde,

$$\theta_k = \left(-\frac{\nu^5}{48} + \frac{21\nu^3}{1024} + \frac{97\nu}{262144} - \frac{1685}{25165824\nu} + O(\nu^{-2}) \right) \quad (4.2.7)$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{v^5}{48} + \frac{21v^3}{1024} + \frac{97v}{262144} - \frac{1685}{25165824v} \right) \quad (4.2.8)$$

buluruz. (4.2.8) denkleminde göre enerji ifademizdeki sonsuzluk k'ya yani N_4 'e göre toplamdaki ilk 3 terimden gelir. Bu enerjiyi sonsuz yapan kısmı (4.1.17) Hurwitz zeta fonksiyonu ile ayıkladığımızda geriye sonlu ifadeler kalır. İraksaklık veren terimlerin Hurwitz Zeta fonksiyonu cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir,

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+a)^n = \zeta(-n, a) \quad \zeta(-n, 2) = -\frac{B_{n+1}(2)}{n+1} \quad (4.2.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^5 = \zeta(-5, 2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^3 = \zeta(-3, 2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^1 = \zeta(-1, 2) \quad \zeta(1, 2) = \zeta(1) \quad (4.2.10)$$

İraksaklık veren terimleri enerji denkleminde toplayıp çıkartarak sonlu kısmı,

$$\bar{\theta}_k = \theta_k + \frac{v^5}{48} - \frac{21v^3}{1024} - \frac{97v}{262144} = \frac{-1685}{25165824v} \quad (4.2.11)$$

şeklinde ayırırız. O halde (4.2.8) enerji denkleminiz,

$$\begin{aligned} E^{(D)} &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\theta}_k - \left(\frac{1}{48a} \zeta(-5, 2) \right) + \left(\frac{21}{1024a} \zeta(-3, 2) \right) + \left(\frac{97}{262144a} \zeta(-1, 2) \right) \\ &= -\frac{1685}{25165824a} \zeta(1) + \frac{176609}{990904320a} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

olur. 6 boyut için enerji ifademiz, $\zeta(s)$ fonksiyonunun $s=1$ noktasındaki tekilliğinden dolayı sonlu değildir. Zeta fonksiyonu regularizasyon metotunu kullanarak Casimir enerjisi için sonlu bir değer elde edemedik.

ii) Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Enerjisi

6 boyutta Neumann sınır şartlarında öz frekanslar aşağıdaki gibidir,

$$\frac{d}{dr} [J_{k+2}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad k = N_4 = 0, 1, 2.. \quad (4.2.13)$$

$$\frac{d}{dr} \left[H_{k+2}^{(1)}(\omega r) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.2.14)$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_3}^k \sum_{N_2}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{24} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^4 - \nu^2) S_k$$

olduğunu EK-C'deki dejenerasyon sayısı bulma kısmından biliyoruz. (4.2.13) ve (4.2.14) denklemlerinin her biri $S_k^{(\alpha)}$ üretir. $S_k^{(\alpha)}$ kısmi toplamlarını hesaplayabilmek için yine (3.2.8) denklemi ile verilen Cauchy Teoreminin integral gösterimini kullanacağız. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjisi hesaplamak için boş uzayın katkısını çıkartacağız. Gerekli işlemlerin yapılmasıyla $E^{(N)}$ için bir ifade buluruz. Fakat bulduğumuz $E^{(N)}$ ifadesini kullanarak hesaplamaları yapmak zor olduğundan, $E^{(D)} + E^{(N)}$ 'yi bulup $E^{(D)}$ 'nin katkısını bu toplam enerjiden çıkarmalıyız. İlk olarak 6 boyutta küresel geometride Dirichlet ve Neumann sınır koşulu altındaki modların dağılımını buluruz. Ardından bulduğumuz modların dağılımını kullanarak toplam enerji için uygun ifadeyi elde ederiz.

$$\mu_k(y) = y^5 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{y^4} I_\nu(y) K_\nu(y) \right) \quad (4.2.15)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{24a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^4 - \nu^2) \int_0^{\infty} dy \ln [1 - \mu_k(y)^2] \quad (4.2.16)$$

$y \rightarrow \nu z$ olarak yeni bir değişken tanımlarız. Modifiye Bessel fonksiyonlarının (3.2.24) ve (3.2.25) denklemleri ile verilen uniform asimptotik açılımını kullanarak y 'yi sabit tutup ν 'yü sonsuza götürürüz. Uzun hesaplamalardan sonra (4.2.16) denklemindeki integralli kısmı,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{33}{512} \nu^3 - \frac{5115}{131072} \nu - \frac{5174719}{50331648\nu} \right) \quad (4.2.17)$$

olarak buluruz. (4.2.14) denkleminde görüldüğü gibi sonsuzluk k 'ya yani N_4 'e göre toplamdaki ilk 2 terimden gelir. Bu sonsuzluğu sonlu hale getirmek için sonsuz olan kısmı enerji denkleminde ayırırız ve bu kısmı Hurwitz Zeta fonksiyonları ile tanımlarız. Önce N_4 yeterince büyük seçildiğinde yakınsaklık veren kısmı ayrıştıralım ve bu kısmı \bar{P}_k ile gösterelim. \bar{P}_k, P_k 'nın renormalize edilmiş halidir.

$$\bar{P}_k = P_k + \frac{33\nu^3}{512} - \frac{5115\nu}{131072} = -\frac{5174719}{50331648\nu} \quad (4.2.18)$$

O halde enerji ifademiz,

$$P_k = \bar{P}_k - \frac{33\nu^3}{512} + \frac{5115\nu}{131072} \text{ olmak üzere}$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k - \frac{33}{512a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^3 + \frac{5115}{131072a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^1 = -\frac{5174719}{50331648a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)^{-1} \quad (4.2.19)$$

ile verilir. (4.2.19) enerji denklemindeki sonsuzluk veren toplamları Hurwitz Zeta fonksiyonu cinsinden,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k - \left(\frac{33}{512a}\right) \zeta(-3, 2) + \left(\frac{5115}{131072a}\right) \zeta(-1, 2) = -\frac{5174719}{50331648a} \zeta(1) + \frac{278377}{2621440a} \quad (4.2.20)$$

olarak yazarız. Toplam enerji yine $\zeta(1)$ fonksiyonundan dolayı tekillik içerir. Dolayısıyla çift boyut için yine sonlu bir çözüm elde edemedik.

