



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**SPİNÖR TİPİ INSTANTON ÇEKİCİLERİNİN FAZ
UZAYINDA DAVRANIŞLARI**

Fatma AYDOĞMUŞ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

Danışman

Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ

Mart, 2012

İSTANBUL



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**SPİNÖR TİPİ INSTANTON ÇEKİCİLERİNİN FAZ
UZAYINDA DAVRANIŞLARI**

Fatma AYDOĞMUŞ

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

Danışman

Prof.Dr. K. Gediz AKDENİZ

Mart, 2012

İSTANBUL

Bu çalışma 29/03/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



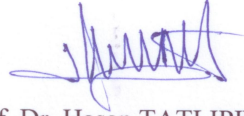
Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



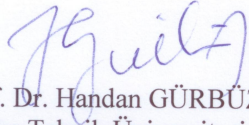
Prof. Dr. Haşim MUTUŞ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Sehban KARTAL
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen ve Edebiyat Fakültesi



Prof. Dr. Handan GÜRBÜZ
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen ve Edebiyat Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 6884 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez konumu belirleyen ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ'e çok teşekkür ederim. Tezimi hazırlarken beraber çalışabilme fırsatı bulduğum ve engin bilgisinden faydalandığım hocam Emine RIZAOĞLU'na çok teşekkür ederim. Tüm yardımları ve dostluğu için Ayberk YILMAZ'a çok teşekkür ederim.

Her türlü desteği ve yardımları için kardeşim Eren TOSYALI'ya çok teşekkür ederim. Bu tezin oluşmasında onun da emeği çoktur.

Sadece tez çalışmam süresince değil yaşamın her anında benden emek ve desteklerini eksik etmeyen ablalarım Lale KARACA, Ebru AYDOĞMUŞ ve kardeşim Onur AYDOĞMUŞ'a çok teşekkür ederim.

Bana kattığı herşey için Sercan ŞEN'e ve varlığı için baharımız Eylül'e çok teşekkür ederim.

Ve son olarak bana olan güvenlerini hiçbirzaman yitirmeden yaşamın her anında hep yanımda olan anneme ve babama yani en çok teşekkür edilmesi gereken Mürüvvet AYDOĞMUŞ ve Bayram AYDOĞMUŞ'a tüm kalbimle teşekkür ediyor ve bu tezi onların kırkıncı evlilik yıl dönümleri için bir hediye olarak sunuyorum.

Mart, 2012

Fatma AYDOĞMUŞ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
ÖZET	vi
SUMMARY.....	vii
I. GİRİŞ	1
II. GENEL KISIMLAR	3
2.1. Solitonlar.....	3
2.2. Parçacık Fizikinde Solitonların Önemi.....	4
2.3. Soliton Çözümlü Bazı Denklemler.....	6
2.3.1. KdV.....	6
2.3.2. KP.....	8
2.3.3. Sine-Gordon.....	8
2.3.4. Klein Gordon.....	9
2.3.5. Kütleli Gürsey Spinör Dalga Denklemi.....	10
2.3.6. Boussinesq.....	11
2.4. Non-linear Spinör Dalga Denklemleri.....	12

2.5. Soliton Tipi Çözüm Olan Instantonlar ve Önemi.....	13
2.6. Sırfi Spinör Tipi Alan Teorilerine Kısa Bir Tarihsel Bakış.....	16
2.7. Non-lineer Dinamik ve Kaos.....	18
III. MALZEME VE YÖNTEM.....	24
3.1.Duffing Denklemi.....	24
3.2. Gürsey Non-Linear Spinör Alan Modeli	27
3.3. Thirring Non-Linear Spinör Alan Modeli	29
3.4. Gürsey ve Thirring Instantonlarının Sabit Noktaların Bulunması ve Kararlılık Analizi.....	31
3.5. Gürsey ve Thirring İstantonlarının Faz Uzayı Davranışları.....	36
IV. BULGULAR	42
4.1. Gürsey ve Thirring İstantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması.....	42
4.2. Gürsey Instantonları için Bifürkasyon Diyagramı.....	47
4.3. Kuantum Tedirgeme Altında Gürsey Instantonları.....	51
4.4. Periyodik Besleme Altında Gürsey Instantonları.....	54
4.5. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı.....	65
4.6. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Zaman Serisi.....	67
4.7. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Poincare Kesitleri.....	70
V. TARTIŞMA VE SONUÇ	72
KAYNAKLAR	77
EK A- KONFORMAL DÖNÜŞÜM GRUBU.....	81
EK B- PAULİ VE DIRAC MATRİSLERİ.....	82
ÖZGEÇMİŞ.....	85

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1.	: KdV Solitonlarının Zamansal Evrimi.....	7
Şekil 2.2.	: KP Denkleminin İki Soliton Çözümünün Çizimi.....	8
Şekil 3.1.	: Duffing Faz Uzayı.....	26
Şekil 3.2.	: Gürsey instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 1$	36
Şekil 3.3.	: Gürsey instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 1.2$	37
Şekil 3.4.	: Gürsey instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 0.7$	38
Şekil 3.5.	: Thirring instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 1$	39
Şekil 3.6.	: Thirring instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 1.2$	40
Şekil 3.7.	: Thirring instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $\alpha = 0.7$	41
Şekil 4.1.	: $\alpha = 1$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı.....	44
Şekil 4.2.	: $\alpha = 1.2$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı	45
Şekil 4.3.	: $\alpha = 0.7$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı	46
Şekil 4.4.	: Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı...	48
Şekil 4.5.	: Periyodik Besleme Altında Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı.....	66

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1.	: Dinamik - Tarihsel Bir Bakış	18
Tablo 4.1.	: Gürsey ve Thirring Instantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması.....	43
Tablo 4.2.	: α 'nın Değişimine Bağlı $\{F, G\}$ Sabit Noktaların Değişimi.....	49
Tablo 4.3.	: α 'nın Değişimine Bağlı Olarak $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının Değişimi.....	50
Tablo 4.4.	: a 'nın Değişimine Bağlı Olarak $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	52
Tablo 4.5.	: a 'nın Değişimine Bağlı Olarak $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	53
Tablo 4.6.	: $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	55
Tablo 4.7.	: $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	56
Tablo 4.8.	: $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	57
Tablo 4.9.	: $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü.....	58
Tablo 4.10.	: $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü.....	59
Tablo 4.11.	: $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları	60
Tablo 4.12.	: $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları.....	61
Tablo 4.13.	: $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü.....	62
Tablo 4.14.	: $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü.....	63
Tablo 4.15.	: Frekans ve Genliğin Farklı Değerleri için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları....	64
Tablo 4.16.	: Zaman Serisi Grafikleri.....	68
Tablo 4.17.	: Zaman Serisi Grafikleri.....	69
Tablo 4.18.	: Poincare Kesitleri.....	70

ÖZET

SPİNÖR TİPİ INSTANTON ÇEKİCİLERİNİN FAZ UZAYINDA DAVRANIŞLARI

Feza Gürsey, 1956 yılında, Heisenberg ve Bohr' un rüyası olan atom altı temel parçacıkların bir teori altında toplanmasını mümkün kılacak, dört boyutlu konformal invaryant ve non-lineer saf spinör etkileşmeli bir model önerdi. Dört boyutlu konformal invaryant saf spinör alanlı bir model olarak Gürsey Model alanlar teorisinde yazılabilmüş birinci mertebeden daha yüksek türevler içermeyen tek model olma özelliğine de sahiptir. Sonraki yıllarda Kortel tarafından Gürsey non-lineer dalga denkleminin bir çözüm sınıfı bulunmuş ve bunların özel bir durumunun instantonlara(Gürsey instantonları) karşılık geldiği Akdeniz tarafından konformal simetrisinin kendiliğinden kırılması yöntemiyle bulunmuştur.

Son zamanlarda iki boyutlu spinör tipi Thirring instantonlarının davranışları faz uzayında incelenmiştir. Bu tezde Gürsey instantonlarının dinamik yapılaşması ve evrimi incelenmiş ve evrimi ifade eden faz diyagramları çizilmiştir. Ayrıca instanton yapısını anlamak için farklı boyut ve kuvantum spinör sayılarına sahip Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzayı davranışları karşılaştırılmıştır. Son olarak kuvantum tedirgeme ve periyodik besleme altında Gürsey instantonlarının non-lineer dinamiği tartışılmıştır.

SUMMARY

THE BEHAVIOURS OF SPINOR TYPE INSTANTON ATTRACTORS IN PHASE SPACE

A four-dimensional conformal invariant pure spinor wave equation with nonlinear self-coupled spinor term had been proposed in mid-fifties by Feza Gürsey as a possible basis for a unitary description of elementary particles (Heisenberg-Bohr dream). Gürsey's Spinor Model is only possible conformally invariant pure spinor model, which contains no derivatives higher than the first. A class of exact solutions Gursey Spinor wave equation has been found by Kortel long ago. The special case of Kortel wave solutions of the Gursey Spinor wave equation was shown to correspond to instantons (Gursey instantons) which reflect the spontaneous symmetry breaking of the conformal invariance by Akdeniz.

Recently, the behaviours of two dimensional spinor type Thirring instantons has been investigated in phase space. In this thesis, we have investigated dynamic characteristics and evolution of Gursey instantons in phase space. We also compared the behaviours of Gursey and Thirring instantons in phase space to understand instanton structure between different quantum spinor number as well as dimensions. Finally we discussed the nonlinear dynamics of Gursey instantons under quantum fluctuation and periodic feedback.

I. GİRİŞ

İlerleyen bilim ve teknolojinin verdiği güçle, dünyaya hatta evrene egemen olmaya çalışan insanoğlu, kendi yaşamını sonlandıran ölüme engel olamamaktadır. Yaşamını sonsuza dek sürdürebilme fikri tarih boyunca birçok olguya ilham olmuştur. Örneğin yüzyıllar boyunca simyagerler değersiz maddeleri altına çevirmenin yanısıra hayatı sonsuza dek uzatacak ölümsüzlük iksirini bulmak için uğraşmışlardır. Ölümsüzlüğün ve bilginin peşindeki insanı yücelterek anlatan Gılgamış Destanının'da ölümsüzlüğü arayan Gılgamış, tek ölümsüz insan Utnapiştim'i bulup ondan bu gizi öğrenmek için yola düşmüştür. Ruhun ölümsüzlüğü Eflatun'un felsefesini oluşturan beş önemli kuramından birini oluşturur. Nietzsche ise yaşayan insanlardan ölümsüzlüğe dayanmalarını istemiştir.. Oysa hiç yok olmayıp var olmaya devam edebilen ölümsüz bir şeyden bahsetmek gerçekten mümkündür: *Solitonlar*. Şekillerini sürekli koruyarak, yaşamlarını sonsuza dek sürdürebilme özelliğine sahip, sonlu enerjili yerel dalga çözümleri solitonlar ile ifade edilir [1,2]. Örneğin foton tipik bir soliton özelliği gösterir.

Tezde şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden yayılan ve herhangi bir çarpışma esnasında kendine has özelliklerini koruyabilen solitonların özel bir tipi olan *instantonların* dinamiği üzerine çalışılmıştır. Uzay-zaman açılımına sahip, sıfır enerjili ve sonlu eylemli soliton tipi çözümlere instantonlar adı verilir [2]. Teorik ve matematiksel fizikte önemli rol oynayan ve vakum durumuna tekabül etmesinin yanı sıra uzay zaman açılımına da sahip olan instantonların önemi tez boyunca vurgulanmaya çalışılmış ve elde edilen bulgular neticesinde instantonların tedirgeyerek spinör tipi parçacıkların üretimine yol açabileceği alternatif bir düşünce öne sürülmüştür.

Non-lineer diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözümlerinin neredeyse olanaksız olması ve faz uzaylarının non-lineer dinamik yapı hakkında bilgi vermesi nedeniyle; non-lineer denklem çözümlerinin dinamiği ve evrimi hakkında görüşe sahip olmak için, nümerik yöntemlere ve bu yöntemlerden elde edilen çözümlerin faz uzaylarına müracaat edilmektedir [3]. Tezde spinör tipi instantonların dinamik yapısı incelenirken non-lineer dinamik analiz yöntemlerine başvurulmuştur.

Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde planlandı;

Tezin *Genel Kısımlar* bölümünde solitonlar, solitonların parçacık fiziğindeki öneminden ve soliton tipi çözümler olan instantonlardan bahsedilmiş, soliton tipi çözümlere sahip bazı denklemlere örnekler verilmiştir. Yazılan non-linear spinör alan denklemlerinin parçacıkları yorumlamasındaki başarısının ardından, yeni non-linear alan modelleri oluşturma çabalarına ve bunların tarihsel sürecine yine bu bölümde kısaca değinilmiş ve ve son olarak non-linear dinamik ve kaos kısmı verilmiştir.

Duffing denklemi ve tezde çalışılan spinör alanlı modellerden biri olan Thirring non-linear spinör alan modeli tezin *Malzeme ve Yöntem* bölümünde tanıtılmıştır. 2007'de tamamlanmış yüksek lisans tez çalışmamızın [4] da konusunu oluşturan, Gürsey tarafından önerilmiş, dört boyutlu konform invariant, saf-spinör alanlı Gürsey model de tezimizin *Malzeme ve Yöntem* kısmında tanıtılmıştır. Ayrıca hem Duffing hem de Gürsey ve Thirring non-linear spinör alan denklemlerinin sabit noktalarının (fix point) bulunması, bu noktalar civarında sistemlerin kararlılık analizinin incelenmesi ve her bir model için çizilen faz uzayları yine tezin *malzeme ve yöntem* kısmında yer almaktadır.

Tezin özgün kısmını oluşturan *Bulgular* bölümünde ise öncelikle Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzayı davranışları karşılaştırılmıştır. Ayrıca bulgular kısmının önemli bir bölümünü teşkil eden kuvantum tedirgeme ve periyodik besleme altında Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışları incelenmiştir. Gürsey instantonları için bifürkasyon diyagramı verilmiş ve elde edilen diğer bulgularla uyumluluğu yorumlanmıştır. Aynı zamanda periyodik besleme altındaki Gürsey instantonları için de bifürkasyon diyagramı çizilmiştir. Tezin bulgular kısmında son olarak periyodik besleme altındaki Gürsey instantonlarının zaman serileri ve Poincare kesitleri verilmiştir. Bulgular kısmında elde edilen tüm sonuçların önemi ve fiziksel yorumu tezin *Tartışma ve Sonuç* kısmında verilmeye çalışılmıştır.

II. GENEL KISIMLAR

2.1. Solitonlar

Soliton fiziğinin başlangıç tarihi, 1834 yılında bir iskoç deniz mühendisi olan John Scott Russel'ın Edinburgh yakınında bir su kanalında, geniş bir soliter dalga gözlemlemesine uzanır. Ancak dalga yayılımındaki belirgin değişiklikleri tam olarak fark edemediğinden 10 yıl süren uzun denemeler sonucu ünlü “dalgalar üzerine kayıtlar” adlı yayını 1844'te yayınladı. Çalışmalarının yayınlanmasından kısa bir süre sonra, gözlemleri büyük bir ilgi çekti ve bilimsel çevrelerde bazı durumların yeniden oluşturulması zorunluluğu ortaya çıktı. Bu çalışmaların referansında lineer olmayan dalgalar konusunda yeni çalışmalar yapılmaya başlandı. J.S.Russell'ın gözlemlerini açıklamak için türetilen ve dalgaların sığ bir su kanalının yüzeyindeki dağılımını açıklayan ünlü KdV denklemi iki Hollandalı matematikçi Korteweg ve de Vries tarafından 1895'de bulundu. KdV denklemi sığ su dalgalarının dikdörtgen bir kanalda tek yönlü yayılımı için soliton çözümlerine izin verir. Daha sonra fizik ve matematiğin birçok problemde parçacık özelliğine de sahip soliton dalgaları keşfedilmiştir [1].

İntegre edilebilir sistemler çalışmasında yükselen bir görüş olan solitonlar, birçok fiziksel uygulamaları tanımlayan pertürbe edilemeyen sistemlerde anahtar paradigma olmuştur. Solitonlar basitçe nokta parçacık gibi davranırlar ve zaman evrimleri, sıradan diferansiyel denklem olan hareket denklemleri ile tahmin edilebilir. Buna rağmen son yıllarda giderek solitonların iç serbestlik derecelerinin birçok problemde çok önemli rol oynadığı anlaşılmıştır. Resonant soliton (solitary dalga) çarpışmalarını yönetmeleri, non-trivyal soliton-impurity (gürültü) etkileşmelerine sebebiyet vermeleri, termal gürültü ile harekete geçirilebildiklerinden fiziksel olarak solitonların iç modlara sahip olup olmadığına karar vermek önemlidir [4]

Solitonlar, lineer olmayan dalgalardır. Bir soliton, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin soliter, hareketli dalga çözümü olarak düşünülebilir. Soliter dalgalar, parçacıklar gibi davranırlar. Her biri yaklaşık olarak sabit şekil ve hıza sahip hareketli

dalgadırlar. İki tane soliter dalga yakınlaştıkça yavaşça deforme olur ve sonuçta tek bir dalga paketinde birleşirler. Bu dalga paketi, bir süre sonra çarpışmadan önce aynı şekil ve hıza sahip iki soliter dalgaya ayrılır. Çarpışma, hiç bir dalganın dalga formuna zarar vermez. Çarpışma anında dalga genliği iki dalganın toplamından daha küçük olur. Bu lineer olmayan bir davranıştır. Lineer olmama önemli bir rol oynar. Birçok olusum denklemleri için, soliter dalgalar elastik olmadan dağılır ve radyasyona bağlı olarak enerji kaybeder. Solitonlar için böyle değildir. Tamamen lineer olmayan bir etkileşimden sonra soliter dalgalar aynı hız ve şekille kimliklerini koruyarak dağılırlar. Kararlılık soliton fiziğinde önemli bir rol oynar. Model denklemlerinde, solitonların kararlılığı, lineer olmama ve dağılma arasındaki hassas dengeden kaynaklanır. Lineer olmama bir soliter dalganın daha uzakta toplanmasına neden olur. Dağılma, bir yerde toplanmış dalganın yayılma efektidir. Eğer bu iki zıt efektten biri kaybedilirse, solitonlar kararsız hale gelir ve sonuçta yok olurlar [2,6].

Bu güne kadar Soliton dalgaların ilerleyişleri ve etkileşimleri üzerine değişik birçok çalışma yapılmıştır. Lineer olmayan alanlardaki çalışmalarda son zamanlarda büyük gelişmeler kaydedilmiştir. Özellikle lineer olmayan dalga yayılımıyla , fiber optik iletişim sistemleri gibi yeni uygulamaların başlatılması ve sıvıların dinamiğinde çözülmemiş bir çok klasik uygulama alanında yeni veriler elde edilmiştir [1].

2.2. Parçacık Fiziğinde Solitonların Önemi

Lagrange tipi alan teorilerinin klasik hareket denklemlerinin sonlu enerjili, kararlı dalga çözümlerine soliton adını veriyoruz. Uygulamalı matematikçiler tarafından non-lineer dalga denklemlerinin çözümlerinde bulunan, ve daha sonraki yıllarda katı hal fiziği ile plazma fiziğinin bazı problemlerini açıklamada kullanılan solitonların parçacık fiziğinde anlamlı çözümler olabileceğinin anlaşılması 1960' lı yıllara dayanır. Sonlu enerjili yerel dalga çözümlerini ifade eden solitonlar, gerek yayılırken gerekse kendi aralarında etkileşmelerinden sonra yapılarını korurlar. Başka bir deyişle şekillerini sürekli koruyarak, yaşamlarını sonsuza dek sürdürürler. Kendi aralarında etkileştiklerinde bilgi alışverişinde (enerji alışverişi) bulunmazlar. Örneğin foton tipik bir soliton karakterindedir. Bu

özelliklerinden dolayı kararlı parçacıklar soliton çözümleri ile ifade edilmeye çalışılmıştır. Öte yandan solitonların parçacıklar fiziğinin önemli bir çalışma alanı olmasını sağlayan diğer bir özelliği de topolojik görünümüdür.[2]

Solitonları topolojik klasik çözümler adı altında sınıflandırabiliriz. Topolojik klasik çözümler genel olarak;

a) Sabit

b) Statik

c) Topolojik özelliklere sahip uzay ve zamana bağlı (uzay ve zamanda açılan instanton ve meron çözümleri)

olarak üç kümeye ayrılırlar.

Temel parçacıkları tanımlayan kuvantum teorileri olmalarına rağmen solitonlar klasik alan denklemlerinin çözümleridir. Solitonların kuantizasyonu denebilecek, verilen bir alan teorisinin klasik soliton çözümleri ile bu teorinin kuantalaşmış versiyonunun yayılmış parçacık durumu arasında ki uyumun kurulma prosedürü 1974-75 yılları boyunca bağımsız olarak bir çok teorisyen tarafından pek çok teknik kullanılarak geliştirildi. Bu metotlar yarı klasik genişlemenin genelleştirilmesinin, non-rölativistik kuvantum mekaniğinde rölativistik alan teorisine göre olması; böyle bir genelleştirmeden, klasik soliton çözümü ile birlikte sadece kuvantum soliton parçacık state (durumu) değil, aynı zamanda soliton civarında dalgalanmaları kuantize ederek uyarılmış statelerin (durumların) tüm serileri benzetilebilir (çağrıştırılabilir). Kuantum soliton parçacığının özellikleri, kütlesi veya şekil faktörleri, klasik solitonun karşı gelen özelliklerinden başlayarak sistematik yarı genişlemede bulunabilir. Kuantum dalgalanmalarının ultraviolet renormalizasyonu ve sürekli simetriyle çağrıştırılan 0- mod problemleri gibi önemli teknik zorluklar araştırıldı ve uygulandı. Bu gelişmelerin yan dalı olarak instanton fiziği doğdu.

2.3. Soliton Çözümlü Bazı Denklemler

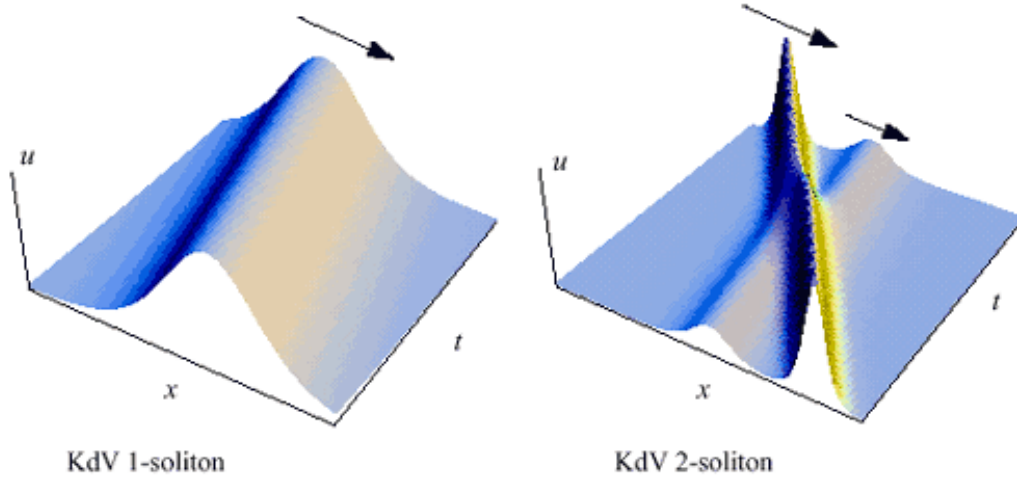
Literatürde soliton tipi çözümlere sahip pek çok denklem mevcuttur. Bu denklemlerin ortak özellikleri enerjisini ve biçimini koruyan çözümlere sahip olmasıdır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

2.3.1. KdV

Soliton dalgası ilk kez 1834 yılında İskoç bilim adamı ve mühendisi Scott Russell tarafından gözlenmişti [2]. Lakin Russell bu gözlemlerini matematiksel olarak yorumlayamamıştır. Russell'ın gözleminden 60 yıl sonra iki Hollandalı matematikçi Korteweg ve de Vries soliton dalgalarını ifade eden ve İskoç mühendis J.S.Russell'in önceki gözlemlerine açıklık getiren aşağıdaki ünlü denklemi ortaya koydular.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1)$$

Burada α sayısal bir çarpandır. $\psi \rightarrow \psi / \alpha$ değişimiyle α elenebileceğinden , seçimi çok önemli değildir. Yaygın olarak $\alpha = 1,6$ ve matematikçiler tarafından da $\alpha = -6$ olarak seçilir. KdV denklemi sığ su dalgalarının dikdörtgen bir kanalda tek yönlü yayılımı için soliton çözümlerine izin verir. Birinci merteye zaman türevi ve üçüncü merteye uzay türevi içermesi itibariyle , bir dalga denklem, gibi gözükmemektedir. Yine de sığ su dalgalarını gayet iyi tanımlar. Soliton çözümü mümkündür , çünkü yayılım non-lineerlikle dengelenebilir.



Şekil 2.1. KdV Solitonlarının Zamansal Evrimi

Su deposu deneyleri KdV eşitliğinin ve soliton çözümlerinin geçerliliğini doğrulamıştır. Gardner ve arkadaşları 1960 yılında KdV'nin uzaysal, periyodik ve nümerik çözümlerini momentumun ve enerjinin korunumu ile elde etmişlerdir. Fakat denklemin çözümü için en önemli adım 1965 yılında Zabusky ve Kruskal tarafından atılmıştır. Onlar bu solitary dalganın başka bir solitary dalgasıyla çarpıştığında değişmeden kaldığını ortaya çıkardılar. Zabusky ve Kruskal'ın çalışmaları tüm non-lineer dalga modelleri paradigmasında yerini aldı.

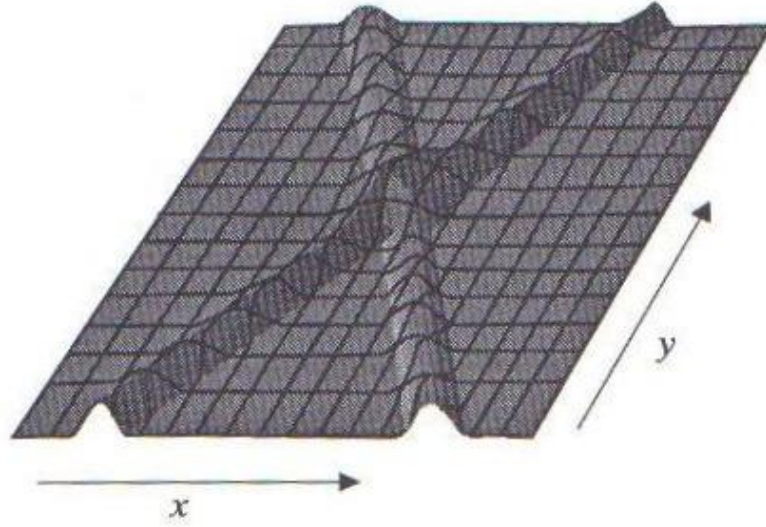
Yüzeysel su dalgalarının kesintisiz olarak yayılışını açıklayan ilk model olarak ortaya atılan KdV denklemi uygun yaklaşımlarla, plazmada iyon-akustik ve manyetohidrodinamik dalgalar, tüpte dönen akış, elastik çubukta uzunlamasına yayılan dalgalar, düşük sıcaklıklı non-lineer kristallerde termal uyarılmış fonon paketleri gibi pek çok farklı fiziksel problemde de karşımıza çıkar .

2.3.2. KP

KdV denkleminin iki boyutlu genelleştirilmesi olan Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi,

$$(\psi_t + \alpha\psi\psi_x + \psi_{xxx}) + 3\psi_{yy} = 0 \quad (2.2)$$

ile verilir. Şekil 2.1'de KP denkleminin iki-soliton çözümünü göstermektedir. Böyle bir soliton konfigürasyonu gerçekten de Oregon'un okyanus kıyılarında gözlenmiş ve fotoğraflanmıştır.



Şekil 2.2. KP Denkleminin İki Soliton Çözümünün Çizimi

2.3.3. Sine Gordon

Sine-Gordon denkleminin topolojik ve parçacık fiziğinde uygulama alanı olan solitonları verir (KdV solitonları non-topolojiktir, yani sonsuzdaki sınır koşulları boşluktakiyle topolojik açıdan aynıdır).

$$\psi_{xx} - \psi_{tt} = \sin \psi \quad (2.3)$$

Sine-Gordon denklemi solitonları kıvrım (kink) biçimlidir ve değişmeden yayılırlar. Böyle bir solitona iyi bir örnek bir ferromanyetteki iki manyetik bölge arasındaki Bloch duvarıdır.

