**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

# BAZI KUVVET SERİLERİNİN ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ VE BELİRLİ REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN TEMEL BİRİMLERİ

**Gül KARADENİZ GÖZERİ**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman**
**Yrd. Doç. Dr. Ayten PEKİN**

**Kasım, 2011**

**İSTANBUL**

Bu çalışma 18/11/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Yrd. Doç. Dr. Ayten PEKİN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 3414 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

# ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ayten PEKİN'e, tez çalışmalarım süresince tecrübeleri ile yol gösteren bölüm başkanımız Prof. Dr. Nazım SADIK'a, destek ve katkılarını esirgemeyen değerli hocalarım, Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU ve Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU ile Doç. Dr. Ünsal TEKİR'e, her zaman maddi ve manevi desteklerini hissettiğim canım ailem ve sevgili eşime en içten dileklerimle teşekkür ederim.

**Kasım, 2011** **Gül KARADENİZ GÖZERİ**

## İÇİNDEKİLER

# SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | : tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | : rasyonel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | : kompleks sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ | : kuadratik sayı cismi |
| $O_K$ | : $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin tamlık halkası |
| $\omega_d$ | : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin $O_K$ tamlık halkasının taban elemanı olan kuadratik irrasyonel sayı |
| $k_d$ | : $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki periyod |
| $\Delta_d$ | : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin diskriminantı |
| $R(d)$ | : diskriminatı $\Delta_d$ olan indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların kümesi |
| $\mathcal{U}_d$ | : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin birimler grubu |
| $\varepsilon_d$ | : $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin temel birimi |
| $T_d$ | : $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayısı |
| $U_d$ | : $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayısı |
| $N(\alpha)$ | : $\alpha$ nın normu |
| $\dot{I}z(\alpha)$ | : $\alpha$ nın izi |
| $\alpha'$ | : $\alpha$ nın eşleniği |
| $a \mid b$ | : $a$ böler $b$ |
| $\lvert x\rvert$ | : $x$ in mutlak değeri |
| $[x]$ | : $x$ in tam değeri |
| $\operatorname{sgn} x$ | : $x$ in işaret fonksiyonu |
| $F/E$ | : cisim genişlemesi |
| $[F:E]$ | : $F$ cisminin $E$ cismi üzerindeki derecesi |
| $\alpha ceb/E$ | : $\alpha$, $E$ cismi üzerinde cebirsel elemandır |
| $\alpha trans/E$ | : $\alpha$, $E$ cismi üzerinde transandant elemandır |
| $[q_0,q_1,\ldots,q_n]$ | : sonlu basit sürekli kesir |
| $[q_0,q_1,\ldots]$ | : sonsuz basit sürekli kesir |

$\left[q_0,...,q_{N-1},\overline{q_N,...,q_{N+k-1}}\right]$ : periyodik basit sürekli kesir

$\left[\overline{q_0,q_1,q_2,...,q_{k-1}}\right]$ : pür-periyodik basit sürekli kesir

$\deg(P)$ : $P$ polinomunun derecesi

$H(P)$ : $P$ polinomunun yüksekliği

$\deg(\alpha)$ : $\alpha$ cebirsel sayısının derecesi

$H(\alpha)$ : $\alpha$ cebirsel sayısının yüksekliği

$\min(a_1,...,a_n)$ : $a_1,...,a_n$ sayılarının minimumu

$\max(a_1,...,a_n)$ : $a_1,...,a_n$ sayılarının maksimumu

$\varliminf_{n\to\infty} x_n$ : $\{x_n\}$ dizisinin alt limiti

$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$ : $\{x_n\}$ dizisinin üst limiti

# ÖZET

**BAZI KUVVET SERİLERİNİN ARİTMETİK ÖZELLİKLERİ VE BELİRLİ REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN TEMEL BİRİMLERİ**

Bu çalışmada, bazı kuvvet serilerinin aritmetik özellikleri ve belirli tipteki reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri incelenmiştir. Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Transandant Sayılar Teorisi ve Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin Temel Birimleri üzerine genel bir inceleme yapılmıştır.

İkinci bölümde, Liouville Sayıları, Sayı Cisimleri, Temel Birimler ve Sürekli Kesirler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, elde ettiğimiz özgün teoremlerimizin ispatı için kullanılan yöntemler özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak belirli koşullar altında bazı rasyonel katsayılı kuvvet serilerinin bazı Liouville Sayıları argümanları için aldığı değerlerin ya bir Liouville Sayısı ya da bir rasyonel sayı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, Richaud-Degert tipinde olmayan $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisimlerinde $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımındaki $k_d$ periyodunun 7 olması durumunda, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin $\varepsilon_d=\dfrac{T_d+U_d\sqrt{d}}{2}\ (>1)$ temel biriminin $T_d$ ve $U_d$ katsayıları ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı kesin bir biçimde belirlenmiş ve özgün teoremler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, elde edilen bulguların bir değerlendirmesi yer almaktadır.

## SUMMARY

### ARITHMETIC PROPERTIES OF SOME POWER SERIES AND FUNDAMENTAL UNITS OF CERTAIN REAL QUADRATIC NUMBER FIELDS

In this study, arithmetic properties of some power series and fundamental units of certain real quadratic fields are investigated. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, a general investigation about the Theory of Transcendental Numbers and the Fundamental Units of Real Quadratic Number Fields is presented.

In the second chapter, main definitions and theorems about Liouville Numbers, Number Fields, Fundamental Units and Continued Fractions are given.

In the third chapter, the methods which we used in order to prove our original teorems are summarized.

In the fourth chapter, firstly it is shown that under certain conditions the values of some power series with rational coefficients for some Liouville number arguments belong to either the field of rational numbers or the set of Liouville numbers. Then, for all real quadratic fields $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ except for Richaud-Degert type such that the period $k_d$ in the continued fraction expansion of the quadratic irrational number $\omega_d$ is equal to 7, $T_d$, $U_d$ coefficients of the fundamental unit $\varepsilon_d=\dfrac{T_d+U_d\sqrt{d}}{2}\ (>1)$ and the continued fraction expansion of the quadratic irrational number $\omega_d$ are determined explicitly and the original theorems are obtained.

An evaluation of the results of this study is carried out in the fifth chapter.

# 1. GİRİŞ

Transandant Sayılar Teorisinin önemli bölümlerinden birini cebirsel sayılara rasyonel sayılar ile yaklaşımlar oluşturmaktadır.

$\xi$ herhangi bir reel sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$0< \left|\xi - \frac{g}{h}\right| < \frac{c}{h^n}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sadece $\xi$ reel sayısına bağlı olan bir $c$ pozitif sabiti ve sonsuz sayıda $\frac{g}{h}$ $\left(g,h \in \mathbb{Z},\ h>0,\ (g,h)=1\right)$ rasyonel sayısı varsa "*$\xi$ reel sayısına, rasyonel sayılar ile n. mertebeden yaklaşılabilir*" veya "*$\xi$ reel sayısının, rasyonel sayılar ile n. mertebeden yaklaşımları vardır*" denir, [1].

Yaklaşımın derecesini gösteren $n$ sayısı ne kadar büyük olursa , $\xi$ reel sayısı ile $\frac{g}{h}$ rasyonel sayıları arasındaki uzaklık o kadar küçük olacağından, o kadar iyi bir yaklaşım elde edilir.

Eğer verilen bir sayıya rasyonel sayılar ile istenildiği kadar yüksek mertebeden yaklaşılabiliyor ise, o sayının rasyonel sayılar ile "*çok iyi*" yaklaşımlarının olduğu ifade edilir.

Transandant sayıların varlığına dair ilk ispat 1844 yılında Fransız matematikçi Liouville [2] tarafından yapıldı. Liouville bu çalışmasında, cebirsel sayıların *"çok iyi"* rasyonel yaklaşımlarının olamayacağını ispat ederek, bir sayının transandant olabilmesi için yeterli bir koşul elde etti. Bu koşul, *"çok iyi"* rasyonel yaklaşımlara sahip olan her sayının transandant olduğunu ifade eder. Liouville bu koşula dayanarak, kendi adıyla anılan *“Liouville Sayılarını”* tanımlamış, bu sayılara örnekler vererek Liouville Sayılarının oluşturduğu kümenin boş kümeden farklı olduğunu tespit etmiş ve bu sayıların transandant olduğunu göstererek transandant sayıların varlığını ispat etmiştir.

Daha sonra, 1874 yılında Cantor [3], transandant sayıların var olduğuna dair başka bir ispat ortaya koymuş ve bu çalışması ile hemen hemen her sayının transandant olduğunu ispatlamıştır.

1930 lu yıllarda transandant sayıların sınıflandırılması problemi ele alınmıştır. Bu konuda yapılan ilk ciddi çalışma 1932 yılında Mahler [4] tarafından yapılmıştır. Mahler bu sınıflandırmada transandant sayıları ikişer ikişer ayrık olan üç sınıfa ayırmış, bu sınıfları $S$, $T$ ve $U$ sınıfı olarak adlandırmıştı. $U$ sınıfı, ikişer ikişer ayrık olan $U_m$ $\left(m \in \mathbb{N}\right)$ alt sınıflarının birleşiminden oluşmaktadır. Liouville Sayılarından oluşan küme ise, $U$ sınıfının $U_1$ alt sınıfı ile tamamen çakışmaktadır. Bu çalışmayı 1939 yılında Koksma [5] nın *“sınıflandırma”* ile ilgili çalışması takip etmiştir.

Transandant Sayılar Teorisinde, verilen bir sayının transandant olup olmadığı probleminin ötesine geçen önemli problemlerden biri, transandant olduğu ispat edilen sayının ait olduğu sınıfı belirlemektir.

Bu çalışmanın Transandant Sayılar Teorisi ile ilgili olan kısmında, Leveque [6] ve Oryan [7,8] ın çalışmaları göz önüne alınarak, rasyonel katsayılı bazı kuvvet serilerinin, belli koşullar altında, belirli Liouville Sayıları argümanları için aldığı değerlerin transandantlığı incelenmiş ve elde edilen değerlerin ya rasyonel sayı ya da transandant sayıların sınıflandırmasındaki $U$ sınıfının $U_1$ alt sınıfını oluşturan Liouville Sayısı olduğu gösterilmiştir. Böylece, incelenen kuvvet serilerinin belirli Liouville Sayıları argümanları için aldığı değerlerin transandant olması durumunda ait olduğu sınıf belirlenmiştir.

§

Bu tez çalışmasında incelenen diğer bir konu da sürekli kesirler ve temel birimler olduğundan aşağıda bunlarla ilgili bazı temel kavramlara da yer verilmektedir.

Kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin belirlenmesi Sayılar Teorisinin en önemli konularından biridir. Temel birimler, gerek kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısının belirlenmesinde gerekse diofant denklemlerin çözümlerinin bulunmasında büyük önem taşır.

$d$ kare çarpansız bir tamsayı olmak üzere, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin cebirsel genişlemesi olan $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cismi; $d > 0$ ise reel kuadratik sayı cismi, $d < 0$ ise imajiner kuadratik sayı cismi olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmasında reel kuadratik sayı cisimleri ele alınacaktır. Reel kuadratik sayı cisimlerinde sınıf sayısının hesaplanması ve diofant denklemlerin çözümlerinin belirlenmesi için $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $O_K$ tamlık tabanındaki $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımın belirlenmesi de en az temel birim olan $\varepsilon_d$ nin belirlenmesi kadar önemlidir.

Richaud-Degert tipindeki sayı cisimleri için temel birimler belirlenmiş olmasına rağmen, Richaud-Degert tipinde olmayan sayı cisimleri için temel birimin biçimi belli olmadığından Richaud-Degert tipinde olmayan sayı cisimleri için $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımın ve temel birimlerin belirlenmesi oldukça önemlidir.

Bu tez çalışmasının sürekli kesirler ve temel birimler ile ilgili olan kısmında, Richaud-Degert tipinde olmayan belirli reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımlarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda, Richaud-Degert tipinde olmayan $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisimlerinde $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımındaki periyodun 7 olması durumunda, Tomita [9,10] ve Azuhata [11] nın çalışmaları göz önüne alınarak, ilk olarak $d \equiv 1 \pmod 4$ koşulunu sağlayan reel kuadratik sayı cisimleri için temel birimler ve $d$ tam sayısının formu en fazla beş parametreye bağlı olarak belirlenerek, $\omega_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı elde edilmiştir. Ayrıca kullanılan parametrelerin tek türlü belirli olduklarının ispatı verilmiştir. Daha sonra $d \equiv 2,3 \pmod 4$ koşulunu sağlayan reel kuadratik sayı cisimleri için temel birimler ve $d$ tam sayısının formu, tam beş parametreye bağlı olarak belirlenmiş, bu parametrelerin tek türlü belirli oldukları ispat edilmiş ve $\omega_d = \sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı elde edilmiştir. Böylece, Richaud-Degert tipinde olmayan ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımındaki periyodu 7 olan bütün kuadratik sayı cisimleri için temel birimleri ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını kesin bir biçimde veren pratik bir algoritma elde edilmiş olup bunlar literatürde olmayan teoremlerle ifade edilmiştir. Bu teoremler ayrıntılı ispatları ile verilmiş ve somut örneklerle pekiştirilmiştir.

# 2. GENEL KISIMLAR

## 2.1. REEL SAYILARA RASYONEL SAYILAR İLE YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde, Transandant Sayılar Teorisinde oldukça önemli olan reel sayılara rasyonel sayılarla yaklaşımlar ile ilgili bir takım temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.1.** $\xi$ herhangi bir reel sayı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$0 < \left|\xi - \frac{g}{h}\right| < \frac{c}{h^n} \tag{2.1}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sadece $\xi$ reel sayısına bağlı olan bir $c$ pozitif sabiti ve sonsuz sayıda $\frac{g}{h}$ $\left(g, h \in \mathbb{Z},\ h > 0,\ \left(g, h\right) = 1\right)$ rasyonel sayısı varsa *"$\xi$ reel sayısına rasyonel sayılar ile $n$. mertebeden yaklaşılabilir"* veya *"$\xi$ reel sayısının rasyonel sayılar ile $n$. mertebeden yaklaşımları vardır"* denir, [1].

**Sonuç 2.1.1** $\xi$ reel sayısına, rasyonel sayılar ile $n$. mertebeden yaklaşılabilir ise, $k < n$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k$. mertebeden de yaklaşılabilir, [1].

**İspat.** $\xi$ reel sayısına rasyonel sayılar ile $n$. mertebeden yaklaşılsın.

Buradan, (2.1) eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sadece $\xi$ ye bağlı olan bir $c > 0$ sabiti ve sonsuz sayıda $\frac{g}{h}$ $(g, h \in \mathbb{Z},\ h > 0,\ (g, h) = 1)$ rasyonel sayısı vardır.

$k < n$ ve $h \geq 1$ olduğundan, $h^k \leq h^n$ olup bu son eşitsizlikten $\frac{c}{h^n} \leq \frac{c}{h^k}$ elde edilir. Bu eşitsizlikten ve (2.1) eşitsizliğinden,

$$0 < \left|\xi - \frac{g}{h}\right| < \frac{c}{h^k}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sadece $\xi$ ye bağlı olan bir $c > 0$ sabiti ve sonsuz sayıda $\frac{g}{h}$ rasyonel sayısı vardır. O halde, Tanım 2.1.1 kullanılarak, $\xi$ reel sayısının rasyonel sayılar ile $k.$ mertebeden yaklaşılabilir olduğu gösterilmiş olur.

**Teorem 2.1.1.** Rasyonel sayıların sadece birinci mertebeden yaklaşımları vardır, daha yüksek mertebeden yaklaşımları yoktur, [1].

**İspat.** $\frac{a}{b}$ $\left(a,b \in \mathbb{Z},\ b > 0,\ (a,b) = 1\right)$ herhangi bir rasyonel sayı olsun.

$(a,b) = 1$ olduğundan, $ax - by = 1$ diofant denkleminin sonsuz sayıda tam sayılı çözümleri vardır.

$x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ bu denklemin özel çözümlerini göstermek üzere, $x = x_0 + bt$ ve $y = y_0 + at$ $(t \in \mathbb{Z})$ bu denklemin genel çözümlerini verir.

$x_0$ ve $b$ değerleri ne olursa olsun, $x = x_0 + bt$ değerinin $t$ nin sonsuz sayıdaki değeri için pozitif olduğu açıktır. Bu sebepten, $ax - by = 1$ denkleminin her iki tarafı $bx > 0$ ile bölündüğünde, $x > 0$ olmak üzere,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{y}{x}\right| = \frac{1}{bx} \tag{2.2}$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde sonsuz sayıda $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. $b \geq 1$ olduğu kullanılarak (2.2) eşitliğinden,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{y}{x}\right| < \frac{2}{x}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde sonsuz sayıda $\frac{y}{x}$ $(x, y \in \mathbb{Z}\ ,\ x > 0)$ rasyonel sayısı vardır. O halde, $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının 1. mertebeden yaklaşımları vardır. Böylece her rasyonel sayının 1. mertebeden yaklaşımlarının olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de rasyonel sayıların daha yüksek mertebeden yaklaşımlarının olamayacağının ispatını vermek için, $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısına 2. mertebeden yaklaşılabildiği kabul edilirse,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{y}{x}\right| < \frac{c}{x^2} \tag{2.3}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde $c > 0$ sabiti ve sonsuz sayıda $\frac{y}{x}$ $(x, y \in \mathbb{Z}\ ,\ x > 0)$ rasyonel sayısı vardır.

Diğer taraftan, $\frac{y}{x} \neq \frac{a}{b}$ olmak üzere herhangi bir $\frac{y}{x}$ rasyonel sayısı için,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{ax - by}{bx}\right| \geq \frac{1}{bx} \tag{2.4}$$

gerçeklenir. (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerinden,

$$\frac{1}{bx} < \frac{c}{x^2}$$

elde edilir ki bu son eşitsizlik gerçeklenecek şekilde sadece sonlu sayıda $x \in \mathbb{Z}$ olduğu görülür. Bu ise (2.3) eşitsizliği gerçeklenecek şekilde sonsuz sayıda $\frac{y}{x}$ rasyonel sayısının olması ile çelişir. O halde, $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının 2. mertebeden yaklaşımlarının olmadığı gösterilmiş olur. Böylelikle 2. mertebeden daha yüksek mertebelerden de yaklaşımlarının olmadığı ispatlanmış olur. Aksi takdirde, $k > 2$ $(k \in \mathbb{N})$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının $k$. mertebeden yaklaşımları olsa, Sonuç 2.1.1 gereği 2. mertebeden de yaklaşımlarının olması gerekirdi. Bu ise, $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının 2. mertebeden yaklaşımlarının olmaması ile çelişir. Böylece rasyonel sayıların sadece birinci mertebeden yaklaşımlarının olduğu, daha yüksek mertebelerden yaklaşımlarının olmadığının ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2.1.2.** *n.* dereceden bir cebirsel sayının $(n+1)$. mertededen yaklaşımları yoktur, [1].

**İspat.** Bir önceki teoremde, rasyonel sayıların sadece birinci mertebeden yaklaşımlarının olduğu, ikinci ve daha yüksek mertebeden yaklaşımlarının olmadığı ispat edildiğinden, $n > 1$ durumunu incelemek yeterli olacaktır.

Bu durumda, $\xi$, *n.* dereceden bir cebirsel sayı ve

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad \left(a_i \in \mathbb{Z}, \left(0 \le i \le n\right), \, a_0 \ne 0\right)$$

polinomu $\xi$ nin gerçeklediği tam katsayılı ve rasyonel sayılar cismi üzerinde indirgenemez bir polinom olsun. $\xi - 1 < x < \xi + 1$ olacak şekildeki herhangi bir $x$ için, $|x| < |\xi| + 1$ eşitsizliğinin gerçeklendiği açıktır. Bu sebepten, $f'(x)$ türev fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right| \\
&\le \left|n a_0 x^{n-1}\right| + \left|(n-1) a_1 x^{n-2}\right| + \ldots + \left|a_{n-1}\right| \\
&\le n|a_0|\left(|\xi|+1\right)^{n-1} + (n-1)|a_1|\left(|\xi|+1\right)^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}|
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $n|a_0|\left(|\xi|+1\right)^{n-1} + (n-1)|a_1|\left(|\xi|+1\right)^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}| = A > 0$ ile gösterilsin.

O halde,

$$\frac{1}{|f'(x)|} > \frac{1}{A} \tag{2.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\xi$ nin $(n+1)$. mertebeden yaklaşımlarının olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\left|\frac{h}{k} - \xi\right| < \frac{c}{k^{n+1}} \quad , \quad k > 1 \tag{2.6}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sonsuz sayıda $\frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$ vardır. $k > 1$ olduğundan bu son eşitsizlikten $\xi - 1 < \frac{h}{k} < \xi + 1$ eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, $f\left(\frac{h}{k}\right) \neq 0$ dır. Aksi takdirde, $f\left(\frac{h}{k}\right) = 0$ olsa, $f(x)$ polinomu, $x - \frac{h}{k}$ çarpanını içerir bu ise $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Q}[x]$ te indirgenemez olması ile çelişir. Buradan,

$$\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right| = \left|a_0 \frac{h^n}{k^n} + a_1 \frac{h^{n-1}}{k^{n-1}} + \ldots + a_n\right| = \frac{\left|a_0 h^n + a_1 h^{n-1} k + \ldots + a_n k^n\right|}{k^n} \geq \frac{1}{k^n}$$

olacağından,

$$\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right| \geq \frac{1}{k^n} \tag{2.7}$$

elde edilir.

Ortalama Değer Teoremi kullanılarak, $\frac{h}{k}$ ile $\xi$ arasında kalan $x$ ler için,

$$f\left(\frac{h}{k}\right)=f\left(\frac{h}{k}\right)-f(\xi)=\left(\frac{h}{k}-\xi\right)f'(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri alınıp, (2.5) ve (2.7) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\left|\frac{h}{k}-\xi\right|=\frac{\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right|}{\left|f'(x)\right|}>\frac{1}{Ak^{n}} \tag{2.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.6) ve (2.8) eşitsizliklerinden,

$$\frac{1}{Ak^{n}}<\frac{c}{k^{n+1}}$$

elde edilir ki bu son eşitsizlik sonlu sayıdaki $k$ pozitif tam sayısı için gerçeklenir. Bu ise (2.6) eşitsizliği gerçeklenecek şekilde sonsuz sayıda $\frac{h}{k}$ rasyonel sayısı olması ile çelişir. Dolayısıyla, "$\xi$ nin $(n+1)$. mertebeden yaklaşımlarının olduğu" kabulü ile çelişki elde edilmiş olur. Böylece, $n$. dereceden bir cebirsel sayının $(n+1)$. mertededen yaklaşımlarının olmadığının ispatı tamamlanmış olur.