4.3 8 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİSİ

i) Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

8 boyutta küresel kordinatlarda dalga fonksiyonumuzun $r < a$ için,

$$\Psi = \left[Ar^{-3} J_{k+3}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\cos \theta_6, \phi) \prod_{\mu=1}^5 \sin^{N_{6-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{6-\mu}-N_{5-\mu}}^{N_{6-\mu}+3-\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\omega t}$$

$r > a$ için ise

$$\Psi = \left[Ar^{-3} J_{k+3}(\omega r) + Br^{-3} Y_{k+3}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\cos \theta_6, \phi) \prod_{\mu=1}^5 \sin^{N_{6-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{6-\mu}-N_{5-\mu}}^{N_{6-\mu}+3-\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\omega t} \quad (4.3.1)$$

olduğunu bulmuştuk. O halde Dirichlet sınır koşullarında özfrekanslar $\Psi(r=a)=0$ şartına göre,

$$J_{k+3}(\omega a) = 0 \quad k=N_6=0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.3.2)$$

$$H_{k+3}^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (4.3.3)$$

ile verilir. 8 boyutta küresel kabukta normalleştirilmemiş boşluk enerjisi,

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_5=0}^k \sum_{N_4=0}^{N_5} \sum_{N_3=0}^{N_4} \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{720} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^6 - 5\nu^4 + 4\nu^2) S_k \quad (4.3.4)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} \quad k+3 = \nu \quad k=N_6=0, 1, 2, \dots$$

şeklindedir. (4.3.2) ve (4.3.3) özfrekans denklemlerinin her biri $S_k^{(\alpha)}$ üretir. $S_k^{(\alpha)}$ mod dağılımını hesaplayabilmek için diğer boyutlarda da yaptığımız gibi (3.2.8) ile verilen Cauchy Teoreminin integral gösterimini kullanacağız. Bu gösterimle öz modlar üzerindeki toplamı belirten (4.3.4) eşitliğini bir integral forma dönüştüreceğiz. Minkowski uzayının boşluk enerjisinin çıkarılmasıyla da yeniden normalleştirilen enerji için uygun bir ifade elde edeceğiz. 8 boyutlu Dirichlet küresinin modlarının dağılımını ve enerjisini sırayla,

$$S_k^{(\alpha)} - \overline{S}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln [2ay I_{\nu}(ay) K_{\nu}(ay)]$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{720a\pi} \sum_{N_6=0}^{\infty} (\nu^6 - 5\nu^4 + 4\nu^2) \int_0^{\infty} dy \ln [2y I_{\nu}(y) K_{\nu}(y)] \quad (4.3.5)$$

olarak buluruz. Büyük ν değerlerinde, $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü altında Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerlerini (4.3.5) denkleminde yerine koyup, ara işlemleri yaparak,

$$P_k = -\frac{\nu^7}{1440} + \frac{319\nu^5}{92160} - \frac{21407\nu^3}{7864320\nu} - \frac{38933\nu}{754974720} + \frac{16169407}{1546188226560\nu} + O(\nu^{-2})$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\nu^7}{1440} + \frac{319\nu^5}{92160} - \frac{21407\nu^3}{7864320\nu} - \frac{38933\nu}{754974720} + \frac{16169407}{1546188226560\nu} \right) \quad (4.3.6)$$

buluruz. Görüldüğü gibi sonsuzluk k 'ya yani N_6 'ya göre toplamdaki ilk 4 terimden gelir. Bu sonsuzluğu sonlu hale getirmek için bu terimleri enerji ifadesinde toplayıp çıkartırız ve sonlu kısmı ayırırız. Son olarak Hurwitz Zeta fonksiyonu ile sonsuzlukları regularize ederiz ve bunun için de EK-A kısmında verilen uygun özdeşlikleri kullanırız.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^n = \zeta(-n, 3) \quad \zeta(-n, 3) = -\frac{B_{n+1}(3)}{n+1} \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\bar{\theta}_k = \theta_k + \frac{\nu^7}{1440} - \frac{319\nu^5}{92160} + \frac{21407\nu^3}{7864320} + \frac{38933\nu}{754974720} = \frac{16169407}{1546188226560\nu} \quad (4.3.7)$$

$\bar{\theta}_k$, θ_k 'nin renormalize edilmiş halidir. İraksak terimleri Hurwitz zeta fonksiyonu aracılığı ile ayıklarsak,

$$\begin{aligned} E^{(D)} &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\theta}_k - \left(\frac{1}{1440a} \zeta(-7, 3) \right) + \left(\frac{319}{92160a} \zeta(-5, 3) \right) - \left(\frac{21407}{7864320a} \zeta(-3, 3) \right) - \left(\frac{38933}{754974720a} \zeta(-1, 3) \right) \\ &= \frac{16169407}{1546188226560a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^{-1} = \frac{16169407}{1546188226560a} \zeta(1) - \frac{22706143}{951268147200a} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

buluruz. 8 boyutlu küresel kabuk için de Casimir enerjisi $\zeta(1)$ faktöründen dolayı tekliklik içermektedir. Bildiğimiz renormalizasyon metotları ile bu tekliklikten kurtulamadık ve sonlu bir ifade elde edemedik.

ii) Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

8 boyutta küre yüzeyinde Neumann sınır şartlarına uyan öz frekanslar,

$$\frac{d}{dr} [J_{k+3}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad \nu = k+3 \quad (4.3.9)$$

$$\frac{d}{dr} [H_{k+3}^{(1)}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad N_6 = k = 0, 1, 2.. \quad (4.3.10)$$

ile verilir.

