



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ZAR-EVREN MODELLERİNDE ZARA-DAYALI VE
BULKA-DAYALI ÇÖZÜMLERİN EŞDEĞERLİLİĞİNİN
ARAŞTIRILMASI**

Gülçin ULUYAZI
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı

Danışman
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ZAR-EVREN MODELLERİNDE ZARA-DAYALI VE
BULKA-DAYALI ÇÖZÜMLERİN EŞDEĞERLİLİĞİNİN
ARAŞTIRILMASI**

Gülçin ULUYAZI

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

Danışman

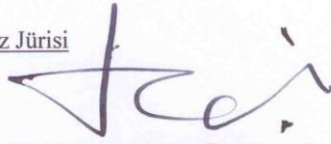
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ

Mart, 2011

İSTANBUL

Bu çalışma 28.03.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

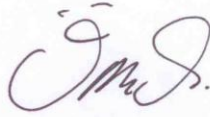
Tez Jürisi



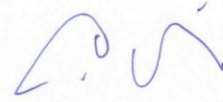
Prof. Dr. Haşim Mutuş (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



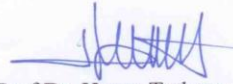
Prof. Dr. Şehsuvar Zebitay
İstanbul Kültür Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Ömer Oğuz
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Gediz Akdeniz
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Hasan Tatlıpınar
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu alışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 4290 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.Haşim Mutuş'a, anabilim dalımızdaki diğer hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma, yoğun çalışma dönemimde desteklerini esirgemeyen eşime ve aileme en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma ve çalışmamın destekleyen İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürü borç bilirim.

Mart, 2011

Gülçin ULUYAZI

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	5
2.1. KALUZA KLEIN TEORİSİ	7
2.2. ADD ZAR-EVREN MODELİ	10
2.3. RUNDALL-SUNDRUM ZAR-EVRENLERİ	12
2.3.1. Rundall-Sundrum I (RS 1)	12
2.3.2. Rundall-Sundrum II (RS 2)	15
2.4. ZAR-EVREN MODELLERİNDE GRAVİTASYON VE KOZMOLOJİ ..	16
3. MALZEME VE YÖNTEM	19
3.1. BEŞ-BOYUTLU UZAY-ZAMANDA ALAN DENKLEMLERİ VE GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLER.....	19
3.2. BULKTA VE ZAR ÜZERİNDE KOORDİNAT TABANLARI.....	23
3.3. DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ.....	29
3.4. GAUSSAL NORMAL KOORDİNATLAR	30
3.5. ZARA-DAYALI VE BULKA-DAYALI YAKLAŞIM	31

3.8. ZARA-DAYALI VE BULKA-DAYALI YAKLAŞIM İÇİN ASİMPOTİK ANALİZ	37
3.8. KULLANILAN PROGRAMLAR	39
4. BULGULAR	41
4.1. BULKA-DAYALI YAKLAŞIMDAN ZARA-DAYALI YAKLAŞIMA DÖNÜŞÜM	41
4.2. YÖNTEMİN BAZI ÖZEL MODELLER İÇİN UYGULAMALARI	50
4.2.1. Anizotropik Model	51
4.2.2. İzotropik Model	59
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	63
KAYNAKLAR	66
EKLER	71
EK.A. SCHWARZCHILD-ANTI-DE SITTER METRİĞİNİN HESABI.....	71
EK.B. ZAR ÜZERİNDE FRIEDMANN DENKLEMİ.....	74
EK.C. KİLLİNG VEKTÖRLERİ	79
EK.D. MAPLE 14 PROGRAM KODLARI	82
ÖZGEÇMİŞ	84

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	: Ekstra boyutların üç farklı model için gösterimi.....	10
Şekil 2.2	: RS 1 Modeli'nde eğrilik faktörünün davranışı.....	14
Şekil 3.1	: M bulk uzay-zamanı içine yatırılmış Σ hiperyüzeyi ile gösterilen zar...24	
Şekil 4.1	: Anti-deSitter uzayının iki boyutlu konformal diyagramı.....	59

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1	:Farklı metrik örnekleri için Killing Vektörleri.....	42
------------------	---	-----------

SEMBOL LİSTESİ

M_{pl}	: Planck kütlesi
w_c	: ekstra koordinatın kritik değeri
a_0	: ölçek çarpanının günümüzdeki değeri
$k^{(5)}$: 5-boyutlu Einstein Sabiti
Λ	: kozmolojik sabit
Λ_b	: zarın kozmolojik sabiti
Λ_5	: bulkın kozmolojik sabiti
ρ	: uzayın enerji yoğunluğu
p	: uzayın momentum (basınç) yoğunluğu
S_{EH}	: Einstein-Hilbert aksiyonu
S_{EM}	: elektromagnetik alanın aksiyonu
$F^{\mu\nu}$: elektromagnetik alan tansörü
\square	: D'alambert operatörü
Z_2	: ayna simetrisi, antisimetri
AdS_5	: 5-boyutlu Anti-de Sitter uzayı
$g_{\mu\nu}$: 4-boyutlu uzay-zamanın metriği
g_{AB}	: 5-boyutlu uzay-zamanın metriği
$\eta_{\mu\nu}$: 4-boyutlu Minkowski metriği
σ	: zarın gerilimi
$T_{\mu\nu}$: enerji-momentum tansörü
H	: Hubble parametresi
${}^{(5)}R_{ABCD}$: 5-boyutlu Riemann tansörü
${}^{(5)}C_{ABCD}$: 5-boyutlu Weyl tansörü
${}^{(5)}G_{AB}$: 5-boyutlu Einstein tansörü
${}^{(5)}T_{AB}$: 5-boyutlu enerji-momentum tansörü
${}^{(5)}R_{AB}$: 5-boyutlu Ricci tansörü
${}^{(5)}R$: 5-boyutlu Ricci skaleri
K_{AB}	: zarın dış eğriliği
G_5	: 5-boyutlu Newton sabiti
κ_5	: 5-boyutlu gravitasyonel kuplaj sabiti
e^A_μ	: dönüşüm katsayıları
n^A	: hiperyüzeye normal vektör
u^A	: hiperyüzeye tanjant vektör
h_{ab}	: indüklenmiş metrik

ÖZET

ZAR-EVREN MODELLERİNDE ZARA-DAYALI VE BULKA-DAYALI ÇÖZÜMLERİN EŞDEĞERLİLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Kozmolojide zar-evren modellerinin ele alınmasında iki yaklaşım mevcuttur: zara-dayalı veya bulka-dayalı yaklaşım. Zara-dayalı yaklaşımda, zar, bir koordinat sistemi üzerinde sabit seçilirken, bulka-dayalı yaklaşımda ekstra boyut doğrultusunda hareket ettiği için artık statik değildir.

Tezde öncelikle zar-evren modellerinin matematiksel altyapısı sunulmuş, ardından bulka-dayalı yaklaşımdan zara-dayalı yaklaşıma geçişi gösteren formalizm mümkün en genel anizotropik hal için inşa edilmiştir. Elde edilen ifadelerin, literatürde bu iki yaklaşımın eşdeğerliğinin Scw-AdS uzayı için gösterildiği [33] durumu kapsadığı gösterilmiştir. Hesapların sonucunda, en genel anizotropik bulka-dayalı metriğin eşdeğerinin, anizotropik Gaussal Normal Koordinatlar formunda olduğu bulunmuştur.

Dönüşümün etkilerini göstermek amacıyla, çözümlerini kendimiz bulduğumuz bir anizotropik model, bir de literatürden seçilmiş izotropik model ele alınarak bulka-dayalı yaklaşımdan hareketle, bu modellerin zara-dayalı eşdeğerleri bulunmuştur. Son olarak, her iki yaklaşımda verilen uzay-zamanın özellikleri, literatürdeki diğer modellerle karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

SUMMARY

INVESTIGATIONS OF THE EQUIVALENCE OF THE BRANE-BASED AND THE BULK-BASED SOLUTIONS IN BRANE-WORLD MODELS

There are two different approaches to handle brane-world models: brane-based or bulk-based. In the brane-based approach, the brane is chosen to be fixed on a coordinate system, whereas in the bulk-based approach it is no longer static as it moves along the extra dimension.

We first present mathematical background of brane-world models and then construct the formulas for the most generalized representation of static anisotropic model providing the transformation of the bulk-based approach to the brane-based one. It was shown that our results cover the solutions in [33] which explores the equivalence metric of Scw-AdS space-time. At the end of driven calculations, we find that the equivalence of the most general anisotropic bulk-based metric is an anisotropic metric in the form of Gaussian Normal Coordinates.

To illustrate the implications of transformation, we investigate corresponding versions in brane-based approach of two different bulk-based models which one of them is isotropic and chosen from literature while the other is anisotropic and found solutions by us. At the end of study, we give a detailed explanation for both of two approaches by comparing other models in literature.

1. GİRİŞ

Son yıllarda daha yüksek boyutlu bulk içine yatırılmış 3-boyutlu zar üzerinde yaşıyor olmamız olasılığına karşı büyük bir ilgi bulunmaktadır. Horawa ve Witten [1,2], güçlü bağlanmış limitte (strongly coupled limit) $E_8 \times E_8$ heterotik sicim teorisine, $R^{10} \times S^1 / Z_2$ orbifoldu üzerinde bir 11-boyutlu teori olarak bakılabileceğini göstermiştir. Süper Yang Mills alanları uzay-zamanın sınırını oluşturan 10-boyutlu iki tane zar üzerinde hapsolmuş iken bu orbifoldda gravitonlar bulk içine yayılabilmektedir. Kısa zaman önce, sınırlandırılmış n boyutun, büyük olabileceği varsayımından hareketle hiyerarşi problemine önemli bir çözüm önerildi [3,4,5]. $V(n)$ sınırlandırılmış (compactified) uzayın hacmi olmak üzere, efektif 4-boyutlu Planck kütlesi M_{pl} ile 5-boyutlu Planck kütlesi M arasında $M_{pl}^2 = M^{2+n} V(n)$ bağıntısı uyarınca ilişkili olduğu gösterildi. Böylece ekstra boyutun yeteri kadar büyük olması halinde, $M_{pl} \sim 10^{19}$ GeV ile birlikte küçük bir M değerine (TeV mertebesinde bile) sahip olmamız mümkündür. Dolayısıyla, hiyerarşi problemi 5-boyutlu Planck kütlesini indirgeyerek çözülebilir. Standart model alanlarının 3-zar üzerine hapsolmuş ve gravitasyonun ekstra boyuta yayılabiliyor olması halinde, gözlemlerle çakışma olmaması için $M \sim 1\text{TeV}$ değerine karşı düşen n değeri, $n > 2$ olacak şekilde bulunur. $n=2$ için astrofiziksel sınırlamalar $M \sim 100\text{TeV}$ ve daha büyük olmasını gerektirir [6,7] ve ekstra boyutun büyüklüğü ise 5×10^{-5} mm ile sınırlanır.

Diğer iki ilgi çekici olasılık, Randall ve Sundrum [8,9] tarafından ortaya atıldı. İlk modellerinde beşinci boyutun w ile temsil edildiği, $-w_c \leq w \leq w_c$ aralığında ve orbifold simetrisine sahip olan ($w \sim -w_c$) S^1 üzerinde sınırlandırılmış 5-boyutlu bir uzay-zaman düşündüler. $w=0$ daki zar pozitif gerilimli bir “domain wall” ve $w=w_c$ deki zar da negatif gerilimli bir “domain wall”dır. Negatif gerilimli zar üzerinde kütle ölçekleri ciddi olarak zaptedilebilir ve bu hiyerarşi probleminin çözülmesine imkan verir. Elbette bu kabul, bizim negatif gerilimli zar üzerinde yaşadığımızı varsayar. Negatif gerilimli zar üzerindeki efektif alan denklemlerinin negatif bir gravitasyon sabiti içerdiği

Shiromizu, Maeda ve Sasaki [10] tarafından gösterilmiştir ve bu gravitasyonun çekici özelliğinden başka itici özelliğinin de olabileceği anlamına gelmektedir. Ayrıca, pozitif gerilimli zar üzerinde, zayıf enerji limitinde, doğru Einstein alan denklemlerini de içerdiğini gösterdiler. Ardından da, ekstra boyutun bir radyon alanı tarafından sabitleştirilmesi halinde negatif gerilimli zar probleminin ortadan kalkabileceği gösterildi [11]. Rundall ve Sundrum'un ikinci modelinde, pozitif gerilimli zar üzerinde yaşadığımız ve negatif gerilimli zarın sonsuza itildiği varsayılmaktadır. Dolayısıyla bu senaryoda, ekstra boyut sonsuza genişletilmiştir. Yine standart model parçacıkları, zar üzerinde bulunmaktadır ve gravitasyon bulk içine yayılabilmektedir. Gravitona karşı düşen zara hapsolmuş tekil bir gravitasyonel bağlı durum vardır ve ayrıca ekstra boyut sonsuz olsa bile, zar üzerindeki efektif gravitasyonel etkileşim, küçük düzeltmelerden sonra bildiğimiz 4-boyutlu uzay-zamandaki gibi olmaktadır.

Bu güne kadar, daha yüksek boyutlu uzay-zamanın içine yatırılmış zar-evren modellerinin kozmolojisine dair birçok yaklaşım incelenmiştir. Binetruy, Deffayet ve Langlois [12], düz uzaysal kısımlara sahip bir zar üzerinde ölçek çarpanı a_0 'ın, $k_{(5)}$; 5-boyutlu Einstein sabiti olmak üzere

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} + \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} = -\frac{k_{(5)}^4}{36} \rho(\rho + 3p) \quad (1.1)$$

denklemini sağladığını gösterdiler. Denklemden bulkin enerji momentum tansörü T_{55} ile orantılı olan terim, bulkin boş olması yüzünden düşmüştür. (1.1) denklemi, kaynak terimin lineer olmaması dışında standart dört boyutlu kozmolojideki denklemin benzeridir. Bu nonlinear terim standart evrimden farklı bir kozmolojik evrime sebep olur. Csaki, Graesser, Kolda ve Terning [12], zarın Λ_b kozmolojik sabitine sahip olması durumunda, geç zamanlarda standart evrimin elde edilebileceğini gösterdiler. Burada zarın kozmolojik sabiti Λ_b 'nin bulk kozmolojik sabitinden farklı olduğuna dikkat edilmelidir, zira zar üzerine hapsolmüştür. Eğer $\Lambda_b \gg \rho$ ise, (1.1) numaralı denklemin sağ tarafındaki p bilinen kaynak terimini ve ilave nonlinear düzeltmeleri verir ki, bu terimler geç zamanlarda ihmal edilebilecek kadar küçük değerlere sahiptir.

Özel olarak 5-boyutlu ve üç-zar içeren kozmolojik modellere literatürde sıkça rastlanmaktadır [13,14,15,16,17,18].

Bu güne kadar yapılan çalışmalarda, zar-evren modelleri iki yaklaşımla ele alınmıştır. Bu yaklaşımlardan birincisi [12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] zarın 5-boyutlu uzay-zamanda, ekstra boyut üzerinde sabit bir noktada bulunduğu “zara-dayalı” yaklaşımdır. Bu yöntemde, zarın kozmolojik evrimi, metrik bileşenlerinin zamanla evriminin belirlenmesiyle bulunur.

Diğer bir yöntem olan “bulka-dayalı” yaklaşımda, 5-boyutlu statik bir uzay-zaman içerisinde zar hareket etmektedir. Zarın kozmolojik evrimi, bulktaki hareketiyle belirlenir. Zar üzerindeki gözlemci, zarın statik bulk içindeki hareketini kozmolojik genişleme ya da büzülme olarak gözlemleyecektir. Bu yaklaşımın kullanıldığı çalışmalardan bazıları [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32] referanslarında verilmiştir.

Bu iki yaklaşımın aslında eşdeğer olduğu [33,34] çalışmalarında gösterilmiştir. Bu tezdeki çalışmalara ilham kaynağı olan referansta (Mukohyama et al.), bulka-dayalı yaklaşımdan zara-dayalı yaklaşıma geçiş gösterilmiştir. Diğer bir deyişle, Sch-Ads metriğine sahip statik bir bulk uzay-zamanında ele alınmış koordinat sisteminden, zarın ekstra boyut üzerinde bulunduğu noktanın orijin kabul edildiği bir diğer koordinat sistemine (Gaussal Normal koordinatlar) geçilebilir. Dolayısıyla iş, bu iki koordinat sistemi arasındaki dönüşümü belirlemekten ibarettir.

Bizim tezdeki amacımız, bu koordinat dönüşümünü genelleştirip, başlangıçtaki bulka-dayalı statik metrik ne olursa olsun buna karşı düşen zara-dayalı metriği inşa etmektir. Böylece referans makalede yapılmış olan Sch-AdS metriği de dahil olmak üzere, göz önüne alınan tüm metrikler için genel bir formülasyon oluşturmuş olacağız. Bu genelleştirme sayesinde ele alınan her bir özel durum, denklemlerde yerine yazılarak özelleştirilebilir. Tezde bu formülasyonu oluşturmakla birlikte ayrıca seçilmiş farklı birkaç özel metrik için dönüşüm uygulanıp eşdeğerliliği araştırılmıştır. Seçilen metrikler, evrenin daha gerçekçi bir betimlemesini yapan anizotropik (eşyönsüz) modellerdir.

Tezin içeriği aşağıdaki gibi planlanmıştır. Genel Kısımlar bölümünde, zar-evren modellerinin ortaya çıkışını tetikleyen tarihsel öneme sahip çalışmalar vurgulanarak Sicim Teorisi'ndeki zarlardan, bir kozmolojik model olarak zar-evrenlere geçiş anlatılmıştır. Malzeme ve Yöntem bölümünde, öncelikle hesaplarımıza temel oluşturan teorik altyapı sunulmuş, ardından zar-evren modellerinin matematiksel çıkarımları yeniden yapılmıştır. Ayrıca tezin zgn kısmını oluşturan çalışmanın n hesapları bu bölümde sunulduktan sonra, Bulgular kısmında, bu hesapların genelleştirilmiş haline ve bizim modellerimiz için elde edilen hesaplara ve sonuçlara yer verilmiştir. Tartışma ve Sonuç bölümünde, tezde yapılan çalışmanın önemi ve varılan noktalar sıralanmıştır. Son olarak Ekler bölümünde ise, tezin içinde yer alan bazı hesapların ayrıntılarına yer verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

“Neden üç uzay ve bir zamandan oluşan 4 boyutlu bir evrende yaşıyoruz?” sorusu içinde yaşadığımız evrenin doğası hakkında sorabileceğimiz en temel ve cevabı en zor sorudur. Gravitasyon alanının boş uzayda var olabilmesi için gerekli minimum boyut sayısı olduğu için, dört boyut, özel bir sayı olarak görünür.

Bunun yanı sıra, “Bir şekilde gizlenmiş ve dört boyutta yaşadığımızı dair bir çeşit ilüzyon yaratan ekstra boyutların var olup olmadığı”nı sormak da doğal bir sorudur. Bu soru fizikçilerden çok filozofların ilgileneceği bir soru gibi gözükse de tersine, ekstra boyutlar; Teorik Fiziğin en büyük problemlerini (Kuantum Gravitasyonu ve Kuvvetlerin Birleşimi gibi) çözmeye teşebbüs eden postülalar olarak sıkça ortaya atılmıştır.

Genel Rölativite Teorisi (GRT), gravitasyonun, kozmolojik ve astrofiziksel gözlemlerle uyuşan mükemmel bir teorisidir. Hatta teorik olarak, birçok gözleme, dayanak oluşturmuştur. Fakat Einstein’ın bu teoriyi keşfetmesinden hemen sonra fark ettiği gibi, tekillikler biçiminde ortaya çıkan kendi geçersizliğini de öngören bir teoridir. Yani GRT, kuantum etkilerinin önemli hale geldiği yüksek enerjilerde çöker. Diğer uçta, Kuantum Mekanik (KM), maddenin kendi yapısı da dahil, bütün küçük ölçekli fiziği, başarıyla ele alır ancak bazı kavramsal problemlerde (mesela ölçme problemi) zorlanır ve sonuçta bu durumun daha temel bir teori veya mevcut teorinin daha iyi anlaşılması ile çözülebilmesi umulur. Dolayısıyla aranan, bütün bu problemleri çözen ve GRT ile KM arasındaki boşluğu başarıyla dolduran bir Kuantum Gravitasyon teorisidir. Böyle bir teorinin, öncelikli olarak KM’ne ya da GRT’ye dayalı olması gerekmez ve ikisinin de yerini alabilir. Sadece gerekli olan şey, her iki limitte de olması gereken sonuçları vermesidir.

Standart Modelin kuvvetleri ve ayrıca belki gravitasyon kuvveti de, gerçekte aynı kuvvetin farklı görünümüdür. Kuvvetlerin bu doğası, bilinen kuvvetleri, doğadaki bütün etkileşimleri tanımlayacak tek bir kuvvet ile birleştirmeyi amaçlayan birleşim kuramı için bir umuttur. Birleşim, oldukça cezbedici bir ilkedir ve geçmişte farklı görünen olayların daha iyi anlaşılmasını sağlamada başarılı olmuştur. Buna en açık

örnek, Maxwell'in Elektrik ve Magnetizmayı birleştirdiği Elektromagnetik Teoridir. Elbette ki doğadaki kuvvetlerin bu şekilde birleşmemesi mümkündür. Ancak tarihte yeni parçacıkların ve kuvvetlerin keşfinin daha yüksek enerjileri gözlemleyerek bulunduğunu hatırlayarak, birleşim için bir umut oluşabilir. Ayrıca, Kuantum Gravitasyonu ve Kuvvetlerin Birleşimi'nin mutlaka GRT ve KM'ne bağlı olması gerekmediği fakat her ikisine de açıkça işaret etmesinin yeterli olacağı vurgulanmalıdır.

Ekstra boyutlar fikri ilk olarak, Kaluza ve Klein'in 1920'lerde öncü çalışmaları ile ortaya atıldı. Kaluza'nın sıradışı fikri, daha yüksek boyutlarda metrik tansörün ekstra bileşenlerini kullanarak, elektromagnetizma ile gravitasyonu birleştirmeye dayanıyordu. Son zamanlarda ise Kuantum Gravitasyonu ve birleşimin popüler teorisi, üzerine uzun yıllar boyunca, çok büyük bir çaba harcanmış olan Sicim Teorisidir. Bu teoride, noktasal tanecikler sicimlerle yer değiştirmiştir ve evrenin yapı taşlarını oluştururlar. Teorinin tutarlı olması için yaşadığımız uzay-zaman, 10 boyuta ihtiyaç duyar ancak, doğayı doğru şekilde tanımlayıp tanımlamadığı hala açık değildir. Sicim Teorisi'nin doğru olmadığı ortaya çıksa bile, bu teorinin öngördüğü ekstra boyutların önemli bir role sahip olması mümkündür.

Teorik fizikte, ekstra boyutların işin içine katıldığı bir diğer alan da kozmolojidir. Hızla artan gözlemsel teknikler; Kozmik Mikrodalga Fon Işınması (Cosmic Microwave Background-CMB), geniş ölçekli yapılar, Süpernova IA uzaklık ölçümleri ve hafif elementlerin bolluğu gibi birçok kozmolojik data ile uyumlu olacak şekilde kozmolojik modeller için yeni arayışlara sebep olmuştur. Ayrıca modellerin evrenin baskın içeriğini oluşturan karanlık enerji ve karanlık madde gibi henüz anlaşılmayan olguları da içermesi gerekmektedir. Dolayısıyla Gravitasyon Teorisi bu datalara uyacak şekilde değiştirilebilir ve böylece ekstra boyutlar, bu olasılıkları incelemek için ilgi çekici bir çalışma alanı yaratır.

Eğer ekstra boyutlar varsa, mutlaka onları neden gözleyemediğimizi açıklayan bir mekanizmaya da ihtiyaç vardır. Geleneksel olarak, bu durum Klein tarafından önerildiği gibi, ekstra boyutun çok küçük bir ölçeğe sıkıştırılmış olması ile açıklanır. Ancak son yıllarda, daha yüksek boyutlu bir uzay (bulk) içine yatırılmış 4-boyutlu bir zar (brane) üzerinde yaşamaya sınırlandırıldığımızı varsayan, alternatif bir zar-evren (Braneworld)

kavramı ortaya çıkmıştır. Bu varsayım, ekstra boyutun büyük, hatta sonsuz olmasına imkan verir ve dolayısıyla ekstra boyutun tıkHzlaştırılması yaklaşımına bir alternatif getirir.