Uzay-zamansal dış kuvvetlerle pertürbe edilmiş Sine-Gordon solitonlarının dinamiğinde bazı koşullar sağlandığında; homojen olmayan, uzaya bağlı dış kuvvet varlığında sine-Gordon solitonlarının iç modlarının varlığı kanıtlanmıştır: periyodik zamana bağlı kuvvetler soliton salınım genişliğine destek olabilir. Bazı durumlarda iç mod kararsız olabiliyor bu da solitonun anti-soliton ve iki solitona bozunmasına neden oluyor. Genel olarak uzay-zaman kuvvetleri varlığında soliton formsuz (katı olmayan) nesne gibi davranır. Soliton, homojen olmayan düzende hareket ederken genişliği korunmuş salınımlar gösterebilir. Soliton - anti-soliton çarpışmaları gibi iç modların önemli rol oynadığı fenomenler vardır.

Parçacık ve yoğun madde fiziğinde Sine-Gordon solitonlarının önemli uygulamaları vardır. Katı hal fiziğinde ferromagnetlerde egemenlik duvarını, kristallerde yük yoğunluk dalgalarında çıkışı, uzun Josephson bağlantı ve taşıma yollarında fluxonsı (akıntı) tanımlar. Genel olarak integre edilemeyen soliton denklemi (ϕ^4 denklemi ve sine-Gordon gibi) birçok fonemada çok önemli olan iç serbestlik derecesine sahip olabilir. Aşırı kısa optik atımların yayılımı, temel parçacıkların birleşik kuramı üzerine yapılan çalışmalar Sine-Gordon eşitliğinin karşımıza çıktığı durumlardan bazılarıdır.

2.3.4. Klein Gordon

Eğer $\sin \psi \approx \psi$ lineer yaklaştırması yapılırsa ,

$$\psi_{xx} - \psi_{tt} = \psi \quad (2.4)$$

Klein-Gordon denklemi elde edilir. Klein-Gordon eşitliği dağıtıcıdır ve böylece Sine-Gordon eşitliğindeki $\sin \psi$ terimi hem dağıtıcılık hem de non-lineerlik içererek soliton çözümlerine izin verir.

2.3.5. Kütleli Gürsey Spinör Dalga Denklemi

Feza Gürsey tarafından 1956 yılında önerilen spinör alan denklemi konformal invaryantlığa sahip ilk non-lineer spinör dalga denklemidir [7]. Bağlantı sabitinin belli değerleri için denkleme kütle teriminin eklenmesiyle soliton tipi çözümler bulunmuştur [8]. Gürsey spinör denkleminin genişletilmiş formunun soliton çözümleri [9] ve Wu-Yang tipi monopole çözümleri bulunmuştur.

Kütleli Gürsey Spinör Dalga Denkleminin Lagrange fonksiyonu

$$L = \overline{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi) + g(\overline{\psi}\psi)^{\frac{4}{3}} - m(\overline{\psi}\psi) \quad (2.5)$$

şeklindedir. Buradan hareket denklemi

$$(i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\psi) = -\frac{4}{3}g(\overline{\psi}\psi)^{1/3} + m\psi \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Denklemin soliton çözümlerini bulmak için aşağıda verilen soler ön çözüm yerine konulduğunda

$$\psi = \begin{bmatrix} g(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ if(r) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} e^{-i\omega t} \quad (2.7)$$

ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$f'(r) + \frac{2}{r}f(r) + (m-w)g(r) - \frac{4}{3}\alpha(g^2(r) - f^2(r))^{\frac{1}{3}}g(r) = 0 \quad (2.8)$$

$$g'(r) + (m+w)f(r) - \frac{4}{3}\alpha(g^2(r) - f^2(r))^{\frac{1}{3}}f(r) = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemini boyutsuzlaştırmak için $r = \frac{\rho}{m+w}$ olmak üzere;

$$f(r) = \left[\frac{m+w}{\frac{4}{3}\alpha} \right]^{\frac{3}{2}} F(\rho), \quad g(r) = \left[\frac{m+w}{\frac{4}{3}\alpha} \right]^{\frac{3}{2}} G(\rho), \quad f'(r) = \frac{df}{dr} \quad \text{ve} \quad g'(r) = \frac{dg}{dr} \quad \text{dönüşümleri}$$

uygulanarak ve $v = \frac{m-w}{m+w}$ alınarak

$$f'(\rho) + \frac{2}{\rho}f(\rho) + vg(\rho) - (g^2(\rho) - f^2(\rho))^{\frac{1}{3}}g(\rho) = 0 \quad (2.9)$$

$$g'(\rho) + f(\rho) - (g^2(\rho) - f^2(\rho))^{\frac{1}{3}}f(\rho) = 0$$

boyutsuz denklem sistemi elde edilir. $f(r)$ ve $g(r)$ fonksiyonlarının, r nin büyük değerleri için eksponansiyel olarak azalması $m > |w|$ koşulu sağlanması nedeniyle pozitif frekanslar için $0 < v < 1$ olmalıdır. Denklemler $F = 0$ ve $G = v^{\frac{3}{2}}$ de triviyal çözümlere sahiptir. Non-triviyal soliton tipi çözümler nümerik yöntemlerle elde edilir. Yakın tarihlerde yapılan bir tezde, m ve w nin farklı değerleri için bulunan Gürsey solitonlarının uzaysal davranışları ve faz diyagramları incelenmiştir [10].

2.3.6. Boussinesq

KdV modelinde olduğu gibi eşitlikler integre edilebilirse ters dağılım dönüşümü (Inverse Scattering Transform) solitary dalgalarının çözümleri ve özelliklerinin analitik açıklamaları için büyük fayda sağlar (Toland, 1981). İki yönlü yayılımı açıklamak isteyen

sistemler için ise durum farklıdır. 1871 de Boussinesq'un çalışmaları bu doğrultuda olmuştur.

Tek boyutlu Boussinesq denklemi ilk olarak sığ su dalgalarının tanımlanması için türetilmiştir. ψ yüzey yerdeğişimi olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial^2 (\psi^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = 0 \quad (2.10)$$

denklemi ile verilir. Eğer non-linear (üçüncü) terim olmaz ise, Boussinesq denklemi yapısal olarak, titreşen bir kablo (sert ve bükülmez tel) hareketi denkleminin aynısı olur. Eğer kablo eşitliğine $\psi \approx \exp[i(kx - \omega t)]$ gibi bir düzlem dalga çözümü önerilirse, dağılım bağıntısı $k^4 - k^2 + \omega^2 = 0$ bulunur. Faz hızı $v = \omega/k(\omega)$ frekansa bağlıdır. Bu yüzden kablo denklemi dağılım gösterir. Eğer non-linear terim geri konulursa, dağılım ve non-linearliğin birbirini dengelemesi dolayısıyla soliton çözümleri olasılığına izin verilir.

2.4. Non-linear Spinör Dalga Denklemleri

1926 yılında Schrödinger'in, Bohr tarafından keşfedilen bir atomdaki elektronların acayip davranışlarının de Broglie dalga teorisini kesin matematiksel denklemlere dönüştürmüş olması, yani küçük cisimlerin davranışının non-linear kuvantum dalga denklemleri ile belirlenebileceğinin anlaşılması ve 1930' lu yıllarda Dirac tarafından yazılan spinör alanlı non-linear dalga denklemi çözümlerinin (gene Dirac tarafından bulunan) elektron ve anti-elektron yorumlamasındaki başarısı, teorik fizikçileri yeni non-linear alan denklemleri yazmaya ve bu denklemlerin fiziksel dalga çözümlerini aramaya teşvik etti. Özellikle 1950' li yıllarda keşfedilen parçacık sayısındaki hızlı artışın da etkisiyle, teorik fizikte her temel parçacığı bir denklemle ifade etme çalışmaları daha da cazibeli hale geldi. Fakat her parçacığa bir denklem fikrinin, özellikle parçacıkların kuvantum sayılarında karışıklıklara yol açacağı da açıktı. Born ve Heisenberg bunun tek bir birleşik denklem yazmakla aşılabileceğini öne sürdüler. Bu fizikçilere göre, tüm parçacıkların inşasına olanak verecek bir alan modeli non-linear yapıda ve fermiyon özelliği olan bir

dalga denklemi olmalıydı. Tüm parçacıklar da bu denklemin çözümünü veren fermionsal parçacıklardan oluşmalıydı. Özellikle 1950' li yıllarda Heisenberg ve öğrencileri bu tip bir alan modeli yazmak için büyük çabalarda bulundular. Heisenberg ve öğrencileri Dirac denklemine benzeyen, kütle terimine ek olarak fermiyonların diğer parçacıkları oluşturabilmesi için; kendi aralarında bütünleşmeleri ifade eden terimi de içeren modeller geliştirdiler. Heisenberg' in bu çalışmalarından ve çabalarından etkilenen bir çok teorik fizikçi de benzer spinör alanlı modeller geliştirdi. 1954 yılında iki teorik fizikçi, Yang ve Mills çok önceleri matematikçiler tarafından üzerinde çalışmalar yapılmış Abelyen olmayan Lie gruplarının sınıflandırılmasını bu tip non-lineer alan modellerine uyguladılar [11]. Geometrik olmayan simetrisi de kapsayan (global ayar) ve alanların dinamik yapılaşmasını da verebilecek yerel ayar (local gauge) simetrisine sahip spinli alanları içeren model geliştirdiler. Hızlandırıcıların gelişmesiyle bulunan yeni deney sonuçları Heisenberg' in bu rüyasına son verdi. Fakat konformal simetrisine sahip spinör alanlı non-lineer modeller spinli parçacıklar olan kuarkların keşfi ile tekrar önem kazandılar [6].

2.5. Soliton Tipi Çözüm Olan Instantonlar ve Önemi

Instantonlar uzay-zaman açılımına sahip, sıfır enerjili ve sonlu eylemli soliton tipi çözümlerdir. Bu nedenle bunlara teorik fizik ve matematiksel fizikte önemli yerler verilmiştir. Öklidyen uzay-zaman üzerinde klasik alan teorilerinin hareket denklemleri için bir çözümdür. Kuantum karakteri taşırlar, bu nedenle kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmışlardır ve sıfır enerjileriyle vakumlar arası geçişi verdiklerinden kuarkların birlikte dolaşmalarını (her zaman ikili ya da üçlü bir yaşantının içine hapsedilmiş olmalarını) açıklamada önem kazanmıştır. Klasik düzeyde instantonlar, zamandan bağımsız alan denklemlerinin statik soliton çözümleri formundan çok farklı değildir. Çoğu durumlarda, D boyutta modelin instantonu, D+1 boyutta aynı modelin statik solitonuyla aynıdır. Buna rağmen karşı gelen kuantum alan teorisine instantonların etkileri solitonlardan çok farklıdır [2].

Solitonlar yayılmış parçacık durumuna, instantonlar ise vakum durum yapısını mükemmel şekilde etkileyen tünelleme etkilerine neden olurlar. Vakum durumu

kuvantum alan teorisinde önemli rol oynar. Herhangi bir değişikliği teorinin diğer pek çok özelliğini etkiler. Örneğin: iki boyutlu abelyen Higgs modelde, instantonların yüklerin hapsolmasına yol açmasından kaynaklanan vakum tünelleme Standart Pertürbasyon teorisince açıklanamamıştı. QCD' te kuark hapsolme mekanizmasının arandığı yerde instantonların materyalleşmemiş hapsolmaya yol açabileceği bir beklentidir. O modelde instantonlar iç-kuark kuvvetlerine önemli katkıda bulunurlar. Kuvantum teorilerinde soliton ve instantonlara dayanan sonuçların çoğu yarı klasik WKB metodu ile bulunur. Soliton ve instanton tarafından paylaşılan iki özellik kuvantum etkilerini ilginç kılar.

1) Çoğu soliton ve instanton çözümleri pertürbatif değildir. Alan denklemlerinin karşı gelen lineer kısmın çözümlerinden başlayarak ve non-lineer terimlere pertürbatif olarak uygulayarak elde edilmezler. Klasik çözümler kendileri non-pertürbatiftir, kendilerinden bulunan kuvantum etkiler de non-pertürbatif olmaya meyillidirler.

2) Soliton ve instantonlar uzaysal sonsuzluktaki davranışlarına göre bazı topolojik indekslerle karakterize edilirler. Solitonlar için bu indeks korunmuş niceliktir ve kuantalaşmış teoride soliton durumu karakterize eden korunumlu kuvantum sayısıdır. Böyle topolojik kuvantum sayıları, Lagrangiyenin sürekli simetrisi ile çağrıştırılan benzer Noether yüklerinden köken olarak çok farklıdır. Instanton durumunda sıfırdan farklı topolojik indekslerin varlığı, vakum açısı θ ile karakterize edilen vakum durumları ailesine öncülük eder. Kuvantum teorilerinde soliton ve instantonlara dayanan sonuçların çoğu yarı klasik WKB metodu ile bulunur. Soliton ve instanton fiziğinde aynı şey non-triviyal, non-pertürbatif klasik çözümler etrafında yapılırken, dalgalanmalar triviyal klasik çözümler etrafında kuantize edildiği yerde Standart Pertürbasyon teorisi yarı klasik metodun özel durumu olarak görülür. Soliton ve instanton etkilerini hesaplarırken bazı sınırlamalarla karşılaşılır:

i) Yarı klasik metod, soliton ve instantonları yararlı kılsa da uygun küçük non-lineer bağlantı parametresi ile birlikte zayıf bağlantı şartı gerekir. Sonuçlar parametrede non-pertürbatif olsa da bu gereksinmedir. Bazı durumlarda yarı klasik WKB sonuçları

bağlantı büyük olsa da doğru cevap veya iyi nümerik yaklaşıklıkla sonuçlanır ama bu metodun genel özelliği değildir.

ii) Metod ilk başta açıkça bazı non-triviyal klasik çözümler gerektirir. Herhangi bir model için yerleşmiş tekil olmayan klasik çözümler kararlılık karakteristikleriyle hem analitik formda veya doğru yaklaşıklıkla var ve hazır olmalıdır.

Bu gereklilikler, fizikleri QCD tarafından yönetildiğine inanılan soliton ve instantonların doğada olan gerçek hadron parçacıklarını tanımlamaktaki yararlılığını sınırlıyor. QCD, SU(3) ayar teorisidir, ayar bozonlar fermiyonik kuarklarla çifttir. Fermiyon varlığı durumunda yarı klasik genişlemenin kurulması için bir yol; Fermi alanının ihmal edildiği klasik çözümle başlayıp, QCD için self-coupled ayar alan sisteminin çözümleri bulunabilir. (3+1) boyutlu saf ayar alan teorisinin soliton çözümleri olmadığı gösterilmiştir. Diğer yol ise fermiyonik serbestlik derecesi üzerinden integral alıp ayar alanları için daha karışık etkin eylem bulunur. Bu etkin harekete karşı gelen hiçbir tam soliton çözümü bulunamamıştır. Hadronları tanımlarken tek mükemmel soliton kullanımı yarı klasik süreçteki diğer değişimden gelir. Klasik terimi, spin 1/2 alanı için c-sayısı Dirac dalga fonksiyonu ile değiştir anlamına gelen burada çiftleşmiş bozon-fermiyon alan denklemlerinin klasik çözümleri ile başlanır. Burada da (3+1) boyutlu QCD için klasik çözümler mevcut değildir ama yaklaşık çözümler hadronları tanımlamada başarılıdır. Böyle hesaplara “bag” (torba) modeli denir.

Klasik instanton çözümleri tam analitik formda self-coupled Yang-Mills sistemi için QCD te mevcuttur. Bu instantonların kuvantum etkileri hesaplandığında zayıf bağlanma şartı güçlüklerle karşılaşır. QCD instantonları 0'dan ∞ ' a değerler alan ölçek parametresi taşırlar. Instantonların etkisini hesaplamak için hacimleri üzerinden integre edilmesi gerekir. Normlanmış durumda etkin ayar bağlantı sabiti mesafe ölçeğiyle değişir. Sonuç olarak büyük instantonların davranışı, yarı klasik metodun zayıf bağlanma gerekliliğini ihlal ederek büyük bağlantı sabiti gerektirecek. Bunlar yarı klasik metodun doğru olmadığını söylemez ama QCD bu tahminleri tam olarak sağlamaz. Diğer çeşit teorik alan modelleri için gereksinilen klasik çözümler vardır ve zayıf bağlanma şartı da

devamlı olabilir. Bu durumlarda yarı klasik metot önemli non- perturbatif sonuçlar verir. Soliton ve instantonların etkileri kuvantum alan sistemlerinin komplekslik (karmaşıklık) ve yapı zenginliği anlayışımızı genişletir. (QCD durumunda, vakum durumlarının ve ayar dönüşümlerinin homotopy sınıflandırmasına göre yararlı bilgiler ortaya çıkmıştır) [10].

1970' li yılların sonuna doğru Yang-Mills teorilerinde instanton tipi çözümler bulunması ve bu çözümlerin uzay-zamana bağlı olmaları yanında, vakum özellikleri göstermeleri parçacık fizikçilerin büyük bir ilgisini çekti [6]. Bu ilgi çeşitli skaler alan modellerinde instanton çözümlerinin bulunması ile kendini gösterdi. Örneğin Alfaro, Fubini ve Furlan Sigma Modelinde instanton çözümleri buldu [12]. Bu gelişmelere paralel olarak Akdeniz ve Smailagic spinör tipi instanton çözümleri bulmak için, iki boyutlu saf fermiyonsal ve konformal simetriye sahip olan kütleli Thirring Modeli [13] üzerinde bir laboratuvar model olarak çalışmalar yaptılar ve bu modelde konformal simetrisinin kırılması ile fermiyon tipi instanton ve meron tipi çözümleri buldular [14].

2.6. Sırfi Spinör Tipi Alan Teorilerine Kısa Bir Tarihsel Bakış

Doğadaki gravitasyon dışındaki etkileşimlerin ayar teorilerinin geliştirilmesi, bu teorilerde simetrisinin kendiliğinden kırılmasının anlaşılması, zayıf etkileşimlerdeki ara bozonların hızlandırıcılarda bulunması, ayar teorilerinin dinamik özelliklerinin ara parçacık alış verişi, bu alış verişte ortaya çıkan bozuklukların giderilerek Feynman diyagramlarıyla ifade edilebilmesi, süper simetri kavramı ve birleşik alan teorileri gibi devrimci görüşler ve buluşlar son elli yıl içinde gerçekleşmiştir. Parçacık fiziğinin standart modeli diyebileceğimiz bu oluşumlar kümesi kozmolojide de önemli gelişmelerin önünü açmıştır. Standart model ötesi yapılan teorik çalışmalar, kütle çekimli sicim teorileri, yüksek boyutlu modeller üzerine yapılan çalışmalar ise halen devam etmektedir.

Parçacık fiziğindeki bu hızlı gelişmeler, modellerle ortaya çıkan non-lineer alan denklemlerin geniş simetrisi fiziksel çözümlerinin yeni teknikler geliştirilerek bulunmasını ve bu çözümlerin fiziksel özelliklerinin ve yerinin tartışılmasını hep yanında

taşımıştır. Tezde sırfi spinör alanlı iki model olan Thirring ve Gürsey model incelenmiş, özellikle Gürsey Model üzerinde durulmuştur. 1956 yılında Feza Gürsey tarafından önerilen Gürsey non-lineer spinör dalga denklemi [7, 16, 17] Heisenberg' in rüyasını [18] gerçekleştirmek maksadıyla düşünülmüş, konformal simetriye sahip ilk non-lineer spinör dalga denklemidir. Bu özelliklerinden dolayı, Gürsey non-lineer spinör dalga denklemi (GSM), Dirac denklemi ve Heisenberg ve arkadaşlarının önerdiği denklemlere göre daha geniş dinamik bir simetriye sahiptir. Ayrıca fermiyonlar dışındaki diğer spinli parçacıkların yapılaşmasına da açıktır.

2.7. Non-lineer Dinamik ve Kaos

Özellikleri belli kurallara uygun olarak zamanla değişiklik gösteren sistemlere *dinamik sistemler* denir. Dinamiğin tarihi ile ilgili özet bilgilerin yer aldığı bir tablo aşağıda verilmiştir [19].

1666	Newton	Hesabın (Analizin) icadı ve Gezegen hareketinin açıklanması
1700'ler		Analizin gelişimi ve Klasik Mekanik
1800'ler		Gezegen hareketi üzerine analitik çalışmalar
1890'lar	Pioncare	Geometrik yaklaşım, Kaosun filizlenmesi
1920-1950		Fizikte ve mühendislikte lineer olmayan osilatörler, radyo, radar ve lazerin icadı
1920-1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	Hamiltonyen mekanikte karmaşık (kompleks) davranış
1963	Lorenz	Konveksiyonun basit bir modelindeki acayip çekici
1970'ler	Ruelle&Takens	Türbülans ve kaos
	May	Lojistik haritadaki (map) kaos
	Feigenbaum	Evrensellik ve renormalizasyon, kaos ve faz geçişleri arasındaki bağlantı
		Kaosun deneysel çalışmaları
	Winfrey	Biyolojide lineer olmayan osilatörler
	Mandelbrot	Fraktallar
1980'ler		Kaos, fraktallar, osilatörler ve uygulamalarına yaygın ilgi

Zamanın sürekli olduğu durumlarda dinamik bir sistemi adi diferansiyel denklem sistemleri ile ifade edebiliriz. Dinamik bir sistemin evrimleşmesi sırasında tabi olduğu kuralların non-lineer yapıda olması oldukça önemlidir. Biliyoruz ki lineer yapıdaki modeller doğanın yapısı hakkında sınırlı bilgiler verebilir. Doğanın gerçek yapısı non-lineer özelliklere uygundur.

Non-lineer diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözümü çoğunlukla olanaksızdır. Non-lineer denklemlerin tam çözümlerinin olmaması, faz diyagramları ve çekicilerin non-lineer dinamik yapı hakkında bilgi vermesi nedeniyle; non-lineer denklem çözümlerinin dinamiği ve evrimi hakkında görüşe sahip olmak için, nümerik yöntemlere ve bu yöntemlerden elde edilen çözümlerin faz uzaylarına müracaat edilmektedir. Faz uzayını sistemimin değişkenleri inşa eder. Sistemimin her bir durumunu sisteme ait faz uzayında bir nokta ile temsil ederiz. Sistem zamanla evrimleşirken, sistemi faz uzayında temsil eden noktalar bir eğri belirler. Bu eğriye *faz eğrisi (trajectory)* denir. Faz uzayında bulunan her nokta sistem için bir başlangıç koşulu olarak alınabilir. Böyle olunca da sistemin faz eğrileri faz uzayını doldurur. Verilen bir faz eğrisi üzerinde bulunan faz uzayı noktalarının topluluğu ise *yörünge (orbit)* olarak bilinir. Değişik faz noktalarından başlayan ve sistemin karakteristik davranışlarını yansıtan faz yörüngelerinin topluluğu sistemin faz portresi olarak isimlendirilmektedir. Nonlineer bir dinamik sistem için faz yörüngelerinin analitik olarak elde edilmesi çoğunlukla söz konusu olmadığına göre, faz portresinin doğrudan sistemin değişkenlerinin özelliklerinden elde edilmesine çalışılır. Faz portrelerinin çizilmesinde farklı özelliklerdeki denge noktaları, periyodik faz yörüngeleri ve bunların kararlı/kararsız manifoldları önemli rol oynar. Faz portresi bize bütün olarak faz uzayının yapısı hakkında bilgi verir. Faz portreleri $f(x^*)=0$ ile tanımlanan x^* *sabit noktaları (fix point)* çerçevesinde inşa edilir ve bunlar denge çözümlerini temsil eder. Bu çözümlerin kararlılığı yani küçük bir pertürbasyon sonucunda durumlarını koruyup koruyamadıkları önemlidir. Bu çözümlerin kararlılığı faz eğrilerinin bunların yakın civarlarındaki davranışı ile ilgilidir [20].

Sistemin kontrol parametrelerinin değişimine bağlı olarak davranışını değiştirip başka bir uzun zaman davranışı göstermesine *bifürkasyon (bifurcation)* denir. Non-linear sistemlerin analizinde sistemin davranışını bir bifürkasyon noktası civarında taklit eden basit diferansiyel denklem sistemi bulunur. Bifürkasyonlar değişik çeşitleri vardır (Saddle-Node Bifürkasyon, Transkritik Bifürkasyon, Pitchfork Bifürkasyon, Hopf Bifürkasyon..).

Bir sistemin faz eğrileri çok karmaşık bir görünüm alabilir. Bu durumda sistemin davranışı hakkında konuşabilmek için, sistemin davranışının karakteristik özellikleri yansıtılmaya devam edilecek şekilde, yalınlaştırılmaların yapılması yoluna gidilir. Sistemde periyodik bir dış etki yoksa faz yörüngesinin, doğruya/düzleme teğet olmamasına dikkat edilerek, belli bir doğruyu veya bir düzlemi hep aynı yöne doğru geçerken kestiği noktalar göz önüne alınır. Bu noktaların tümüne faz yörüngesinin *Poincaré kesiti* denir[20].

Deney sonucu veya iterasyon yapılarak veya herhangi bir yolla elde edilen ve herhangi bir dinamik sistemin davranışını karakterize eden sayılar sistemin *zaman serisi* olarak isimlendirilir. Bunlar sistemi belirlemede kullandığımız değişkenlerin alabildiği değerlerdir. Zaman serisinin değişimini bu sayıların zamana veya iterasyon adımına göre grafiğini çizerek görebiliriz. Söz konusu değişim herhangi bir düzene göre olmuyor, tamamen rastgele düzensiz bir biçimde oluyorsa sistemin bu sayılarla belirlenen davranışı kaos gösterebilir. Zaman serisinde çok büyük sayıda sayısal değer vardır. Bu yüzden zaman serisinin içinde herhangi bir düzen barındırıp barındırmadığını yukarıda sözünü ettiğimiz grafiğe bakarak anlamak kolay değildir. Zaman serisinin içindeki düzenin, eğer varsa, varlığını anlamak için sistemin *otokorelasyon katsayısı* adı verilen boyutsuz bir büyüklük tanımlanır[20].

Kaos, deterministik bir dinamik sistemin, başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık gösteren ve genlik,periyot gibi fiziksel parametrelerin zaman içindeki gelişimi kestirilmeyen sonlu ve rastgele davranışları olarak tanımlanır. Deterministik olmayan ve dış etkilerin rastgele olduğu sistemler ise stokastik sistemlerdir. Kaotik davranış, bir sistemde doğan periyodik olmayan, kestirilmeyen ve başlangıç şartlarına hassas bağımlılık gösteren davranıştır.

Kaos teorisine göre, varlıkların ve yasaların basit, tahmin edilebilir bir kümesi; karmaşık ve kestirilmeyen bir sonuca sahip olabilir. Çok küçük değişimlerin daha büyük değişimlere yol açması kaosun önemli bir özelliğidir. Bunu örnekleri; hava durumu, borsa, damlayan bir musluk ya da bazen de insane kalbinin atışı olmak üzere kaos birçok yerde karşımıza çıkar.

Kaosun gerisindeki mekanizmaların anlaşılması, yalnızca suda yüzen bir yaprağın davranışı, düzensiz kalp atışları ve damlayan bir muslukta değil; evrenin küçük ve büyük ölçekte pek çok görünümünü anlamamıza da yardımcı olacaktır. Bu özelliği nedeniyle kaos teorisi bütün bilim dallarında yerini almıştır. Kaosun güzel örneklerini matematikte bulmak mümkündür. Görünüşte çok basit problemlerin çözümü son derece karmaşık davranışlar ortaya koymaktadır. Basit olmasına rağmen lineer olmayan bu tür problemlerin çözümü ancak bilgisayarların devreye girmesiyle kolaylaşmıştır. Bu nedenle kaos, bilgisayar çağının bilimi olarak adlandırılabilir. Tüm non-lineer problemler kaotik değildir ama tüm kaotik problemler non-lineerdir [21].