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_5=0}^k \sum_{N_4=0}^{N_5} \sum_{N_3=0}^{N_4} \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{720} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^6 - 5\nu^4 + 4\nu^2) S_k \quad (4.3.11)$$

(4.3.9) ve (4.3.10) denklemlerinin ürettiği $S_k^{(\alpha)}$ kısmi toplamlarını, (3.2.8) ile gösterilen Cauchy integral gösteriminden yararlanarak hesaplarız. Ardından Dirichlet ve Neumann sınır koşulundaki modların dağılımını 8 boyut için elde ederiz.

$$\mu_k(y) = y^7 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{y^6} I_\nu(y) K_\nu(y) \right) \quad (4.3.12)$$

Neumann ve Dirichlet sınır koşulu altındaki kütleless skalar alanın yukarıdaki mod dağılımını kullanarak toplam enerji için,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{720a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^6 - 5\nu^4 + 4\nu^2) \int_0^{\infty} dy \ln [1 - \mu_k(y)^2] \quad (4.3.13)$$

ifadesini buluruz. Bu özdeşlikte ν 'nin yeteri kadar büyük değerlerinde bazı terimleri kaçırmamak için $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü altında Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik açılımını kullanırız. Ancak 8 boyut için Bessel fonksiyonların çarpımındaki $\frac{1}{\nu^8}$ 'e kadar olan terimleri almalıyız. Yani

$$I_\nu(\nu z) K_\nu(\nu z) = \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{\nu^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1U_3) + \frac{1}{\nu^6} (2U_6 - U_3^2 + 2U_2U_4 - 2U_1U_5) \right. \\ \left. + \frac{1}{\nu^8} (2U_8 + U_4^2 - 2U_1U_7 + 2U_2U_6 - 2U_3U_5) \right] \quad (4.3.14)$$

olmalı. (4.3.14) denklemindeki U_k terimlerini (3.2.30) eşitliğinden elde ederiz. İlk adım olarak bulduğumuz bu çarpımın değerini (4.3.12) enerji denkleminde yerine koyarız. Ardından Taylor seri açılımını kullanarak \ln 'li ifadeden kurtuluruz. Son olarak da çıkan terimleri 0'dan ∞ 'a integre ederiz. Toplam enerjisi,

$$P_k = \frac{-113}{7680} \nu^5 + \frac{240767}{5898240} \nu^3 - \frac{6360851}{150994944} \nu - \frac{9521339657}{42949672960\nu} + O(\nu^{-2}) \quad (4.3.15)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-113}{7680} \nu^5 + \frac{240767}{5898240} \nu^3 - \frac{6360851}{150994944} \nu - \frac{9521339657}{42949672960\nu} \right) \quad (4.3.16)$$

olarak buluruz. (4.3.16) denkleminde görüldüğü üzere sonsuzluk büyük k değerlerinde

$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^5$, $\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^3$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^1$ terimlerinden gelir. Bu sonsuzluğu sonlu hale

getirmek için bu terimleri enerji ifadesinde toplayıp çıkartırız. Yani sonlu ve sonsuz kısmı ayırırız. Daha sonra Hurwitz Zeta fonksiyonu ile sonsuz kısmı regularize ederiz, Hurwitz Zeta fonksiyonuna göre,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)^n = \zeta(-n, 3) \quad \zeta(-n, 3) = -\frac{B_{n+1}(3)}{n+1} \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\bar{P}_k = P_k + \frac{113}{7680}v^5 - \frac{240767}{5898240}v^3 + \frac{6360851}{150994944}v - \frac{9521339657}{42949672960v} \quad (4.3.17)$$

olarak seçeriz. \bar{P}_k , P_k 'nin renormalize edilmiş kısmıdır. Burdan P_k 'yı çekip (4.3.16) denkleminde yerine koyarız.

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k - \left(\frac{113}{7680a} \zeta(-5, 3) \right) - \left(\frac{240767}{5898240a} \zeta(-3, 3) \right) + \left(\frac{6360851}{150994944a} \zeta(-1, 3) \right)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = -\frac{9521339657}{42949672960a} \zeta(1) \quad (4.3.18)$$

olarak buluruz. Yani 8 boyut için toplam enerji de $\zeta(1)$ fonksiyonundan dolayı tekillik içermektedir.

4.4 10 BOYUTLU KÜRESEL KABUK İÇİN SKALAR CASİMİR ETKİSİ

i) Dirichlet Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

10 boyutta küresel koordinatlarda dalga fonksiyonumuzu (3.1.33) denkleminden faydalanarak $r < a$ için

$$\Psi = \left[Ar^{-4} J_{k+4}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\cos \theta_8, \phi) \prod_{\mu=1}^7 \sin^{N_{8-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{9-\mu}-N_{8-\mu}}^{N_{8-\mu}+4-\frac{(\mu+1)}{2}}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\omega t}$$

$r > a$ için ise

$$\Psi = \left[Ar^{-4} J_{k+4}(\omega r) + Br^{-4} Y_{k+4}(\omega r) \right] Y_{\ell}^m(\cos \theta_8, \phi) \prod_{\mu=1}^7 \sin^{N_{8-\mu}} \theta_{\mu} C_{N_{9-\mu}-N_{8-\mu}}^{N_{8-\mu}+4-\frac{(\mu+1)}{2}}(\cos \theta_{\mu}) e^{-i\omega t} \quad (4.4.1)$$

olarak yazarız. Dirichlet sınır koşullarında özfrekanslar $\Psi(r=a)=0$ şartına göre,

$$J_{k+4}(\omega a) = 0 \quad k = N_8 = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.2)$$

$$H_{k+4}^{(1)}(\omega a) = 0 \quad (4.4.3)$$

ile verilir. 10 boyutta kütsüz skalar alanda normalleştirilmemiş boşluk enerjisinin,

