İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI GRUPLARIN İNDİRGENEMEZ KOMPLEKS GÖSTERİLİŞLERİNİN DERECELERİ

Utku YILMAZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Danışman

Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU

İSTANBUL

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI GRUPLARIN İNDİRGENEMEZ KOMPLEKS GÖSTERİLİŞLERİNİN DERECELERİ

Utku YILMAZTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Danışman

Prof. Dr. İ. Müfit GİRESUNLU

İSTANBUL

2602060049 öğrenci numaralı Utku YILMAZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma 11/06/ 2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof.Dr. İ. Müfit GİRESUNLU (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr.Leyla ZEREN AKGÜN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof.Dr. İsmail Ş. GÜLOĞLU
Doğuş Üniversitesi
Fen- Edebiyat Fakültesi

Prof.Dr. Nazım SADIK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Ahmet FEYZİOĞLU
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğinin 4383 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Maalesef doktora çalışmamın sadece son bir yılında kendisiyle çalışma fırsatı bulabildiğim, fakat yine de bir araya geldiğimiz seminerlerde, tecrübelerini ve bilgilerini, esirgemeyerek, bu tez çalışmasının meydana gelmesinde çok önemli katkıları olan, değerli hocam Prof. Dr. İsmail Ş. GÜLOĞLU' na şükranlarımı sunarım.

Danışman hocam İ. Müfit GİRESUNLU' ya ve tez izleme komitesinde yer alan hocam Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN'e ihtiyac duyduğumda yanımda oldukları ve her zaman gösterdikleri olumlu tavırları için teşekkür ederim.

Gerek yüksek lisans öğrenimim sırasında, gerekse sonlu grupların karakter teorisini çalışmaya başladığımda, hiç bir sorumu cevapsız bırakmayan, çalışma prensiplerini ve disiplinini kendime örnek almaya çalıştığım, kendisinden çok şey öğrendiğim ve üzerimde büyük emeği olan değerli hocam Prof.Dr. Özdem ÇELİK'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Yüksek lisansa başladığım günden bugüne aynı çalışma ortamında bulunduğum, çeşitli konularda seminerler yapıp sürekli bilgi alışverişinde bulunarak, bilgilerimin genişlemesine katkı sağlayan, bu çalışmanın oluşması sırasında da önemli katkılarda bulunan, hayatımı paylaştığım sevgili eşim, Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK' e hep yanımda olduğu ve her zaman beni desteklediği için teşekkür ederim.

Arkadaşım Serkan İLTER'e herhangi bir konuda yardıma ihtiyacım olduğunda her zaman koşarak geldiği için teşekkür ederim.

Babam Şahin YILMAZTÜRK, annem Emine YILMAZTÜRK ve kardeşlerim Bahri Şah YILMAZTÜRK ve Müge YILMAZTÜRK' e ailem oldukları ve her zaman beni destedikleri için çok teşekkür ederim.

Mayıs 2012 **Utku YILMAZTÜRK**

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\boldsymbol{cd(G)}$	: G grubunun indirgenemez karakterlerinin derecelerinin kümesi
$\boldsymbol{dl(G)}$	: G grubunun türev uzunluğu
$\boldsymbol{\mid A \mid}$	: Bir A kümesinin eleman sayısı
$\boldsymbol{S^x}$	: Bir G grubunun S alt grubunun $x \in G$ ile dönüştürülmüşü
$\boldsymbol{N \lhd G}$	: N, G nin normal at grubudur
$\boldsymbol{G/N}$	: G grubunun N normal alt grubunu göre bölüm grubu
$\boldsymbol{A \not\subset B}$	: A kümesi, B kümesinin alt kümesi değildir.
$\boldsymbol{A < B}$	: A kümesi, B kümesinin bir alt kümesidir ve $A \neq B$ dir.
$\boldsymbol{Syl_p(G)}$	: G grubunun p asal sayılarına karşılık gelen Sylow alt gruplarının kümesi
$\boldsymbol{F(G)}$	: G grubunun Fitting alt grubu
$\boldsymbol{tr(C)}$	: Bir C matrisinin izi
$\overline{\alpha}$	: α kompleks sayısının kompleks eşleniği
$\mid \alpha \mid$	: α kompleks sayısının normu
$\boldsymbol{n_p}$	: n doğal sayısının p kısmı
$\boldsymbol{\pi(n)}$	: n doğal sayısının asal bölenlerinin kümesi
$\boldsymbol{a \mid b}$	: a doğal sayısı b doğal sayısını böler
$\boldsymbol{a \nmid b}$	: a doğal sayısı b doğal sayısını bölmez
■	: İspat bitmiştir
$\boldsymbol{Irr(G)}$	: G grubunun tüm indirgenemez kompleks karakterlerinin kümesi
$\boldsymbol{Z(G)}$	: G grubunun merkezi
$\boldsymbol{N_G(H)}$	: H alt grubunun G içindeki normalizatörü
$\boldsymbol{G \cong H}$	: G ve H grupları birbirine izomorftur
$\boldsymbol{GL(n,\mathbb{C})}$	: $n \times n$ lik tüm tersinir kompleks matrislerin grubu
$\boldsymbol{GL(2,3)}$	: 3 elemanlı cisim üzerinde, tüm 2×2 lik tersinir matrislerin grubu
$\boldsymbol{SL(2,3)}$	: 3 elemanlı cisim üzerinde determinantı 1 olan tüm 2×2 lik matrislerin grubu

ÖZET

BAZI GRUPLARIN İNDİRGENEMEZ KOMPLEKS GÖSTERİLİŞLERİNİN DERECELERİ

Bu tez çalışmasında bazı sonlu çözülebilir grupların türev uzunlukları ile bu grupların indirgenemez kompleks gösterilişlerinin derecelerinin sayısı arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu incelenen gruplarda, grubun türev uzunluğunun, indirgenemez kompleks gösterilişlerinin derecelerinin kümesinin eleman sayısını aşamayacağı yani bu gruplarda Taketa eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilmiştir.

"Genel Kısımlar" bölümünde, bulgular kısmında ispatlanan teoremlerin anlaşılması için gerekli tanımlar verilmiştir. Ayrıca, teoremlerin ispatında kullanılan, konuyla ilgili gerekli teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Çalışmanın yöntem kısmında ise, "Bulgular" bölümünde ispatlanan teoremlerde kullanılan yöntemler açıklanmıştır.

Son olarak "Bulgular" bölümünde Taketa eşitsizliği için bazı yeterli koşullar verilmiştir.

SUMMARY

THE DEGREES OF IRREDUCIBLE COMPLEX REPRESENTATIONS OF SOME GROUPS

In this thesis study, the relation between derived length of some groups and the number of irreducible character degrees of these groups is investigated. It is shown that, in these groups, derived length of group never exceeds the number of irreducible character degrees of that group i.e., Taketa inequality holds for this groups.

In “General Parts” section, it is given some definitions which are used in the theorems proved in the “Results” section. Also, some basic theorems and lemmas which are necessary to prove the theorems in the “Results” section are given with their proofs.

Finally, in the “Results” section some sufficient conditions for the Taketa inequality are given.

1. GİRİŞ

G bir sonlu grup olsun. Bu durumda, G grubunun tüm indirgenemez karakterlerinin derecelerinin kümesi olan $cd(G)$ kümesi ile G grubunun yapısı arasında birtakım ilişkiler vardır. Bunlardan bazıları şunlardır: En basitinden, bir G grubunun abelyen olması için bir gerekli ve yeterli koşul $cd(G)=\{1\}$ olmasıdır. Bunun dışında, $|cd(G)|\leq 2$ olması durumunda, G nin komütatör grubu, G', abelyendir. Thompson'ın bir teoremi ise, p sabit bir asal sayı olmak üzere, eğer $cd(G)$ nin 1 dışındaki bütün elemanları p ile bölünüyorsa, G nin bir normal $p-$ komplemente sahip olduğunu söyler. Bir başka ilişki ise, $cd(G)$ nin her elemanının sabit bir p asalının kuvveti olması durumunda, G nin bir abelyen normal $p-$ komplemente sahip olmasıdır. Dolayısıyla, $cd(G)$ kümesi, grubun yapısından bağımsız, birtakım doğal sayılardan oluşmuş sıradan bir küme değil, grubun yapısıyla ilgili "kodlanmış" bilgiler içeren önemli bir kümedir. Belki de bu öneminden dolayı, günümüze kadar bu küme ile ilgili bir çok çalışmalar yapılmış ve günümüzde de hala çalışmalar yapılmaya devam edilmektedir ve belli bir süre daha $cd(G)$ kümesinin, sonlu gruplar üzerine çalışan araştırmacıların, çalışma konuları arasındaki yerini koruması muhtemeldir.