2.1. KALUZA KLEIN TEORİSİ

Kaluza, 1921'de, iki yıl gecikmeden sonra GRT'yi beş boyutta ele alarak, elektromagnetizma ile gravitasyonu birleştiren makalesini yayınladı [35]. Elektromagnetizma ile gravitasyonun birleşimine dair ekstra boyut kullanılarak yapılan daha önceki bir çalışma, Nordström tarafından [36] Einstein'ın başlangıç gravitasyon teorisi kapsamında yayınlanmıştı.

4-boyutlu vakum Einstein denklemleri, $g = \det(g_{\mu\nu})$ olmak üzere

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R \quad (2.1)$$

şeklindeki Einstein-Hilbert aksiyonundan çıkarılabilir. Kaynaksız Maxwell denklemleri ise

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

aksiyonundan hareketle yazılır. Burada $F^{\mu\nu}$ elektromagnetik alan tansörüdür. Bu iki aksiyonun toplanmasıyla elektromagnetik alanla birleşmiş gravitasyon alanı için Einstein-Maxwell denklemleri elde edilir. Kaluza ise bunun yerine, aksiyonu

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x dy \sqrt{\hat{g}} \hat{R} \quad (2.3)$$

şeklinde olan gravitasyonu sadece 5-boyutta düşünmüştür. Burada y ekstra boyutun koordinatı ve şapka 5-boyutlu büyüklükleri göstermek için kullanılmıştır. Kaluza, sonuç

teoriyi ekstra boyuttan bağımsız kılmak için, basitçe metrik katsayılarının y den bağımsız olduğu “silindirik koşulu” öne sürdü ve

$$\frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

metriği

$$\hat{g}_{ab} = \phi^{-1/3} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

biçiminde kabul etti. A_μ ; 4-vektör ve ϕ , skaler fonksiyon olmak üzere, bu durumda (2.3) ifadesi

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left(R - \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) \quad (2.6)$$

haline gelir. Burada $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ elektromagnetik alan tansörü ve $G = \hat{G} / \int dy$ dir.

(2.6) ile verilen aksiyon, 4-boyutlu gravitasyonu, elektromagnetizma ve kütesiz Klein-Gordon skaler alanı ϕ ile birlikte tanımlar. Bu skalerin ortaya çıkışı Kaluza’yı yanıltmış ve o da $\phi=1$ olarak basitçe kaldırmıştır. (2.6) denklemi kesin olarak gravitasyon artı elektromagnetizma için Einstein-Maxwell aksiyonudur. Ancak ϕ =sabit koşulunun, 5-boyutlu Einstein denklemleriyle uyumu yalnızca $F_{\mu\nu}=0$ ise mümkündür. Bundan dolayı, dilaton olarak adlandırılan ϕ skaler alanının varlığının kabul edilmesi gerekmektedir. Bugün fizikte, temel skaler alanların varlığı konusunda daha rahat bir tutum sergilenmektedir. Gerçekten Higgs skaleri ve inflaton alanları modern parçacık fiziği ve kozmoloji teorilerini destekler. Yine de, dilaton teoriye ciddi bir engel teşkil eder, çünkü (2.6) aksiyonu aslında fenomenolojik olarak kabul edilemeyen gravitasyonun skaler-tensor teorisini ifade etmektedir. Dilatona bir $V(\phi)$ potansiyeli vererek bu problemten sakınmak mümkündür ancak Kaluza’nın “elektromagnetizma boş bir

uzaydaki yalın gravitasyonun sonucu olabilir“ fikrinin orijinal cazibesi ve güzelliği kaybolur.

Kaluza'nın 5. boyutun varlığını kabul eden varsayımına rağmen teorideki hiçbir fiziksel niceliğin ona bağlı olmaması, teorinin uydurma ve hoşla gitmeyen bir teori olarak gözükmeye sebep olur.

1926'da Klein [37], Şekil 2.1'de gösterildiği gibi ekstra boyutun y yerine $y + 2\pi R$ ile eşleştirildiği bir silindirle sınırlandırılmış olduğunu ileri sürdü. Bu durum herhangi bir $f(x^\mu, y)$ niceliğinin y 'de periyodik olması $f(x^\mu, y) = f(x^\mu, y + 2\pi R)$ ve dolayısıyla

$$f(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n(x^\mu) e^{iny/R} \quad (2.7)$$

şeklindeki Fourier açılımının uygulanabilmesi anlamına gelir. Bu durumda, $f(x^\mu, y)$ fonksiyonu, $\square^{(5)} f = 0$ dalga denklemini sağlayan bir kütleli skaler alan olarak alınabilir. Buradan f_n Fourier modlarının, m_n efektif kütleli 4-boyutlu Klein-Gordon denklemini sağladığı ortaya çıkar.

$$\square^{(4)} f_n = m_n^2 f_n \quad m_n = \frac{n}{R} \quad (2.8)$$

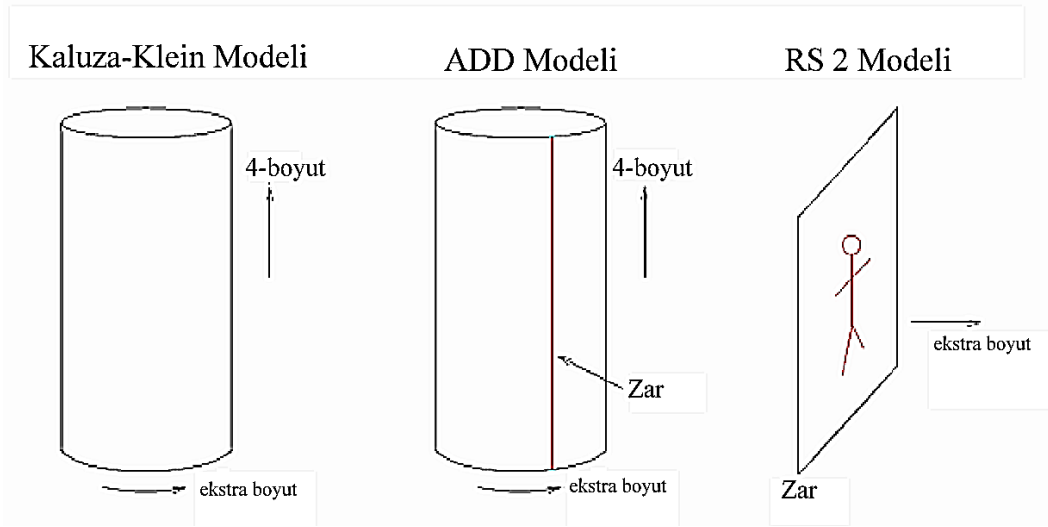
4-boyutlu yaklaşımda f , kütleli Kaluza-Klein (KK) modlarıyla birlikte $f_{n \neq 0}$ kütleli sıfır modu f_0 'ı içerir. Klein, ekstra boyutun yeteri kadar küçük olması halinde, KK modlarının çok ağır olacağını ve böylece düşük enerjilerde görülemeyeceğini fark etti. Bu yüzden sadece y 'den bağımsız olan sıfır modu, gözlenebilir ve fizik, olması gerektiği gibi 4-boyutlu gözükcektir.

Bilinen parçacıkların KK modlarının çarpışma deneylerinde henüz gözlenmemiş olması, ekstra boyutun büyüklüğüne dair bir üst sınır sağlarken,

$$R \leq O(\text{TeV}^{-1}) \approx 10^{-18} m \quad (2.9)$$

ekstra boyutun Planck uzunluğunda ($R \approx l_p \approx 10^{-35} m$) sınırlandırılmış olduğu standart bilgisi de alt sınırı verecektir.

Elektromagnetizmanın 5-boyutlu GRT içerdiği gerçeği, şimdi daha açık bir anlam kazanır: “Elektromagnetizmanın iç $U(1)$ ayar invaryansı, y 'deki küçük silindirin etrafındaki dönüşümler altında, yerel koordinatın invaryans kaldığının bir göstergesidir”. Bu fikir, çok sayıda ekstra boyutun hepsinin birden küçük bir ölçekte (topolojik yapısının silindir olması gerekmez) sınırlandırıldığını düşünerek, diğer ayar gruplarına genişletilebilir. Böylece Standart Modelin bütün iç ayar simetrilerinin, uzay-zamanın yerel koordinat invaryansları olduğu anlaşılabilir. Maleşef teori, gözlenen bütün standart model özellikleriyle tutarlı değildir. Buna rağmen KK Teorisinin temelleri, özellikle ekstra boyutların “küçük bir ölçüğe sınırlandırılmış olduğunu ve bu yüzden onları göremediğimiz” fikrini yaygınlaştırarak, ekstra boyutlu teoriler içinde önemli bir yer etmektedir.



Şekil 2.1: Ekstra boyutların üç farklı model için gösterimi.

2.2. ADD ZAR-EVREN MODELİ

1998’de, geleneksel yaklaşımdaki ekstra boyutun Planck ölçeğine sınırlandırılması fikrinin aksine, ekstra boyutun büyük olabileceğine dair yeni bir ilgi çekici model sunan Arkani-Hamed, Dimopoulos ve Dvali’nin (ADD) [3-5], iddiaları ile ekstra boyutlar teorisi yön değiştirdi. Aslında KK Modelinin bir genelleştirmesi olan ADD modeli, n

tane R büyüklüğünde kompakt ekstra boyut içerir. Fakat Standart Model alanlarının 4-boyutlu zar üzerine hapsoldüğü ve sadece gravitasyonun ekstra boyutlu uzaya (bulka) yayıldığını öne sürer.

Evrenimizin bir zara hapsolüdüğü düşüncesi, ilk başta çok aykırı bir teşebbüs olarak görülebilir fakat Kaluza'nın silindir koşulundan daha az "ad hoc" değildir. Buna rağmen gerçekte böyle bir hapsoluşa sebep olan çeşitli mekanizmalar vardır. Mesela daha önceki zar-evren iddiası, topolojik kusurları (defect) zarı modellemek için ve kusur üzerindeki sıfır modlarının sınırlandırılmasına sebep olması için kullanırken, Sicim Teorisi'nde de, D-zarları kendi hacimleri üzerinde ayar teorilerini sınırlandırır. Yine de çoğu zar-evren modellerinde sınırlandırma bir hipotez olarak kullanılır. Bir zara hapsoluş, otomatik olarak standart model alanlarında hiçbir KK modunun olmamasını sağlar. Dolayısıyla (2.9) denkleminde kaçınılmış olunur ve ekstra boyut, Newton kanununun deneysel olarak test edildiği [38, 39]

$$R \sim 0.1\text{mm} \quad (2.10)$$

değeri kadar büyük olabilir.

ADD modelini öncelikli amacı, hiyerarşi probleminde -Planck ölçeği ($M_{\text{planck}} \sim 10^{19}$ GeV) ve elektrozayıf ölçek ($M_{\text{ez}} \sim 10^3$ GeV) arasındaki açıklanamayan büyük ayrımda dair olası bir çözüm getirmektir. Zar üzerinde iki test taneciği arasındaki Newton potansiyeli ele alındığında, tanecikler arasındaki mesafenin küçük olması durumunda ($r \ll R$), potansiyel yüksek boyutlu gravitasyon potansiyeli

$$V(r) \approx \frac{m_1 m_2}{M_f^{2+n}} \frac{1}{r^{n+1}}, \quad r \ll R, \quad (2.11)$$

$r \gg R$ olduğunda ise, gravitasyonun ekstra boyuta karşı duyarsız kaldığı 4-boyutlu gravitasyon potansiyelidir:

$$V(r) \approx \frac{m_1 m_2}{M_f^{2+n}} \frac{1}{R^n r}, \quad r \gg R, \quad (2.12)$$

Burada M_f ; $(4+n)$ -boyutlu uzay-zamanda gravitasyonun temel kütle ölçeğidir. Dolayısıyla zar üzerindeki bir gözlemci

$$M_p^2 = M_f^{2+n} R^n \quad (2.13)$$

ile verilen 4-boyutlu efektif Planck kütleini ölçer. Ekstra boyut çok büyük olduğu için, zar üzerinde büyük değerli $M_{\text{planck}} \sim 10^{19}$ GeV kütleini verecek şekilde, M_f temel ölçeği, Planck kütleinden çok daha küçük olmalıdır. Aslında, gravitasyonun Standart Model kuvvetlerinden daha zayıf olmasının nedeni, diğer kuvvetler zar üzerinde hapsolmüşken onun ekstra boyutlara da yayılıyor olması şeklinde düşünülür. Eğer temel ölçeğin zayıf ölçek mertebesinde olduğu kabul edilirse, $M_f \sim M_{\text{ez}} \sim 10^3$ GeV, (2.13) ve (2.10) ifadelerinden $n \geq 2$ tane ekstra boyut olması gerektiği buulunur.

Elbette ki, bu teori hiyerarşi problemini gerçekten çözmektedir, sadece yeniden formüle eder. Çünkü artık, M_f ile ilişkili olan 10^{-18} m. uzunluk ölçeğine göre R 'nin neden bu kadar büyük olması gerektiği açıklanabilmektedir. Buna rağmen, gravitasyonun, gözlenen Planck kütleinden daha küçük bir temel kütleyle sahip olabileceği olasılığı, yakın gelecekteki çarpışma deneylerinde ekstra boyutların etkilerini gözlemeye imkan verebileceği için parçacık fizikçiler arasında büyük bir heyecan yaratmıştır.

2.3. RUNDALL-SUNDRUM ZAR-EVRENLERİ

Rundall-Sundrum (RS) modelleri [8,9], ADD modelindeki düz ekstra boyutun tersine, bulk geometrisinin eğri olabileceğini ve zarın bir gerilime sahip olacağını önerir. Bu sebeple zar, gravitasyonel bir obje olur ve bulk ile dinamik olarak etkileşir: Bu yaklaşım ise, Rundall-Sundrum Modellerini GRT açısından daha ilgi çekici kılmaktadır. Hiyerarşi problemini çözmeye teşebbüs ettikleri ilk Rundall-Sundrum modelinde (RS 1), ekstra boyut sınırlıdır. Ancak ikinci makalelerinde (RS 2), ekstra boyut sonsuz olsa bile 4-boyutlu gravitasyonun zar üzerinde sağlanacağını gösterdiler. Bu açıdan RS 2 modeli, bulkin eğriliği tarafından gravitasyonun efektif olarak zar üzerinde lokalize

olduğuna işaret ederek, ilgi çekici bir alternatif sınırlandırma (compactification) yöntemi sunar.

2.3.1. Rundall-Sundrum I (RS 1)

RS 1 modeli, aralarında anti-de-Sitter uzayı bulunan σ_1 ve σ_2 gerilimlerine sahip iki zardan oluşur. Ekstra boyut kompakt olduğu için, uzay-zamanın sınırlarındaki koşulların belirlenmesine ihtiyaç vardır. Zarların her iki tarafında (x^μ, y) noktalarını $(x^\mu, -y)$ noktaları ile özdeşleştiren Z_2 simetrisi varsayılır ve y ; $2L$ uzunluğunda periyodik alınır. Bu özellikler bir S_1/Z_2 orbifold topolojisi, yani bir çapa bükülmüş dairesel şekli tanımlar. Bu modelde zarlar, uzay-zamanın sınırında yer alan $y = 0$ ve $y = L$ noktalarına sabitlenmiştir. Z_2 simetrisi varsayımı, sicim teorisinde zar-evren modellerinin inşasından esinlenilmiştir. Λ_5 ; Bulkın Kozmolojik Sabiti olmak üzere

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -\Lambda_5 g_{ab} \quad (2.14)$$

şeklindeki bulk Einstein denklemleri çözülr ve AdS₅'in eğrilik ölçeği l cinsinden

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2} \quad (2.15)$$

ifade edilir. Zarın 4-boyutlu Lorenz invaryansını koruyacak bir metrik kabulüne ihtiyaç vardır.

$$ds^2 = a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (2.16)$$

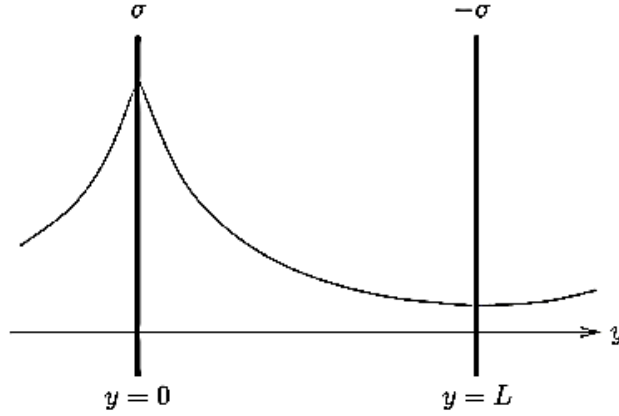
metriği (2.14) bulk alan denklemlerinde kullanarak,

$$ds^2 = e^{-2|y|/l}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (2.17)$$

çözümü ve zarların kozmolojik sabitle ilişkili, birbirlerine eşit büyüklükte fakat zıt işaretli gerilime sahip olduğu bulunur.

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma \quad (2.18)$$

$$\Lambda_5 = -\frac{32\pi^2\sigma^2 G_5^2}{3} \quad (2.19)$$



Şekil 2.2: RS 1 Modeli'nde eğrilik faktörünün davranışı.

Burada G_5 , 5-boyutlu Newton sabitidir. Fiziksel çözümler için Λ_5 negatif olmalıdır ve bulk AdS_5 olmak zorundadır. (2.17) deki $e^{-2|y|/l}$ terimi, eğrilik (warp) faktörü olarak adlandırılır. Eğrilik faktörü kabulden dolayı Z_2 simetrisine sahipken pozitif gerilimli zardan negatif gerilimli zara doğru eksponansiyel olarak azalır. (Şekil 2.2)

RS 1 modelinin başlıca amacı, hiyerarşi probleminde bir çözüm getirmektir. Negatif gerilimli zar üzerinde yaşadığımız kabul edilirse, efektif Plank kütlesi M_P yaklaşık olarak

$$M_P \approx e^{2L/l} M_f^3 l \quad (2.20)$$

ölçülür. Burada M_f ; 5-boyutlu temel Planck kütlesidir. Bu sonuca göre, ekstra boyutun uzunluğunu içeren büyük bir hiyerarşi tanımlamaksızın, enerji ölçekleri arasında büyük bir hiyerarşi oluşmasına imkân veren şey eksponansiyel eğrilik faktörüdür. Eğer $M_f \sim 10^3$ GeV alınır, gözlenen $M_P \sim 10^{19}$ GeV kütlesinin elde edilmesi için, $L/l \approx 50$ olmasına ihtiyaç vardır.

Ancak aynı zamanda bu uzunluğun, “radyon”un (4-boyutta kendini göstermeyen, 5-boyutlu uzay-zamanın gravitasyon alanındaki pertürbasyonundan ortaya çıkan hipotetik bir tanecik) sebestlik derecesine tekabül etmesinden dolayı, bulunan değer kabul edilebilir bir sonuç değildir. Zarlar arası ayırımın, radyonun salınımlarının olmayacağı sabit bir değerde olması gerekmektedir. Bununla birlikte radyonun stabilizasyon mekanizması tamamen anlaşılmış değildir ve kendi içinde karmaşıklıkları vardır. Diğer yandan, RS 1 modelinin negatif gerilimli zar üzerinde yaşadığımız kabulü, zar üzerindeki gravitasyon teorisi açısından kabul edilebilir değildir.

2.3.2. Rundall-Sundrum II (RS 2)

RS 2 modeli, sonsuz bir ekstra boyut içinde yer alan tek bir pozitif gerilimli zar içerir. Bu model, negatif gerilimli zarı sonsuza götürmek suretiyle , RS 1 modelinden de elde edilebilir. Model artık hiyerarşi problemine işaret etmese de ekstra boyutların gravitasyonel etkilerini incelemede ilgi çekici bir bakış açısı sağlar. RS 2’deki metrik RS 1 deki ile aynıdır.

$$ds^2 = e^{-2|y|/l} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 \quad (2.21)$$

Bu sefer, Z_2 simetrisi $y = 0$ da yer almaktadır. Önceki gibi, zarın uzay-zamanı 4-boyutlu düz Minskowski uzay-zamanı olmasını sağlayacak şekilde zarın gerilimi,

$$\sigma = \frac{3}{4\pi G_5} \quad (2.22)$$

biçiminde bulk kozmolojik sabiti ile ilişkilidir. Ekstra boyut artık sınırsız olduğu için, 5-boyutlu gravitonun ağır KK modlarının bir sürekliliği vardır (Yani (2.7) ifadesindeki Fourier serisi, Fourier integrali olur). Fakat bu KK modları, 4-boyutlu standart gravitasyonda olduğu gibi, bulkin eğriliği sebebiyle zarın yakınlarına sıkıştırılmıştır. Gravitasyon sonsuz ekstra boyuta yayılsa bile, 4-boyutlu gravitasyon teorisinin verdiği sonuçların zar üzerinde kapsanıyor olması modelin dikkat çekici bir özelliğidir ve zar-evren modelleri üzerine büyük bir araştırma alanının doğmasına sebep olmuştur.

2.4. ZAR-EVREN MODELLERİNDE GRAVİTASYON VE KOZMOLOJİ:

Gravitasyonun tüm alternatif teorilerinin, uygun limitte Newton'un Gravitasyon Yasası'nı sağlaması gerekmektedir. 4-boyutlu teoride, $1/r^2$ ile orantılı gravitasyon kuvvetinin, 5-boyutlu teoride $1/r^3$ ile orantılı olmasını bekleyen zar-evren modelleri, daha ilk aşamada bir güçlükle karşılaşır. Bu problemin üstesinden gelmek için, (2.21) deki eğrilik faktörü önemli bir rol oynar. Aslında, eğrilik faktörü, gravitasyonun çoğunlukla zara paralel yayılmasını sağlayarak zarin etrafına sıkıştırılmasına sebep olur ve modelin Newton Yasasını sağlaması mümkün olur. Bu dikkate değer özellik, zar-evren senaryolarının fenomolojik yapısı için bir anahtar oluşturur.

Elbette 4-boyutlu GRT'nin deneysel başarıları, statik bir kaynaktan gelen zayıf alanda yavaşça hareket eden test parçacıkları için Newton Yasasının elde edilmesi ile sağlanır. Ayrıca GRT, ışığın Güneş yakınından geçerken bükülmesi, Merkür'ün perihelinin ilerlemesi gibi birçok astrofiziksel olaya dair başarılı açıklamalar getirmiştir. Bütün bu etkiler, uzay-zamanın düz bir uzay-zamandan küçük bir miktar pertürbe edilmiş olduğu kabul edilerek Lineerleştirilmiş Genel Rölativite çerçevesinde incelenmiştir. Benzer şekilde, zar-evren modelleri göz önüne alındığında; zar-evrenlerin lineerleştirilmiş teorisinin, denklemlerde ekstra boyut yer alacağı için, küçük düzeltmelerle GRT'yi vermesi beklenir.

Ancak bütün gravitasyonel olaylar zayıf alan limitinde incelenemez ve zar üzerindeki gravitasyonu belirlemek, açıkça pertürbatif olmayan somut bir yaklaşım gerektirebilir. Shromizu, Maeda ve Sasaki [10] tarafından, 5-boyutlu Einstein Alan Denklemleri, zar üzerine izdüşürülmek suretiyle 4-boyutlu Efektif Einstein Alan Denklemleri elde edilmiştir. Çıkarılışı Kısım 3.5'de gösterilmiş olan bu denklemler, geleneksel Einstein Alan Denklemlerine benzemekle birlikte, bulkın gravitasyonel etkilerini ifade eden düzeltme terimleri de içermektedir.

4-boyutlu uzay-zamanda gözlemsel kozmolojiyi en iyi tasvir eden Friedmann Robertson Walker (FRW) modelinin, zar-evren genelleştirilmesi incelendiğinde dikkat çekici sonuçlara varılır. $a(t)$; ölçek çarpanı, γ_{ij} ; $k=+1,0,-1$ uzaysal eğriliğe sahip simetrik 3-lü metriği göstermek üzere, homojen ve izotropik metrik

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (2.23)$$

alınır ve evrenin enerji-madde içeriği, p basınçlı ve ρ yoğunluklu mükemmel akışkan kabul edilirse

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pq_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Friedmann denkleminin zar-evren modelleri için genelleştirilmesi

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_4}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{8\pi G_4}{3\sigma}\rho^2 - \frac{C}{a^4} \quad (2.25)$$

olarak bulunur. [11]. Burada nokta zamana göre türevi göstermektedir ve C de integrasyon sabitidir. Enerji-momentum korunumundan

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.25)'in ilk üç terimi standart 4-boyutlu Friedmann denkleminin terimleri ile aynıdır. Dördüncü terim, düşük enerjilerde ($\rho < \sigma$) ihmal edilebilir olan, yüksek enerji düzeltme terimidir. Yüksek enerjilerde baskın hale gelen bu terim evrenin alışılmışın dışında bir biçimde genişlemesine sebep olur. Böyle bir genişleme fazının, evrenin nükleosentez aşamasından önce olduğu düşünülür ve

$$\sigma \gtrsim (1\text{MeV})^4 \quad (2.26)$$

sınırlamasına yol açar.