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_7=0}^k \sum_{N_6=0}^{N_7} \sum_{N_5=0}^{N_6} \sum_{N_4=0}^{N_5} \sum_{N_3=0}^{N_4} \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{40320} \sum_{k=0}^{\infty} (v^8 - 14v^6 + 49v^4 - 36v^2) S_k$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} \quad k+4 = \nu \quad k=N_8=0,1,2,\dots \quad (4.4.4)$$

olduğunu EK-C Denklem (16)'dan biliyoruz. (4.4.2) ve (4.4.3) denklemlerinin her biri $S_k^{(\alpha)}$ üretir. $S_k^{(\alpha)}$ kısmi toplamlarını hesaplayabilmek için diğer boyutlarda da yaptığımız gibi Cauchy Teoreminin integral gösterimini kullanacağız. Ardından boş uzayın katkısını çıkartırız. Son olarak (4.4.2) ve (4.4.3) ile verilen öz frekansları Cauchy teoreminden elde edilen ifadede yerine koyarak, modların dağılımı için

$$S_k^{(\alpha)} - \bar{S}_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \ln [2ay I_{\nu}(ay) K_{\nu}(ay)] \quad (4.4.5)$$

denklemini buluruz. Buradan yeniden normalleştirilmiş enerji denklemine geçerse,

$$E = \frac{1}{40320a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (v^8 - 14v^6 + 49v^4 - 36v^2) \int_0^{\infty} dy \ln [2y I_{\nu}(y) K_{\nu}(y)] \quad (4.4.6)$$

elde ederiz. $y \rightarrow \nu z$ dönüşümü altında Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotik değerlerinin çarpımını (4.4.6) denkleminde yerine koyarız. Fakat 10 boyut için çarpım $\frac{1}{\nu^{10}}$ terimine kadar devam ettirilmeli.

$$I_{\nu}(\nu z) K_{\nu}(\nu z) = \frac{1}{2\nu(1+z^2)^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu^2} (2U_2 - U_1^2) + \frac{1}{\nu^4} (2U_4 + U_2^2 - 2U_1U_3) + \frac{1}{\nu^6} (2U_6 - U_3^2 + 2U_2U_4 - 2U_1U_5) \right. \\ \left. + \frac{1}{\nu^8} (2U_8 + U_4^2 - 2U_1U_7 + 2U_2U_6 - 2U_3U_5) + \frac{1}{\nu^{10}} (2U_{10} - U_5^2 - 2U_1U_9 + 2U_2U_8 - 2U_3U_7 + 2U_4U_6) \right] \quad (4.4.7)$$

Yapılan hesaplamalar sonucunda (4.4.6) denklemindeki toplamın içindeki terimin,

$$\theta_k \square = -\frac{\nu^9}{80640} + \frac{179\nu^7}{1032192} - \frac{38057\nu^5}{62914560} + \frac{3691343\nu^3}{8455716864} + \frac{733782463\nu}{86586540687360} - \frac{3378204983}{1847179534663680\nu} + O(\nu^{-2}) \quad (4.4.8)$$

olduğunu buluruz. Buradan enerjiye geçelim. (4.4.6) enerji denklemi,

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v^9}{80640} + \frac{179v^7}{1032192} - \frac{38057v^5}{62914560} + \frac{3691343v^3}{8455716864} + \frac{733782463v}{86586540687360} - \frac{3378204983}{1847179534663680v} \right) \quad (4.4.9)$$

şekline dönüşür. Görüldüğü gibi sonsuzluk N_8 'e yani k 'ya göre toplamdaki ilk 5 terimden gelir. Bu sonsuzluğu sonlu hale getirmek için sonsuzluğa yol açan kısımları ve sonlu kısımları ayırıştıralım. Sonlu terimleri $\bar{\theta}_k$ ile gösterelim. Geriye kalan ıraksak ifadelerin atılması için (4.1.17) ve (4.1.18) denklemleri ile verilen Hurwitz Zeta fonksiyonununun değerlerini kullanalım.

$$\bar{\theta}_k = \theta_k + \frac{v^9}{80640} - \frac{179v^7}{1032192} + \frac{38057v^5}{62914560} - \frac{3691343v^3}{8455716864} - \frac{733782463v}{86586540687360} = -\frac{3378204983}{1847179534663680v} \quad (4.4.10)$$

$$E^{(D)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\theta}_k - \left(\frac{1}{80640a} \zeta(-9,4) \right) + \left(\frac{179}{1032192a} \zeta(-7,4) \right) - \left(\frac{38057}{62914560a} \zeta(-5,4) \right) \\ + \left(\frac{3691343}{8455716864a} \zeta(-3,4) \right) + \left(\frac{733782463}{86586540687360a} \zeta(-1,4) \right)$$

$$E^{(D)} = -\frac{3378204983}{1847179534663680a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+4)^{-1} = -\frac{3378204983}{1847179534663680a} \zeta(1,4) = -\frac{3378204983}{1847179534663680a} \zeta(1) \\ - \frac{5143238231581}{11429423370731520a} \quad (4.4.11)$$

10 boyut için de Casimir enerjisi sonlu değildir. Çünkü $s=1$ noktasında Riemann Zeta fonksiyonu tekillik içermektedir.

ii) Neumann Sınır Koşullarına Uyan Kürede Skalar Casimir Etkisi

10 boyutta Neumann sınır şartlarında öz frekanslar,

$$\frac{d}{dr} [J_{k+4}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad N_8 = k = 0, 1, 2.. \quad (4.4.12)$$

$$\frac{d}{dr} [H_{k+4}^{(1)}(\omega r)] \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.4.13)$$

şeklinde verilir.