$cd(G)$ kümesi ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmı, çözülebilir gruplarda, bu kümenin eleman sayısı ile $dl(G)$ (G nin "türev uzunluğu") arasındaki ilişkiyi araştırmak üzerinedir. Bu ilişki üzerine yapılan çalışmaların fitilini ateşleyen gelişme, Taketa'nın $M-$ gruplarının çözülebilir olduğunu ispatlaması ve bunu ispatlarken aynı zamanda, G bir $M-$ grubu olmak üzere, $dl(G)\leq|cd(G)|$ eşitsizliğini de göstermiş olması sayılabilir. Bu gelişmenin ardından Seitz ve Isaacs tarafından, adına Taketa eşitsizliği verilen, $dl(G)\leq|cd(G)|$, eşitsizliğinin bütün çözülebilir gruplar için geçerli olduğu sanısı ortaya atılmıştır. Bugüne kadar, ne Taketa eşitsizliğinin tüm çözülebilir gruplar için geçerli olduğu ispatlanabilmiş ne de bu eşitsizliği sağlamayan bir çözülebilir grup örneği verilebilmiştir. Fakat yine de çözülebilir gruplarda, $dl(G)$ ile $cd(G)$ kümesinin eleman sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyen bir çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları şöyle sıralanabilir:

1. $|cd(G)| \leq 3$ ise, G çözülebilirdir ve $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir (Isaacs, 1969)
2. G çözülebilir ve $|cd(G)| = 4$ ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ (Garrison, 1973)
3. $|G|$ tek ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ (Berger, 1976)
4. G bir çözülebilir grup ise, $dl(G) \leq 3|cd(G)|$ (Isaacs, 1975)
5. G bir çözülebilir grup ise, $dl(G) \leq 2|cd(G)|$ (Gluck, 1985)
6. G nin indirgenemez kompleks karakter derecelerinin (ortak bölen) grafında ayrık bileşenlerin sayısı 3 ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ (Lewis, 1998)
7. G' nilpotent ise, $dl(G) \leq |cd(G)|$ (Isaacs ve Knutson, 1998)
8. G çözülebilir ve $|cd(G)| = 5$ ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ (Lewis, 2001)

Bu tez çalışmasında Taketa eşitsizliği ile ilgilenilecektir. Tezin, "Genel kısımlar" bölümünde, konunun anlaşılması için gerekli kavramların tanımları verilip, konuyla ilgili bilinen teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Tezin özgün kısmını oluşturan "Bulgular" bölümünde ise, öncelikle. çözülebilir gruplarla ilgili bölüm gruplarına taşınır (tanım için bkz tanım 4.1) bir koşul verildiğinde, bu koşulu sağlayıp, Taketa eşitsizliğini sağlamayan bir çözülebilir grup varsa, bu gruplar içinde mertebesi minimal olan bir grubun yapısı hakkında bazı veriler elde edilmiştir. Bir teorem hariç, diğer tüm teoremlerin ispatlarında, bu verilerden faydalanılmıştır. Yukarıda belirtildiği gibi, Isaacs ve Knutson (1998) sonlu bir G grubu için G' nilpotent olduğunda, $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini göstermiştir. Bu çalışma, günümüze kadar, $dl(G)$ ile $|cd(G)|$ arasındaki ilişki üzerine yapılan çalışmalar arasında, G' ile ilgili bir hipotez içeren tek çalışmadır. Bu makaleden esinlenerek, bu tez çalışmasında, G'

veya G' nün bazı alt grupları ile ilgili birtakım farklı hipotezler altında Taketa eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanmıştır. Bunun dışında, indirgenemez karakterlerin dereceleri ile çekirdekleri arasındaki bir hipotez altında da Taketa eşitsizliğinin gerçeklendiği ispatlanmıştır. İspatlanan bir başka yeterli koşul ise, grubun Hall alt grupların asal bölenlerinin kümesi ile bu Hall alt gruplarının komütatör gruplarının asal bölenlerinin kümesi ile ilgilidir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu tez çalışmasında sadece sonlu gruplar ile ilgilenilecektir ve (yazılış kolaylığı sağlayabilmek için) grup denildiğinde sonlu grup kastedilecektir. Genel kısımlar bölümündeki teoremlerin bazıları, ispatlarından anlaşılabileceği gibi, sonlu olmayan gruplar için de doğrudur. Fakat bazı teoremlerin, mesela ispatı grubun mertebesi üzerinden tümevarımla yapılanların, sonsuz gruplar için de geçerli olması ve hatta bu teoremlerin sonsuz gruplar için manalı olmaları bile gerekmeyebilir. Örneğin teorem 2.1.26 sonlu süperçözülebilir gruplarda, grubun mertebesinin her doğal bölenine karşılık, o böleni mertebe kabul eden bir alt grup olduğunu söylemektedir. Fakat, bu teorem sonsuz gruplar için bir mana ifade etmemektedir.

Bu bölümle ilgili daha detaylı bilgi için Isaacs(2006), Isaacs(2008) ve Isaacs(2009) eserlerine bakılabilir.

2.1. ÇÖZÜLEBİLİR GRUPLAR VE GRUP TEORİSİ

Teorem 2.1.1 G bir grup, $N \lhd G$ ve K, N nin bir karakteristik alt grubu olsun. Bu durumda, $K \lhd G$ dir.

İspat. $g \in G$ olsun. $N \lhd G$ olduğundan, $\varphi : N \to N;\ x \mapsto g^{-1}xg$, N grubunun bir otomorfisidir. O halde, K, N nin bir karakteristik alt grubu olduğundan, $K^g = \varphi(K) \subseteq K$ kapsaması elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur ■

Tanım 2.1.2 G bir grup olsun. Eğer G nin

"Her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, G_{i+1}/G_i abelyendir (devreseldir)"

koşulunu sağlayan $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_r = G$ $(r \in \mathbb{N})$ normal alt grupları varsa G ye bir çözülebilir (süperçözülebilir) grup denir.

Not 2.1.3 Devresel gruplar abelyen olduğundan, tanımdan hemen anlaşılabileceği gibi süperçözülebilir gruplar çözülebilirdir.

Tanım 2.1.4 G bir grup olsun. Bu durumda, $G' := < g^{-1}h^{-1}gh \mid h, g \in G >$ biçiminde tanımlanan, G' grubuna G nin komütatör grubu denir. n negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, G nin n. komütatör grubu $G^{(n)}$ tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $G^{(0)} := G$
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $G^{(n)} := \left(G^{(n-1)}\right)'$

Teorem 2.1.5 Bir G grubunun abelyen olması için gerekli ve yeterli koşul $G' = \{1\}$ olmasıdır.

İspat. G nin abelyen olması durumunda, her $g, h \in G$ için, $g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}gh^{-1}h = 1$ olacağından, G' nün tek doğurayı birim elemanıdır. Dolayısıyla, $G' = \{1\}$ dir. Şimdi tersine, $G' = \{1\}$ olsun. Bu durumda, her $g, h \in G$ için, $g^{-1}h^{-1}gh \in G' = \{1\}$ olacağından, $g^{-1}h^{-1}gh = 1$ ve sonuç olarak $gh = hg$ dir. Dolayısıyla, G abelyendir■

Teorem 2.1.6 G bir grup, H ise G nin bir alt grubu olsun. Eğer, $G' \subseteq H$ ise $H \lhd G$ dir.

İspat. $h \in H$, $g \in G$ olsun. Bu durumda, $g^{-1}hg = \underbrace{g^{-1}hgh^{-1}}_{\in G' \subseteq H} h \in H$ elde edilmiş ve ispat ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.7 G bir grup, p sabit bir asal sayı, P bir p grubu ve $S \in Syl_p(G)$ olsun. Bu durumda, $P \subseteq S^x$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır ve sonuç olarak P, G nin bir $p-$Sylow alt grubu tarafından kapsanır. Dolayısıyla, G nin p Sylow alt grupları eşleniktir.

İspat. $\Omega := \{Sx \mid x \in G\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, sağdan çarpma kuralı ile G, Ω üzerine etki eder. $S \in Syl_p(G)$ olduğundan, p asal sayısı, $|G : S| = |\Omega|$ indeksini bölmez. O halde, bu etkinin belirlediği orbitlerden en az bir tanesinin uzunluğu p ile bölünmez. Diğer taraftan bu orbitlerin uzunluğu, bir p grubu olan P nin mertebesini böldüğünden, p nin bir kuvveti olmak zorundadır. Hem p nin kuvveti olup hem de p ile bölünmeyen tek doğal sayı 1 olduğundan, bu orbitlerden bir tanesinin uzunluğu 1 olmak zorundadır. Başka bir deyişle, P, $x \in G$ uygun bir eleman olmak üzere $Sx \in \Omega$ noktasını sabit bırakır. O halde, her $y \in P$ için, $Sx = (Sx).y = (Sx)y = Sxy$ dir. Dolayısıyla, $S^x = x^{-1}Sx = x^{-1}Sxy = S^x y$ ve sonuç olarak $y \in Sx$ dir. O halde, aranan $P \subseteq S^x$ kapsaması elde edilmiş our. Son olarak, $|S^x| = |S|$, olduğundan $S^x \in Syl_p(G)$ elde edilmiş ve ilk kısmın ispatı tamamlanmış olur. İkinci kısmı ispatlayabilmek için, G nin Q gibi ikinci bir $p-$ Sylow alt grubunu göz önüne alalım. Bu durumda, teoremin ilk kısmına göre, $Q \subseteq S^x$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır. Öte yandan, $Q, S \in Syl_p(G)$ olduğundan, $|Q| = |S| = |S^x|$ dir. O halde, $S^x = Q$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Grup teorisinde normal alt grup olmak daima karakteristik alt grup olmayı gerektirmez. Fakat söz konusu normal alt grup bir Sylow alt grubu olduğunda bu çıkarsama doğrudur. Şimdi yukarıda en son ispatlanan teoremin bir sonucu olarak bu iddianın doğru olduğunu görelim

Teorem 2.1.8 G bir grup, p bir asal sayı ve $S \in Syl_p(G)$ olsun. Eğer, $S \lhd G$ ise $Syl_p(G) = \{S\}$ ve sonuç olarak S, G nin bir karakteristik alt grubudur.