(2.25)'in son terimi, bulkin Weyl tansörünün elektrik kısmı olarak tanımlanan $\varepsilon_{\mu\nu}$ 'den türeyen “karanlık radyasyon” terimidir ve bu terim, nükleosentez döneminde ilave serbestlik dereceleri tarafından sınırlanır.

Yukarıdaki çıkarım, zarın $y = 0$ noktasında sabitlenmiş olduğu ve metriğin kozmolojik olarak (2.25) bağıntısı uyarınca zamanla evrimleştiği Gaussal Koordinat (GN) sistemi için yapılmıştır. Bu sistem, en azından yerel olarak hiç bir fiziksel sınırlamaya yol açmaz ve zar üzerindeki kozmolojiyi tanımlamak için çok elverişlidir. Fakat GN sistemindeki “zara-dayalı” yaklaşımda bulk uzay-zamanının doğası fazla açık değildir. Buna alternatif olarak zarın özel bir bulk uzay-zamanı içinde hareket ettiği, “bulka-dayalı” yaklaşımı düşünmek mümkündür. Genel bulk uzay-zamanı 5-boyutlu vakum Einstein denklemlerini sağlar ve bir FRW zar-evreni bulkta Scwarzchild-AdS modeline karşı düşer. Yani yüksek boyutlara genelleştirilmiş Birkhoff teoremi [34] açısından bakıldığında FRW evreni, ayrıca statik bir evrendir. Zar; uzay-zamanın iki kopyası arasında keyfi bir sınır olarak alınır, Gauss-Codazzi Denklemleri ve Israel Bağdaştırma Koşulları, zarın enerji-momentumunu yörüngesine bağlar. Bu çerçevede $a(t)$ zarın radyal değişimini ifade eder ve zarın bulk üzerindeki hareketinden dolayı zarın kozmolojik evrimini veren efektif Friedmann denklemi (2.25) yeniden elde edilir [34, 29]. Dolayısıyla bu iki yaklaşım tamamen eşittir ve belli bir koordinat dönüşümü ile eşdeğerliliği gösterilebilir [33,34]. Bulka-dayalı yaklaşımda, (2.25) ifadesindeki C integrasyon sabiti, bulk kara deliğinin kütlesi olarak yorumlanır. Eğer bu terim kalkarsa, bulk uzay-zamanı tamamen AdS uzay-zamanı olacaktır.

(2.25) ifadesinden, standart kozmolojik evrimin, zar üzerinde düşük enerjilerde ve geç zamanlarda tekrar sağlandığı anlaşılır. Ancak, yaşadığımız evren tamamen izotropik ve homojen değildir. Aslında günümüzdeki kozmolojik araştırmaların çoğu, evrenin yapısının doğru şekilde anlaşılıp modellenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Bu yüzden, ekstra boyutlar için yol gösterebilecek gözlemsel bulgulara işaret etmesi açısından zar-evren modellerinin incelenmesi önemlidir.

3.MALZEME VE YÖNTEM

3.1. BEŞ-BOYUTLU UZAY-ZAMANDA ALAN DENKLEMLERİ VE GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLER

Zar-evren modellerinde madde alanları, beş-boyutlu uzay-zamana (bulk) yatırılmış üç-boyutlu bir zar hiperyüzeyi ile temsil edilmektedir. Bu zar, bizim dört-boyutlu evrenimizi tasvir eder. Genel halde ekstra boyut sayısı birden fazla olabilir ve evrenimiz, d ($d \geq 1$) ile gösterilmek üzere, $n=1+3+d$ boyutlu bir uzay-zamana yatırılmış bir zar olabilir. Bu çalışmada öncelikle beş boyutlu uzay-zamanı göz önüne alınacaktır. Buna göre, indis kabulü şöyle olacaktır:

$$A,B,C,\dots=0,1,2,3,4$$

$$\mu,\nu,\rho,\dots=0,1,2,3$$

$$i,j,k,\dots=1,2,3$$

Beş-boyutlu büyüklükler sol üst köşesine yazılan “⁽⁵⁾” rakamı ile, zara ait dört-boyutlu büyüklükler ise “⁽⁴⁾” rakamı ile gösterilmiştir: $^{(5)}g_{AB}$, $^{(4)}g_{\mu\nu}$ gibi. Beş-boyutlu uzay-zamanın metriğinin imzası (-1,1,1,1,1) kabul edilmiştir.

Beş boyutlu uzay-zamanın metriği

$$^{(5)}ds^2_{bulk} = ^{(5)}g_{AB} d\hat{x}^A d\hat{x}^B \quad (3.1)$$

ve beş-boyutlu Einstein alan denklemleri

$$^{(5)}G_{AB} = ^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} ^{(5)}g_{AB} ^{(5)}R = -\Lambda_5 ^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 ^{(5)}T_{AB} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada, $^{(5)}R_{AB}$ ve $^{(5)}R$, sırasıyla, beş-boyutlu uzay-zamanın Ricci Tansörü ile Ricci Skaler Eğriliği; $^{(5)}G_{AB}$, Einstein Tansörü ve $^{(5)}T_{AB}$ ’de toplam enerji-momentum tansörünü göstermektedir. κ_5 ise beş-boyutlu gravitasyonel kuplaj sâbiti olup beş-boyutlu G_5 Newton Sabiti ve beş-boyutlu M_5 indirgenmiş Planck kütlesi ile

$$\kappa_5^2 = 8\pi G_5 = M_5^{-3} \quad (3.3)$$

bağıntısıyla ilişkilidir.

Bulk'ın Riemann Eğrilik Tansörünün (iç eğrilik) metrik türevleri cinsinden ifadesi

$${}^{(5)}R^A{}_{BCD} = \partial_C \Gamma^A{}_{BD} - \partial_D \Gamma^A{}_{BC} + \Gamma^E{}_{BD} \Gamma^A{}_{EC} - \Gamma^E{}_{BC} \Gamma^A{}_{ED} \quad (3.4)$$

şeklindedir ve ${}^{(5)}R_{AB}$ ile ${}^{(5)}R$ de bunun

$${}^{(5)}R_{AB} \equiv {}^{(5)}g^{CD} {}^{(5)}R_{CADB} \equiv {}^{(5)}R^C{}_{ACB} \quad (3.5)$$

$${}^{(5)}R \equiv {}^{(5)}g^{AB} {}^{(5)}R_{AB} \equiv {}^{(5)}R^A{}_A \quad (3.6)$$

bağıntılarıyla tanımlı izleridir. $\Gamma^A{}_{BC}$ büyüklükleri bulk geometrisinin bağıntı katsayıları (Christoffel Sembolleri) olup

$$\Gamma^A{}_{BC} = \frac{1}{2} {}^{(5)}g^{AD} \left(\partial_B {}^{(5)}g_{CD} + \partial_C {}^{(5)}g_{BD} - \partial_D {}^{(5)}g_{BC} \right) \quad (3.7)$$

ifadesiyle tanımlanmıştır. ${}^{(5)}g^{AB}$ ise,

$${}^{(5)}g^{AC} {}^{(5)}g_{CB} = \delta^A{}_B \quad (3.8)$$

ile tanımlanan ${}^{(5)}g_{AB}$ 'nin tersidir. Beş-boyutlu Riemann eğrilik tansörünün özellikleri dört-boyuttaki ile benzerdir. Beş-boyutlu Riemann eğrilik tansörü

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}\nabla_B X_C - {}^{(5)}\nabla_B {}^{(5)}\nabla_A X_C = {}^{(5)}R_{ABCD} X^D \quad (3.9)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bu bağıntıya Ricci Özdeşliği denir. Burada ${}^{(5)}\nabla_A$ beş-boyutlu uzayda kovaryant türevi göstermektedir. Riemann Eğrilik Tansörü bu diferansiyel özdeşlikten başka

$${}^{(5)}R_{ABCD} = {}^{(5)}R_{[AB][CD]} = {}^{(5)}R_{CDAB} \quad (3.10)$$

$${}^{(5)}R_{A[BCD]} = 0 \quad (3.11)$$

cebirsel özdeşliklerini ve de

$${}^{(5)}\nabla_{[A} {}^{(5)}R_{BC]DE} = 0 \quad (3.12)$$

diferansiyel özdeşliğini sağlar. (3.11)'e Birinci Bianchi Özdeşliği; (3.12) ye de İkinci Bianchi Özdeşliği denir. Bu sonuncunun bir kere büzülmesi

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}R^A{}_{BCD} = 2 {}^{(5)}\nabla_{[C} {}^{(5)}R_{D]B} \quad (3.13)$$

ve bir kere daha büzülmesi

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}R = 2 {}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}R^A{}_B \quad (3.14)$$

özdeşliklerini verir. Bu son bağıntı Einstein denklemlerinde kullanılırsa

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}T^{AB} = 0 \quad (3.15)$$

enerji-momentum korunum kanunu elde edilmiş olur. (3.2)'de gösterilen alan denklemleri alternatif olarak şöyle de yazılabilir: (3.2)'den büzme işlemiyle elde edilebilecek

$${}^{(5)}R = \frac{10}{3} \Lambda_5 - \frac{2}{3} \kappa_5^2 {}^{(5)}T \quad (3.16)$$

Ricci Skaler Eğriliği tekrar (3.2)'ye yerleştirilirse

$${}^{(5)}R_{AB} = \frac{2}{3} \Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 \left({}^{(5)}T_{AB} - \frac{1}{3} {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}T \right) \quad (3.17)$$

elde edilir.

${}^{(5)}R_{AB}$ ile ${}^{(5)}R$, Riemann Eğrilik Tansörünün sıfır olmayan iki izidir ve bunlar türetme yoluyla Riemann Eğrilik Tansöründen doğrudan doğruya bulunabilirler. Ancak, tersten giderek Riemann Tansörü inşa edilemez, Riemann Tansörünün izsiz kısmı olan Weyl Tansörünün de bilinmesi gerekir.

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{ABCD} = & {}^{(5)}C_{ABCD} + \frac{1}{3} \left[{}^{(5)}R_{AC} {}^{(5)}g_{BD} - {}^{(5)}R_{AD} {}^{(5)}g_{BC} + {}^{(5)}R_{BD} {}^{(5)}g_{AC} - {}^{(5)}R_{BC} {}^{(5)}g_{AD} \right] \\
& - \frac{1}{12} {}^{(5)}R \left({}^{(5)}g_{AC} {}^{(5)}g_{BD} - {}^{(5)}g_{AD} {}^{(5)}g_{BC} \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

bağıntısı uyarınca, ${}^{(5)}R_{ABCD}$, aynı zamanda izsiz kısım olan ${}^{(5)}C_{ABCD}$ 'ye bağlıdır. ${}^{(5)}C_{ABCD}$ 'ye Weyl Tansörü denir ve tanımından dolayı Riemann Eğrilik Tansörünün sağladığı aynı simetri özelliklerini taşır:

$${}^{(5)}C_{ABCD} = {}^{(5)}C_{[AB][CD]} = {}^{(5)}C_{CDAB} \tag{3.19}$$

$${}^{(5)}C_{A[BCD]} = 0 \tag{3.20}$$

ve ayrıca tüm indislere göre izsizdir:

$${}^{(5)}C^A{}_{BAD} = 0 \text{ ve } {}^{(5)}C^{AB}{}_{AB} = 0 \tag{3.21}$$

(3.18) denkleminde Weyl tansörü çekilerek hesaplanabilir. (3.18) bağıntısı, Riemann Eğriliğine iki türlü katkının bulunduğunu söylemektedir. Birincisi: ${}^{(5)}R_{AB}$ ve ${}^{(5)}R$ 'den ileri gelen katkılar ki, bunu, (3.17)'den anlaşılacağı üzere, yerel kaynaklar sağlamaktadır. İkincisi ise Weyl Tansöründen ileri gelen katkıdır ki; buna da, yerel olmayan kaynaklar (gravitasyon dalgaları, gelgit kuvvetleri) yol açmaktadır.

Weyl tansörünün hesaplanmasında kullanılabilecek diğer denklemler şu şekilde elde edilebilir. (3.18) denkleminde Weyl tansörünü çekip her iki tarafın diverjansının alındığında, (3.12) ve (3.13)'ü de kullanarak

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}C^A{}_{BCD} = \frac{4}{3} {}^{(5)}\nabla_{[C} {}^{(5)}R_{D]B} + \frac{1}{6} {}^{(5)}g_{B[C} {}^{(5)}\nabla_{D]} {}^{(5)}R \tag{3.22}$$

elde ederiz. Bu ifadeye (3.16) ve (3.17)'yi yerleştirirsek

$${}^{(5)}\nabla_A {}^{(5)}C^A{}_{BCD} = \frac{4}{3} {}^{(5)}\nabla_{[C} {}^{(5)}T_{D]B} + \frac{1}{6} {}^{(5)}g_{B[C} {}^{(5)}\nabla_{D]} {}^{(5)}T \tag{3.23}$$

bulunur. Buna, beş-boyutlu Weyl Tansörünün hareket denklemi gözüyle bakılabilir.

3.2 BULKTA VE ZAR ÜZERİNDE KOORDİNAT TABANLARI

Beş-boyutlu bulk uzay-zamanın koordinatlarını

$$\hat{x}^A = \{\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, \hat{x}^4\} = \{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{w}\}, \quad A=0,1,2,3,4 \quad (3.24)$$

biçiminde alalım. Burada \hat{t} , zaman koordinatını, \hat{x}, \hat{y} ve \hat{z} uzaysal koordinatları ve \hat{w} de ekstra boyutu göstermektedir. Bulktaki bu koordinat sisteminin taban vektörlerini (koordinatsal taban vektörleri)

$$e_A \equiv \partial_A \equiv \frac{\partial}{\partial \hat{x}^A} = (\partial_{\hat{t}}, \partial_{\hat{x}}, \partial_{\hat{y}}, \partial_{\hat{z}}, \partial_{\hat{w}}) \quad (3.25)$$

biçiminde ve bu tabanın

$$d\hat{x}^A(\partial_B) = \delta_B^A \quad (3.26)$$

düalite bağıntısıyla tanımlanan koordinatsal 1-form tabanını da

$$\omega^A \equiv d\hat{x}^A = (d\hat{t}, d\hat{x}, d\hat{y}, d\hat{z}, d\hat{w}) \quad (3.27)$$

ile gösterelim. Bu taktirde, $\{\partial_A, d\hat{x}^A\}$ koordinatsal taban sisteminde, bulk uzay-zaman metriği

$${}^{(5)}ds_{bulk}^2 = {}^{(5)}g_{AB}(x)d\hat{x}^A d\hat{x}^B \quad (3.28)$$

ya da

$${}^{(5)}g_{AB} = e_A \cdot e_B \equiv \partial_A \cdot \partial_B \quad (3.29)$$

olacaktır. ${}^{(5)}g_{AB}$ 'nin tersi de

$${}^{(5)}g^{AB} {}^{(5)}g_{BC} = \delta_C^A \quad (3.30)$$

ile tanımlanacaktır. Şimdi, seçilen $\{\hat{x}^A\}$ koordinatlarında, F bilinmeyen keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$F(\hat{x}) = 0 \quad (3.31)$$

denklemleriyle bir Σ hiperyüzeyi tanımlayalım. (1+3)-boyutlu zar diyeceğimiz bu hiperyüzey üzerinde

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{\tau, x, y, z\}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.32)$$

biçiminde göstereceğimiz bir yerel koordinat sistemi seçelim. Bunun koordinatsal taban vektörleri

$$e_\mu \equiv \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_\tau, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (3.33)$$

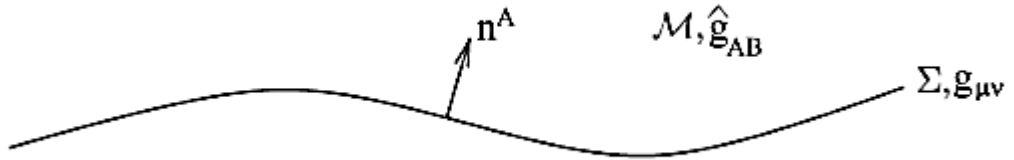
ve,

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu \quad (3.34)$$

düalite bağıntısıyla tanımlanan koordinatsal taban 1- formları da

$$\omega^\mu \equiv dx^\mu = (d\tau, dx, dy, dz) \quad (3.35)$$

ile gösterilecektir.



Şekil 3.1: M bulk uzay-zamanı içine yatırılmış Σ hiperyüzeyi ile gösterilen zar.

$\{\partial_\mu, dx^\mu\}$ zar uzay-zaman tabanında ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ ile gösterilecek zar metriği

$${}^{(4)}ds_{zar}^2 = {}^{(4)}g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.36)$$

ya da

$${}^{(4)}g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = \partial_\mu \cdot \partial_\nu \quad (3.37)$$

ve tersi de

$${}^{(4)}g^{\mu\alpha} {}^{(4)}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (3.38)$$

ile tanımlanacaktır. Zar'ın geometrisi, genel olarak, bulk uzay-zamanına ‘yatırılması’ yoluyla tanımlanabilir:

$$\hat{x}^A = \hat{x}^A(x) \quad (3.39)$$

denklemlerine zarın yatırılma denklemleri ya da parametrik denklemleri denir. Böyle bir yatırılma, zar ile bulk uzay-zamanlarının tabanları arasında şu aşağıdaki bağıntılara yol açar:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^A} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu = e_\mu^A(x) \partial_A \quad \Leftrightarrow \quad e_\mu = e_\mu^A e_A \quad (3.40)$$

Burada, tanım olarak

$$e_\mu^A(x) = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\mu} \quad (3.41)$$

dır. Öte yandan (3.39)'daki yatırma bağıntısı

$$d\hat{x}^A = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad \Leftrightarrow \quad d\hat{x}^A = e_\mu^A(x) dx^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \omega^A = e_\mu^A \omega^\mu \quad (3.42)$$

bağıntısına da yol açar. (3.42)'yi kullanarak, (3.28) bağıntısı

$${}^{(5)}ds_{bulk}^2 = {}^{(5)}g_{AB} \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^B}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.43)$$

yazılabildiğinden, buradan, zar üzerinde indüklenmiş metrik

$${}^{(4)}g_{\mu\nu} = {}^{(5)}g_{AB} \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{x}^B}{\partial x^\nu} = e_\mu^A(x) e_\nu^B(x) {}^{(5)}g_{AB} \quad (3.44)$$

olur. Şimdi ,

$$e_{\mu A} \equiv {}^{(5)}g_{AB} e_\mu^B \Leftrightarrow e_\mu^A = {}^{(5)}g^{AB} e_{\mu B} \quad (3.45)$$

tanımlayalım. Bu, zara dayalı koordinatsal taban vektörlerinin bulk bileşenlerinin indislerinin ${}^{(5)}g_{AB}$ ve ${}^{(5)}g^{AB}$ metrikleriyle indirilip kaldırılacağı anlamına gelmektedir. Benzer biçimde:

$$e^{\mu A} = {}^{(4)}g^{\mu\nu} e_\nu^A \Leftrightarrow e_\mu^A = {}^{(4)}g_{\mu\nu} e^{\nu A} \quad (3.46)$$

olup, bu da, zarın koordinatsal taban vektörlerinin tetrad indislerinin (taban vektörlerini adlandıran) indirilip kaldırılmasının ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ ve ${}^{(4)}g^{\mu\nu}$ ile olacağını ifade etmektedir. (3.45)'in ilk ifadesinde (3.46)'nın ilk ifadesini kullanarak

$$e_\mu^A = {}^{(5)}g_{AB} e_\nu^B {}^{(4)}g^{\nu\mu} \quad (3.47)$$

yazabiliriz. Şimdi , (3.44) bağıntısını ele alalım. Her iki taraf ${}^{(4)}g^{\mu\nu}$ ile çarpılıp α üzerinden toplam yapılırsa

$$\begin{aligned} {}^{(5)}g_{AB} e_\mu^A e_\alpha^B {}^{(4)}g^{\alpha\nu} &= {}^{(4)}g_{\mu\alpha} {}^{(4)}g^{\alpha\nu} \\ e_\mu^A e_{\alpha A} {}^{(4)}g^{\alpha\nu} &= \delta_\mu^\nu \\ e_\mu^A e_A^\nu &= \delta_\mu^\nu \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde edilir ki buna ‘‘Tamlık Bağıntısı’’ denir. Şimdi, yine denklem (3.44)’e dönelim ve tamlık bağıntısını da kullanarak bunu

$$\begin{aligned} {}^{(5)}g_{AB} e_\mu^A e_\nu^B &= {}^{(4)}g_{\alpha\beta} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \\ &= {}^{(4)}g_{\alpha\beta} (e_\mu^A e_A^\alpha) (e_\nu^B e_B^\beta) \\ &= \left({}^{(4)}g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta \right) (e_\mu^A e_\nu^B) \end{aligned}$$

biçiminde yazalım. Buradan

$$\left({}^{(5)}g_{AB} - {}^{(4)}g_{\beta\beta} e_A^\alpha e_B^\beta \right) e_\mu^A e_\nu^B = 0 \quad (3.49)$$

elde edilir. e_μ^A 'ler keyfi olduğundan bu bağıntı, $\lambda \in \mathbb{R}$ keyfi bir çarpan ve χ_{AB} 'de

$$\chi_{AB} e_\mu^A e_\nu^B = 0 \quad (\Leftrightarrow \chi_{AB} \perp e_\mu) \quad (3.50)$$

koşulunu sağlayan bir tansör olmak üzere,

$${}^{(5)}g_{AB} = {}^{(4)}g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta + \lambda \chi_{AB} \quad (3.51)$$

bağıntısına yol açar.

$$\lambda \chi_{AB} \equiv \varepsilon n_A n_B \quad , \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (3.52)$$

biçiminde seçerek (3.51) bağıntısı

$${}^{(5)}g_{AB} = {}^{(4)}g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta + \varepsilon n_A n_B \quad (3.53)$$

biçimine girer. Ya da

$${}^{(4)}g_{AB} = {}^{(4)}g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta \quad (3.54)$$

yazılırsa

$${}^{(5)}g_{AB} = {}^{(4)}g_{AB} + \varepsilon n_A n_B \quad (3.55)$$

ve buna eşdeğer olarak da

$${}^{(4)}g_{AB} = {}^{(5)}g_{AB} - \varepsilon n_A n_B \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.52) seçimi, (3.50)'den dolayı

$$n_A e_\mu^A = 0 \quad (3.57)$$

yani, n_A vektörünün e_μ 'lere ve dolayısıyla da zara dik bir vektör olduğu anlamına gelmektedir. Bu vektörü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$n^A n_A = \varepsilon \quad (3.58)$$

biçiminde normlarsak, n_A , zar hiperyüzeyinin birim normal vektörü olur. $\varepsilon = +1$ seçimi normalin uzay cinsinden (bu taktirde zar zaman cinsinden olur); $\varepsilon = -1$ seçimi ise normalin zaman cinsinden (bu taktirde zar uzay cinsinden olur) olması anlamına gelir. Biz bundan böyle $\varepsilon = +1$ seçeceğiz. Yani, birim normal uzay cinsinden; zar da zaman cinsinden olacaktır.

(3.55) bağıntısı, ${}^{(5)}g_{AB}$ bulk uzay-zaman metriğinin, verilmiş bir ayrıcalıklı vektör alanına göre (ki burada söz konusu olan n_A dir) biri normal doğrultusunda diğeri de normale dik doğrultuda (zar üzerinde) iki kısma ayrıştırılabileceğini göstermektedir. (3.55)'den ya da (3.56)'dan, beklenildiği gibi

$${}^{(4)}g_{AB} n^B = 0 \quad (3.59)$$

yâni normalin zar yüzeylerine izdüşümü sıfır olur. Buradan da sezinlenileceği gibi (3.56) ile tanımlanmış ${}^{(4)}g_{AB}$ metriği, bulk büyüklüklerini zar üzerine izdüşürme işlevi görmektedir. Çoğu kere

$$h_{AB} = {}^{(4)}g_{AB} \quad , \quad h_{\mu\nu} = {}^{(4)}g_{\mu\nu} \quad (3.60)$$

yazılışı da kullanılan bu tansöre Izdüşürme Tansörü denir. (3.56) bağıntısını bu tansörü bulk koordinatlarında ifade eder. Tamlık Bağıntısı kullanılarak (3.55)'den, ${}^{(5)}g_{AB}$ 'nin tersi için

$${}^{(5)}g^{AB} = {}^{(4)}g^{AB} + \varepsilon n^A n^B \quad (3.61)$$

yazılabilir. Burada, ${}^{(4)}g^{AB}$, (3.54)'den hareketle

$${}^{(4)}g^{AB} = {}^{(4)}g^{\mu\nu} e_\mu^A e_\nu^B \quad \text{veya} \quad h^{AB} = h^{\mu\nu} e_\mu^A e_\nu^B \quad (3.62)$$

dir. Yukarıdaki ifadelerden kolayca, izdüşürme tansörünün

$$h_{AB} = h_{(AB)} \quad , \quad h_{AB}n^A = 0 \quad , \quad h^A_A = 4 \quad , \quad h^A_C h_B^C = h^A_B \quad (3.63)$$

bağıntılarının sağladığı gösterilebilir.