## 2.2. KOMPLEKS SAYILARIN MAHLER VE KOKSMA SINIFLANDIRMASI

### Mahler Sınıflandırması

Mahler Sınıflandırmasında esas olan, $\xi$ herhangi bir kompleks sayı, $n$ ve $H$ doğal sayılar ve $H(P)$ de tam katsayılı $P(x)$ polinomunun yüksekliği, ki bu da bu polinomun katsayılarının mutlak değerlerinin maksimumu olarak belirli olmak üzere, derecesi $n$ i ve yüksekliği $H$ yı geçmeyen, $P(\xi)\neq 0$ koşuluna uyan bütün tam katsayılı $P(x)$ polinomları için $\left|P(\xi)\right|$ yi oluşturarak, bu değerlerin minimumunu almaktır. Bu minimum $\omega_n(H,\xi)$ ile gösterilirse, $\omega_n(H,\xi)$ kümesi;

$$\omega_n(H,\xi)=\min\left\{\left|P(\xi)\right| : P(x)\in\mathbb{Z}[X],\ H(P)\leq H,\ \deg(P)\leq n,\ P(\xi)\neq 0\right\}$$

biçiminde tanımlıdır. Şimdi,

$$\omega_n(\xi)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{\omega_n(H,\xi)}}{\log H}$$

ve

$$\omega(\xi)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\omega_n(\xi)}{n}$$

olarak tanımlansın. Burada $0\leq\omega_n(\xi)\leq\infty$ ve $0\leq\omega(\xi)\leq\infty$ eşitsizlikleri geçerlidir. Ayrıca, $\omega_{n+1}(H,\xi)\leq\omega_n(H,\xi)$ olduğundan $\omega_{n+1}(\xi)\geq\omega_n(\xi)$ eşitsizliği elde edilir. Buradan eğer bir $n$ için $\omega_n(\xi)=\infty$ olursa, daha büyük $n$ ler için de $\omega_n(\xi)=\infty$ olacağı görülür. O halde, $\omega_n(\xi)$ en az bir $n$ için $\infty$ olduğunda, $\omega_n(\xi)=\infty$ olacak şekildeki $n$ doğal sayılarının bir minimumu vardır. Bu minimum $\mu$ olarak alınırsa ve eğer hiçbir $n$ doğal sayısı için $\omega_n(\xi)=\infty$ eşitliği gerçeklenmezse $\mu=\infty$ olarak gösterilecektir. Bu şekilde $\mu$ sayısı tek türlü belirlenmiş olup bu $\mu$ sayısına, $\xi$ kompleks sayısının *"indeksi"* denir. Dolayısıyla, her $\{\omega_n(\xi)\}$ dizisine bir $\mu$ sonlu veya sonsuz sayısı karşılık gelmektedir. Bunlardan başka, $\mu$ ve $\omega(\xi)$ sayıları aynı anda sonlu olamazlar. Bu durumda, her $\xi$ kompleks sayısına bir $(\mu(\xi),\omega(\xi))$ çifti karşılık gelmektedir. Dolayısıyla, her $\xi$ kompleks sayısı için aşağıdaki dört durumdan biri geçerli olur. Mahler' e göre, $\xi$ sayısına;

$\omega(\xi)=0$ ve $\mu(\xi)=\infty$ ise *"A-sayısı"*,

$0<\omega(\xi)<\infty$ ve $\mu(\xi)=\infty$ ise *" S-sayısı"*,

$\omega(\xi)=\infty$ ve $\mu(\xi)=\infty$ ise "*T-sayısı*",

$\omega(\xi)=\infty$ ve $\mu(\xi)<\infty$ ise *"U-sayısı"*

denir. Bu şekilde bütün kompleks sayılar ikişer ikişer ayrık olan dört sınıfa ayrılabilir. Bu sınıflara da *A*-sınıfı, *S*-sınıfı, *T*-sınıfı ve *U*-sınıfı denir.

**Teorem 2.2.1.** Her cebirsel sayı bir *A*-sayısıdır. Tersine olarak, her *A*-sayısı cebirseldir. Diğer bir ifade ile *A*-sınıfı ile cebirsel sayılar kümesi çakışır, [12].

**Teorem 2.2.2**. $t$ ve $z$ kompleks sayılar olmak üzere, eğer $t$ ve $z$ birbirine cebirsel olarak bağlı ise, diğer bir ifadeyle $F(t,z)=0$ olacak biçimde sıfır polinomdan farklı olan tam katsayılı bir $F(x,y)$ polinomu varsa , $t$ ve $z$ kompleks sayıları aynı sınıfa aittir, [13].

$\mu(\xi)=m$ ise $\xi$ sayısına "*derecesi m olan bir U sayısı*" denir. Derecesi $m$ olan $U$ sayılarının kümesi "$U_m$" ile gösterilir. $U$ sınıfı $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere, ikişer ikişer ayrık olan $U_m$ alt sınıflarının birleşiminden meydana gelmiştir. $U_1$ alt sınıfının Liouville Sayılarından oluşan küme ile çakıştığı görülür. $m>1$ olacak şekilde bir doğal sayı olmak üzere $U_m$ alt sınıflarının boş kümeden farklı olduğu 1953 yılına kadar ispat edilememiştir. Nihayet Leveque [6] , 1953 yılında yapmış olduğu çalışması ile $U_m$-alt sınıflarının boş kümeden farklı olduğunu ispat etmiştir.

**Koksma Sınıflandırması**

Mahler'den sonra 1939 yılında Koksma, $\xi$ herhangi bir kompleks sayı ve $\alpha$ bir cebirsel sayı olmak üzere, kompleks sayıların

$$\omega_n^*(H,\xi)=\min\left\{ |\xi-\alpha| : \deg(\alpha)\le n,\ H(\alpha)\le H,\ \alpha\ne\xi \right\}$$

fonksiyonuna dayanan bir sınıflandırmasını vermiştir. Bu sınıflandırmada, $\omega_n^*(\xi)$ ve $\omega^*(\xi)$ değerleri,

$$\omega_n^*(\xi)=\overline{\lim_{H\to\infty}}\frac{\log\dfrac{1}{H\omega_n^*(H,\xi)}}{\log H}$$

ve

$$\omega^*(\xi)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\omega^*{}_n(\xi)}{n}$$

olarak tanımlansın. Burada, $\omega_n^*(\xi)$ değeri sonlu ya da sonsuz değer alabilir. $\omega_n^*(\xi)$, $n$ nin bir monoton artan fonksiyonudur. Ayrıca, $\omega^*(\xi)$ için $0\le\omega^*(\xi)\le\infty$ eşitsizliği geçerlidir. $\omega_n^*(\xi)=\infty$ olacak şekilde $n$ doğal sayıları varsa ve bu sayıların minimumuna $\mu^*$ denilirse, $n<\mu^*$ için $\omega_n^*(\xi)<\infty$ olup, $\omega_n^*(\xi)$, $n$ nin bir monoton artan fonksiyonu olduğundan $n\ge\mu^*$ için $\omega_n^*(\xi)=\infty$ dur. Bu durumda, $\xi$ kompleks sayısının indeksi $\mu^*(\xi)$ *"sonludur"* denir. Eğer, her $n\in\mathbb{N}$ için $\omega_n^*(\xi)<\infty$ ise $\mu^*(\xi)=\infty$ şeklinde yazılır ve $\xi$ kompleks sayısının indeksi "*sonsuzdur"* denir. Dolayısıyla, her $\{\omega_n^*(\xi)\}$ dizisine sonlu veya sonsuz bir $\mu^*$ sayısı karşılık gelmektedir.

Bunlardan başka, $\mu^*$ ve $\omega^*\left(\xi\right)$ sayıları aynı anda sonlu olamazlar. Bu durumda her $\xi$ kompleks sayısına bir $\left(\mu^*\left(\xi\right),\omega^*\left(\xi\right)\right)$ çifti karşılık gelmektedir. Dolayısıyla her $\xi$ kompleks sayısı için aşağıdaki dört durumdan sadece bir tanesi geçerli olur. $\xi$ sayısına;

| | | |
|---|---|---|
| $\omega^*\left(\xi\right)=0$ ve $\mu^*\left(\xi\right)=\infty$ | ise | “$A^*$*-sayısı”,* |
| $0<\omega^*\left(\xi\right)<\infty$ ve $\mu^*\left(\xi\right)=\infty$ | ise | “$S^*$*-sayısı”,* |
| $\omega^*\left(\xi\right)=\infty$ ve $\mu^*\left(\xi\right)=\infty$ | ise | “$T^*$*-sayısı*”, |
| $\omega^*\left(\xi\right)=\infty$ ve $\mu^*\left(\xi\right)<\infty$ | ise | “$U^*$*-sayısı”* |

denir. $A^*$-sayılarının oluşturduğu sınıfa “$A^*$*-sınıfı*”, $S^*$-sayılarının oluşturduğu sınıfa “$S^*$*-sınıfı*”, $T^*$-sayılarının oluşturduğu sınıfa “$T^*$*-sınıfı”* ve $U^*$-sayılarının oluşturduğu sınıfa “$U^*$*-sınıfı”* denir. Böylece, Koksma Sınıflandırması ile bütün kompleks sayılar ikişer ikişer ayrık dört sınıfa ayrılmış olur.

$\mu^*\left(\xi\right)=m$ ise $\xi$ sayısına “*derecesi m olan bir* $U^*$ *sayısı*” denir. Derecesi *m* olan $U^*$ sayılarının kümesi “$U_m^*$” ile gösterilir. $U^*$ sınıfı $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere, ikişer ikişer ayrık olan $U_m^*$ alt sınıflarının birleşiminden meydana gelmiştir.

Wirsing [14], 1961 yılında Mahler ve Koksma’nın bu sınıflandırmalarının birbirine denk olduğunu ispatlamıştır.

## 2.3. LIOUVILLE SAYILARI İLE İLGİLİ TANIMLAR VE TEMEL TEOREMLER

**Tanım 2.3.1.** $\xi$ bir reel sayı olmak üzere, her $k > 0$ tam sayısı için,

$$0 < \left| \xi - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k^{\ k}} \quad , \quad q_k > 1$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\frac{p_k}{q_k}$ rasyonel sayısı bulunabilirse, $\xi$ sayısına "*Liouville Sayısı*" denir, [15].

**Not 2.3.1. i)** $\xi$ bir Liouville Sayısı ise, her $k > 0$ tam sayısı için yukarıdaki eşitsizliği gerçekleyen birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_k}{q_k}$ rasyonel sayısı vardır.

**ii)** $\xi$ bir Liouville Sayısı ise, her $k > 0$ tam sayısı için yukarıdaki eşitsizliği gerçekleyen ve paydaları keyfi bir sayıdan büyük olan birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_k}{q_k}$ rasyonel sayısı vardır.

**iii)** $\xi$ bir Liouville Sayısı ise, her $k > 0$ tam sayısı için yukarıdaki eşitsizliği gerçekleyen ve paylarının mutlak değeri keyfi bir sayıdan büyük olan birbirinden farklı sonsuz sayıda $\frac{p_k}{q_k}$ rasyonel sayısı vardır.

**Örnek 2.3.1.**

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001000 0...$$

bir Liouville Sayısıdır, [16].

**İspat.**

$\dfrac{p_k}{q_k} = \sum_{n=1}^{k} 10^{-n!}$ rasyonel sayısını düşünelim.

$$\frac{p_k}{q_k} = \sum_{n=1}^{k} 10^{-n!} = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{k!}}\right) = \frac{10^{k!}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{k!}}\right)}{10^{k!}}$$

olduğundan,

$$p_k = 10^{k!}\sum_{n=1}^{k} 10^{-n!} \quad \text{ve} \quad q_k = 10^{k!}$$

dir. Burada, $p_k$ ve $q_k$ nın tam sayı olduğu ve $q_k > 1$ olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

$$\left|\xi - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} 10^{-n!}\right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} = \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \frac{1}{10^{(k+2)!}} + \frac{1}{10^{(k+3)!}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{10^{(k+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(k+2)!-(k+1)!}} + \frac{1}{10^{(k+3)!-(k+1)!}} + \ldots\right) \le \frac{1}{10^{(k+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{10}{9.10^{(k+1)!}} = \frac{10}{9.10^{(k+1)k!}} = \frac{10}{9\left(10^{k!}\right)^k 10^{k!}} \le \frac{1}{\left(10^{k!}\right)^k} = \frac{1}{q_k^k}$$

dir. Böylece $\frac{p_k}{q_k}=\sum_{n=1}^{k}10^{-n!}$ alınmak suretiyle, her $k>0$ tam sayısı için,

$$\left|\xi-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^{\ k}} \quad , \quad q_k>1$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\frac{p_k}{q_k}$ rasyonel sayısının bulunabildiği gösterilmiş olur. Buradan, $\xi=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}=0.110001000000000000000001 0000...$ sayısının bir Liouville Sayısı olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3.1.** Liouville Sayıları irrasyoneldir, [17].

**İspat.** $\xi$ bir Liouville Sayısı olsun. O halde, Tanım 2.3.1 ve Not 2.3.1 (i) den, her $k>0$ tam sayısı için,

$$0<\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^k} \quad , \quad q>1 \tag{2.9}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ $(p,\ q\in\mathbb{Z})$ rasyonel sayısı vardır.

$\xi$ bir rasyonel sayı olsa, Teorem 2.1.1 den sadece birinci mertebeden yaklaşımları mevcut olur ve bu da her $k>0$ tam sayısı için, (2.9) eşitsizliği gerçeklenecek biçimde sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ $(p,\ q\in\mathbb{Z})$ rasyonel sayısı olması ile çelişir. O halde, $\xi$ irrasyoneldir.

Böylece, Liouville Sayılarının irrasyonel olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3.2 (Liouville Teoremi).** $n > 1$ olmak üzere, $\xi$ $n$. dereceden bir cebirsel sayı olsun. Bu durumda, sadece $\xi$ ye bağlı olan öyle bir $0 < c < 1$ pozitif sabiti vardır ki,

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > \frac{c}{q^n} \tag{2.10}$$

eşitsizliği her $\frac{p}{q}$ $\left( p, q \in \mathbb{Z};\ q > 0 \right)$ rasyonel sayısı için gerçeklenir, [17].

**İspat.** $\xi$ sayısının gerçeklediği tam katsayılı $n$. dereceden indirgenemez cebirsel denklem

$$f\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \left( a_i \in \mathbb{Z},\ \left( i = 0, 1, \ldots, n \right),\ a_n \neq 0 \right)$$

olsun. $\xi$ bu cebirsel denklemi gerçeklediği için,

$$f\left(\xi\right) = 0 \tag{2.11}$$

olur. Şimdi herhangi bir $\frac{p}{q}$ $\left( p, q \in \mathbb{Z};\ q > 0 \right)$ rasyonel sayısı alınırsa aşağıdaki iki durum söz konusudur.

<u>I. Durum.</u>

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| > 1 \tag{2.12}$$

olsun. Bu durumda, $0 < c < 1$ olacak şekilde seçilen her $c$ pozitif sabiti için (2.12) eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>c \tag{2.13}$$

elde edilir. $q \in \mathbb{Z}$ ve $q>0$ olduğundan $q \geq 1$ olup $q^n \geq 1$ dir. Buradan,

$$1 \geq \frac{1}{q^n}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $0<c<1$ eşitsizliğini sağlayacak uygun bir $c$ pozitif sabiti ile çarpılıp (2.13) eşitsizliği kullanılarak, (2.10) eşitsizliği yani

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>\frac{c}{q^n}$$

elde edilir. Sonuçta, $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|>1$ eşitsizliğini gerçekleyen her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı ve $0<c<1$ olacak şekilde seçilen her $c$ pozitif sabiti için (2.10) eşitsizliğinin gerçeklendiği gösterilmiş olur.

<u>II. Durum.</u>

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right| \leq 1 \tag{2.14}$$

olsun. Burada amaç, (2.14) eşitsizliğini gerçekleyen her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için (2.10) gerçeklenecek biçimde $0<c<1$ koşuluna uyan $c$ pozitif sabitini belirlemektir.

Şimdi, herhangi bir $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı alınırsa, Ortalama Değer Teoreminden,

$$f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\xi)=\left(\frac{p}{q}-\xi\right)f'(\gamma) \tag{2.15}$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde, $\frac{p}{q}$ ile $\xi$ arasında kalan bir $\gamma$ sayısı vardır.

$f(\xi)=0$ olduğundan (2.15) eşitliği,

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}-\xi\right)f'(\gamma) \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, her iki tarafın mutlak değeri alınarak,

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right|=\frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{\left|f'(\gamma)\right|} \tag{2.17}$$

elde edilir. Şimdi de,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geq\frac{1}{q^n} \tag{2.18}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için öncelikle, $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\neq 0$ olduğu gösterilmelidir. $\xi$ derecesi 1 den büyük olan tam katsayılı indirgenemez bir polinomun kökü olduğundan, $\xi\notin\mathbb{Q}$ olup $\left|\frac{p}{q}-\xi\right|\neq 0$ sağlanır. O halde buradan ve (2.17) den $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\neq 0$ elde edilir. $a_i,\ p,\ q\in\mathbb{Z}$ $(0\leq i\leq n)$ olmak üzere, $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\neq 0$ ve

$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{\left|a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_1 p\ q^{n-1} + a_0 q^n\right|}{q^n}$ olup, bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin pay kısmındaki mutlak değer en az 1 e eşit olduğundan, (2.18) eşitsizliği olan $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}$ eşitsizliğinin gerçeklendiği gösterilmiş olur.

(2.17) ve (2.18) den,

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| \geq \frac{1}{q^n \left|f'(\gamma)\right|} \tag{2.19}$$

elde edilir. Şimdi $\left|f'(\gamma)\right|$ için $p$ ve $q$ ya bağlı olmayan sadece $\xi$ ye bağlı olan bir üst sınır bulmak için öncelikle $f(x)$ in türevi olan $f'(x)$ değerini hesaplamak gerekir. Burada,

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1$$

olup, buradan

$$\left|f'(\gamma)\right| \leq n|a_n||\gamma|^{n-1} + (n-1)|a_{n-1}||\gamma|^{n-2} + ... + |a_1| \tag{2.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de, $\gamma$ nın, $\frac{p}{q}$ ile $\xi$ arasında yer alan bir sayı olduğu ve (2.14) eşitsizliği olan $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| \leq 1$ eşitsizliği kullanılarak,

$$|\gamma| < |\xi| + 1 \tag{2.21}$$

olduğunu göstermek gerekir. Bunun için öncelikle,

$$\xi - 1 < \gamma < \xi + 1 \tag{2.22}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği gösterilmelidir.

(2.14) yani $\left| \frac{p}{q} - \xi \right| \leq 1$ eşitsizliğinden,

$$\xi - 1 \leq \frac{p}{q} \leq \xi + 1 \tag{2.23}$$

eşitsizliği elde edilir ve

$$\xi - 1 < \xi < \xi + 1 \tag{3.15}$$

dir. $\gamma$, $\frac{p}{q}$ ile $\xi$ arasında yer alan bir sayı olduğundan ve (2.23) ile (2.24) eşitsizliklerinden, $\xi - 1 < \gamma < \xi + 1$ eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Bu eşitsizlik kullanılarak, (2.21) eşitsizliği olan $|\gamma| < |\xi| + 1$ eşitsizliği de elde edilir.

(2.20) ve (2.21) den,

$$\left| f'(\gamma) \right| \leq n|a_n|\left(|\xi|+1\right)^{n-1} + (n-1)|a_{n-1}|\left(|\xi|+1\right)^{n-2} + \ldots + |a_1| \tag{2.25}$$

bulunur. Şimdi de,

$$c_1 = n|a_n|\left(|\xi|+1\right)^{n-1} + (n-1)|a_{n-1}|\left(|\xi|+1\right)^{n-2} + \ldots + |a_1| \tag{2.26}$$

olsun. Burada $c_1 > 1$ olup, $0 < c = \frac{1}{c_1} < 1$ olacak şekilde seçilen $c$ pozitif sabiti kullanılarak, $c_1 = \frac{1}{c}$ alınırsa, (2.25) ve (2.26) dan,

$$\frac{1}{|f'(\gamma)|} > c \tag{2.27}$$

elde edilir. Sonuçta, $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| \leq 1$ eşitsizliğini gerçekleyen her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı ve $c = \frac{1}{c_1}$ olacak şekilde seçilen ve $0 < c < 1$ eşitsizliğini gerçekleyen $c$ pozitif sabiti için (2.10) eşitsizliği olan $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{c}{q^n}$ eşitsizliğinin gerçeklendiği gösterilmiş olur.

**Teorem 2.3.3.** Liouville Sayıları transandanttır, [15].

**İspat.** $\xi$ bir Liouville Sayısı olsun. $\xi$ nin $n.$ dereceden bir cebirsel sayı olduğunu kabul edelim. O halde, Liouville Teoreminden sadece $\xi$ ye bağlı öyle bir $c > 0$ pozitif sabiti vardır ki,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n} \tag{2.28}$$

eşitsizliği her $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ için gerçeklenir.

Diğer taraftan, $\xi$ bir Liouville Sayısı olduğundan her $\lambda > 0$ pozitif tam sayısı için,

$$0 < \left|\xi - \frac{g}{h}\right| < \frac{1}{h^\lambda} \tag{2.29}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $\frac{g}{h}$ $\left(g,h \in \mathbb{Z}, h>1\right)$ rasyonel sayısı vardır.

Şimdi, $\frac{1}{2^r} \le c$ eşitsizliğini gerçekleyen bir $r>0$ pozitif tam sayısını alalım.

Her $\lambda > 0$ pozitif tam sayısı için, (2.29) eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $\frac{g}{h}$ rasyonel sayısı var olduğundan, $\lambda = n + r > 0$ pozitif tam sayısı için de (2.29) eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $\frac{g}{h}$ rasyonel sayısı vardır. O halde,

$$\left|\xi - \frac{g}{h}\right| < \frac{1}{h^\lambda} = \frac{1}{h^{n+r}} = \frac{1}{h^n h^r} \le \frac{1}{2^r h^n} \le \frac{c}{h^n}$$

elde edilir. Buradan, (2.28) eşitsizliği olan, $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ eşitsizliğini gerçeklemeyen bir $\frac{g}{h} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısının var olduğunu gösterilmiş olur. Bu ise, her $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ için $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ eşitsizliğinin gerçekleniyor olması ile dolayısıyla da $\xi$ yi cebirsel sayı olarak kabul etmemiz ile çelişir. $n$ herhangi bir doğal sayı olduğundan, $\xi$ herhangi bir dereceden cebirsel sayı olamaz. Böylece, Liouville Sayılarının transandant olduğu, diğer bir ifade ile cebirsel sayı olamayacağı gösterilmiş olur.

**Teorem 2.3.4.** $\xi$ bir irrasyonel sayı; $\{\omega_n\}$, $\lim_{n\to\infty} \omega_n = \infty$ olacak şekilde bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\omega_n}} \tag{2.30}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ ($p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n > 1$, $n = 1,2,3,\ldots$) rasyonel sayı dizisi varsa, $\xi$ bir Liouville Sayısıdır, [18].

**Teorem 2.3.5.** "$\xi$" bir Liouville Sayısı ise, "$-\xi$" de bir Liouville Sayısıdır, [15].

**İspat.** $\xi$ bir Liouville sayısı olsun. Bu takdirde Liouville Sayılarının tanımı gereği, her $k>0$ tam sayısı için, $0<\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^k}$ eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\frac{p}{q}$ $(q>1)$ rasyonel sayısı vardır.

$$0<\left|\xi-\frac{p}{q}\right|=\left|-\left(-\xi+\frac{p}{q}\right)\right|=\left|-\xi-\frac{(-p)}{q}\right|<\frac{1}{q^k}$$

olduğu için, her $k>0$ tam sayısı için, $0<\left|-\xi-\frac{(-p)}{q}\right|<\frac{1}{q^k}$ eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\frac{-p}{q}$ rasyonel sayısı bulmak mümkün olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.3.6.** $\xi$ bir Liouville Sayısı ise, $\frac{1}{\xi}$ de bir Liouville Sayısıdır, [15].

**İspat.** Önceki teoremden $\xi$ bir Liouville Sayısı ise $-\xi$ nin de bir Liouville Sayısı olduğu bilindiğinden, ispatı sadece pozitif Liouville Sayıları için yapmak yeterli olacaktır.

$\xi$ bir pozitif Liouville Sayısı olsun. Bu takdirde her $k>0$ tam sayısı için,

$$0<\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2k}}\ ,\ (q>1) \tag{2.31}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $p$ ve $q$ pozitif tam sayıları vardır ve burada $p$ tam sayısı pozitif alınabilir çünkü (2.31) eşitsizliğinden,

$$0<\left|\xi-\frac{|p|}{q}\right|=\left||\xi|-\left|\frac{p}{q}\right|\right|\le\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2k}}$$

olur ve buradan da,

$$0 < \left| \xi - \frac{|p|}{q} \right| < \frac{1}{q^{2k}}$$

elde edilir. O halde, $p$ negatif bir tam sayı olsa bile, $|p|$ pozitif tam sayısı için (2.31) gerçeklenir. Not 2.3.1. (iii) den ötürü $p$ tam sayısı keyfi bir sayıdan büyük alınabileceği için, $p > 1$ olarak almak mümkündür.