İspat. $P \in Syl_p(G)$ olsun. Bu durumda teorem 2.1.7 ye göre $P = S^x$ olacak biçimde bir $x \in G$ vardır. Fakat, $S \lhd G$ olduğundan, $P = S^x = S$ dir. O halde, $Syl_p(G) = \{S\}$ dir. Şimdi, S nin bir karakteristik alt grup olduğunu göstermek için G nin bir φ otomorfisini alalım. Bu durumda, grup otomorfileri eleman sayısını koruyacağından, $|S| = |\varphi(S)|$ ve sonuç olarak, $\varphi(S) \in Syl_p(G) = \{S\}$ dir. Böylelikle, $\varphi(S) = S$ eşitliği elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.9 G bir grup, $\varphi : G \to K$ bir üzerine grup homorfisi ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, $\varphi\left(G^{(n)}\right) = K^{(n)}$ dir. Dolayısıyla, $N \lhd G$ ise, $(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N$ dir.

İspat. $\varphi\left(G^{(n)}\right)=K^{(n)}$ eşitliğini n üzerinden tümevarımla ispatlayalım. $g,h\in G$ olsun. Bu durumda, $\varphi\left(g^{-1}h^{-1}gh\right)=\underbrace{\varphi\left(g\right)^{-1}}_{\in K}\underbrace{\varphi\left(h\right)^{-1}}_{\in K}\varphi\left(g\right)\varphi\left(h\right)\in K'$ dür. Bu ise, G' nün tüm doğuraylarının φ altındaki görüntüsünün K' ne ait olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, K' bir grup olduğundan, G' nün tüm elemanlarının φ altındaki görüntüsü yine K' ne aittir. Böylelikle $\varphi\left(G'\right)\subseteq K'$ kapsaması elde edilmiş olur. Şimdi, ters kapsamayı göstermek için, $k,l\in K$ alınsın. Bu durumda, φ üzerine olduğundan, $\varphi\left(g\right)=k$, $\varphi\left(h\right)=l$ olacak biçimde, $g,h\in G$ vardır. Dolayısıyla,

$$k^{-1}l^{-1}kl=\varphi\left(g\right)^{-1}\varphi\left(h\right)^{-1}\varphi\left(g\right)\varphi\left(h\right)=\varphi(\underbrace{g^{-1}h^{-1}gh}_{\in G'})\in\varphi\left(G'\right)$$

dür. $\varphi\left(G'\right)$, K nın bir alt grubu olduğundan ve K' nün tüm doğuraylarını içerdiğinden $\varphi\left(G'\right)\subseteq K'$ dür. Böylelikle, istenen $\varphi\left(G'\right)=K'$ eşitliği elde edilmiş olur. O halde, iddia $n=1$ için doğrudur. Şimdi, n bir doğal sayı olsun ve iddianın n için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\varphi\left(G^{(n+1)}\right)=\left(\varphi\left(G^{(n)}\right)\right)'=\left(K^{(n)}\right)'=K^{(n+1)}$ dir, yani iddia $n+1$ için de doğrudur.

Şimdi de teoremin ilk kısmından faydalanarak, ikinci kısmını ispatlayalım. $\psi:G\to G/N;\ g\mapsto gN$ doğal homomorfisini göz önüne alalım. Bu grup homomorfisi üzerine olduğundan, teoremin ilk kısmına göre, $\left(G/N\right)^{(n)}=\psi\left(G^{(n)}\right)=G^{(n)}N/N$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.10 G bir grup olsun. Bu durumda, G', G nin bir karakteristik alt grubudur. Dolayısıyla, negatif olmayan her n tamsayısı için, $G^{(n)}\lhd G$ dir.

İspat. φ, G grubunun bir otomorfisi olsun. Bu durumda, φ, G den, G ye bir üzerine grup homorfisi olacağından, teorem 2.1.9 a göre $\varphi\left(G'\right)=G'$ dir. O halde, G', G nin bir karakteristik alt grubudur.

Şimdi, n üzerinden tümevarımla, $G^{(n)}\lhd G$ olduğunu gösterelim: $n=0$ için, $G^{(0)}=G$ olduğundan, istenen aşikardır. n bir doğal sayı olsun ve $G^{(n-1)}\lhd G$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, 1. paragrafa göre (G yerine $G^{(n-1)}$ alındığında),

$G^{(n)}=\left(G^{(n-1)}\right)'$, $G^{(n-1)}$ in bir karakteristik alt grubudur. $G^{(n-1)}\lhd G$ olduğu da göz önüne alındığında, teorem 2.1.1 e göre, $G^{(n)}\lhd G$ olduğu elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonuç 2.1.11 G, bir grup ve $N\lhd G$ olsun. Bu durumda, $N'\lhd G$ dir.

İspat. Teorem 2.1.10 ve teorem 2.1.3 ün bir direkt sonucudur■

Teorem 2.1.12 G bir grup, $N\lhd G$ olsun. Bu durumda, G/G' abelyendir. Ayrıca, G/N abelyen ise, $G'\subseteq N$ dir.

İspat. G/G' nün abelyen olduğunu göstermek için, $g,h\in G$ alınsın. Bu durumda, $g^{-1}h^{-1}gh\in G$ olacağından, $\left(g^{-1}h^{-1}gh\right)G'=G'$ ve dolayısıyla,

$$(gG')(hG')=(gh)G'=(hg)G'=(hG')(gG')$$

dir. Dolayısıyla, G/G' abelyendir.

Şimdi G/N nin abelyen olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $g,h\in G$ için, $(gh)N=(gN)(hN)=(hN)(gN)=(hg)N$ olacağından, $g^{-1}h^{-1}gh\in N$ dir, yani N , G' nün tüm doğuraylarını içerir. O halde, $G'\subseteq N$ dir■

Şimdi bu tez çalışmasının konusu olan çözülebilir gruplarla ilgili, $dl(G)\leq|cd(G)|$ eşitsizliğindeki, "$dl(G)$" nin tanımını yapmamamıza olanak sağlayan aşağıdaki teoremi ispatlayıp, ardından "$dl(G)$" nin tanımını yapalım.

Teorem 2.1.13 G bir grup olsun. Bu durumda,

"G çözülebilirdir $\Leftrightarrow G^{(k)}=\{1\}$ olacak biçimde bir k doğal sayısı vardır"

İspat. 1.$\Rightarrow$: G çözülebilir olsun. Bu durumda, her $i\in\{0,1,...,r-1\}$ için, G_{i+1}/G_i abelyen olacak biçimde, G nin $\{1\}=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_r=G$ $(r\in\mathbb{N})$ normal alt grupları vardır. G_r/G_{r-1} abelyen olduğundan, teorem 2.1.12 ye göre, $G^{(1)}=G'=(G_r)'\subseteq G_{r-1}$ ve dolayısıyla, $G''\subseteq(G_{r-1})'$ dir. Benzer biçimde, G_{r-1}/G_{r-2}

abelyen olduğundan, $\left(G_{r-1}\right)' \subseteq G_{r-2}$ dir. Buradan $G^{(2)} = G'' \subseteq G_{r-2}$ kapsaması elde edilmiş olur. Böylelikle devam edilerek tümevarımla, her $m \in \{0,1,...,r\}$ için, $G^{(m)} \subseteq G_{r-m}$ kapsamaları elde edilir. Özel olarak $m = r$ için,

$$G^{(r)} \subseteq G_{r-r} = G_0 = \{1\}$$

elde edilmiş ve gereklilik kısmının ispatı tamamlanmış olur.

2. $\Leftarrow$: $G^{(k)} = \{1\}$ olsun ve G nin

$$\{1\} = G^{(k)} \subseteq G^{(k-1)} \subseteq \cdots \subseteq G^{(1)} \subseteq G$$

alt gruplarını göz önüne alalım. Bu durumda, teorem 2.1.10 a göre bu gruplar G nin normal alt gruplarıdır ve teorem 2.1.12 göre her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, $G^{(i-1)}/G^{(i)} = G^{(i-1)} \Big/ \left(G^{(i-1)}\right)'$ abelyendir. O halde, G çözülebilirdir■

Tanım 2.1.14 G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, $G^{(n)} = \{1\}$ koşuluna uyan negatif olmayan tam sayılarının en küçüğüne (teorem 2.1.13 e göre bu koşula uyan negatif olmayan sayılar vardır. Dolayısıyla bunların bir en küçüğü de vardır.) G grubunun "türev uzunluğu" denir ve bu sayı "$dl(G)$" ile gösterilir.