3.3 DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ

(3.44)'de gösterilen

$${}^{(4)}g_{\mu\nu} = e_\mu^A(x) e_\nu^B(x) {}^{(5)}g_{AB} \quad (3.64)$$

bağıntısını göz önüne alalım. Zar koordinatlarının $x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu$ dönüşümü altında (dönüşmüş büyüklükler çizgili olarak gösterilmek üzere)

$$e_\mu^A \equiv \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} e_\nu^A \quad (3.65)$$

olur. Bu, e_ν^A 'lerin (e_μ taban vektörlerinin) kovaryant vektör gibi dönüştükleri anlamına gelmektedir. Bu özelliği kullanarak

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\bar{g}_{\mu\nu} &= \bar{e}_\mu^A \bar{e}_\nu^B {}^{(5)}g_{AB} \\ &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} e_\alpha^A \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} e_\beta^B \right) {}^{(5)}g_{AB} \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} {}^{(4)}g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.66)$$

elde edilir ki, bu da, ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ 'lerin 2. mertebeden bir kovaryant tansör olarak dönüştüğünü gösterir.

Şimdi, bulk koordinatlarında $\hat{x}^A \rightarrow \bar{\hat{x}}^A$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüm altında

$$\bar{e}_\mu^A \equiv \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial \hat{x}^A}{\partial x^B} \frac{\partial x^B}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^B} e_\mu^B \quad (3.67)$$

olur ki, bu da e_μ^A 'lerin (e_μ 'lerin bileşenlerinin) bir kontravaryant vektör gibi dönüştüklerini gösterir. Buradan hareketle

$$\begin{aligned} {}^{(4)}g_{\mu\nu} &= \bar{e}_\mu^A e_\nu^{B(5)} g_{AB} \\ &= \left(\frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^C} e_\mu^C \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^B}{\partial x^D} e_\nu^D \right) \left(\frac{\partial x^E}{\partial \bar{x}^A} \frac{\partial x^F}{\partial \bar{x}^B} {}^{(5)}g_{EF} \right) \\ &= \delta_C^E \delta_D^F e_\mu^C e_\nu^D {}^{(5)}g_{EF} \\ &= {}^{(4)}g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.68)$$

elde edilir ki, bu, ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ 'nin bir skaler gibi dönüştüğünü, yani bulk koordinat dönüşümleri altında invaryant kaldığını gösterir.

3.4. GAUSSAL NORMAL KOORDİNATLAR

n boyutlu uzay-zamanda, $(n-1)$ boyutlu Σ hiper yüzeyi üzerinde yer alan her bir P noktasından geçen tanjant vektörü n^A olan bir jeodezik düşünelim. Σ 'nın bir bölgesi üzerinde koordinatları (x_1, \dots, x_{n-1}) ile ve $P \in \Sigma$ noktasından çıkan jeodezik boyunca, Σ 'nın komşuluğundaki noktayı da w ile isimlendirelim. Yeni (x_1, \dots, x_{n-1}, w) koordinat seti, ayrıca hiperyüzeye dik koordinatlar olarak bilinen Gaussal Normal Koordinatları tanımlar. $n_A dx^A = dw$ olmak üzere metrik,

$$ds^2 = g_{AB}(x) d\hat{x}^A d\hat{x}^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dw^2 \quad (3.69)$$

formundadır. GN koordinat sisteminde hiperyüzey, genellikle hiç birşey kaybetmeden $w = 0$ noktasında seçilebilir. Σ 'dan çıkan jeodezikler, sonunda kesilse yada tekilliğe düşse bile, GN koordinatlarının komşuluğundaki bölgelerde geçerlidir.

3.5. ZARA-DAYALI VE BULKA-DAYALI YAKLAŞIM

Zara-dayalı ve bulka-dayalı yaklaşımın, bir koordinat dönüşümü aracılığıyla eşdeğerliliğinin gösterildiği çalışmada [33], ele alınan yöntemi incelemek, bu yaklaşımın genelleştirmesini yapabilmemiz için gereklidir. Aşağıda, söz konusu makalede yer alan hesaplar, yeniden yapılarak daha ayrıntılı bir biçimde sunulmuştur.

Öncelikle Scz-Ads metriği

$$ds^2 = -f(y)dT^2 + y^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + \frac{1}{f(y)} dy^2 \quad (3.70)$$

olarak tanımlıdır. Burada ekstra koordinat y ile gösterilmiştir. Bulkin vakum alan denklemleri çözülerek $f(y)$ fonksiyonu

$$f(y) = k + \frac{y^2}{l^2} - \frac{\mu}{y^2} \quad (3.71)$$

olduğu bulunur. (Bu $f(y)$ fonksiyonunun çıkarılışı Ek A da gösterilmiştir.) Burada μ ; bir sabit ve $l^2 = \Lambda/6$ dir. $k = +1, 0, -1$ değerleri için metriğin üç-boyutlu uzaysal kısmının geometrisinin sırasıyla, küre, düzlem ve hiperboloid olduğunu ifade eder. Bu uzay-zamanda zarın yörüngesi $y = Y(T)$ ile verilir. Z_2 simetrisi varsayarak, Israel Bağdaştırma koşulundan [44] zar üzerinde Friedmann denklemi:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_B - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho_b^2 + \frac{\mu}{a^4}$$

şeklindedir. Burada ρ_B ; bulkin enerji yoğunluğu, ρ_b ; ise zarın enerji yoğunluğudur. (Bu denklemin çıkarılışı Ek B'de gösterilmiştir).

Şimdi koordinat dönüşümü amacıyla, $y = Y(T)$ hiperyüzeyi ile dik olarak kesişen jeodezikleri düşünelim. $y = Y(T)$ yüzeyinin zamansal türden olması için bu jeodezikler uzaysal tipte ve sıfır x^i bileşenlerine sahiptir. Killing vektörleri jeodezik boyunca hareketle ilgili sabitleri belirlemek için kullanılır. Jodeziğe tanjant olan u^A 'nın, Killing

vektörüyle çarpımı jeodezik boyunca sabittir. Bu yüzden bulk uzay-zamanında ξ^A Killing vektörlerinin varlığı sebebiyle, bir jeodeziğin birim tanjant vektörü

$$g_{AB}u^A\xi^B = -E \quad (3.72)$$

$$g_{AB}u^A u^B = 1 \quad (3.73)$$

ifadelerini sağlamalıdır. Burada E integrasyon sabitidir. Bu ifadeler kullanılarak u^A vektörü

$$u^A\partial_A = \frac{E}{f(y)}\partial_T \pm \sqrt{f(y) + E^2}\partial_y \quad (3.74)$$

elde edilir. Burada u^i ler sıfır varsayılmıştır çünkü, tanjantı x^i bileşenine sahip olmayan jeodeziklerle ilgileniyoruz. Jeodeziğin yörüngesi, w afin parametre olmak üzere

$$\frac{dx^A}{dw} = u^A \quad (3.75)$$

ile verilir. (3.74) ifadesini kullanarak ve $f(y)$ yi yerine yazarak (3.75) denklemini y -bileşeni için integre edersek,

$$2y^2 + l^2(E^2 + k) = \sqrt{4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2} \cosh\left(\frac{\pm w + w_0}{2l}\right) \quad (3.76)$$

bulunur. Burada w_0 bir sabittir. Bu ifade $4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2 > 0$ halinin çözümüdür. $4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2 < 0$ ve $4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2 = 0$ halleri için çözüm farklı olmakla birlikte, daha sonra elde edilecek olan metriğin son formu, bütün durumlar için geneldir. Bu yüzden sadece bu hal için hesapları ilerleteceğiz. Şimdi E ve w_0 sabitlerini belirlemek üzere zarın ekstra koordinat üzerinde bulunduğu noktanın, orijin olarak kabul edildiği koordinat sistemine geçelim. Bu sistemde ekstra koordinat artık, noktadan geçen jeodesiğin afin parametresi olan w ile temsil edilecektir. $T=T_0$ anında jeodezik $y = Y(T)$ hiperyüzeyi ile dik olarak kesişir. Ve bu anda ayrıca zar üzerinde $w=0$ olacaktır. Bunların yardımıyla, (3.72) ve (3.76) bağıntılarından E ve w_0 sabitlerini bulabiliriz.

$$u^\mu \propto g^{\mu\nu} \partial_\nu [y - Y(T)] \quad , \quad T=T_0 \text{ da } y = Y(T_0) \quad (3.77)$$

$$2Y^2(T_0) + l^2(E^2 + k) = \sqrt{4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2} \cosh\left(\frac{w_0}{2l}\right) \quad (3.78)$$

(3.76) ifadesinin yardımıyla (3.77) denklemini çözülebilir ve (3.78) den ise w_0 sabiti çekilebilir. Böylece E ve w_0

$$E = E(T_0) = \pm Y'(T_0) \sqrt{\frac{f[Y(T_0)]}{f^2[Y(T_0)] - Y'^2(T_0)}} \quad (3.79)$$

$$w_0 = w_0(T_0) = \frac{l}{2} \cosh^{-1} \left\{ \frac{2Y^2(T_0) + l^2[E^2(T_0) + k]}{\sqrt{4l^2\mu + l^4(E^2 + k)^2}} \right\} \quad (3.80)$$

(T_0, w, x^i) bir koordinat sistemi olarak düşünülebilir. Şimdi $y = Y(T)$ hiperyüzeyi üzerinde öz zamanı temsil eden yeni bir koordinat olarak “ t ” seçelim. (T_0, w, x^i) koordinatlarının bu öz zamana göre dönüşüm katsayıları

$$e_{T_0}^t = \left(\frac{\partial t}{\partial T_0} \right)_{w, x^i} = \left(\frac{f[a(t)]}{\sqrt{f[a(t)] + \dot{a}^2(t)}} \right), \quad e_w^t = \left(\frac{\partial t}{\partial w} \right)_{T_0, x^i} = 0 \quad , \quad (3.81)$$

olur. Burada parantezin sağ altındaki koordinatlar, hangi koordinat sistemine göre dönüşüm yapıldığını ifade eder. $a(t) = Y[T_0(t)]$ dir. $a(t)$ fonksiyonu ; $y = Y(T)$ veya $w=0$ ile temsil eden hiperyüzey üzerinde tanımlı olduğu gibi, bütün koordinat yörüngesi üzerinde de tanımlıdır. Çünkü hem t hem de T_0 jeodezik boyunca sabittir. Bu koordinatta (3.79) ifadesindeki $E(T_0)$ basit bir forma sahiptir.

$$E(T_0) = \pm \dot{a}(t) \quad (3.82)$$

Burada nokta $(\partial/\partial t)_{w, x^i}$ türevini temsil eder. Şimdi (3.82) ve (3.80) ifadelerini (3.78)’e yerleştirirsek, başlangıçtaki y koordinatını, yeni koordinatlar cinsinden (t, w, x^i) elde ederiz.

$$y^2 = \varphi(t, w) a^2(t) \quad (3.83)$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.84)$$

olarak tanımlanmak üzere $\varphi(t, w)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi(t, w) = & \cosh\left(\frac{w}{2l}\right) + \frac{l^2}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \left[\cosh\left(\frac{w}{2l}\right) - 1 \right] \\ & \pm \sqrt{1 + l^2 (H^2 + ka^{-2} - \mu a^{-4})} \sinh\left(\frac{w}{2l}\right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

şeklindedir. Şimdi yeni koordinat sisteminin gerçekten bir GN koordinat sistemi olduğunu gösterelim. (3.75) bağıntısını

$$dw = g_{AB} u^A dx^B \quad (3.86)$$

biçiminde olduğunu hatırlayarak, w ile eski (T, y, x^i) koordinatları arasındaki dönüşüm katsayılarını hesaplayabiliriz. Bu ifadeyi her bir koordinat için yazarak

$$\begin{aligned} e_T^w &= \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{y, x^i} = \pm \dot{a}(t) , \\ e_y^w &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{T, x^i} = \pm \frac{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2(t)}}{f(y)} \\ e_{x^i}^w &= \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \right)_{T, y} = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

bulunur. İntegre edilebilirlik koşulu $ddw = 0$ olmasından dolayı,

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{y, x^i} dT + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{T, x^i} dy + \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \right)_{T, y} dx^i \quad (3.88)$$

eşitliğinde $\left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \right)_{T, y} = 0$ olacağı için, tekrar tam diferansiyelini alıp integre edince

$$\left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{y, x^i} dT = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{T, x^i} dy \quad (3.89)$$

bulunur. Burada integral sonucunda ortaya çıkan integrasyon sabiti sıfır kabul edilmiştir. Buradan (3.87) eşitliklerini de kullanarak,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{w,x^i} / \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{w,x^i} = - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{T,x^i} / \left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_{y,x^i} \quad (3.90)$$

$$= \mp \frac{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}}{f(y)\dot{a}} \quad (3.91)$$

Diğer yandan (3.74) deki tanjant vektörlerinin bileşenleri

$$u^T = \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)_{t,x^i} = \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)_{T_0,x^i} = \pm \frac{\dot{a}(t)}{f(y)} \quad (3.92)$$

$$u^y = \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{t,x^i} = \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{T_0,x^i} = \pm \sqrt{f(y) + \dot{a}^2(t)} \quad (3.93)$$

yazılabilir. Bu ifadeler aracılığıyla, (3.91) in tersi

$$\left(\frac{\partial t}{\partial T}\right)_{y,x^i} / \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{T,x^i} = - \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_{t,x^i} / \left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_{t,x^i} \quad (3.94)$$

$$= \mp \frac{f(y)\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}}{\dot{a}} \quad (3.95)$$

bulunur. Bütün bu işlemler sonucunda başlangıçtaki (T,y,x^i) koordinatlarından (t,w,x^i) koordinatlarına geçişi sağlayan dönüşüm katsayılarını belirlemiş oluyoruz. Bunları toplu biçimde yazacak olursak,

$$(T,y,x^i) \rightarrow (t,w,x^i) : \begin{pmatrix} e_t^T & e_w^T & e_{x^i}^T \\ e_t^y & e_w^y & e_{x^i}^y \\ e_t^{x^i} & e_w^{x^i} & e_{x^i}^{x^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & \pm \frac{\dot{a}(t)}{f(y)} & 0 \\ n_{21} & \pm \sqrt{f(y) + \dot{a}^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

$$(t, w, x^i) \rightarrow (T, y, x^i) : \begin{pmatrix} e_{tT} & e_{ty} & e_{tx^i} \\ e_{wT} & e_{wy} & e_{wx^i} \\ e_{x^iT} & e_{x^iy} & e_{x^ix^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{11} & \frac{n^{21}}{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}} & 0 \\ \pm \dot{a}(t) & \pm \frac{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}(t)}{f(y)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Bu matrislerde n_{ij} ile gösterilen bileşenlerinin değerlerini tek başına belirleyemiyoruz. Ancak iki bilinmeyen oranlarını (3.91) ve (3.95) de belirlemiş olduk. Yani

$$\begin{aligned} e_t^T / e_t^y &= n_{11} / n_{21} = \mp \frac{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}}{f(y)\dot{a}} \\ e_T^t / e_r^t &= n^{11} / n^{21} = \mp \frac{f(y)\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}}{\dot{a}} \end{aligned} \quad (3.98)$$

Bütün bu bilinenler, (t, w, x^i) koordinat sistemindeki metriği inşa etmeye yeterlidir. Şimdi metriği hesaplayalım. (3.70) metriğinde $T=T(t, w)$, $y=y(t, w)$ dönüşümü yapalım.

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right) dw = e_t^T dt + e_w^T dw \quad (3.99)$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right) dw = e_t^y dt + e_w^y dw \quad (3.100)$$

ifadelerini (3.70) de yazınca,

$$ds^2 = - \left[f \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{f} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2 + y^2 dx^{i2} + \left[- f \left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)^2 + \frac{1}{f} \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 \right] dw^2 \quad (3.101)$$

Burada (3.95) deki ifadeyi kullanarak $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \mp \frac{\sqrt{f(y) + \dot{a}^2}}{f(y)\dot{a}} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$ yazılabilir. Diğer

parantezdeki $\left(\frac{\partial T}{\partial w} \right)$ ile $\left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)$ terimlerinin karşılıkları (3.96) matrisinden yerine

konulursa,

$$ds^2 = - \frac{1}{\dot{a}^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dt^2 + y^2 (dx^i)^2 + dw^2 \quad (3.102)$$

haline gelir. Burada (3.83) eşitliğinden $(\partial y/\partial t)$ terimi hesaplanabilir ve y^2 de yerine yazılabilir. Son olarak bunları hesaplayalım. (3.83) in t 'ye göre türevini alınca,

$$\frac{\sqrt{\varphi}}{\dot{a}} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \varphi + \frac{1}{2H} \dot{\varphi} \quad (3.103)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafına Ψ dersek,

$$\frac{1}{\dot{a}^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{\Psi^2}{\varphi} \quad (3.104)$$

olacaktır. Burada Ψ ,

$$\Psi = \cosh\left(\frac{w}{2l}\right) + \frac{l^2}{2} (H^2 + \dot{H}) \left[\cosh\left(\frac{w}{2l}\right) - 1 \right] \pm \frac{1 + \frac{l^2}{2} (2H^2 + \dot{H} + ka^{-2})}{\sqrt{1 + l^2 (H^2 + ka^{-2} - \mu a^{-4})}} \sinh\left(\frac{w}{2l}\right) \quad (3.105)$$

(3.102) metriğini tekrar düzenlersek,

$$ds^2 = -\frac{\Psi^2(t, w)}{\varphi(t, w)} dt^2 + \varphi(t, w) a^2(t) dx^{i^2} + dw^2 \quad (3.106)$$

haline gelir. Sonuçta bulunan metrik GN koordinatlarda yazılmış metrik formundadır. Böylece bulka-dayalı yaklaşımın, zara-dayalı yaklaşım ile bir koordinat dönüşümü aracılığıyla birbirine dönüşen, eşdeğer yöntemler olduğu görülür.

3.8. ZARA-DAYALI VE BULKA-DAYALI YAKLAŞIM İÇİN ASİMPOTİK ANALİZ:

(3.70) metriğinin tekillik noktaları $y = 0$, $y = \infty$ ve $f(y)$ fonksiyonunu sıfır yapan $y = y_h$ değerleridir. Konformal diyagram (3.70) metriğinde $f(y) = 0$ yapan y_h değerleri

$$y_h^2 = \frac{l^2}{2} (\sqrt{k^2 + 4l^{-2}\mu} - k) \quad (3.107)$$

olarak hesaplanır. $y = y_h$ için gözlemci olay ufkuna sahiptir.

(3.76) denklemi Sch-Ads metriğinin y koordinatı ile GN metriğinin w koordinatı arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu denklemde $\cosh\left(\frac{\pm w + w_0}{2l}\right)$ teriminin katsayısının pozitif, negatif veya sıfır olmasına göre ilişki farklılaşacaktır. Öncelikle

$$(H^2 a^2 + k)^2 + 4l^{-2} \mu > 0 \quad (3.108)$$

koşulunun sağlandığını düşünelim. $k = +1,0$ için $\mu \geq 0$ ve $k = -1$ için $\mu \geq -l^2/2$ idi. Bu durumda koşul $k=+1$ için ve $k=0$ için otomatik olarak sağlanır. Böylece $w \rightarrow \infty$ iken

$$y^2 = \varphi(t, w) a^2(t) \rightarrow \infty \quad (3.109)$$

olacaktır. Ayrıca bir $w \geq 0$ değeri için y 'nin bir minimum değeri mevcuttur.

$$y^2 = \varphi(t, w) a^2(t) \geq y_{\min}^2 \quad (3.110)$$

Burada

$$y_{\min}^2 = \frac{l^2}{2} \left[\sqrt{(H^2 a^2 + k)^2 + 4l^{-2} \mu} - (H^2 a^2 + k) \right] \quad (3.111)$$

değeri sabit t altında w 'nin değişimi ile belirlenmiştir. y_{\min}^2 ifadesini veren w_{\min} değeri

$$\cosh(2l^{-1} w_{\min}(t)) = \frac{2l^{-2} a^2 + H^2 a^2 + k}{(H^2 a^2 + k)^2 + 4l^{-2} \mu} \quad (3.112)$$

şeklindedir. Zar üzerinde Friedmann denklemini göz önüne alarak $a \rightarrow 0$ iken $y_{\min}^2 \rightarrow 0$ ve $w_{\min} \rightarrow 0$ olduğu görülür. Diğer yandan bir diğer minimum değeri, sabit w altında t 'nin değişimi ile belirlenir. Bu minimum değeri y_{\min}^* ile gösterilirse, bu değer de

$\Psi(t, w) = 0$ ile aynı olduğu açıktır. Çünkü $\Psi(t, w)$ ifadesi, (3.122) denkleminin t 'ye göre kısmi türevi ile çıkarılmıştı.

μ ve k katsayılarının değerlerini yazıp karşılaştırıldığında $y_{\min}^2 \leq y_h^2$ olduğu görülür. Bu yüzden GN koordinatları olay ufkunun ve solucan deliğinin (y_h^2 eğrilerinin kesiştiği nokta) ötesindeki bölgeyi kapsar.

Bir sonraki adımda

$$(H^2 a^2 + k)^2 + 4l^{-2} \mu = 0 \quad (3.113)$$

olduğu durumu düşünelim. Bu ancak $k = -1$ değeri için mümkündür. Bu hal için $w \rightarrow \infty$ iken y^2 'nin sonlu bir değere yaklaşacağı (3.76)'dan kolayca görülür.

$$y^2 \rightarrow \frac{l^2}{2}(1 - H^2 a^2) < \frac{l^2}{2} \quad (3.114)$$

Diğer yandan yine $k = -1$ durumu için $y_h^2 > l^2/2$ olduğundan GN koordinatları olay ufkunun ötesine ulaşır.

Son olarak

$$(H^2 a^2 + k)^2 + 4l^{-2} \mu < 0 \quad (3.115)$$

halini düşünelim. Bu halde (3.76) denklemi sanal terim içermektedir. Bu durumda $y^2=0$ yapan bir $w>0$ değeri vardır. Bu nokta ufuk içinde bir tekillik noktasına karşılık gelir. Dolayısıyla GN koordinatları olay ufkunun içinde yer alır ve burada tekilliğe erişir.

3.9. KULLANILAN PROGRAMLAR:

Tezde yer alan bazı hesaplar, Maplesoft firmasının Maple 14 programıyla yapılmıştır. Programın lisansı, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projelerinin desteği ile tez projesi kapsamında temin edildi. Programın en çok kullanılmış olan bölümleri, tansörel

hesaplamalar, alan denklemlerinin bulunması, Killing Vektörlerinin hesabı gibi bölümlere ait program kodları, benzer çalışmalar yapacak olanlara yardımcı olması açısından, EK.D'de sunulmuştur.

4. BULGULAR

4.1. BULKA-DAYALI YAKLAŞIMDAN ZARA-DAYALI YAKLAŞIMA DÖNÜŞÜM

Kısım 3.7'de yapılan dönüşümü genelleştirmek için göz önüne alacağımız 5-boyutlu bulka-dayalı statik en genel anizotropik metrik

$$ds^2 = -A_0(\hat{r})d\hat{t}^2 + A_{ij}(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^j + A_4(\hat{r})d\hat{r}^2 \quad (4.1)$$

biçimindedir. Burada ekstra boyut \hat{r} koordinatı ile gösterilmiş olup, 3-lü uzayın koordinatları $i:1,2,3$ olmak üzere \hat{x}^i lerdir. Bu uzay-zaman içinde zar, ekstra koordinat üzerinde yer alan 4-boyutlu bir hiperyüzey ile temsil edilir. Zar üzerindeki koordinatları ise (τ, x^i) ile gösterelim.

(4.1) ile verilen metriğin seçiminde göz önüne alınan kıstas, uzay-zamanın sıfırdan farklı en az bir Killing vektörüne sahip olmasıdır. Killing vektörü, Killing Denklemleri olarak bilinen $\xi_{(\mu,\nu)} = 0$ denklemini sağlayan bir manifold üzerindeki vektör alanıdır. Bu denklemin fiziksel anlamı, bazı kongürans eğrileri boyunca sürüklendiğinde, metriğin değişmeden kalacağıdır. Diğer bir deyişle, Killing vektörünün varlığı, metriğin simetrisi hakkında bilgi verir. Örneğin λ jeodeziğin afin parametresi olmak üzere, bir manifoldun Killing vektörü $\xi = \partial/\partial\lambda$ ise, koordinatlarından birinin λ olarak alınabileceği bir koordinat sistemi oluşturmak daima mümkündür.