(2.31) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{q}{\xi p}$ $(>0)$ ile çarpılırsa,

$$0 < \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{\xi p q^{2k-1}} \tag{2.32}$$

elde edilir. Şimdi, $\left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^k}$ olduğunu gösterelim. Not 2.3.1. (ii) den ötürü $q$ keyfi bir sayıdan büyük alınabildiği için, $q$ sayısını da $q > \frac{1}{\xi}$ olarak almak mümkündür. Böylece bu eşitsizlik ve (2.32) eşitsizliği kullanılarak,

$$0 < \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p q^{2k-2}}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafının pay ve paydası $p^{k-1}$ ile çarpılırsa,

$$0 < \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^k} \left( \frac{p}{q^2} \right)^{k-1} \tag{2.33}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, her $k > 0$ tam sayısı için,

$$\left( \frac{p}{q^2} \right)^{k-1} \leq 1 \tag{2.34}$$

olduğunu göstermek için (2.31) eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{p}{q} < \xi + 1 \tag{2.35}$$

elde edilir. Çünkü, $\frac{p}{q} - \xi = \left|\frac{p}{q}\right| - |\xi| \leq \left|\left|\frac{p}{q}\right| - |\xi|\right| \leq \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2k}} < 1$ dir. Burada $q > 1$ olduğundan her $k > 0$ tam sayısı için, $q^{2k} > 1$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{q^{2k}} < 1$ olur. Böylece, (2.35) eşitsizliğinin her iki tarafını $\frac{1}{q}$ $(> 0)$ ile çarparsak,

$$\frac{p}{q^2} < \frac{\xi + 1}{q} \tag{2.36}$$

eşitsizliği elde edilir. $q$ istenilen büyüklükteki keyfi bir sayıdan daha büyük alınabildiği için, $q$ sayısı

$$q > \xi + 1 \tag{2.37}$$

olacak şekilde alınabilir. (2.36) ve (2.37) eşitsizliklerinden, $\frac{p}{q^2} < 1$ ve buradan da her $k > 0$ tam sayısı için, $\left(\frac{p}{q^2}\right)^{k-1} \leq 1$ eşitsizliği elde edilir. Böylece (2.34) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Böylece, $q > \max\left(\xi + 1, \frac{1}{\xi}\right)$ olacak şekilde alındığında (2.33), (2.34) eşitsizlikleri ve $p > 1$ olması kullanılarak, her $k > 0$ tam sayısı için,

$$0 < \left| \frac{1}{\xi} - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{p^k} \qquad (p > 1)$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\frac{q}{p}$ rasyonel sayısı bulunabilir. O halde, $\frac{1}{\xi}$ bir Liouville Sayısıdır.

**Teorem 2.3.7.** $\xi$ bir Liouville Sayısı olsun. Eğer $\eta$ irrasyonel sayısı ile $\xi$ arasında,

$$\eta = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2 + ... + s_m\xi^m \qquad \left( s_i \in \mathbb{Q},\ 0 \le i \le m,\ m \in \mathbb{N} \right)$$

şeklinde bir bağıntı varsa, $\eta$ bir Liouville Sayısıdır, [15].

## 2.4. SAYI CİSİMLERİ İLE İLGİLİ TANIMLAR VE TEOREMLER

### Genel Tanımlar

**Tanım 2.4.1.** $F$ ve $E$ birer cisim olmak üzere, $E$ cismi $F$ cisminin bir alt cismi ise $F$ cismine $E$ cisminin bir "*genişlemesi*" denir ve $F / E$ ile gösterilir.

**Tanım 2.4.2.** $F / E$ bir cisim genişlemesi olsun. Bir $\alpha \in F$ için $p(\alpha)=0$ olacak biçimde sıfır polinomundan farklı bir $p(x) \in E[x]$ polinomu varsa $\alpha$ ya $E$ cismi üzerinde bir "*cebirsel eleman*" denir ve $\alpha$ *ceb/*$E$ ile gösterilir. Aksi takdirde, $\alpha$ ya $E$ cismi üzerinde bir "*transandant eleman*" denir ve $\alpha$ *trans/*$E$ ile gösterilir.

**Tanım 2.4.3.** $F$, $E$ cisminin bir genişlemesi ve $F$ cisminin her $\alpha$ elemanı $E$ üzerinde cebirsel ise, $F$ cismine $E$ cisminin bir "*cebirsel genişlemesi*" denir.

**Tanım 2.4.4.** $F / E$ bir cisim genişlemesi ise $F$ cisminin $E$ cismi üzerinde vektör uzayı olarak boyutuna $F$ cisminin $E$ cismi üzerindeki "*derecesi*" denir ve $[F : E]$ ile gösterilir. Eğer $[F : E] < \infty$ ise $F / E$ genişlemesine "*sonlu genişleme*" denir.

**Önerme 2.4.1.** Her sonlu genişleme bir cebirsel genişlemedir.

**Tanım 2.4.5.** $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin sonlu bir genişlemesine "*cebirsel sayı cismi*" denir.

**Tanım 2.4.6.** $F / E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in F$ olsun. $F = E(\alpha)$ biçiminde yazılabilir ise $F$ cismine $E$ cisminin bir "*basit genişlemesi*" denir.

**Tanım 2.4.7.** $F / \mathbb{Q}$ cebirsel bir genişleme olsun. Eğer bir $\alpha \in F$ elemanının $\mathbb{Q}$ üzerinde sağladığı polinom katsayıları $\mathbb{Z}$ de monik olan bir polinom ise $\alpha$ elemanına *"cebirsel tam sayı"* denir.

**Önerme 2.4.2.** $\mathbb{Q}$ nun bir $\alpha$ elemanının cebirsel tam sayı olması için gerekli ve yeterli koşul $\alpha \in \mathbb{Z}$ olmasıdır.

**Tanım 2.4.8.** $F$ bir cebirsel sayı cismi olsun. Bir $\alpha \in F$ nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki eşlenikleri $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ise,

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \ , \ \dot{I}z(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

biçiminde tanımlanan ifadeler sırasıyla , "$\alpha$ *nın normu*" ve "$\alpha$ *nın izi*" olarak adlandırılır. Ayrıca, $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere,

$$N(\alpha.\beta) = N(\alpha).N(\beta) \text{ ve } \dot{I}z(\alpha+\beta) = \dot{I}z(\alpha) + \dot{I}z(\beta)$$

dır. Bunun dışında $\alpha \in \mathbb{Q}$ ise,

$$N(\alpha) = \alpha^2 \text{ ve } \dot{I}z(\alpha) = 2\alpha$$

dır.

**Kuadratik Sayı Cisimleri**

**Tanım 2.4.9.** $F/\mathbb{Q}$ cebirsel bir genişleme ve $[F:\mathbb{Q}] = 2$ ise $F$ cebirsel sayı cismine *"kuadratik sayı cismi"* denir.

**Önerme 2.4.3.** $d$ kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi $\mathbb{Q}$ nun basit bir genişlemesidir.

**Sonuç 2.4.1.** $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $\mathbb{Q}$ tabanı $\{1, \sqrt{d}\}$ olduğundan,

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{\alpha:\ \alpha=x+y\sqrt{d}\ ;\ x,y\in\mathbb{Q}\right\}$$

biçimindedir.

**Sonuç 2.4.2.** $\alpha\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ ve $\alpha=x+y\sqrt{d}$ elemanının eşleniği $\alpha^{'}$ olmak üzere,

$$N(\alpha)=\alpha.\ \alpha^{'}=\left(x+y\sqrt{d}\right).\left(x-y\sqrt{d}\right)=x^{2}-dy^{2}$$

ve

$$\dot{I}z(\alpha)=\alpha+\ \alpha^{'}=\left(x+y\sqrt{d}\right)+\left(x-y\sqrt{d}\right)=2x$$

biçimindedir.

**Tanım 2.4.10.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin cebirsel tam elemanlarının oluşturduğu $O_K$ kümesi, toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. $O_K$ halkasına $K$ cisminin "*tamlık halkası*" denir, [19].

**Önerme 2.4.4.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ olsun. $\alpha\in O_K$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $N(\alpha),\ \dot{I}z(\alpha)\in\mathbb{Z}$ olmasıdır, [19].

**Teorem 2.4.1.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cismi olsun.

i) $d\equiv 2,3(\text{mod}\,4)$ ise $O_K=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{d}$

ii) $d\equiv 1(\text{mod}\,4)$ ise $O_K=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$

dir, [19].

**Sonuç 2.4.3.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $O_K$ tamlık halkası sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$-modüldür ve üreteçleri,

i) $d\equiv 2,3\pmod 4$ ise $\left\{1,\ \sqrt{d}\right\}$

ii) $d\equiv 1\pmod 4$ ise $\left\{1,\ \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right\}$

biçimindedir, [19].

**Tanım 2.4.11.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cismi ve

i) $d\equiv 2,3\pmod 4$ ise $\omega_d=\sqrt{d}$

ii) $d\equiv 1\pmod 4$ ise $\omega_d=\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$

olmak üzere $\left\{1,\ \omega_d\right\}$ ikilisine $O_K$ halkasının *"tamlık tabanı"* denir, [19] .

**Tanım 2.4.12.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $O_K$ tamlık halkasının tamlık tabanı $\left\{\omega_1,\omega_2\right\}=\left\{1,\omega_d\right\}$ olsun.

$$\Delta=\det\left(\dot{I}z\left(\omega_i.\omega_j\right)\right)_{i,j=1,2}$$

değerine $O_K$ tamlık halkasının veya $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin "*diskriminantı"* denir ve

i) $d\equiv 2,3\pmod 4$ ise $\Delta=4d$

ii) $d\equiv 1\pmod 4$ ise $\Delta=d$

eşitlikleri gerçeklenir.

**Tanım. 2.4.13.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık halkası $O_K$ olsun. $\varepsilon \in O_K$ için $\frac{1}{\varepsilon}\in O_K$ ise $\varepsilon$ değerine "*birim eleman*" denir ve $N\left(\varepsilon\right)=\pm 1$ sağlanır. Bu şekilde tanımlanan bütün $\varepsilon_i$ değerleri bir grup oluşturur. Bu gruba $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin *"birimler grubu"* denir ve "$\mathcal{U}_d$" ile gösterilir.

**Tanım 2.4.14.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cismi olsun. $d>0$ ise $K$ ya "*reel kuadratik sayı cismi* ", $d<0$ ise $K$ ya "*imajiner kuadratik sayı cismi* " denir.

**Önerme 2.4.5.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cismi olsun. $K$ cisminin $\mathcal{U}_d$ birimler grubu,

$$\mathcal{U}_d=\left\{\pm\varepsilon_d^s : s\in\mathbb{Z}\right\}$$

olacak biçimde bir $\varepsilon_d>1$ birimi bulunabilir.

**Tanım 2.4.15.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cismi olsun. $K$ cisminin birden büyük birimlerinin en küçüğü $\varepsilon_d$ ise, $\varepsilon_d$ elemanına *"temel birim"* denir.

**Önerme 2.4.4.** $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cismi olmak üzere, $x,\ y\in\mathbb{Z}$ için, $\eta=\dfrac{x+y\sqrt{d}}{2}\in K$ ise aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

**i)** $\eta$ nın bir birim olması için gerek ve yeter koşul $x^2-dy^2=\mp 4$ olmasıdır. Ayrıca, $\eta$ bir birim ise, $\eta>1$ olması için gerek ve yeter koşul $x>0$ ve $y>0$ eşitsizliklerinin gerçeklenmesidir.

**ii)** $\eta_i=\dfrac{x_i+y_i\sqrt{d}}{2}$ $\left(x_i,\ y_i\in\mathbb{Z}\ ;\ i=1,2\right)$ birden büyük birimler ise, $\eta_1<\eta_2$ olması için gerek ve yeter koşul $x_1<x_2$ ve $y_1\le y_2$ eşitsizliklerinin gerçeklenmesidir.

**Tanım 2.4.16 (Richaud-Degert Tipinden Sayı Cismi).** $d = n^2 + r$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı $r \mid 4n$ ve $-n \le r \le n$ ise, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cismine "*Richaud-Degert (R-D) Tipinden Sayı Cismi"* denir. $r = \mp 1, \mp 4$ ise, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cismine "*dar (narrow) anlamda Richaud-Degert (R-D) tipinden reel kuadratik Sayı Cismi"* , aksi halde "*geniş (extended) anlamda Richaud-Degert (R-D) tipinden reel kuadratik Sayı Cismi"* denir.

**Teorem 2.4.2.** $d = n^2 + r$ olmak üzere, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cismi Richaud-Degert (R-D) tipinden bir reel kuadratik sayı cismi olsun. Bu durumda, $\operatorname{sgn} r$ , $r$ nin işaret fonksiyonu olmak üzere $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin temel birimi olan $\varepsilon_d$ ,

$$\varepsilon_d = \begin{cases} n + \sqrt{d} & , \quad |r| = 1 \quad \text{ise} \quad \left(N(\varepsilon_d) = -\operatorname{sgn} r\right) \\ \dfrac{n + \sqrt{d}}{2} & , \quad |r| = 4 \quad \text{ise} \quad \left(N(\varepsilon_d) = -\operatorname{sgn} r\right) \\ \dfrac{\left(2n^2 + r\right) + 2n\sqrt{d}}{|r|} & , \quad |r| \ne 1, 4 \quad \text{ise} \quad \left(N(\varepsilon_d) = 1\right) \end{cases}$$

biçiminde belirlenmiştir, [20].

## 2.5. SÜREKLİ KESİRLER VE TEMEL BİRİMLER İLE İLGİLİ TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde sürekli kesirler ve temel birimler ile ilgili bir takım temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Burada verilecek olan bilgiler dördüncü bölümde temel birimler ile ilgili olan özgün teoremlerin ispatlarının daha anlaşılır olması açısından önemlidir.

### Sonlu Sürekli Kesirler

**Tanım 2.5.1.** $q_0, q_1, ..., q_n \in \mathbb{R}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $q_i > 0$ olmak üzere,

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

şeklindeki bir ifadeye *"sonlu sürekli kesir"* denir. $q_0, q_1, ..., q_n$ sayılarına sürekli kesrin "*kısmi bölümleri"* denir. Eğer $q_0, q_1, ..., q_n$ reel sayılarının hepsi tam sayı ve $1 \leq i \leq n$ için $q_i > 0$ ise, sürekli kesre *"basit sürekli kesir"* denir. Sürekli kesirleri bütünüyle yazmak uzun olduğundan, genellikle $[q_0, q_1, ..., q_n]$ gösterimi kullanılır. Bu bölümde sadece basit sürekli kesirlere yer verileceğinden, sürekli kesir denilince sadece basit olanlar kastedilecektir.
Sonlu sürekli kesir tanımı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$[q_0] = q_0,$$

$$[q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1},$$

$$[q_0, q_1, ..., q_n] = \left[ q_0, q_1, ..., q_{n-2}, q_{n-1} + \frac{1}{q_n} \right] \quad (n \geq 2)$$

Ayrıca, sonlu sürekli kesirler için aşağıdaki gösterimler de kullanılabilir:

$$[q_0, q_1, ..., q_n] = q_0 + \frac{1}{[q_1, ..., q_n]}$$

$$[q_0, q_1, ..., q_n] = [q_0, q_1, ..., q_{k-1}, [q_k, q_{k+1}, ..., q_n]] \quad (1 \le k \le n).$$

**Teorem 2.5.1.** Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı gösterir. Tersine, her rasyonel sayı sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir, [21].

**İspat.** $q_0, q_1, ..., q_n \in \mathbb{Z}$ ve $1 \le i \le n$ için $q_i > 0$ olmak üzere, $[q_0, q_1, ..., q_n]$ sonlu sürekli kesri alındığında, her sonlu basit sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiğinin ispatı $n$ ye göre indüksiyonla yapılır.

$[q_0, q_1] = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ rasyonel sayı olduğundan $n = 1$ için iddia doğrudur.

$n = k$ için iddia doğru olsun. Yani, $q_0$ hariç hepsi pozitif olan $q_0, q_1, ..., q_k$ tam sayıları ve $k$ pozitif tam sayısı için, $[q_0, q_1, ..., q_k]$ sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu kabul edilsin. $q_0, q_1, ..., q_k$ tam sayıları $q_1, q_2, ..., q_{k+1}$ olarak yeniden adlandırıldığında, varsayımdan $[q_1, ..., q_k, q_{k+1}]$ basit sürekli kesri bir rasyonel sayıdır. O halde, $s > 0$ olmak üzere, $[q_1, ..., q_k, q_{k+1}] = \dfrac{r}{s}$ olacak biçimde $r$ ve $s$ tam sayıları vardır. Buradan, $q_0$ herhangi bir tam sayı olmak üzere,

$$[q_0, q_1, ..., q_k, q_{k+1}] = q_0 + \frac{1}{[q_1, ..., q_k, q_{k+1}]} = \frac{q_0 r + s}{r} \in \mathbb{Q}$$

elde edilir. O halde, iddia $n = k + 1$ için doğrudur. Böylece, her sonlu basit sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiğinin ispatı tamamlanmış olur.

$u_0, u_1 \in \mathbb{Z}$, $u_1 > 1$ ve $(u_0, u_1) = 1$ olmak üzere, $\dfrac{u_0}{u_1}$ rasyonel sayısı alınsın. $u_0$ ve $u_1$

sayılarına Euclid Algoritması uygulandığında,

$$u_0 = q_0 u_1 + u_2 \qquad ; \quad 0 < u_2 < u_1$$

$$u_1 = q_1 u_2 + u_3 \qquad ; \quad 0 < u_3 < u_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = q_{n-1} u_n + u_{n+1} \quad ; \quad 0 < u_{n+1} < u_n$$

$$u_n = q_n u_{n+1}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde $q_1, q_2, ..., q_n$ sayıları pozitif tam sayılar olup, buradan,

$$\frac{u_0}{u_1} = q_0 + \frac{u_2}{u_1} = q_0 + \frac{1}{u_1 / u_2}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = q_1 + \frac{u_3}{u_2} = q_1 + \frac{1}{u_2 / u_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = q_{n-1} + \frac{u_{n+1}}{u_n} = q_{n-1} + \frac{1}{u_n / u_{n+1}}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = q_n$$

denklemleri elde edilir. İkinci denklemdeki $\frac{u_1}{u_2}$ değeri, birinci denklemde yerine yazılıp, bu şekilde devam edilirse,

$$\frac{u_0}{u_1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} = [q_0, q_1, ..., q_n]$$

elde edilir. Böylece, $\frac{u_0}{u_1}$ rasyonel sayısının sonlu sürekli kesre açılımı elde edilir.

**Not 2.5.1.** Bir rasyonel sayının tam olarak iki şekilde sürekli kesre açılımı vardır. Herhangi bir $\frac{u_0}{u_1}$ rasyonel sayısının sürekli kesre açılımı $[q_0, q_1, ..., q_n]$ olmak üzere,

$$[q_0, q_1, ..., q_n] = [q_0, q_1, ..., q_{n-1}, q_n - 1, 1]$$

olduğu kolayca görülebilir.

Aşağıdaki teorem ile bir rasyonel sayının bu iki gösterimden farklı bir sürekli kesir açılımının olamayacağı ifade edilmektedir.

**Teorem 2.5.2.** $[q_0, q_1, ..., q_n]$ ve $[t_0, t_1, ..., t_m]$ basit sürekli kesirler olmak üzere, $[q_0, q_1, ..., q_n] = [t_0, t_1, ..., t_m]$ ve $q_n > 1$, $t_m > 1$ ise, $n = m$ ve $q_i = t_i$ $(1 \le i \le n)$ dir, [21].

**Sürekli Kesirlerle İlgili Rekürans Bağıntıları**

Bir sonlu sürekli kesrin rasyonel sayı değerini hesap etmek, basamak sayısı arttıkça oldukça zor olacağından, ilk birkaç basamak değeri için doğrudan hesaplama yapılarak kullanışlı rekürans değerlerine ulaşılabilir.

$$[q_0] = q_0 ,$$

$$[q_0, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} ,$$

$$[q_0, q_1, q_2] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1}$$

olduğu göz önüne alınır ve $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-2} = 1$, $Q_{-1} = 0$ özel değerleri seçilirse,

$$P_0 = q_0 = q_0 P_{-1} + P_{-2} \ , \quad P_1 = q_1 q_0 + 1 = q_1 P_0 + P_{-1}$$
$$Q_0 = 1 = q_0 Q_{-1} + Q_{-2} \ , \quad Q_1 = q_1 = q_1 Q_0 + Q_{-1}$$

eşitlikleri elde edilir ve $k \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} P_k &= q_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k &= q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde $\{P_k\}$ ve $\{Q_k\}$ tam sayı dizileri elde edilir.

**Sonuç 2.5.1.** $\{Q_k\}$ tam sayı dizisi için aşağıdakiler gerçeklenir:

**i)** $1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 ...$ dir.

**ii)** $k \geq 0$ tam sayısı için, $Q_k \geq k$ dır, [22].

**Teorem. 2.5.3.** $q_0, q_1, ..., q_k \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq i \leq k$ için $q_i > 0$ olmak üzere, $\{P_k\}$ ve $\{Q_k\}$ tam sayı dizileri (2.38) rekürans bağıntıları ile tanımlanan diziler olsun. Bu takdirde, her $x$ pozitif reel sayısı ve her $k \geq 0$ için ,

$$\left[q_0, q_1, ..., q_{k-1}, x\right] = \frac{xP_{k-1} + P_{k-2}}{xQ_{k-1} + Q_{k-2}}$$

dir, [22].

**Teorem. 2.5.4.** Her $k \geq 0$ tam sayısı için $r_k = \left[q_0, q_1, ..., q_k\right]$ olarak alınırsa,

$$r_k = \frac{P_k}{Q_k}$$

dir, [21] .

**İspat.** Bir önceki teoremde $x$ pozitif reel sayısı yerine $q_k\,(>1)$ tam sayısı alınırsa,

$$r_k = [q_0, q_1, ..., q_k] = \frac{q_k P_{k-1} + P_{k-2}}{q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

ve buradan da (2.38) reküarans bağıntıları kullanılarak, $r_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ elde edilir.

**Tanım 2.5.2.** $k$, $n$ ye eşit veya $n$ den küçük negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, $r_k = [q_0, q_1, ..., q_k]$ sürekli kesrine $[q_0, q_1, ..., q_n]$ sürekli kesrinin *"k. yaklaşık kesri"* denir.

**Teorem 2.5.5.** Her $-1 \le k$ tam sayısı için,

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1} \qquad \text{ve} \qquad r_k - r_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_k Q_{k-1}} ,$$

her $k \ge 0$ tam sayısı için,

$$P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k q_k \qquad \text{ve} \qquad r_k - r_{k-2} = \frac{(-1)^k q_k}{Q_k Q_{k-2}}$$

eşitlikleri gerçeklenir, [21].

**Sonuç 2.5.2.** Her $k \ge 0$ tam sayısı için, $(P_k, Q_k) = 1$ dir, [21].

**İspat.** $(P_k, Q_k) = d > 1$ olsun. Bir önceki teorem kullanılarak, $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$ yazılabilir. $(P_k, Q_k) = d$ olduğundan, $d \mid P_k$ ve $d \mid Q_k$ dır. Dolayısıyla, $d \mid P_k Q_{k-1}$ ve $d \mid Q_k P_{k-1}$ olup $d \mid P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k$ ve böylece $d \mid 1$ elde edilir ki bu $d > 1$ kabulü ile çelişir. Böylece, $(P_k, Q_k) = 1$ olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

**Sonsuz Sürekli Kesirler**

**Tanım 2.5.3.** $i \geq 1$ için $q_i \geq 1$ olacak şekildeki tamsayıların $\{q_0, q_1, ..., q_n, ...\}$ sonsuz dizisi bir basit sonsuz sürekli kesir tanımlar ve $[q_0, q_1, ..., q_n, ...]$ ile gösterilir.

**Teorem 2.5.6.** $[q_0, q_1, ..., q_n, ...]$ sonsuz sürekli kesrinin yaklaşık kesirleri için,

**i)** $r_0 < r_2 < r_4 < ... < r_{2i} < ...$

**ii)** $r_1 > r_3 > r_5 > ... > r_{2i+1} > ...$

**iii)** $r_{2s} < r_{2t+1}$

eşitsizlikleri gerçeklenir, [23].

**İspat. i)** Her $i \geq 0$ tam sayısı için, Teorem 2.5.5 kullanılarak

$$r_{2i+2} - r_{2i} = \frac{(-1)^{2i+2} q_{2i+2}}{Q_{2i+2} Q_{2i}} > 0$$

elde edilir. Buradan, $r_{2i+2} > r_{2i}$ olup, $r_0 < r_2 < r_4 < ... < r_{2i} < ...$ eşitsizliğinin gerçeklendiğinin ispatı tamamlanır.