Not 2.1.15 Tanımlarından kolayca elde edilebileceği gibi, negatif olmayan her k, m tam sayıları için, $\left(G^{(m)}\right)^{(k)} = G^{(m+k)}$ dır. Dolayısıyla, G bir çözülebilir grup olmak üzere, her $k \in \{0,1,...,dl(G)\}$ için, $dl(G) = dl\left(G^{(k)}\right) + k$ dır.

Sonuç 2.1.16 G bir grup, l ise bir negatif olmayan bir tam sayı olsun. Bu durumda, G nin çözülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $G^{(l)}$ nin çözülebilir olmasıdır.

İspat. Not 2.1.15 ve teorem 2.1.13 ün direkt sonucudur■

Teorem 2.1.17 $\{1\} \neq G$ bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, $G' < G$ dir.

İspat. Eğer, $G' = G$ olsa, tümevarımla kolayca görülebileceği gibi, her k doğal sayısı için, $G^{(n)} = G \neq \{1\}$ olurdu. Fakat bu teorem 2.1.13 ile çelişmektedir. O halde, $G' < G$ dir ■

Teorem 2.1.18 G bir çözülebilir grup, $H,\ G$ nin bir alt grubu ve $N \lhd G$ olsun. Bu durumda, G/N bölüm grubu ve H alt grubu da çözülebilirdir. Ayrıca, $dl(H) \leq dl(G) \leq dl(N) + dl(G/N)$ dir.

İspat. G bir çözülebilir grup ve $H,\ G$ nin bir alt grubu olsun. Tümevarımla kolayca elde edilebileceği gibi, negatif olmayan her s tam sayısı için, $H^{(s)} \subseteq G^{(s)}$ dır. O halde, $n = dl(G)$ olmak üzere, $H^{(n)} \subseteq G^{(n)} = \{1\}$ dir. Dolayısıyla, teorem 2.1.13 e göre H nın çözülebilir olduğu anlaşılmış ve aynı zamanda $dl(H) \leq dl(G)$ eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.1.9 a göre, $(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N = \{1\}N/N = N/N$ olduğundan, teorem 2.1.13 e göre G/N çözülebilirdir. $k := dl(N),\ m =: dl(G/N)$ olmak üzere, $G^{(m)}N/N = (G/N)^{(m)} = N/N$ olduğundan, $G^{(m)}N = N$ ve sonuç olarak, $G^{(m)} \subseteq N$ dir. O halde, not 2.1.15 e göre $G^{(m+k)} = \left(G^{(m)}\right)^{(k)} \subseteq N^{(k)} = \{1\}$ ve sonuç olarak, $dl(G) \leq k + m = dl(N) + dl(G/N)$ dir■

Teorem 2.1.19 G bir grup, $M, N \lhd G$, $G = M \times N$ olsun. Bu durumda, her k negatif olmayan tam sayısı için, $G^{(k)} = M^{(k)} \times N^{(k)}$ dır. Dolayısıyla, eğer G çözülebilir ise, $dl(G) = \max\{dl(M), dl(N)\}$ dir.

İspat. Öncelikle, tümevarımla $G^{(k)} = M^{(k)} \times N^{(k)}$ eşitliğini gösterelim: $k = 0$ için bu eşitliğin geçerli olduğu aşikardır. Şimdi de $k = 1$ için bu eşitliği gösterelim: $M, N \subseteq G$ olduğundan, $M',\ N' \subseteq G'$ ve sonuç olarak, $M'N' \subseteq G'$ dür. $M \lhd G$ olduğundan sonuç 2.1.11 e göre, $M' \lhd G$ ve dolayısıyla, $M' \lhd G'$ dür. Benzer biçimde, $N' \lhd G'$ dür.
Şimdi $G' \subseteq M'N'$ kapsamasını gösterebilmek için, $g, h \in G$ alınsın. Bu durumda, $G = M \times N$ olduğundan, $g = ax,\ h = by$ olacak biçimde, $a, b \in M$, $x, y \in N$ vardır. M nin her elemanının N nin her elemanı ile komütatif olduğu da göz önüne alındığında,

$$g^{-1}h^{-1}gh = (ax)^{-1}(by)^{-1}(ax)(by) = x^{-1}a^{-1}y^{-1}b^{-1}axby = \underbrace{\left(a^{-1}b^{-1}ab\right)}_{\in M'}\underbrace{\left(x^{-1}y^{-1}xy\right)}_{\in N'} \in M'N'$$

elde edilmiş olur. O halde, $G' \subseteq M'N'$ kapsaması ve sonuç olarak $G' = M'N'$ eşitliği elde edilmiş olur. Son olarak, $M' \cap N' \subseteq M \cap N = \{1\}$ dir. O halde, $G' = M' \times N'$ elde edilmiş ve $k=1$ için de iddianın doğru olduğu anlaşılmış olur. Şimdi, k bir doğal sayı olsun ve iddianın k için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$G^{(k+1)} = (M \times N)^{(k+1)} = \left((M \times N)^{(k)}\right)' = \left(M^{(k)} \times N^{(k)}\right)' = \left(\left(M^{(k)}\right)' \times \left(N^{(k)}\right)'\right) = M^{(k+1)} \times N^{(k+1)}$$

dir; burada 3. eşitlikte tümevarım varsayımı, 4. eşitlikte ise, iddianın $k=1$ için doğru olduğu kullanılmıştır.

Şimdi G nin bir çözülebilir grup olduğunu kabul edip, $dl(G) = \max\{dl(M), dl(N)\}$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösterelim. G çözülebilir olduğundan teorem 2.1.18 e göre G nin alt grupları olan, M ve N de çözülebilirdir. Dolayısıyla, $dl(M)$ ve $dl(N)$ den bahsedebiliriz. $G = M \times N = N \times M$ olduğundan, $dl(M) \geq dl(N)$ olduğunu varsayabiliriz. $n := dl(M)$ olmak üzere, $G^{(n)} = M^{(n)} \times N^{(n)} = \{1\} \times \{1\} = \{1\}$ dir. Ayrıca, $l \in \{0,1,...,n-1\}$ olmak üzere, $\{1\} < M^{(l)}$ olduğundan, $\{1\} < M^{(l)} \subseteq M^{(l)} \times N^{(l)} = G^{(l)}$ dir. O halde, $dl(G) = n = dl(M) = \max\{dl(M), dl(N)\}$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.20 G bir grup, M ise G nin bir minimal normal alt grubu olsun. Eğer M çözülebilirse, bir elemanter abelyen p grubudur; burada p bir asal sayıdır.

İspat. Tanımı gereği, $\{1\} \neq M$ dir ve M çözülebilir olduğundan teorem 2.1.17 ye göre $M' < M$ dir. Ayrıca sonuç 2.1.11 e göre $M' \lhd G$ dir. M, G nin bir minimal normal alt grubu, $M' < M$ ve $M' \lhd G$ olduğundan, $M' = \{1\}$ ve sonuç olarak teorem 2.1.5 e göre M abelyendir. $\{1\} \neq M$ olduğundan, $|M|$ nin p gibi bir asal böleni ve sonuç olarak Cauchy teoremine göre $o(z) = p$ olacak biçimde bir $z \in M$ vardır. Dolayısıyla, $z^p = 1$ ve sonuç olarak $N := \{x \in M \mid x^p = 1\} (\subseteq M)$ alt kümesi için $N \neq \{1\}$ dir. Eğer, $N \lhd G$, olduğunu gösterebilirsek, M, G nin bir minimal normal alt grubu, $\{1\} \neq N \subseteq M$ olduğundan $N = M$ sonucu elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur. O halde artık amacımız, $N \lhd G$ olduğunu gösterebilmektir. Bunun için, $x, y \in N$, $g \in G$

alınsın. Bu durumda, M abelyen olduğundan, $(xy)^p = x^p y^p = 1$ ve sonuç olarak $xy \in N$ dir. M nin sonlu olduğu da göz önüne alınırsa, N nin bir alt grup olduğu anlaşılır. $x \in N \subseteq M$, $g \in G$ ve $M \lhd G$ olduğundan, $g^{-1}xg \in M$ ve $\left(g^{-1}xg\right)^p = g^{-1}x^p g = g^{-1}1g = 1$ dir. Dolayısıyla, $g^{-1}xg \in N$ dir. Böylelikle, $N \lhd G$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.21 G bir grup, M, N ise G nin birer minimal normal alt grubu olsun. Eğer, $M \neq N$ ise $M \cap N = 1$ dir.

İspat. $M \cap N \neq 1$ olduğunu varsayalım. $M, N \lhd G$ olduğundan, $M \cap N \lhd G$ dir. M ve N nin birer minimal normal alt grup olduğu ve $M \cap N \subseteq M$, $M \cap N \subseteq N$ kapsamaları göz önüne alındığında, $M \cap N \neq 1$ den $N = M \cap N = M$ çelişkisi elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.22 G bir grup, M ve N ise G nin birer normal alt grubu olsun. Bu durumda, $G/M \cap N$ grubu, $(G/M)\times(G/N)$ dış direkt çarpım grubunun bir alt grubuna izomorftur. Özel olarak, $M \cap N = \{1\}$ ise, G, $(G/M)\times(G/N)$ nin bir alt grubuna izomorftur.