Bütün metrik katsayılarının sıfırdan ve birbirinden farklı olduğu $ds^2 = g_{AB}(\hat{r})d\hat{x}^A d\hat{x}^B$ şeklindeki bir metrik, statik en genel anizotropik metrik olmasına rağmen, böyle bir metriğin bütün Killing vektörleri sıfırdır. Bu yüzden (4.1) metriği en az bir Killing vektörüne sahip olacak şekilde (bu metriğin sıfırdan farklı yalnızca bir Killing vektörü mevcuttur) kabul edilebilecek en genel anizotropik metriktir. Çeşitli statik metrik kabulleri için Killing vektörleri Tablo 4.1 de gösterilmiştir.

Göz önüne alınan 5-boyutlu uzay-zamandaki geometrik büyüklükleri yazarken, bulktaki bu koordinat sisteminin taban vektörlerini (koordinatsal taban vektörleri), düalite bağıntısıyla tanımlanan koordinatsal 1-form tabanını,

$$e_A \equiv \partial_A \equiv \frac{\partial}{\partial \hat{x}^A} = (\partial_{\hat{t}}, \partial_{\hat{x}}, \partial_{\hat{y}}, \partial_{\hat{z}}, \partial_{\hat{r}}) \quad (4.2)$$

$$\omega^A \equiv d\hat{x}^A = (d\hat{t}, d\hat{x}, d\hat{y}, d\hat{z}, d\hat{r}) \quad (4.3)$$

ile gösterelim.

Tablo 4.1 : Farklı metrik örnekleri için $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{r})$ koordinat tabanında yazılmış Killing Vektörleri. Killing vektörlerinin hesabı için kullanılan program kodu Ek D’de sunulmuştur.

Metrik	Killing Vektörleri
$ds^2 = g_{ab}(\hat{r})d\hat{x}^a d\hat{x}^b$	$\xi^A = 0$
$ds^2 = -A_{00}(\hat{r})d\hat{t}^2 + A_{04}(\hat{r})d\hat{t}d\hat{r} + A_{ij}(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^j + A_{44}(\hat{r})d\hat{r}^2$	$\xi^A = 0$
$ds^2 = -A_0(\hat{r})d\hat{t}^2 + A_{ij}(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^j + A_4(\hat{r})d\hat{r}^2$	$\xi^1 = (1,0,0,0,0)$
$ds^2 = -f(\hat{r})d\hat{t}^2 + A_{ij}(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^j + \frac{1}{f(\hat{r})}d\hat{r}^2$	$\xi^1 = (1,0,0,0,0)$ $\xi^2 = (0,1,0,0,0)$ $\xi^3 = (0,0,1,0,0)$ $\xi^4 = (0,0,0,1,0)$
$ds^2 = -f(\hat{r})d\hat{t}^2 + a(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^i + \frac{1}{f(\hat{r})}d\hat{r}^2$	$\xi^1 = (1,0,0,0,0)$ $\xi^2 = (0,1,0,0,0)$ $\xi^3 = (0,0,1,0,0)$ $\xi^4 = (0,0,0,1,0)$ $\xi^5 = (0,-\hat{y},\hat{x},0,0)$ $\xi^6 = (0,-\hat{z},0,\hat{x},0)$ $\xi^7 = (0,0,-\hat{z},\hat{y},0)$

Bu durumda (τ, x^i) koordinatlarıyla işaretlenen zar üzerindeki koordinat tabanında, taban vektörleri ve koordinatsal taban 1- formları da

$$e_{\mu} \equiv \partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_{\tau}, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (4.4)$$

$$\omega^{\mu} \equiv dx^{\mu} = (d\tau, dx, dy, dz) \quad (4.5)$$

olacaktır. Şimdi bulka-dayalı koordinat tabanından, zar üzerindeki koordinat tabanına dönüşümü sağlayan e_{μ}^A katsayılarını belirlemeye çalışalım. Bu dönüşüm katsayılarının tanımı ve özellikleri Kısım 3.2 ve 3.3' de bahsedilmişti. Bulktan zar üzerine geçmek için en genel dönüşüm

$$\hat{t} = T(\tau) \quad \rightarrow \quad d\hat{t} = \frac{dT}{d\tau} d\tau = \dot{T}d\tau \quad (4.6)$$

$$\hat{x}^i = x^i \quad \rightarrow \quad d\hat{x}^i = dx^i \quad (4.7)$$

$$\hat{r} = R(\tau) \quad \rightarrow \quad d\hat{r} = \frac{dR}{d\tau} d\tau = \dot{R}d\tau \quad (4.8)$$

alınabilir. Burada $\dot{} \equiv \frac{d}{d\tau}$ göstermektedir. Dönüşüm sonucunda metriğin

$${}^4ds^2_{zar} = -(A_0\dot{T}^2 - A_4\dot{R}^2)d\tau^2 + A_{ij}(R(\tau))dx^i dx^j \quad (4.9)$$

halini aldığı, zar üzerinde 4-boyutlu indüklenmiş metrik elde edilir. Dönüşüm katsayıları (4.6-4.8) ifadelerinden

$$e^A_{\mu} = \begin{pmatrix} e^{\hat{t}}_{\tau} & e^{\hat{x}}_{\tau} & e^{\hat{y}}_{\tau} & e^{\hat{z}}_{\tau} & e^{\hat{r}}_{\tau} \\ e^{\hat{t}}_x & e^{\hat{x}}_x & e^{\hat{y}}_x & e^{\hat{z}}_x & e^{\hat{r}}_x \\ e^{\hat{t}}_y & e^{\hat{x}}_y & e^{\hat{y}}_y & e^{\hat{z}}_y & e^{\hat{r}}_y \\ e^{\hat{t}}_z & e^{\hat{x}}_z & e^{\hat{y}}_z & e^{\hat{z}}_z & e^{\hat{r}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{T} & 0 & 0 & 0 & \dot{R} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

olarak hesaplanır. 4-boyutlu hiperyüzeyin her noktasında, hiperyüzeye normal bir vektör alanın bileşenlerini ve 5-boyutlu bulk uzay-zamanında jeodeziklerin tanjant vektörünü temsil eden u^A vektörünün bileşenleri de (4.10)

$$u^A \equiv e^A_{\tau} = (\dot{T}, 0, 0, \dot{R}) \quad (4.11)$$

olarak yazılır.

Şimdi koordinat dönüşümü ile üzerindeki koordinatları tanımladığımız $\hat{r} = R(\hat{t})$ hiperyüzeyi (zar) ile dik olarak kesişen jeodezikleri göz önüne alalım. $\hat{r} = R(\hat{t})$ yüzeyinin zamansal türden olması için bu jeodezikler uzaysal tipte ve sıfır \hat{x}^i bileşenlerine sahip olmalıdır. Killing vektörleri jeodezik boyunca hareketle ilgili sabitleri belirlemek için kullanıldığı için, jeodeziğe tanjant olan u^A 'nın, Killing vektörüyle çarpımı jeodezik boyunca sabittir. Bu yüzden bulk uzay-zamanında ξ^A Killing vektörlerinin varlığı sebebiyle, bir jeodeziğin birim tanjant vektörü

$$g_{AB} u^A \xi^B = -E \quad (4.12)$$

$$g_{AB} u^A u^B = \begin{cases} +1 & \text{uzay cinsinden jeodezikler için} \\ -1 & \text{zaman cinsinden jeodezikler için} \end{cases} \quad (4.13)$$

ifadelerini sağlamalıdır. Burada E integrasyon sabitidir. (4.12) denkleminin çıkarılışı Ek C'de gösterilmiştir. (4.13) eşitliğinde bizim dikkate alacağımız durum uzay cinsinden jeodezikler olacaktır.

Başlangıçta ele aldığımız (4.1) metriğinin Killing vektörleri Tablo 4.1'de üçüncü satırda verilmiştir. Buna göre (4.11) ve (4.12) den

$$g_{00} u^0 \xi^0 = -A_0 \dot{T} = -E \quad , \quad \dot{T} = \frac{E}{A_0} \quad (4.14)$$

ve (4.13)' ü kullanarak,

$$g_{00}\dot{T}^2 + g_{44}\dot{R}^2 = 1 \quad , \quad \dot{R} = \pm \sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}} \quad (4.15)$$

bulunur. Topluca yazarsak,

$$u^A = \left(\frac{E}{A_0}, 0, 0, 0, \pm \sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}} \right) \quad (4.16)$$

olarak belirlenmiş olur.

Şimdi w ile jeodeziğin afin parametresini göstermek üzere, jeodeziğin yörüngesi

$$\frac{dx^A}{dw} = u^A \quad (4.17)$$

ile verilir. (τ, x^i) koordinatlarıyla tanımlı zar üzerinde bulunan her bir P noktasından dik olarak geçen w afin parametrelili bir jeodezik mevcuttur. Bu durumda bir P noktası (τ, x^i, w) koordinatlarıyla temsil edilebilir ve w ; her nokta için tanımlı yeni bir ekstra koordinat olarak düşünülebilir. Böylece zar üzerinde, yine 5-boyutlu olup bu sefer zara dayalı olan, yeni bir koordinat sistemi tanımlanmış olur.

Bu konfigürasyon sayesinde, (4.1) metriği ile verilen bulka-dayalı 5-boyutlu statik metrik, önce zar üzerindeki indüklenmiş 4-boyutlu metriği belirledikten sonra, jeodeziğin afin parametresinin yeni bir koordinat olarak ilavesiyle, zar üzerinde tanımlı, zara-dayalı 5-boyutlu metriğe dönüştürülebilir. Şimdi bu iki koordinat sistemindeki dönüşümü bulmak üzere $\hat{t} = \hat{t}(\tau, w)$, $\hat{r} = \hat{r}(\tau, w)$ dönüşümü yaparak

$$d\hat{t} = \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right) d\tau + \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial w} \right) dw = e_{\tau}^{\hat{t}} dt + e_w^{\hat{t}} dw \quad (4.18)$$

$$d\hat{r} = \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right) d\tau + \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial w} \right) dw = e_{\tau}^{\hat{r}} dt + e_w^{\hat{r}} dw \quad (4.19)$$

bunları (4.1) ifadesine yerleştirdiğimizde, metriğin zara-dayalı karşılığını belirleyebiliriz:

$$ds^2 = - \left[A_0 \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right)^2 - A_4 \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right)^2 \right] d\tau^2 + A_{ij} dx^i dx^j + \left[- A_0 \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial w} \right)^2 + A_4 \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial w} \right)^2 \right] dw^2 + 2 \left[- A_0 \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial w} \right) + A_4 \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial w} \right) \right] d\tau dw \quad (4.20)$$

(4.20)'deki zara-dayalı koordinat sistemindeki metriğin tam olarak belirlenmesi için yapılması gereken, metriğin içinde yer alan kısmi türevlerle gösterilmiş olan dönüşüm katsayılarının belirlenmesidir. Bu katsayılar, (4.16)'da verilen u^A vektörlerini, (4.17)'de yerine yazarak hesaplanabilir.

$$u^{\hat{t}} = e^{\hat{t}}_w = \frac{\partial \hat{t}}{\partial w} = \frac{E}{A_0(\hat{r})} \quad (4.21)$$

$$u^{\hat{r}} = e^{\hat{r}}_w = \frac{\partial \hat{r}}{\partial w} = \mp \sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}} \quad (4.22)$$

Yukarıdaki bağıntılardan ilki, A_0 katsayısının \hat{r} koordinatına bağlılığından dolayı integre edilemez. Ancak ikinci denklem integre edilebilir ve w ile \hat{r} arasındaki ilişkiyi verir. Böylece zara-dayalı ve bulka-dayalı yaklaşımdaki ekstra koordinatların birbiriyle ilişkisi bulunur.

$$\mp w + w_0(\tau) = \int \frac{d\hat{r}}{\sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}}} \quad (4.23)$$

(4.17) ifadesinden $(dw/dx^B) = g_{AB} u^A$ yazılabileceği için (4.21) ve (4.22) de verilen bağıntıları, metrik tansörünün uygun bileşenleri ile çarparak

$$e_{\hat{t}w} = \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{t}} \right) = -E$$

$$e_{\hat{x}^i w} = \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{x}^i} \right) = 0 \quad (4.24)$$

$$e_{\hat{r} w} = \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \right) = \pm \sqrt{\frac{A_4 (A_0 + E^2)}{A_0}}$$

şeklinde ters dönüşüm katsayıları bulunur.

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{t}} \right) d\hat{t} + \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{x}^i} \right) d\hat{x}^i + \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \right) d\hat{r} \quad (4.25)$$

tam diferansiyelinde $\left(\frac{\partial w}{\partial \hat{x}^i} \right) = 0$ olacağı için, integre edilebilirlik koşulu $ddw = 0$ kullanarak

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \hat{t}} \right) d\hat{t} = - \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \right) d\hat{r} \quad (4.26)$$

bulunur. Burada integral sonucunda ortaya çıkan integrasyon sabiti sıfır kabul edilmiştir. (4.26) bağıntısı

$$\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right) / \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right) = - \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{r}} \right) / \left(\frac{\partial w}{\partial \hat{t}} \right) \quad (4.27)$$

biçiminde yazılabilir ve (4.24)'deki bilgileri kullanarak

$$\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} \right) / \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right) = \pm \sqrt{\frac{A_4 (A_0 + E^2)}{A_0 E^2}} \quad (4.28)$$

Diğer yandan (4.20) deki dönüşümlerin tersleri de

$$\left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial w} \right) = \frac{E}{A_0} \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial w}\right) = \pm \sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}} \quad (4.30)$$

olduğu kolayca görülür. Bu ifadeler aracılığıyla, (4.28) ile verilen oranın tersi de

$$\left(\frac{d\tau}{d\hat{t}}\right) / \left(\frac{d\tau}{d\hat{r}}\right) = - \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial w}\right) / \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial w}\right) = \mp \sqrt{\frac{A_0}{A_4}} \frac{\sqrt{A_0 + E^2}}{E} \quad (4.31)$$

bulunur. Bütün bu işlemler sonucunda $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{x}^i)$ koordinatlarından (τ, w, x^i) koordinatlarına geçişi sağlayan dönüşüm katsayılarını belirlenmiş olur. Toplu halde göstermek için matris formunda yazılırsa,

$$(\hat{t}, \hat{r}, \hat{x}^i) \rightarrow (\tau, w, x^i) : \begin{pmatrix} e_{\tau}^{\hat{t}} & e_w^{\hat{t}} & e_{x^i}^{\hat{t}} \\ e_{\tau}^{\hat{r}} & e_w^{\hat{r}} & e_{x^i}^{\hat{r}} \\ e_{\tau}^{\hat{x}^i} & e_w^{\hat{x}^i} & e_{x^i}^{\hat{x}^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{E}{A_0} & 0 \\ a_{21} & \pm \frac{\sqrt{A_0 + E^2}}{\sqrt{A_0 A_4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$(t, w, x^i) \rightarrow (\hat{t}, \hat{r}, \hat{x}^i) : \begin{pmatrix} e_{\hat{t}\tau} & e_{\hat{r}\tau} & e_{\hat{x}^i\tau} \\ e_{\hat{t}w} & e_{\hat{r}w} & e_{\hat{x}^iw} \\ e_{\hat{t}x^i} & e_{\hat{r}x^i} & e_{\hat{x}^ix^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & 0 \\ -E & \pm \sqrt{\frac{A_4(A_0 + E^2)}{A_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Bu matrislerde a_{ij} ile gösterilen bileşenlerinin değerlerini tek başına belirleyemiyoruz. Ancak iki bilinmeyen oranlarını (4.28) ve (4.31) de belirlemiştik. Yani

$$\begin{aligned} e_{\tau}^{\hat{t}} / e_{\tau}^{\hat{r}} &= a_{11} / a_{21} = \mp \sqrt{\frac{A_4}{A_0}} \frac{\sqrt{A_0 + E^2}}{E}, \\ e_{\hat{t}\tau} / e_{\hat{r}\tau} &= a^{11} / a^{12} = \mp \sqrt{\frac{A_0}{A_4}} \frac{\sqrt{A_0 + E^2}}{E} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Bütün bu bilinenler, (4.20)'de verilen zara-dayalı (τ, w, x^i) koordinat sistemindeki metriği inşa etmeye yeterlidir. (4.32-4.34) ifadeleri kullanılarak, zara-dayalı (4.20) metriğinde

yerine yazıldığında, dördüncü. terim tamamen sıfırlanırken, üçüncü terimin katsayısı da 1'i verir ve

$$ds^2 = -\frac{A_0(\hat{r}(\tau, w))A_4(\hat{r}(\tau, w))}{E^2} \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau} \right)^2 d\tau^2 + A_{ij}(\hat{r}(\tau, w)) dx^i dx^j + dw^2 \quad (4.35)$$

biçimini alır. Varılan bu son metrik, zar üzerinde tanımlanmış Gaussal Normal Koordinatlarda bir metriktir. Dolayısıyla Mukohyama ve ark. [33] tarafından yapılmış olan ispatın herhangi bir statik metrik için uygulamaya hazır, genel bir formülasyonunu inşa etmiş oluyoruz. [33] referansında, bulka-dayalı statik Scwz-AdS metriğinin, GN koordinatlar formunda zara-dayalı başka bir metrik ile eşdeğer olduğunu gösterilmiştir. Başlangıçtaki bulka-dayalı Scwz-AdS metriğinin üçlü uzaysal kısımları homojen ve izotropik olduğu için bu metriğin eşdeğeri olarak bulunan zara-dayalı metrik de homojen ve izotropiktir. Ancak bu çalışmada bulka-dayalı yaklaşımı kabul eden en genel haldeki metriğin -ki bu metrik hem 3-lü uzaysal kısmı açısından hem de genel olarak tüm boyutlarda anizotropik bir metriktir- yine dönüşüm yapıldığında, üçlü uzaysal kısımlarının anizotropisinin korunduğu, zara-dayalı GN koordinatlara varılmaktadır. Ancak her iki halde de bulunan zara-dayalı metriğin GN koordinatlar formunda olması gerçekten ilgi çekici bir sonuçtur. Bununla birlikte bir diğer dikkat çekici husus, hem referans çalışmada hem de tezde elde edilen sonuçta 3-lü uzaysal kısmın, bu koordinat dönüşümünden izotropi/anizotropi açısından bakıldığında etkilenmemiş olmasıdır. Bulka-dayalı ve zara-dayalı hallerde metrik birbirinin aynısı olmayacak ancak anizotropi korunacaktır. Yani bulka-dayalı bir anizotropik (veya izotropik) metriğin zara-dayalı eşdeğeri GN koordinatlar formunda yine anizotropik (veya izotropik) bir metriktir.

Yapılan hesapları doğrulamak için (4.1) de ele alınan metriğin katsayılarını, Kısım 3.7'de ayrıntıları gösterilmiş olan Mukohyama ve ark.'nın metrik katsayıları olarak seçilirse, yani

$$A_0 = f(\hat{r}) \quad A_4 = 1/f(\hat{r}) \quad (4.36)$$

bulunan tüm hesaplar onların sonuçlarına indirgenir. Bu da yapılmış olan genelleştirmenin en azından matematiksel olarak tutarlı olduğunu göstermektedir.

Buraya kadar gösterilen hesaplarda, (4.35) ifadesi metrik katsayılarına bağlı genel formda bulunmuştur. A_0, A_4, A_j katsayılarının kesin fonksiyonel ifadelerini bilmemekle beraber (4.1) metriğinin tanımında bunların sadece \hat{r} koordinatına bağlı olduğu kabul edilmişti. Ancak yapılan koordinat dönüşümünden sonra artık $\hat{r} = \hat{r}(\tau, w)$ yazılabileceği için, (4.35)'in metrik katsayıları, artık hem τ 'ya hem de w 'ya bağlıdır. Bundan başka (4.35)'in ilk teriminde yer alan $\left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial \tau}\right)$ terimi, (4.23) integrali çözüldükten sonra bulunacak fonksiyonel ifadede türetilerek elde edilebilir. Bu aşamada dikkat edilecek bir diğer husus, çözümde yer alan E 'nin türevidir. Bulkin uzay-zamanında, zara dik olan jeodeziklerin bir hareket sabiti olarak ortaya çıkan E , zar üzerinde sabit olmak zorunda değildir ve (4.14) ve (4.15) ifadelerine bakılarak $E=E(\tau)$ olacağı görülür. Bu detaya ait ayrıntılı teorik bilgi Ek C'de sunulmuştur.

Çalışmanın bundan sonraki aşamasında özel bir metrik kabulü yapılarak eşdeğerlilik araştırılacaktır. Bu aşamada öncelikle, göz önüne alınan metrik katsayılarının kesin fonksiyonel ifadelerinin belirlenmesi gerekmektedir. Bilindiği üzere, başlangıçta yapılan bir metrik ansatzından itibaren herhangi bir metriğin metrik katsayıları, Genel Rölativite çerçevesinde Einstein Alan Denklemleri ile bulunur. (4.1) de ele aldığımız mümkün en genel anizotropik metriğin metrik katsayılarının, 5-boyutlu vakum Einstein denklemlerini kullanarak, analitik bir biçimde belirlenmesi mümkün değildir. Bu yüzden daha özel kabullere ihtiyaç vardır. Bir sonraki kısımda çözümünü kendimiz belirlediğimiz bir anizotropik metrik için ve bir de literatürden seçilmiş izotropik bir bulka-dayalı metrik için dönüşüm uygulanarak eşdeğerleri araştırılmıştır.

4.2. YÖNTEMİN BAZI ÖZEL MODELLER İÇİN UYGULAMALARI:

Bu bölümde, Kısım 4.1 de genelleştirdiğimiz bulka-dayalı yaklaşımdan zara-dayalı yaklaşıma geçişi gösteren yöntemin, farklı modellerdeki etkilerini araştırarak hesaplar sunulacaktır. (4.1) ifadesinde verilen en genel bulka-dayalı anizotropik modelin analitik

çözümünün mümkün olmadığına değinmiştik. Bu durumda daha basit kabuller yapılarak, analitik çözüme imkân veren modeller ele alınmalıdır.

İki koordinat sistemi arasındaki dönüşümü yaparken, (4.23) ile verilen integral kilit noktasını oluşturmaktadır. Bu integralin çözümü ile bulka-dayalı ve zara-dayalı sistemlerin ekstra koordinatları arasındaki bağıntı elde edilir. Ele alınacak bulka-dayalı modele karşılık düşen zara-dayalı metriğin net olarak bulunabilmesi için, sadece metrik katsayılarının analitik çözümlerinin biliniyor olması yetmez, dönüşümün belirlenebilmesi ayrıca, bu integralin analitik çözümünün olup olmamasına da bağlıdır. Bu amaçla bir çok metrik kabulü için çözümleri araştırıp, literatürde çözümü sunulmuş olan farklı uzay-zamanları, tezin bulguları kapsamında inceledik. Bunların içinden yukarıda bahsedilen koşulları sağlayacak şekilde anizotropik metrik olarak, Mukohyama ve ark.'nın çalışmasında göz önüne alınan Scwz-AdS metriğinin anizotropik bir genelleştirmesini yaparak Einstein Alan denklemlerinden çözümünü bulduk. İzotropik bir model olarak da, literatürden seçtiğimiz GM (Gergely-Maartens) metriği olarak bilinen başka bir bulka-dayalı metriği inceledik.

4.2.1. Anizotropik Model:

Literatürde zar-evren modellerinde anizotropik metriğin ele alındığı birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların hepsini teker teker inceledikten sonra [45-66] onlardan farklı bir metrik seçerek çözümünü araştırdık.