**ii)** Benzer şekilde, her $i \geq 1$ tam sayısı için Teorem 2.5.5 kullanılarak,

$$r_{2i+1} - r_{2i-1} = \frac{(-1)^{2i+1} q_{2i+1}}{Q_{2i+1} Q_{2i-1}} < 0$$

elde edilir. Buradan, $r_{2i-1} > r_{2i+1}$ olup, $r_1 > r_3 > r_5 > ... > r_{2i+1} > ...$ eşitsizliğinin gerçeklendiğinin ispatı tamamlanır.

**iii)** Her $i \geq 1$ tam sayısı için, Teorem 2.5.5 den

$$r_{2i+1} - r_{2i} = \frac{(-1)^{2i}}{Q_{2i+1}Q_{2i}} > 0$$

olur ve buradan $r_{2i} < r_{2i+1}$ elde edilir. Şimdi de, her $s$, $t \geq 0$ tam sayıları için, $r_{2s} < r_{2t+1}$ olduğu, (i) den elde edilen $r_{2s} \leq r_{2s+2t}$ ; $r_{2i} < r_{2i+1}$ eşitsizliğinden elde edilen $r_{2s+2t} < r_{2s+2t+1}$ ve (ii) den elde edilen $r_{2s+2t+1} \leq r_{2t+1}$ ifadelerinden,

$$r_{2s} \leq r_{2s+2t} < r_{2s+2t+1} \leq r_{2t+1}$$

eşitsizliği elde edilerek $r_{2s} < r_{2t+1}$ eşitsizliğinin gerçeklendiği kolayca ispatlanmış olur.

**Teorem 2.5.7.** Her $k \geq 1$ için, $q_k > 0$ olmak üzere , $\{q_0, q_1, ..., q_k, ...\}$ tam sayılar dizisi verildiğinde, $r_k = [q_0, q_1, ..., q_k]$ ise, $\lim\limits_{k\to\infty} r_k$ mevcut olup $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = [q_0, q_1, ..., q_k, ...]$ dir. Bunun dışında, her $s$ , $t \geq 0$ tam sayıları için,

$$r_{2s} < \lim_{k\to\infty} r_k < r_{2t+1}$$

eşitsizliği gerçeklenir, [21].

**Teorem 2.5.8.** $\alpha = [q_0, q_1, ...]$ ise, $[\alpha] = q_0$ ve $\alpha = q_0 + \dfrac{1}{[q_1, q_2, ...]}$ dır, [21].

**Teorem 2.5.9.** $\alpha = [q_0, q_1, ...] = [t_0, t_1, ...]$ ise her $k \geq 0$ için, $q_k = t_k$ dır, [21].

**İspat.** $\alpha = [q_0, q_1, ...] = [t_0, t_1, ...]$ ise Teorem 2.5.8 den, $[\alpha] = q_0 = t_0$ ve

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{[q_1, q_2, ...]} = t_0 + \frac{1}{[t_1, t_2, ...]}$$

bulunur. Buradan, $[q_1,q_2,...]=[t_1,t_2,...]$ elde edilir. Bu işlem tekrarlanarak $q_1=t_1$ elde edilir. İndüksiyon kullanılarak, her $n\geq 0$ tam sayısı için $q_n=t_n$ eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 2.5.10.** Her sonsuz basit sürekli kesrin değeri bir irrasyonel sayıdır, [21].

**İspat.** Herhangi bir $[q_0,q_1,q_2,...]$ sonsuz sürekli kesrini alalım. $[q_0,q_1,q_2,...]=\alpha$ denilirse, Teorem 2.5.7 den $\alpha$ , $r_n$ ile $r_{n+1}$ arasındadır. Buradan,

$$0<|\alpha-r_n|<|r_{n+1}-r_n| \tag{2.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan Teorem 2.5.5 den, $|r_{n+1}-r_n|=\dfrac{1}{Q_nQ_{n+1}}$ olur. Bu değer, (2.39) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$0<|\alpha-r_n|<\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $Q_n$ ile çarpılırsa,

$$0<|Q_n\alpha-P_n|<\frac{1}{Q_{n+1}}$$

bulunur.

$\alpha$ nın rasyonel olduğunu kabul edelim. O halde, $\alpha=\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z};b>0)$ şeklinde yazılabilir. Buradan, $0<\left|Q_n\dfrac{a}{b}-P_n\right|<\dfrac{1}{Q_{n+1}}$ olup, bu eşitsizliğin her iki tarafı $b$ ile çarpılırsa,

$$0 < \left| Q_n a - P_n b \right| < \frac{b}{Q_{n+1}}$$

olur. Sonuç 2.5.1 den yeteri kadar büyük $n$ ler için, $Q_{n+1} > b$ eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla, $0 < \left| Q_n a - P_n b \right| < 1$ elde edilir. Bu ise, $Q_n a - P_n b$ ifadesinin tam sayı olması ile çelişir. O halde, $\alpha$ irrasyonel sayı olmalıdır.

**Teorem 2.5.11.** Her irrasyonel sayı, sonsuz sürekli kesir olarak ifade edilebilir, [21].

**İspat.** $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $[\alpha_0] = q_0 \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda, $0 < \alpha_0 - q_0 < 1$ olacaktır. $\dfrac{1}{\alpha_0 - q_0} = \alpha_1$ denilirse, $\alpha_1$ sayısı da irrasyonel olur ve $\alpha_1 > 1$ dir. Böylece, $\alpha_0 = q_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, bir $\{q_k\}$ sonsuz dizisi elde edilir.

$$\alpha_0 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad q_0 = [\alpha_0]$$

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}, \qquad 0 < q_1 = [\alpha_1]$$

…………………………………..

$$\alpha_{k-1} = q_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k}, \quad 0 < q_{k-1} = [\alpha_{k-1}]$$

…………………………………..

Burada $\alpha_{k-1}$ irrasyonel bir sayı olduğundan, $\alpha_k$ da irrasyoneldir. Ayrıca, $q_0 \in \mathbb{Z}$ dışında $q_k$ lar pozitif tam sayılardır. Böylece, *k+1* adım sonra,

$$\alpha = [q_0, q_1, ..., q_{k-1}, \alpha_k] \tag{2.40}$$

elde edilir. Teorem. 2.4.3 kullanılarak, (2.40) eşitliğinden

$$\alpha = \frac{\alpha_k P_{k-1} + P_{k-2}}{\alpha_k Q_{k-1} + Q_{k-2}}$$

bulunur. $r_k = \dfrac{P_k}{Q_k}$ olduğundan,

$$\alpha - r_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}\left(\alpha_k Q_{k-1} + Q_{k-2}\right)}$$

ve buradan da

$$\left|\alpha - r_{k-1}\right| < \frac{1}{Q_{k-1}^2}$$

elde edilir. Buradan, limit alınarak $\alpha = \lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty}\left[q_0, q_1, ..., q_k\right] = \left[q_0, q_1, ...\right]$ bulunur.

**Sonuç 2.5.3.** İrrasyonel sayılar ile sonsuz sürekli kesirler arasında birebir bir eşleme vardır, [21].

**Periyodik Sürekli Kesirler**

Bu kısımda, bir irrasyonel sayının sonsuz sürekli kesir açılımın periyodik olması için gerek ve yeter şartın, bu sayının bir kuadratik irrasyonel sayı olması gerektiği ifade edilecektir. Bunun için, periyodik sürekli kesir ve kuadratik irrasyonel sayı tanımları verildikten sonra, kuadratik irrasyonel sayılar ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

**Tanım 2.5.4.** $\left[q_0, q_1, ..., q_n, ...\right]$ sonsuz sürekli kesri verildiğinde, $n \geq N$ olacak şekildeki her pozitif $n$ tam sayısı için $q_n = q_{n+k}$ eşitliği gerçeklenecek şekilde pozitif $N$ ve $k$ tam sayıları varsa, $\left[q_0, q_1, ..., q_n, ...\right]$ sonsuz sürekli kesrine *"periyodik sürekli kesir"* denir. Periyodik sürekli kesirleri ifade etmek için, $\left[q_0, q_1, ..., q_{N-1}, \overline{q_N, q_{N+1}, ..., q_{N+k-1}}\right]$ gösterimi kullanılır.

**Tanım 2.5.5.** $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ ve $d > 0$ kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere, $\alpha = a + b\sqrt{d}$ reel sayısına *"kuadratik irrasyonel sayı"* denir.

**Not 2.5.2.** $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin bütün irrasyonel elemanlarının kuadratik irrasyonel sayı olduğu görülmektedir.

**Teorem 2.5.12.** Her $\alpha$ kuadratik irrasyonel sayısı, $d > 0$ kare çarpansız bir tam sayı ve $r, s \in \mathbb{Z}$; $s \neq 0$; $s \mid \left(d - r^2\right)$ olmak üzere, $\alpha = \dfrac{r + \sqrt{d}}{s}$ şeklinde yazılır, [21].

**Lemma 2.5.1.** $\alpha$ kuadratik irrasyonel sayı ve $d > 0$ kare çarpansız bir tam sayı ve $r_0, s_0 \in \mathbb{Z}$; $s_0 \neq 0$ $s_0 \mid \left(d - r_0^2\right)$ olmak üzere, $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{r_0 + \sqrt{d}}{s_0}$ ise,

$$r_{k+1} = q_k s_k - r_k \quad ; \quad s_{k+1} = \frac{d - r_{k+1}^2}{s_k}$$

rekürans değerleri ve $k \geq 0$ tam sayısı için,

**i)** $r_k, s_k \in \mathbb{Z}$ ve $s_k \neq 0$,
**ii)** $s_k \mid \left(d - r_k^2\right)$ ,
**iii)** $\alpha_k = \dfrac{r_k + \sqrt{d}}{s_k}$

özellikleri gerçeklenir. Bunun dışında, $\left[\alpha_k\right] = q_k$ olarak alınırsa, $\alpha = \alpha_0 = \left[q_0, q_1, ..., q_n, ...\right]$ elde edilir, [21].

**Lemma 2.5.2.** $\alpha = \alpha_0 = \dfrac{r_0 + \sqrt{d}}{s_0}$ bir kuadratik irrasyonel sayı ve $\alpha$ nın eşleniği $\alpha'$ olsun. Eğer, $n > 1$ tam sayısı için, $\alpha_{n-1}' < 0$ ise,

**i)** $-1 < \alpha_n' < 0$

**ii)** $0 < r_n < \sqrt{d}$

**iii)** $0 < s_n < 2\sqrt{d}$

eşitsizlikleri gerçeklenir, [21].

**Teorem 2.5.13.** Her periyodik sürekli kesir bir kuadratik irrasyonel sayıya karşılık gelir, tersine her kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesirlere açılımı periyodiktir, [21].

**Teorem 2.5.14.** $d$ kare çarpansız pozitif tam sayı olmak üzere, $\sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımı, $\sqrt{d} = \left[ q_0, \overline{q_1, ..., 2q_0} \right]$ şeklindedir. Ayrıca, $d \geq 7$ için, $\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımı, $\dfrac{1+\sqrt{d}}{2} = \left[ q_0, \overline{q_1, ..., 2q_0 - 1} \right]$ dir, [24].

**Tanım 2.5.6.** Bir $\left[ q_0, q_1, q_2, ... \right]$ sonsuz sürekli kesri verildiğinde, her $n \geq 0$ için, $q_n = q_{n+k}$ olacak şekilde bir $k$ tam sayısı varsa, diğer bir ifade ile verilen sürekli kesrin periyod dışında kalan elemanı yoksa, $\left[ q_0, q_1, q_2, ... \right]$ sonsuz sürekli kesrine *"pür-periyodik (tamamen periyodik) kesir"* denir ve genel olarak $\left[ \overline{q_0, q_1, q_2, ..., q_{k-1}} \right]$ ile gösterilir.

**Tanım 2.5.7.** $\alpha$ bir kuadratik irrasyonel sayı ve $\alpha'$, $\alpha$ nın eşleniği olsun. Eğer, $\alpha > 1$ ve $-1 < \alpha' < 0$ ise, $\alpha$ ya "*indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı*" denir.

**Teorem 2.5.15.** $\alpha$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımının pür-periyodik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\alpha$ nın indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır, [21].

**Temel Birimler ile İlgili Temel Teoremler**

**Lemma 2.5.3.** $d$ kare çarpansız tam sayısı için $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin diskriminantı $\Delta_d$ ile verilmiş olsun. $R(d)$, $\Delta_d$ diskriminantlı tüm indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere, periyodu $k_d$ ile ifade edilen herhangi bir $\alpha\in R(d)$ elemanı için,

$$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{k_d}}+\frac{1}{\alpha}=\frac{rs+u}{t\alpha+u},\quad (a_i,\, r,\, s,\, t,\, u\in\mathbb{Z},\;\; a_i\geq 1,\;\; (1\leq i\leq k_d\,))$$

açılımında $t\alpha+u$, $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin temel birimi olarak ifade edilir ve bu temel birimin normu $(-1)^{k_d}$ ile belirlenir, [25].

**Teorem 2.5.16.** $d$ pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0<b\leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a,b\in\mathbb{Z}$ için $d=a^2+b$ biçiminde tanımlansın. $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d$ olsun. Bu durumda;

**I)**
$$\left.\begin{array}{l} a=4k^2r+k+r \\ b=4kr+1\;;\;\; k,r>0 \quad k\not\equiv r\left(\operatorname{mod}2\right) \\ N(\varepsilon)=-1 \text{ ve } \omega_d=a+\sqrt{d} \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=\left(4k^2+1\right)\omega_d+2k$$

**II)**
$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}(kr+1)(ek-r)+r \\ b=(ek-r)r+e\,;\;\; e,k,r,ek-r>0 \\ a^2+b\not\equiv 1\left(\operatorname{mod}4\right) \\ N(\varepsilon)=1 \text{ ve } \omega_d=a+\sqrt{d} \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_d=\left(k^2(ek-r)+2k\right)\omega_d+k(ek-r)+1$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{III)}\ \ a = k^2 r + k + r\,,\ a \equiv 1 \pmod 2 \\ b = 4(kr+1)\ ;\ \ k > 1\ ,\ r > 0 \\ N(\varepsilon) = -1 \text{ ve } \omega_d = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{d}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_d = \left(k^2+1\right)\omega_d + k$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{IV)}\ \ a = kd + r\,,\ a \equiv 1 \pmod 2 \\ b = (ek - r)r + e\,; k > 1, e, r, ek - r > 0 \\ N(\varepsilon) = 1 \text{ ve } \omega_d = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{d}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_d = \left(k^2(ek-r) + 2k\right)\omega_d + k(ek-r) + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{V)}\ \ a = ek + 2e - 1\,, \\ b = 2ek - 1; e > 1, k > 0, e \equiv k \equiv 1 \pmod 2 \\ N(\varepsilon) = 1 \text{ ve } \omega_d = \frac{1}{2}\left(a - 1 + \sqrt{d}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_d = (k+2)\omega_d + k + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{VI)}\ \ a = k(ek-1) + 2e(k+1) - 2 \\ b = 2k(ek-1) + 1\,; e, k > 0, \\ k \equiv 0 \text{ veya } e \equiv k \equiv 1 \pmod 2,\ e(k+1) \geq 3 \\ N(\varepsilon) = -1 \text{ ve } \omega_d = \frac{1}{2}\left(a - 1 + \sqrt{d}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_d = \left(k^2 + 2k + 2\right)\omega_d + k^2 + k + 1$$

ifadeleri gerçeklenir, [11].

**Lemma 2.5.4.** $d$ pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $\omega = \omega_0 \in R(d)$ nin sürekli kesir açılımı $i \geq 0$ için $[\omega_i] = \ell_i$ olmak üzere, $\omega_i = \ell_i + \dfrac{1}{\omega_{i+1}}$ olsun. Bu takdirde,

$\omega_i = \dfrac{a - r_i + \sqrt{d}}{c_i}$ $\left(c_i,\, r_i \in \mathbb{Z}\right)$ olup, $\ell_i$, $c_i$ ve $r_i$ tam sayıları aşağıdaki rekürans bağıntılarından elde edilir.

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{a - r_0 + \sqrt{d}}{c_0}, \\ 2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1}, \\ c_{i+1} = c_{i-1} + \left(r_{i+1} - r_i\right)\ell_i \quad \left(i \geq 0\right) \end{cases}$$

Burada, $0 \leq r_{i+1} < c_i$ ve $c_{-1} = \dfrac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0}$ dır. Ayrıca, $\omega_0$ irrasyonel sayısının periyodu $k \geq 1$ olmak üzere,

$$\ell_i = \ell_{k-i} \quad \left(1 \leq i \leq k-1\right)$$

$$r_i = r_{k-i+1}\ , \quad c_i = c_{k-i} \quad \left(1 \leq i \leq k\right)$$

eşitlikleri gerçeklenir, [11].

**Lemma 2.5.5.** $d \equiv 1 \left(\bmod 4\right)$, $\left(d > 5\right)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayı, $\omega_d = \dfrac{1 + \sqrt{d}}{2}$, $q_0 = \left[\omega_d\right]$ ve $\omega_R = q_0 - 1 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, $\omega_d \notin R\left(d\right)$ ve $\omega_R \in R\left(d\right)$ dir. $k$, $\omega_R$ nin periyodu olmak üzere,

$$\omega_R = \left[\overline{2q_0 - 1, q_1, \ldots, q_{k-1}}\right]\ ,\ \omega_d = \left[q_0, \overline{q_1, \ldots, q_{k-1}, 2q_0 - 1}\right]$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\omega_R = \frac{P_{k-1}\omega_R + P_{k-2}}{Q_{k-1}\omega_R + Q_{k-2}} = \left[2q_0 - 1, q_1, \ldots, q_{k-1}, \omega_R\right]$$

ise bu durumda $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ nin $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > 1$ temel birimi $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ ve $i \geq 0$ için $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere,

$$T_d = \left(2q_0 - 1\right)Q_{k-1} + 2Q_{k-2} \;,\; U_d = Q_{k-1}$$

dir, [9].

**Lemma 2.5.6.** $d \equiv 1\left(\mathrm{mod}\, 4\right)$, $\left(d > 5\right)$ pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$, $q_0 = \left[\omega_d\right]$ ve $\omega_R = q_0 - 1 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, Lemma 2.5.4 de $\omega = \omega_R$ alınırsa,

$$\begin{cases} r_0 = r_1 = a - \ell_0 = a - 2q_0 + 1 \\[2ex] c_0 = 2,\; c_1 = c_{-1} = \dfrac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0}, \\[2ex] \ell_0 = 2q_0 - 1,\; \ell_i = q_i \quad \left(1 \leq i \leq k-1\right) \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir, [9].

**Lemma 2.5.7.** $d \equiv 2,3\left(\mathrm{mod}\, 4\right)$, $\left(d > 5\right)$ pozitif kare çarpansız bir tam sayı, $\omega_d = \sqrt{d}$, $q_0 = \left[\omega_d\right]$ ve $\omega_R = q_0 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, $\omega_d \notin R\left(d\right)$ ve $\omega_R \in R\left(d\right)$ dir. $k$, $\omega_R$ nin periyodu olmak üzere,

$$\omega_R = \left[\overline{2q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}}\right] \;,\; \omega_d = \left[q_0, \overline{q_1, \ldots, q_{k-1}, 2q_0}\right]$$

biçimindedir. Ayrıca,

$$\omega_R = \frac{P_{k-1}\omega_R + P_{k-2}}{Q_{k-1}\omega_R + Q_{k-2}} = \left[2q_0, q_1, \ldots, q_{k-1,}\omega_R\right]$$

ise bu durumda $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ nin $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > 1$ temel birimi $Q_{-1} = 0$, $Q_0 = 1$ ve $i \geq 0$ için $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere,

$$T_d = 2q_0Q_{k-1} + 2Q_{k-2} \ , \ U_d = 2Q_{k-1}$$

dir, [9].

**Lemma 2.5.8.** $d \equiv 2,3\left(\mathrm{mod}\,4\right)$, $\left(d > 5\right)$ pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $\omega_d = \sqrt{d}$, $q_0 = \left[\omega_d\right]$ ve $\omega_R = q_0 + \omega_d$ olsun. Bu durumda, Lemma 2.5.4 de $\omega = \omega_R$ alınırsa, aşağıdaki reküransı bağıntıları elde edilir, [9].

$$\begin{cases} r_0 = r_1 = 0\,, \\ c_0 = 1\,,\ c_1 = b\,, \\ \ell_0 = 2q_0\,,\ \ \ell_i = q_i \quad \left(1 \leq i \leq k-1\right) \end{cases}$$

**Teorem 2.5.17.** $d \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,4\right)$ pozitif kare çarpansız tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyod $k_d = 3$ olsun. $a$ tek sayı ise,

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell\ ,\ell\ ,a}\right]$$

biçimindedir. Ayrıca, $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2}$ olmak üzere, $a = \left(\ell^2+1\right)r + \ell$ eşitliğini sağlayan $\ell$ ve $r$ pozitif tam sayıları için,

$$\left(T_d, U_d\right) = \left(\left(\ell^2+1\right)^2 r + \ell\left(\ell^2+3\right), \left(\ell^2+1\right)\right)$$

ve

$$d = \left(\ell^2+1\right)^2 r^2 + 2\ell\left(\ell^2+3\right)r + \ell^2 + 4$$

dir. $a$ çift sayı ise,

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1\ ,1\ ,a-1}\right],\ \left(T_d, U_d\right) = \left(2a, 2\right)$$

ve $d = a^2 + 1$ dir, [9].

**Teorem 2.5.18.** $d = a^2 + b \equiv 1 \left(\bmod 4\right)$ kare çarpansız pozitif tam sayısı için $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki periyod $k_d = 4$ olsun. Bu durumda,

**i)** $a$ çift ise, $\ell \geq 1$ tek tam sayısı için,

$$\omega_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1,\ \ell,\ 1,\ a-1}\right],$$

$$\left(T_d, U_d\right) = \left(A^2 r + B, A\right)$$

ve

$$d = A^2 r^2 + 2Br + C$$

dir. Burada, $A=\ell+2$, $B=A^2-2$ ve $C=\left(A+2\right)\left(A-2\right)$ olup; $r$, $a=Ar+A-1$ eşitliği ile tek türlü belirli olan çift bir pozitif tam sayıdır.

**ii)** $a$ tek ise, $\ell,\nu\geq 1$ olacak şekildeki $\ell,\nu$ tam sayıları için,

$$\omega_d=\left[\frac{a+1}{2},\overline{\ell,\nu,\ell,a}\right]$$

$$\left(T_d,U_d\right)=\left(\ell\left(A+1\right)\left(Ar+s\ell\right)+2A,\ell\left(A+1\right)\right)$$

ve

$$d=\left(A+2\right)\left(A-2\right)r^2+2s\ell\left(A+2\right)r+s\left(s\ell^2+4\right)$$

dir. Burada, $A=\nu\ell+1$ olup $r$ ve $s$ pozitif tamsayıları, $a=Ar+\ell s$ ve $\nu=-r+\ell s$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir, [9].

**Teorem 2.5.19.** $d=a^2+b\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,4\right)$ kare çarpansız pozitif bir tam sayı ve $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımındaki periyod $k_d=5$ olsun. Bu durumda,

$$\omega_d=\begin{cases}\left[\dfrac{a}{2},\overline{1,\ \ell,\ \ell,\ 1,\ a-1}\right], & \ell\geq 0 \text{ tam sayısı için , } a \text{ çift ise}\\[2ex] \left[\dfrac{a+1}{2},\overline{\ell,\nu,\ \nu,\ \ell,\ a}\right], & \ell\geq 2\ ,\ \nu>0 \text{ tam sayıları için, } a \text{ tek ise}\end{cases}$$

olup $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin temel biriminin katsayıları olan $T_d$, $U_d$ ve $d$ sayısı için,

$$
\left(T_d, U_d\right) = \begin{cases} \left(A^2 r + B, A\right), & a \text{ çift ise} \\ \left(a\left(A^2 + \ell^2\right) + 2\left(\nu A + \ell\right), A^2 + \ell^2\right), & a \text{ tek ise} \end{cases}
$$

$$
d = A^2 r^2 + 2Br + C
$$

eşitlikleri gerçeklenir.