İspat. $\varphi : G \to (G/M)\times(G/N)$; $g \mapsto (Mg, Ng)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, her $g, h \in G$ için,

$$\varphi(g)\varphi(h) = \left(M(gh), N(gh)\right) = \left((Mg)(Mh), (Ng)(Nh)\right) = (Mg, Ng)(Mh, Nh) = \varphi(g)\varphi(h)$$

olacağından, φ bir grup homorfisidir. Ayrıca, $g \in \ker\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşul $Mg = M$, $Ng = N$ yani, $g \in M$, $g \in N$ olmasıdır. O halde, $\ker\varphi = M \cap N$ elde edilmiş ve ilk kısmın ispatı tamamlanmış olur. Sonuç olarak, $G \cong G/\{1\}$ olduğundan ikinci kısım da elde edilmiş olur■

Teorem 2.1.23 G bir grup, H, K, L ise G nin birer alt grubu ve $K \lhd L$ olsun. Bu durumda, $H \cap L/H \cap K$, L/K nın bir alt grubuna izomorftur.

İspat. $K \lhd L$ olduğundan, $H \cap K \lhd H \cap L$ dir ve dolayısıyla $H \cap L/H \cap K$, bölüm grubundan bahsedebiliriz.

Kolayca görülebileceği gibi, $\theta : H \cap L \to L/K\,;\, x \to Kx$ bir grup homomorfisidir ve bu homomorfinin çekirdeği $H \cap K$ dır. Dolayısıyla, izomorfi teoremine göre, $H \cap L/H \cap K = H \cap L/\ker\theta$, L/K nın bir alt grubuna izomorftur■

Teorem 2.1.24 Bir süperçözülebilir grubun her alt grubu ve her bölüm grubu da süperçözülebilirdir.

İspat. G bir süperçözülebilir grup, H ise G nin bir alt grubu olsun. Bu durumda, her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, G_{i+1}/G_i devresel olacak biçimde

G nin , $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_r = G$ $(r \in \mathbb{N})$ normal alt grupları vardır. Şimdi H nın $\{1\} = G_0 \cap H \subseteq G_1 \cap H \subseteq \cdots \subseteq G_r \cap H = G \cap H = H$ $(r \in \mathbb{N})$ alt gruplarını göz önüne alalım. Bu durumda, her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, $G_i \lhd G$ olduğundan, $G_i \cap H \lhd G \cap H = H$ dır. Ayrıca, G_{i+1}/G_i devresel olduğundan, teorem 2.1.23 e göre bu grubunun bir alt grubuna izomorf olan, $G_{i+1} \cap H/G_i \cap H$ grubu da devreseldir. O halde, H da süperçözülebilirdir.

Şimdi, $N \lhd G$ olsun. G/N nin,

$$N/N = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq \cdots \subseteq G_rN/N = G/N \quad (r \in \mathbb{N})$$

alt gruplarını göz önüne alalım. Her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, $G_i \lhd G$ olduğundan, $G_iN/N \lhd G/N$ dir. Ayrıca, G_{i+1}/G_i bir devresel grup, devresel grupların bölüm grupları da devresel ve izomorfi teoremlerine göre,

$\dfrac{G_{i+1}}{G_i(G_{i+1} \cap N)} \cong \dfrac{G_{i+1}N}{G_iN} \cong \dfrac{G_{i+1}N/N}{G_iN/N} \cong G_{i+1}/G_i$ olduğundan, $\dfrac{G_{i+1}N/N}{G_iN/N}$ bölüm grupları da devreseldir. O halde, G/N de süperçözülebilirdir■

Teorem 2.1.25 G bir süper çözülebilir grup, N ise G nin bir minimal normal alt grubu olsun. Bu durumda, N nin mertebesi bir asal sayıdır.

İspat. Her süperçözülebilir grup çözülebilir olduğundan, teorem 2.1.19 a göre, p uygun bir asal sayı olmak üzere, N bir elemanter abelyen p grubudur. Eğer, N nin devresel olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olur.

G süperçözülebilir olduğundan, G nin , her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, G_{i+1}/G_i devresel olacak biçimde $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_r = G$ $(r \in \mathbb{N})$ normal alt grupları vardır. $N \not\subset \{1\} = G_0$, $N \subseteq G = G_r$ olduğundan, $N \not\subset G_k$, $N \subseteq G_{k+1}$ olacak biçimde bir $k \in \{0,1,...,r-1\}$ vardır. $N \not\subset G_k$ olduğundan, $N \cap G_k < N$ dir. Ayrıca, $N, G_k \lhd G$ olduğundan $N \cap G_k \lhd G$ dir. O halde, N, G nin bir minimal normal alt grubu olduğundan, $N \cap G_k = \{1\}$ dir. O halde, teorem 2.1.23 e göre, bir devresel grup olan G_{k+1}/G_k nın bir alt grubuna izomorf olan, $G_{k+1} \cap N / G_k \cap N = N/\{1\} \cong N$ de bir devresel gruptur. Böylelikle, N nin devresel olduğu gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.26 G bir süperçözülebilir grup, d ise $|G|$ nin bir doğal böleni olsun. Bu durumda, G nin d elemanlı bir alt grubu vardır.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden tümevarımla yapalım. Aşikar olarak, $|G| = 1$ için teorem doğrudur. Şimdi, $1 < |G|$ olsun. Bu durumda, G nin N gibi bir minimal normal alt grubu vardır ve teorem 2.1.25 e göre N nin eleman sayısı p gibi bir asal sayıdır. Bu durumda, $|G/N| < |G|$ ve teorem 2.1.24 e göre G/N süperçözülebilirdir. O halde tümevarım varsayımına göre, teorem G/N grubu için doğrudur. Şimdi, aşağıdaki iki farklı durumu inceleyelim:

i) $p|d$ olması durumu: Bu durumda, $d = pm$ olmak üzere, m, $\frac{|G|}{p} = |G:N|$ indeksini böler. O halde, tümevarım varsayımına göre, G/N nin, H/N gibi m elemanlı bir alt grubu vardır. Dolayısıyla, $|H| = m|N| = mp = d$ elde edilmiş ve bu durumda ispat tamamlanmış olur.

ii) $p \nmid d$ olması durumu: Bu durumda, d, $|G:N|$ indeksini böler. O halde, $|H/N| = n$ olacak biçimde bir $N \subseteq H \subseteq G$ vardır. $(|N|, |H:N|) = (d, n) = 1$ yani N, H nın bir normal Hall alt grubudur. O halde, Schur-Zassenhaus teoremine göre, $H = NT$, $N \cap T = \{1\}$ olacak biçimde H nın bir T alt grubu vardır. Dolayısıyla, $|T| = |H:N| = d$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.27 G bir grup, $N \lhd G$ ve p bir asal sayı olsun. Eğer, $p \nmid |G:N|$ ise, $Syl_p(N) = Syl_p(G)$ dir.

İspat. $P \in Syl_p(N)$, $Q \in Syl_p(G)$ olsun. Bu durumda, $p \nmid |G:N|$ olduğundan, $|G|_p = |N|_p = |P|$ ve sonuç olarak $P \in Syl(G)$ dir. Böylelikle, $Syl_p(N) \subseteq Syl_p(G)$ kapsaması elde edilmiş olur. Şimdi, ters kapsamayı göstermeye çalışalım. $P, Q \in Syl_p(G)$ olduğundan $P^g = Q$ olacak biçimde bir $g \in G$ vardır. Diğer yandan, $N \lhd G$ olduğundan, $P^g \subseteq N^g = N$ dir. O halde, $Q = P^g \in Syl_p(N)$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.1.28 $G \neq \{1\}$ bir süperçözülebilir grup, $p = \max \pi(G)$ olsun. Bu durumda, G nin tam bir tane $p-$Sylow alt grubu vardır. Dolayısıyla bu grup G nin bir karakteristik alt grubudur.

İspat. İspatı, $|G|$ üzerinden tümevarımla yapalım. $|\pi(G)| = 1$ olması durumunda, G nin yegane $p-$Sylow alt grubu kendisi olacağından istenen aşikardır. O halde, özel olarak $|G| = 2$ için teorem doğrudur ve artık $|\pi(G)| \geq 2$ olduğunu varsayabiliriz. $q = \min \pi(G)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $|\pi(G)| \geq 2$ olduğundan, $p \neq q$ dur. teorem 2.1.26 ya göre, G nin $|G:N| = q$ olacak biçimde bir N alt grubu vardır ve $|G:N| = q = \min \pi(G)$ olduğundan, $N \lhd G$ dir. p, q iki farklı asal sayı, ve p asalı, $|G| = |N||G:N| = |N|q$ doğal sayının bir böleni olduğundan, $p \in \pi(N) \subseteq \pi(G)$ dir. O halde, $p = \max \pi(N)$ dir ve dolayısıyla tümevarım varsayımına göre, N nin tam bir tane $p-$ Sylow alt grubu vardır. p asal sayısı, $|G:N| = q$ indeksini bölmediğinden, teorem 2.1.27 ye göre, $Syl_p(N) = Syl_p(G)$ dir. O halde, G nin de tam bir tane $p-$Sylow alt grubu vardır. Böylelikle teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur. Şimdi, $Syl_p(G) = \{P\}$ olmak üzere, grup otomorfileri mertebeyi koruduğundan, G nin her φ otomorfisi için, $\varphi(P) \in Syl_p(G) = \{P\}$ ve sonuç olarak, $\varphi(P) = P$ dir. O halde, P, G nin bir karakteristik alt grubudur■

2.2. NİLPOTENT GRUPLAR

Notasyon 2.2.1 Bir G grubunun merkezini $Z(G)$ simgesiyle gösterelim. Ayrıca, $H \subseteq G$ olmak üzere, H nın G içindeki normalizatörünü $N_G(H)$ simgesiyle gösterelim.