Schw-AdS metriğinin anizotropik bir genelleştirmesi olarak

$$ds^2 = -f(\hat{r})d\hat{t}^2 + \hat{r}^2 \left(a(\hat{r})d\hat{x}^2 + b(\hat{r})d\hat{y}^2 + c(\hat{r})d\hat{z}^2 \right) + \frac{1}{f(\hat{r})}d\hat{r}^2 \quad (4.37)$$

metriğini göz önüne alalım. Bu metrik üç boyutlu uzay-zamanın anizotropik olduğu bulka-dayalı bir metriktir. 5-boyutlu Einstein Alan Denklemleri'nin

$${}^{(5)}G_{AB} = {}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}{}^{(5)}R = -\Lambda_5{}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2{}^{(5)}T_{AB} \quad (4.38)$$

⁽⁵⁾ $T_{AB}=0$ alındığı vakum durumu göz önüne alındığında (4.37) metriği için denklemler

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{c''}{c} \right) + \left(\frac{f'}{4} + \frac{2f}{\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) - \frac{f}{4} \left(\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \left(\frac{b'}{b} \right)^2 + \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) \\ + \frac{f}{4} \left(\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' c'}{a c} + \frac{b' c'}{b c} \right) + \frac{3f'}{2\hat{r}} + \frac{3f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \end{aligned} \quad (4.39a)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \left(\frac{b''}{b} + \frac{c''}{c} \right) + \left(\frac{f'}{2} + \frac{3f}{2\hat{r}} \right) \left(\frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) - \frac{f}{4} \left(\left(\frac{b'}{b} \right)^2 + \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) + \frac{f}{4} \left(\frac{b' c'}{b c} \right) + \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2\hat{r}} + \frac{f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \end{aligned} \quad (4.39b)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{c''}{c} \right) + \left(\frac{f'}{2} + \frac{3f}{2\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{c'}{c} \right) - \frac{f}{4} \left(\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) + \frac{f}{4} \left(\frac{a' c'}{a c} \right) + \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2\hat{r}} + \frac{f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \end{aligned} \quad (4.39c)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} \right) + \left(\frac{f'}{2} + \frac{3f}{2\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} \right) - \frac{f}{4} \left(\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right) + \frac{f}{4} \left(\frac{a' b'}{a b} \right) + \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2\hat{r}} + \frac{f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \end{aligned} \quad (4.39d)$$

$$\left(\frac{f'}{4} + \frac{f}{\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) + \frac{f}{4} \left(\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' c'}{a c} + \frac{b' c'}{b c} \right) + \frac{3f'}{2\hat{r}} + \frac{3f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \quad (4.39e)$$

olarak hesaplanır. Burada üst tırnak \hat{r} 'ya göre türevi temsil etmektedir. (4.39b,c,d) denklemlerini toplayarak

$$\begin{aligned} f \left(\frac{a''}{a} + \frac{b''}{b} + \frac{c''}{c} \right) + \left(f' + \frac{3f}{\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) - \frac{f}{2} \left(\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \left(\frac{b'}{b} \right)^2 + \left(\frac{c'}{c} \right)^2 \right) \\ + \frac{f}{4} \left(\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' c'}{a c} + \frac{b' c'}{b c} \right) + \frac{3f''}{2} + \frac{3f'}{2\hat{r}} + \frac{3f}{\hat{r}^2} = 3\Lambda_5 \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilen denklem (4.39a) ile birçok ortak terim içermektedir. (4.39a) yı iki ile çarpıp, (4.40)den çıkararak

$$\left(\frac{f'}{2} - \frac{f}{\hat{r}} \right) \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) - \frac{f}{4} \left(\frac{a' b'}{a b} + \frac{a' c'}{a c} + \frac{b' c'}{b c} \right) + \frac{3f''}{2} - \frac{3f'}{2\hat{r}} - \frac{3f}{\hat{r}^2} = \Lambda_5 \quad (4.41)$$

ve son olarak da (4.39e) yi kullanarak (4.41) ifadesi

$$f'' + \frac{f'}{2} \left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} \right) = \frac{4\Lambda_5}{3} \quad (4.42)$$

şeklinde bir diferansiyel denklem verir. Bu denklem çözüldüğünde, Kısım 4.1'de bahsedilen dönüşüm uygulamak için bize yeterli olacak f fonksiyonu belirlenmiş olur. Bu aşamada a , b ve c fonksiyonları için özel bir seçim yapalım. 3-boyutlu uzay-zaman yine anizotropik olacak şekilde, birbirinden farklı üç tane kuvvet serisi şeklinde fonksiyon olsun, yani p , q , k birbirinden farklı sabitler olmak üzere

$$a(\hat{r}) = \hat{r}^p, \quad b(\hat{r}) = \hat{r}^q, \quad c(\hat{r}) = \hat{r}^k \quad (4.43)$$

alınabilir. Denklemlerde yazıldığında (4.42) ifadesi

$$f'' + \frac{f'}{2\hat{r}}(p+q+k) = \frac{4\Lambda_5}{3} \quad (4.44)$$

haline indirgenir ve çözümü

$$f(\hat{r}) = \frac{4\Lambda_5}{3(p+q+k+2)} \hat{r}^2 - \frac{C_1 \hat{r}^{1-\frac{(p+q+k)}{2}}}{1-\frac{p+q+k}{2}} + C_2 \quad (4.45)$$

olarak hesaplanır. Burada C_1 ve C_2 sabitlerdir. Bu çözümü (4.39e)'ye uygulayarak aşağıdaki sınırlayıcı koşullar elde edilir.

$$\begin{aligned} \Lambda_5 [3(p+q+k) + pk + pq + kq + 18] &= 0 \\ \frac{C_1}{4(p+q+k-2)} \hat{r}^{1-\frac{(p+q+k)}{2}} [p(p+2) + q(q+2) + k(k+2)] &= 0 \\ \frac{C_2}{\hat{r}^2} [4(p+q+k) + pk + pq + kq + 12] &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

C_1 ve C_2 katsayılarının sıfırdan farklı olması halinde, bu denklemlerin birinci ve üçüncüsünden parantezleri sıfır yapacak şekilde p, q, k sayılarının

$$p + q + k = 6 \quad (4.47)$$

koşulunu sağlaması gerekir ve bu sonuç (4.46)'nın ikinci denkleminde kullanıldığında,

$$p^2 + q^2 + k^2 = -12 \quad (4.48)$$

eşitliği bulunur. Bu sonuç, sanal olması sebebiyle tutarlı değildir. Bu durumda (4.48) ifadesi, (4.46) nın ikinci denkleminde geldiği için, bu denklemde yer alan C_1 sabitinin sıfır olması ihtimalini düşündürür. Gerçekten de eğer (4.39e) denklemini $a(\hat{r}) = \hat{r}^p$, $b(\hat{r}) = \hat{r}^q$, $c(\hat{r}) = \hat{r}^k$ yazıp yeniden düzenlersek,

$$\frac{f'}{2\hat{r}} \left(\frac{p+q+k}{2} + 3 \right) + \frac{f}{\hat{r}^2} \left(\frac{pq+kq+pk}{4} + 3 \right) = \Lambda_5 \quad (4.49)$$

bulunur ve $\left(\frac{p+q+k}{2} + 3 \right) = \alpha$, $\left(\frac{pq+kq+pk}{4} + 3 \right) = \beta$ diyerek, denklemin çözümü,

$$f(\hat{r}) = \frac{\Lambda_5}{\alpha + \beta} \hat{r}^2 + C r^{-2\beta/\alpha} \quad (4.50)$$

sonucunu verir. (4.45)'deki $f(\hat{r})$ çözümü, alan denklemlerinden türetilen bir denklemden ve (4.50) çözümü de yine alan denklemlerinden çıkarılmış olduğu için birbirlerini sağlamalıdır. Sonuçta iki çözüm karşılaştırıldığında (4.50)'deki $r^{-2\beta/\alpha} = r^0 = 1$ olduğu ve çözümde tek bir sabitin olacağı anlaşılır. Bu durumda $f(\hat{r})$ fonksiyonunun yeniden düzenlenmiş haldeki genel çözümü, $p + q + k = 6$ koşulunu da kullanarak

$$f(\hat{r}) = \frac{4\Lambda_5}{3(p+q+k+2)} \hat{r}^2 + C = \frac{\Lambda_5}{6} \hat{r}^2 + C \quad (4.51)$$

bulunur.

Bulunanlar ışığında, bu bölümün en başında göz önüne alınan (4.37) anizotropik metriği

$$ds^2 = -\left(\frac{\Lambda_5}{6} \hat{r}^2 + C\right) d\hat{t}^2 + \hat{r}^2 (\hat{r}^p d\hat{x}^2 + \hat{r}^q d\hat{y}^2 + \hat{r}^k d\hat{z}^2) + \frac{1}{\left(\frac{\Lambda_5}{6} \hat{r}^2 + C\right)} d\hat{r}^2 \quad (4.52)$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Şimdi çözümünü bulduğumuz bulka-dayalı anizotropik metriğin Kısım 4.1'de genel formalizmini oluşturduğumuz dönüşümü uygulayarak, zara-dayalı eşdeğerini belirleyelim. Öncelikle (4.23) ile verilen iki ekstra koordinat arasındaki ilişkiyi belirlemeye yarayacak olan integral, $A_0 = f(\hat{r}) = \left(\frac{\Lambda_5}{6} \hat{r}^2 + C\right)$, $A_4 = 1/f(\hat{r})$ olarak

$$\mp w + w_0 = \int \frac{d\hat{r}}{\sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}}} = \int \frac{d\hat{r}}{\sqrt{\frac{\Lambda_5}{6} \hat{r}^2 + C + E^2}} \quad (4.53)$$

integralinin çözümü

$$\mp w + w_0(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{6}{\Lambda_5}} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{6}{\Lambda_5}} \frac{\hat{r}}{C + E^2} \right) & C + E^2 > 0 \text{ için} \\ \sqrt{\frac{6}{\Lambda_5}} \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{6}{\Lambda_5}} \frac{\hat{r}}{C + E^2} \right) & C + E^2 < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (4.54)$$

olur. $\hat{t} = \hat{t}_0$ anında, jeodezik $\hat{r}(\hat{t}_0) = R(\hat{t}_0(\tau))$ hiper yüzeyi ile dik olarak kesişir ve bu yüzey üzerinde $w=0$ dır. Bu koşulu w_0 'ı belirlemek için kullandıktan sonra, (4.54) den \hat{r} ile w arasındaki bağıntı,

$$\hat{r} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6} + \frac{R(\tau)}{C + \dot{R}^2(\tau)}} (C + \dot{R}^2(\tau)) \sinh\left(\mp \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) + R(\tau) \cosh\left(\mp \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) & C + E^2 > 0 \text{ için} \\ \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6} - \frac{R(\tau)}{C + \dot{R}^2(\tau)}} (C + \dot{R}^2(\tau)) \sin\left(\mp \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) + R(\tau) \cos\left(\mp \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) & C + E^2 < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (4.55)$$

olarak bulunur. Burada $E = \dot{R}$ ve $H = \frac{\dot{R}}{R}$ yazılmıştır. $\partial \hat{r} / \partial \tau$ hesaplayıp (4.35)'de gösterilen genel haldeki zara-dayalı metrik ifadesinde yazarak, (4.52)'nin zara-dayalı eşdeğer metriği

$$ds^2 = -\Phi(\tau, w) d\tau^2 + \hat{r}^2 (\hat{r}^p dx^2 + \hat{r}^q dy^2 + \hat{r}^k dz^2) + dw^2 \quad (4.56)$$

elde edilir. Buradaki $\Phi(\tau, w)$ fonksiyonunun açık hali aşağıda verilmiştir ve $\hat{r}(\tau, w)$ ise, (4.55) deki ifadeden yerine konmalıdır.

$$\Phi(\tau, w) = \begin{cases} \frac{1}{HR} \left\{ \cosh\left(\mp \sqrt{\Lambda_5/6} w\right) + \varphi(\tau) \sinh\left(\mp \sqrt{\Lambda_5/6} w\right) \right\} & C + E^2 > 0 \\ \frac{1}{HR} \left\{ \cos\left(\mp \sqrt{\Lambda_5/6} w\right) + \varphi(\tau) \sin\left(\mp \sqrt{\Lambda_5/6} w\right) \right\} & C + E^2 < 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{\left(\frac{4\Lambda_5}{6} (H^2 R^2 + C)(H^2 + \dot{H}) \pm \frac{C}{R} \pm R(3H^2 + \dot{H}) \right)}{\sqrt{\frac{\Lambda_5}{6} \left(\frac{C}{RH} + RH \right)^2 \pm R \left(1 + \frac{C}{R^2 H^2} \right)}} \quad (4.58)$$

(4.58) de + hiperbolik çözüme, - de trigonometrik çözüme karşı düşen halleri gösterir

(4.52) ile verilen bulka-dayalı metrik Frolov'un [68] bir çalışmasında yer alan Kasner-AdS metriği olarak adlandırmış metriğe bazı açılardan benzemektedir. Frolov 3-lü uzaysal metriğin zamana bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde kabul edildiği

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + r^2(t^{2a}dx^2 + t^{2b}dy^2 + t^{2c}dz^2) + \frac{1}{f(r)}dr^2 \quad (a,b,c=\text{sabit}) \quad \text{biçimindeki}$$

metriği incelemiştir. Bu durumdaki $f(r)$ çözümü, $K=-1,0,1$ olmak üzere

$$f(r) = K + \frac{r^2}{l^2}, \quad \left(\Lambda = -\frac{6}{l^2} \right) \quad \text{olarak bulunmuştur. Frolov, } w = -l \ln(r/l) \text{ dönüşümü}$$

yaparak, Rundall-Sundrum modelindeki bulk metriğinin anizotropik versiyonunu elde eder:

$$ds^2 = e^{-2w/l} (dt^2 + t^{2a}dx^2 + t^{2b}dy^2 + t^{2c}dz^2) + dw^2 \quad (4.59)$$

Bu metrikte $w=0$ alındığında 4-boyutlu uzay-zamanın metriği elde edilir ve bu metrik Kasner metriğidir.

Bizim metriğimiz ise farklı olarak zamana değil ekstra koordinata bağlı statik bir metriktir. (4.56) metriğinde, \hat{r} koordinatının (4.55) ile verilen τ - w cinsinden ifadesi yerine yazıldığında, kuvvet fonksiyonları hiperbolik (veya eliptik) fonksiyonların kuvvetlerine dönüşecektir. Eğer bizim zara-dayalı çözümümüzde $w=0$ alınırsa, her iki hal için de, (4.56)'daki $\Phi(\tau, w)$ fonksiyonu $\Phi(\tau) = \frac{1}{HR}$ ve \hat{r} koordinatı da (4.55)'den

$\hat{r} = R(\tau)$ olur. Bu durumda zar üzerinde indüklenmiş 4-boyutlu metrik

$$ds^2 = \frac{1}{H(\tau)R(\tau)} d\tau^2 + R^2(\tau) [R^p(\tau)dx^2 + R^q(\tau)dy^2 + R^k(\tau)dz^2] \quad (4.60)$$

haline gelir. Zar üzerindeki enerji-momentum tansörünün seçimine bağlı olarak, $R(\tau)$ ölçek çarpanı belirlenebilir.

Bulkün (4.52) ile temsil edilen metriği, tekillik noktaları $\hat{r} = 0$ $\hat{r}^2 = \hat{r}_h^2 = -\frac{6C}{\Lambda_5}$ ve

$\hat{r} = \infty$ olan bir karadeliği ifade eder. $\hat{r}_h^2 = -\frac{6C}{\Lambda_5}$ değeri, gözlemci için olay ufkudur.

(4.52) metriğine şeklen benzeyen, ancak 2+1 boyutlu uzay-zamanda tanımlanmış bir metrik literatürde BTZ Karadeliği (M. Banados, C. Teitelboim ve J. Zanelli) olarak

bilinir [70]. Diğer yandan (4.52) ile gösterdiğimiz metrikte, $C=1$, $k^2 = \Lambda_5 / 6$, $(\hat{r}^p d\hat{x}^2 + \hat{r}^q d\hat{y}^2 + \hat{r}^k d\hat{z}^2) = d\sigma^2$ yazılırsa,

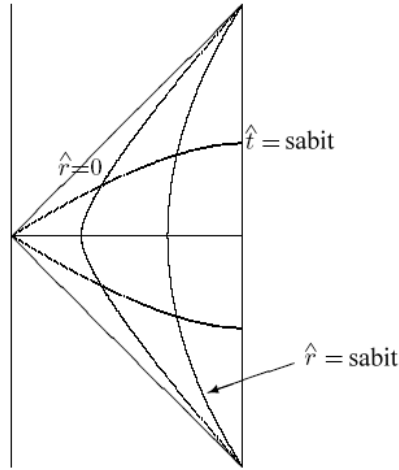
$$ds^2 = -(k^2 \hat{r}^2 + 1) d\hat{t}^2 + \hat{r}^2 d\sigma^2 + \frac{1}{(k^2 \hat{r}^2 + 1)} d\hat{r}^2 \quad (4.61)$$

literatürde yaygın olarak bilinen, sabit negatif eğrilikli Lorentz manifoldunu temsil eden Anti-deSitter uzay-zamanının hiperpolar koordinatlardaki formu elde edilir. Bizim metriğimizden tek farkı, üçlü uzay-zamanın küresel simetriye sahip izotropik bir metrik olmasıdır. Dolayısıyla, bulkta bir karadelik formunu ifade eden (4.52) metriğinin aslında konformal olarak düz bir uzay-zamanı temsil ettiğini gösterir. Bizim metriğimiz için, Anti-deSitter uzayına yapılan böyle bir eşleşmenin ancak $p=q=k$ olduğu izotropik durumda mümkün olduğunu belirtmeliyiz.

Diğer yandan, uzay-zamanın yapısını kağıt üzerinde göstermek için kullanılan konformal diyagramları çizmek için, uzaysal koordinatların sabit alındığı düzleme indirildiğinde, bizim metriğimizin de konformal diyagramı Anti-deSitter olacaktır. $x = y = z = \text{sabit}$ alındığı (\hat{t}, \hat{r}) düzleminde metrik

$$ds^2 = -(k^2 \hat{r}^2 + 1) d\hat{t}^2 + \frac{1}{(k^2 \hat{r}^2 + 1)} d\hat{r}^2 \quad (4.62)$$

olarak yazılabilir. Literatürde, Anti-deSitter uzay zamanını tasvir eden konformal diyagramlar farklı çeşitlerde karşımıza çıkmaktadır. Bunun sebebi uzay-zamanın çok sayıda farklı dönüşümle farklı koordinat sistemlerine yatırılabilmesi ve bu şekillerin bu koordinatlarda çizilmiş olmasıdır. Bu konuda geniş ve ayrıntılı bir bilgi [72]'de bulunabilir. (4.62)'deki metriğin koordinatlarını muhafaza ederek (\hat{t}, \hat{r}) düzlemindeki konformal diyagram Şekil 4.1 gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Anti-deSitter uzayının iki boyutlu konformal diyagramı. Yatay çizgiler sabit \hat{t} , dikey çizgiler de sabit \hat{r} yörüngelerini gösterir.

Ekstra koordinatların asimptotik davranışlarını incelerken, iki ekstra koordinat arasındaki ilişkinin verildiği (4.55)'den görüleceği gibi \hat{r} ile w 'nın davranışı benzerdir.

Daha iyi anlaşılması için $\frac{\Lambda_5}{6} = \frac{R(\tau)}{C + \dot{R}^2(\tau)} \left(1 - \frac{R(\tau)}{C + \dot{R}^2(\tau)} \right)$ olarak (4.55)'i

$$\hat{r} = \begin{cases} R(\tau) \exp\left(\mp \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) & C + E^2 > 0 \text{ için} \\ R(\tau) \exp\left(\mp i \sqrt{\frac{\Lambda_5}{6}} w\right) & C + E^2 < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (4.63)$$

olarak yazalım. Pozitif ölçek çarpanı durumunda $w \rightarrow \infty$ iken, + işaret için $\hat{r} \rightarrow \infty$, - işaret için $\hat{r} \rightarrow 0$ olacaktır. Gözlemcinin olay ufkuna yaklaşırken $\hat{r}_h^2 \rightarrow -\frac{6C}{\Lambda_5}$, w da sabit bir değerde kalacaktır.

4.2.2. İzotropik Model:

Einstein'in statik evreninin zar-evren modelinin genelleştirilmesinin yapıldığı [30] referansında elde edilen sonuçlar, tezde ele aldığımız dönüşümün uygulanmasına imkân verecek özelliktedir. Ele alınan statik metrik,

$$\Gamma^2 ds^2 = -F^2(\hat{r}, \varepsilon) d\hat{t}^2 + d\hat{\chi}^2 + \mathfrak{R}^2(\hat{\chi}, \varepsilon)(d\hat{\theta}^2 + \sin^2 \hat{\theta} d\hat{\phi}^2) + d\hat{r}^2 \quad (4.64)$$

şeklindedir. Burada

$$\mathfrak{R}(\hat{\chi}, \varepsilon) = \begin{cases} \sin \hat{\chi} & \varepsilon = 1 \\ \hat{\chi} & \varepsilon = 0 \\ \sinh \hat{\chi} & \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (4.65)$$

ve Γ ; $\kappa^2 \Lambda_5 = 3\varepsilon \Gamma^2$ bağıntısı aracılığıyla tanımlanan ve,

$$G_{AB} = -\kappa^2 \Lambda_5 g_{AB} \quad (4.66)$$

5-boyutlu alan denklemlerinde yer alan kozmolojik sabitin büyüklüğünü veren bir sabittir. $\varepsilon = 0, \pm 1$ ise kozmolojik sabitin işaretini verir. $\varepsilon = 0$ için, Γ kaldırılabilir bir sabittir. (4.66) denkleminde, (4.64) metriğinin çözümü,

$$F(\hat{r}, \varepsilon) = \begin{cases} A \cos(\sqrt{2}\hat{r}) + B \sin(\sqrt{2}\hat{r}) & \varepsilon = 1 \\ A + \sqrt{2}B\hat{r} & \varepsilon = 0 \\ A \cosh(\sqrt{2}\hat{r}) + B \sinh(\sqrt{2}\hat{r}) & \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (4.67)$$

olarak bulunur. Burada A ve B sabitlerdir. Bu metriğin 3-lü uzaysal kısımları izotropik olup, tüm boyutlar üzerinden bakıldığında ise anizotropik olduğunu vurgulayalım.

Şimdi (4.19) integralinde $A_0 = F^2(\hat{r}, \varepsilon)$ ve $A_4 = 1$ olarak integrali çözebiliriz.

$$\mp w + w_0(\tau) = \int \frac{d\hat{r}}{\sqrt{\frac{F^2 + E^2}{F^2}}} \quad (4.68)$$

ε 'nin üç farklı değerine karşılık gelen haller için integralin çözümleri

$$\mp w + w_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \left[\frac{\sqrt{a^2 x^2 + cx + b^2}}{(c^2 - 4ab)|x|} 2i(ax - b)(2ab - c) \right] & \varepsilon = 1 \\ \frac{\sqrt{(A + \sqrt{2B}\hat{r})^2 + E^2}}{\sqrt{2B}} & \varepsilon = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 y^2 + \gamma y + \beta^2}}{(4\alpha\beta - \gamma^2)|y|} 2(\alpha y - \beta)(2\alpha\beta - \gamma) \right] & \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (4.69)$$

şeklinde hesaplanır. Bu ifadelerde yer alan terimler ise şöyledir: $\varepsilon = 1$ çözümünde

$$x = \exp(i2\sqrt{2}\hat{r}), \quad a = \frac{A}{2} + \frac{B}{2i}, \quad b = \frac{A}{2} - \frac{B}{2i}, \quad c = 2ab + E^2 \quad \text{ve } \varepsilon = -1 \quad \text{çözümünde}$$

$$y = \exp(2\sqrt{2}\hat{r}), \quad \alpha = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}, \quad \beta = \frac{A}{2} - \frac{B}{2}, \quad \gamma = 2\alpha\beta + E^2$$

Basitlik açısından bundan sonraki hesapları sadece $\varepsilon = 0$ çözümü için yapacağız, diğer çözümler için benzer prosedür uygulanabilir. (4.69)'den \hat{r} ile w arasındaki bağıntı

$$(A + \sqrt{2B}\hat{r})^2 + E^2 = 2B^2(\mp w + w_0)^2 \quad (4.70)$$

biçimindedir. Buradaki w_0 integrasyon sabitini belirlemek için $\hat{t} = \hat{t}_0$ anında jeodezik $\hat{r}(\hat{t}_0) = R(\hat{t}_0)$ hiper yüzeyi ile dik olarak kesiştiği ve bu yüzey üzerinde $w=0$ olduğu anı alınarak (4.70)'da yazıldığında

$$(A + \sqrt{2B}R)^2 + E^2 = 2B^2 w_0^2 \quad (4.71)$$

ve

$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{2B}} \left\{ \left(\mp \sqrt{2B}w + \sqrt{A + \sqrt{2B}R + E^2} \right)^2 - E^2 \right\}^{1/2} - \frac{A}{\sqrt{2B}} \quad (4.72)$$

olur. Bu bağıntıda yer alan $R(\hat{t}_0) = R(\hat{t}_0(\tau))$ büyüklüğü, hiper yüzey üzerinde öz zamanı temsil eden τ 'ya bağlıdır ve genelleştirirsek her bir $\hat{t} = \hat{t}_n$ anında hiperyüzeyin ölçek çarpanını ifade eder. Bu yüzden $R(\hat{t}_0(\tau)) = R(\tau)$ yazılabilir. Kısım 4.1'de yer alan tüm hesaplar $A_0 = (A + \sqrt{2B\hat{r}})^2$ ve $A_4 = 1$ yazılarak tekrarlanırsa, son olarak (4.64) de verilen bulka-dayalı metrik, sözkonusu seçim için

$$ds^2 = -\Psi(\tau, w)d\tau^2 + d\chi^2 + \mathfrak{R}^2(\chi, \varepsilon)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dw^2 \quad (4.73)$$

haline gelir. Burada $H = \frac{\dot{R}}{R}$ olmak üzere

$$\Psi(\tau, w) = \sqrt{2B^2(\bar{\tau}w + w_0)^2 - H^2 R^2} \left\{ \frac{(A + \sqrt{2BR})(\bar{\tau}w + w_0)}{HR w_0} + \left(\frac{\dot{H}}{H} + H\right) \frac{(\bar{\tau}w)}{\sqrt{2Bw_0}} \right\} \quad (4.74)$$

dir. Burada, denkemin daha derli toplu görünmesi açısından, türev alındıktan sonra (4.71)'deki ifadesine dayanarak w_0 kapalı formda bırakılmıştır.