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \omega_p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_7=0}^k \sum_{N_6=0}^{N_7} \sum_{N_5=0}^{N_6} \sum_{N_4=0}^{N_5} \sum_{N_3=0}^{N_4} \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{\ell=0}^{N_2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{nk} = \frac{1}{40320} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu^8 - 14\nu^6 + 49\nu^4 - 36\nu^2) S_k$$

olarak bulmuştuk (4.4.12) ve (4.4.13) denklemlerinin ürettiği S_k kısmi toplamları, diğer boyutlarda da yapıldığı gibi (3.2.8) ile verilen Cauchy Teoreminin integral gösteriminden faydalanarak hesaplanır. Bu gösterimde ilk olarak Minkowski uzayının $a \rightarrow \infty$ limitine uyan katkısı çıkartılır. Ardından Dirichlet ve Neumann sınır koşullarına uyan özfrekanslar bu gösterimde yerine konularak modların dağılımı için,

$$\mu_k(y) = y^9 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{y^8} I_\nu(y) K_\nu(y) \right) \quad (4.4.14)$$

ifadesi bulunur. Bunu yeniden normalleştirilmiş enerjide yerine koyduğumuzda,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{40320} (\nu^8 - 14\nu^6 + 4\nu^4 - 36\nu^2) \int_0^{\infty} dy \ln [1 - \mu_k(y)^2] \quad (4.4.15)$$

buluruz. Bu denklemde $y \rightarrow \nu z$ olarak yeni bir değişken tanımlayalım. Modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılımının çarpımını kullanarak y 'yi sabit tutup ν 'yü sonsuza götürelim. Diğer boyutlarda yaptığımız hesapları burada da yaparsak toplam enerji için

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{323}{2580480} \nu^7 + \frac{568303}{660602880} \nu^5 - \frac{9296329}{12079595520} \nu^3 - \frac{51186664329}{481036337150} \nu - \frac{5157245093357}{43980465111040\nu} \right) \quad (4.4.16)$$

ifadesini buluruz. Görüldüğü gibi sonsuzluk k 'ya göre toplamdaki ilk 4 terimden gelir. Bu sonsuzluğu sonlu hale getirmek için yaptığımız tüm hesaplamalarda olduğu gibi bu

terimleri enerji ifadesinde toplayıp çıkartırız ve daha sonra Hurwitz Zeta fonksiyonu ile sonsuz olan kısımları regularize ederiz.

$$\bar{P}_k = P_k + \frac{323}{2580480} v^7 - \frac{568303}{660602880} v^5 + \frac{9296329}{12079595520} v^3 + \frac{51186664329}{481036337150} v - \frac{5157245093357}{43980465111040} v \quad (4.4.17)$$

\bar{P}_k , P_k 'nin renormalize edilmiş halidir. Dolayısıyla yakınsak bir ifadedir. Enerji denkleminizdeki ıraksaklıkları Hurwitz Zeta fonksiyonu ile tanımlayarak,

$$E^{(D)} + E^{(N)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k - \frac{323}{2580480} \zeta(-7, 4) + \frac{568303}{660602880} \zeta(-5, 4) - \frac{9296329}{12079595520} \zeta(-3, 4) + \frac{51186664329}{481036337150} \zeta(-1, 4) \quad (4.4.18)$$

$$E^{(D)} + E^{(N)} = -\frac{5157245093357}{43980465111040a} \zeta(1) \quad (4.4.19)$$

buluruz. Toplam enerji 10 boyutta da $\zeta(1)$ faktöründen dolayı tekillik içermektedir. Demek ki tüm çift boyutlar için Casimir enerjisi tekillik içermektedir. Zeta fonksiyonu renormalizasyon metodu ile bu tekilliklerden kurtulamadık.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuantum alan teorisinde enerji, yük, kütle ve kuvvet gibi büyüklüklerin ıraksak seriler olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Aslında biz bu büyüklükleri deneysel olarak incelediğimizde, asla sonsuz değerler bulmayız. Bu sonsuzluk ortaya atılan teorinin kusurlarından yani matematiksel olarak mükemmel şekilde ifade edilememesinden kaynaklanmaktadır [Bayın, 2004].

Casimir enerjisi hesabında ortaya çıkan ıraksak enerji büyüklükleri, regülarizasyon ve renormalizasyon adı verilen yöntemler ile sonlu hale getirilmeye çalışılıyor. Sonsuz olan kısmın ayrıştırılmasına regülarizasyon, sonsuzluklulukları fiziksel bir değişkenle atmaya da renormalizasyon denir. Casimir enerjisi hesabında değişik regülarizasyon ve renormalizasyon yöntemleri kullanılır. Casimir enerjisi boyut, alan ve topoloji gibi değerlere bağlı olarak değiştiği için farklı problemlerde farklı yöntemler kullanabiliriz. Bu da kullanılan yöntemlerin tutarlılığının karşılaştırılmasına olanak sağlar.

Bu çalışmada ilk olarak Casimir etki hakkında kısa bir tarihsel giriş yapıldı. Malzeme ve yöntem bölümünde, kütleless skalar alanda bulunan D boyutlu küresel kabuğun dalga fonksiyonu ve kuantum sayıları elde edildi. Yüksek boyutlarda Klein Gordon denkleminin çözümleri Ultra Küresel harmonikler ve Bessel fonksiyonlarıyla tanımlandı. Bu çözümlerden hareketle, modlar Klein Gordon denklemi çözümleri gereği, Bessel fonksiyonlarıyla belirlendi. Daha sonra 3 boyutlu sonsuz ince küresel kabuk geometrisinde Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altındaki skalar alanın modlarının dağılımı bulundu. 3 boyut için yaptığımız enerji hesabında ortaya çıkan sonsuzluklar, Kontür integrali yöntemiyle regularize edildi. Ardından Zeta fonksiyonunun analitik süreklilik esasına bağlı olarak renormalize edildi. Son olarak modların dağılımından faydalanarak kuantum sıfır nokta enerjisi hesaplandı.