Tanım 2.2.2 G, bir grup, r bir doğal sayı, $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_r$ ise G nin birer normal alt grubu olsun. Eğer, her $i \in \{1,...,r\}$ indisi için, $G_i / G_{i-1} \subseteq Z(G/G_{i-1})$ koşulu gerçeklenirse, $\{G_k\}_{k=0}^{r} := \{G_0, G_1, ..., G_r\}$ alt gruplar topluluğuna, G nin bir merkez serisi denir. Birim grup ile başlayan ve grubun kendisine kadar uzanan bir merkez serisi bulunan gruba ise bir nilpotent grup denir.

Not 2.2.3 Bir grubun merkezi daima abelyen olduğundan nilpotent gruplar çözülebilirdir.

Tanım 2.2.4 G bir grup olsun. Bu durumda, negatif olmayan her n tam sayısı için, tümevarımla, $Z_n(G) \lhd G$ normal alt grupları aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $Z_0(G) := \{1\} \lhd G$, $Z_1(G) := Z(G) \lhd G$
2. n bir doğal sayı olsun ve G nin $Z_n(G)$ normal alt grubunun tanımlanmış olduğunu varsayalım. Bu durumda, $K/N = (G/Z_n(G))$, $Z_n(G) \subseteq K$ olacak biçimde tek türlü belirli bir $K \lhd G$ vardır. $Z_{n+1}(G)$ bu K normal alt grubu olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.5 Tanım 2.2.4 deki seriye, G nin üst merkez serisi denir.

Not 2.2.6 Tanımından açıkca görüldüğü gibi, her n doğal sayısı için, $\{Z_k(G)\}_{k=0}^{n}$, G nin bir merkez serisidir ve bu seri birim grupla başlar. Dolayısıyla, eğer G nin kendisi de bu serinin bir üyesi olabilirse bu grup nilpotent olur. Fakat bu serinin üyelerinin ikişer ikişer farklı olması ve daima G ye ulaşması gerekmez.

Şimdi, p bir asal sayı olmak üzere, bir anlamda nilpotent grupların "yapı taşları" sayılabilecek olan, p gruplarının nilpotent olduğu sonucunu verecek olan aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Teorem 2.2.7 G bir grup olsun. Eğer, G nin kendisinden farklı her M normal alt grubu için, $\{1\} < Z(G/M)$ ise, G nilpotentdir.

İspat. G nin üst merkez serisini göz önüne alalım. Eğer bir i doğal sayısı için, $Z_i(G) < G$ ise hipotez gereği $\{1\} < Z(G/Z_i(G)) = Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ ve sonuç olarak, $Z_i(G) < Z_{i+1}(G)$ dir. O halde, G sonlu olduğundan uygun bir k doğal sayısı için, $Z_k(G) = G$ olmak zorundadır. Sonuç olarak not 2.2.6 ya göre G nilpotenttir■

Sonuç 2.2.8 p bir asal sayı olmak üzere, p grupları nilpotentdir.

İspat. Bir p grubunun her bölüm grubu yine bir p grubu olacağından ve birim gruptan farklı p gruplarının merkezleri de birim gruptan farklı olacağından istenen teorem 2.2.7 nin bir sonucudur■

Notasyon 2.2.9 G bir grup, $g,h \in G$ olsun. Bu durumda, G nin $g^{-1}h^{-1}gh$ elemanı, $[g,h]$ ile gösterilir ve bu elemana G nin bir komütatörü denir. H ve K, G nin birer alt grubu olmak üzere, $[H,K] := <[h,k] \| h \in H, k \in K>$ biçiminde tanımlanır.

Not 2.2.10 Bu yeni notasyon ile $G' = [G,G]$ haline gelir.

Teorem 2.2.11 G bir grup, H ve K, G nin birer alt grubu olsun. Bu durumda, $[H,K] = [K,H]$ dır. Ayrıca, $[H,K] = \{1\}$ olması için gerekli ve yeterli koşul H nın her elemanının K nın her elemanı ile komutatif olmasıdır.

İspat $x, y \in G$ olsun. Bu durumda, $[x,y]^{-1} = (x^{-1}y^{-1}xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}yx = [y,x]$ dir. Dolayısıyla, $[H,K]$ nın her doğurayı, $[K,H]$ nın bir doğurayının tersidir. O halde,

$\left[H,K\right]\subseteq\left[K,H\right]$ dır ve bu kapsamada H ile K simetrik olduğundan ters kapsama da geçerlidir. O halde, $\left[H,K\right]=\left[K,H\right]$ dır.

Teoremin ikinci kısmını ispatlamak için bir $h\in H$ ve bir $k\in K$ alalım. Bu durumda, $1=\left[h,k\right]=h^{-1}k^{-1}hk$ olması için gerekli ve yeterli koşul $hk=kh$ olması gerektiğinden istenen elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Tanım 2.2.12 G bir grup olsun. Her n doğal sayısı için, tümevarımla, G^n alt grupları aşağıdaki gibi tanımlanır:

1. $G^1=G$
2. n bir doğal sayı olsun ve G^n nin tanımlanmış olduğunu varsayalım. Bu durumda, $G^{n+1}:=\left[G^n,G\right]$ biçiminde tanımlanır.

Not 2.2.13 Burada tanımlanan G^n grupları ile tanım 2.1.4 de tanımlanan $G^{(n)}$ grupları aynı olmak zorunda değildir.

Tıpkı $Z_n\left(G\right)\lhd G$ alt gruplarından elde edildiği gibi, G^n alt gruplarıyla da G nin bir merkez serisi elde edilebilir. Şimdi bu iddiayı ispatlayabilmek için biraz hazırlık yapalım.

Teorem 2.2.14 G bir grup olsun. Bu durumda, her n doğal sayısı için, $G^{n+1}\subseteq G^n$ dir.

İspat. İspatı, n doğal sayısı üzerinden tümevarımla yapalım.

$G^{1+1}=G^2=\left[G,G\right]=G'\subseteq G$ olduğundan, teorem $n=1$ için doğrudur. Şimdi n bir doğal sayı olsun ve $G^{n+1}\subseteq G^n$ kapsamasının geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda, $G^{n+2}\subseteq\left[G^{n+1},G\right]\subseteq\left[G^n,G\right]=G^{n+1}$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.2.15 G bir grup, H ve K birer alt grup olsun. Bu durumda,

a. $\left[H,K\right]\subseteq H$ olması için gerekli ve yeterli koşul $K\subseteq N_G\left(H\right)$ olmasıdır.

b. $K\lhd G$ olsun. Bu durumda, $\left[H,G\right]\subseteq K$ olması için gerekli ve yeterli koşul $HK/K\subseteq Z\left(G/K\right)$ olmasıdır.

İspat. Öncelikle, a) nın ispatını yapalım. $\left[H,K\right]=<\left[h,k\right] \mid h\in H,\ k\in K>$ olduğundan, $\left[H,K\right]\subseteq H$ olması için gerekli ve yeterli koşul, her $h\in H$ ve her $k\in K$ için, $\left[h,k\right]=h^{-1}k^{-1}hk=h^{-1}h^{k}\in H$ olmasıdır. Fakat, bu ise ancak ve yalnız her $h\in H$ ve her $k\in K$ için $h^{k}\in H$ olması ile mümkündür. Bu ise, ancak ve yalnız, her $k\in K$ için, $H^{k}\subseteq H$ ve sonuç olarak, H sonlu olduğundan, $H^{k}=H$ olması ile mümkündür. O halde, $\left[H,K\right]\subseteq H$ olması için gerekli ve yeterli koşul $K\subseteq N_G\left(H\right)$ olmasıdır

Şimdi de b) nin ispatını yapalım. $\varphi: G\to G/K;\ g\mapsto Kg$ doğal homomorfisini göz önüne alalım. Bu homorfi üzerine olduğundan, kolayce elde edilebileceği gibi $\left[\varphi(H),\varphi(G)\right]=\varphi(\left[H,G\right])$ dir. O halde, $\left[H,G\right]\subseteq K=\ker\varphi$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\{1\}=\varphi(\left[H,G\right])=\left[\varphi(H),\varphi(G)\right]=\left[HK/K,G/K\right]$$

dir. $\{1\}=\left[HK/K,\ G/K\right]$ olması ise teorem 2.2.11 e göre $HK/K\subseteq Z\left(G/K\right)$ olması ile mümkündür. O halde, $\left[H,G\right]\subseteq K$ olması için gerekli ve yeterli koşul $HK/K\subseteq Z\left(G/K\right)$ olmasıdır■

Sonuç 2.2.16 Her n doğal sayısı için $G^{n}\lhd G$ dir ve $\left\{G^{n},G^{n-1},...,G^{1}=G\right\}$, G nin bir merkez serisidir.