(4.71) ile gösterilen metrik seçilen model için GN koordinatlardaki zara-dayalı eşdeğer metriktir. GN koordinatlarında yazılmış metrik elde edildikten sonra, zar üzerinde indüklenmiş metriğin bulunması, çok kolay bir biçimde ekstra koordinat sıfır seçilerek bulunur. (4.71) ile elde ettiğimiz sonuçta $w=0$ aldıktan sonra

$$ds^2 = -\Psi(\tau)d\tau^2 + d\chi^2 + \mathfrak{R}^2(\chi, \varepsilon)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.75)$$

haline gelecek olan (4.73) ifadesi, $\int \Psi(\tau)d\tau = 1$ sağlayan bir dönüşümle

$$ds^2 = -d\tau^2 + \Phi(\tau)d\chi^2 + \mathfrak{R}^{*2}(\tau, \varepsilon)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.76)$$

formunda yazılabilir ki bu 4-boyutlu Kantowski-Sach metriğinden başkası değildir [67].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının amacı, zara-dayalı ve bulka-dayalı yaklaşımların arasındaki eşdeğerliliğin araştırılmasında kullanılan yöntemi, sadece belli bir uzay-zaman için değil, göz önüne alınabilecek tüm statik uzay-zaman formlarına uyarlanabilecek şekilde genelleştirmek ve zar-evren kozmolojisinde öneme sahip bazı modeller için eşdeğerlerini araştırmaktır.

Son on yıldır teorik kozmolojide önemli yer tutan zar-evren modellerine dair bugüne kadar pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar, tezde eşdeğerliliğini araştırdığımız iki yaklaşımdan birini temel alır. Çok sayıda alternatif model için, iki farklı yöntemi kullanan çok sayıda çalışma yayınlanmış olup, bu durum genel çerçeveden teoriye bakışı zorlaştırarak kimi zaman karışıklığa sebep olmaktadır. Bu sebeple, yaklaşımlar arasındaki eşdeğerliliğin araştırılması, eşdeğer modellerin ilişkilendirilmesini sağlayarak, zar-evren modellerinin teorisine bir sınıflandırma getirmesi açısından önemlidir.

Literatürde bu iki yaklaşımın eşdeğer olduğunu gösteren iki çalışma bulunmaktadır. Bunlardan birincisinde [33] bulka-dayalı yaklaşımdan hareketle Scwz-AdS tipi statik bir bulk metriğinin bir çeşit koordinat dönüşümüyle zara-dayalı bir GN koordinatlarına eşdeğer olduğu gösterilmiş, ikincisinde ise [34], önceki çalışmanın tersine, Taub'un çözümü genelleştirilerek, zara-dayalı yaklaşımdan bulka-dayalı yaklaşıma geçiş gösterilmiştir. Ancak her iki çalışmada da eşdeğerlik, spesifik bir metrik kabulü için ispatlanmıştır. Başka bir model sözkonusu olduğunda ve özellikle de bizim ilgi alanımıza giren anizotropik modeller durumunda, eşdeğerliliğin ne şekilde olacağına dair literatürde bir çalışma bulunmamaktadır. Tez çalışmasında özellikle ekstra boyutlu hiperyüzeylerin geometrisi üzerinde durularak bulgular elde edilmiştir.

Tez kapsamında, bulka-dayalı yaklaşımdan zara-dayalı yaklaşıma geçmek için kullanılan dönüşüm, mümkün olan en genel hal için yeniden inşa edilmiş ve elde edilen tüm denklemler, Mukohyama ve ark.'nın [33] ele aldığı özel duruma indirgenebilmektedir. Böylece onların seçimi olan uzay-zaman için elde ettikleri bulgular, hesaplarımız tarafından kapsanmış durumdadır. Varılan sonuçlarda en dikkat

çekici özellik, bulka-dayalı olarak alınan statik metrik ne olursa olsun, onun zara-dayalı eşdeğeri, (4.33) ifadesiyle gösterilen, zar üzerinde indüklenmiş metriğin belirlenmesinde en kullanışlı koordinatlar olan GN koordinatlar formundadır. Ancak doğal olarak, anizotropik modeller için 3-lü uzaysal kısımların anizotropisi, yine GN koordinatlarda da kendini gösterir. Dolayısıyla bulka-dayalı yaklaşımdan zara-dayalı yaklaşıma geçildiğinde, anizotropi büyüklük olarak farklılaşmakla birlikte yine mevcuttur.

Bulgular kısmının ikinci aşamasında, eşdeğerliliğini araştırmak üzere ele aldığımız anizotropik bulka-dayalı metriğin, 5-boyutlu Einstein denklemlerinden hareketle kesin çözümleri bulunmuştur. Bu metrik, Mukohyama ve ark.'nın metriğinin anizotropik bir genelleştirmesi olup, bulka-dayalı koordinatlarda BTZ karadeliği olarak bilinen bir karadeliğin metriğine benzemektedir. Farklı olarak BTZ karadeliği 3-boyutlu uzay-zamanın bir doğrultuya indirildiği 1+2 boyutlu bir uzay-zamanda tanımlıdır. Ancak BTZ karadeliğinin, sözkonusu makalede de belirtildiği gibi [70] sıfır elektrik yüküne sahip olması durumunda aslında Anti de Sitter bir manifoldudur. Göz önüne aldığımız modelin zara-dayalı eşdeğerinin de, zarın ekstra koordinatı w 'nın etkisiyle, $C + E^2$ büyüklüğünün pozitif (veya negatif) olmasına göre hiperbolik (yada eliptik) bir evrim sergileyen zarı temsil ettiği bulunmuştur. Zara-dayalı metrikte ekstra koordinat sabit seçilip, zar üzerindeki 4-boyutlu uzay-zamana ait bulduğumuz indüklenmiş metriğin yapısı Kasner uzay-zamanı olarak bilinen metriğin formundadır.

Son olarak tez çalışmasında, literatürden seçtiğimiz [30] bir diğer model için eşdeğerliliğin araştırılmasına yer verilmiştir. Sözkonusu metriğin 3-lü uzaysal kısımlarının homojen ve izotrop olmasından dolayı, varılan eşdeğer metrikte, ekstra koordinatın etkisi sadece zaman boyutundadır. Zar üzerinde indüklenmiş metrik de Kantowski-Sach modelinin eşdeğeridir.

Genelleştirmiş olduğumuz eşdeğerlilik araştırma yöntemi, farklı modellerin incelenmesinde ilerideki çalışmalara kaynak oluşturacaktır. Ayrıca GN koordinatlardaki eşdeğer metrik, 4-boyutlu hiperyüzey üzerinde indüklenmiş metriğin kolayca bulunmasına sağladığı için, zar üzerinde indüklenmiş Einstein Alan Denklemleri'ni [10] başlangıç kabul eden çalışmalara da alternatif bir yol sunar. Ancak zar üzerindeki 4-

boyutlu uzay-zamanın enerji ve momentumu temsil eden kaynakların etkisi, bu yöntemde açıkça yer almamaktadır. İndüklenmiş metrikte yer alan fonksiyonların kesin ifadeleri, zarın enerji-momentum tansörünün seçimine göre değişecektir.

Takip eden bir çalışma olarak ise, çok kapsamlı bir inceleme gerektirmesi sebebiyle teze dahil edemediğimiz 3-boyutlu diyagramların çiziminin incelenmesi alınabilir. Marolf tarafından geliştirilen [73], uzay-zamanın 3-boyutlu düz bir uzaya yatırılması yöntemiyle, görsel olarak daha anlaşılır konformal diyagramlar çizilmektedir. Bu yöntemde önce 3-boyutlu düz uzay-zamana nasıl yatırılacağını belirleyen fonksiyonların belirlenmesi ardından uzay cinsinden ve zaman cinsinden bölgeler için ayrıntılı bir analiz yapılması gerekmektedir. Tezde çözümünü bulduğumuz BTZ karadeligini de içeren uzay-zaman bu açıdan incelenebilir. Tezden sonra yapılması planlanan bir diğer çalışma ise, Kısım 4.2.2’de ele alınan metriği kullanarak, Birkhoff teoreminin geçerliliğinin tezdekinden farklı bir metodla incelendiği çalışmanın [69] sonuçları ile tezde bulunmuş olan sonuçların karşılaştırılmasıdır. Böyle karşılaştırmalı bir analizle, tezde geliştirilen yöntemin farklı kullanımları için yön gösterecektir..

KAYNAKLAR

- [1] HORAWA, P., WITTEN, E., 1996, Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions, *Nucl. Phys. B*460, 506 .
- [2] HORAWA, P., WITTEN, E., 1996, Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary, *Nucl. Phys. B*475, 94 .
- [3] ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S., DVALI, G., 1998, The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter, *Phys. Lett B*429, 263.
- [4] ANTONIADIS, I., ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S., DVALI, G., 1998, New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV, *Phys. Lett B*436, 257.
- [5] ARKANI-HAMED, N., DIMOPOULOS, S., DVALI, G., 1999, Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Sub-Millimeter Dimensions and TeV Scale Quantum Gravity, *Phys. Rev. D*59, 086004.
- [6] CULLEN, S., PERELSTEIN, M., 1999, SN1987A Constraints on Large Compact Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 83, 268.
- [7] HALL, L.J., SMITH, D., 1999, Cosmological Constraints on Theories with Large Extra Dimensions, *Phys. Rev. D*60, 085008.
- [8] RANDALL, L., SUNDRUM, R., 1999, A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3370.
- [9] RANDALL, L., SUNDRUM, R., 1999, An Alternative to Compactification, *Phys.Rev.Lett.*83, 4690.
- [10] SHIROMIZU, T., MAEDA, K., SASAKI, M., 2000, The Einstein Equations on the 3-Brane World, *Phys. Rev. D*62, 024012.
- [11] BINETRUY, P., DEFFAYET, C., LANGLOIS, D., 2000, Non-conventional cosmology from a brane-universe, *Nucl.Phys.B* 565:269-287.
- [12] CSAKI, C., GRAESSER, M., KOLDA, C., TERNING, J., 1999, Cosmology of one extra dimension with localized gravity, *Phys. Lett. B* 462, p. 34.
- [13] KALOPEP, N., 1999, Bent Domain Walls as Braneworlds, *Phys.Rev. D*60, 123506.
- [14] BINETRUY, P., DEFFAYET, C., ELLWANGER, U., LANGLOIS, D., 2000, Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant, *Phys.Lett.B*477:285-291.

- [15] LUKAS, A., OVRUT, B. A., WALDRAM, D., 1999, Cosmological Solutions of Horava-Witten Theory, *Phys.Rev. D60*, 086001
- [16] LUKAS, A., OVRUT, B. A., WALDRAM, D., 2000, Boundary Inflation, *Phys.Rev. D61*, 023506
- [17] DVALI, G., HENRY TYE, S.H., 1999, Brane Inflation, *Phys.Lett. B450* 72-82.
- [18] KALOPEL, N., LINDE, A., 1999, Inflation and Large Internal Dimensions, *Phys.Rev.D59*:101303.
- [19] CLINE, J.M., GROJEN, C., SERVANT, G., Cosmological Expansion in the Presence of Extra Dimensions, 1999, *Phys.Rev.Lett. 83* , 4245.
- [20] KIM, H.B., KIM, H.D., 2000, Inflation and Gauge Hierarchy in Randall-Sundrum Compactification, *Phys.Rev. D61*, 064003.
- [21] DEWOLFE, O., FREEDMAND, Z., GUBSER, S.S., KARCH, A., 2000, Modeling the fifth dimension with scalars and gravity, *Phys.Rev.D62*: 046008.
- [22] KANTI, P., KOGAN, I.I., OLIVE, K.A., POSPELOV, M., 1999, Cosmological 3-Brane Solutions, *Phys.Lett.B468*:31-39.
- [23] CLINE, J., GROJEAN, C., SERVANT, G., 2000, Inflating Intersecting Branes and Remarks on the Hierarchy Problem, *Phys.Lett. B 472*.
- [24] VOLLIK, D.N., 2001, Cosmology on a Three-Brane, *Class.Quant.Grav. 18*, 1-10.
- [25] STOICA, H., HENRY-TYE, S.H., WASSERMAN, I., 2000, Cosmology in the Randall-Sundrum Brane World Scenario, *Phys.Lett.B 482*:205-212.
- [25] KRAUS, P., Dynamics of Anti-de Sitter Domain Walls, 1999, *JHEP 9912*, 011.
- [26] CHAMBLIN, H.A., REALL, H.S., 1999, Dynamic Dilatonic Domain Walls, *Nucl.Phys.B562*: 133-157.
- [27] CHAMBLIN, A., PERRY, M.J., REALL, H.S., 1999, Non-BPS D8-branes and Dynamic Domain Walls in Massive IIA Supergravities, *JHEP 9909*: 014.
- [28] APOSTOPOULOS, P. S., TETRADIS, N., 2004, Brane Cosmology with Matter in the Bulk. I, *Class.Quant.Grav. 21*, 4781-4792
- [29] IDA, D., 2000, Brane-world Cosmology, *JHEP 0009*, 014.
- [30] GERGELY, L., MAARTENS, R., 2002, Brane-world generalizations of the Einstein static universe, *Class.Quant.Grav. 19*, 213-222.

- [31] FABRI, A., LANGLOIS, D., STEER, D.A., ZEGERS, R., 2004, Brane cosmology with an anisotropic bulk, *JHEP* 0409 :025.
- [32] A.COMPOS, R. MAARTENS, D.MATRAVERS, C.F.SOPUERTA, 2003, Braneworld Cosmological Models with Anisotropy, *Phys.Rev. D*68, 103520.
- [33] MUKOHYAMA, S., SHIROMIZU, T., MAEDA, K., 2000, Global Structure of Exact Cosmological Solutions in Brane World, *Physical Review D, V* 63, 024028.
- [34] BOWCOCK, P., CHARMOUSIS, C., GREGORY, R., 2000, General brane cosmologies and their global spacetime structure, *Class.Quant.Grav.* 17, 4745-4764
- [35] KALUZA, T., 1921, On The Problem Of Unity In Physics, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 966-972.
- [36] NORDSTRÖM, G., 1914, On the Possibility of a Unification of the Electromagnetic and Gravitational Fields, *Zeits.Phys.* 15, 504
- [37] KLEIN, O., 1926, Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity, *Zeits.Phys.* 37, 895
- [38] HOYLE, C.D., SCHMIDT, U., HECKEL, B. R., ADELBERGER, E. G., GUNDLACH J. H., KAPNER, D. J., SWANSON, H. E., 2001, Sub-millimeter Tests of the Gravitational Inverse Square Law: A Search for ‘Large’ Extra Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 86, 1418.
- [39] HOYLE, C.D., SCHMIDT, U., HECKEL, B. R., ADELBERGER, E. G., GUNDLACH J. H., KAPNER, D. J., SWANSON, H. E., 2004, Sub-millimeter Tests of the Gravitational Inverse Square Law, *Phys. Rev. D* 70, 042004.
- [40] WINITZKI, S., Drawing Conformal Diagrams for a Fractal Landscape, 2005, *Phys.Rev.D*71 , 123523.
- [41] MAROLF, D., Spacetime Embedding Diagrams for Black Holes, 1999, *Gen.Rel.Grav.* 31, 919-944
- [42] HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R., 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 0-521-20016-4.
- [43] POISSON, E., 2004, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 0-521-83091-5.
- [44] ISRAEL, W., 1966, Singular Hypersurfaces and Thin Shells in General Relativity, *Nuovo Cimento* 44B, 1-14
- [45] HEYDARI-FARD, M., SEPANGI, H.R., 2007, Anisotropic Brane Gravity with a Confining Potential, *Phys.Lett.B* 649:1-11.

- [46] GUSTAVO, N., PADILLA, A., KUNDURI, H.K., 2008, Braneworld Isotropization and Magnetic Fields, *JCAP* 04 012.
- [47] MAARTENS, R., SAHNI, V., SAINI, T.D., 2001, Anisotropy Dissipation in Brane-world Inflation, *Phys.Rev. D63* , 063509.
- [48] LANGLOIS, D., MAARTENS, R., SASAKI, M., WANDS, D., 2001, Large-Scale Cosmological Perturbations on the Brane, *Phys.Rev.D63*: 084009.
- [49] FROLOV, A.V., 2001, Kasner-AdS Spacetime and Anisotropic Brane-world Cosmology, *Phys.Lett. B514*, 213-216
- [50] SANTOS, M.G., VERNIZZI, F., FERREIRA, P.G., 2001, Isotropy and Stability of the Brane, *Phys.Rev. D64* , 063506.
- [51] PAUL, B.C., 2001, Inflationary Cosmologies in an Anisotropic Brane World, *Phys. Rev. D64* , 124001.
- [52] VACARU, S.I., GONTSA, D., 2006, Off-diagonal Metrics and Anisotropic Brane Inflation, *Geometry Balkan Press*, Chapter 9.
- [53] BRUNI, M., DUNSBY, P.K.S., 2002, Singularities on the Brane aren't Isotropic, *Phys.Rev. D66*, 101301.
- [54] HERVIK, S., 2003, Chaos and Brane-worlds, *Astrophys.Space Sci.* 283, 673-678.
- [55] COLEY, A.A., HERVIK, S., 2003, Brane-world Singularities, *Class.Quant.Grav.* 20 , 3061-3070
- [56] AGUIRREGABIRIA, J.M., CHIMENTO, L.P., LAZKOZ, R., 2004, Anisotropy and Inflation in Bianchi I Brane Worlds, *Class. Quant. Grav.* 21 , 823-830.
- [57] KOYAMA, K., 2003, Cosmic Microwave Radiation Anisotropies in Brane Worlds, *Phys.Rev.Lett.* 91 , 221301.
- [58] DUNSBY, P.K.S., GOHEER, N., BRUNI, M., COLEY, A., 2004, Are Braneworld Born Isotropic?, *Phys.Rev. D69* , 101303.
- [59] HARKO, T., MAK, M.K., 2004, Anisotropy in Bianchi-type Brane Cosmologies, *Class. Quant.Grav.* 21 , 1489-1504.
- [60] CASALI, A.G., ABDALLA, E., 2004, Brane World Cosmological Perturbations, *Phys.Rev. D70*, 043542.
- [61] NATH, S., CHAKRABORTY, S., DEBNATH, U., 2004, Anisotropic Brane Cosmology with Variable G and Lambda, *JCAP* 0411, 012.

- [62] CHIBA, T., TAKAHASHI, R., SUGIYAMA, N., 2005, Classifying the Future of Universes with Dark Energy, *Class.Quant.Grav.* 22 , 3745-3758.
- [63] TOPORENSKY, A.V., TRETYAKOV, P.V., 2005, Recollapsing Bianchi I Brane Worlds, *Grav.Cosmol.* 11, 226-228.
- [64] ANANDA, K.N., BRUNI, M., 2006, Cosmo-dynamics and Dark Energy with a Quadratic EoS: Anisotropic Models, Large-scale Perturbations and Cosmological Singularities, *Phys.Rev.* D74, 023524.
- [65] YUROV, A.V., ASTASHENOK, A.V., YUROV, V.A., 2008, The Dressing Procedure for Cosmological Equations and the Indefinite Future of the Universe, *Grav.Cosmol.*14: 8-16.
- [66] FABBRI, A., LANGLOIS, D., STEER, D.A., ZEGERS, R., 2004, Brane Cosmology with an Anisotropic Bulk, *JHEP* 0409:025.
- [67] GERGELY, L.A., 2003, A Homegeneous Brane-world Universe, *Class. Quant. Grav.* 21 (2004) 935-940
- [68] FROLOV,A.V., 2001, Kasner–AdS spacetime and anisotropic brane-world cosmology, *Physics Letters B* 514, 213-216.
- [69] KERESZTES,Z., GERGELY, L.A, 2008, On the validity of the five-dimensional Birkhoff theorem: the tale of an exceptional case, *Class. Quantum Grav.* 25, 165016
- [70] BAÑADOS, M., TEITELBOIM, C., ZANELLI, J., (1992) The Black Hole in Three Dimensional Space Time, *Phys.Rev.Lett.* 69 1849-1851
- [71] CADEAU, C., WOOLGAR., E., (2001) New Five Dimensional Black Holes Classified by Horizon Geometry, and a Bianchi VI Braneworld, *Class. Quant. Grav.* 18 527-542
- [72] BENGTTSSON, I., SANDÍN, P., (2006), Anti-de sitter space, squashed and stretched, *Class. Quant. Grav.* 23 97, <http://www.physto.se/~ingemar/Kurs.pdf>
- [73] GIBLÍN, J.T., MAROLF, D., GARVEY, R., (1999), Spacetime Embedding Diagrams for Black Holes, *Gen.Rel.Grav.* 31, 919-944.

EKLER

EK A. SCHWARZCHILD-ANTI-DE SITTER METRİĞİNİN HESABI:

$$ds^2 = -f(y)dt^2 + y^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + \frac{1}{f(y)} dy^2 \quad (\text{A.1})$$

metriğinde yer alan $f(w)$ fonksiyonu belirlenmesi için Einstein Alan Denklemlerinin oluşturulup çözülmesi gerekir.