Bulgular bölümünde de 3 boyut için yapılan hesaplamalardan elde edilen tecrübelerle çift boyutlu ($D=4,6,8,10$) küresel kabuğun kuantum boşluk enerjisi, özfrekansların kompleks düzlemdeki kontur integrali ve doğrudan mod toplama yöntemi ile incelendi. Çift boyutlu küresel kabuktaki Casimir enerji hesabında tekillikler ortaya çıktı. Bilinen regularizasyon ve renormalizasyon yöntemleri ile bu tekilliklerden kurtulamadık. Bu yöntemle elde edilen çift boyutlu küresel kabuğun Casimir enerjisi literatürdeki sonuçlarla uyumludur.

Paralel plaka ve silindir geometride Casimir enerjisinin işareti negatif olarak bulunmuştu. 3 boyutlu küresel geometride ise elektromanyetik Casimir enerjisi pozitifdir. Casimir enerjisi geometriye bağlı olduğundan, farklı her geometri için bu enerjinin çalışılması yeni bir problemdir. Casimir enerjinin boyuta bağlı sonuçlar ürettiğini de gördük. Fakat kütesiz skalar alanda bulunan tek boyutlu küresel kabukta Casimir enerjinin sonlu, çift boyutlu küresel kabukta da sonsuz çıkmasının sebebini bilmiyoruz. Ayrıca çift boyutta farklı renormalizasyon teknikleri kullanmakla, bu sonsuzluğun giderilip giderilmeyeceği de cevap bekleyen sorulardan biri.

KAYNAKLAR

ABROMOWITZ M., STEGUN I.A., 1964, Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standarts, Washington, D.C.20402, Tenth Printing.

ARFKEN, G., 1970, Mathematical Methods for Physicists, Akademic Press, Newyork, Sixth Printing.

BAYIN S., 2004, Fen ve Mühendislik Biliminde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları A.Ş., 2.Baskı.

BELL, W.W., 1968, Special Functions for Scientists and Engineers, London.

BORDAG, M., MOHIDEEN, U., MOSTEPANENKO, V.M., 2001, New Developments in the Casimir Effect, Phys. Rep. 353.1-205.

BOWERS, M.E., HAGEN, C.R., 1999, Phys. Rev. D59, 025007.

BOYER, T.H., 1970, Phys. Rev. 174, 1764.

CASIMIR, H.B.G., 1948, Proc. K. Mod. Acad. Wet., 51, 793.

DEMET ÖLMEZ, 2010, Silindir Geometride Casimir Etki, Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi.

EMÍLIO ELÍZALDE, Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions, Springer, Berlin.

FİLİZ KUZU, 2004, Küresel Kabuğun Kuantum Elektromagnetik Sıfır Nokta Enerjisi, Yüksek Lisans Tezi, Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi.

LAMOREAUX, S.K., 1997, Phys. Rev. Lett. 78, 5.

NESTERENKO, V.V., PIROZHENKO, L.G., 1997, Phys. Rev. D60, 9707253.

NESTERENKO, V.V., PIROZHENKO, L.G., 1998, Phys. Rev. D57, 1284.

NESTERENKO, V.V., PIROZHENKO, L.G., 1999, Phys. Rev. D60, 125007.

ÖZCAN, M., 2006, Class. Quantum Gravity 23, 5531.

ÖZCAN, M., 2005, Phys. Rev. A344 , 307-315

SPARNAAY, M.J., 1958, Physica 24, 751.

STRATTON, J.A., 1941, Electromagnetic Theory, Mc.Graw Hill Newyork.

TABOR, D., WİNTERTON, R.H.S., 1969, Proc. R. Soc. London, A312, 435.

EK-A

ZETA FONKSİYONU REGULARİZASYON METODU

Casimir enerji hesabında değişik regularizasyon ve renormalizasyon metotları kullanılır. Zeta fonksiyonu regularizasyon metodu da bunlardan biridir. Bu metot, mod toplama yöntemi ile ilişkilidir. Diğer regularizasyon tekniklerinden farklı olarak kesilim fonksiyonu içermez. Buna rağmen hesaplamalarda hangi sonsuzlukların atıldığını açıkça göstermemesi bakımından problem teşkil eder [M.Özcan, 2006].

Hesaplamalarımızda ortaya çıkan ıraksak ifadeleri ayrıştırıp dışarı atmak için Hurwitz Zeta fonksiyonu ve Riemann Zeta fonksiyonunu kullanacağız. Hurwitz Zeta fonksiyonu,

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad \text{Re } s > 1 \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \quad (1)$$

ile gösterilir. İntegral gösterimi ise,

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1} e^{-ta}}{1 - e^{-t}} \quad \text{Re } s > 1 \quad a > 0 \quad (2)$$

şeklinde verilir. $\zeta(s, a)$ sadece $s=1$ noktasında tekillik içermektedir. Geri kalan kompleks s düzleminde analitik olarak süreklidir. Hurwitz Zeta fonksiyonu Bernoulli polinomu ve Bernoulli sayıları cinsinden,

$$\zeta(-m, a) = -\frac{B_{m+1}(a)}{m+1} \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

özdeşlikleri ile ifade edilir. $B_{m+1}(a)$ fonksiyonu Bernoulli polinomu ve B_{2n} 'de Bernoulli sayısıdır.