İspat Öncelikle, her n doğal sayısı için $G^{n}\lhd G$ olduğunu gösterelim. Teorem 2.2.14 e göre $\left[G^{n},G\right]=G^{n+1}\subseteq G^{n}$ ve dolayısıyla teorem 2.2.15.a) ya göre $G\subseteq N_G(G^{n})$ dir. Bu ise, $G^{n}\lhd G$ anlamına gelmektedir. Şimdi, $\left\{G^{n},G^{n-1},...,G^{1}=G\right\}$ serisinin G nin bir merkez serisi olduğunu göstermek için bir $i\in\left\{2,...,n\right\}$ alalım. $K=G^{i}$, $H=G^{i-1}$ olmak üzere, $\left[H,G\right]=\left[G^{i-1},G\right]=G^{i}=K$ olacağından teorem 2.2.15.b) ye göre

$$G^{i-1}/G^{i}=G^{i-1}G^{i}/G^{i}=HK/K\subseteq Z\left(G/K\right)=Z\left(G/G^{i}\right)$$

elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Şimdi bir grubun nilpotent olması için, bir gerekli ve yeterli koşul verelim:

Teorem 2.2.17 G bir grup olsun. Bu durumda, G nin nilpotent olması için gerekli ve yeterli koşul $G^n = \{1\}$ olacak biçimde bir n doğal sayısının bulunmasıdır.

İspat. Öncelikle teoremin yeterlilik kısmını ispatlamak için, $G^n = \{1\}$ olacak biçimde bir n doğal sayısının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, teorem 2.2.16 ya göre, $\{\{1\} = G^n, ..., G^1 = G\}$, G nin bir merkez serisidir ve dolayısıyla G nilpotentdir. Şimdi, gerekliliği ispatlamak için, G nin nilpotent olduğunu varsayalım. Bu durumda, tanım gereği G nin $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \cdots \subseteq G_r$ gibi bir merkez serisi vardır. Merkez serinin tanımı gereği, her $i \in \{0,1,...,r-1\}$ için, $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ olduğundan, 2.2.15.b) ye göre, $[G_{i+1}, G] \subseteq G_i$ dir. $G^1 = G = G_r$ olduğundan, $G^2 = [G,G] = [G_r, G] \subseteq G_{r-1}$ dir. Dolayısıyla, $G^3 = [G^2, G] \subseteq [G_{r-1}, G] \subseteq G_{r-2}$ dir. Böylelikle, tümevarımla,

$$G^{r+1} \subseteq G_{r-r+1} = G_1 = \{1\}$$

elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonuç 2.2.18 Nilpotent grupların alt grupları ve bölüm grupları da nilpotenttir.

İspat G bir nilpotent grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Tümevarımla, kolayca elde edilebileceği gibi, her m doğal sayısı için, $H^m \subseteq G^m$ dir. G nilpotent olduğundan, teorem 2.2.17 ye göre, $G^n = \{1\}$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. Dolayısıyla, $H^n \subseteq G^n = \{1\}$ ve sonuç olarak $H^n = \{1\}$ elde edilmiş olur. O halde, yine teorem 2.2.17 ye göre, H nilpotenttir.

Şimdi, G nin bir N normal alt grubunu ve $\varphi : G \to G/N;\ g \mapsto Ng$ doğal homorfisini göz önüne alalım. Bu durumda, her m doğal sayısı için, teorem 2.1.9 un ispatına benzer bir ispatla $\varphi(G^m) = (G/N)^m$ olduğu gösterilebilir. O halde, $(G/N)^n = \varphi(G^n) = \varphi(\{1\}) = \{1\}$ dir. O halde burada da yine teorem 2.2.17 kullanılarak G/N nin nilpotent olduğu anlaşılmış ve ispat tamamlanmış olur■

Bir grubun nilpotent olması için başka gerekli ve yeterli koşullar da vardır. Bu koşulları ispatlayabilmek için biraz hazırlığa ihtiyacımız var.

Teorem 2.2.19 G bir grup, N, M ise G nin birer nilpotent alt grubu olsun. Eğer, $G = N \times M$ ise G de nilpotenttir. Bir başka ifadeyle, iki nilpotent grubun direkt çarpımı da nilpotentdir. Dolayısıyla, sonlu sayıda nilpotent grubun direkt çarpımı da nilpotenttir.
İspat $G = N \times M$ bir direkt çarpım olduğundan, tümevarımla her k doğal sayısı için, $G^k = [NM, NM]^k = N^k M^k$ eşitliği elde edilir. N, M birer nilpotent grup olduğundan, teorem 2.2.17 ye göre, $N^n = \{1\} = M^m$ olacak biçimde, n, m doğal sayıları vardır. $s := \max\{n, m\}$ olmak üzere, $G^s = N^s M^s = \{1\}$ elde edilmiş ve yine teorem 2.2.17 ye göre G nin nilpotent olduğu anlaşılmış olur. Dolayısıyla, artık tümevarımla, kolayca, sonlu sayıda nilpotent grubun çarpımının da yine nilpotent olduğu elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.2.20 (Frattini Argümanı) G bir grup, $N \lhd G$ ve $P \in Syl_p(N)$ olsun. Bu durumda, $G = N_G(P)N$ dir.

İspat. $N_G(P), N \subseteq G$ olduğundan, doğal olarak, $N_G(P)N \subseteq G$ kapsaması geçerlidir. Burada, önemli olan diğer kapsamayı gösterebilmektir. Bunun için, bir $g \in G$ alınsın. $N \lhd G$ olduğundan, $P^g \subseteq N^g = N$ dir. $|P^g| = |P|$ olduğu da göz önüne alındığında, $P^g \in Syl_p(N)$ elde edilmiş olur. $P, P^g \in Syl_p(N)$ olduğundan, teorem 2.1.7 ye göre $P = P^{gn}$ olacak biçimde, N grubunun bir n elemanı vardır. Dolayısıyla, $gn \in N_G(P)$ ve sonuç olarak $g \in N_G(P)n^{-1} \subseteq N_G(P)N$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Şimdi artık bir anlamda nilpotent grupları karakterize eden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2.21 G bir grup olsun. Bu durumda, aşağıdakiler birbirine denktir:

i) G nilpotentdir.

ii) G nin her H has (kendisinden farklı) alt grubu için, $H < N_G(H)$ dır.

iii) G nin her maksimal alt grubu normaldir.

iv) G nin tüm Sylow alt grupları normaldir.

v) G Sylow alt gruplarının direkt çarpımıdır.

İspat. $1) i)\Rightarrow ii)$: G bir nilpotent grup ve H, G nin bir has alt grubu olsun. Bu durumda, G nin bir $\{1\}=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=G$ merkez serisi vardır. $G_0=\{1\}\subseteq H$, $G_n=G\not\subset H$ olduğundan dolayı, $G_k\subseteq H,\ G_{k+1}\not\subset H$ olacak biçimde, bir $k\in\{0,1,...,n-1\}$ vardır. $\{1\}=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=G$, bir merkez seri olduğundan $(G_{k+1}G_k)/G_k=G_{k+1}/G_k\subseteq Z(G/G_k)$ ve dolayısıyla teorem 2.2.15.b) ye göre $[G_{k+1},G]\subseteq G_k$ dir. O halde,

$$[H,G_{k+1}]\subseteq[G,G_{k+1}]=[G_{k+1},G]\subseteq G_k\subseteq H$$

ve sonuç olarak, teorem 2.2.15.a) ya göre $G_{k+1}\subseteq N_G(H)$ elde dilmiş olur. $G_{k+1}\not\subset H$ olduğu göz önüne alındığında, $H<N_G(H)$ elde edilmiş ve "$i)\Rightarrow ii)$" önermesinin ispatı tamamlanmış olur.

2) $ii)\Rightarrow iii)$: M, G nin bir maksimal alt grubu olsun. Bu durumda, $ii)$ nin doğru olduğunu varsaydığımıza göre, $M<N_G(M)\subseteq G$ dir. O halde, $N_G(M)=G$ elde edilmiş olur. Bu ise, $M\lhd G$ anlamına gelmektedir.

3) $iii)\Rightarrow iv)$: p, bir asal sayı, $P\in Syl_p(G)$ olsun. P nin G de normal olmadığını varsayıp bir çelişki arayalım. Bu durumda, $N_G(P)<G$ dir ve dolayısıyla G nin $P\subseteq N_G(P)\subseteq M$ olacak biçimde bir M maksimal alt grubu vardır. Dolayısıyla, $P\in Syl_p(M)$ dir ve $iii)$ geçerli olduğundan $M\lhd G$ dir. O halde, Frattini argümanına göre, $G=N_G(P)M=M$ elde edilmiş olur. Fakat bu M nin bir maksimal alt grup olması ile çelişir. Böylelikle, istenen elde edilmiş yani "$iii)\Rightarrow iv)$" önermesi ispatlanmış olur.