Tamamen determinist ve tamamen rasgele bir sürecin aynı yerde bulunduğu sistem *kompleks (karmaşık)* sistemdir. Karmaşıklığın büyük bir nedeni belirsizliktir. Bu iddia daha karmaşık bir sistemin tanımı daha detaylı olmalıdır varsayımına dayanır. Daha fazla değişken içerdiği anlamına gelir ve hepsinin birden bilinemeyebileceği anlamına gelir; bu yüzden bilgi eksiktir ve belirsizlik vardır. Karmaşıklık sistemin iç özelliği değildir. Karmaşık sistemler dengede değildir. Karmaşık problemler değişmez bir şekilde non-lineerlik içerir: non-lineer olaylar düzenli yada düzensiz olabilirler. Basit denklemler çok karışık dinamik sergileyebilir. Basit şeyler çok sarılmış helisel görünebiliyorsa, gerçek durumların neden bu kadar karmaşık olduğunu anlamak mümkündür. Karmaşıklık kendini şu şekilde ifade etmektedir [21]:

- 1) Karmaşıklık doğal ve insan yapımı sistemlerde ve sosyal yapılarda olabilir.
- 2) Karmaşık dinamik sistemler çok büyük, çok küçük yada her ikisi olabilir.
- 3) Fiziksel şekli düzenli veya düzensiz olabilir.
- 4) Enerji korunumlu veya dağıtıcı sistemlerde olabilir.

- 5) Sistem, ne tamamen deterministtir nede tamamen sıradandır. (Ikisi de aynı anda olabilir).
- 6) Sistemde olan olayların sebep ve etkileri orantılı değildir
- 7) Bu sistemlerin farklı kısımları zincirlenmişler ve birbirini sinerjik şekilde etkilerler.
- 8) Pozitif veya negatif geri itilim vardır.
- 9) Karmaşıklık düzeyi; sistemin karakterine, çevresine ve aralarındaki doğal etkileşmeye bağlıdır.
- 10) Karmaşık sistemler açıktır yani; çevresindekilerle madde, enerji ve bilgi alışverişi yaparlar.
- 11) Tersinmez (tersine çevrilmez) süreçler olmaya meyillidir.
- 12) Dengede değil dinamiktir. Hedefe değil, seyahate benzerler ve hareket eden hedefi izleyebilirler.
- 13) Çoğu karmaşık sistemler iyi hareketli değildir ve sık sık ani değişiklikler geçirirler bu da fonksiyonel ilişkilerin onların farklarının alınmadığını gösterir.
- 14) Paradokslar, hızlı ve yavaş olaylar, düzenli ve düzensiz formlar, organik ve inorganik yapılar mevcuttur.

Bütün karmaşık sistemler kaotik değildir. Karmaşık sistemin dinamiği değişebilir. Dinamik kararlılık durumuna göre: sabit, geçici yada kaotik olabilir. Non-lineer, dengesiz, determinist, dinamik olan, başlangıç koşullarına duyarlı, garip çekicilere ve pozitif *Lyapunov katsayılarına* sahip sisteme kaotiktir denir [21]. Kaosun ortaya çıkması için lineer olmayan denklemlerin faz yörüngelerinin başlangıç koşullarına duyarlı bağlılık gösterme özelliklerinin yanında bir de sonlu bir faz hacminin içinde kalma özelliklerinin bulunması gerekir. Başlangıç koşullarına duyarlı bağlılık özelliği nedeniyle aşırı yakın iki noktadan başlayan iki faz yörüngesi belli bir yerden sonra birbirinden üstel olarak uzaklaşacaktır. Bu da bu iki eğrinin hızla uzaması ile olur. Eğriler uzamasalar birbirinden hızla uzaklaşamazlardı. Bu durumda sonlu faz hacminin içinde kalmaları için geri dönmekten, yani geldikleri noktalara yakın noktaları izlemekten başka yapacakları birşey yoktur. Burada, deterministlik nedeniyle, bir faz yörüngesinin kendi kendisini kesmesinin ve farklı iki faz yörüngesinin birbirini kesmesinin söz konusu olmadığını

unutmamak gerekir. Bu koşullar altında faz yörüngeleri sonlu faz bölgesi içine sistemin non-lineerliğinin izin verdiği şekilde yerleşeceklerdir. Böylece oluşacak yumağın içyapısının nasıl olacağı kestirilemez. Faz noktaları sistemin durumlarını temsil ettiğine göre beklenmedik durumlar da birbirini izleyebilecektir. Faz eğrisinin uzaması gerilme (stretching) ve sonlu faz hacminin içinde geri dönmesi de katlanma (folding) olarak bilinir [20].

Çekicinin varlığı nedeniyle kaostaki düzensizlik rastgele bir düzensizlik değildir. Çekicinin varlığı sistemin uzun süreli davranışlarını temsil eden faz yörüngelerinin düşük boyutlu faz alt-uzayları üzerine kilitlenmesi demektir. En genel halde üç tür çekiciden bahsedilebilir: nokta çekiciler, periyodik çekiciler ve garip çekiciler. Eğer çekiciler *fraktal* yapıdaysa bunlara *garip çekiciler* adı verilir. Fraktal yapıdaki bir oluşumun yapısı ölçekten bağımsızdır. Yani söz konusu oluşumun içinde aynı bir motifin her ölçekteki benzerleri yer almaktadır. Kaos kuramının kurucularından olan Mandelbrot, geometride kullandığımız düzenli biçimlerin gerçek dünya ile çelişmesini vurgulayarak 1960' larda kaos manzarasının geometrisi olan fraktalleri keşfetmiştir.

Bir sistemin kaotik olması için [19,21];

- Sistem non-lineer, zaman serileri düzensiz olmalı.
- Sistemin davranışı başlangıç şartlarına duyarlı olmalı.
- Sistemin garip çekicisi olmalı; genelde bu fraktal boyuta sahip olacağı anlamına gelir.
- Lypanov katsayıları pozitif olmalıdır.
- Dağıtıcı sistemlerde Kolmogrov entropisi pozitif olmalıdır.

Daha öncede bahsettiğimiz gibi lineer yapıda olan teori ve modeller doğanın yapısına tam olarak uygun değildir. Doğa non-lineer yapıdadır. Dolayısıyla doğanın gerçek yapısını anlama ve incelemede non-lineer yapıdaki teori ve modeller büyük önem teşkil eder.

III. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. Duffing Denklemi

Duffing denklemi kaotik davranışlar sergileyen dinamik bir sisteme örnek teşkil eden ünlü bir non-lineer diferansiyel denklemdir [22]. Duffing denkleminin çeşitli formları birçok non-lineer sistemi tanımlamak için kullanılmaktadır. Denklemin en genel formu;

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} \pm \omega_0^2 x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t + \phi) \quad (3.1)$$

şeklindedir. Sönüm (damping) ve kuvvet (forcing) terimlerini almadığımızda yani $\gamma = \delta = 0$ için

$$\ddot{x} \pm \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3.2)$$

elde ederiz. Bu denklem parametre seçimlerine bağlı olarak kaotik davranışlar sergiler. Denklemi birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemi olarak

$$\begin{aligned} \dot{F} &= G \\ \dot{G} + \beta F^3 - \omega_0^2 F &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Duffing denklemi bizim için üzerinde çalıştığımız non-lineer spinör alanlı modellerin dinamiğini anlamak için bir test model işlevi görmektedir.

Duffing denkleminin sabit noktalarını bulmak için aşağıdaki eşitlemeyi yaparız.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = 0 \\ \dot{y} &= w_0^2 x - \beta x^3 = 0\end{aligned}\tag{3.4}$$

En genel halde sabit noktaları;

$$\left\{ x \rightarrow -\frac{w}{\sqrt{\beta}}, y \rightarrow 0 \right\}; \left\{ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \right\}; x \rightarrow \left\{ \frac{w}{\sqrt{\beta}}, y \rightarrow 0 \right\}\tag{3.5}$$

olarak buluruz.

$w = 1, \beta = 1$ olarak alırsak sabit noktaları

$$\left\{ x \rightarrow -1, y \rightarrow 0 \right\}; \left\{ x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \right\}; \left\{ x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \right\}\tag{3.6}$$

şeklinde elde ederiz.

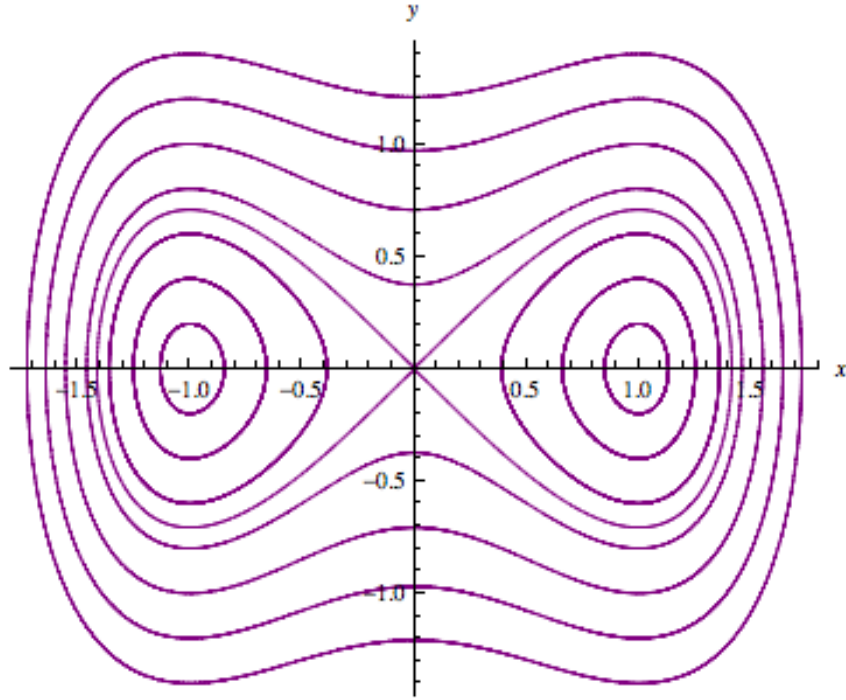
Şimdi denklemlerimizi lineerize ederek bulduğumuz sabit noktaların kararlılık analizine bakalım. Duffing denklem sistemimizin türevini alırsak;

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{y} \\ \ddot{y} &= \dot{x}(1 - 3x^2)\end{aligned}\tag{3.7}$$

elde ederiz. Bulduğumuz ifadeyi matris formatında yazarsak;

$$\begin{pmatrix} \dot{x}'' \\ \dot{y}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\tag{3.8}$$

olarak buluruz. Bulduğumuz sabit noktalar için özdeğerleri w ve β ' ya bağlı olarak hesapladığımızda $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{w^2 - 3x^2\beta}$ olarak buluruz. Bu durumda $(0,0)$ sabit noktası için özdeğer reel diğer durumlarda kompleks çıkar ki bu o noktalar civarında sistemin kararlı davranışlar sergilediğini gösterir. Aşağıda sistemin mathematica kullanılarak çizdiğimiz faz uzayı yer almaktadır ($w = 1, \beta = 1$ olarak alınmıştır).



Şekil 3.1. Duffing Faz Uzayı

3.2. Gürsey Non-Linear Spinör Alan Modeli

Model 1956 yılında Feza Gürsey tarafından Heisenberg ve arkadaşlarının rüyasını gerçekleştirmek amacıyla (ünlü Heisenberg Dream) önerilmiştir. Dört boyutlu ve konformal invaryantlığa sahip ilk non-linear spinör dalga denklemdir (Konformal Dönüşüm Grubu Ek A da verilmiştir) [7,16,17]. Bu özelliklerinden dolayı Dirac denklemi ve Heisenberg ve arkadaşlarının önerdiği denklemlere göre daha geniş bir simetriye sahiptir. Gürsey 1956 yılında önerdiği bu modelle spinör alan teorilerinde konformal invaryanslığı deneyen ilk fizikçi olmuştur. Daha sonraki yıllarda Kortel Gürsey non-linear spinör alan denkleminin eliptik bir çözüm sınıfını bulmuş [17], Akdeniz ise yaptığı çalışmada Gürsey non-linear spinör alan denkleminde $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$ seçilmesiyle konformal simetrisinin kendiliğinden kırılması yöntemini kullanarak Gürsey instantonlarını bulmuştur [16].

Feza Gürsey tarafından 1956 yılında önerilmiş olan bu modelin Lagrange fonksiyonu;

$$L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + g (\bar{\psi} \psi)^{\frac{4}{3}} \quad (3.9)$$

dir. Burada g bağlantı sabiti boyutsuz bir parametre ($g > 0$), γ_{μ} ise dört boyutlu Dirac matrisleridir.

Lagrange formalizminden

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \partial_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial_{\mu} \psi} \right) \quad (3.10)$$

elde edilen modelin hareket denklemi,

$$(i \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi) + g (\bar{\psi} \psi)^{1/3} \psi = 0 \quad (3.11)$$

dir.

Burada ψ spinör alan, g ise boyutsuz bağlantı sabitidir.

1956 yılında Kortel tarafından Gürsey Model’de bir çözüm sınıfı bulmak için kullanılan Heisenberg ön çözümü [18]; c keyfi bir spinör sabiti, $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ reel fonksiyonlar ve $s = x^2 + t^2$ olmak üzere

$$\psi = [ix_\mu \gamma_\mu \chi(s) + \varphi(s)] c \quad (3.12)$$

şeklinindedir. Modelin hareket denkleminin ön çözümü uygulanıp, Dirac matrisli türev operatörü ifadesi hesaplanırsa (Dirac matrislerinin özellikleri Ek B de açık olarak verilmiştir).

$$i \not{\partial} \psi = i \gamma_\mu \partial_\mu \psi = \left[-4\chi(s) - 2s \frac{d\chi(s)}{ds} + 2ix_\mu \gamma_\mu \frac{d\varphi}{ds} \right] \bar{c} c \quad (3.13)$$

ve

$$(\bar{\psi} \psi)^{\frac{1}{3}} = (s \chi(s)^2 + \varphi(s)^2)^{\frac{1}{3}} (\bar{c} c)^{\frac{1}{3}} \quad (3.14)$$

ifdeleri yerleştirilirse Gürsey model için $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ ye bağlı lineer olmayan aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$$2s \dot{\chi}(s) + 4\chi(s) - g(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} \varphi(s) (s\chi^2(s) + \varphi^2(s))^{\frac{1}{3}} \quad (3.15)$$

$$2\dot{\varphi}(s) + g(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} \chi(s) (s\chi^2(s) + \varphi^2(s))^{\frac{1}{3}}$$

$\chi = A s^{-\sigma} F(z)$, $\varphi = B s^{-\tau} G(z)$ ve $z = \ln s$ ifadeleri tanımlanarak boyutsuzlaştırma işlemi gerçekleştirilebilir [17]. Türev ifadelerini hesaplayıp yerine yazdığımızda ve

gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda Gürsey model için F ve G ye bağlı boyutsuz lineer olmayan denklem sistemini

$$\begin{aligned} 2\dot{F}(z) + \frac{3}{2}F(z) - g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}}G(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} &= 0 \\ 2\dot{G}(z) - \frac{3}{2}G(z) + g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}}F(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şeklinde elde ederiz ($A^2 = B^2$, $\sigma = \tau + \frac{1}{2}$ ve $\tau = \frac{3}{4}$).

3.3. Thirring Non-Linear Spinör Alan Modeli

Model 1958 yılında Walter Thirring tarafından önerilmiştir. İki boyutlu, konformal invaryantlığa sahip bir modeldir (Konformal Dönüşüm Grubu Ek A da verilmiştir) [13,14]. Kuantum Alanlar Teorisinde bir test model olarak önemli bir rol oynar. Daha sonraki yıllarda Akdeniz ve Smalagaic yaptıkları çalışma ile Thirring non-linear spinör alan denkleminde $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$ seçilmesiyle konformal simetrisinin kendiliğinden kırılması yöntemini kullanarak Thirring instantonlarını bulmuştur [14].

Walter Thirring tarafından 1958 yılında önerilmiş olan bu modelin Lagrange fonksiyonu;

$$L = i\bar{\psi}\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \quad (3.17)$$

dir. Burada g bağlantı sabiti boyutsuz bir parametre ($g>0$), σ_{μ} ise iki boyutlu Pauli spin matrisleridir.

(3.2) ile verilen Lagrange formalizminden elde edilen modelin hareket denklemi,

$$i\sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi + g(\bar{\psi}\psi)\psi = 0 \quad (3.18)$$

dir.

1956 yılında Kortel tarafından Gürsey Model’de bir çözüm sınıfı bulmak için kullanılan Heisenberg ön çözümü [18]; c keyfi bir spinör sabiti, $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ reel fonksiyonlar ve $s = x^2 + t^2$ olmak üzere

$$\psi = [ix_\mu \gamma_\mu \chi(s) + \varphi(s)] c \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Modelin hareket denkleminde ön çözüm uygulanıp, Pauli spin matrisli türev operatörü ifadesi hesaplanırsa (Pauli spin matrislerinin özellikleri Ek B de açık olarak verilmiştir)

$$i \not{\partial} \psi = i \sigma_\mu \partial_\mu \psi = \left[-2\chi(s) - 2s \frac{d\chi(s)}{ds} + 2ix_\mu \sigma_\mu \frac{d\varphi}{ds} \right] \bar{c} c \quad (3.19)$$

ve

$$(\bar{\psi} \psi) = (s \chi(s)^2 + \varphi(s)^2) (\bar{c} c) \quad (3.20)$$

ifadeleri yerleştirilirse Thirring model için $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ ye bağlı lineer olmayan aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$$\chi + s \frac{d\chi}{ds} + g(\bar{c}c) [s \chi^2 + \varphi^2] \varphi = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} - g(\bar{c}c) [s \chi^2 + \varphi^2] \chi = 0$$

$\chi = A s^{-\sigma} F(z)$, $\varphi = B s^{-\tau} G(z)$ ve $z = \ln s$ ifadeleri tanımlanarak boyutsuzlaştırma işlemi gerçekleştirilebilir [17]. Türev ifadelerini hesaplayıp yerine yazdığımızda ve

gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda Thirring model için F ve G ye bağlı boyutsuz lineer olmayan denklem sistemini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} 2\dot{F}(z) + \frac{1}{2}F(z) - gAB(\bar{c}c)G(z)(F^2(z) + G^2(z)) &= 0 \\ 2\dot{G}(z) - \frac{1}{2}G(z) + gAB(\bar{c}c)F(z)(F^2(z) + G^2(z)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.4. Gürsey ve Thirring Instantonları için Sabit Noktaların Bulunması ve Kararlılık Analizi

Gürsey ve Thirring denklem sistemlerinde $F = x$, $G = y$ ve $g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha$ tanımlamalarını yaparsak Gürsey model için;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}y \\ \dot{y} &= \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}x \end{aligned} \quad (3.23)$$

ve Thirring model için;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]y \\ \dot{y} &= \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]x \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğunu kolayca görebiliriz.

Her iki modelin yukarıda verilen kuple diferansiyel denklem sistemlerinin sabit noktalarını aşağıdaki eşitlemeyi yaparak bulabiliriz.

Gürsey model için;

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}y = 0 \quad (3.25)$$

$$\dot{y} = \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}x = 0$$

ve Thirring model için;

$$\dot{x} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]y = 0 \quad (3.26)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]x = 0$$

Her iki modelin sabit noktaları Mathematica kullanılarak sırasıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur;

$\alpha = 1$ olduğu Gürsey instantonları [7,16,22] için;

$\alpha = 1$

$$\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}, \left\{x \rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{4}, y \rightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4}, y \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4}\right\} \quad (3.27)$$

bulunur. Gürsey instantonları civarındaki duruma baktığımızda

$\alpha = 1.2$

$$\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}, \left\{x \rightarrow -\frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}, y \rightarrow -\frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}, y \rightarrow \frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}\right\} \quad (3.28)$$

$\alpha = 0.7$

$$\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\}, \left\{x \rightarrow -\frac{15\sqrt{\frac{15}{14}}}{7}, y \rightarrow -\frac{15\sqrt{\frac{15}{14}}}{7}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{15\sqrt{\frac{15}{14}}}{7}, y \rightarrow \frac{15\sqrt{\frac{15}{14}}}{7}\right\} \quad (3.29)$$

olarak buluruz. $\alpha = 1$ olduğu Thirring instantonları [13,14,23] için;

$$\alpha = 1$$

$$\left\{x \rightarrow -\frac{1}{2}, y \rightarrow -\frac{1}{2}\right\}, \left\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{1}{2}, y \rightarrow \frac{1}{2}\right\} \quad (3.30)$$

bulunur. Thirring instantonları civarındaki durum için

$$\alpha = 1.2$$

$$\left\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\right\}, \left\{x \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}, y \rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}, y \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}\right\} \quad (3.31)$$

$$\alpha = 0.7$$

$$\left\{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0\right\}, \left\{x \rightarrow -\sqrt{\frac{5}{14}}, y \rightarrow -\sqrt{\frac{5}{14}}\right\}, \left\{x \rightarrow \sqrt{\frac{5}{14}}, y \rightarrow \sqrt{\frac{5}{14}}\right\} \quad (3.32)$$

olarak bulunur.

Şimdi denklemlerimizi lineerize ederek bulduğumuz sabit noktaların kararlılık analizine bakalım. Gürsey diferansiyel denklem sistemimizin türevini alalım;

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{3}{4}x' + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}y' + \frac{\alpha y [2xx' + 2yy']}{6[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} \\ y'' &= \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]^{\frac{1}{3}}x' + \frac{\alpha x [2xx' + 2yy']}{6[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde ederiz. Bulduğumuz ifadeyi matris formatında yazarsak;

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{\alpha xy}{3[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} & \frac{\alpha y^2}{3[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \\ -\frac{\alpha x^2}{3[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} & \frac{3}{4} - \frac{\alpha xy}{3[x^2 + y^2]^{\frac{2}{3}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

olur. α 'nın değerlerine göre daha önce bulduğumuz sabit noktalar için özdeğerleri hesaplırsak $\alpha = 1$ olduğu Gürsey instantonları için;

$$\alpha = 1 \quad \text{için} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad (3.35)$$

olarak hesaplanır. Gürsey instantonları [7,16,22] civarındaki durum için ise

$$\alpha = 1.2 \quad \text{için} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{-5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}, \frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} \right) = \pm 0.872019i \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8}, \frac{5\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} \right) = \pm 0.872019i \quad (3.36)$$

$$\alpha = 0.7 \quad \text{için} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{-15\sqrt{\frac{15}{4}}}{7}, \frac{15\sqrt{\frac{15}{4}}}{7} \right) = \pm 0.85042i \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{15\sqrt{\frac{15}{4}}}{7}, \frac{15\sqrt{\frac{15}{4}}}{7} \right) = \pm 0.85042i \quad (3.37)$$

buluruz. Tüm özdeğerlerimizi kompleks bulduk. Sabit noktalarımız sırfi kompleks özedeğerlere sahip olduğundan bu noktalara eliptik sabit noktalar deriz ve eliptik sabit noktalar için sabit noktalar civarında kararlı dairesel yörüngeler söz konusudur. Yani bu noktalar civarında sistemin kararlı davranışlar sergilediği sonucuna varırız [23].

Gürsey instantonları için yaptıklarımızın aynısını iki boyutlu Thirring instantonları için uygulayalım. Thirring diferansiyel denkleminin bir daha türevini alırsak;

$$\begin{aligned}
x'' &= -\frac{1}{4}x' + \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]y' + \frac{1}{2}\alpha y [2xx' + 2yy'] \\
y'' &= \frac{1}{4}y' - \frac{1}{2}\alpha [x^2 + y^2]x' - \frac{1}{2}\alpha x [2xx' + 2yy']
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde ederiz. Bunu matris formatında aşağıdaki gibi yazarız.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \alpha xy & \alpha y^2 + \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2) \\ -\alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2) & \frac{1}{4} - \alpha xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

α 'nın değerlerine göre daha önce bulduğumuz sabit noktalar için özdeğerleri hesaplırsak

$\alpha = 1$ olduğu Thirring instantonları [13,14,23] için;

$$\alpha = 1 \text{ için } \lambda_{\pm} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{i}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \pm \frac{i}{2} \tag{3.40}$$

olarak hesaplanır. Thirring instantonları civarındaki durum için ise

$$\alpha = 1.2 \text{ için } \lambda_{\pm} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \pm 0.51031i \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \pm 0.51031i \tag{3.41}$$

$$\alpha = 0.7 \text{ için } \lambda_{\pm} \left(-\sqrt{\frac{5}{14}}, -\sqrt{\frac{5}{14}} \right) = \pm 0.472456i \quad \text{ve} \quad \lambda_{\pm} \left(\sqrt{\frac{5}{14}}, \sqrt{\frac{5}{14}} \right) = \pm 0.472456i \tag{3.42}$$

buluruz. Gürsey instantonlarında da olduğu gibi Thirring instantonları için de α 'nın yukarıda aldığımız değerlerinin herbiri için sabit noktaların kompleks özdeğerlere sahip olduğunu bulduk. Bu sabit noktaların karakteristiği eliptiktir ve civarlarında sistem kararlı davranışlar sergiler [24].

Sabit noktaların yanısıra sistemin karakteristik davranışının analizine bakmakta mümkün. En genel halde, Gürsey instantonları için;

$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{9 - \frac{16\alpha FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{80}{3} \alpha^2 (F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (3.43)$$

Thirring instantonları için;

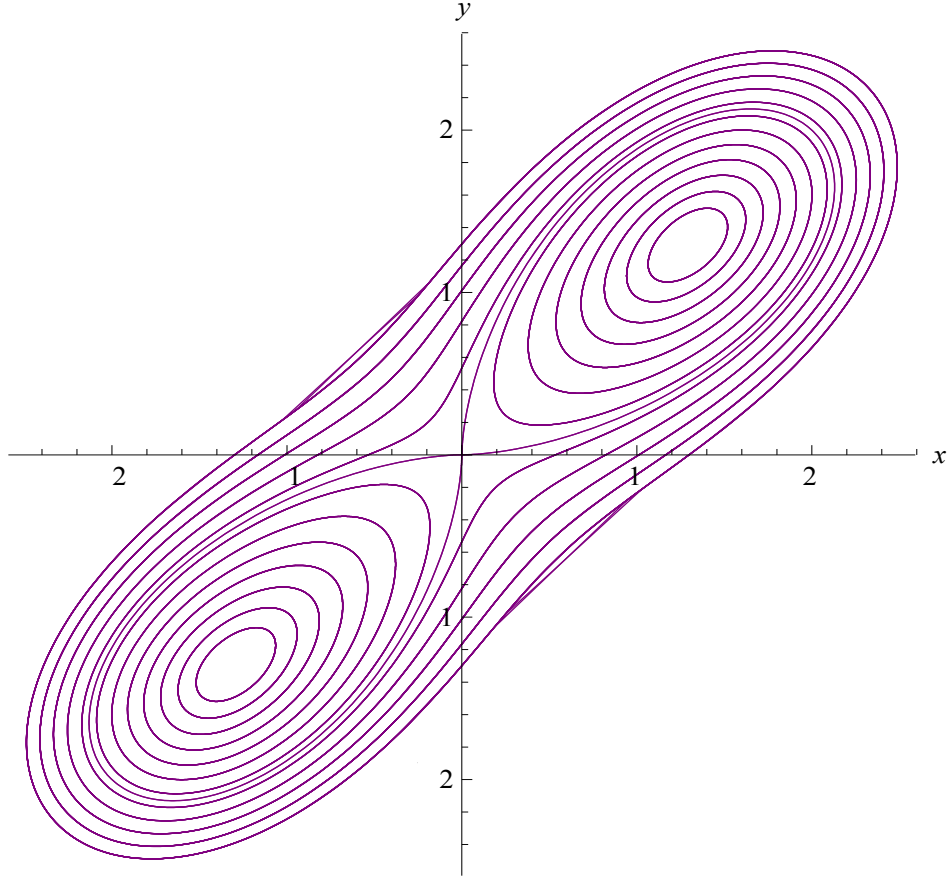
$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 8\alpha FG - 12\alpha^2 (F^2 + G^2)^2} \quad (3.44)$$

bulunur.

Her iki modelimiz için de sabit noktaların α 'ya bağlı ifadelerini yerine yazıp α 'nın sıfırdan büyük olduğu değerler için karakök içini tarattığımızda, Gürsey instantonları için -12 ve Thirring instantonları için -4 değerini elde ederiz. Yani her iki model için de bulduğumuz özdeğerler kompleks olur. Bu da bize her iki modelde de sistemimizin bu değerler için sabit noktalar civarında kararlı bir davranış seğılediğini gösterir.