**i)** $a$ çift ise,

$$
A = \ell^2 + 2\ell + 2\,,\ B = \left(\ell^2 + \ell\right)A + \ell^2 \quad \text{ve} \quad C = \left(\ell^2 + 3\right)\ell^2 + 2\left(\ell^2 - 1\right)\ell + 1
$$

dir. $r$, $a = Ar + \ell^2 + \ell$ eşitliği ile tek türlü belirli olan negatif olmayan bir tam sayıdır.

**ii)** $a$ tek ise,

$$
A = \nu\ell + 1
$$

dir. $r$ ve $s$ aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirli olan pozitif tam sayılar olup

$$
\begin{cases} Ar + \ell s = a\,, \\ \ell r - As = -\nu^2 - 1 \end{cases}
$$

$B = s\ell A + 2\nu$ ve $C = s\left(s\ell^2 + 4\right)$ dir, [10].

**Teorem 2.5.20.** $d \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız, $a$ tek ve $b$; $0 < b \leq 2a$ sağlayan tam sayılar olmak üzere, $d = a^2 + b$ değerine karşılık gelen $Q\left(\sqrt{d}\right)$ cismine ait $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısı için $k_d = 6$ ise $r$ ve $s$ pozitif tam sayılar $\ell_1 > \ell_2$ ve $A = \ell_1 \ell_2 + 1$, $a = Ar + t\ell_1$ olmak üzere,

$$\omega_d = \left[ \frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - \ell_1 s + 4\ell_2}{As - 2\ell_2^2}, \ell_2, \ell_1, a} \right]$$

$$T_d = a\left(A^2 \ell_3 + 2A\ell_1\right) + 2\ell_2\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + 2A$$

$$U_d = A^2 \ell_3 + 2A\ell_1$$

$$d = \left(Ar + t\ell_1\right)^2 + 4r\ell_2 + 2s$$

biçiminde ifade edilir, [26].

**Teorem 2.5.21.** $d \equiv 1 \pmod 4$ kare çarpansız, $a$ çift ve $b$, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılar olmak üzere, $d = a^2 + b$ değerine karşılık gelen $Q\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cismine ait $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısı için $k_d = 6$ ise, $A = \ell_2 + 1$, $B = 2s - r$ $\left(r > 1,\ \ell_1,\ \ell_2,\ s \in \mathbb{Z}^+\right)$ olmak üzere,

$$\omega_d = \left[ \frac{a}{2}, \overline{1, \ell_2, \frac{A(r+1) - B}{AB - 1}, \ell_2, 1, a-1} \right]$$

$$T_d = \left(A(r+1) + 2B\right)\left(A^2\ell_3 + 2A\right) + 2\left(A-1\right)\left(A\ell_3 + 1\right) + 2A, \quad U_d = A^2\ell_3 + 2A$$

$$d = \left(A(r+1) + B - 1\right)^2 + \left(\left(A-3\right)\left(r+1\right) + 4s\right) + 1$$

biçimindedir, [26].

**Teorem 2.5.22.** $d = a^2 + b = a^2 + 4m + 2$, $d \equiv 2,3 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $k_d = 6$ ise $A = \ell_1\ell_2 + 1$, $\left(\ell_2,\ \ell_1,\ m,\ r,\ t \neq 0\ (\ell_1 > r,\ r \neq 1) \in \mathbb{Z}^+\right)$ olmak üzere,

$$\omega_d = \left[ a, \overline{\ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - 2t\ell_1 + 2\ell_2}{2At - \ell_2^2}, \ell_2, \ell_1, 2a} \right]$$

$$T_d = \left(Ar + t\ell_1\right)\left(A^2\ell_3 + 2A\ell_1\right) + \left(A\ell_3\ell_2 + 2A - 1\right)$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A\ell_1$$

olarak ifade edilir. Ayrıca,

$$d = \left(Ar + t\ell_1\right)^2 + 2r\ell_2 + 2t$$

biçimindedir, [26].

# 3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, kaynaklar bölümünde belirtilen kitap ve makalelerden faydalanılmıştır. 4. BULGULAR bölümünün Transandant Sayılar ile ilgili alt bölümünde, literatürde olmayan özgün bir teorem (Teorem 4.1.1 ) elde edilmiş olup, bu teoremin ispatında Leveque [6], Oryan [7,8] ve Mahler [18] in kullandığı yöntemlerden faydalanılmış; Temel birimler ve Sürekli Kesirler ile ilgili olan alt bölümünde ise, Tomita [9,10], Azuhata [11], Pekin ve İşcan [26] ın çalışmalarında kullanılan tekniklerden faydalanılarak, literatürde olmayan beş özgün teorem (Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.3, Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5 ) elde edilmiştir. Ayrıca, Transandant Sayılar ile ilgili alt bölümdeki teoremin ispatında Genel Kısımlar Bölümünde Liouville Sayıları ile ilgili verilen bilgilerden; Temel Birimler ile ilgili teoremlerin ispatında ise Genel Kısımlar Bölümünde Sürekli Kesirler ile ilgili verilen bilgilerden ve indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların pür periyodik sürekli kesirlere açılımından faydalanılmıştır.

# 4. BULGULAR

## 4.1. LIOUVILLE SAYILARI İLE İLGİLİ TEMEL TEOREM

Bu kısımda öncelikle, Liouville Sayıları ile ilgili olarak elde etmiş olduğumuz temel teoremi aşağıdaki gibi ayrıntılı kanıtı ile vereceğiz.

**Teorem 4.1.1**

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n}{e_n}x^n \tag{4.1}$$

kuvvet serisinde $\frac{f_n}{e_n}$ ( $e_n, f_n \in \mathbb{Z}$ ve $e_n > 1$ ) katsayıları sıfırdan farklı rasyonel sayılar olsun.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log e_{n+1}}{\log e_n}=\eta>1\ , \tag{4.2}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log e_{n+1}}{\log e_n}=\infty\ , \tag{4.3}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\log|f_n|}{\log e_n}=\mu<1 \tag{4.4}$$

koşulları gerçeklensin. Bu şekilde verilen $g(x)$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur.

Ayrıca, $\xi$ aşağıdaki iki koşulu gerçekleyen bir Liouville Sayısı olsun.

**$1^0$ )** $\xi$ sayısına $\frac{p_n}{q_n}$ $(q_n > 1)$ rasyonel sayıları ile yeteri kadar büyük $n$ ler için

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{n\omega_n}} \quad \left( \lim_{n\to\infty} \omega_n = +\infty \right) \tag{4.5}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde yaklaşılsın.

**$2^0$ )** Yeteri kadar büyük $n$ ler için,

$$e_n^{\gamma_1} \le q_n^n \le e_n^{\gamma_2} \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenecek şekilde,

$$\frac{\eta}{\eta - 1} < \gamma_1 < \gamma_2 \tag{4.7}$$

sağlayan $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ reel sayıları var olsun.

Bu takdirde, $g(\xi)$ ya Liouville Sayısıdır ya da bir rasyonel sayıdır.

**İspat.** Teoremin ispatını dört aşamada yapacağız:

**1)** $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{e_n} x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur:

$\varepsilon_1 > 0$ pozitif reel sayısını

$$0 < \varepsilon_1 < \eta - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \tag{4.8}$$

olacak şekilde seçebiliriz. Çünkü (4.7) eşitsizliğinden $\eta > \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$ dir.

$\eta_1 = \eta - \varepsilon_1$ dersek, (4.8) eşitsizliğinden,

$$\eta_1 > \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \tag{4.9}$$

ve dolayısıyla

$$\eta_1 > 1 \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.2) koşulundan, öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$\log e_{n+1} > \eta_1 \log e_n \qquad (n \geq N_1) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) eşitsizliğinden,

$$\log e_n > \eta_1^{n-N_1} \log e_{N_1} \quad (n > N_1) \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada $\log e_{N_1} > 0$ olduğu görülmektedir. (4.12) eşitsizliği ve $\eta_1 > 1$ olduğu kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \infty \tag{4.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log e_n}{n} = \infty \tag{4.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log e_n}{n^2} = \infty \tag{4.15}$$

elde edilir. Ayrıca (4.10) ve (4.11) den, $\{e_n\}$ dizisinin $n \geq N_1$ için kesin monoton artan olduğu elde edilir.

(4.4) koşulundan $\mu$ < 1 olduğu için $\varepsilon_2 > 0$ pozitif reel sayısını $0 < \varepsilon_2 < 1-\mu$ olacak şekilde seçebiliriz. Bu şeçimimiz sonucunda $\mu + \varepsilon_2 < 1$ olur. (4.4) koşulundan $N_2 \geq N_1$ olacak şekilde öyle bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$\frac{\log|f_n|}{\log e_n} < \mu + \varepsilon_2 \quad (n \geq N_2) \tag{4.16}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan,

$$|f_n| < e_n^{\mu+\varepsilon_2} \qquad (n \geq N_2) \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) den,

$$0 < \sqrt[n]{\frac{|f_n|}{e_n}} < \frac{1}{e_n^{\frac{1-\mu-\varepsilon_2}{n}}} \quad (n \geq N_2) \tag{4.18}$$

elde edilir. $\mu + \varepsilon_2 < 1$ olduğundan $1-\mu-\varepsilon_2 >$ 0 dır. Bundan ve (4.14) den yararlanılarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e_n^{\frac{1-\mu-\varepsilon_2}{n}}} = 0 \tag{4.19}$$

elde edilir. O halde, (4.18) ve (4.19) dan,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f_n|}{e_n}} = 0 \tag{4.20}$$

olduğu elde edilir. Buradan, (4.1) serisinin yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğu elde edilir.

**2)** $E_n = [e_0, e_1, .., e_n]$ olsun. (4.11) eşitsizliği olan $\log e_{n+1} > \eta_1 \log e_n \quad (n \geq N_1)$ kullanılarak,

$$e_n < e_{n+1}^{\frac{1}{\eta_1}} \quad (n \geq N_1) \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) eşitsizliğinden yararlanılarak,

$$e_m \leq e_n^{\left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n-m}} \quad (n \geq m \geq N_1) \tag{4.22}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$e_n \leq E_n \leq e_0\, e_1 \,...\, e_{N_1-1}\, e_{N_1} \,...e_n \tag{4.23}$$

dir. $e_0\, e_1 ... e_{N_1-1} = K_0 \ (>0)$ alınırsa, (4.22) ve (4.23) eşitsizliklerinden,

$$e_n \leq E_n \leq K_0\, e_n^{\left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n-N_1}+...+\frac{1}{\eta_1}+1} \quad (n \geq N_1) \tag{4.24}$$

elde edilir. $\eta_1 > 1$ olduğundan $0 < \dfrac{1}{\eta_1} < 1$ dir. Bunu kullanarak,

$$\left(\frac{1}{\eta_1}\right)^{n-N_1} + ... + \frac{1}{\eta_1} + 1 \ < \ \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan ve (4.24) den,

$$e_n \leq E_n \leq K_0\, e_n^{\frac{\eta_1}{\eta_1-1}} \quad (n \geq N_1) \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliğinden $\gamma_1 - \dfrac{\eta_1}{\eta_1 - 1} > 0$ olduğundan,

$$0 < \varepsilon_3 < \gamma_1 - \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} \tag{4.26}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde, uygun şekilde seçilen keyfi bir $\varepsilon_3 > 0$ pozitif reel sayısı için (4.13) den $N_3 \geq N_2$ sağlayan öyle bir $N_3 \in \mathbb{N}$ vardır ki,

$$K_0 \leq e_n^{\varepsilon_3} \qquad (n \geq N_3) \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.25) ve (4.27) eşitsizliklerinden

$$e_n \leq E_n \leq e_n^{\varepsilon_3 + \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}} \qquad (n \geq N_3) \tag{4.28}$$

elde edilir.

**3)** $g_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{f_\nu}{e_\nu} x^\nu \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ polinomları göz önüne alınırsa,

$$g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \in \mathbb{Q} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $t_n \in \mathbb{Z}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ olmak üzere,

$$g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{t_n}{E_n q_n^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.29}$$

şeklinde yazılabilir.

**4)** $\left|g(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| = \left|g(\xi)-g_n(\xi)+g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| \leq \left|g(\xi)-g_n(\xi)\right| + \left|g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|$

eşitsizliği gerçeklenir. $\left|g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|$ ve $\left|g(\xi)-g_n(\xi)\right|$ ifadelerini üstten sınırlayalım.

İlk olarak $\left|g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|$ ifadesini üstten sınırlayalım.

$$\left|g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{f_\nu}{e_\nu}\left(\xi^\nu-\frac{p_n^\nu}{q_n^\nu}\right)\right|$$

$$\leq \left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|\left(\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{f_\nu}{e_\nu}\right|\left|\xi^{\nu-1}+\xi^{\nu-2}\frac{p_n}{q_n}+\ldots+\frac{p_n^{\nu-1}}{q_n^{\nu-1}}\right|\right) \tag{4.30}$$

(4.5) den $N_4 \geq N_3$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_4 \in \mathbb{N}$ için,

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right| < |\xi|+1 \qquad (n \geq N_4) \tag{4.31}$$

gerçeklenir. (4.5), (4.30) ve (4.31) kullanılarak,

$$\left|g_n(\xi)-g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| < \frac{1}{q_n^{n\omega_n}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\left|\frac{f_\nu}{e_\nu}\right|\left(|\xi|+1\right)^{\nu-1} \qquad (n \geq N_4) \tag{4.32}$$

elde edilir.

$F_n = \max\left(|f_0|,|f_1|,...,|f_n|\right)$ olmak üzere, (4.32) eşitsizliğinden,

$$\left|g_n(\xi) - g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| < \frac{1}{q_n^{n\omega_n}} n^2 F_n \left(|\xi|+1\right)^{n-1} \qquad (n \geq N_4) \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.13), (4.16) ve yeteri kadar büyük $n$ ler için $\{e_n\}$ dizisinin monoton artanlığı kullanılarak $N_5 \geq N_4$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_5 \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{\log F_n}{\log e_n} < \mu + \varepsilon_2 \quad (n \geq N_5) \tag{4.34}$$

elde edilir.

$0 < \varepsilon_3 < \gamma_1 - \dfrac{\eta_1}{\eta_1 - 1}$ eşitsizliği, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = \infty$ olduğu ve (4.14), (4.15), (4.34) eşitsizlikleri kullanılarak, $N_6 \geq N_5$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_6 \in \mathbb{N}$ için,

$$n^2 F_n \left(|\xi|+1\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} e_n^{\left(\gamma_1 - \varepsilon_3 - \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}\right)\frac{\omega_n}{2}} \qquad (n \geq N_6) \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.33) ve (4.35) eşitsizliklerinden,

$$\left|g_n(\xi) - g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| < \frac{\left(e_n^{\gamma_1}\right)^{\frac{\omega_n}{2}}}{2q_n^{n\omega_n}\left(e_n^{\varepsilon_3 + \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}}\right)^{\frac{\omega_n}{2}}} \qquad (n \geq N_6)$$

bulunur. Buradan da (4.6) ve (4.28) eşitsizlikleri kullanılarak, $N_7 \geq N_6$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_7 \in \mathbb{N}$ için,

$$\left| g_n(\xi) - g_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \right| < \frac{1}{2\left(q_n^n E_n\right)^{\frac{\omega_n}{2}}} \quad (n \geq N_7) \tag{4.36}$$

eşitsizliği elde edilir.

ŞImdi de $\left| g(\xi) - g_n(\xi) \right|$ ifadesini üstten sınırlayalım.

$$\left| g(\xi) - g_n(\xi) \right| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{f_\nu}{e_\nu} \xi^\nu \right| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{f_\nu}{e_\nu} \right| |\xi|^\nu$$

eşitsizliği gerçeklenir. (4.17) kullanılarak,

$$\frac{|f_n|}{e_n} < \frac{1}{e_n^{1-\mu-\varepsilon_2}} \quad (n \geq N_7)$$

elde edilir. Bu son iki eşitsizlik kullanılarak,

$$|g(\xi) - g_n(\xi)| < \frac{|\xi|^{n+1}}{e_{n+1}^{1-\mu-\varepsilon_2}} \left[ 1 + \left( \frac{e_{n+1}}{e_{n+2}} \right)^{1-\mu-\varepsilon_2} |\xi| + \left( \frac{e_{n+1}}{e_{n+3}} \right)^{1-\mu-\varepsilon_2} |\xi|^2 + \ldots \right] (n \geq N_7) \tag{4.37}$$

elde edilir. (4.21) ve (4.13) kullanılarak, $N_8 \geq N_7$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_8 \in \mathbb{N}$ ve her $\nu \in \mathbb{N}$ için,

$$\left( \frac{e_{n+1}}{e_{n+1+\nu}} \right)^{1-\mu-\varepsilon_2} |\xi|^\nu < \frac{1}{2^\nu} \quad (n \geq N_8) \tag{4.38}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.37) ve (4.38) eşitsizliklerinden,

$$|g(\xi) - g_n(\xi)| < \frac{|\xi|^{n+1}}{e_{n+1}^{1-\mu-\varepsilon_2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right] \quad (n \geq N_8)$$

buradan da

$$\left|g(\xi)-g_n(\xi)\right|<\frac{2|\xi|^{n+1}}{e_{n+1}^{1-\mu-\varepsilon_2}} \qquad (n\geq N_8) \tag{4.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, $0<\varepsilon_4<1-\mu-\varepsilon_2$ eşitsizliği gerçeklenecek biçimde uygun şekilde seçilen keyfi bir $\varepsilon_4>0$ sayısı için (4.13) ve (4.14) den $N_9\geq N_8$ olacak şekilde öyle bir $N_9\in\mathbb{N}$ vardır ki,

$$2|\xi|^{n+1}<e_{n+1}^{\varepsilon_4} \qquad (n\geq N_9) \tag{4.40}$$

yapılabilir. (4.39) ve (4.40) dan,

$$\left|g(\xi)-g_n(\xi)\right|<\frac{1}{e_{n+1}^{1-\mu-\varepsilon_2-\varepsilon_4}} \qquad (n\geq N_9)$$

ve buradan da

$$\left|g(\xi)-g_n(\xi)\right|<\frac{1}{e_n^{(1-\mu-\varepsilon_2-\varepsilon_4)\frac{\log e_{n+1}}{\log e_n}}} \qquad (n\geq N_9) \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.3) koşulundan $\left\{\dfrac{\log e_{n+1}}{\log e_n}\right\}$ dizisinin limiti $\infty$ olan bir alt dizisi vardır. Bu alt diziyi, $\left\{s_{n_k}\right\}=\left\{\dfrac{\log e_{n_k+1}}{\log e_{n_k}}\right\}$ ile gösterirsek, $\lim\limits_{k\to\infty}s_{n_k}=\infty$ dur. Buradan ve (4.41) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|g(\xi)-g_{n_k}(\xi)\right|<\frac{1}{e_{n_k}^{(1-\mu-\varepsilon_2-\varepsilon_4)s_{n_k}}} \qquad (n_k\geq N_9) \tag{4.42}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.6), (4.13), (4.28) ve $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \infty$ olduğu kullanılarak, $N_{10} \geq N_9$ olacak şekildeki yeteri kadar büyük bir $N_{10} \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{e_{n_k}^{(1-\mu-\varepsilon_2-\varepsilon_4)s_{n_k}}} < \frac{1}{2\left(E_{n_k} q_{n_k}^{n_k}\right)^{s'_{n_k}}} \qquad (n_k \geq N_{10}) \tag{4.43}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde $\lim_{k\to\infty} s'_{n_k} = \infty$ olan $\left\{ s'_{n_k} \right\}$ dizisi vardır. (4.42) ve (4.43) eşitsizliklerinden,

$$\left| g(\xi) - g_{n_k}(\xi) \right| < \frac{1}{2\left(E_{n_k} q_{n_k}^{n_k}\right)^{s'_{n_k}}} \qquad (n_k \geq N_{10}) \tag{4.44}$$

elde edilir. (4.36) ifadesinden,

$$\left| g_{n_k}(\xi) - g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) \right| < \frac{1}{2\left(E_{n_k} q_{n_k}^{n_k}\right)^{\frac{\omega_{n_k}}{2}}} \qquad (n_k \geq N_{10}) \tag{4.45}$$

yazabiliriz. $n_k \geq N_{10}$ için, $s''_{n_k} = \min\left(\frac{\omega_{n_k}}{2}, s'_{n_k}\right)$ alınırsa, (4.44) ve (4.45) eşitsizliklerinden,

$$\left| g(\xi) - g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) \right| < \frac{1}{\left(E_{n_k} q_{n_k}^{n_k}\right)^{s''_{n_k}}} \qquad (\lim_{k\to\infty} s''_{n_k} = \infty) \tag{4.46}$$

elde edilir. Buradan da

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) = g(\xi)$$

elde edilir. Böylece, eğer $\left\{ g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) \right\}$ dizisinin, terimleri birbirinden ve $g(\xi)$ den farklı sonsuz bir alt dizisi varsa, (4.29) ve (4.46) dan $g(\xi)$ bir Liouville Sayısıdır. Aksi takdirde, $\left\{ g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) \right\}$ dizisinin terimleri birbirinden ve $g(\xi)$ den farklı hiçbir alt dizisi yoksa, yani $\left\{ g_{n_k}\left(\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}}\right) \right\}$ dizisinin terimleri belirli bir yerden itibaren sabit kalıyor ise, $g(\xi)$ rasyonel sayıdır. Böylece $g(\xi)$ değerinin ya rasyonel sayı ya da bir Liouville Sayısı olduğunun ispatı tamamlanmış olur.

## 4.2. SÜREKLİ KESİRLER VE TEMEL BİRİMLER İLE İLGİLİ TEMEL TEOREMLER VE SONUÇLARI

Bu bölümde, ikinci bölümde ayrıntılı biçimde incelenen sürekli kesirler ve temel birimlerle ilgili teoremler kullanılarak oluşturulan, literatürde olmayan özgün teoremlere ve bunların ispatlarına yer verilmiştir.

Herhangi bir pozitif kare çarpansız $d$ tam sayısını $a$ ve $b,\ 0<b\leq 2a$ eşitsizliğini gerçekleyen tam sayılar olmak üzere, $d=a^2+b$ şeklinde yazabiliriz. Burada $\sqrt{d}-1<a<\sqrt{d}$ eşitsizliği gerçeklendiğinden bu yazılıştaki $a$ ve $b$ tek türlü belirlidir. $d$ nin bu formdaki yazılışı, verilen herhangi bir pozitif kare çarpansız $d$ tam sayısının belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $O_K$ tamlık tabanındaki $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının belirlenmesinde kolaylık sağlamaktadır.

$d\equiv 1\left(\bmod 4\right)$ ve $d\equiv 2,3\left(\bmod 4\right)$ durumlarında $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının formu değiştiği için bu durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz.

İlk olarak $d\equiv 1\left(\bmod 4\right)$ durumunu ele alalım. Bu durum için, $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını ve $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ cisminin $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayılarını belirlerken, $d=a^2+b$ yazılışındaki $a$ tam sayısının çift ve tek olduğu durumları ele almamız gerekir.

$d\equiv 1\left(\bmod 4\right)$ durumu için, $a$ tam sayısının çift olması durumunda Teorem 4.2.1, $a$ tam sayısının tek olması durumunda da Teorem 4.2.2 elde edilmiştir.

Bu teoremlere geçmeden önce, ispatların daha iyi anlaşılabilmesi için $d=a^2+b$ yazılışındaki $d$ ve $b$ tam sayıları kullanarak aşağıdaki gibi bir irdeleme yapmak gerekmektedir.

İlk olarak, $D$ ile bütün pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesini, $D_t^k$ ile de $d \equiv k \pmod{8}$ ve $b \equiv t \pmod{8}$ olan tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesini gösterelim. O halde,

$$D_t^k = \left\{ d \in D \mid d \equiv k \pmod{8},\ b \equiv t \pmod{8} \right\}$$

şeklinde yazarız. Şimdi de $d \equiv 1 \pmod{4}$ olması durumunda $k$ ve $t$ tam sayılarının alabileceği değerlere göre mümkün olan tüm $D_t^k$ kümelerini belirleyelim.