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad |t| < 2\pi \quad (5)$$

Bernoulli polinomu (5) numaralı Euler Maclaurin toplama formülünde türetici fonksiyon olarak tanımlanır. Bernoulli polinomlarının ilk 7 tanesi aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x(x - \frac{1}{2})(x - 1) \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x^2 - x - \frac{1}{3}) \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}
\end{aligned} \tag{6}$$

$q=1$ olduğu zaman Hurwitz Zeta fonksiyonu, Riemann Zeta fonksiyonuna indirgenir.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^s} \tag{7}$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^s - 1}{e^t - 1} \tag{8}$$

(8) integral gösterimi $s=1$ noktası hariç kompleks s düzleminin her yerinde analitik olarak sürekli olduğunu gösterir. Zeta fonksiyonu $s=1$ noktasında tekillik içermektedir. Casimir enerjisinde ortaya çıkan ıraksak terimleri Riemann Zeta fonksiyonunun aşağıdaki formülleriyle ifade edeceğiz.

$$\zeta(-2n) = 0 \quad n=1,2,3,\dots \tag{9}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \tag{10}$$

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}| \quad n=1,2,3,\dots \tag{11}$$

EK-B**BESSEL FONKSİYONLARI**

n. mertebeden Bessel denklemi,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

şeklindedir. Bu diferansiyel denklemin çözümünü Frobenius yöntemini kullanarak buluruz. Bu denklemin tekil noktaları $x^2 = 0$ $x_{1,2} = 0$ 'dır. Frobenius yöntemi gereği,

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} \quad (a_0 \neq 0) \text{ çözüm olsun.} \quad (2)$$

$$y'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r) a_r x^{s+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1) a_r x^{s+r-2}$$

$y(x), y'(x), y''(x)$ 'i (1) denkleminde yerine yazıp düzenlersek,

$$(s-n)(s+n)a_0 x^s + (s+1-n)(s+1+n)a_1 x^{s+1} + \sum_{r=2}^{\infty} [(s+r-n)(s+r+n)a_r + a_{r-2}] x^{s+r} = 0$$

$$(s-n)(s+n)a_0 = 0 \quad a_0 \neq 0 \text{ için } s = \pm n$$

$$(s+1-n)(s+1+n)a_1 = 0 \text{ denkleminde } s = \pm n \text{ için } a_1 = 0$$

Katsayılar arasındaki tekrarlama bağıntısı ise,

$$a_r = -\frac{a_{r-2}}{(s+r-n)(s+r+n)} \text{ bulunur. } (r \geq 2) \quad (3)$$

$s = n$ için r 'nin çift sayı değerlerini yukarıda yerine koyup gerekli düzeltmeleri yaptığımızda,

$a_{2r} = (-1)^r \frac{n!}{2^{2r} r!(r+n)!} a_0$ buluruz. Sonuçta $r = n$ için

$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{2^{2r} r!(r+n)!} x^{2r+n}$ buluruz. $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ seçip yukarıda yerine koyalım,

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(r+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \quad (4)$$

$J_n(x)$ n. mertebeden Birinci tür Bessel fonksiyonudur. Bu zamana kadar yaptıklarımız (1) denkleminin $s=n$ kökü için idi. $s=-n$ kökü için Bessel fonksiyonunu (4) denkleminde n yerine $-n$ yazıp bulabiliriz.

n tamsayı ise bunların arasındaki ilişki

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ şeklindedir.

$N_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$ $N_n(x)$ de ikinci tür Bessel fonksiyonudur ve bizim

genel çözümümüz,

$$y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x) \text{ 'dir} \quad (5)$$

[Abromowitz ve Stegun,1964]. Üçüncü tür Bessel fonksiyonu olan Hankel fonksiyonları ise,

$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x)$
 $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x)$ şeklindedir.

x 'in kompleks değerleri için

$$I_n(x) = i^n J_n(ix) \quad (6)$$

$$K_n(x) = i^{n+1} \frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(x)$$

Modifiye Bessel fonksiyonları için

$y(x) = AI_n(x) + BK_n(x)$ şeklindedir. Küresel kordinatlarda kullanacağımız

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2\alpha)x \frac{dy}{dx} + [\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} + (\alpha^2 - n^2 \gamma^2)] y = 0 \quad (7)$$

şeklindeki Bessel diferansiyel denklemin çözümü için ilk olarak $y = x^a z$ şeklinde

değişken dönüşümü yaparız.

$$\frac{dy}{dx} = x^\alpha \frac{dz}{dx} + \alpha x^{\alpha-1} z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^\alpha \frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha x^{\alpha-1} \frac{dz}{dx} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} z$$

Bu eşitlikleri (7) denkleminde yerine koyduktan sonra

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} + [\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma} - n^2 \gamma^2] z = 0 \quad (8)$$

denkleminde indirgeriz. Tekrar $t = x^\gamma$ dönüşümü yapıp bulduğumuz eşitlikleri (8) denkleminde yerine koyup γ^2 ihmal edersek (7) Bessel diferansiyel denklemi aşağıdaki hali alır,

$$z = AJ_n(\beta t) + BY_n(\beta t) \quad \text{orjinal değişkenlere dönersek de } y = x^\alpha z \quad t = x^\gamma$$

$$y = Ax^\alpha J_n(\beta x^\alpha) + Bx^\alpha N_n(\beta x^\alpha) \quad (9)$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \{k^2 x^2 - \ell(\ell+1)\} y = 0 \quad (10)$$

(10) denklemi Küresel Bessel diferansiyel denklemdir. (7) denkleminde göre,

$$1 - 2\alpha = 2, \quad \gamma = 1, \quad \beta^2 \gamma^2 = k^2, \quad \alpha^2 - n^2 \gamma^2 = -\ell(\ell+1)$$

$$y = Ax^{\frac{-1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) + Bx^{\frac{-1}{2}} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(kx) \quad (11)$$

$$= A_1 j_\ell(kx) + A_2 y_\ell(kx)$$

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) \quad (12)$$

$$y_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\ell+\frac{1}{2}}(x)$$

Burada $A_1 = \sqrt{\left(\frac{2k}{\pi}\right)} A$, $A_2 = \sqrt{\left(\frac{2k}{\pi}\right)} B$ dir.