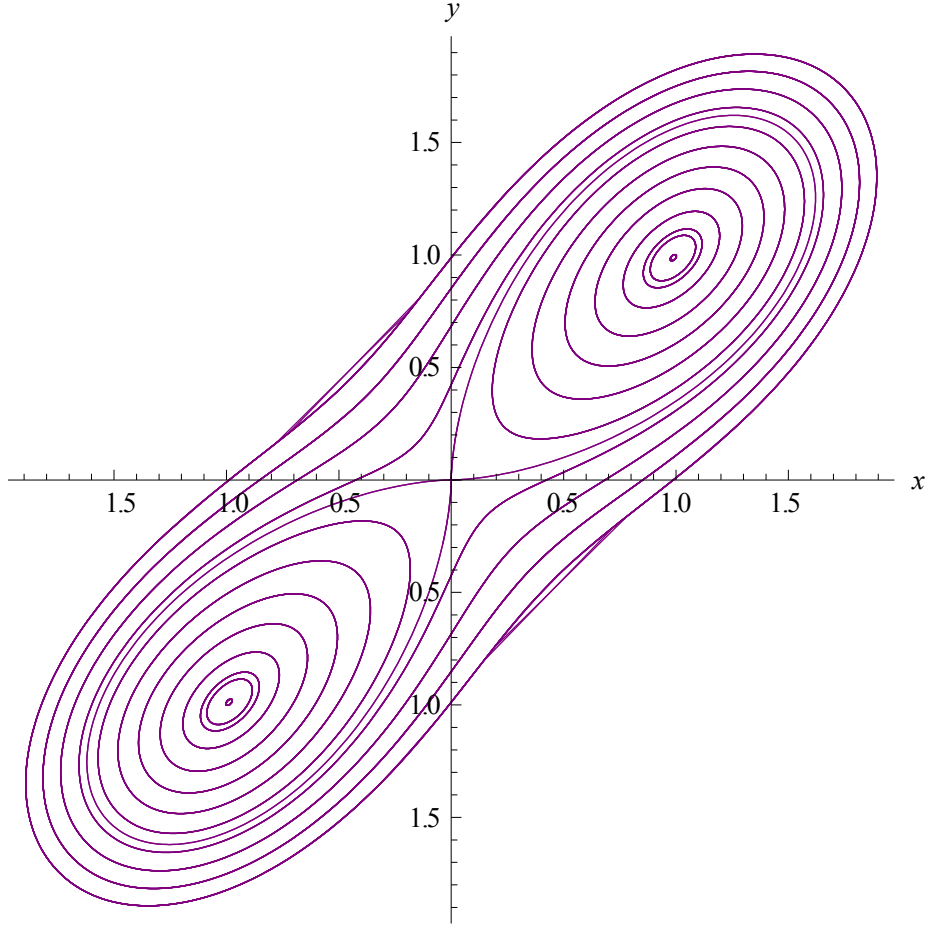
3.5. Gürsey ve Thirring İntantonlarının Faz Uzayı Davranışları

Gürsey instantonlarının $\alpha = 1$ olduğu durum ve civarındaki değerlerinin herbiri için Mathematica da çizilen faz uzayları aşağıdaki gibi bulunmuştur. Zamanı sürekli aldığımızda dinamik sistemlerin evrimini diferansiyel denklemlerle ifade edebiliriz.



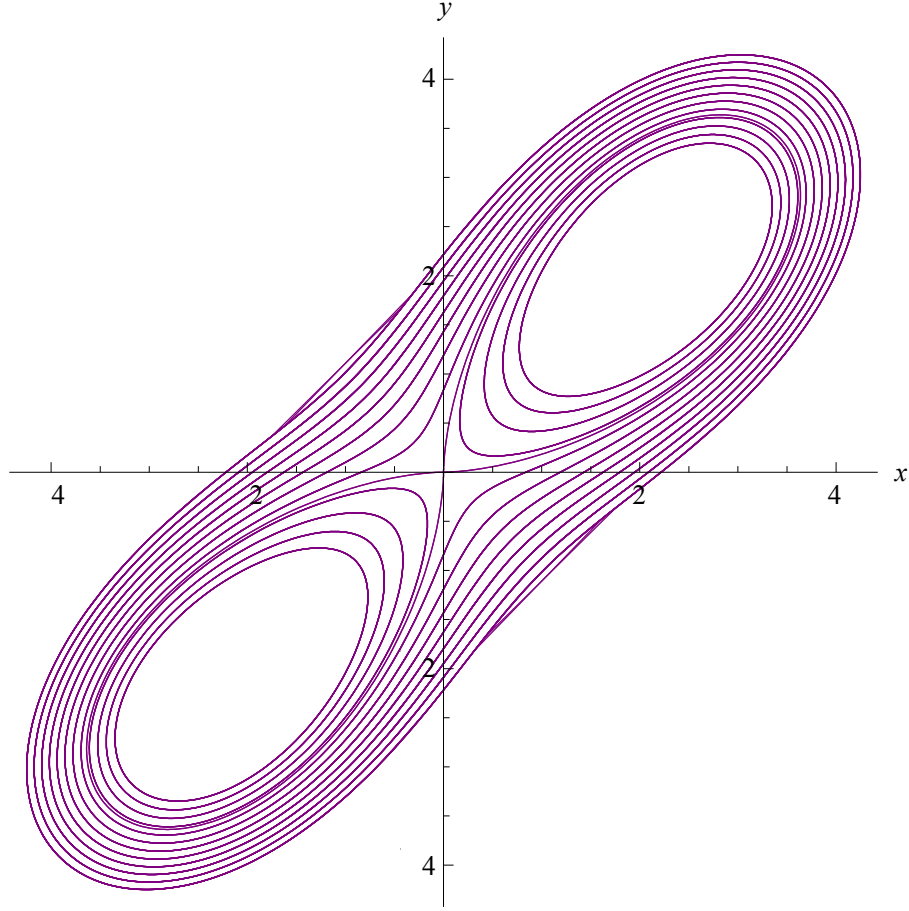
Şekil 3.2. Gürsey instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha = 1$

Şekil $\alpha=1$ olduğu durum için çizilmiş $F(z)-G(z)$ faz uzayıdır ve bize Gürsey instantonlarının faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilediğini göstermektedir [23]. Bağlantı sabitinin bire eşit olduğu durum için daha önce yapılan çalışmada [16] Gürsey instantonlarının kararlı olduğu, $\langle 0 | \bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle \neq 0$ vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi suretiyle konformal simetrinin kendiliğinden kırılması yöntemiyle bulunmuştur. Ayrıca daha önce $\alpha=1$ olduğu durum için farklı bir şekilde kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların kararlılığını faz uzayına baktığımızda da görebiliriz.



Şekil 3.3. $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha = 1.2$

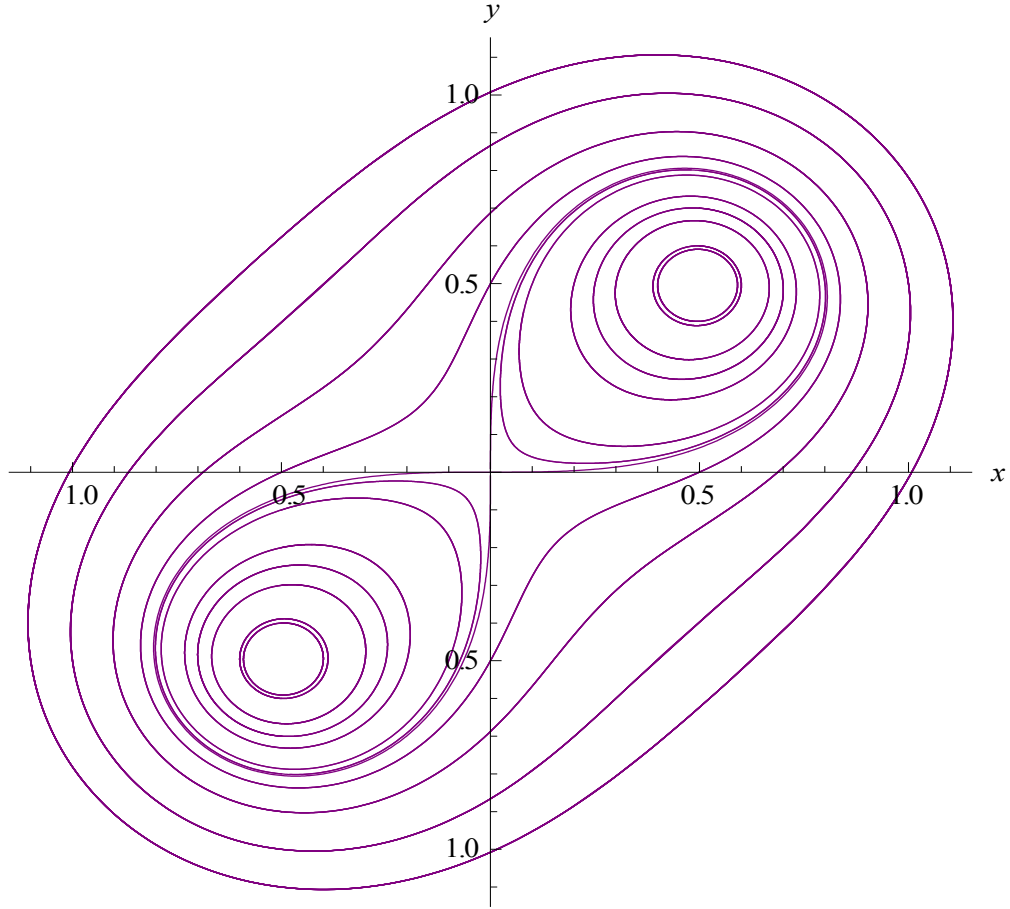
Yukarıdaki şekil $\alpha=1.2$ olduğu Gürsey instantonları civarındaki durum için çizilmiştir. Şekilden modelin α 'nın bu değeri için de faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam ettiğini görmekteyiz. Yine $\alpha=1.2$ için de daha önce kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların, faz uzayına baktığımızda da kararlı olduğunu görmekteyiz.



Şekil 3.4. $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha = 0.7$

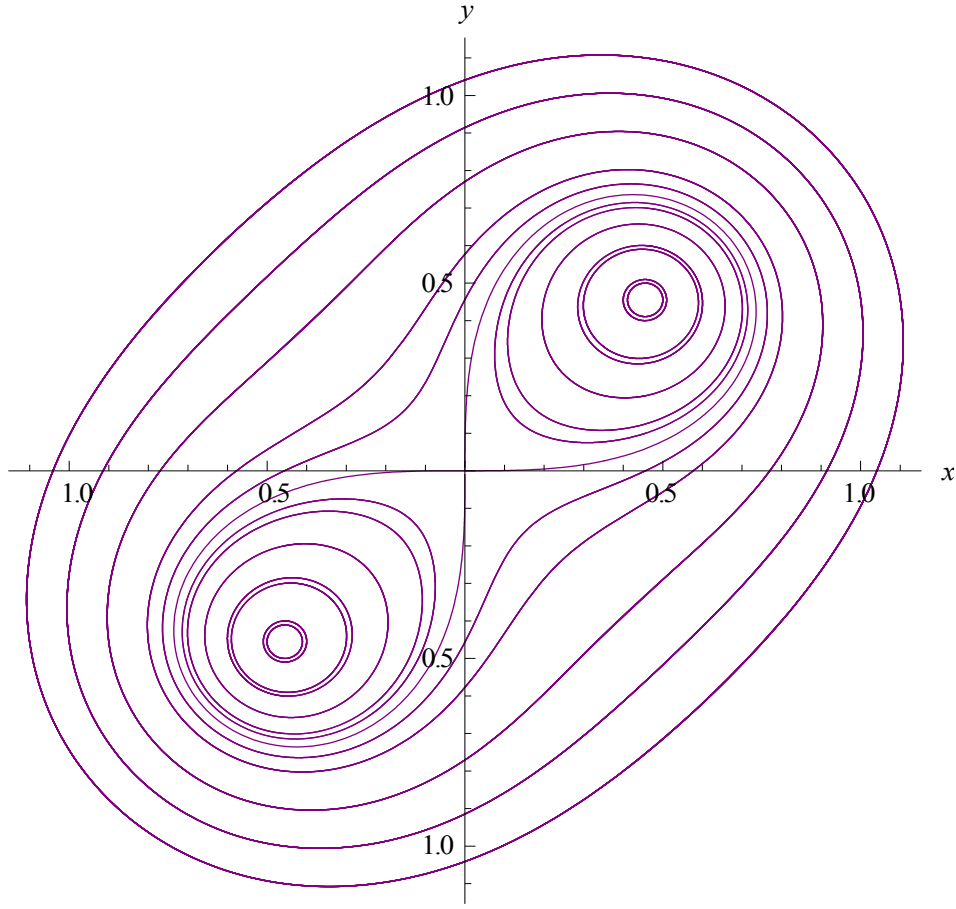
Gürsey instantonları civarında çizdiğimiz son şekil ise bize $\alpha=0.7$ için $F(z)-G(z)$ faz uzayını vermektedir. α 'nın birden küçük olduğu değer için de sistem Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam etmektedir. $\alpha=0.7$ için bulduğumuz sabit noktaların kararlı olduğu şekilden de görülmektedir.

Thirring instantonları için α 'nın değerlerine göre Mathematica da çizdiğimiz faz uzaylarını aşağıdaki gibi bulduk.



Şekil 3.5. Thirring instantonları için $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1$

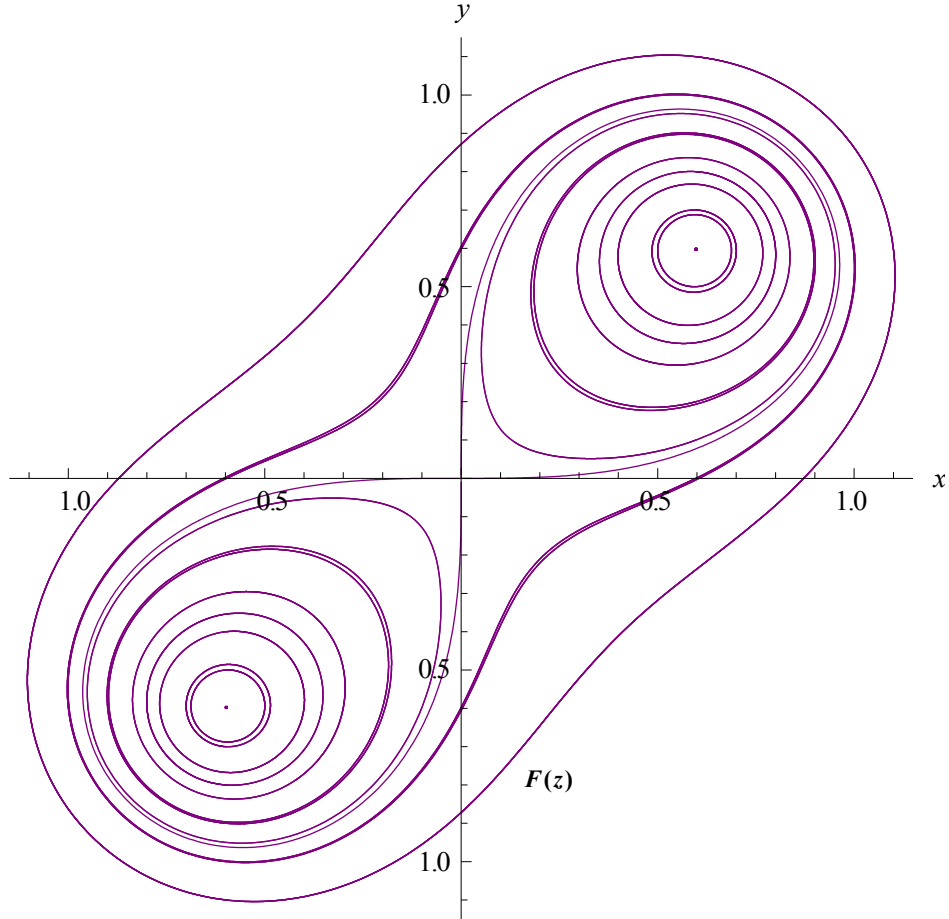
Şekil bize $\alpha = 1$ olduğu Thirring instantonlarının faz uzayında Gürsey instantonları gibi Duffing tipi davranışlar sergilediğini göstermektedir. Bağlantı sabitinin bire eşit olduğu durum için daha önce yapılan çalışmada [14] Thirring instantonlarının kararlı olduğu, $\langle 0 | \bar{\Psi}\Psi | 0 \rangle \neq 0$ vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi suretiyle konformal simetrinin kendiliğinden kırılması yöntemiyle bulunmuştur. Yukarıda $\alpha=1$ olduğu durum için farklı bir metodla kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların, faz uzayına baktığımızda da kararlı olduğunu görmekteyiz [24].



Şekil 3.6. $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1.2$

Yukarıdaki şekil $\alpha=1.2$ olduğu Thirring instantonları civarı durum için çizilmiş $F(z)-G(z)$ faz uzayıdır. Şekilden sistemin α 'nın bu değeri için de faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam ettiğini görmekteyiz ve yine $\alpha=1.2$ için de daha önce kararlı olduğunu bulduğumuz sabit noktaların, faz uzayına baktığımızda da kararlı olduğunu teyit etmektedir. Thirring model için çizdiğimiz son şekil ise bize $\alpha=0.7$ için $F(z)-G(z)$ faz uzayını vermektedir. α 'nın birden küçük olduğu değer için de sistem

Duffing tipi davranışlar sergilemeye devam etmektedir. Ayrıca faz uzayına bakarak $\alpha=0.7$ için daha önce kararlı olduğunu gösterdiğimiz sabit noktaların kararlılığını teyit edebiliriz.



Şekil 3.7. $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 0.7$

IV. BULGULAR

4.1. Gürsey ve Thirring İntantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması

Tablo 4.1. de Mathematica kullanarak çizdiğimiz Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzaylarının bir arada gösterildiği özet bir tablo verilmiştir. İki model için elde ettiğimiz faz uzaylarını karşılaştırdığımızda öncelikle Gürsey ve Thirring instantonlarının bağlantı sabitinin (α) farklı değerleri için çizilmiş $F(z)$ - $G(z)$ faz uzaylarında Duffing tipi davranışlar sergilediğini görürüz. Burada Duffing [22] bizim için bir test model işlevi görmektedir. Duffing denklemi ve faz uzayı göz önüne alındığında her iki model instantonlarımızın faz uzaylarında Duffing tipi davranışlar sergilediği aşikardır.

Duffing denkleminin genel formu;

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} \pm w_0^2 x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t + \phi)$$

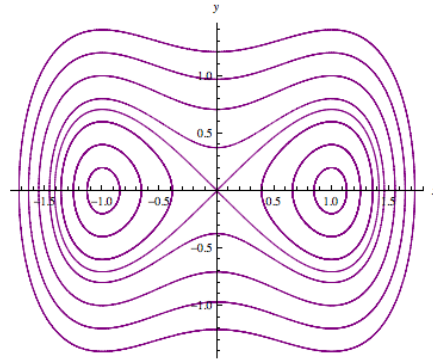
şeklindedir. $\gamma = \delta = 0$ için $\ddot{x} \pm w_0^2 x + \beta x^3 = 0$ olur.

Bu denklem birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir;

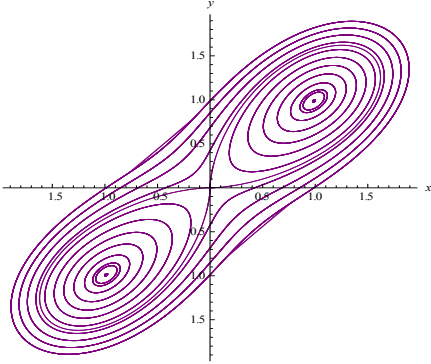
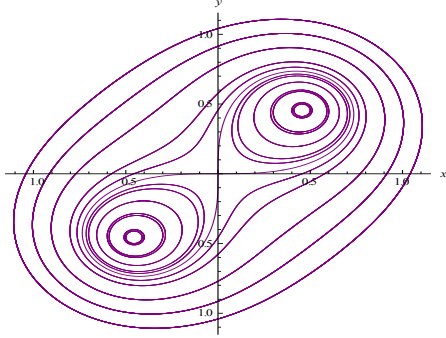
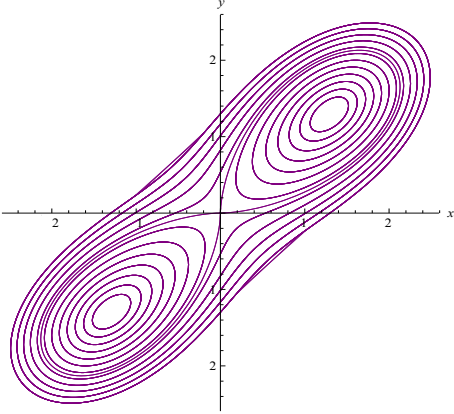
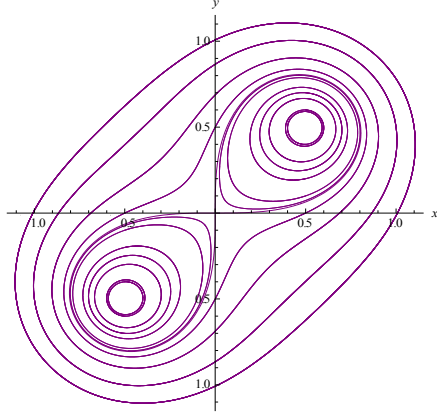
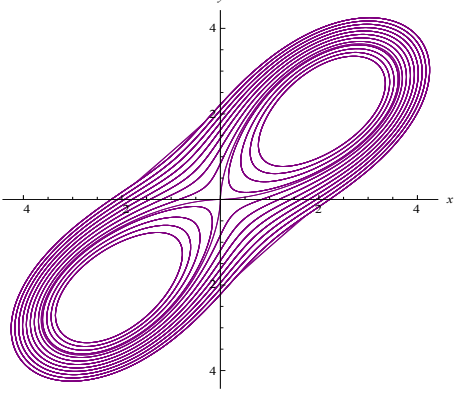
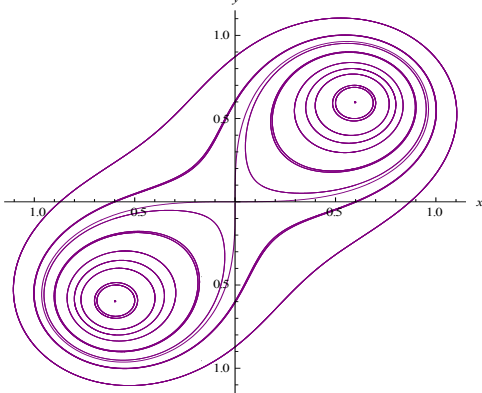
$$\dot{u} = v$$

$$\dot{v} = w_0^2 u - \beta u^3$$

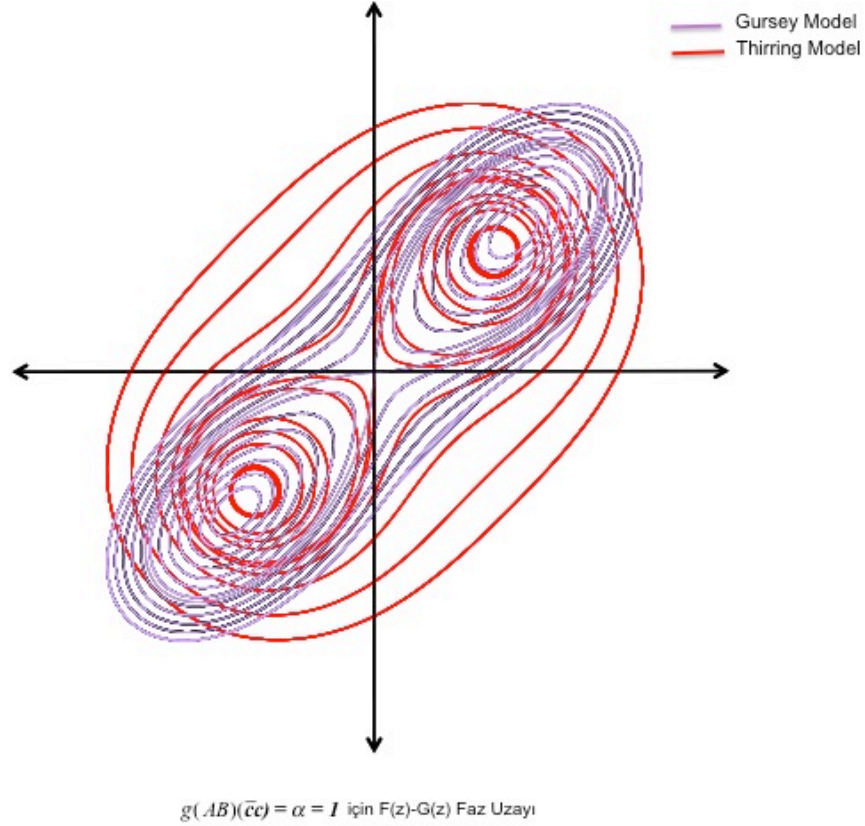
Duffing denkleminin faz uzayı da aşağıdaki gibidir;



Tablo 4.1. Gürsey ve Thirring Instantonlarının Faz Uzayı Davranışlarının Karşılaştırılması

	GÜRSEY MODEL	THIRRING MODEL
$\alpha = 1.2$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzayı		
$\alpha = 1$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzayı		
$\alpha = 0.7$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzayı		

Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzayındaki davranışlarının benzerliğini daha iyi gözlemleyebilmek için bağlantı sabitinin bir olduğu durumda ($\alpha=1$) iki model için ayrı ayrı çizdiğimiz faz uzaylarını eksenlerini çakıştırmak suretiyle üstüste çizdirelim. Bu durumda aşağıdaki şekli elde ederiz ki iki model instantonlarının davranışlarında sergilediği benzerlik daha aşikar bir hal alır.

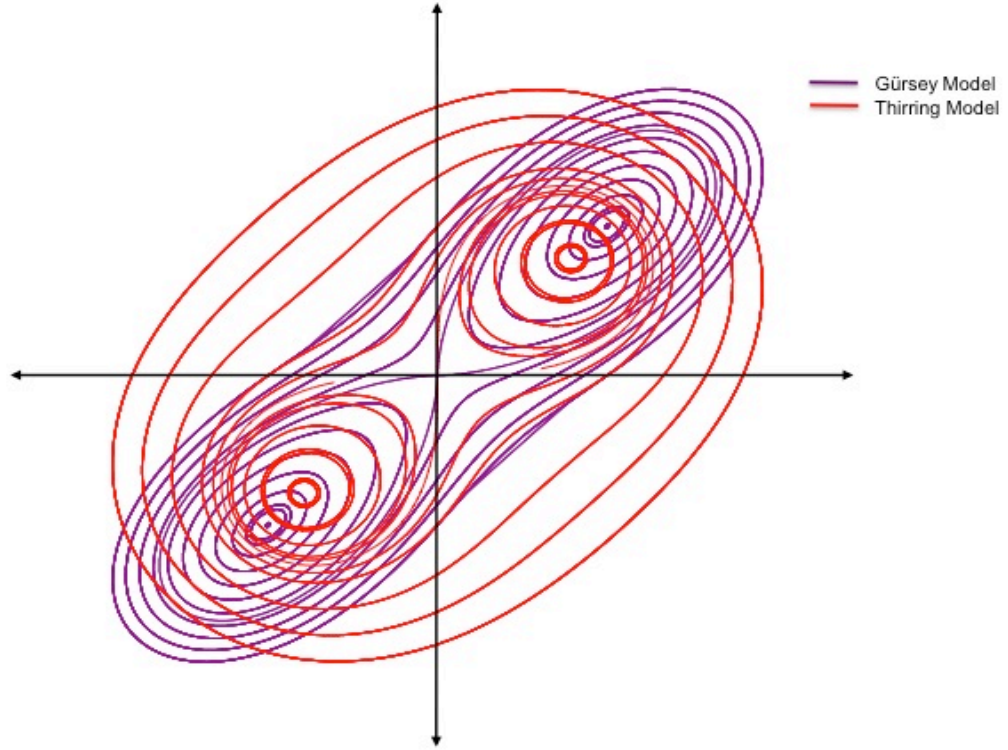


Şekil 4.1. $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı

Bağlantı sabitinin bire eşit olduğu durumun [Gürsey instantonları için $g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha = 1$ ve Thirring instantonları için $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1$] bizim için ayrı bir önemi vardır. Çünkü bu değer için daha önce yapılan çalışmalarda [14,16] Gürsey ve Thirring modellerinin kararlı instanton çözümlerine sahip olduğu, $\langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle \neq 0$ vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi suretiyle konformal simetrinin kendiliğinden

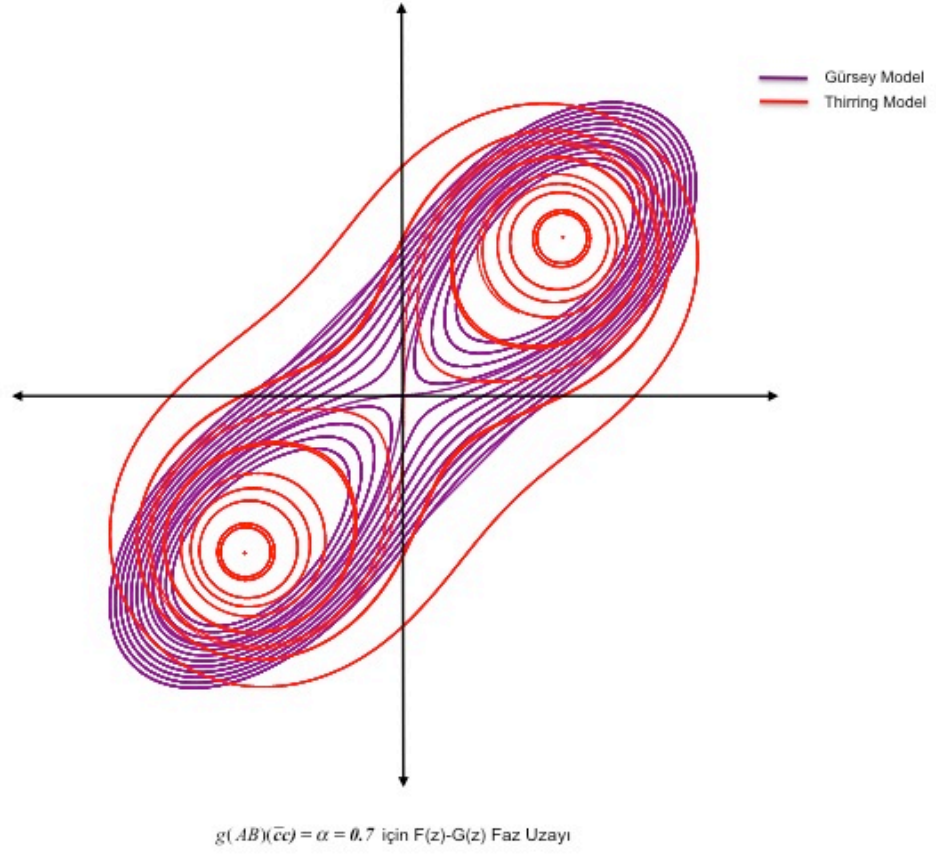
kırılması yöntemiyle bulunmuştur. Vakum beklenen değerinin sıfırdan farklı seçilmesi ile konformal simetri, spinör alanlar için kendiliğinden kırılmış olur. Konformal simetrinin kırılması ile bulunan instantonlar, kuarkların vakum durumu olarak yorumlanmış olup, vakumlar arası geçişi vermelerinden dolayı kuarkların hapsolme problemini açıklamada önem kazanmışlardır. Bilindiği gibi instantonlar sonlu eylemli ve sıfır enerjili çözümlere takabül ederler.