$d \equiv 1 \pmod{4}$ ise, $d \equiv 1 \pmod{8}$ ya da $d \equiv 5 \pmod{8}$ olduğu açıktır. $d \equiv 1 \pmod{8}$ durumunda, $b \equiv 0 \pmod{8}$, $b \equiv 1 \pmod{8}$ ya da $b \equiv 5 \pmod{8}$ durumları söz konusudur. Bu sebepten, $d \equiv 1 \pmod{8}$ olacak biçimdeki tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesi $D_0^1 \cup D_1^1 \cup D_5^1$ dir. $d \equiv 5 \pmod{8}$ durumunda ise, $b \equiv 1 \pmod{8}$, $b \equiv 4 \pmod{8}$ ya da $b \equiv 5 \pmod{8}$ durumları söz konusudur. Bu sebepten, $d \equiv 5 \pmod{8}$ olacak biçimdeki tüm pozitif kare çarpansız tam sayıların kümesi $D_1^5 \cup D_4^5 \cup D_5^5$ dir.

Yaptığımız bu irdelemelerden sonra, $d = a^2 + b$ yazılışındaki $a$ tam sayısının çift ve tek olması durumunda $d$ nin ait olduğu kümelerini belirleyebiliriz.

$d \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda, eğer $a$ çift ise $b \equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan, $b \equiv 1 \pmod{8}$ ya da $b \equiv 5 \pmod{8}$ olur. Dolayısıyla $a$ nın çift olması durumunda, $d$ nin ait olduğu küme $D_1^1 \cup D_1^5 \cup D_5^1 \cup D_5^5$ dir. Eğer $a$ tek ise $b \equiv 0 \pmod{4}$ olduğundan, $b \equiv 0 \pmod{8}$ ya da $b \equiv 4 \pmod{8}$ olur. Dolayısıyla $a$ nın tek olması durumunda, $d$ nin ait olduğu küme $D_0^1 \cup D_4^5$ dir. Böylece $d \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda $d$ nin ait olduğu kümeler $D_0^1$, $D_1^1$, $D_5^1$, $D_1^5$, $D_4^5$ ve $D_5^5$ olup aşağıdaki şekildedir.

$$D_0^1 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m,\ a \equiv 1 \pmod 2,\ 0 < 4m < a \right\}$$

$$D_1^1 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1,\ a \equiv 0 \pmod 4,\ 0 \le 4m < a \right\}$$

$$D_5^1 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m + 5,\ a \equiv 2 \pmod 4,\ 0 \le 4m < a - 2 \right\}$$

$$D_1^5 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1,\ a \equiv 2 \pmod 4,\ 0 \le 4m < a \right\}$$

$$D_4^5 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m + 4,\ a \equiv 1 \pmod 4,\ 0 \le 4m < a - 2 \right\}$$

$$D_5^5 = \left\{ d \in D \mid d = a^2 + 8m + 5,\ a \equiv 0 \pmod 4,\ 0 \le 4m < a - 2 \right\}$$

**Teorem 4.2.1.** $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ ($a, b \in \mathbb{Z}$; $0 < b \le 2a$), kare çarpansız bir tam sayı ve $d$ nin belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $a$ çift ise;

$$\omega_d = \left[ \frac{a}{2}, \overline{1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_3,\ \ell_2,\ 1,\ a-1} \right],\ 1 \le \ell_i \le a,\ (i = 2,3)$$

olup temel birimin katsayıları olan $T_d$, $U_d$ değerleri ve $d$ tam sayısı,

$$\left(T_d, U_d\right) = \left( A\left(AC + D\right) + B^2\left(C + E\right),\ A^2 + B^2 \right)$$

$$d = C^2 + 2rF + G$$

olarak ifade edilir. Burada, $A, B, C, D, E, F$ ve $G$ değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$$A = \ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1$$

$$B = \ell_2 + 1$$

$$C = Ar + s$$

$$D = \left(A + 2\right)\ell_2\ell_3 + \ell_2^2 + 1$$

$$E = \ell_3 + 1$$

$$F = D - AE$$
$$G = 2CE + \left(A - \ell_3\right)^2 + \left(B-2\right)^2 + \left(B-1\right)^2 .$$

Ayrıca, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$$\begin{cases} a = A\left(r+1\right) + s - \ell_2 \\ \ell_2\left(\ell_3 - B\right) + 1 = rB^2 - sA. \end{cases}$$

**İspat.** $a$ çift ise, $d$ nin ait olduğu küme $D_1^1 \cup D_1^5 \cup D_5^1 \cup D_5^5$ dir. $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ iken, $\omega_d = \left[q_0, \overline{q_1, ..., q_{k_d-1}, 2q_0 - 1}\right]$ olmak üzere, Lemma 2.5.5 den $q_0 = \left[\omega_d\right] = \dfrac{a}{2}$ olduğundan Lemma 2.5.6 dan $r_0 = r_1 = a - 2q_0 + 1 = 1$, $c_0 = 2$ ve $\ell_0 = a - 1$ elde edilir. İlk olarak $d$ nin $D_1^1 \cup D_1^5$ kümesinin bir elemanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $b \equiv 1\left(\bmod 8\right)$ olur ve buradan $b = 8m+1$ $\left(m \geq 0\right)$ şeklinde yazılabilir. Böylece Lemma 2.5.6 kullanılarak,

$$c_1 = c_{-1} = \frac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0} = \frac{8m+1+2a-1}{2} = 4m + a \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.47) değerini, Lemma 2.5.4 de verilen $2a = c_1\ell_1 + r_2 + 1$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$2a = \left(a + 4m\right)\ell_1 + r_2 + 1 \tag{4.48}$$

ve buradan da $\left(2 - \ell_1\right)a = 4m\ell_1 + r_2 + 1 > 0$ ifadesini elde ederiz. $a > 0$ olduğundan bu ifadeden $\ell_1 < 2$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $\ell_1 \geq 1$ olduğundan, $1 \leq \ell_1 < 2$ eşitsizliği elde edilir ki bu da $\ell_1 = 1$ olmasını gerektirir. Ayrıca, Lemma 2.5.4 ve Lemma 2.5.6 dan $1 \leq i \leq k_d - 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ ve $\ell_i = \ell_{k_d - i}$ ifadeleri gerçeklendiğinden, $\ell_1 = \ell_6$, $\ell_2 = \ell_5$ ve $\ell_3 = \ell_4$ olup,

$$\omega_d = \left[ \frac{a}{2}, \overline{1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, 1, a-1} \right]$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinde $\ell_1 = 1$ ifadesi yerine yazarsak,

$$a = 4m + r_2 + 1 \tag{4.49}$$

eşitliğini elde ederiz. $a$ çift sayı olduğundan, (4.49) eşitliğinden $r_2 < a$ olduğu ve $r_2$ nin tek sayı olması gerektiği açıktır. Böylece $1 \le r_2 < a$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve Lemma 2.5.4 kullanılarak $1 \le \ell_2 \le a$ elde edilir.

Lemma 2.5.4 deki $c_{i+1} = c_{i-1} + \left(r_{i+1} - r_i\right)\ell_i \quad \left(i \ge 0\right)$ bağıntısı kullanılarak,

$$c_2 = c_0 + \left(r_2 - r_1\right)\ell_1 = r_2 + 1 \tag{4.50}$$

elde edilir. Bu değer, Lemma 2.5.4 de verilmiş olan $2a - r_2 = c_2\ell_2 + r_3$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$2a = \left(r_2 + 1\right)\ell_2 + r_2 + r_3 \tag{4.51}$$

elde edilir. $c_3 = c_4$ olduğu kullanılarak, $c_1 + \left(r_3 - r_2\right)\ell_2 = c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3$ eşitliği ve buradan da $4m = r_2 + 1 + \left(r_2 - r_3\right)\ell_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3 - a$ elde edilir. Bu son eşitlikten (4.49) eşitliği kullanılarak,

$$8m = \left(r_2 - r_3\right)\ell_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3 \tag{4.52}$$

eşitliği, diğer taraftan (4.48) ve (4.49) eşitliklerinden de,

$$8m = \left(r_2 + 1\right)\ell_2 + r_3 - r_2 - 2 \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.52) ve (4.53) eşitlikleri kullanılarak $r_2$ değeri,

$$r_2 = \ell_2(r_3+1) + \ell_3(r_3 - r_4) + r_3 - 2 \tag{4.54}$$

olarak elde edilir.

Şimdi $r_3$ sayısının bir tek sayı olduğunu göstelim. Bunun için ilk olarak $d$ nin $D_1^1$ kümesine ait olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $a \equiv 0 \pmod 4$ olur ki $a = 4m + r_2 + 1$ olduğu kullanılarak, $r_2 \equiv 3 \pmod 4$ elde edilir. $r_2 \equiv 3 \pmod 4$ olmasını kullanarak, $2a = (r_2+1)\ell_2 + r_2 + r_3$ ifadesinden $r_3 \equiv 1 \pmod 2$ olduğunu buluruz. Benzer şekilde eğer, $d$ nin $D_1^5$ kümesine ait olduğunu kabul edersek, $a \equiv 2 \pmod 4$ olur ki $a = 4m + r_2 + 1$ eşitliğinden, $r_2 \equiv 1 \pmod 4$ elde edilir. $r_2 \equiv 1 \pmod 4$ olduğunu kullanarak, $2a = (r_2+1)\ell_2 + r_2 + r_3$ ifadesinden $r_3 \equiv 1 \pmod 2$ olacağını buluruz. Böylece, $d$ nin $D_1^1 \cup D_1^5$ kümesine ait olduğu durumda, $r_3$ sayısının tek sayı olduğunu göstermiş oluruz. O halde, $r_3$ değerini, $r \geq 0$ olmak üzere $r_3 = 2r+1$ şeklinde yazabiliriz. (4.50) eşitliğinden $r_3 < 2a$ olduğu açıktır. Böylece, $1 \leq r_3 < 2a$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 2.4.4 den $r_2 < c_3$ olduğundan, $r_2 \geq 1$ olması kullanılarak $c_3 \geq 2$ elde edilir. Böylece, bu eşitsizlik ve $1 \leq r_3 < 2a$ olduğu kullanılarak, Lemma 2.5.4 den $1 \leq \ell_3 \leq a$ eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ ve $c_3 = a + 4m + (r_3 - r_2)\ell_2$ bağıntıları kullanılarak,

$$2a = \left[a + 4m + (r_3 - r_2)\ell_2\right]\ell_3 + r_3 + r_4 \tag{4.55}$$

eşitliğine ulaşılır. $r_2 \equiv 1(\bmod 2)$ ve $r_3 \equiv 1(\bmod 2)$ olduğundan bu son eşitlikten, $r_4 \equiv 1(\bmod 2)$ elde edilir. O halde $r_4$ değerini, $s \geq 0$ olmak üzere, $r_4 = 2s+1$ şeklinde yazabiliriz. (4.54) eşitliğinde, $r_3$ yerine $r_3 = 2r+1$ ve $r_4$ yerine $r_4 = 2s+1$ yazarak,

$$r_2 = 2\ell_2(r+1) + 2\ell_3(r-s) + 2r - 1 \tag{4.56}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan, $c_3 = c_4$ ve $c_4 = c_2 + (r_4 - r_3)\ell_3$ olduğundan $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ ifadesinden,

$$2a = \left[r_2 + 1 + (r_4 - r_3)\ell_3\right]\ell_3 + r_3 + r_4$$

eşitliğini elde ederiz.. $r_3 = 2r+1$, $r_4 = 2s+1$ ifadelerini ve (4.56) eşitliğini kullanarak bu son eşitlikten,

$$a = r(\ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1)\ell_3 + s + \ell_2\ell_3 + 1$$

ifadesine ulaşırız. $\ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1 = A$ olarak alınırsa bu son ifadeden,

$$a = A(r+1) + s - \ell_3$$

bulunur. (4.49) , (4.52) ve (4.56) eşitliklerinden,

$$2a = (r_2 - r_3)\ell_2 + (r_4 - r_3)\ell_3 + 4\ell_2(r+1) + 4\ell_3(r-s) + 4r$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, $r_2$ yerine; $r_2 = 2\ell_2(r+1) + 2\ell_3(r-s) + 2r - 1$, $r_3$ yerine; $r_3 = 2r+1$ ve $r_4$ yerine; $r_4 = 2s+1$ değerleri yazılarak,

$$\ell_2\left[\ell_3 - (\ell_2 + 1)\right] + 1 = r(\ell_2 + 1)^2 - s(\ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1)$$

elde edilir. Bu ifadede de, $\ell_2\ell_3+\ell_3+1$ yerine $A$ yazılıp, $\ell_2+1=B$ olarak alınırsa, $\ell_2\left(\ell_3-B\right)+1=rB^2-sA$ elde edilir. Şimdi $r$ ve $s$ pozitif tam sayılarının $a=A\left(r+1\right)+s-\ell_3$ ve $\ell_2\left(\ell_3-B\right)+1=rB^2-sA$ eşitlikleri ile tek türlü belirli olduğunu gösterelim. $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları bu eşitliklerle tek türlü belirli olmasa idi, $A^2+B^2=0$ elde edilirdi. $A$ ve $B$ sayıları pozitif tam sayılar olduğundan bu bir çelişkidir. O halde , $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları $a=A\left(r+1\right)+s-\ell_3$ ve $\ell_2\left(\ell_3-B\right)+1=rB^2-sA$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Şimdi de, Lemma 2.5.5 i kullanarak, $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$ ve $U_d$ değerlerini belirleyelim. $Q_{-1}=0$ ve $Q_0=1$ olmak üzere, $q_i=\ell_i$ $\left(1\le i\le k_d-1\right)$ ve $Q_{i+1}=q_{i+1}Q_i+Q_{i-1}$ $\left(i\ge 0\right)$ ifadeleri yardımı ile,

$$Q_1=\ell_1=1,$$
$$Q_2=\ell_2+1=B,$$
$$Q_3=\ell_2\ell_3+\ell_3+1=A,$$
$$Q_4=A\ell_3+B,$$
$$Q_5=\ell_2\left(A\ell_3+B\right)+A=A\left(\ell_2\ell_3+1\right)+B\ell_2,$$
$$Q_6=A\left(\ell_2\ell_3+1\right)+B\ell_2+A\ell_3+B=A^2+B^2$$

olarak hesaplanır. Buradan da, $2q_0-1=a-1=Ar+s+\ell_2\ell_3$ olduğu kullanılarak $T_d=\left(2q_0-1\right)Q_6+2Q_5$ katsayısı,

$$T_d=\left(Ar+s\right)\left(A^2+B^2\right)+A\left[\ell_2\ell_3\left(A+2\right)+2\right]+\ell_2\left[\left(A+1\right)B\right]$$

şeklinde elde edilir. Burada $Ar+s=C$, $\left(A+2\right)\ell_2\ell_3+\ell_2^2+1=D$ ve $\ell_3+1=E$ olarak alınırsa $T_d$ katsayısının,

$$T_d = A\left(AC + D\right) + B^2\left(C + E\right)$$

biçiminde, $U_d = Q_6$ katsayısının ise,

$$U_d = A^2 + B^2$$

biçiminde olacağı gösterilmiş olur.

Şimdi de $d = a^2 + b$ kare çarpansız pozitif tam sayısının, $\ell_2$, $\ell_3$, $r$ ve $s$ parametrelerine bağlı olarak yazılışını elde edelim. Bunun için önce $b$ yi bu parametreler cinsinden ifade etmemiz gerekir. $b = 8m + 1$ olduğundan ve (4.52) eşitliğinde $r_2$ yerine; $r_2 = 2\ell_2\left(r+1\right) + 2\ell_3\left(r - s\right) + 2r - 1$, $r_3$ yerine; $r_3 = 2r + 1$ ve $r_4$ yerine; $r_4 = 2s + 1$ değerleri yazılması ile $8m = 2\ell_2^2\left(r+1\right) + 2\ell_3\left(r-s\right)\left(\ell_2 - 1\right) - 2\ell_2$ ifadesi elde edildiğinden,

$$b = 2\ell_2^2\left(r+1\right) + 2\ell_3\left(r-s\right)\left(\ell_2 - 1\right) - 2\ell_2 + 1$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz bu $b$ değeri ile $a = A\left(r+1\right) + s - \ell_3$ olduğu kullanılarak,

$$d = a^2 + b = \left(Ar + s\right)^2 + 2r\left(D - AE\right) + 2CE + \left(A - \ell_3\right)^2 + \left(B - 2\right)^2 + \left(B - 1\right)^2$$

ifadesine ulaşılır. Burada $D - AE = F$ ve $2CE + \left(A - \ell_3\right)^2 + \left(B-2\right)^2 + \left(B-1\right)^2 = G$ olarak alındığında $d$ tam sayısı,

$$d = C^2 + 2rF + G$$

formunda elde edilmiş olur. Diğer bir durum olan $d$ nin $D_5^1 \cup D_5^5$ kümesinin bir elemanı olması durumunda da ispat benzer şekilde yapılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 4.2.1.** Teorem 4.2.1, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{685}\right)$ cismine uygulanırsa $d = 685 = 26^2 + 9$ şeklinde yazıldığından, $a = 26$ ve $b = 9$ dur. $a = 26$ olduğundan, $q_0 = 13$ ve $\ell_0 = 25$ elde edilir. Diğer taraftan, $b = 8m + 1 = 9$ ifadesinden $m = 1$ olacağından, $a = 4m + r_2 + 1$ den $r_2 = 21$ olur. Bu değer ve $2a = (r_2 + 1)\ell_2 + r_2 + r_3$ denklemi kullanılarak, $\ell_2$ ve $r_3$ pozitif tam sayılar olduğundan $\ell_2 = 1$ ve $r_3 = 9$ olarak bulunur. Bu $r_3$ değeri kullanılarak, $r_3 = 2r + 1$ den $r = 4$ elde edilir. Diğer taraftan, $c_3 = a + 4m + (r_3 - r_2)\ell_2$ ifadesinden $c_3 = 18$ olur. $2a = \left[a + 4m + (r_3 - r_2)\ell_2\right]\ell_3 + r_3 + r_4$ ve $r_4 < c_3$ kullanılarak $\ell_3 = 2$ ve $r_4 = 7$ elde edilir. Bu $r_4$ değeri kullanılarak, $r_4 = 2s + 1$ den $s = 3$ olarak bulunur. Böylece, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{685}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı,

$$\omega_d = \left[13, \overline{1, 1, 2, 2, 2, 1, 25}\right]$$

olarak kolayca elde edilmiş olur. $A = \ell_2\ell_3 + \ell_3 + 1 = 5$, $B = \ell_2 + 1 = 2$, $C = Ar + s = 23$, $D = (A+2)\ell_2\ell_3 + \ell_2^2 + 1 = 16$ ve $E = \ell_3 + 1 = 3$ değerleri kullanılarak,

$$T_d = A(AC + D) + B^2(C + E) = 759$$
$$U_d = A^2 + B^2 = 29$$

olarak elde edilir. Buradan, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{685}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi de

$$\varepsilon_d = \frac{759 + 29\sqrt{685}}{2}$$

olarak teoremde tanımlanan algoritmik değerler yardımıyla son derece pratik bir şekilde elde edilmiş olur.

**Teorem 4.2.2.** $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod 4$ $(a, b \in \mathbb{Z};\ 0 < b \le 2a)$, kare çarpansız bir tam sayı ve $d$ nin belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $a$ tek ise;

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a}\right],\ 1 \le \ell_i \le a,\ \left(i = 1,2,3\right)$$

olup $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$, $U_d$ değerleri ve $d$ tam sayısı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\left(T_d, U_d\right) = \left(a\left(A^2 + B^2\right) + 2\left(A\ell_2 + BC\right),\ A^2 + B^2\right)$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E\,.$$

Burada, $A, B, C, D$ ve $E$ değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$$\begin{aligned}
A &= \ell_1\ell_2 + 1\\
B &= \ell_1 + A\ell_3\\
C &= \ell_2\ell_3 + 1\\
D &= A\ell_1 s + 2\ell_2\\
E &= \ell_1^2 s^2 + 4s\,.
\end{aligned}$$

Ayrıca, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$$\begin{cases} a = Ar + \ell_1 s \\ -\ell_2^2 - C^2 = Br - \left(B\ell_3 + A\right)s\,. \end{cases}$$

**İspat.** $a$ tek ise, $d$ tam sayısı $D_0^1 \cup D_4^5$ kümesine ait olur. $\omega_d = \dfrac{1+\sqrt{d}}{2}$ iken, $\omega_d = \left[q_0, \overline{q_1, ..., q_{k_d-1}, 2q_0-1}\right]$ olmak üzere, Lemma 2.5.5 den $q_0 = [\omega_d] = \dfrac{a+1}{2}$ olduğundan, Lemma 2.5.6 dan $r_0 = r_1 = a - 2q_0 + 1 = 0$, $c_0 = 2$ ve $\ell_0 = a$ elde edilir. Lemma 2.5.4 ve Lemma 2.5.6 dan $1 \le i \le k_d - 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ ve $\ell_i = \ell_{k_d - i}$ ifadeleri gerçeklendiğinden, $\ell_1 = \ell_6$, $\ell_2 = \ell_5$ ve $\ell_3 = \ell_4$ olup,

$$\omega_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a}\right]$$

açılımı elde edilir. İlk olarak $d$ nin $D_0^1$ kümesinin bir elemanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $b \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$ olur ki buradan $b = 8m$ $(m > 0)$ şeklinde yazılabilir. Böylece Lemma 2.5.6 kullanılarak,

$$c_1 = c_{-1} = \frac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0} = \frac{8m}{2} = 4m \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.57) değerini Lemma 2.5.4 den elde ettiğimiz $2a = c_1\ell_1 + r_2$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$2a = 4m\ell_1 + r_2 \tag{4.58}$$

bulunur. Bu eşitlikte, $r_2$ nin çift sayı olması gerektiği açıktır. O halde, $r = a - 2m\ell_1$ olmak üzere, $r_2 = 2r$ şeklinde yazabiliriz. Burada, $a$ tek sayı olduğundan $r$ de bir tek sayı olup, $r$ nin bu yazılışı kullanılarak $1 \le \ell_1 \le a$ elde edilir.

Lemma 2.5.4 deki $c_{i+1} = c_{i-1} + (r_{i+1} - r_i)\ell_i$ $(i \ge 0)$ bağıntısı yardımıyla,

$$c_2 = c_0 + (r_2 - r_1)\ell_1 = 2r\ell_1 + 2 \tag{4.59}$$

elde edilir. Bu değer, Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a - r_2 = c_2\ell_2 + r_3$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$2a = \left(2r\ell_1 + 2\right)\ell_2 + r_2 + r_3 \tag{4.60}$$

elde edilir. (4.58) ve (4.60) ifadeleri kullanılarak,

$$4m\ell_1 = 2\ell_2\left(r\ell_1 + 1\right) + r_3 \tag{4.61}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $r_3 + 2\ell_2 \equiv 0\left(\operatorname{mod} \ell_1\right)$ olup, uygun bir $s$ pozitif tam sayısı için $r_3 = 2\left(s\ell_1 - \ell_2\right)$ olarak yazmak mümkündür. Bu değer (4.61) eşitliğinde yerine yazıldığında, $2m = s + r\ell_2$ olur. Diğer taraftan, $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğinden $a > 2m$ olduğu açıktır. Böylece, bu eşitsizlik ve $2m = s + r\ell_2$ denklemi yardımıyla, $1 \leq \ell_2 \leq a$ eşitsizliği elde edilir.