Öncelikle metrik katsayıları

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} -f(y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{(1-kr^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f(y)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$g_{AB}g^{AB} = \delta_A^A$ koşulunu sağlayacak şekilde g^{AB} katsayıları da

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f(y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-kr^2)}{y^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{y^2 r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{y^2 r^2 \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f(y) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

olacaktır. Şimdi

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2} g^{AD} \left(\partial_B^{(5)} g_{CD} + \partial_C^{(5)} g_{BD} - \partial_D^{(5)} g_{BC} \right) \quad (\text{A.4})$$

bağıntısından Christoffel sembollerini hesaplayalım. $\partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_1 = \partial/\partial r$, $\partial_2 = \partial/\partial \theta$, $\partial_3 = \partial/\partial \varphi$, $\partial_4 = \partial/\partial y$ olmak üzere Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri;

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{04} &= \frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)} \\
\Gamma^1_{11} &= \frac{kr}{(1-kr^2)}, \quad \Gamma^1_{14} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^1_{22} = -(1-kr^2)r, \quad \Gamma^1_{33} = -(1-kr^2)r \sin^2 \theta \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{24} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \cot \theta, \quad \Gamma^3_{34} = \frac{1}{y} \\
\Gamma^4_{00} &= \frac{1}{2} f(y) f'(y), \quad \Gamma^4_{11} = -\frac{f(y)y}{(1-kr^2)}, \quad \Gamma^4_{22} = -f(y) r^2 y \\
\Gamma^4_{33} &= -f(y) r^2 y \sin^2 \theta, \quad \Gamma^4_{44} = -\frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

şeklinindedir. Burada “ \cdot ” ; y 'ye göre türevi temsil etmektedir.

$${}^{(5)}R^A_{BCD} = \partial_C \Gamma^A_{BD} - \partial_D \Gamma^A_{BC} + \Gamma^E_{BD} \Gamma^A_{EC} - \Gamma^E_{BC} \Gamma^A_{ED} \tag{A.6}$$

ifadesinden Riemann tansörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R^0_{101} &= \frac{1}{2} f'(y) f(y) \frac{y}{(1-kr^2)} \\
{}^{(5)}R^0_{202} &= \frac{1}{2} f'(y) f(y) y r^2 \\
{}^{(5)}R^0_{303} &= \frac{1}{2} f'(y) f(y) y r^2 \sin^2 \theta \\
{}^{(5)}R^0_{404} &= \frac{1}{2} f''(y) \\
{}^{(5)}R^1_{212} &= \frac{y^2 r^2 [k - f(y)]}{(1-kr^2)}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$${}^{(5)}R^1_{313} = \frac{y^2 r^2 \sin^2 \theta [k - f(y)]}{(1 - kr^2)}$$

$${}^{(5)}R^2_{323} = y^2 r^4 \sin^2 \theta [k - f(y)]$$

$${}^{(5)}R^1_{414} = -\frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)} \frac{y}{(1 - kr^2)}$$

$${}^{(5)}R^2_{424} = -\frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)} yr^2$$

$${}^{(5)}R^3_{434} = -\frac{1}{2} \frac{f'(y)}{f(y)} yr^2 \sin^2 \theta$$

olarak hesaplanır. Riemann tansörünün bir kere büzülmesiyle elde edilecek olan Ricci tansörü de

$${}^{(5)}R_{00} = -\frac{3}{2} \frac{f'(y)f(y)}{y} - \frac{1}{2} f''(y)f(y)$$

$${}^{(5)}R_{11} = \frac{f'(y)y + 2f(y) - 2k}{(1 - kr^2)}$$

$${}^{(5)}R_{22} = [f(y)y + 2f(y) - 2k]r^2$$

$${}^{(5)}R_{22} = [f(y)y + 2f(y) - 2k]r^2 \sin^2 \theta \quad (\text{A.8})$$

$${}^{(5)}R_{44} = \frac{3}{2} \frac{f'(y)f(y)}{y} + \frac{1}{2} f''(y)f(y)$$

bulunur. Ricci tansörünün bir kere daha büzülmesiyle bulunan Ricci Skaler Eğriliği

$${}^{(5)}R = f''(y) + \frac{6f'(y)}{y} + \frac{6f(y)}{y^2} - \frac{6k}{y^2} \quad (\text{A.9})$$

şeklinde bulunur. Şimdi $T_{AB}=0$ olarak

$${}^{(5)}G_{AB} = {}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}R = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{AB} \quad (\text{A.10})$$

alan denklemlerini yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
(0-0) \quad & \left(\frac{3}{2} \frac{f'(y)}{y} + \frac{3f(y)}{y^2} - \frac{3k}{y^2} \right) f(y) = \Lambda_5 f(y) \\
(1-1) \quad & \left(-\frac{1}{2} f''(y) - 2 \frac{f'(y)}{y} - \frac{f(y)}{y^2} + \frac{k}{y^2} \right) \frac{y^2}{(1-kr^2)} = -\Lambda_5 \frac{y^2}{(1-kr^2)} \\
(2-2) \quad & \left(-\frac{1}{2} f''(y) - 2 \frac{f'(y)}{y} - \frac{f(y)}{y^2} + \frac{k}{y^2} \right) y^2 r^2 = -\Lambda_5 y^2 r^2 \quad (\text{A.11}) \\
(3-3) \quad & \left(-\frac{1}{2} f''(y) - 2 \frac{f'(y)}{y} - \frac{f(y)}{y^2} + \frac{k}{y^2} \right) y^2 r^2 \sin^2 \theta = -\Lambda_5 y^2 r^2 \sin^2 \theta \\
(4-4) \quad & \left(-\frac{3}{2} \frac{f'(y)}{y} - \frac{3f(y)}{y^2} + \frac{3k}{y^2} \right) \frac{1}{f(y)} = -\Lambda_5 \frac{1}{f(y)}
\end{aligned}$$

Hemen görüldüğü gibi (0-0) ile (4-4) denklemi ve (1-1),(2-2),(3-3) denklemleri de birbirinin aynıdır. Bu denklemlerden herhangi biri $f(y)$ fonksiyonunu hesaplamak için kullanılabilir. Kolaylık olsun diye (0-0) (veya (4-4) denklemi) ele alınabilir. Bu birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$f(y) = k + \frac{y^2}{l^2} - \frac{\mu}{y^2} \quad (\text{A.12})$$

sonucunu verir. Burada μ ; bir sabit ve $l^2 = -\Lambda/6$ dır. $k = +1, 0, -1$ değerleri için metriğin üç-boyutlu uzaysal kısmının geometrisinin sırasıyla, küre, düzlem ve hiperboloid olduğunu ifade eder.

EK B. ZAR ÜZERİNDE FRIEDMANN DENKLEMİ:

Zarın $w = 0$ noktasında bulunduğu, Gaussal Normal koordinat sisteminde metriği

$$ds^2 = -n^2(t, w) dt^2 + a^2(t, w) \gamma_{ij} dx^i dx^j + dw^2 \quad (\text{B.1})$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

biçiminde zar üzerinde uzaysal koordinatların metriğidir. Bu metrikten hareketle Einstein Alan Denklemlerini hesaplayalım. Öncelikle metrik katsayıları

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} -n^2(t,w) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t,w)}{(1-kr^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t,w)r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t,w)r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$g_{AB}g^{AB} = \delta_A^A$ koşulunu sağlayacak şekilde g^{AB} katsayıları da

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} -n^2(t,w) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t,w)}{(1-kr^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t,w)r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2(t,w)r^2 \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

olacaktır. Şimdi

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2} g^{AD} \left(\partial_B g_{CD} + \partial_C g_{BD} - \partial_D g_{BC} \right) \quad (\text{B.5})$$

bağıntısından Christoffel sembollerini hesaplayalım. $\partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_1 = \partial/\partial r$, $\partial_2 = \partial/\partial \theta$, $\partial_3 = \partial/\partial \varphi$, $\partial_4 = \partial/\partial w$ olmak üzere Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri ;

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{n}(t,w)}{n(t,w)}, \quad \Gamma^0_{04} = \frac{n'(t,w)}{n(t,w)}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{a(t,w)\dot{a}(t,w)}{n^2(t,w)(1-kr^2)},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{a(t,w)\dot{a}(t,w)r^2}{n^2(t,w)} \quad , \quad \Gamma^0_{33} = \frac{a(t,w)\dot{a}(t,w)r^2 \sin^2 \theta}{n^2(t,w)} \quad , \\
\Gamma^1_{01} &= \frac{\dot{a}(t,w)}{a(t,w)} \quad , \quad \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{(1-kr^2)} \quad , \quad \Gamma^1_{14} = \frac{a'(t,w)}{a(t,w)} \quad , \\
\Gamma^1_{22} &= -(1-kr^2)r \quad , \quad \Gamma^1_{33} = -(1-kr^2)r \sin^2 \theta \quad (B.6) \\
\Gamma^2_{02} &= \frac{\dot{a}(t,w)}{a(t,w)} \quad , \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^2_{24} = \frac{a'(t,w)}{a(t,w)} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma^3_{03} &= \frac{\dot{a}(t,w)}{a(t,w)} \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^3_{23} = \cot \theta \quad , \quad \Gamma^3_{34} = \frac{a'(t,w)}{a(t,w)} \\
\Gamma^4_{00} &= n(t,w) n'(t,w) \quad , \quad \Gamma^4_{11} = -\frac{a(t,w)a'(t,w)}{(1-kr^2)} \quad , \\
\Gamma^4_{22} &= -a(t,w)a'(t,w)r^2 \quad , \quad \Gamma^4_{33} = -a(t,w)a'(t,w)r^2 \sin^2 \theta \quad ,
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada “ $\dot{\cdot}$ ” ; t 'ye göre , “ $'$ ” ; w 'ya göre türevi temsil etmektedir. Yazım kolaylığı için bundan sonra kısaca $a(t,w) \equiv a$, $n(t,w) \equiv n$ ile gösterelim.

$${}^{(5)}R^A_{BCD} = \partial_C \Gamma^A_{BD} - \partial_D \Gamma^A_{BC} + \Gamma^E_{BD} \Gamma^A_{EC} - \Gamma^E_{BC} \Gamma^A_{ED} \quad (B.7)$$

ifadesinden Riemann tansörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R^0_{101} &= \frac{a}{n(1-kr^2)} \left[-\ddot{a}n + \dot{a}\dot{n} + a'n'n^2 \right] \\
{}^{(5)}R^0_{202} &= \frac{ar^2}{n} \left[-\ddot{a}n + \dot{a}\dot{n} + a'n'n^2 \right] \\
{}^{(5)}R^0_{303} &= \frac{ar^2 \sin^2 \theta}{n} \left[-\ddot{a}n + \dot{a}\dot{n} + a'n'n^2 \right] \\
{}^{(5)}R^0_{404} &= nn'' \\
{}^{(5)}R^0_{114} &= \frac{a}{n(1-kr^2)} \left[\dot{a}'n - \dot{a}n' \right] \\
{}^{(5)}R^0_{224} &= \frac{ar^2}{n} \left[\dot{a}'n - \dot{a}n' \right] \\
{}^{(5)}R^0_{334} &= \frac{ar^2 \sin^2 \theta}{n} \left[\dot{a}'n - \dot{a}n' \right] \quad (B.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R^1_{212} &= \frac{a^2 r^2}{n^2(1-kr^2)} \left[\dot{a}^2 - a'^2 n^2 + kn^2 \right] \\
{}^{(5)}R^1_{313} &= -\frac{a^2 r^2 \sin^2 \theta}{n^2(1-kr^2)} \left[\dot{a}^2 - a'^2 n^2 + kn^2 \right] \\
{}^{(5)}R^1_{414} &= -\frac{aa''}{(1-kr^2)} \\
{}^{(5)}R^2_{323} &= \frac{a^2 r^4 \sin^2 \theta}{n^2} \left[\dot{a}^2 - a'^2 n^2 + kn^2 \right] \\
{}^{(5)}R^2_{424} &= -aa''r^2 \\
{}^{(5)}R^3_{434} &= -a''ar^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Riemann tansörünün bir kere büzülmesiyle elde edilecek olan Ricci tansörü de

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{\dot{n}\dot{a}}{na} - n^2 \left(3\frac{n'a'}{na} + \frac{n''}{n} \right) \\
{}^{(5)}R_{04} &= 3\frac{\dot{a}'}{a} - 3\frac{n'\dot{a}}{na} \\
{}^{(5)}R_{ij} &= \gamma_{ij} \left[-\frac{\ddot{a}a}{n^2} + \frac{\dot{a}a\dot{n}}{n^3} + \frac{aa'n'}{n} - \frac{2\dot{a}^2}{n^2} + 2a'^2 + aa'' - 2k \right] \\
{}^{(5)}R_{44} &= \frac{n''}{n} + \frac{3a''}{a}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

bulunur. Ricci tansörünün bir kere daha büzülmesiyle bulunan Ricci Skaler Eğriliği

$${}^{(5)}R = 2 \left[\frac{n''}{n} + \frac{3a''}{a} + \frac{3a'^2}{a^2} + \frac{3a'n'}{an} - \frac{3\ddot{a}}{a^2 n^2} + \frac{3\dot{a}\dot{n}}{an^3} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2 n^2} - \frac{3k}{a^2} \right] \tag{B.10}$$

şeklinde bulunur. Şimdi $T^A_B = \text{diag}(-\rho, p, p, p, 0)$ olarak

$${}^{(5)}G_{AB} = {}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}R = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{AB} \tag{B.11}$$

alan denklemlerini yazabiliriz.

$$(0-0) \quad -3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3n^2\left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right) - 3k\frac{n^2}{a^2} = \Lambda_5 n^2 - \kappa_5^2 \rho$$

$$(0-4) \quad 3\left(\frac{\dot{a}'}{a} - \frac{a'n'}{an}\right) = 0 \quad (\text{B.12})$$

(i-j)

$$\frac{a^2}{n^2}\gamma_{ij}\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) - a^2\gamma_{ij}\left(2\frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} + \frac{a'^2}{a^2} + 2\frac{a'n'}{an}\right) + k\gamma_{ij} = -\Lambda_5 a^2\gamma_{ij} + \kappa_5^2 \rho$$

$$(4-4) \quad 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{a}\dot{n}}{an}\right) - 3\left(\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'n'}{an}\right) + 3\frac{k}{a^2} = -\Lambda_5$$

Einstein Alan Denklemlerinin (0-4) bileşeni integre edilirse,

$$\dot{a}(t, w) = v(t)n(t, w) \quad (\text{B.13})$$

Bulunur. Daha sonra (0-0) bileşeni w 'ya göre, (4-4) bileşeni t 'ye göre integre edilince “ilk integrali” verir:

$$(aa')^2 - v^2 a^2 - ka^2 + \frac{\Lambda_5}{6} a^4 + C = 0 \quad (\text{B.14})$$

Burada C integrasyon sabitidir. Diğer yandan Israel Bağdaştırma koşulundan,

$$\left(\frac{n'}{n}\right)_{0^+} = \frac{\kappa_5^2}{6}(3p + 2\rho) \quad , \quad \left(\frac{a'}{a}\right)_{0^+} = \frac{\kappa_5^2}{6}\rho \quad (\text{B.15})$$

bağıntıları hesaplanır. Bunları (B.14) denkleminde yerleştirip, $w=0$ için yazarsak,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = \frac{\kappa_5^4}{36}\rho^2 + \frac{\Lambda_5}{6} - \frac{k}{a^2} + \frac{C}{a^4} \quad (\text{B.16})$$

Friedmann denklemi elde edilir. Sıfır alt indisi, $w=0$ daki evrimi ifade eder.

EK C. KILLING VEKTÖRLERİ :

Bir ξ Killing vektörü, Killing denklemleri olarak bilinen aşağıdaki denklemi sağlayan bir vektör alanını temsil eder.

$$L_{\xi} g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (C.1)$$

burada L_{ξ} Lie türevidir. Lie türevi, önüne gelen geometrik büyüklüğün, ξ tanjant vektörüne sahip kongürans eğrileri boyunca ötelendiğinde nasıl değişeceğini ifade eder. (C.1) de gösterilen Killing denklemi de, metriğin kongürans eğrileri boyunca ötelenmesi durumunda değişmeden kalacağını, dolayısıyla Killing vektörünün tanjant olduğu yörüngelerin, en azından yerel olarak manifoldun bir simetrisini oluşturacağını söyler.

Killing denkleminin daha genel hali olarak

$$L_{\xi} g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} = \chi g_{\alpha\beta} \quad (C.2)$$

yazılabilir. Bu durumda χ bir skaler alan olmak üzere, yörünge üzerinde ötelenirken metriktaki değişimin kendisiyle orantılı kalacaktır. χ ölçek faktörü manifold üzerinde noktadan noktaya değişebilir. Bu en genel durumda Killing vektörlerine, doğrudan metrikte değil de, eğrilik üzerinde invariant değişikliklere sebep olduğu için Konformal Killing Vektörleri denir. Eğer χ sıfırdan farklı bir sabit ise bu durumda Killing vektörlerinin homotetik olduğu söylenir.

Killing vektörlerinin oldukça kullanışlı bir özelliği de, verilen bir jeodezik boyunca hareket sabitlerinin belirlenmesindeki rolüdür. u^{α} ; λ afin parametrelili bir jeodeziğin tanjantı olsun. Killing vektörü ile u^{α} 'nın çarpımı jeodezik boyunca sabittir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (u^{\alpha} \xi_{\alpha}) &= (u^{\alpha} \xi_{\alpha})_{;\beta} u^{\beta} \\ &= u^{\alpha}{}_{;\beta} u^{\beta} \xi_{\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (C.3)$$

Burada ikinci terim $\xi_{\alpha;\beta}$ 'nin antisimetrik, $u^\alpha u^\beta$ 'nin ise simetrik bir tansör olmasından dolayı, simetrik ve antisimetrik tansörün çarpımının sıfır olması sebebiyle sıfırdır. İkinci terim ise yaygın olarak bilinen

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (\text{C.4})$$

şeklindeki jeodezik denkleminin tanjant vektörü $u^\alpha = \dot{x}^\alpha$ cinsinden yazılmasıyla elde edilen

$$u^\alpha_{;\beta} u^\beta = 0 \quad (\text{C.5})$$

sebebiyle sıfırdır. Dolayısıyla Killing vektörü ile u^α çarpımı hareket sabitini verir.

$$(u^\alpha \xi_\alpha) = \text{sabit} = E \quad (\text{C.7})$$

Konunun fiziksel yorumu için E.Poisson'un kitabında [43] yer alan bir örneğe yer verelim.

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{C.8})$$

şeklindeki statik, küresel simetrik bir metriği göz önüne alalım. $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ olmak üzere, metriğin Killing vektörleri

$$\xi_{(t)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}, \quad \xi_{(\phi)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi} \quad (\text{C.9})$$

şeklindedir. u^α 'nin tanjant olduğu jeodezikler üzerinde

$$E = -u_\alpha \xi_{(t)}^\alpha, \quad L = -u_\alpha \xi_{(\phi)}^\alpha \quad (\text{C.10})$$

büyüklikleri sabittir. Eğer jeodezik zaman cinsinden bir jeodezik ise ve u^α da jeodezik üzerinde hareket den bir taneciğin 4-lü vektörü ise, E ve L sırasıyla birim kütle başına enerji ve açısal momentuma tekabül eder.

Zar-evren modelleri söz konusu olduğunda, (4.1) de verilen

$$ds^2 = -A_0(\hat{r})d\hat{t}^2 + A_{ij}(\hat{r})d\hat{x}^i d\hat{x}^j + A_4(\hat{r})d\hat{r}^2 \quad (\text{C.11})$$

metriği gibi statik bir bulk metriği, (4.6-8)'de yapmış olduğumuz dönüşümle, zaman cinsinden hiperyüzeyi temsil eden zar üzerinde geçerli indüklenmiş metriğe indirgenir.

Bu yüzey üzerinde, her noktada hiperyüzeye dik olan

- (i) normalize edilmiş
- (ii) afin parametrelili kongürans eğrilerine tanjant olan
- (iii) hiperyüzey ile dik olarak kesişen

bir vektör alanı arıyoruz. (4.6-8)'de dönüşümlerinden, 4-boyutlu hiperyüzeye ile dik olarak kesişen jeodeziklerin tanjant vektörünün bileşenlerinin

$$u^A \equiv e^A_\tau = (\dot{T}, 0, 0, 0, \dot{R}) \quad (\text{C.12})$$

ile temsil edileceğini söylemiştik. n_A ile jeodeziğe normal vektörü göstermek üzere, $u^A n_A = 0$ bağıntısını kullanarak,

$$n_1 = -\frac{\dot{R}}{\dot{T}^2} n_4 \quad (\text{C.13})$$

ve $n^A n_A = 1$ bağıntısını kullanarak da

$$\dot{R}^2 = \frac{A_0}{A_4} \dot{T}^2 \quad (\text{C.14})$$

bulunur. Bu durumda (C.12) ile verilen bileşenler arasında ilişki bulunur. Jeodezik üzerinde Killing vektörü ile tanjant vektörünün çarpımının sabit olmasını kullanarak, (C.7)'den

$$u^A = \left(\frac{E}{A_0}, 0, 0, 0, \pm \sqrt{\frac{A_0 + E^2}{A_0 A_4}} \right) \quad (C.15)$$

haline gelir. Burada $E=E(\tau, x^i)$, u^A 'nın her bir integral eğrisi boyunca hareket sabiti olmakla birlikte, integral eğrilerinin hiperyüzey ile kesiştiği noktada (τ, x^i) parametrelerine bağlıdır. $\hat{t} = \hat{t}_0$ anında $\hat{r} = R(\hat{t}_0)$ hiperyüzeyini göz önüne alırsak, (iii) koşulu gereğince, eğriler hiperyüzey ile dik olarak kesişir ve (C.12) ve (C.15)'den

$$E = E(\hat{t}_0(\tau, w)) = \pm \dot{R}(\tau) \sqrt{\frac{A_0^2 A_4}{A_0^2 \dot{T}^2 - A_0 A_4 \dot{R}^2}} \quad (C.16)$$

elde edilir. Eğer τ parametresi

$$\dot{T}^2 = A_4 + \dot{R}^2 \frac{A_0}{A_4} \quad (C.17)$$

sağlayacak şekilde seçilirse

$$E = \pm \dot{R}(\tau) \quad (C.18)$$

olarak alınabilir [71]

EK D. MAPLE 14 PROGRAM KODLARI:

Ek.D.1. 5-boyutlu alan denlemlerinin hesabı için kullanılan kod:

$$ds^2 = -f(\hat{r})d\hat{t}^2 + \hat{r}^2(a(\hat{r})d\hat{x}^2 + b(\hat{r})d\hat{y}^2 + c(\hat{r})d\hat{z}^2) + \frac{1}{f(\hat{r})}d\hat{r}^2 \quad \text{metriği için düzenlenmiş}$$

formdadır. Diğer metrikler için uygun değişiklikler yapılabilir.

```

> with(tensor):
> coords:=[t,r, x, y, z]:
g:=array (symmetric, sparse, 1..5, 1..5):
g[1,1]:=(-f(r)):g[2,2]:=1/f(r):g[3,3]:=(r^2)*a(r):
g[4,4]:=(r^2)*b(r): g[5,5]:=(r^2)*c(r):metric:=create([-1,-
1], eval(g));
> tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met, C1, C2,
Rm, Rc, R, G, C):
> displayGR(Einstein,G);

```

Ek.D.2. Killing vektörlerinin hesabı için kullanılan kod:

Bu kod Tablo.4.1 de gösterilen ikinci metrik için yazılmıştır. Diğer metrikler için benzer şekilde uygulanabilir.

```

> with(DifferentialGeometry): with(Tensor):with(Killing):
with(LieAlgebras):
> DGsetup([t,x,y,z,r], P):
P > g:=evalDG(a00(r)*dt &t dt +a04(r)*dt &t dr+ a11(r)* dx
&t dx +a12(r)* dx &t dy+a13(r)* dx &t dz+ a22(r)* dy &t dy
+ a33(r)* dz &t dz+a12(r)* dx &t dy +a13(r)* dx &t dz +
2*a23(r)* dy &t dz + a44(r)* dr &t dr);
P > K:=KillingVectors(g);

```

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Gülçin ULUYAZI

Doğum Tarihi ve Yeri: 01.04.1979 – İstanbul

Adres: Zeynep Kamil / Uskudar 34668 İstanbul / TURKIYE

E-mail: gberkoz@istanbul.edu.tr

Eğitim: **Lisans** – İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, 2000.

Yüksek Lisans – İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematiksel Fizik Programı, 2004.

Doktora - İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematiksel Fizik Programı, 2010.

Yabancı Dil: İngilizce.

Akademik Görevler: İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Araştırma Görevlisi, 2002 yılından beri.

Katılımlar:

- 1- "Research School on Cosmology", Feza Gursey Enstitüsü, 6 June - 6 July 2005, İstanbul, TURKEY.
- 2- "Summer School in Cosmology and Astroparticle Physics (10-21 July) and Workshop on Nongaussianity in Cosmology" (24-28 July), 2006 , ICTP, Trieste, ITALY.
- 3- "6th International Conference of BPU, 22-26 August 2006, İstanbul University, İstanbul, TURKEY. (Sözlü Sunum)
- 4- "İstanbul 2007: Strings, Branes and Cosmology", 9-13 July 2007, Koc University, İstanbul, TURKEY.
- 5- "Summer School in Cosmology", 21 July - 1 August 2008, ICTP, Trieste-ITALY.
- 6- "Turkish Physical Society 26th International Physics Congress", 24-27 September 2009, Bodrum-TURKEY. (Sözlü Sunum)
- 7- "13th Regional Conference on Mathematical Physics" (REGCONF13), 27-31 Ekim 2010, (sözlü sunum), Antalya-TURKEY
- 8- Szeged University, Theoretical Physics Department, Macaristan, 1 Kasım 2010-1 Mart 2011, ziyaretçi araştırmacı.

Yayınlar:

- İstanbul Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematiksel Fizik Programı Yüksek Lisans Tezi, " *Kozmolojik Sabitin Bianchi-tip Modellerin Evrimine Etkisi* ", Temmuz 2004, Gülçin Berköz (Uluyazı).
- 6th International Conference of the Balkan Physical Union, 22-26 August 2006, İstanbul-Türkiye. (Paper - 2007 American Institute of Physics 978-0-7354-0404) "*Bianchi Models with Chaplygin Gas* ", Gulcin Berkoz (Uluyazi), Ozgur Sevinc.
- 6th International Conference of the Balkan Physical Union, 22-26 August 2006, İstanbul-Türkiye. (Paper - 2007 American Institute of Physics 978-0-7354-0404) "*Bianchi V Brane-world Cosmology with a Generalized Chaplygin Gas*", Ozgur Sevinc, Gulcin Berkoz (Uluyazi).
- Turkish Physical Society 26th International Physics Congress, 24-27 September 2009, Bodrum-Türkiye, (Sunum), "*An Anisotropic Braneworld Cosmological Model with the Bulk-based Approach*", Gulcin Uluyazi.
- "13th Regional Conference on Mathematical Physics" (REGCONF13), 27-31 Ekim 2010, (oral presentation) "*An Investigation of Equivalence between Bulkbased and Brane-based Approaches*" , Gulcin Uluyazi.

Projeler:

İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri'nin desteklediği Doktora tez projesi.