Aşağıda $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1.2$ ve $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 0.7$ olduğu durumlarda Gürsey ve Thirring instantonları için ayrı ayrı çizdiğimiz $F(z)$ - $G(z)$ faz uzaylarını üstüste çizdiğimiz faz diyagramlarını görüyoruz. Bu değerler için de her iki model instantonlarının faz uzayı davranışlarının sergilediği benzerlik devam etmektedir.



$g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1.2$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayı

Şekil 4.2. $g(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 1.2$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı



Şekil 4.3. $(AB)(\bar{c}c) = \alpha = 0.7$ için Gürsey ve Thirring $F(z) - G(z)$ Faz Uzayı

Daha önce en genel halde, Gürsey instantonları için;

$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{9 - \frac{16\alpha FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{80}{3} \alpha^2 (F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (4.1)$$

Thirring instantonları için;

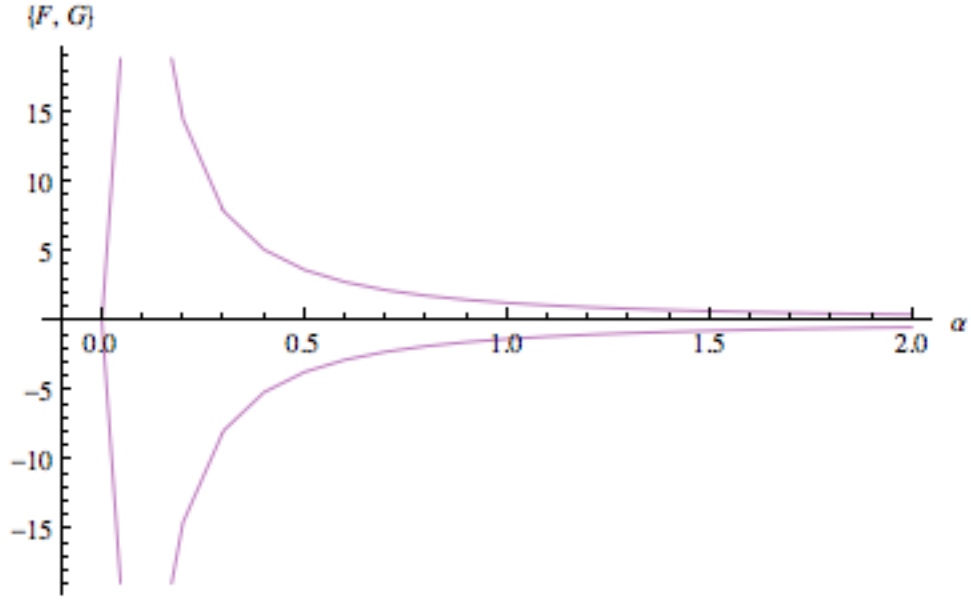
$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 8\alpha FG - 12\alpha^2 (F^2 + G^2)^2} \quad (4.2)$$

olduğunu söylemiştik. Her iki modelimiz için de sabit noktaların α 'ya bağlı ifadelerini yerine yazıp α 'nın sıfırdan büyük olduğu değerler için karakök içini tarattığımızda, Gürsey instantonları için -12 ve Thirring instantonları için -4 değerini elde ederiz. Yani her iki model için de bulduğumuz özdeğerler kompleks olur. Bu da bize her iki modelde de sistemimizin bu değerler için sabit noktalar civarında kararlı bir davranış sergilediğini gösterir.

Dört boyutlu Gürsey ve iki boyutlu Thirring instantonları için bulduğumuz sonuçları karşılaştırdığımızda her ikisinin de faz uzayında benzer davranışlar sergiliyor olması, Gürsey ve Thirring instantonlarının farklı boyut ve spinör sayılarına sahip olmaları açısından önemlidir. Bu bizi instantonların faz uzayındaki davranışlarının boyutları gibi kuvantum spinör sayılarından da bağımsız olduğu sonucuna götürmektedir. Spinör tipi instantonların faz uzayındaki davranışlarının boyut ve spinör kuvantum sayılarından bağımsız olarak benzer davranışlar sergiliyor olmasının nedenlerinin irdelenmesi ve anlaşılabilmesi ise tezin orjinalliği açısından çok önemlidir.

4.2. Gürsey Instantonları için Bifürkasyon Diyagramı

Aşağıda Gürsey non-linear dalga denklemi için α parametresine bağlı olarak $\{F, G\}$ sabit nokta değerlerinin değişimini veren bifürkasyon diyagramı çizilmiştir. Bifürkasyon diyagramları sistemin etkisinde kaldığı parametrelerin sistemin evriminde nasıl bir rol oynadığını görebilmemiz açısından önemlidir. Sistemin etkisinde kaldığı bu parametrelerin değişimine bağlı olarak sistemin uzun süreli davranışında ortaya çıkacak değişimlerin incelenmesi önemlidir.



Şekil 4.4. Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı

Bifürkasyon diyagramını incelediğimizde α parametresinin değeri arttıkça $\{F, G\}$ 'nin değerinin sifıra yaklaştığını görüyoruz. α 'nın değişimine paralel olarak çizilen $F(z)-G(z)$ faz uzaylarını inceleyerek bifürkasyon diyagramından elde edilen sonuçların doğruluğunu kontrol etmek mümkündür. Bifürkasyon diyagramı ile bir karşılaştırma yapabilmek amacıyla α 'nın değerleri diyagramdaki aralığa göre sırasıyla 0.5, 1, 1.5 ve 2 olarak alınmıştır. Gürsey instantonları için sabit noktaların en genel halini hesaplırsak

$$\{F, G\} = \left(\pm \frac{3\sqrt{3}}{4[\alpha(AB)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{2}}}, \pm \frac{3\sqrt{3}}{4[\alpha(AB)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (4.3)$$

olarak buluruz.

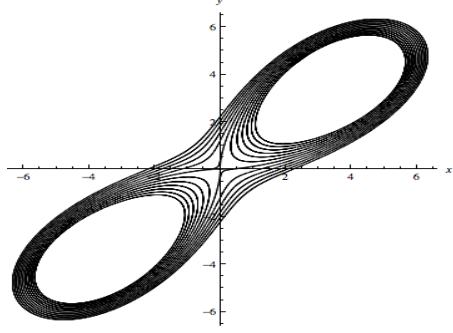
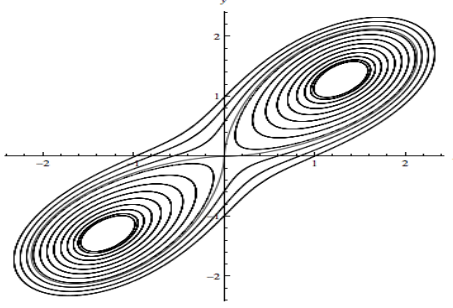
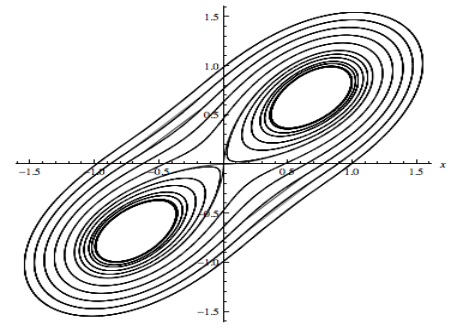
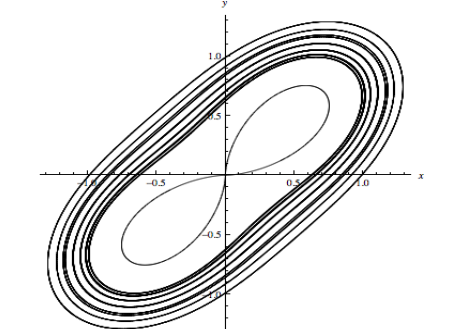
α 'nın değerlerine göre $\{F, G\}$ sabit noktalarının değerlerini hesaplayabiliriz. α 'nın verilen değerleri için $\{F, G\}$ sabit noktalarının yaklaşık olarak hesaplanan değerleri

Tablo2’de özet olarak verilmiştir. Tablo 4.3.’ te ise verilen α değerlerine göre çizilen faz uzaylarının yer aldığı tablo verilmiştir. Tablo 4.2.’de hesaplanan $\{F, G\}$ sabit noktalarının değerleri hem bifürkasyon diyagramı ile hem de çizilen faz uzaylarındaki değerler ile örtüşmektedir.

Tablo 4.2. α ’nın Değişimine Bağlı $\{F, G\}$Sabit Noktaların Değişimi (\approx)	
$\alpha = 0.5$	$\pm 3,674$
$\alpha = 1$	$\pm 1,299$
$\alpha = 1.5$	$\pm 0,707$
$\alpha = 2$	$\pm 0,459$

Aşağıdaki faz uzayları dikkatli bir şekilde incelendiğinde α ’nın artan değerleri için $\{F, G\}$ sabit nokta değerlerinin sıfıra yaklaştığı görülür ki bu sonuç bifürkasyon diyagramının incelenmesiyle elde edilen sonucu teyit etmektedir.

Tablo 4.3. α 'nın Değişimine Bağlı Olarak F(z)-G(z) Faz Uzaylarının Değişimi

$\alpha = 0.5$	 <p>A phase space plot in the x-y plane for $\alpha = 0.5$. The x-axis ranges from -6 to 6 and the y-axis from -6 to 6. The plot shows a figure-eight shape centered at the origin. The two loops are thickened, indicating a limit cycle or a region of high density of trajectories. The loops are roughly elliptical, extending from x ≈ -5 to x ≈ 5 and y ≈ -5 to y ≈ 5.</p>
$\alpha = 1$	 <p>A phase space plot in the x-y plane for $\alpha = 1$. The x-axis ranges from -2 to 2 and the y-axis from -2 to 2. The plot shows a figure-eight shape centered at the origin. The trajectories are thin and densely packed, forming two distinct loops on either side of the y-axis. The loops are roughly elliptical, extending from x ≈ -1.5 to x ≈ 1.5 and y ≈ -1.5 to y ≈ 1.5.</p>
$\alpha = 1.5$	 <p>A phase space plot in the x-y plane for $\alpha = 1.5$. The x-axis ranges from -1.5 to 1.5 and the y-axis from -1.5 to 1.5. The plot shows a figure-eight shape centered at the origin. The trajectories are thin and densely packed, forming two distinct loops on either side of the y-axis. The loops are roughly elliptical, extending from x ≈ -1 to x ≈ 1 and y ≈ -1 to y ≈ 1.</p>
$\alpha = 2$	 <p>A phase space plot in the x-y plane for $\alpha = 2$. The x-axis ranges from -1.0 to 1.0 and the y-axis from -1.0 to 1.0. The plot shows a figure-eight shape centered at the origin. The trajectories are thin and densely packed, forming two distinct loops on either side of the y-axis. The loops are roughly elliptical, extending from x ≈ -0.8 to x ≈ 0.8 and y ≈ -0.8 to y ≈ 0.8.</p>

4.3. Kuantum Tedirgeme Altında Gürsey Instantonları

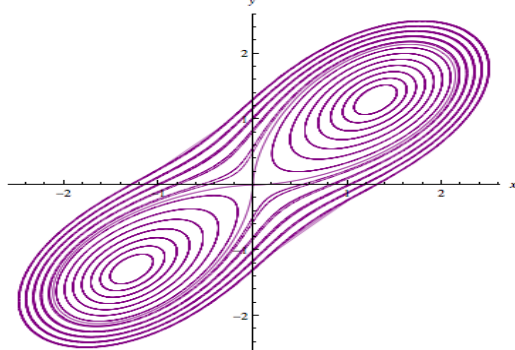
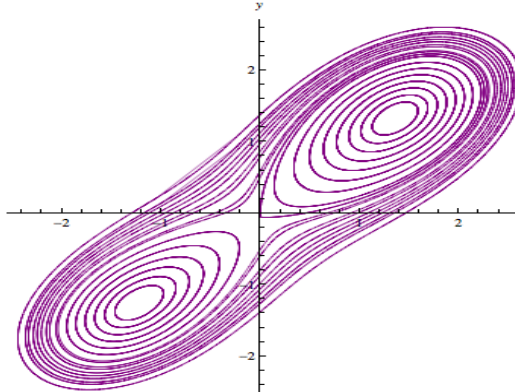
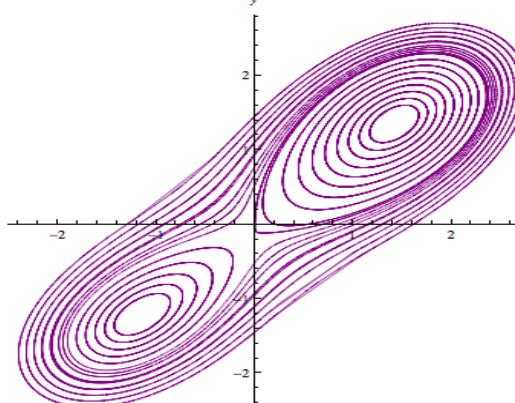
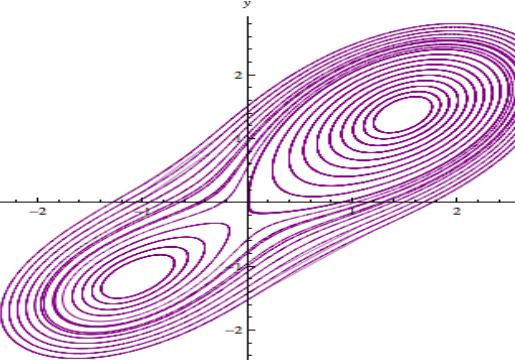
Daha önce Gürsey instantonları için F ve G ye bağlı boyutsuz lineer olmayan denklem sistemini (3.11) numaralı denklemde vermiş ve sistemin faz diyagramlarını çizerek sabit noktalar etrafında kararlılık analizi yapmıştık.

Sisteme dışarıdan a gibi sabit bir terim eklediğimizde

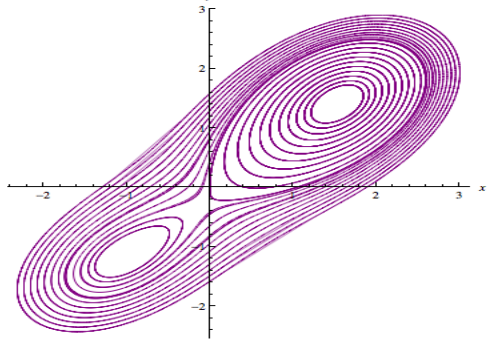
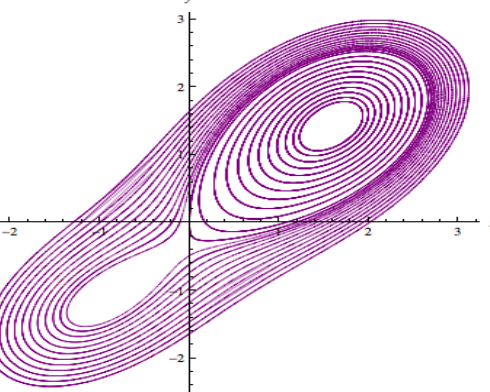
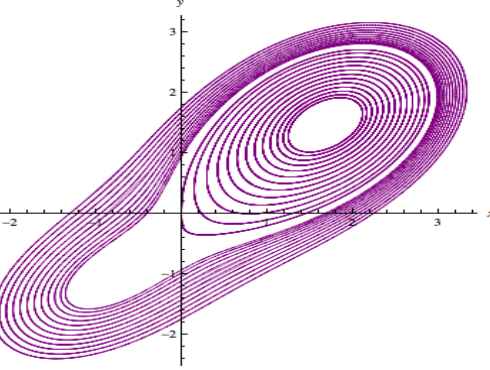
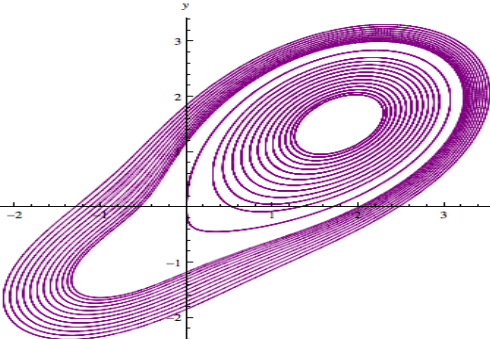
$$\begin{aligned} 2\dot{F}(z) + \frac{3}{2}F(z) - \alpha G(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} &= 0 \\ 2\dot{G}(z) - \frac{3}{2}G(z) + \alpha F(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} + a &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

denklem sistemini elde ederiz $(g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha$ aldık). Değeri birden küçük olan a gibi bir terimin eklenmesiyle vakum durumuna tekabül eden Gürsey instantonları için ($\alpha = 1$ olduğu), sistemimizi kuantumsal olarak kendi aralarında tedirgiyormuş gibi düşünebiliriz. Kuantum tedirgeme altında vakum durumuna tekabül eden instantonların faz uzayı davranışlarındaki olası bozulmalarının irdelenmesi ve yorumlanabilmesi amacıyla sistemin faz uzayı davranışlarına bakılmıştır. Tablo 4.4. de özet halde verilen faz uzayları incelendiğinde yapıların kararlı olduğu görülür.

Tablo 4.4. a 'nın Değişimine Bağlı Olarak $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları

$a=0.01$	 Phase space plot for $a=0.01$. The plot shows two sets of nested, elongated closed curves (islands) in the x - y plane. The curves are centered around $x \approx \pm 1.5$ and $y \approx \pm 1.5$. The x and y axes range from approximately -2.5 to 2.5.
$a=0.1$	 Phase space plot for $a=0.1$. The plot shows two sets of nested, elongated closed curves (islands) in the x - y plane. The curves are centered around $x \approx \pm 1.5$ and $y \approx \pm 1.5$. The x and y axes range from approximately -2.5 to 2.5.
$a=0.2$	 Phase space plot for $a=0.2$. The plot shows two sets of nested, elongated closed curves (islands) in the x - y plane. The curves are centered around $x \approx \pm 1.5$ and $y \approx \pm 1.5$. The x and y axes range from approximately -2.5 to 2.5.
$a=0.3$	 Phase space plot for $a=0.3$. The plot shows two sets of nested, elongated closed curves (islands) in the x - y plane. The curves are centered around $x \approx \pm 1.5$ and $y \approx \pm 1.5$. The x and y axes range from approximately -2.5 to 2.5.

Tablo 4.5. a 'nın Değişimine Bağlı Olarak $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları

$a=0.4$	 Phase space plot for $a=0.4$. The plot shows a set of purple contour lines in the x - y plane. The contours are elongated and form a shape similar to a figure-eight or a pair of lobes, with a central region where the contours are more densely packed. The x and y axes range from approximately -2 to 3.
$a=0.5$	 Phase space plot for $a=0.5$. The plot shows a set of purple contour lines in the x - y plane. The contours are elongated and form a shape similar to a figure-eight or a pair of lobes, with a central region where the contours are more densely packed. The x and y axes range from approximately -2 to 3.
$a=0.7$	 Phase space plot for $a=0.7$. The plot shows a set of purple contour lines in the x - y plane. The contours are elongated and form a shape similar to a figure-eight or a pair of lobes, with a central region where the contours are more densely packed. The x and y axes range from approximately -2 to 3.
$a=0.9$	 Phase space plot for $a=0.9$. The plot shows a set of purple contour lines in the x - y plane. The contours are elongated and form a shape similar to a figure-eight or a pair of lobes, with a central region where the contours are more densely packed. The x and y axes range from approximately -2 to 3.

4.4. Periyodik Besleme Altında Gürsey Instantonları

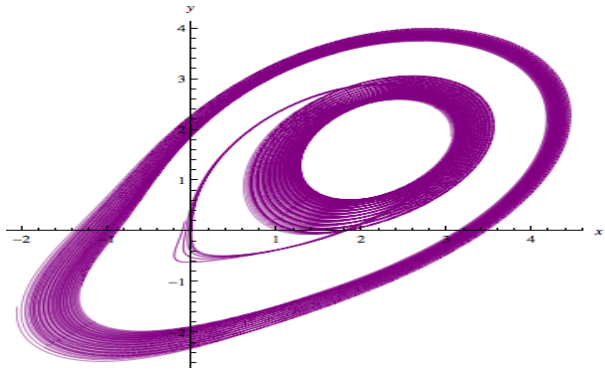
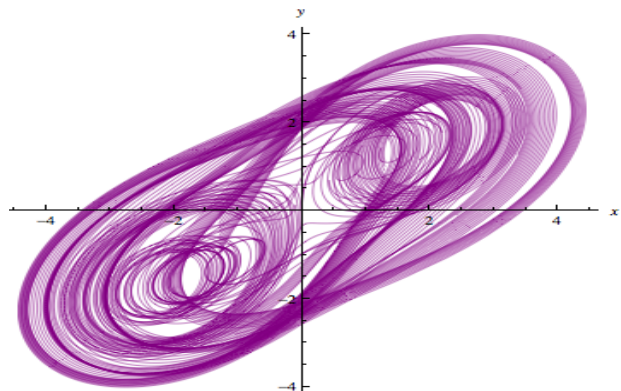
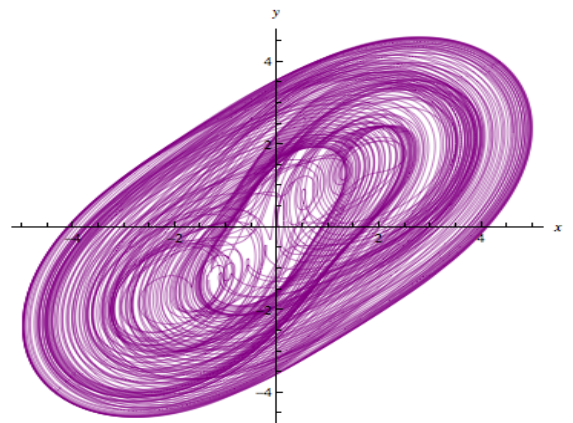
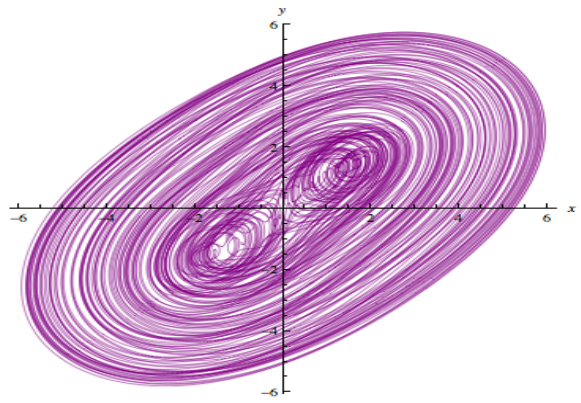
Daha önce F ve G ye bağlı boyutsuz lineer olmayan denklem sistemini elde ettiğimiz Gürsey instantonlarının bir önceki kısımda kuvantum tedirgeme altında incelemiş ve sistemin faz uzaylarını çizmiştik. Şimdi sistemimize $A\cos(\omega t)$ gibi bir terim ekleyerek periyodik besleme altındaki olası değişimleri inceleyelim.

$A\cos(\omega t)$ gibi bir terimin eklenmesiyle

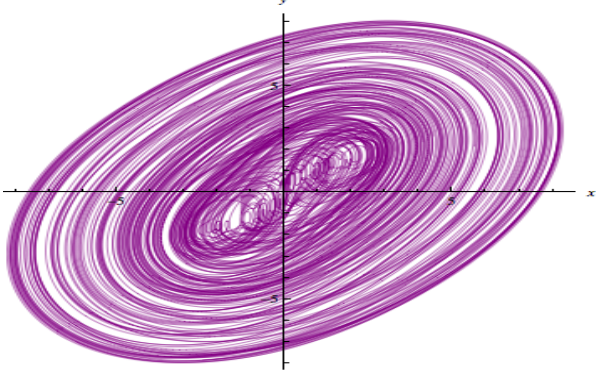
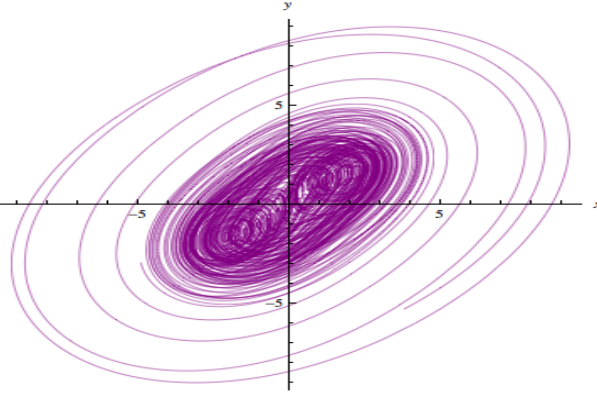
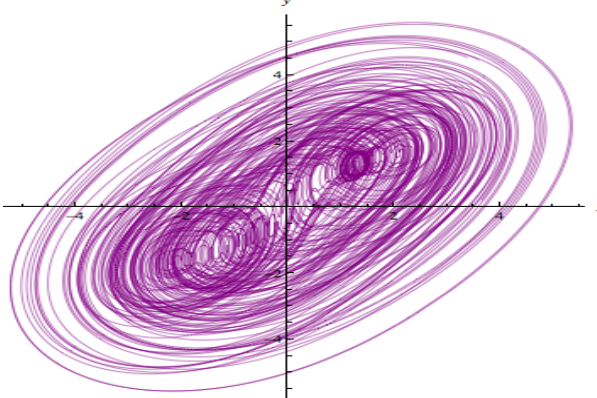
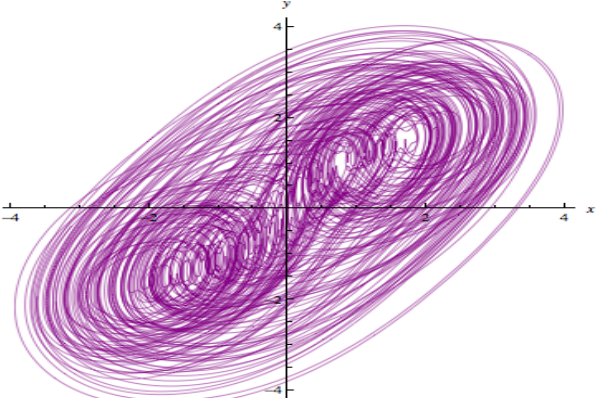
$$\begin{aligned} 2\dot{F}(z) + \frac{3}{2}F(z) - \alpha G(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} &= 0 \\ 2\dot{G}(z) - \frac{3}{2}G(z) + \alpha F(z)(F^2(z) + G^2(z))^{\frac{1}{3}} &= A\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

denklem sistemini elde ederiz ($g(AB)^{\frac{1}{3}}(\bar{c}c)^{\frac{1}{3}} = \alpha$ aldık). Fiziksel olarak buradaki A genliğe, ω ise frekansa karşılık gelir. Bunu sistem üzerine gönderilen bir parçacık örneğin foton olarak düşünebiliriz. Şimdi bu periyodik besleme altında vakum durumuna karşılık gelen instantonların faz uzayı davranışlarını, genlik ve frekansın farklı değerleri için inceleyelim. Tablo 4.6., 4.7. ve 4.8'te ilk olarak genlik bir alınarak, frekansın farklı değerleri için, iki boyutta çizilen faz diyagramlarına yer verilmiştir. Tüm faz uzayları bize instanton çözümleri verdiğini bildiğimiz $\alpha = 1$ olduğu değer için çizilmiştir.