(4.58) eşitliğinden elde edilen $a = 2m\ell_1 + r$ denkleminde $2m = s + r\ell_2$ değeri yerine yazıldığında, $a = r\left(\ell_1\ell_2 + 1\right) + s\ell_1$ olur. $\ell_1\ell_2 + 1 = A$ olarak alınırsa bu son ifadeden,

$$a = Ar + s\ell_1$$

bulunur. Diğer taraftan, $c_3 = c_4$ olduğu kullanılarak, $c_1 + \left(r_3 - r_2\right)\ell_2 = c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3$ eşitliği ve buradan da

$$4m = \left(2r - r_3\right)\ell_2 + 2\left(r\ell_1 + 1\right) + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3 \tag{4.62}$$

elde edilir. Lemma 2.5.4 de verilmiş olan $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ ve $c_3 = 4m + \left(r_3 - r_2\right)\ell_2$ bağıntıları kullanılarak, $2a = 4m\ell_3 + \left(r_3 - 2r\right)\ell_2\ell_3 + r_3 + r_4$ ve buradan da,

$$r_4 = 2a - 4m\ell_3 + (2r - r_3)\ell_2\ell_3 - r_3 \tag{4.63}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlikte, $a = Ar + s\ell_1$, $4m = 2s + 2r\ell_2$ ve $r_3 = 2(s\ell_1 - \ell_2)$ değerleri yerine yazılarak $r_4$ değeri,

$$r_4 = 2\left[A(r - s\ell_3) + \ell_2(\ell_2\ell_3 + 1)\right]$$

olarak elde edilir. Bulduğumuz bu $r_4$ değerinin, $4m = 2s + 2r\ell_2$ ve $r_3 = 2(s\ell_1 - \ell_2)$ değerlerinin (4.62) de yerine yazılması ile,

$$-\ell_2^2 = r(A\ell_3 + \ell_1) - s\left[\ell_3(A\ell_3 + \ell_1) + A\right] + (\ell_2\ell_3 + 1)^2$$

elde edilir. Bu ifadede, $A\ell_3 + \ell_1 = B$ ve $\ell_2\ell_3 + 1 = C$ olarak alınırsa, $-\ell_2^2 - C^2 = Br - (B\ell_3 + A)s$ elde edilir. Şimdi $r$ ve $s$ pozitif tam sayılarının $a = Ar + s\ell_1$ ve $-\ell_2^2 - C^2 = Br - (B\ell_3 + A)s$ eşitlikleri ile tek türlü belirli olduğunu gösterelim. $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları bu eşitliklerle tek türlü belirli olmasa idi, $A^2 + B^2 = 0$ elde edilirdi. $A$ ve $B$ sayıları pozitif tam sayılar olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları $a = Ar + s\ell_1$ ve $-\ell_2^2 - C^2 = Br - (B\ell_3 + A)s$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Şimdi de Lemma 2.5.5 i kullanarak, $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$ ve $U_d$ değerlerini belirleyelim. $Q_{-1} = 0$ ve $Q_0 = 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ $(1 \le i \le k_d - 1)$ ve $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ $(i \ge 0)$ ifadeleri yardımı ile,

$$Q_1 = \ell_1,$$

$$Q_2 = \ell_1\ell_2 + 1 = A,$$

$$Q_3 = A\ell_3 + \ell_1 = B,$$

$$Q_4 = B\ell_3 + A,$$

$$Q_5 = C\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + A\ell_2 = BC + A\ell_2,$$
$$Q_6 = A\left(\ell_1\ell_2 + 1\right) + \ell_3\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + BC\ell_1 = A^2 + B^2$$

olarak hesaplanır. Buradan da, $2q_0 - 1 = a$ olduğu kullanılarak $T_d = \left(2q_0 - 1\right)Q_6 + 2Q_5$ katsayısı,

$$T_d = a\left(A^2 + B^2\right) + 2\left(A\ell_2 + BC\right)$$

olarak, $U_d = Q_6$ katsayısı ise,

$$U_d = A^2 + B^2$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi de $d = a^2 + b$ kare çarpansız pozitif tam sayısının, $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $r$ ve $s$ parametrelerine bağlı olarak yazılışını elde edelim. Bunun için önce $b$ yi bu parametreler cinsinden ifade etmemiz gerekir. $b = 8m$ ve $2m = s + r\ell_2$ olduğundan $b = 4\left(s + r\ell_2\right)$ olur. Elde ettiğimiz bu $b$ değeri ile $a = Ar + s\ell_1$ kullanılarak,

$$d = a^2 + b = \left(Ar + s\ell_1\right)^2 + 4\left(s + r\ell_2\right) = A^2r^2 + 2r\left(As\ell_1 + 2\ell_2\right) + \ell_1^2 s^2 + 4s$$

ifadesine ulaşılır. Burada $As\ell_1 + 2\ell_2 = D$ ve $\ell_1^2 s^2 + 4s = E$ olarak alındığında,

$$d = A^2r^2 + 2rD + E$$

olarak elde edilmiş olur. Diğer bir durum olan, $d$ nin $D_4^5$ kümesinin bir elemanı olması durumunda $b \equiv 4\left(\bmod 8\right)$ olur ki buradan $b = 8m + 4$ $\left(m \geq 0\right)$ şeklinde elde edilir ve $c_1 = 4m + 2$ olur. (4.61), (4.62) ve (4.63) eşitlikleri yerine sırasıyla, $\left(4m + 2\right)\ell_1 = 2\ell_2\left(r\ell_1 + 1\right) + r_3$, $4m + 2 = \left(2r - r_3\right)\ell_2 + 2\left(r\ell_1 + 1\right) + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3$ ve

$r_4 = 2a - (4m+2)\ell_3 + (2r - r_3)\ell_2\ell_3 - r_3$ ifadeleri bulunur. Uygun bir $s$ pozitif tam sayısı için $r_3 = 2(s\ell_1 - \ell_2)$ olup, bu $r_3$ değerinin $(4m+2)\ell_1 = 2\ell_2(r\ell_1 + 1) + r_3$ eşitliğinde yerine yazılması ile $2m = s + r\ell_2 - 1$ elde edilir. İspatın geri kalanı bir önceki duruma benzer şekilde yapılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 4.2.2.** Teorem 4.2.2, $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$ cismine uygulanırsa, $d = 89 = 9^2 + 8$ şeklinde yazıldığından, $a = 9$ ve $b = 8$ dir. $a = 9$ olduğundan, $q_0 = 5$ ve $\ell_0 = 9$ olur. Diğer taraftan, $b = 8m = 8$ ifadesinden $m = 1$ olarak bulunur. $a = 2m\ell_1 + r$ ve $s = 2m - r\ell_2$ ifadeleri yardımı ile $\ell_1$, $\ell_2$, $s$ ve $r$ pozitif tam sayılar olduğundan $\ell_1 = 4$, $\ell_2 = 1$, $s = 1$ ve $r = 1$ olur. Elde edilen bu değerler kullanılarak, $r_2 = 2r = 2$ ve $r_3 = 2(s\ell_1 - \ell_2) = 6$ olarak bulunur. Diğer taraftan, $c_3 = 4m + (r_3 - r_2)\ell_2$ denkleminden $c_3 = 8$ olur. $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ denklemi kullanılarak, $\ell_3 = 1$ olarak bulunur. Böylece, $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı,

$$\omega_d = \left[5, \overline{4, 1, 1, 1, 1, 4, 9}\right]$$

olarak kolayca elde edilmiş olur. Ayrıca, $A = \ell_1\ell_2 + 1 = 5$, $B = \ell_1 + A\ell_3 = 9$, $C = \ell_2\ell_3 + 1 = 2$, $D = A\ell_1 s + 2\ell_2 = 22$ ve $E = \ell_1^2 s^2 + 4s = 20$ olup bu değerler ,

$$(T_d, U_d) = \left(a\left(A^2 + B^2\right) + 2(A\ell_2 + BC),\ A^2 + B^2\right)$$

ifadelesinde yerine yazıldığında, $(T_d, U_d) = (1000, 106)$ bulunur. Buradan da, $\mathbb{Q}(\sqrt{89})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi

$$\varepsilon_d = \frac{1000 + 106\sqrt{89}}{2}$$

olarak pratik bir şekilde elde edilmiş olur.

Şimdi de, $d \equiv 2,3 \pmod 4$ olduğunda, elde edilen teoremleri ve bu teoremlerin ispatlarını verelim. $d = a^2 + b$ yazılışındaki $b$ tam sayısı için $b \equiv 1 \pmod 4$ gerçekleniyor ise, $d \equiv 2 \pmod 4$ ve $a$ nın bir tek tam sayı olması gerektiği açıktır. Eğer $b \equiv 2 \pmod 4$ ise, $d \equiv 2,3 \pmod 4$ olur. Bu durumda, $a$ çift ise; $d \equiv 2 \pmod 4$, $a$ tek ise; $d \equiv 3 \pmod 4$ olur. Son olarak, $b \equiv 3 \pmod 4$ durumunda, $d \equiv 3 \pmod 4$ ve $a$ nın bir tek tam sayı olması gerekir.

$b \equiv 1 \pmod 4$ olması durumunda Teorem 4.2.3, $b \equiv 2 \pmod 4$ durumunda Teorem 4.2.4 ve $b \equiv 3 \pmod 4$ durumunda Teorem 4.2.5 elde edilmiştir.

**Teorem 4.2.3.** $d = a^2 + b \equiv 2 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $d$ nin belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 1 \pmod 4$ ise,

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right], \quad \ell_i \geq 1 \quad (i = 1,2,3),$$

olup $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $\varepsilon_d$ temel biriminin $T_d$ ve $U_d$ katsayıları ve $d$ tam sayısı,

$$\left(T_d, U_d\right) = \left(2\left[a\left(A^2 + B^2\right) + BC + A\ell_2\right], 2\left(A^2 + B^2\right)\right)$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada, $A, B, C, D$ ve $E$ değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$$A = \ell_1 \ell_2 + 1$$

$$B = \ell_1 + A\ell_3$$

$$C = \ell_2 \ell_3 + 1$$

$$D = A\ell_1 s + \ell_2$$

$$E = \ell_1^2 s^2 + 2s + 1.$$

Ayrıca, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$$\begin{cases} a = Ar + \ell_1 s \\ A^2 + B^2 - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right). \end{cases}$$

**İspat.** $b \equiv 1\left(\bmod 4\right)$ ise, $a$ ve $b$ tam sayıları $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini gerçekleyen tam sayılar olduğundan, $0 \leq 4m < 2a$ eşitsizliği gerçeklenecek şekilde uygun bir $m$ pozitif tam sayısı için $b = 4m + 1$ şeklinde yazabiliriz. $d = a^2 + b \equiv 2\left(\bmod 4\right)$ olduğundan, $\omega_d = \sqrt{d}$ olmak üzere, Lemma 2.5.7 den $q_0 = \left[\omega_d\right] = a$ olup, $k_d = 7$ periyodu için $\omega_d = \left[a,\ \overline{q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ 2a}\right]$ biçimindedir. Lemma 2.5.8 kullanılarak $r_0 = r_1 = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = b = 4m + 1$ ve $\ell_0 = 2q_0 = 2a$ elde edilir. Lemma 2.5.4 ve Lemma 2.5.8 den $1 \leq i \leq k_d - 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ ve $\ell_i = \ell_{k_d - i}$ ifadeleri gerçeklendiğinden, $\ell_1 = \ell_6$, $\ell_2 = \ell_5$ ve $\ell_3 = \ell_4$ olup,

$$\omega_d = \left[a,\ \overline{\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_3,\ \ell_2,\ \ell_1,\ 2a}\right]$$

açılımı elde edilir. Burada $\ell_i \geq 1 \quad \left(i = 1,2,3\right)$ dir. Lemma 2.5.4 deki $i \geq 0$ için $2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1}$ bağıntısı kullanılarak,

$$2a = \left(4m + 1\right)\ell_1 + r_2 \tag{4.64}$$

elde edilir. Buradan, $\left(4m + 1\right)\ell_1 + r_2 \equiv 0\left(\bmod 2\right)$ olup, uygun bir $r$ pozitif tam sayısı için $r_2 = 2r - \ell_1$ olarak yazmak mümkündür. Bu değer (4.64) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$a = 2m\ell_1 + r \tag{4.65}$$

olur. $a$ bir tek tam sayı olduğundan, bu eşitlikten $r$ nin de tek sayı olması gerektiği açıktır. Lemma 2.5.4 deki $c_{i+1} = c_{i-1} + (r_{i+1} - r_i)\ell_i \ (i \geq 0)$ bağıntısından

$$c_2 = c_0 + (r_2 - r_1)\ell_1 = 1 + r_2\ell_1$$

olup, bu değer Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a - r_2 = c_2\ell_2 + r_3$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$2a = (1 + r_2\ell_1)\ell_2 + r_2 + r_3 \tag{4.66}$$

elde edilir. (4.64) ve (4.66) eşitlikleri kullanılarak,

$$(4m+1)\ell_1 = (1 + r_2\ell_1)\ell_2 + r_3 \tag{4.67}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\ell_2 + r_3 \equiv 0 (\bmod \ell_1)$ olduğundan, uygun bir $t$ pozitif tam sayısı için $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ olarak yazmak mümkündür. Bu değer (4.67) eşitliğinde yerine yazıldığında, $4m = t + 2r\ell_2 - \ell_1\ell_2 - 1$ olur. $\ell_1\ell_2 + 1 = A$ olarak alınırsa bu son ifadeden, $t - A = 4m - 2r\ell_2$ olur ki bu eşitlikten uygun bir $s$ pozitif tam sayısı için $t - A = 2s$ olarak yazılabilir. Böylece, $2m = s + r\ell_2$ ifadesine ulaşılır. Bu değer (4.65) eşitliğinde yerine yazıldığında, $a = (s + r\ell_2)\ell_1 + r = Ar + \ell_1 s$ olur. Diğer taraftan, Lemma 2.5.4 den elde edilen

$$c_3 = c_1 + (r_3 - r_2)\ell_2 = 4m + 1 + (r_3 - r_2)\ell_2$$

ifadesinde, $r_2 = 2r - \ell_1$ ve $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ olduğu kullanılarak, $c_3 = At - \ell_2^2$ olarak bulunur. Bu $c_3$ değeri, Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$2a = \left(At - \ell_2^2\right)\ell_3 + r_3 + r_4$$

eşitliği elde edilir. Buradan, (4.66) ve $r_2 = 2r - \ell_1$ ifadelerinden $r_4$ değeri,

$$r_4 = \left(2r - \ell_1 - t\ell_3\right)A + \ell_2\left(\ell_2\ell_3 + 1\right) \tag{4.68}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $c_3 = c_4$ olduğundan $At - \ell_2^2 = c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3$ eşitliği ve buradan da $c_2 = 1 + r_2\ell_1$, $r_2 = 2r - \ell_1$, $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ ve (4.68) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} At - \ell_2^2 &= c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3 \\ &= 1 + r_2\ell_1 + r_4\ell_3 - r_3\ell_3 \\ &= 1 + \left(2r - \ell_1\right)\ell_1 + \left[\left(2r - \ell_1 - t\ell_3\right)A + \ell_2\left(\ell_2\ell_3 + 1\right)\right]\ell_3 - \left(\ell_1 t - \ell_2\right)\ell_3 \\ &= 1 + 2r\ell_1 - \ell_1^2 - \ell_1\ell_3 t + 2\ell_2\ell_3 + 2rA\ell_3 - A\ell_1\ell_3 + \ell_2^2\ell_3^2 - At\ell_3^2 \\ &= \left(1 + \ell_2\ell_3\right)^2 + 2r\left(\ell_1 + A\ell_3\right) - t\ell_3\left(\ell_1 + A\ell_3\right) - \ell_1\left(\ell_1 + A\ell_3\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\ell_1 + A\ell_3 = B$ ve $1 + \ell_2\ell_3 = C$ olarak alınırsa,

$$At - \ell_2^2 = C^2 + B\left(2r - t\ell_3 - \ell_1\right)$$

eşitliği ve $t = 2s + A$ ifadesinden,

$$A^2 + B^2 - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$$

elde edilir. Şimdi $r$ ve $s$ pozitif tam sayılarının $a = Ar + \ell_1 s$ ve $A^2 + B^2 - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$ eşitlikleri ile tek türlü belirli olduğunu gösterelim. $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları bu eşitliklerle tek türlü belirli olmasa idi, $A^2 + B^2 = 0$ elde edilirdi. $A$ ve $B$ sayıları pozitif tam sayılar olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları $a = Ar + \ell_1 s$ ve $A^2 + B^2 - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Şimdi de Lemma 2.5.7 yi kullanarak, $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$ ve $U_d$ değerlerini belirleyelim. $Q_{-1} = 0$ ve $Q_0 = 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ $\left(1 \le i \le k_d - 1\right)$ ve $Q_{i+1} = q_{i+1}Q_i + Q_{i-1}$ $\left(i \ge 0\right)$ ifadeleri yardımı ile,

$$Q_1 = \ell_1,$$
$$Q_2 = \ell_1\ell_2 + 1 = A,$$
$$Q_3 = A\ell_3 + \ell_1 = B,$$
$$Q_4 = B\ell_3 + A,$$
$$Q_5 = C\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + A\ell_2 = BC + A\ell_2,$$
$$Q_6 = A\left(\ell_1\ell_2 + 1\right) + \ell_3\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + BC\ell_1 = A^2 + B^2$$

olarak hesaplanır. Buradan da, $2q_0 = 2a$ olduğu kullanılarak $T_d = 2q_0Q_{k-1} + 2Q_{k-2}$ katsayısı,

$$T_d = 2\left[a\left(A^2 + B^2\right) + BC + A\ell_2\right]$$

olarak, $U_d = 2Q_6$ katsayısı ise,

$$U_d = 2\left(A^2 + B^2\right)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi de $d = a^2 + b$ kare çarpansız pozitif tam sayısının, $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $r$ ve $s$ parametrelerine bağlı olarak yazılışını elde edelim. $b = 4m+1$ ve $2m = s + r\ell_2$ olduğundan $b = 2(s + r\ell_2) + 1$ olur. Elde ettiğimiz bu $b$ değeri ile $a = Ar + s\ell_1$ kullanılarak,

$$d = a^2 + b = (Ar + s\ell_1)^2 + 2(s + r\ell_2) + 1 = A^2r^2 + 2r(As\ell_1 + \ell_2) + \ell_1^2 s^2 + 2s + 1$$

ifadesine ulaşılır. Burada $As\ell_1 + \ell_2 = D$ ve $\ell_1^2 s^2 + 2s + 1 = E$ olarak alındığında, $d$ tam sayısı

$$d = A^2r^2 + 2rD + E$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 4.2.3.** Teorem 4.2.3, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{314}\right)$ cismine uygulanırsa, $d = 314 = 17^2 + 25$ şeklinde yazıldığından, $a = 17$ ve $b = 25$ dir. $a = 17$ olduğundan, $q_0 = 17$ ve $\ell_0 = 34$ olur. Diğer taraftan, $b = 4m + 1 = 25$ ifadesinden $m = 6$ olarak bulunur. Buradan, $a = 2m\ell_1 + r$ denklemi kullanılarak, $\ell_1$ ve $r$ pozitif tam sayılar olduğundan $\ell_1 = 1$ ve $r = 5$ olarak bulunur. Elde edilen bu değerler kullanılarak, $r_2 = 2r - \ell_1 = 9$ olarak bulunur. Diğer taraftan, $c_3 = 4m + 1 + (r_3 - r_2)\ell_2$, $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ ve (4.66) eşitlikleri kullanılarak, $\ell_2$, $\ell_3$, $c_3$ pozitif tam sayılar ve $r_3, r_4 \geq 0$ olduğundan $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 1$, $c_3 = 17$, $r_3 = 5$ ve $r_4 = 12$ olarak bulunur. Böylece, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{314}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı,

$$\omega_d = \left[17, \overline{1, 2, 1, 1, 2, 1, 34}\right]$$

olarak kolayca elde edilmiş olur. Ayrıca, $A = \ell_1\ell_2 + 1 = 3$, $B = \ell_1 + A\ell_3 = 4$ ve $C = \ell_2\ell_3 + 1 = 3$ olup bu değerler ,

$$T_d = 2\left[a\left(A^2+B^2\right)+BC+A\ell_2\right],$$
$$U_d = 2\left(A^2+B^2\right)$$

ifadelerinde yerine yazıldığında, $\left(T_d, U_d\right) = \left(886,\ 50\right)$ bulunur. Buradan da, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{314}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi,

$$\varepsilon_d = \frac{886+50\sqrt{314}}{2}$$

olarak son derece pratik bir şekilde elde edilmiş olur. Burada ayrıca, $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ eşitliğinden $t = 7$ olup, $t - A = 2s$ denkleminden $s = 2$ olarak elde edilir. Bu değerler kullanılarak $D = A\ell_1 s + \ell_2 = 8$ ve $E = \ell_1^2 s^2 + 2s + 1 = 9$ olarak bulunur.

**Teorem 4.2.4.** $d = a^2 + b \equiv 2,3\left(\mathrm{mod}\,4\right)$ kare çarpansız bir tam sayı ve $d$ nin belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ nin periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 2\left(\mathrm{mod}\,4\right)$ ise,

$$\omega_d = \left[a,\ \overline{\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_3,\ \ell_2,\ \ell_1,\ 2a}\right],\ \ \ell_i \geq 1 \quad \left(i = 1,2,3\right)$$

olup $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $\varepsilon_d$ temel biriminin $T_d$ ve $U_d$ katsayıları ve $d$ tam sayısı,

$$\left(T_d, U_d\right) = \left(2\left[a\left(A^2+B^2\right)+BC+A\ell_2\right],\ 2\left(A^2+B^2\right)\right)$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir.