Küresel Bessel fonksiyonlarının Hankel fonksiyonları cinsinden ifadesi ise,

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + iy_\ell(x)$$

$$h_\ell^{(2)}(x) = j_\ell(x) - iy_\ell(x) \quad (13)$$

EK-C

D BOYUT İÇİN DEJENERASYON SAYISI

$$\sum_{m=1}^n f(m) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(n) + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(1)] + \dots \quad (1)$$

Euler Maclaurin formülü yardımıyla $f(m)$ fonksiyonumuzu değiştirerek toplamın nasıl değişeceğini gösterelim ve ardından bu işlemi kendi fonsiyonlarımıza uygulayalım.

$$\sum_{m=1}^n m = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

$$\sum_{m=1}^n m^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^n m^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \quad (5)$$

şeklinde gider.

4 boyut için,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{m=-l}^l &= \sum_{l=0}^{N_2} (2l+1) \quad N_2 = k \text{ ve } (k+1) = \nu \text{ olmak üzere,} \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (2(l-1)+1) = 2 \sum_{l=1}^{k+1} l - \sum_{l=1}^{k+1} 1 = 2 \frac{(k+1)(k+2)}{2} - (k+1) \\ g_4 &= (k+1)^2 = \nu^2 \end{aligned} \quad (6)$$

5 boyut için,

$$\sum_{l=0}^{N_3} \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{m=-l}^l = \sum_{N_2=0}^{N_3} \sum_{l=0}^{N_2} (2l+1) \quad N_3 = k \text{ ve } (k + \frac{3}{2}) = \nu \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{N_2=0}^k \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{m=-l}^l &= \sum_{N_2}^k \sum_{l=0}^{N_2} (2l+1) = \sum_{N_2=0}^k (N_2+1)^2 \\
&= \sum_{N_2=1}^{k+1} (N_2)^2 \\
g_5 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{1}{3} \left(v^3 - \frac{v}{4} \right) \tag{7}
\end{aligned}$$

D boyutta bu işlemleri bu şekilde yapmak çok zordur. Bu yüzden D boyut için genelleştirdiğimiz formül olan (9) denklemini kullanmak işimizi kolaylaştırır.

$$g_D = 2 \left[k + \frac{D-2}{2} \right] \frac{(k+D-3)!}{(D-2)!k!} \tag{9}$$

$$g_4 = 2(k+1) \frac{(k+1)!}{2!k!} = v^2 \quad (k+1) = v \tag{10}$$

$$g_5 = 2 \left(k + \frac{3}{2} \right) \frac{(k+2)!}{3!k!} = \frac{1}{3} v \left(v + \frac{1}{2} \right) \left(v - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(v^3 - \frac{v}{4} \right) \quad \left(k + \frac{3}{2} \right) = v \tag{11}$$

$$g_6 = 2(k+2) \frac{(k+3)!}{4!k!} = \frac{1}{12} v^2 (v^2 - 1) = \frac{1}{12} (v^4 - v^2) \quad (k+2) = v \tag{12}$$

$$g_7 = 2 \left(k + \frac{5}{2} \right) \frac{(k+4)!}{5!k!} = \frac{1}{60} \left(v^5 - \frac{5}{2} v^3 + \frac{9}{10} v \right) \quad \left(k + \frac{5}{2} \right) = v \tag{13}$$

$$g_8 = 2(k+3) \frac{(k+5)!}{6!k!} = \frac{1}{360} (v^6 - 5v^4 + 4v^2) \quad (k+3) = v \tag{14}$$

$$g_9 = 2 \left(k + \frac{7}{2} \right) \frac{(k+6)!}{7!k!} = \frac{1}{2520} \left(v^7 - \frac{35}{4} v^5 + \frac{259}{16} v^3 - \frac{225}{64} v \right) \quad \left(k + \frac{7}{2} \right) = v \tag{15}$$

$$g_{10} = 2(k+4) \frac{(k+7)!}{8!k!} = \frac{1}{20160} (v^8 - 14v^6 + 49v^4 - 36v^2) \quad (k+4) = v \tag{16}$$

$$g_{11} = 2\left(k + \frac{9}{2}\right) \frac{(k+8)!}{9!k!} = \frac{1}{181440} \left(\nu^9 - 21\nu^7 + \frac{1974}{16}\nu^5 - \frac{3229}{16}\nu^3 + \frac{11025}{256}\nu \right) \quad \left(k + \frac{9}{2}\right) = \nu \quad (17)$$

$$g_{12} = 2(k+5) \frac{(k+9)!}{10!k!} = \frac{1}{1814400} \left(\nu^{10} - 30\nu^8 + 273\nu^6 - 820\nu^4 + 576\nu^2 \right) \quad (k+5) = \nu \quad (18)$$

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İstanbul'da doğdum. İlköğretim hayatımı başarıyla tamamladıktan sonra Çemberlitaş Kız Lisesi (YDA)'den 2005 yılında mezun oldum. Aynı yıl içerisinde Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü kazandım. Fakülteyi birincilikle bitirdikten sonra, 2009 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Anabilimdalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programında yüksek lisans eğitimime başladım. Aynı dönemde Tübitak Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Yurt içi Yüksek Lisans programından burs kazandım. Yüksek lisans eğitimimi de 2011 yılında tamamlamış oldum. 2011 Ekim ayında İstanbul Üniversitesi Fizik Anabilimdalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programında Araştırma Görevlisi olarak akademik hayatıma başlangıç yaptım. Bundan sonra ki hedefim doktora eğitimimi tamamlayıp, yolumda emin adımlarla ilerlemektir.