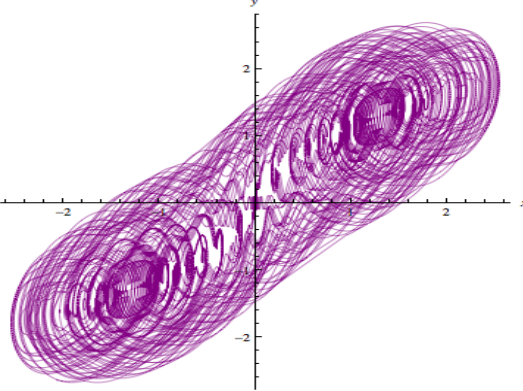
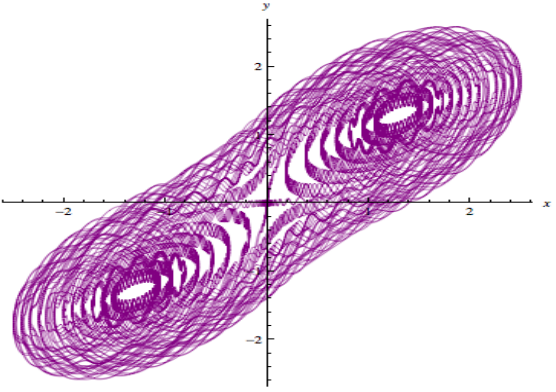
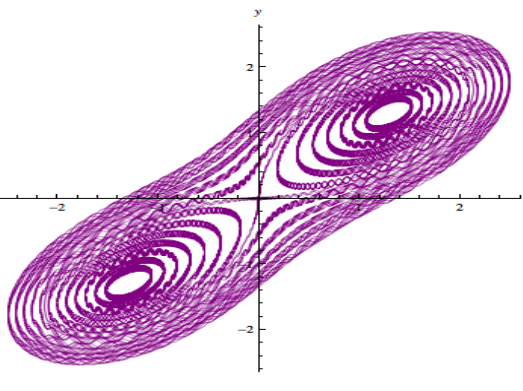
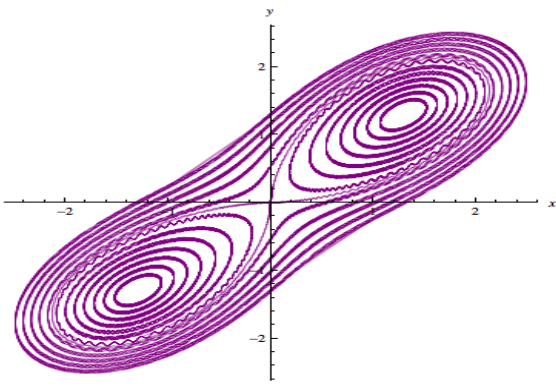
Tablo 4.6. A=1 için F(z)-G(z) Faz Uzayları

w=0.01 için	 <p>A phase space plot showing a trajectory in the x-y plane. The x-axis ranges from -2 to 4, and the y-axis ranges from -1 to 4. The trajectory forms a complex, nested structure with a central loop and an outer loop, resembling a figure-eight or a distorted ellipse. The trajectory is drawn in a dark purple color.</p>
w=0.1 için	 <p>A phase space plot showing a trajectory in the x-y plane. The x-axis ranges from -4 to 4, and the y-axis ranges from -4 to 4. The trajectory forms a complex, nested structure with a central loop and an outer loop, resembling a figure-eight or a distorted ellipse. The trajectory is drawn in a dark purple color.</p>
w=0.5 için	 <p>A phase space plot showing a trajectory in the x-y plane. The x-axis ranges from -4 to 4, and the y-axis ranges from -4 to 4. The trajectory forms a complex, nested structure with a central loop and an outer loop, resembling a figure-eight or a distorted ellipse. The trajectory is drawn in a dark purple color.</p>
w=1 için	 <p>A phase space plot showing a trajectory in the x-y plane. The x-axis ranges from -6 to 6, and the y-axis ranges from -6 to 6. The trajectory forms a complex, nested structure with a central loop and an outer loop, resembling a figure-eight or a distorted ellipse. The trajectory is drawn in a dark purple color.</p>

Tablo 4.7. $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları

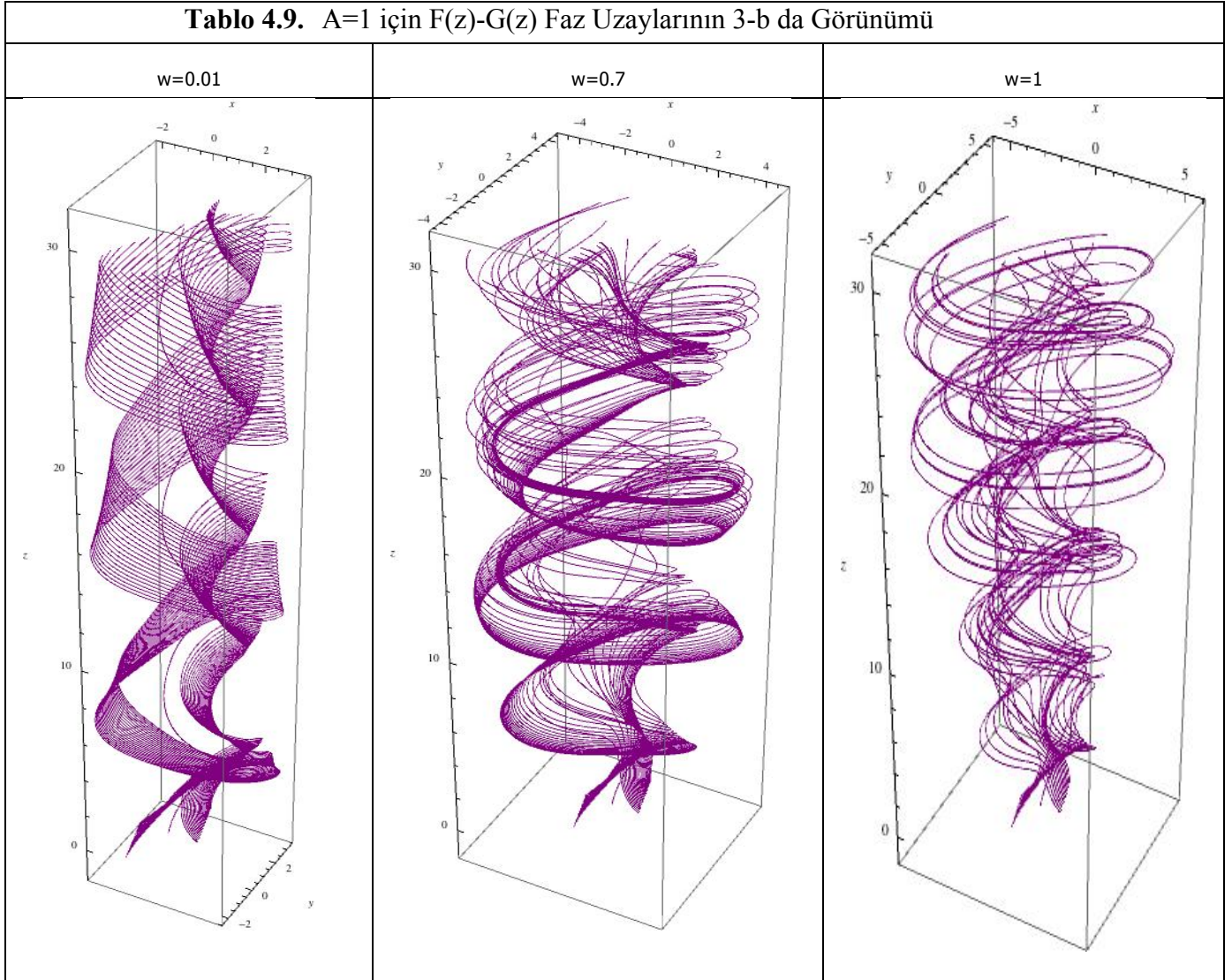
w=1.3 için	 Phase space plot for $w=1.3$. The plot shows a dense, purple-colored trajectory in the x - y plane. The trajectory is highly oscillatory and fills a large, roughly elliptical region centered at the origin. The axes are labeled x and y , with tick marks at 5 and -5.
w=1.5 için	 Phase space plot for $w=1.5$. The plot shows a dense, purple-colored trajectory in the x - y plane. The trajectory is highly oscillatory and fills a large, roughly elliptical region centered at the origin. The axes are labeled x and y , with tick marks at 5 and -5.
w=1.7 için	 Phase space plot for $w=1.7$. The plot shows a dense, purple-colored trajectory in the x - y plane. The trajectory is highly oscillatory and fills a large, roughly elliptical region centered at the origin. The axes are labeled x and y , with tick marks at 4 and -4.
w=2 için	 Phase space plot for $w=2$. The plot shows a dense, purple-colored trajectory in the x - y plane. The trajectory is highly oscillatory and fills a large, roughly elliptical region centered at the origin. The axes are labeled x and y , with tick marks at 4 and -4.

Tablo 4.8. $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzayları

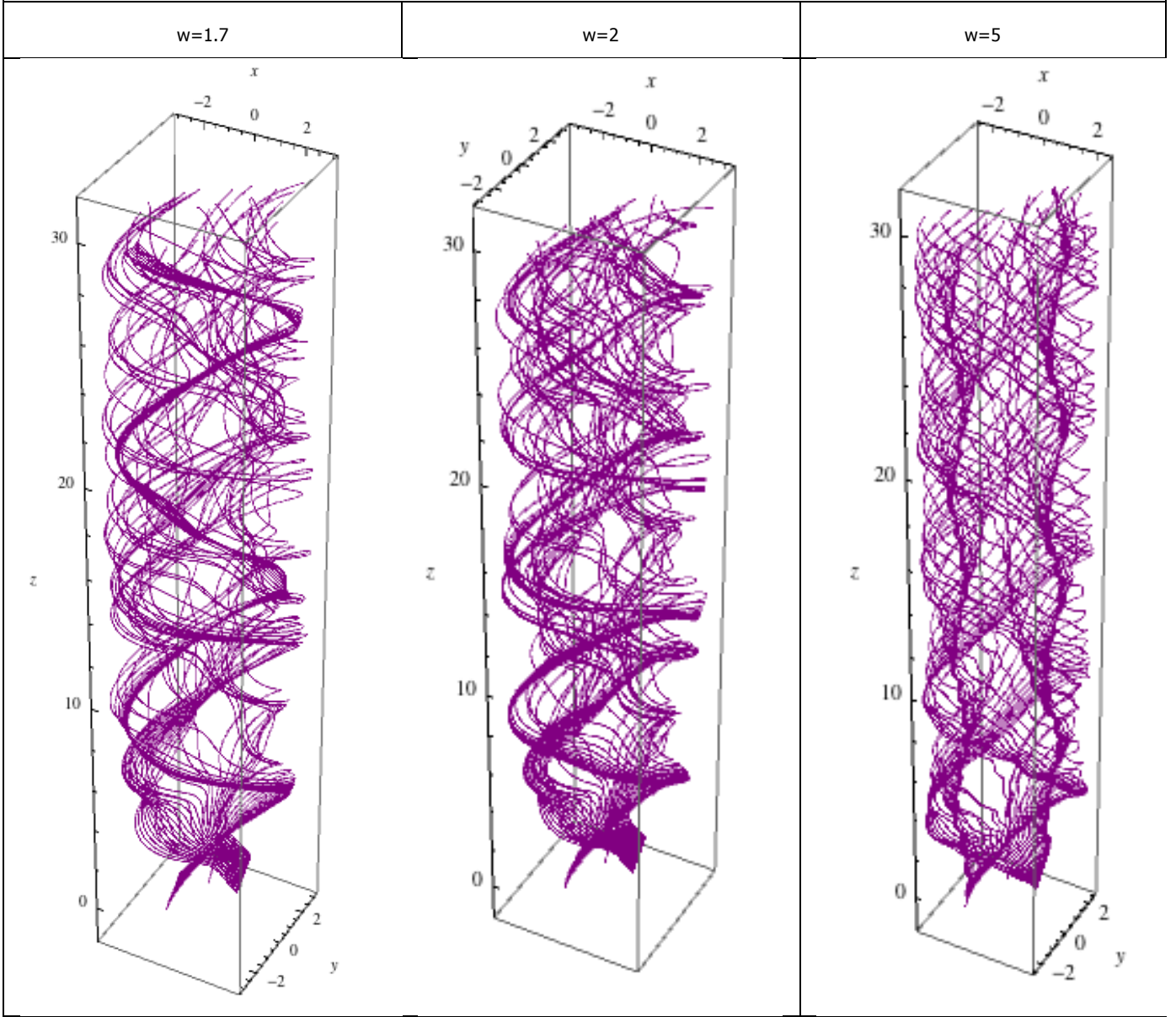
w=5 için	 <p>A phase space plot showing a complex, dense trajectory in the x-y plane. The trajectory is elongated along the x-axis and exhibits a double-lobed structure with intricate, chaotic-like patterns. The axes range from approximately -2 to 2.</p>
w=10 için	 <p>A phase space plot showing a complex, dense trajectory in the x-y plane. The trajectory is elongated along the x-axis and exhibits a double-lobed structure with intricate, chaotic-like patterns. The axes range from approximately -2 to 2.</p>
w=20 için	 <p>A phase space plot showing a complex, dense trajectory in the x-y plane. The trajectory is elongated along the x-axis and exhibits a double-lobed structure with intricate, chaotic-like patterns. The axes range from approximately -2 to 2.</p>
w=40 için	 <p>A phase space plot showing a complex, dense trajectory in the x-y plane. The trajectory is elongated along the x-axis and exhibits a double-lobed structure with intricate, chaotic-like patterns. The axes range from approximately -2 to 2.</p>

İki boyutta çizdiğimiz diyagramları incelediğimizde vakum durumuna karşılık gelen instantonların faz uzayı davranışlarında bozulmalar olmaya başladığını görüyoruz. $\alpha = 1$ için faz uzayında kararlı davranışlar sergileyen instantonlar, periyodik besleme altında bozulmalara uğramış ve frekansın belli değerleri için kararlılık iyice bozularak kaotik davranışlar sergilemeye başlamıştır. Fakat Tablo 4.8. teki diyagramları incelediğimizde, frekansın artan değerleri için sistemin kendini toparlayıp tekrar kararlı davranışlar sergilemeye devam ettiğini görebiliriz. Frekansın belli değerleri için sistemin kaotikliğini daha iyi görebilmek için z 'yi de üçüncü bir boyut olarak alıp, üç boyutta Gürsey instantonlarının davranışlarını inceleyelim. Yukarıdaki tablolarda $A=1$ alınarak iki boyutta çizdiğimiz faz diyagramlarının üç boyutta çizilmiş hali, frekansın belli değerleri için çizilerek, aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.9. $A=1$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü

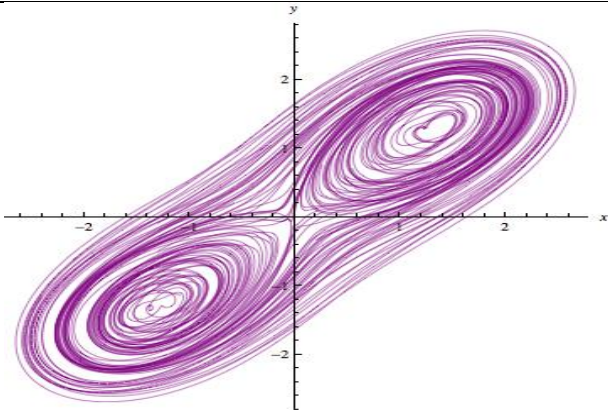
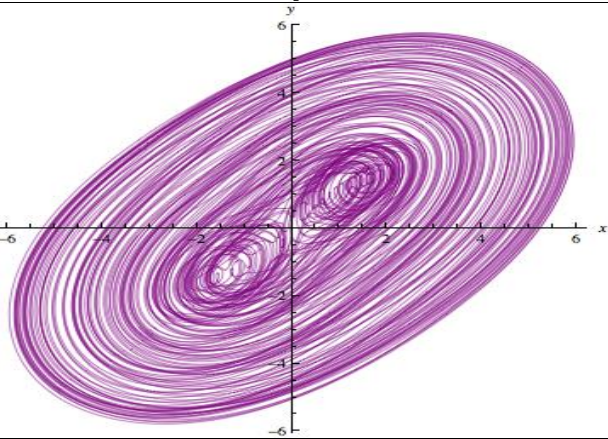
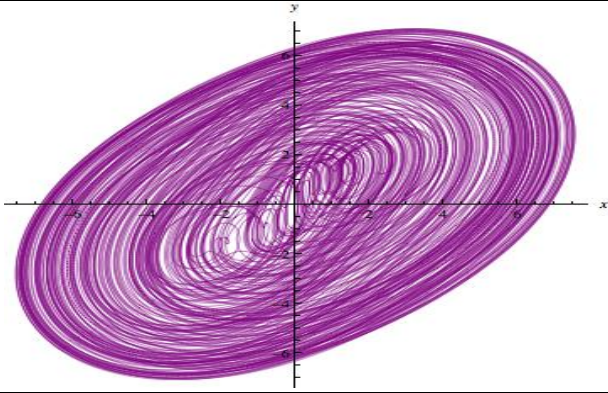
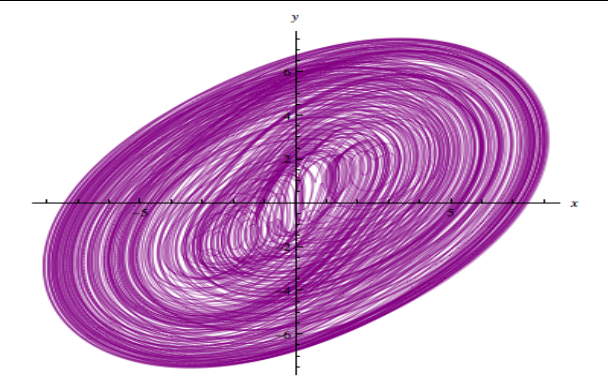


Tablo 4.10. $A=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü

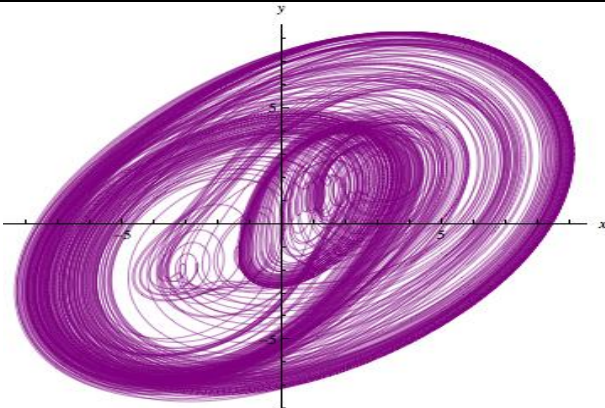
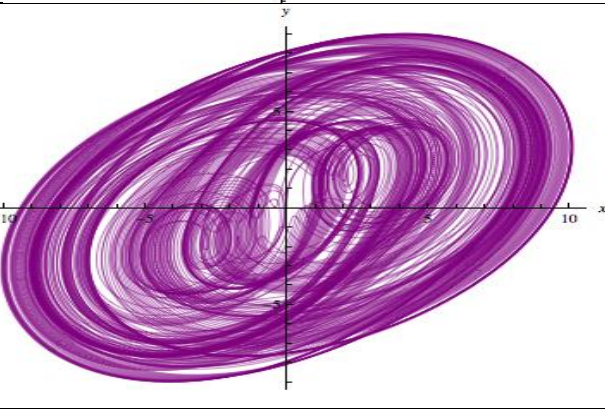
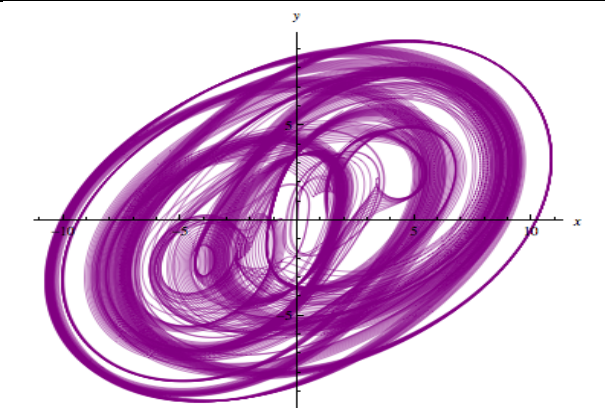
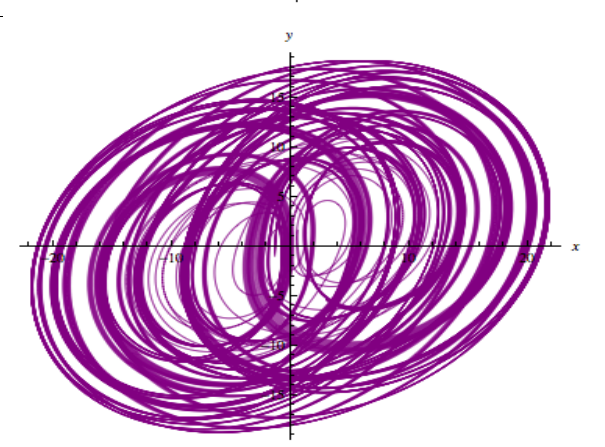


Şimdi frekansı sabit tutup genliğin değerleri ile oyanayarak Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarındaki değişikliklere bakalım. $w = 1$ alınarak, genliğin farklı değerleri için çizilmiş faz uzayları Tablo 4.11 ve 12’ de özetlenmiştir. Genliğin farklı değerleri için de Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarında bozulmalar olduğunu ve kaotik davranışlar sergilemeye başladığını görüyoruz.

Tablo 4.11. $w=1$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzayları

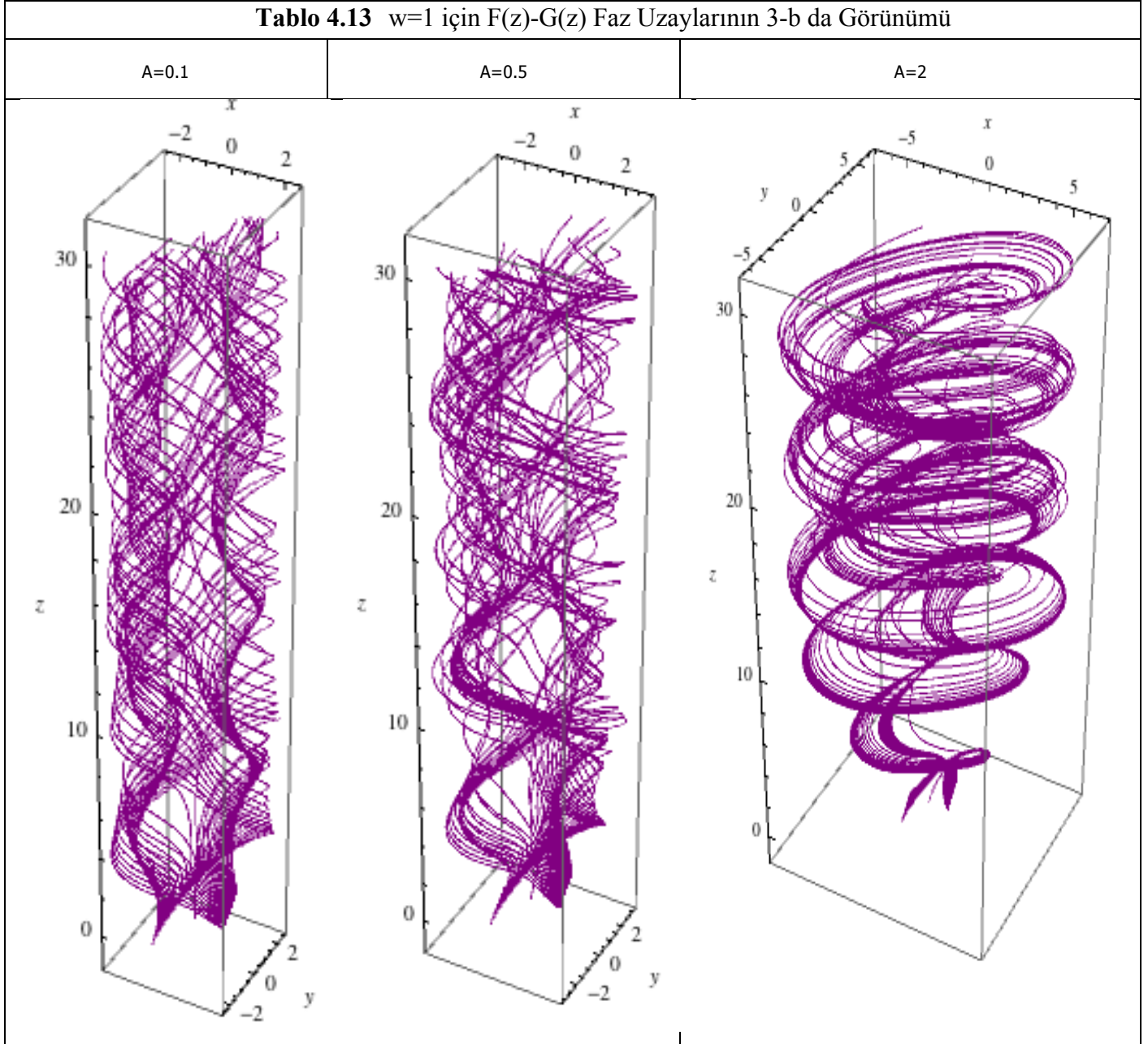
A=0.1 için	 Phase space plot for A=0.1. The plot shows a complex, multi-lobed structure with two primary centers of rotation, one in the upper right and one in the lower left. The trajectories are dense and purple, forming a butterfly-like shape. The x and y axes range from approximately -3 to 3.
A=0.5 için	 Phase space plot for A=0.5. The plot shows a more elongated, elliptical structure with two centers of rotation. The trajectories are dense and purple, forming a shape similar to a figure-eight or a butterfly. The x and y axes range from approximately -6 to 6.
A=1.5 için	 Phase space plot for A=1.5. The plot shows a highly elongated, elliptical structure with two centers of rotation. The trajectories are dense and purple, forming a shape similar to a figure-eight or a butterfly. The x and y axes range from approximately -6 to 6.
A=2 için	 Phase space plot for A=2. The plot shows a highly elongated, elliptical structure with two centers of rotation. The trajectories are dense and purple, forming a shape similar to a figure-eight or a butterfly. The x and y axes range from approximately -6 to 6.