Burada, $A$, $B$, $C$, $D$ ve $E$ değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$$A = \ell_1 \ell_2 + 1$$
$$B = \ell_1 + A\ell_3$$
$$C = \ell_2 \ell_3 + 1$$
$$D = A\ell_1 s + 2\ell_2$$
$$E = \ell_1^2 s^2 + 2s \,.$$

Ayrıca, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$$\begin{cases} a = Ar + \ell_1 s \\ -\ell_2\left[\ell_2 + \ell_3(C+1)\right] - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(A + B\ell_3) \end{cases}$$

**İspat.** $b \equiv 2 \pmod 4$ ise, $a$ ve $b$ tam sayıları $0 < b \le 2a$ eşitsizliğini gerçekleyen tam sayılar olduğundan, $0 < 2m+1 \le a$ eşitsizliği gerçeklenecek şekilde uygun bir $m$ pozitif tam sayısı için $b = 4m+2$ şeklinde yazabiliriz. $d = a^2 + 4m + 2$ ifadesinde, $a$ çift sayı ise; $d \equiv 2 \pmod 4$, $a$ tek sayı ise; $d \equiv 3 \pmod 4$ olmaktadır. Her iki durumda da $\omega_d = \sqrt{d}$ dir. Lemma 2.5.7 den $q_0 = [\omega_d] = a$ olup, $k_d = 7$ periyodu için, $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımı $\omega_d = \left[a, \overline{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, 2a}\right]$ biçimindedir. Lemma 2.5.8 kullanılarak $r_0 = r_1 = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = b = 4m+2$ ve $\ell_0 = 2q_0 = 2a$ olarak elde edilir. Lemma 2.5.4 ve Lemma 2.5.8 den $1 \le i \le k_d - 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ ve $\ell_i = \ell_{k_d - i}$ ifadeleri gerçeklendiğinden, $\ell_1 = \ell_6$, $\ell_2 = \ell_5$ ve $\ell_3 = \ell_4$ olup,

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right]$$

olarak elde edilir. Burada $\ell_i \ge 1$ $(i = 1,2,3)$ dir. Lemma 2.5.4 deki $i \ge 0$ için $2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1}$ bağıntısı kullanılarak,

$$2a=(4m+2)\ell_1+r_2 \tag{4.69}$$

elde edilir. Buradan, $(4m+2)\ell_1+r_2\equiv 0(\operatorname{mod}2)$ olup, uygun bir $r$ pozitif tam sayısı için $r_2=2r$ olarak yazmak mümkündür. Bu değer, (4.69) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$a=(2m+1)\ell_1+r \tag{4.70}$$

olur. Lemma 2.5.4 deki $c_{i+1}=c_{i-1}+(r_{i+1}-r_i)\ell_i \quad (i\geq 0)$ bağıntısından

$$c_2=c_0+(r_2-r_1)\ell_1=1+r_2\ell_1$$

olduğundan, bu değer Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a-r_2=c_2\ell_2+r_3$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$2a=(1+r_2\ell_1)\ell_2+r_2+r_3 \tag{4.71}$$

elde edilir. (4.69) ve (4.71) eşitlikleri kullanılarak,

$$(4m+2)\ell_1=(1+r_2\ell_1)\ell_2+r_3 \tag{4.72}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\ell_2+r_3\equiv 0(\operatorname{mod}\ell_1)$ olduğundan, uygun bir $t$ pozitif tam sayısı için $r_3=\ell_1 t-\ell_2$ olarak yazmak mümkündür. Burada, $t=2(2m+1-r\ell_2)$ olup $t$ bir çift sayı olduğundan, uygun bir $s$ pozitif tam sayısı için $t=2s$ olarak yazmak mümkün olur. Böylece, $r_3=2s\ell_1-\ell_2$ ifadesine ulaşılır. Bu değer (4.72) eşitliğinde yerine yazıldığında, $2m=s+r\ell_2-1$ elde edilir ve bu değerin (4.70) eşitliğinde yerine yazılması ile, $a=(s+r\ell_2)\ell_1+r$ olarak bulunur. $\ell_1\ell_2+1=A$ olarak alınırsa bu son ifadeden, $a=Ar+\ell_1 s$ elde edilir. Diğer taraftan, Lemma 2.5.4 den elde edilen $c_3=4m+2+(r_3-r_2)\ell_2$ değeri, $2a=c_3\ell_3+r_3+r_4$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$r_4 = 2a - (4m+2)\ell_3 + (r_2 - r_3)\ell_2\ell_3 - r_3$ elde edilir. Bu eşitlikte, $a = Ar + \ell_1 s$, $2m = s + r\ell_2 - 1$, $r_2 = 2r$ ve $r_3 = 2s\ell_1 - \ell_2$ değerlerinin yerine yazılması ile $r_4 = 2Ar - 2s\ell_3 A + \ell_2(\ell_2\ell_3 + 1)$ eşitliğine ulaşılır. Burada, $\ell_2\ell_3 + 1 = C$ alınırsa, $r_4$ değeri,

$$r_4 = 2A(r - s\ell_3) + C\ell_2$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $c_3 = c_4$ olduğu kullanılarak, $4m + 2 + (r_3 - r_2)\ell_2 = 1 + r_2\ell_2 + (r_4 - r_3)\ell_3$ eşitliği ve buradan da

$$4m = (2r_2 - r_3)\ell_2 + (r_4 - r_3)\ell_3 - 1 \tag{4.73}$$

elde edilir. $2m = s + r\ell_2 - 1$, $r_2 = 2r$, $r_3 = 2s\ell_1 - \ell_2$ ve $r_4 = 2A(r - s\ell_3) + C\ell_2$ ifadesi ve (4.73) eşitliğinden,

$$-\ell_2^2 - \ell_2\ell_3(C+1) - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s\left[(\ell_1 + A\ell_3)\ell_3 + A\right]$$

buradan da $\ell_1 + A\ell_3 = B$ alınarak,

$$-\ell_2^2 - \ell_2\ell_3(C+1) - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(B\ell_3 + A)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $r$ ve $s$ pozitif tam sayılarının $a = Ar + \ell_1 s$ ve $-\ell_2^2 - \ell_2\ell_3(C+1) - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(B\ell_3 + A)$ eşitlikleri ile tek türlü belirli olduğunu gösterelim. $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları bu eşitliklerle tek türlü belirli olmasa idi, $A(A + B\ell_3) + \ell_1(A\ell_3 + \ell_2) = 0$ elde edilirdi. $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $A$ ve $B$ sayıları pozitif tam sayılar olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları $a = Ar + \ell_1 s$ ve $-\ell_2^2 - \ell_2\ell_3(C+1) - 1 = 2r(\ell_2 + A\ell_3) - 2s(B\ell_3 + A)$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Şimdi de Lemma 2.5.7 yi kullanarak, $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$ ve $U_d$ değerlerini belirleyelim. $Q_{-1}=0$ ve $Q_0=1$ olmak üzere, $q_i=\ell_i$ $\left(1\le i\le k_d-1\right)$ ve $Q_{i+1}=q_{i+1}Q_i+Q_{i-1}$ $\left(i\ge 0\right)$ ifadeleri yardımı ile,

$$
\begin{aligned}
&Q_1=\ell_1,\\
&Q_2=\ell_1\ell_2+1=A,\\
&Q_3=A\ell_3+\ell_1=B,\\
&Q_4=B\ell_3+A,\\
&Q_5=C\left(A\ell_3+\ell_1\right)+A\ell_2=BC+A\ell_2,\\
&Q_6=A\left(\ell_1\ell_2+1\right)+\ell_3\left(A\ell_3+\ell_1\right)+BC\ell_1=A^2+B^2
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Buradan da, $2q_0=2a$ olduğu kullanılarak $T_d=2q_0Q_6+2Q_5$ katsayısı,

$$T_d=2\left[a\left(A^2+B^2\right)+BC+A\ell_2\right]$$

olarak, $U_d=2Q_6$ katsayısı ise,

$$U_d=2\left(A^2+B^2\right)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi de $d=a^2+b$ kare çarpansız pozitif tam sayısının, $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $r$ ve $s$ parametrelerine bağlı olarak yazılışını elde edelim. $b=4m+2$ ve $2m=s+r\ell_2-1$ olduğundan $b=2\left(s+r\ell_2\right)$ olur. Elde ettiğimiz bu $b$ değeri ile $a=Ar+s\ell_1$ kullanılarak,

$$d=a^2+b=\left(Ar+s\ell_1\right)^2+2\left(s+r\ell_2\right)=A^2r^2+2r\left(As\ell_1+\ell_2\right)+\ell_1^2s^2+2s$$

ifadesine ulaşılır. Burada $As\ell_1 + \ell_2 = D$ ve $\ell_1^2 s^2 + 2s = E$ olarak alındığında, $d$ tam sayısı

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Örnek 4.2.4.** Teorem 4.2.4, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{202}\right)$ cismine uygulanırsa, $d = 202 = 14^2 + 6$ şeklinde yazıldığından, $a = 14$ ve $b = 6$ dir. $a = 14$ olduğundan, $q_0 = 14$ ve $\ell_0 = 28$ olur. Diğer taraftan, $b = 4m + 2 = 6$ ifadesinden $m = 1$ olarak bulunur. Lemma 2.5.4 den $r_2 < c_1$ olduğundan, $r < 2m + 1$ olur. Buradan, $a = (2m+1)\ell_1 + r$ denklemi ve $r < 2m + 1$ olması kullanılarak, $\ell_1$ ve $r$ pozitif tam sayılar olduğundan $\ell_1 = 4$ ve $r = 2$ olarak bulunur. Buradan, $r_2 = 2r = 4$ olur. $2m = s + r\ell_2 - 1$ eşitliğinden, $\ell_2 = 1$ ve $s = 1$ elde edilir. Bu değerler kullanılarak, $r_3 = 2s\ell_1 - \ell_2 = 7$ olarak bulunur. Diğer taraftan, $c_3 = 4m + 2 + (r_3 - r_2)\ell_2$ olduğundan $c_3 = 9$ olur. $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ ve $r_4 < c_3$ olduğundan, $\ell_3 = 2$ ve $r_4 = 3$ olarak bulunur. Böylece, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{202}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı,

$$\omega_d = \left[14, \overline{4, 1, 2, 2, 1, 4, 28}\right]$$

olarak kolayca elde edilmiş olur. Ayrıca, $A = \ell_1\ell_2 + 1 = 5$, $B = \ell_1 + A\ell_3 = 14$ ve $C = \ell_2\ell_3 + 1 = 3$ olup bu değerler ,

$$T_d = 2\left[a\left(A^2 + B^2\right) + BC + A\ell_2\right],$$

$$U_d = 2\left(A^2 + B^2\right)$$

ifadelerinde yerine yazıldığında, $(T_d, U_d) = (6282,\ 442)$ bulunur. Buradan da, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{202}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi,

$$\varepsilon_d = \frac{6282 + 442\sqrt{202}}{2}$$

olarak pratik bir şekilde elde edilmiş olur. Burada ayrıca, $D = A\ell_1 s + \ell_2 = 21$ ve $E = \ell_1^2 s^2 + 2s = 18$ dir.

**Teorem 4.2.5.** $d = a^2 + b \equiv 3 \pmod 4$ kare çarpansız bir tam sayı ve $d$ nin belirlediği $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanı olan $\omega_d = \sqrt{d}$ nin periyodu $k_d = 7$ olsun. Eğer $b \equiv 3 \pmod 4$ ise,

$$\omega_d = \left[a,\ \overline{\ell_1,\ \ell_2,\ \ell_3,\ \ell_3,\ \ell_2,\ \ell_1,\ 2a}\right],\ \ \ell_i \geq 1 \quad (i = 1,2,3)$$

olup $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisminin $\varepsilon_d$ temel biriminin $T_d$ ve $U_d$ katsayıları ve $d$ tam sayısı,

$$(T_d, U_d) = \left(2\left[a\left(A^2 + B^2\right) + BC + A\ell_2\right],\ 2\left(A^2 + B^2\right)\right)$$

$$d = A^2 r^2 + 2rD + E$$

olarak ifade edilir. Burada, $A$, $B$, $C$, $D$ ve $E$ değerleri de aşağıdaki şekilde tek türlü belirlidir:

$$A = \ell_1 \ell_2 + 1$$

$$B = \ell_1 + A\ell_3$$

$$C = \ell_2 \ell_3 + 1$$

$$D = A\ell_1 s + 2\ell_2$$

$$E = \ell_1^2 s^2 + 2s + 3 .$$

Ayrıca, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları aşağıdaki eşitliklerle tek türlü belirlidir:

$$\begin{cases} a = Ar + \ell_1 s \\ -\ell_2\left[\ell_2 + \ell_3\left(C+1\right)\right] - 1 = 2r\left(\ell_2 + A\ell_3\right) - 2s\left(A + B\ell_3\right) \end{cases}$$

**İspat.** $b \equiv 3\left(\bmod 4\right)$ ise, $a$ ve $b$ tam sayıları $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini gerçekleyen tam sayılar olduğundan, $0 \leq 4m < 2a - 2$ eşitsizliği gerçeklenecek şekilde uygun bir $m$ pozitif tam sayısı için $b = 4m + 3$ şeklinde yazabiliriz. $d = a^2 + b \equiv 3\left(\bmod 4\right)$ olduğundan, $\omega_d = \sqrt{d}$ olmak üzere, Lemma 2.5.7 den $q_0 = \left[\omega_d\right] = a$ olup, $k_d = 7$ periyodu için, $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımı $\omega_d = \left[a, \overline{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, 2a}\right]$ biçimindedir. Lemma 2.5.8 kullanılarak $r_0 = r_1 = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = b = 4m + 3$ ve $\ell_0 = 2q_0 = 2a$ elde edilir. Lemma 2.5.4 ve Lemma 2.5.8 den $1 \leq i \leq k_d - 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ ve $\ell_i = \ell_{k_d - i}$ ifadeleri gerçeklendiğinden, $\ell_1 = \ell_6$, $\ell_2 = \ell_5$ ve $\ell_3 = \ell_4$ olup,

$$\omega_d = \left[a, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a}\right]$$

biçiminde yazılır. Burada $\ell_i \geq 1$ $\left(i = 1,2,3\right)$ dir. Lemma 2.5.4 deki $i \geq 0$ için $2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1}$ bağıntısı kullanılarak,

$$2a = \left(4m+3\right)\ell_1 + r_2 \tag{4.74}$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\left(4m+3\right)\ell_1 + r_2 \equiv 0\left(\bmod 2\right)$ olup, uygun bir $r$ pozitif tam sayısı için $r_2 = 2r - 3\ell_1$ olarak yazmak mümkündür. Bu değer (4.74) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$a = 2m\ell_1 + r \tag{4.75}$$

olur. $a$ bir çift tam sayı olduğundan, bu eşitlikten $r$ nin de çift sayı olması gerektiği açıktır. Lemma 2.5.4 deki $c_{i+1} = c_{i-1} + (r_{i+1} - r_i)\ell_i \quad (i \geq 0)$ bağıntısından

$$c_2 = c_0 + (r_2 - r_1)\ell_1 = 1 + r_2\ell_1$$

olduğundan, bu değer Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a - r_2 = c_2\ell_2 + r_3$ eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$2a = (1 + r_2\ell_1)\ell_2 + r_2 + r_3 \tag{4.76}$$

elde edilir. (4.74) ve (4.76) eşitlikleri kullanılarak,

$$(4m + 3)\ell_1 = (1 + r_2\ell_1)\ell_2 + r_3 \tag{4.77}$$

bulunur. Buradan, $\ell_2 + r_3 \equiv 0 (\bmod \ell_1)$ olduğundan, uygun bir $t$ pozitif tam sayısı için $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ olarak yazılır. Bu değer (4.77) eşitliğinde yerine yazıldığında, $4m = t + 2r\ell_2 - 3(\ell_1\ell_2 + 1)$ bulunur. $\ell_1\ell_2 + 1 = A$ olarak alınırsa bu son ifadeden, $t - 3A = 4m - 2r\ell_2$ olur ki bu eşitlikten uygun bir $s$ pozitif tam sayısı için $t - 3A = 2s$ olarak yazmak mümkündür. Böylece, $2m = s + r\ell_2$ ifadesine ulaşılır. Bu değer (4.75) eşitliğinde yerine yazıldığında, $a = (s + r\ell_2)\ell_1 + r = Ar + \ell_1 s$ olur. Diğer taraftan, Lemma 2.5.4 den elde edilen

$$c_3 = c_1 + (r_3 - r_2)\ell_2 = 4m + 3 + (r_3 - r_2)\ell_2$$

ifadesinde, $r_2 = 2r - 3\ell_1$ ve $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ olduğu kullanılarak, $c_3 = At - \ell_2^2$ olarak bulunur. Bu $c_3$ değeri, Lemma 2.5.4 den elde edilen $2a = c_3\ell_3 + r_3 + r_4$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$2a = \left(At - \ell_2^2\right)\ell_3 + r_3 + r_4$$

eşitliği elde edilir. Buradan, (4.76) ve $r_2 = 2r - 3\ell_1$ olması kullanılarak $r_4$ değeri,

$$r_4 = \left(2r - 3\ell_1 - t\ell_3\right)A + \ell_2\left(\ell_2\ell_3 + 1\right) \tag{4.78}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $c_3 = c_4$ olduğundan $At - \ell_2^2 = c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3$ eşitliği ve buradan da $c_2 = 1 + r_2\ell_1$, $r_2 = 2r - 3\ell_1$, $r_3 = \ell_1 t - \ell_2$ ve (4.78) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
At - \ell_2^2 &= c_2 + \left(r_4 - r_3\right)\ell_3 \\
&= 1 + r_2\ell_1 + r_4\ell_3 - r_3\ell_3 \\
&= 1 + \left(2r - 3\ell_1\right)\ell_1 + \left[\left(2r - 3\ell_1 - t\ell_3\right)A + \ell_2\left(\ell_2\ell_3 + 1\right)\right]\ell_3 - \left(\ell_1 t - \ell_2\right)\ell_3 \\
&= 1 + 2r\ell_1 - 3\ell_1^2 + 2rA\ell_3 - 3A\ell_1\ell_3 - At\ell_3^2 + 2\ell_2\ell_3 + \ell_2^2\ell_3^2 - \ell_1\ell_3 t \\
&= \left(1 + \ell_2\ell_3\right)^2 + 2r\left(\ell_1 + A\ell_3\right) - t\ell_3\left(\ell_1 + A\ell_3\right) - 3\ell_1\left(\ell_1 + A\ell_3\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\ell_1 + A\ell_3 = B$ ve $1 + \ell_2\ell_3 = C$ olarak alınırsa,

$$At - \ell_2^2 = C^2 + B\left(2r - t\ell_3 - 3\ell_1\right)$$

eşitliği ve buradan da $t = 2s + 3A$ olduğu kullanılarak,

$$3\left(A^2 + B^2\right) - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $r$ ve $s$ pozitif tam sayılarının $a = Ar + \ell_1 s$ ve $3\left(A^2 + B^2\right) - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$ eşitlikleri ile tek türlü belirli olduğunu gösterelim. $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları bu eşitliklerle tek türlü belirli olmasa idi, $A^2 + B^2 = 0$ elde edilirdi. $A$ ve $B$ sayıları pozitif tam sayılar olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $r$ ve $s$ pozitif tam sayıları $a = Ar + \ell_1 s$ ve $3\left(A^2 + B^2\right) - C^2 - \ell_2^2 = 2rB - 2s\left(A + B\ell_3\right)$ eşitlikleri ile tek türlü belirlidir.

Şimdi de Lemma 2.5.7 yi kullanarak, $\varepsilon_d$ temel biriminin katsayıları olan $T_d$ ve $U_d$ değerlerini belirleyelim. $Q_{-1} = 0$ ve $Q_0 = 1$ olmak üzere, $q_i = \ell_i$ $\left(1 \le i \le k_d - 1\right)$ ve $Q_{i+1} = q_{i+1} Q_i + Q_{i-1}$ $\left(i \ge 0\right)$ ifadeleri yardımı ile,

$$Q_1 = \ell_1,$$
$$Q_2 = \ell_1 \ell_2 + 1 = A,$$
$$Q_3 = A\ell_3 + \ell_1 = B,$$
$$Q_4 = B\ell_3 + A,$$
$$Q_5 = C\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + A\ell_2 = BC + A\ell_2,$$
$$Q_6 = A\left(\ell_1 \ell_2 + 1\right) + \ell_3\left(A\ell_3 + \ell_1\right) + BC\ell_1 = A^2 + B^2$$

olarak hesaplanır. Buradan da, $2q_0 = 2a$ olduğu kullanılarak $T_d = 2q_0 Q_{k-1} + 2Q_{k-2}$ katsayısı,

$$T_d = 2\left[a\left(A^2 + B^2\right) + BC + A\ell_2\right]$$

olarak, $U_d = 2Q_6$ katsayısı ise,

$$U_d = 2\left(A^2 + B^2\right)$$

olarak elde edilmiş olur.

Şimdi de $d = a^2 + b$ kare çarpansız pozitif tam sayısının, $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $r$ ve $s$ parametrelerine bağlı olarak yazılışını elde edelim. $b = 4m + 3$ ve $2m = s + r\ell_2$ olduğundan $b = 2\left(s + r\ell_2\right) + 3$ olur. Elde ettiğimiz bu $b$ değeri ile $a = Ar + s\ell_1$ eşitliği kullanılarak,

$$d = a^2 + b = \left(Ar + s\ell_1\right)^2 + 2\left(s + r\ell_2\right) + 3 = A^2r^2 + 2r\left(As\ell_1 + \ell_2\right) + \ell_1^2 s^2 + 2s + 3$$

ifadesine ulaşılır. Burada $As\ell_1 + \ell_2 = D$ ve $\ell_1^2 s^2 + 2s + 3 = E$ olarak alındığında, $d$ tam sayısı,

$$d = A^2r^2 + 2rD + E$$

olarak elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Bu teoremin ifadesini sağlayan $d$ değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı kolayca belirlenir.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının ilk kısmında, "*belirli koşullara sahip rasyonel katsayılı kuvvet serilerinin bazı özellikleri taşıyan Liouville Sayıları argümanları için aldığı değerlerin transandantlığının incelenmesi*" problemi göz önüne alındı. Ele alınan problem çerçevesinde elde edilen değerlerin Liouville Sayısı veya rasyonel sayı olduğu ispat edildi. Bu konu ile ilgili olarak, benzer teorem ve sonuçlar, katsayıları $\mathbb{Q}_p$ *p*-adik cismine ait olan kuvvet serilerine genişletilebilir. Ayrıca, elde edilen bu teoremde $U_1$ sınıfını oluşturan Liouvile Sayıları yerine, $m > 0$ olmak üzere $U_m$ sınıfına ait elemanlar konulup incelenebilir.

Bu tez çalışmasında incelenen diğer bir konu olan kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin bulunması ile ilgili olarak, Richaud-Degert tipinde olmayan kuadratik sayı cisimleri için temel birimlerin belirlenmesi problemi ele alındı. Ele alınan bu problem çerçevesinde, Richaud-Degert tipinde olmayan $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisimlerinde $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımındaki periyodun $k_d = 7$ olması durumunda, $\varepsilon_d = \dfrac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2}\left(>1\right)$ biçiminde ifade edilen cismin temel biriminin $T_d$ ve $U_d$ katsayılarını ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını kesin bir biçimde veren ve literatürde olmayan teoremler elde edildi. Bu teoremler ayrıntılı ispatları ile verilip somut örneklerle pekiştirildi. Daha sonraki çalışmalarda, $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımındaki periyodun 7 den büyük olması durumunda, $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin temel biriminin katsayılarının ve $\omega_d$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının kesin bir şekilde elde edilmesi problemi ve bu cisimlerin sınıf sayıları ile olan ilişkisi incelenerek, bu cisimlerin cebirsel yapıları hakkında yeni bir takım bulgular elde edilebilir.

# KAYNAKLAR

1. NIVEN I., 1956, *Irrational Numbers,* John Wiley & Sons Inc.

2. LIOUVILLE, J., 1844, Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationnelles algébriques, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 18, 883-885, 910-911.

3. CANTOR, G., 1874, Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraishen Zahlen, *J. Reine Angew. Math*., 77, 258-262.

4. MAHLER, K., 1932, Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II, *J. Reine Angew. Math.*, 166 , 118-150.

5. KOKSMA, J. F., 1939, Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen, *Monatsh. Math. Phys.*, 48, 176-189.

6. LEVEQUE, W.J., 1953, On Mahler's U-numbers, *J. London Math. Soc.*, 28, 220-229.

7. ORYAN, M. H., 1980, Über gewisse Potenzreihen, die für algebraische Argumente Werte aus Der Mahlerschen Unterklassen $U_m$ nehmen, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. A*, 47, 1-42.

8. ORYAN, M. H., 1983-1986, Über gewisse Potenzreihen deren Funktionswerte für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen U-Zahlen vom Grade ≤ m sind, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm.A*, 47, 15-34.

9. TOMITA, K., 1995, Explicit Represantation of Fundamental Units of Some Quadratic Fields, I, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71, 41-43.

10. TOMITA, K., 1997, Explicit Represantation of Fundamental Units of Some Quadratic Fields, II, *Journal of Number Theory*, 63, 275-285.

11. AZUHATA, T., 1984, On the Fundamental Unit and the Class Numbers of Real Quadratic Fields, *Nagoya Math. J.*, 95, 125-135.

12. SCHNEIDER, T., 1957, *Einführung in die transzendenten Zahlen*, Springer, Berlin.

13. LEVEQUE, W. J., 1956, *Topics in Number Theory Vol. II*, Addison-Wesley Publishing Company Inc.

14. WIRSING, E., 1961, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, *J.Reine Angew. Math.*, 206 , 67-77.

15. PERRON, O., 1960, *Irrationalzahlen*, Walter de Gruyter & Co., Berlin.

16. BUGEAUD, Y., 2004, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge University Press, Cambridge.

17. PERRON, O., 1950, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea Publishing Company, New York.

18. MAHLER, K., 1976, *Lectures On Transcentdental Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 3-540-07986-6.

19. MOLLIN, R. A., 1995, *Quadratics*, (CRC Press Boka Raton FL).

20. DEGERT, G., 1958, Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell quadratischer Zahlkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 22, 92-97.

21. NIVEN I., ZUCKERMAN H. S . and MONTGOMERY H. L., 1991, *An Introduction to the Theory of Numbers,* John Wiley & Sons Inc., 9780471625469.

22. HARDY G. H. and WRIGHT E. M., 2008, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press Inc., New York, 978-0-19-921985-8.

23. KHINCHIN, A. Y., 1997, *Continued Fractions*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 0-486-69630-8.

24. HASSE, H., 1980, *Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heilderberg,New York.

25. TAKAGI, T., 1971, *Shoto Seisuron Kogi*, 2nd Ed., Kyoritsu, Tokyo [In Japanese].

26. PEKİN, A. and İŞCAN, H., 2005, Continued Fractions of Period Six and Explicit Representations of Fundamental Units of Some Real Quadratic Fields, *Journal of the Indian Mathematical Society,* 72, 184-194.

# ÖZGEÇMİŞ

Gül KARADENİZ GÖZERİ, 13.02.1981 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kazım Karabekir İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Yabancı Dil Ağırlıklı Hasan Polatkan Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olup, aynı yıl içerisinde Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2006 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı ve İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne "Araştırma Görevlisi" olarak atandı. 2007 yılında İstanbul Üniversitesi "Rehberlik Danışmanlık Sosyal Destek Birimi Matematik Bölümü Temsilcisi" olarak görevlendirildi. Halen İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olup "Rehberlik Danışmanlık Sosyal Destek Birimi Matematik Bölümü Temsilciliği" görevini de sürdürmektedir. Evlidir.