Tablo 4.12. $w=1$ için $F(z)-G(z)$ Faz Uzayları

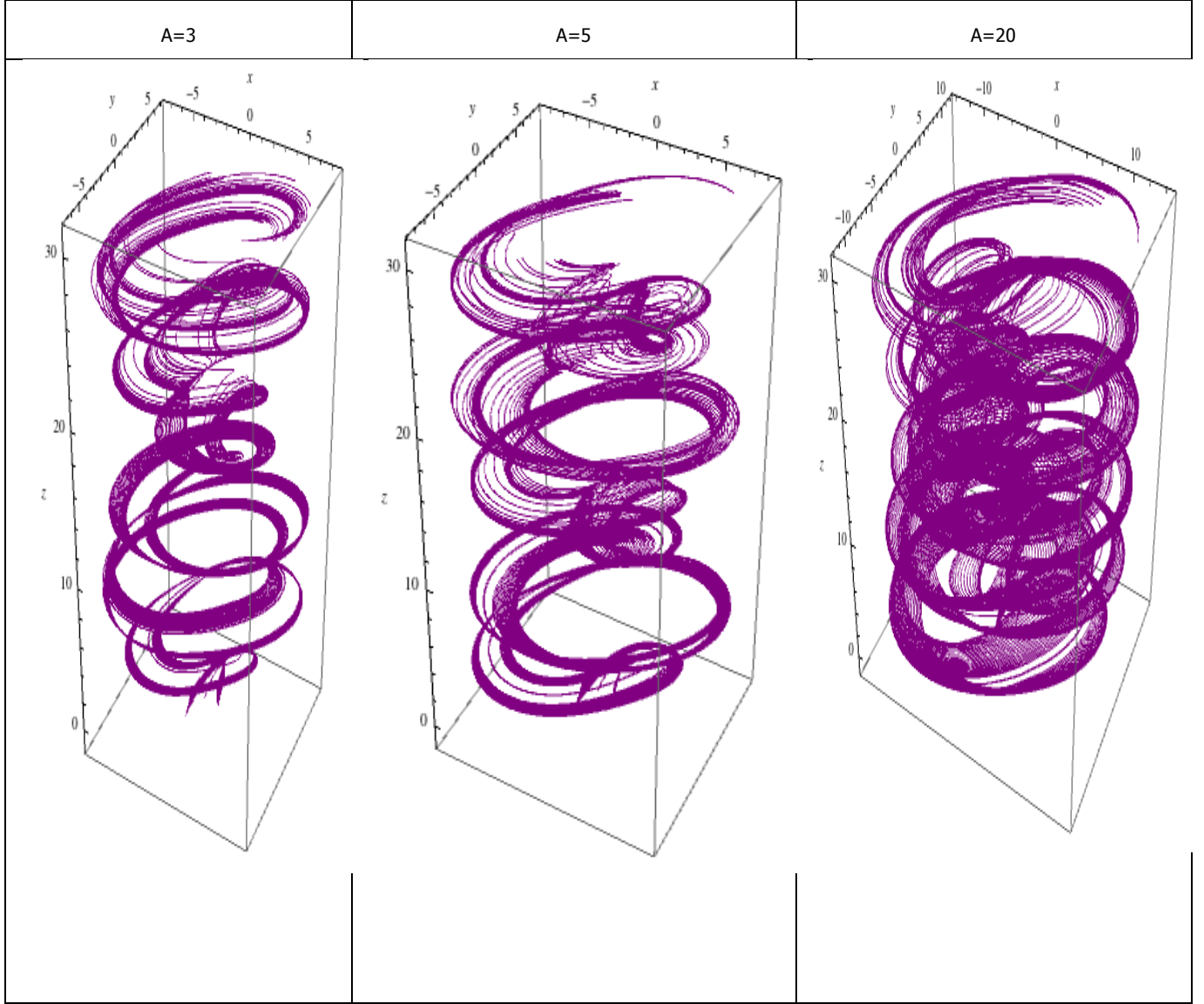
A=3 için	 Phase space plot for A=3. The trajectory is a dense, purple-colored curve that forms a complex, nested structure. It starts with a small inner loop and spirals outwards, filling an elliptical region. The x and y axes are visible, with tick marks at 5 and -5.
A=4 için	 Phase space plot for A=4. The trajectory is a dense, purple-colored curve that forms a complex, nested structure. It starts with a small inner loop and spirals outwards, filling an elliptical region. The x and y axes are visible, with tick marks at 10 and -10.
A=5 için	 Phase space plot for A=5. The trajectory is a dense, purple-colored curve that forms a complex, nested structure. It starts with a small inner loop and spirals outwards, filling an elliptical region. The x and y axes are visible, with tick marks at 10 and -10.
A=20 için	 Phase space plot for A=20. The trajectory is a dense, purple-colored curve that forms a complex, nested structure. It starts with a small inner loop and spirals outwards, filling an elliptical region. The x and y axes are visible, with tick marks at 10 and -10.

Şimdi genliğin farklı değerleri için iki boyutta çizdiğimiz faz uzaylarının üç boyutta çizilmiş hallerini inceleyelim.

Tablo 4.13 $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü

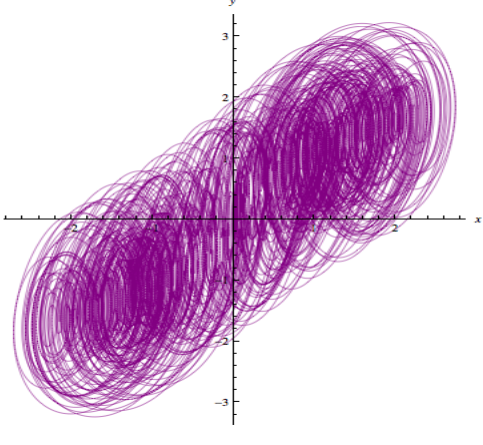
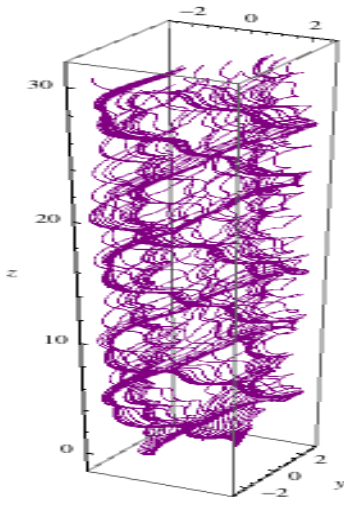
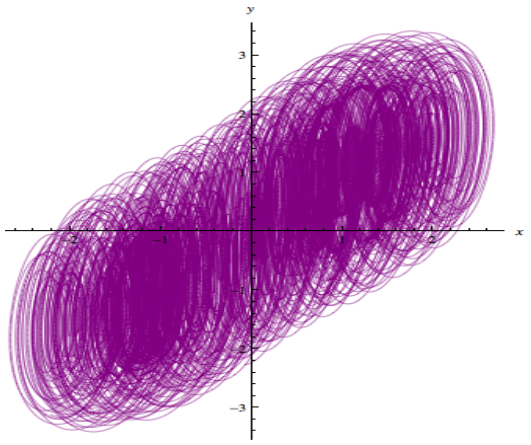
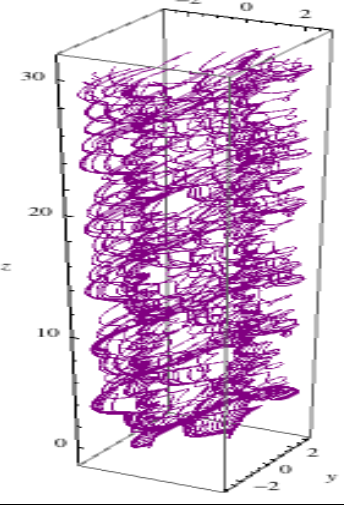
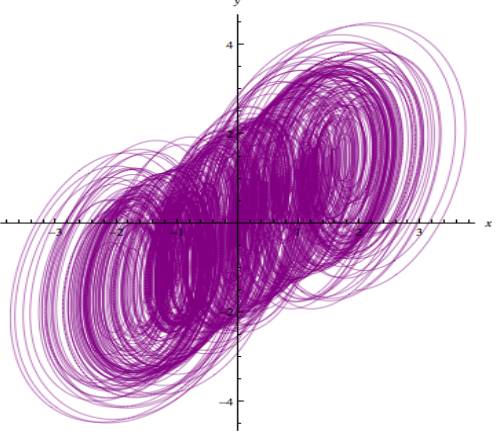
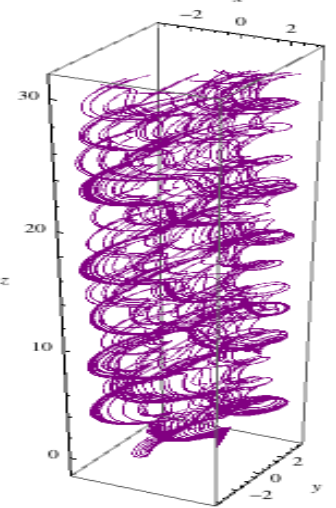


Tablo 4.14. $w=1$ için $F(z)$ - $G(z)$ Faz Uzaylarının 3-b da Görünümü



Aşağıda hem genlik hem de frekans değerleriyle oynadığımızda, Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarında nasıl değişimler olduğunu görmemiz için birkaç örneğin olduğu tablo yer almaktadır.

Tablo 4.15. Frekans ve Genliğin Farklı Değerleri için F(z)-G(z) Faz Uzayları

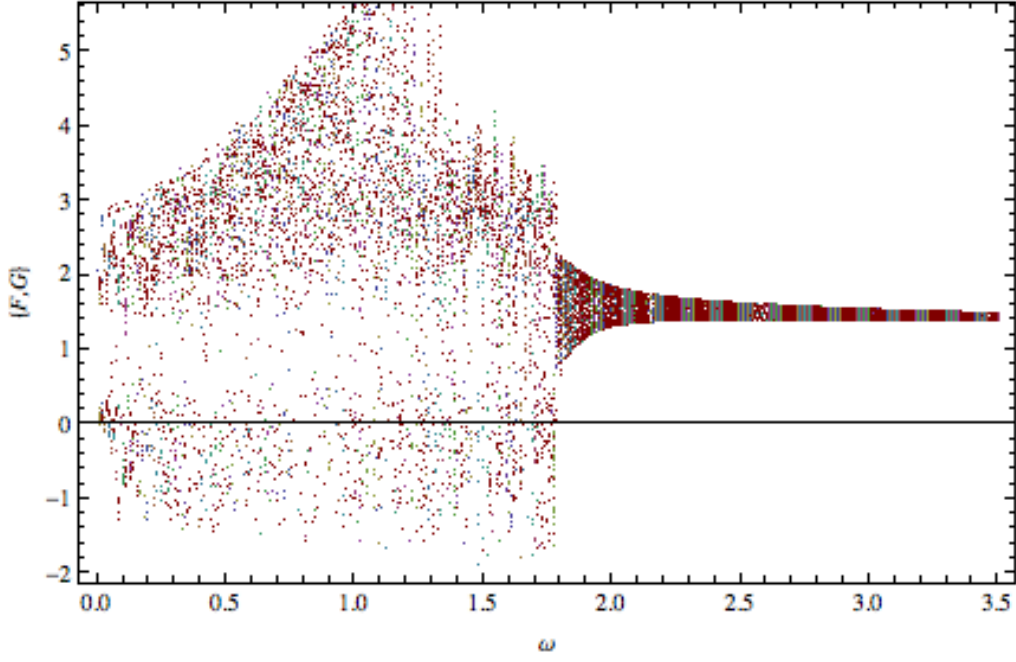
A=2.5 ve w=3.7		
A=5 ve w=5		
A=4 ve w=3		

Tablo 4.15.de hem frekans hem de genlik değerleriyle oynanarak Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarındaki bozulmalar gözlenmeye çalışılmıştır. İlk diragramlar iki boyutta faz uzaylarını gösterirken yanındaki herbir diyagram, frekans ve genliğin o değeri için faz uzaylarının üç boyutta grnmnlerini vermektedir.

Tüm faz diyagramları göz önüne alındığında, vakum durumuna tekabül eden instantonların faz uzaylarında sergiledikleri kararlı yapının periyodik besleme altında bozulduğunu ve sistemin artık kaotik davranışlar sergilemeye başladığını görüyoruz. Frekans ve genliğin değerlerine bağlı olarak bu kaotiklik azalmakta ya da artmaktadır. Örneğin genliği sabit tutarak frekans değerleriyle oynadığımızda, sistemin kaotikleştiğini fakat frekans değerlerini daha da arttırdıkça bu kaotikliğin yerini yine kararlılığa bıraktığını ve sistemin kendini topladığını görüyoruz. Dışarıdan eklenen bu terimi fiziksel olarak sistem üzerine gönderilmiş bir parçacık örneğin foton olarak yorumlayabiliriz.

4.5. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı

Bir nceki kısımda periyodik besleme altında vakum durumuna karşılık gelen instantonların faz uzayı davranışlarını, genlik ve frekansın farklı değerleri için incelemiştik. $\alpha = 1$ için faz uzayında kararlı davranışlar sergileyen Gürsey instantonları periyodik besleme altında bozulmalara uğramış ve frekansın belli değerleri için kararlılık iyice bozularak kaotik davranışlar sergilemeye başlamıştır. w 'nın küçük değerleri için kaotik davranışlar sergilemeye başlayan frekansın artan değerleri için kendini tekrar toparlayarak kararlı davranışlar sergilemeye devam etmiştir. Aşağıda verilen bifürkasyon diyagramını incelediğimizde benzer bir sonuçla karşılaşırız. w 'nın yaklaşık olarak ikiden küçük olduğu değerlerde sistem kaotik davranışlar sergilerken, artan değerler için sistemin kararlı olduğunu görmekteyiz.



Şekil 4.5. Periyodik Besleme Altında Gürsey Instantonlarının Bifürkasyon Diyagramı

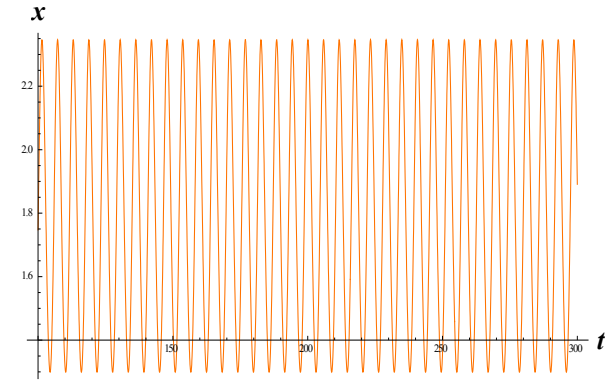
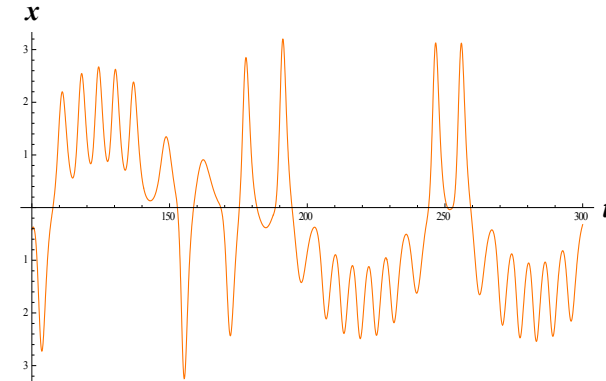
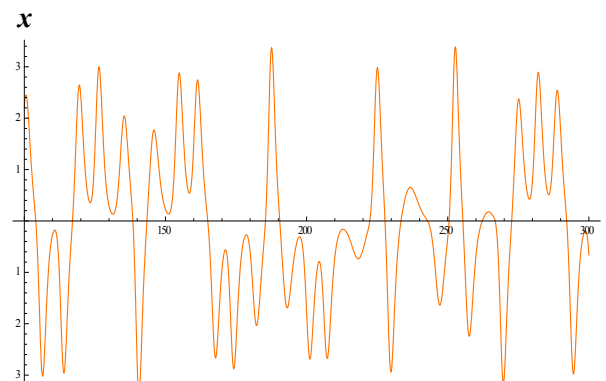
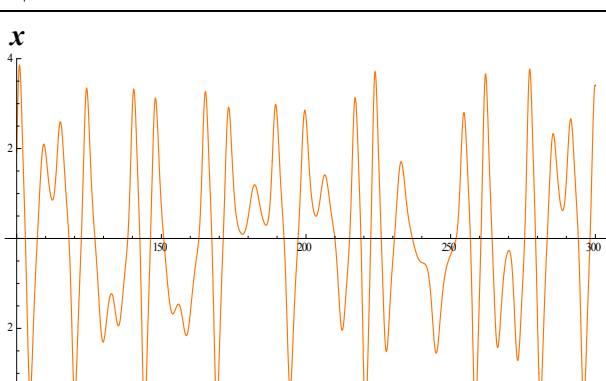
Çizilen bifürkasyon diyagramı ile bir önceki kısımda çizilen faz uzayları incelenerek bir karşılaştırma yapıldığında elde edilen sonuçların uyum içinde olduğunu görürüz.

4.6. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Zaman Serisi

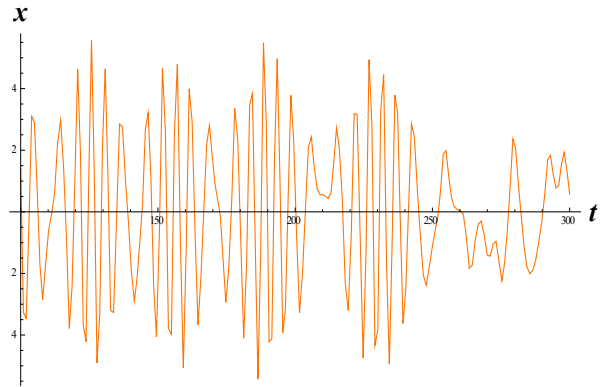
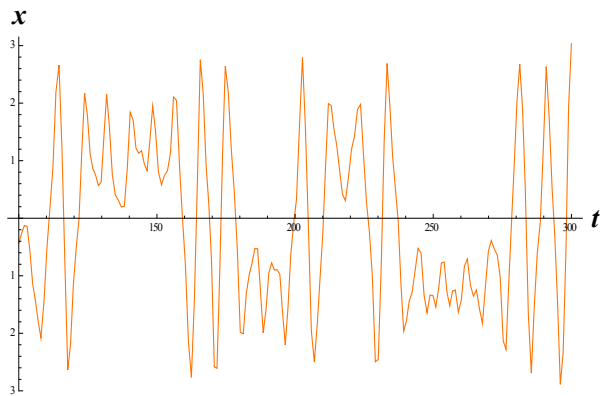
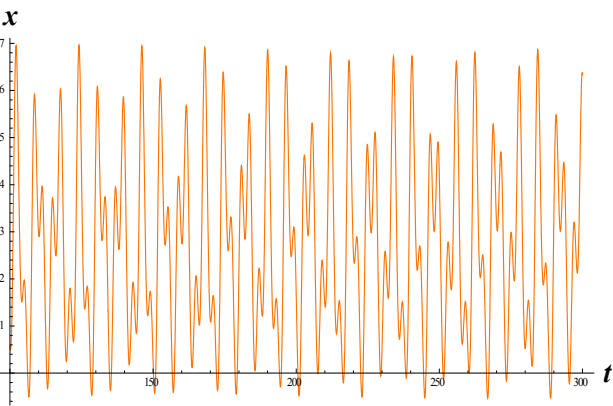
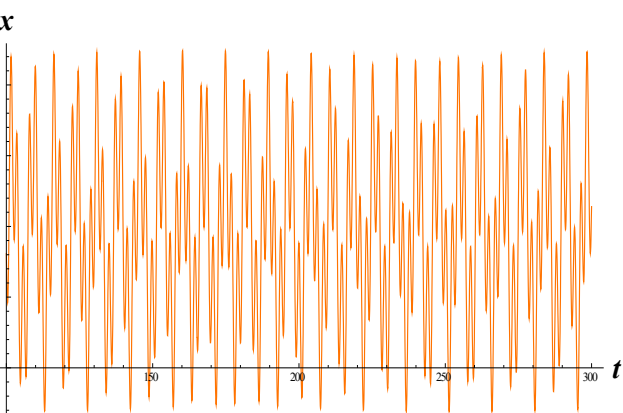
Periyodik besleme altında artık kaotik davranışlar sergileyen sistemimiz için zaman serisi analizi de yapılabilir. Aşağıdaki tabloda w 'nın değerlerine bağlı olarak çizilen zaman serisi grafikleri yer almaktadır. Daha önce tezimizin Malzeme ve Yöntem kısmında açıkladığımız üzere deney sonucu veya iterasyon yapılarak veya herhangi bir yolla elde edilen ve herhangi bir dinamik sistemin davranışını karakterize eden sayılar sistemimizin zaman serisi olarak adlandırılır. Zaman serisinin değişimi herhangi bir düzene göre olmayıp, düzensiz bir şekilde oluyorsa sistemin bu sayılarla belirlenen davranışı kaos gösterebilir [3].

Aşağıdaki tablolarda özet halinde verilen zaman serisi grafikleri incelendiğinde, bifürkasyon diyagramı ve daha önce çizdiğimiz faz uzaylarının incelenmesiyle elde edilen sonuçlarla uyumlu olarak w 'nın küçük değerleri için sistemin kaotik davranışlar sergilediğini ama değerinin yaklaşık olarak iki ve daha büyük olduğu durumlarda ise sistemin kararlı davranışlar sergilemeye başladığı sonucunu elde ederiz.

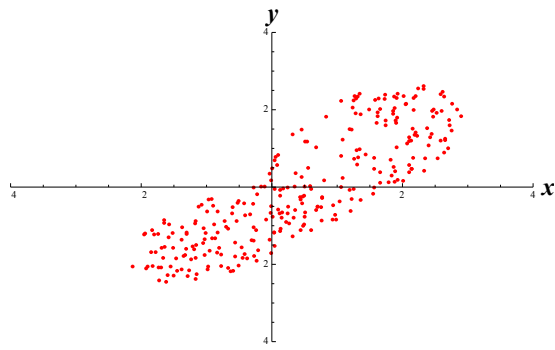
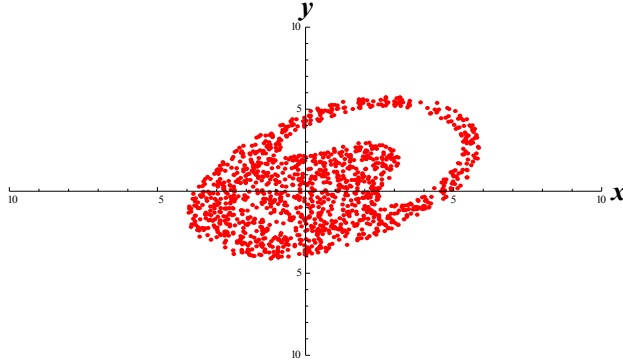
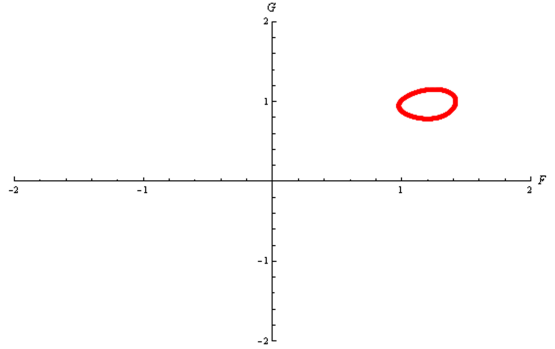
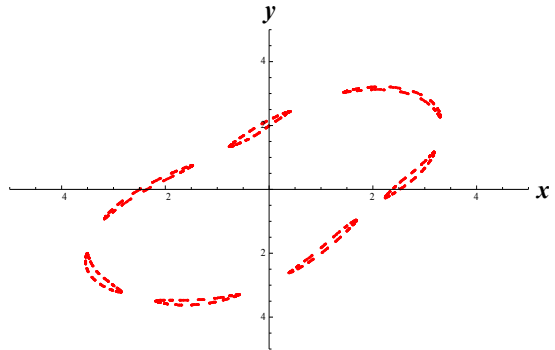
Tablo 4.16. Zaman Serisi Grafikleri

$w=0$	 <p>The plot for $w=0$ shows a regular, high-frequency oscillation. The vertical axis x ranges from approximately 1.5 to 2.5, and the horizontal axis t ranges from 0 to 300. The signal is a periodic wave with a constant amplitude and frequency.</p>
$w=0.1$	 <p>The plot for $w=0.1$ shows a regular oscillation with a slowly varying amplitude. The vertical axis x ranges from approximately -3 to 3, and the horizontal axis t ranges from 0 to 300. The signal is a periodic wave whose amplitude increases and then decreases over time.</p>
$w=0.2$	 <p>The plot for $w=0.2$ shows a regular oscillation with a slowly varying amplitude, similar to the $w=0.1$ case. The vertical axis x ranges from approximately -3 to 3, and the horizontal axis t ranges from 0 to 300. The signal is a periodic wave whose amplitude increases and then decreases over time.</p>
$w=0.5$	 <p>The plot for $w=0.5$ shows a regular oscillation with a slowly varying amplitude. The vertical axis x ranges from approximately -4 to 4, and the horizontal axis t ranges from 0 to 300. The signal is a periodic wave whose amplitude increases and then decreases over time.</p>

Tablo 4.17. Zaman Serisi Grafikleri

$w=1$	 <p>A time series plot for $w=1$. The vertical axis is labeled x and ranges from -4 to 4 with major ticks at -4, -2, 2, and 4. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 300 with major ticks at 150, 200, 250, and 300. The plot shows a highly oscillatory signal with a period of approximately 100 units of t. The amplitude of the oscillations is roughly constant, with peaks reaching about 4 and troughs reaching about -4.</p>
$w=1.5$	 <p>A time series plot for $w=1.5$. The vertical axis is labeled x and ranges from -3 to 3 with major ticks at -3, -2, -1, 1, 2, and 3. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 300 with major ticks at 150, 200, 250, and 300. The plot shows a highly oscillatory signal with a period of approximately 100 units of t. The amplitude of the oscillations is roughly constant, with peaks reaching about 3 and troughs reaching about -3.</p>
$w=2$	 <p>A time series plot for $w=2$. The vertical axis is labeled x and ranges from 1.1 to 1.7 with major ticks at 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, and 1.7. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 300 with major ticks at 150, 200, 250, and 300. The plot shows a highly oscillatory signal with a period of approximately 100 units of t. The amplitude of the oscillations is roughly constant, with peaks reaching about 1.7 and troughs reaching about 1.1.</p>
$w=3$	 <p>A time series plot for $w=3$. The vertical axis is labeled x and ranges from 1.25 to 1.40 with major ticks at 1.25, 1.30, 1.35, and 1.40. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 300 with major ticks at 150, 200, 250, and 300. The plot shows a highly oscillatory signal with a period of approximately 100 units of t. The amplitude of the oscillations is roughly constant, with peaks reaching about 1.40 and troughs reaching about 1.25.</p>

4.7. Periyodik Besleme Altındaki Gürsey Instantonlarının Poincare Kesitleri

Tablo 4.18. Poincare Kesitleri	
$w=0.2$	 <p>A scatter plot in the x-y plane showing a dense, irregular cloud of red points. The x and y axes both range from -4 to 4 with tick marks at 2 and -2.</p>
$w=1$	 <p>A scatter plot in the x-y plane showing a dense, irregular cloud of red points. The x and y axes both range from -10 to 10 with tick marks at 5 and -5.</p>
$w=1.8$	 <p>A plot in the F-G plane showing a single, small, red closed loop. The F axis ranges from -2 to 2 and the G axis ranges from -2 to 2, with tick marks at 1 and -1.</p>
$w=2$	 <p>A plot in the x-y plane showing a red dashed closed loop. The x and y axes both range from -4 to 4 with tick marks at 2 and -2.</p>

Tablo 4.18 de periyodik besleme altında Gürsey instantonlarının w 'nın değişimine bağlı olarak çizilen Poincare kesitlerini görüyoruz. Poincare kesiti sistemin uzun-süreli davranışına ait faz yörüngesinin faz uzayında izlediği yol hakkında uzaysal ve zamansal bilgi sağlaması ve sistemin uzun-süreli davranışı hakkında daha iyi bilgi sahibi olabilmemiz açısından önemlidir. Periyodik besleme altında Gürsey instantonları için bulduğumuz Poincare kesitlerini de incelediğimizde w 'nın küçük değerleri için kaotik yapılar elde ederken yaklaşık olarak iki olduğu durumda ise kararlı bir yapıyla karşılaşıyoruz.

V. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kısa bir girişin ardından tezin genel kısımlar bölümünde solitonlar, solitonların parçacık fiziğindeki öneminden ve soliton tipi çözümler olan instantonlardan bahsedilmiş, soliton tipi çözümlere sahip bazı eşitliklere örnekler verilmiştir. Yazılan non-lineer spinör alan denklemlerinin parçacıkları yorumlamasındaki başarısının ardından, yeni non-lineer alan modelleri oluşturma çabalarına ve bunların tarihsel sürecine yine bu bölümde kısaca değinilmiş ve son olarak non-lineer dinamik ve kaos kısmı verilmiştir.

Duffing denklemi, tezde çalışılan spinör alanlı modeller olan Gürsey ve Thirring non-lineer spinör alan modelleri tezin malzeme ve yöntem kısmında tanıtılmıştır. Ayrıca hem Duffing hem de Gürsey ve Thirring non-lineer spinör alan denklemlerinin sabit noktaları (fix point) bulunmuş ve bu noktalar civarında sistemlerin kararlılık analizine bakılmış ve faz uzayları inşa edilmiştir. Bunlar yine tezin malzeme ve yöntem kısmında yer almaktadır.

Çalıştığımız modellerin hareket denklemlerinin non-lineer olması çözümlerin analitik yollarla bulunmasına engel olmaktadır. Bu yüzden de nümerik yöntemler kullanılarak çözümler bulunmuş ve bunların dinamiği ve evrimini incelemek için non-lineer dinamik analiz metodları kullanılmıştır. Non-lineer denklem sistemlerinin sayısal çözümleri, son yıllarda büyük bir gelişme gösteren bilgisayarların sağladığı olanaklar kullanılarak elde edilebilmektedir. Tezin özgün kısmını oluşturan bulgular bölümünde öncelikle Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzayı davranışları karşılaştırılmıştır. Ayrıca bulgular kısmının önemli bir bölümünü teşkil eden kuvantum tedirgeme ve periyodik besleme altında Gürsey instantonları ve faz uzayı davranışları incelenmiştir. Gürsey instantonları için bifürkasyon diyagramı verilmiş ve elde edilen diğer bulgularla uyumluluğu yorumlanmıştır. Aynı zamanda periyodik besleme altındaki Gürsey instantonları için de bifürkasyon diyagramı çizilmiştir. Tezin bulgular kısmında son olarak periyodik besleme altındaki Gürsey instantonlarının zaman serileri ve Poincare kesitleri verilmiştir.

Her iki model için, boyutsuzlaştırma işlemi gerçekleştirirken kullanılan sabitler, bağlantı sabiti ve keyfi spinör sabitinden oluşan ifadeye en genel halde α denmiş ve α 'nın değerlerine göre bulduğumuz sabit noktalar için özdeğerler hesaplanmıştır. Daha önce yapılmış olan çalışmalarda $\alpha=1$ olduğu durum için konformal simetrimin kendiliğinden kırılması tekniği kullanılarak instanton çözümleri bulunmuş ve bunların kararlı olduğu gösterilmiştir [14,16]. Dolayısıyla tezde de bu değer üzerinde durulmuş ve $\alpha=1$ olduğu durum ve civarları incelenmiştir. α 'nın bu değerleri göz önüne alınarak bulunan sabit noktalar için hesaplanan özdeğerlerin hepsi her iki spinör alanlı modelimiz içinde kompleks bulunmuştur. Bu da bize her iki model instantonları için bulduğumuz sabit noktaların eliptik olduğunu ve sistemin α 'nın söz konusu değerleri için sabit noktalar civarında kararlı bir davranış sergilediğini gösterir. En genel hal düşünülerek bulunan özdeğerlerin genel ifadeleri hesaplandığında;

Gürsey instantonları için

$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{9 - \frac{16\alpha FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} - \frac{80}{3} \alpha^2 (F^2 + G^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (4.1)$$

Thirring instantonları için

$$\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - 8\alpha FG - 12\alpha^2 (F^2 + G^2)^2} \quad (4.2)$$

elde edilir ki her iki modelimiz için de sabit noktaların α 'ya bağlı ifadelerini yerine yazıp α 'nın sıfırdan büyük olduğu değerler için karakök içini tarattığımızda, Gürsey instantonları için -12 ve Thirring instantonları için -4 değerini elde ederiz. Yani her iki model için de bulduğumuz özdeğerler daima kompleks olur. Bu da her iki sistemin tüm bu değerler için sabit noktalar civarında kararlı davranışlar sergilemeye devam ettiğini göstermektedir. Bulduğumuz bu sonuç, konformal simetrimin kendiliğinden kırılması yöntemiyle elde edilen ve sonra kararlı oldukları gösterilen instanton çözümleriyle uyum

içindedir. Böylece farklı bir teknik kullanılarakta Gürsey ve Thirring instantonlarının kararlılığı gösterilmiş olunur. Ayrıca tezimizin yine bulgular kısmında yer alan faz uzayları incelendiğinde de her iki sisteminde faz uzayında sabit noktalar civarında kararlı davranışlar sergiledikleri aşıkardır. Bu tez çalışması sırasında elde edilen ilk sonuçtur.

Ayrıca tezde yine bulgular kısmında 4.1. alt başlıkta verilen bölüm incelendiğinde ve burada verilen faz uzayları göz önünde bulundurulduğunda spinör alanlı her iki modelimizin instantonlarının faz uzayında Duffing tipi davranışlar sergilediği görülür.

Şimdiye kadar tartıştığımız göz önünde bulundurulduğunda kolayca farkedilir ki Gürsey ve Thirring instantonlarının faz uzaylarının yapısı ve sergiledikleri davranışların karakteristiği çok benzerdir. Bu üzerinde durulması ve düşünülmesi gereken bir sonuçtur. Çünkü incelenen her iki model de gerek boyutları gerekse spinör kuvantum sayıları bakımından birbirinden farklıdır. Dört boyutlu Gürsey ve iki boyutlu Thirring instantonları için bulduğumuz sonuçları karşılaştırdığımızda instantonların faz uzayındaki davranışlarının boyutları gibi kuvantum spinör sayılarından da bağımsız olduğu sonucunu elde ederiz. Yani spinör tipi instantonların faz uzayındaki davranışları boyut ve spinör kuvantum sayılarından bağımsız olarak benzer davranışlar sergiler. Daha önce genel kısımlarda bahsettiğimiz Heisenberg ve arkadaşlarının (ünlü “Heisenberg Dream”) çalışmalarının bir alternatifi olarak elde edilen bu sonuçlar, tüm spinör tipi parçacıkların kuvantum farkındalığı olarak yorumlanabilir ki bu yapılan tezin özgünlüğü açısından elde edilen önemli sonuçlardan biridir. Bu fikir aynı zamanda spinör tipi instantonların kuvantum alanlar teorisinde tanımlanması fırsatını doğurur [28].

Kuvantum tedirgeme altındaki Gürsey instantonları için bulunan sonuçlar ilginçtir. Kuvantum tedirgeme altında, vakum durumuna tekabül eden kararlı durumdaki instantonların kendi aralarında tedirgediğini düşünebiliriz. Bu durum için sonrasında oluşan yapılar da kararlıdır. Daha önce farklı bir yöntem uygulanarak [9] gözlemlenemeyen bu sonuca bu tekniği kullanarak ulaşabiliriz ki bu kullandığımız tekniğin bize kazandırdığı önemli bir avantajdır. Bu sonucu vakum durumuna tekabül

eden instantonların kuvantum tedirgeme altında kendi aralarında organize olarak kararlı spinör tipi parçacıkların oluşumuna yol açtığı şeklinde yorumlamak mümkündür.

Periyodik besleme altındaki Gürsey instantonları için, genlik ve frekans değerleriyle oynanarak Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarındaki değişimler incelenmiş ve faz uzayı davranışlarında bozunmalar olduğu gözlemlenmiştir. $\alpha = 1$ için faz uzayında kararlı davranışlar sergileyen Gürsey instantonları, periyodik besleme altında bozulmalara uğramış ve genlik sabit tutularak frekans değerleriyle oynandığında frekansın belli değerleri için kararlılığın iyice bozularak sistemin kaotik davranışlar sergilemeye başladığı görülmüştür. Fakat frekansın artan değerleri için sistem kendini toparlayıp tekrar kararlı davranışlar sergilemeye devam etmektedir. Frekansı sabit tutup genliğin farklı değerleri için faz uzayları inşa edildiğinde de, Gürsey instantonlarının faz uzayı davranışlarında bozulmalar olduğunu ve kaotik davranışlar sergilemeye başladığını görüyoruz. Tüm bu faz diyagramları göz önüne alındığında, periyodik besleme altında vakum durumuna tekabül eden instantonların, faz uzaylarında sergiledikleri kararlı yapının bozulduğunu ve sistemin artık kaotik davranışlar sergilemeye başladığını söyleyebiliriz. Frekans ve genliğin değerlerine bağlı olarak bu kaotiklik azalmakta ya da artmaktadır.

Elde edilen tüm bu sonuçlar neticesinde, yeni bir Heisenberg rüyası ve de Higgs mekanizmasına da bir alternatif olarak, instantonların tedirgeyerek parçacık üretimine yol açıp açmayacağı fikri üzerine araştırmalar yapmak mümkündür.

Tezde spinör tipi instanton çekicilerin faz uzayı davranışları incelenmiş ve daha önce yapılmış başka çalışmalara da konu olan instanton çözümlerinin dinamik yapısı ile konformal simetrisinin kendiliğinden kırılması ile ortaya çıkan instanton çözümleri arasında ilişki kurulmaya çalışılmıştır. Spinör alanlı fakat boyut ve kuvantum spinör sayıları birbirinden farklı iki model birbiriyle karşılaştırılmış ve elde edilen önemli sonuçlar vurgulanmıştır. Ayrıca vakum durumuna tekabül eden instantonların kuvantum tedirgeme ve periyodik besleme altındaki dinamiği incelenmiş ve ortaya çıkan sonuçlar fiziksel olarak yorumlanmaya çalışılmıştır.

CERN (Avrupa Nükleer Araştırma Merkezi) ve dünyada daha başka birçok merkez ve laboratuvarlarda süregelen ve maddenin yapıtaşlarının nasıl davrandığını ve de birbirleriyle olan etkileşimlerini açıklayan “Standart Model” in henüz cevaplayamadığı sorulara yanıtlar bulmak amacıyla gerçekleştirilen deneyler devam etmektedir. Bu tezde bulunan ve öngörölen bazı sonuçların önemi ve özgünlüğü süregelen bu deneyler neticelenmeye başlandığında daha da iyi anlaşılacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] REBBI, C. ve SOLLIANI, G., 1984, *Solitons and Particles*, World Scientific, Singapore; DAUOXOIS, T ve PEYRARD, M., 2006, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press.
- [2] RAJARAMAN, R., 1982, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 0444870474; DUNAJSKI, M., 2009, *Solitons, Instantons and Twistors*, Oxford University Press.
- [3] GUCKENHEIMER J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 42.
- [4] AYDOĞMUŞ F., 2007, “*Uzaysal Evrimde Gürsey İstantonlarının Kararlılığı*”, Yüksek Lisans Tezi, İÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [5] MERTENS, F. G., QUINTERO, N. R. ve SANCHEZ, A., 2000, Existence of Internal Modes of sine-Gordon Kinks, *Physical Review E* 62, R 60-63.
- [6] EILENBERG, G., 1981, *Solitons in Nuclear and Elementary Particle Physics*, World Scientific, Singapore.
- [7] GÜRSEY, F., 1956, *On a Conform-Invariant Spinor Wave Equation*, II Nuova Cimento, vol. 3, No.5, 988-1006.
- [8] KRASKIEVICZ, J. ve RACZKA, R., 1986, *Trajectories of Excited Fermion States in Pure Fermion Models of Quantum Field Theory*, II Nuova Cimento, vol. 93 A, N.1, 28-38.

[9] AKDENİZ, K. G., ARIK, M., DURGUT, M., HORTAÇSU, M., KAPTANOĞLU, S., PAK, N., 1982, The *Quantization of the Gürsey Model*, Physics Letters, vol. 116 B, 34-36.

[10] SAĞALTICI, SERAP, 2004, *Gürsey Solitonlarının Düzensiz Dinamik Yapılarının İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[11] YANG, C. H., 1954, Phys. Rev., 96.

[12] ALFARO, V.D. and FURLAN, G., 1976, Nuovo Cimento, 34a,555.

[13] THIRRING, W.E., 1958, *A Soluble Relativistic Field Theory*, Annal Physics, Vol.3,91-112.

[14] AKDENİZ, K. G. ve SMAILAGIC, A., 1979, *Classical Solitons for Fermionic Models*, II Nuova Cimento, vol. 51A, No.3, 345-357.

[15] 'T HOOFT, G., 1974, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theoris*, Nucl. Phys. B 79, 276-284; Polyakov, A. M., 1974, *JETP Lett.* 20, 194.

[16] AKDENİZ, K. G., 1982, *Classical Solutions of the Gürsey' s Conformal-Invaryant Spinor Model*, Lettere al Nuova Cimento, vol.33, 40-44.

[17] KORTELE, F., 1956, *On Some Solutions of Gürsey' s Conformal- Invariant Spinor Wave Equation*, II Nuova Cimento, vol.4, No.2, 210-215.

[18] HEISENBERG, W. 1954, *Zeits.f. Naturf.* 9a, 292.

[19] STROGATZ STEVEN H., *Nonlinear Dynamics and Chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books, ISBN 9780201543445; SCOTT, A., 1999, *Nonlinear Science*, Oxford University Pres, Oxford, 01985017 2.

- [20] RIZAOĞLU, E., 2011, *Klasik Mekanik*, Seçkin Yayıncılık.
- [21] CAMBEL, A. B., 1993, *Applied Chaos Theory a Paradigm for Complexity*, Academic Press, Boston, 0121559408; SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W., IOOSS, G. ve MOON, F. C., 1988, *Chaotic Motions in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer Verlag Wien, New York, 3211820620.
- [22] G. Duffing, 1918, *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz.*, F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig.
- [23] AYDOĞMUŞ F., CANBAZ B., ÖNEM C., AKDENİZ K. G., 2012, “*The Behaviours of Gursev Instantons in Phase Space*”, 2012 (yayına gönderildi); AYDOĞMUŞ F., AKDENİZ K. G., SAĞALTICI S. and ÖNEM C., 2009, “*On the Duffing Type Behaviors of Gursev Instantons*” , Beykent University Journal of Science and Technology (BUJST), vol.3, no.1, 120-126.
- [24] CANBAZ B., ÖNEM C., AYDOĞMUŞ F., AKDENİZ K. G., 2012, “*From Heisenberg Ansatz to Attractor of Thirring Instanton*”, *Chaos Solitons & Fractals*, vol.45, 188-191.
- [25] DIRAC, P. A. M., 1974, *Spinors in Hilbert Space*, Plenum Press, New York, 0306307987.
- [26] POLYAKOV, A. M., SCHWARTZ, A.S. and TYUPKIN, Yu. S. ,1975, *PHYS. Lett.*B59,85.
- [27] CHANG, T-P. ve LI, L-F. 1984, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Clarendon Press, Oxford; LEE, T. D., 1981, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishers, Chur, 3-7186-0032-3.
- [28] WITTEN E., 1996, *Small instantons in string theory*, *Nucl.Phys.* B460, 541-559.

EK A

KONFORMAL DÖNÜŞÜM GRUBU

Gürsey 1956 yılında önerdiği bu modelle spinör alan teorilerinde konformal invarianslığı deneyen ilk fizikçi olmuştur. Uzay ve zaman simetrilerinden daha geniş simetrilere olan ihtiyaç yapılan yüksek enerjili deneylerde ortaya çıkan reaksiyonların yeni korunumlar göstermesinden kaynaklanmaktadır. Bu simetriler, dinamik yapıyla birlikte; parçacığın kendine özgü, korunan büyüklükleri de keşfedilince ortaya çıkmaktadır bunlar: izospin, renk yükleri, çeşniler (acayıplık, cazibe, kuvantum sayıları..) gibi korunumlardır. Her korunumun bir simetri özelliğine karşılık geldiği bilinmektedir. Konformal simetri, bu simetrilerin geometrik özelliklerini kapsayan geniş simetrilere biridir.

Dört boyutlu konformal dönüşüm grubu;

$$\begin{aligned} \text{Öteleme} & : x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + a_{\mu} & (\text{Jeneratörü } P_{\mu}) \\ \text{Dönme (uzay-zaman)} & : x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \Omega'_{\mu\nu} x_{\nu} & (\text{Jeneratörü } M_{\mu\nu}) \\ \text{Dilatasyon (eşel invariyant)} & : x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \rho x_{\mu} & (\text{Jeneratörü } D_{\mu}) \\ \text{ve} & : x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = \frac{x_{\mu} + x^2 c_{\mu}}{1 + 2\vec{x} \cdot \vec{c} + c^2} & (\text{Jeneratörü } K_{\mu}) \end{aligned}$$

dür. Son dönüşüm, sırasıyla; ters çevirme, öteleme ve tekrar ters çevirme koordinat dönüşümlerinin arka arkaya tekrarlanmasından meydana gelmiştir. Bunlar özel konformal koordinat dönüşümleridir.

Konform invariyant spinör alan teorilerinde klasik çözümler (instanton ve meron) konformal simetrinin kendiliğinden kırılması ile bulunur. Vakum beklenen değerinin

$$\langle 0 | \bar{\Psi} \Psi | 0 \rangle \neq 0$$

sıfırdan farklı seçilmesi ile konformal simetri, spinör alanlar için kendiliğinden kırılmış olur.

Kendiliğinden simetri kırılması, dejenerer vakum sistemlerinde Lagrangiyende, vakum değerlerinden biriyle çalışma zorunluluğu olması ve vakumun Lagrangiyenin simetrisini

paylaşmamasından dolayı dışardan hiçbir vasıta olmadan gerçekleşir. Örneğin gravite üç boyutlu simetriyi aşağı ve yukarıyı, sağ ve soldan çok farklı yaparak kırar yada ince plastik bir cetvel aynı anda kenarlarından sıkılırsa eğri bir görünüş alır. Cetvel hem sağa hem de sola eğilebilir ikisi de sistemin temel seviyeleridir her biri sağ sol simetriyi kırar. Kendiliğinden olan bu simetri kırılması, sadece iki temel seviyeyle olan simetridir. Sürekli simetriten daha ilginçtir: Cetveli, plastik bir örgü şişi ile değiştirelim. Örgü şişi sadece sağa veya sola değil her yöne bükülür. Sürekli simetri durumunda kütleli skaler (0-spin) parçacıkların belirmesi dikkate değerdir. Bu Goldstone bozonları, mümkün iki vakum değerini birbirine bağlayan 0-enerji uyarımlarıdır.

EK B

PAULİ VE DIRAC MATRİSLERİ

1) Pauli Spin Matrisleri:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Özellikleri:

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$

b) i) $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = i \sigma_3$

ii) $\sigma_2 \cdot \sigma_3 = i \sigma_1$

iii) $\sigma_3 \cdot \sigma_1 = i \sigma_2$

c) i) $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_1 = 2i \sigma_3$

ii) $[\sigma_2, \sigma_3] = \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_2 = 2i \sigma_1$

iii) $[\sigma_3, \sigma_1] = \sigma_3 \cdot \sigma_1 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = 2i \sigma_2$

d) $\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3 = 0$

e) $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI$

2) Dirac Matrisleri:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

olarak tanımlanır. Bunlar;

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Özellikleri:

a) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\gamma^{\mu\nu}$ Anti-komütasyon

b) $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4I$

c) $[\gamma^\mu \gamma^\nu, \gamma^g] = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^g - \gamma^g \gamma^\mu \gamma^\nu = 2(\gamma^\mu \gamma^{\nu g} - \gamma^\nu \gamma^{\mu g})$

$$\text{d) } \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2\gamma_\nu$$

$$\text{e) } \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\mu = 4\gamma_{\nu g}$$

$$\text{f) } \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma \gamma_\mu = -2(\gamma_\sigma \gamma_g \gamma_\nu)$$

$$\text{g) } \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma \gamma_\tau \gamma_\nu = 2(\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_g \gamma_\sigma + \gamma_\sigma \gamma_g \gamma_\nu \gamma_\tau)$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma Aydoğmuş

Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul - 12.07.1982

Eğitim :

Doktora İstanbul Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Bölümü, Yüksek Enerji Fiziği Anabilim
Dalı (2007-2012)

Yüksek Lisans İstanbul Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Bölümü, Yüksek Enerji Fiziği Anabilim
Dalı (2007)

Lisans İstanbul Üniversitesi, Fen Fakóltesi
Fizik Bölümü (2004)

Lise Cibali Lisesi (1999)

İlköğrenim Atatürk İlköğretim Okulu (1996)
Mimarsinan İlkokulu (1993)

Yabancı Dil : İngilizce

Çalıştığı Kurum : İstanbul Üniversitesi , Fen Fakóltesi
Fizik Bölümü, Yüksek Enerji Fiziği Anabilim
Dalı, Araştırma Görevlisi(2006-....)

YAYINLAR

Aydogmus Fatma, Canbaz Beyrul, Onem Cem, Akdeniz K. Gediz, “*The Behaviours of Gursev Instantons in Phase Space*”, Pramana Journal of Physics, 2012 (to be submitted).

Canbaz Beyrul, Onem Cem, **Aydogmus Fatma**, Akdeniz K. Gediz, “*From Heisenberg Ansatz to Attractor of Thirring Instanton*”, Chaos Solitons & Fractals, vol.45, 188-191, 2012.

Canbaz Beyrul, Onem Cem, **Aydogmus Fatma**, Akdeniz K. Gediz, *The Role of Coupling Constant in the Evolution of Thirring Instantons*, Balkan Physics Letters, 15 (1), 151061, 2009.

Aydogmus Fatma, Akdeniz K. Gediz, Sagaltıcı Serap, Onem Cem, *On The Duffing Type Behaviors of Gursev Instantons*, Beykent University Journal of Science and Technology (BUJST), vol.3, no.1, 120-126, 2009.

Aydogmus Fatma, Akdeniz K. Gediz, IV. International Symposium on Sciences of Atmosphere, *Global Climate Change and Human with A Syborg Science Doctrin*, Edited by Prof. Dr. Mikdat Kadioglu and Assoc. Dr. Ahmet Duran Sahin, 437-443, 2008.

Aydogmus Fatma, Akdeniz K. Gediz, Nuclear Energy Symposium, *Is Global Climate Change Chaotic ?*, Edited by Alkan Alkaya and Bulent Halisdemir, 86-89, 2007.

Aydogmus Fatma, Akdeniz K. Gediz, Global Climate Change and Forest for Resolve The Water Problems, *Is Temporal Evolution of Global Climate Change Chaotic?*, Edited by Prof. Dr. Unal Akkemik, 229-231, 2007.

SÖZLÜ BİLDİRİLER

Aydogmus Fatma, Canbaz Beyrul, Önem Cem, Akdeniz K. Gediz, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, “*From Thirring Instantons to Gursej Instantons in Phase Space*“, 25-28 Mayıs 2010, Dresden, Almanya.

Aydogmus Fatma, Canbaz Beyrul, Önem Cem, Akdeniz K. Gediz, 27. Uluslararası Fizik Kongresi, “*On stability of Thirring Instantons*“, 24-27 Eylül 2009, Bodrum, Türkiye.

Aydogmus Fatma, Canbaz Beyrul, Önem Cem, Akdeniz K. Gediz, 7th BPU General Conference, “*Duffing Attractor Like Behaviours of Gursej and Thirring Instantons*“, 9-13 Eylül 2009, Alexandroupolis, Yunanistan.

Aydogmus Fatma, Önem Cem, Canbaz Beyrul, Akdeniz K. Gediz, 9. Workshop on Dynamic Systems, “*Instanton Type Solutions of Thirring Nonlinear Wave Equation and Behaviours in Phase Space*“, 18-19 June 2009, Izmir Üniversitesi, Izmir, Türkiye.

Aydogmuş Fatma, Akdeniz K. Gediz, IV. International Symposium on Sciences of Atmosphere, *Global Climate Change and Human with a Syborg Science Doctrin.*, 25-28 Mart 2008, Istanbul Teknik Üniversitesi, Istanbul, Türkiye.

Aydogmuş Fatma, Akdeniz K. Gediz, Nuclear Energy Symposium, *Is Global Climate Change Chaotic?*, 19-20 Ekim 2007, Mersin, Türkiye.

Aydogmuş Fatma, Akdeniz K. Gediz, Global Climate Change and Forest for Resolve The Water Problems, *Is Temporal Evolution of Global Climate Change Chaotic?*, 13-14 Aralık 2007, Istanbul Üniversitesi, Orman Fakültesi, Istanbul, Türkiye.

Akdeniz K. Gediz , **Aydogmus Fatma**, Sağaltıcı Serap, Önem Cem, “*Chaotic Dynamics of Gursev Instantons in Phase Space*”, “Nonlinear Dynamical Analysis – 2007” 4-8 Haziran 2007, Saint-Petersburg State Üniversitesi, Rusya.

Aydogmus Fatma, “*Global Warming and Chaos*”, VII. Duzensiz Sistemler Sempozyumu, 23–29 Ağustos 2005, Karaburun, İzmir, Türkiye.

SEMİNERLER

Aydogmus Fatma, “*The Behaviours of Spinor Type Instantons in Phase Space*”, DESY, 1 Haziran 2010, Hamburg, Almanya.

Aydogmus Fatma, “*Gursev Instantons and Heisenberg Ansatz*”, Max Planck Institute (MPI), 10 June 2010, Munich, Almanya.

BİLİMSEL FAALİYETLERDE DÜZENLEME KOMİTESİ ÜYELİĞİ

IV. Nonlinear Düşünceler ve Uygulamaları Sempozyumu, 13-19 Eylül 2011, Bodrum, Türkiye (Sempozyum Koordinatör Yardımcısı).

VI. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 28 Mayıs 2011, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

III. Nonlinear Düşünceler ve Uygulamaları Sempozyumu, 20-26 Eylül 2010, Bodrum, Türkiye (Sempozyum Koordinatör Yardımcısı).

V. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 10 Mayıs 2010, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

II. Nonlinear Düşünceler ve Uygulamaları Sempozyumu, 24-27 Eylül 2009, Bodrum, Türkiye (Sempozyum Koordinatör Yardımcısı).

VI. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 30 Mayıs 2009, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

I. Nonlineer Düşünceler ve Uygulamaları Sempozyumu, 20-27 Eylül 2008, Bodrum, Türkiye (Sempozyum Koordinatör Yardımcısı).

III. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 31 Mayıs 2008, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

II. İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 19 Mayıs 2007, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

1933-1982 Dönemi İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü Tarihi Sempozyumu, 10-11 Haziran 2006, İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye (Organizasyon Komitesi).

BİLİMSEL FAALİYETLERE KATILIM

International School of Subnuclear Physics, Searching For The Unexpected at LHC And Status of Our Knowledge (49th Course), Co-Directors of the Course: G.'T HOOFT - A. ZICHICHI, 24 Haziran-3 Temmuz 2011, Erice,İtalya.

CERN (European Organization for Nuclear Research), 18-25 Haziran 2010, Cenevre, İsviçre.

Max Planck Institue (MPI), 6-18 Haziran 2010, Münih, Almanya.

DESY, 1-5 Haziran 2010, Hamburg, Almanya.

III. İstanbul Üniversitesi Bilim Günleri, 16 Nisan 2008, İstanbul Üniversitesi Ord. Prof. Dr. Cemil Bilsel Konferans Salonu , İstanbul, Türkiye.

XI. Sıvıhal Fiziği Sempozyumu, 27-30 Eylül 2007 , İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye.

VII. Uluslar arası ‘Düzensiz Sistemler ve Uygulamaları’ Çalışma Grubu Sempozyumu, 21–27 Ağustos 2007, Karaburun, İzmir , Türkiye.

X. Sıvıhal Fiziği Sempozyumu, 28 Eylül -1 Ekim 2006 , İstanbul Üniversitesi Baltalimanı Tesisleri, İstanbul, Türkiye.

VI. International Conference of the Balkan Physical Union, 22-26 Ağustos 2006, İstanbul Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

I. Interdisciplinary Chaos Symposium, Chaos and Complex Systems, 12–13 Mayıs 2006, Kültür Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

World Year of Physics 2005-23rd International Physics Congress of Turkish Physical Society, Muğla Üniversitesi, 13–16 Eylül 2005, Muğla, Türkiye.

12. İstatiksel Fizik Günleri, 30 Haziran–2 Temmuz 2005, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.

IV. Ulusal ‘Düzensiz Sistemler ve Uygulamaları’ Çalışma Grubu Sempozyumu, 22–29 Ağustos 2007, Karaburun, İzmir , Türkiye.