4) $iv)\Rightarrow v)$: π, G nin mertebesini bölen asal sayıların kümesi olsun. Bu durumda, her $p\in\pi$ için, $S_p\in Syl_p(G)$ olmak üzere, $iv)$ nin doğru olduğunu varsaydığımızdan, $S_p\lhd G$ dir. Dolayısıyla, $\prod_{p\in\pi}S_p$, G nin bir alt gubudur ve bu grubun eleman sayısı $\prod_{p\in\pi}|S_p|=\prod_{p\in\pi}|G|_p=|G|$ olduğundan, $G=\prod_{p\in\pi}S_p$ elde edilmiş olur. Şimdi de bu çarpımın bir direkt çarpım olduğunu göstermek için, bir $q\in\pi$ alalım. Bu durumda, S_q grubunun eleman sayısı ile $\prod_{q\neq p\in\pi}S_p$ grubunun eleman sayısı aralarında asal

olduğundan, $S_q \cap \prod_{q\neq p\in\pi} S_p = \{1\}$ elde edilmiş ve dolayısıyla söz konusu çarpımın bir direkt çarpım olduğu görülmüş olur.

5) $v) \Rightarrow i)$: Sonuç 2.2.8 e göre p grupları nilpotent ve teorem 2.2.19 a göre sonlu sayıda nilpotent grubun direkt çarpımı da nilpotent olduğundan istenen elde edilmiş olur■

Tanım 2.2.22 G bir grup olsun. Bu durumda, G nin tüm normal nilpotent alt gruplarının çarpımına, G nin Fitting alt grubu denir ve bu grup, $F(G)$ sembolü ile gösterilir.

Bir grubun iki nilpotent alt grubunun çarpımının yine nilpotent olması beklenebilir. Fakat her zaman bu beklentinin gerçekleşmesi gerekmez. Örneğin, S_3 simetrik grubu iki nilpotent grubun çarpımı olmasına rağmen kendisi nilpotent değildir. Fakat çarpımı alınan nilpotent alt grupların normal olması koşulu da eklendiğinde durum farklılaşır. Birazdan bir grubun iki normal nilpotent alt grubunun çarpımının da yine nilpotent olduğu gösterilecek ve bu özellik bir grubun Fitting alt grubunun, o grubun en geniş normal nilpotent alt grubu olduğu sonucunu doğuracaktır. Bu iddiaları ispatlayabilmek için öncelikle, aşağıdaki yardımcı teoremi görelim.

Yardımcı Teorem 2.2.23 G bir grup, H, K ise G nin iki alt grubu, $G = HK$ olsun. Eğer, S, G nin bir p alt grubu ise ve hem H nın hem de K nın birer $p-$ Sylow alt grubunu içeriyorsa, $S \in Syl_p(G)$ dır ve $S = (S \cap H)(S \cap K)$ dır.

İspat. Hipotez gereği, $P \subseteq S$ olacak biçimde bir $P \in Syl_p(H)$ vardır ve dolayısıyla, $P \subseteq S \cap H \subseteq H$ dır. S nin kendisi de bir p grubu olduğundan, $S \cap H = P$ ve dolayısıyla $|H|_p = |P| = |S \cap H|$ dır. Benzer hipotez, K için de geçerli olduğundan, $|K|_p = |S \cap K|$ dır. Ayrıca, $S \cap H \cap K$ bir p grubu olduğundan, Langrange teoremi de göz önüne alındığında, $|S \cap H \cap K| = |S \cap H \cap K|_p \leq |H \cap K|_p$ eşitsizliği elde edilmiş olur. O halde,

$$|G|_p = \left(\frac{|H||K|}{|H\cap K|}\right)_p = \left(\frac{|H|_p|K|_p}{|H\cap K|_p}\right) \le \frac{|S\cap H||S\cap K|}{|S\cap H\cap K|} = |(S\cap H)(S\cap K)| \le |S| \le |G|_p$$

eşitsizlikleri ve sonuç olarak $|(S\cap H)(S\cap K)| = |S| = |G|_p$ elde edilmiş olur. O halde, $S \in Syl_p(G)$ dir. S nin sonlu olduğu ile birlikte $(S\cap H)(S\cap K) \subseteq S$ olduğu da göz önüne alındığında, $(S\cap H)(S\cap K) = S$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.2.24 G bir grup, $M \lhd G$, $N \lhd G$ olsun. Eğer, M, N nilpotent ise MN de nilpotenttir. Dolayısıyla bir grubun sonlu sayıda normal nilpotent alt grubunun çarpımı da nilpotenttir.

İspat. p, bir asal sayı, $P \in Syl_p(M)$, $Q \in Syl_p(N)$ olsun. Bu durumda, M nilpotent olduğundan, teorem 2.2.21 e göre $P \lhd M$ ve sonuç olarak teorem 2.1.8 e göre, P, M nin bir karakteristik alt grubudur. Dolayısıyla, teorem 2.1.1 e göre, $P \lhd G$ dir. Benzer biçimde, N de nilpotent olduğundan, $Q \lhd G$ dir. O halde, PQ, MN nin bir normal alt p grubudur. $P, Q \subseteq PQ$ olduğundan teorem 2.2.23 e göre, $PQ \in Syl_p(MN)$ dir. Dolayısıyla, MN nin her $p-$ Sylow alt grubu normaldir. O halde, teorem 2.2.21 e göre MN nilpotenttir. Böylelikle, bir grupta iki normal nilpotent alt grubun çarpımının da yine bir nilpotent grup olacağı ispatlanmış oldu. O halde artık tümevarımla, sonlu sayıda normal nilpotent alt grubun çarpımının nilpotent olacağı elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonuç 2.2.25 G bir grup olsun. Bu durumda, $F(G)$ nilpotenttir ve G nin her normal nilpotent alt grubunu kapsar. Başka bir ifadeyle, $F(G)$, G nin en geniş normal nilpotent alt grubudur.

İspat. Teorem 2.2.24 e göre, sonlu sayıda normal nilpotent alt grubun çarpımı nilpotent olduğundan, $F(G)$ nilpotenttir. $F(G)$ nin, G nin her normal nilpotent alt grubunu kapsaması ise tanımından kaynaklanmaktadır■

2.3. GÖSTERİLİŞ, KARAKTER, DERECE

Tanım 2.3.1 G, bir grup, n bir doğal sayı, $\varphi: G \to GL(n,\mathbb{C})$ bir grup homomorfisi olsun. Bu durumda, φ ye, G nin n. dereceden bir kompleks gösterilişi denir. $\chi: G \to \mathbb{C}$; $\chi(g) := tr\varphi(g)$ fonksiyonuna ise, G grubunun, φ gösterilişi tarafından belirlenen, kompleks karakteri denir. Bir kompleks karakterin derecesi, o karakteri belirleyen kompleks gösterilişin derecesi olarak tanımlanır. 1. dereceden karaktere bir lineer karakter denir.

$\varphi: G \to GL(n,\mathbb{C})$ bir gösteriliş ve χ bu gösterilişin belirlediği karakter olsun ve yazılış kolaylığı olması için, G grubunun nötr elemanını "1" ile gösterelim. Bu durumda, $\varphi(1)$, $n \times n$ lik birim matris olacağından, $\chi(1) = tr\varphi(1) = n$ dir.

Bir grubun farklı gösterilişleri aynı karakteri belirleyebilmektedir. İki gösterilişin aynı karakteri belirleyebilmesi için bir gerekli ve yeterli koşul bu gösterilişlerin benzer gösterilişler olmasıdır.

Teorem 2.3.2 G bir grup olsun. Bu durumda, $\mathbb{C}G$ grup halkası olmak üzere, G nin her gösterilişi bir $\mathbb{C}G-$ modül belirler.

İspat. $\varphi: G \to GL(n,\mathbb{C})$, G nin bir gösterilişi ve $V = \mathbb{C}^n$, n boyutlu satır uzayı olsun. Her $g \in G$ ve her $v \in V$ için, $v.g := v\varphi(g) \in V$ biçiminde tanımlansın ve bu etki lineer olarak $\mathbb{C}G$ grup halkasına genişletilsin. Bu durumda, rutin bir şekilde modül aksiyomları gerçeklenir ve V, bir $\mathbb{C}G$ modül haline gelir■

Tanım 2.3.3 Belirlediği modül indirgenemez olan bir gösterilişe bir indirgenemez gösteriliş denir. Bir indirgenemez gösterilişden elde edilebilen bir karaktere bir indirgenemez karakter denir.

Örnek 2.3.4 G bir grup olsun. Bu durumda, aşikar olarak,

$\varphi: G \to GL(1,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}-\{0\};\ g \mapsto 1$, G nin 1. dereceden bir gösterilişidir. Bu gösterilişin belirlediği $\mathbb{C}G-$ modülün, $\mathbb{C}$ üzerindeki boyutu 1 olduğundan, bu modül indirgenemezdir. Dolayısıyla, φ, G nin bir indirgenemez gösterilişidir.

Tanım 2.3.5 Örnek 2.3.4 deki φ gösterilişine, G grubunun birim gösterilişi, bu indirgenemez gösterilişin belirlediği indirgenemez karaktere ise G nin esas karakteri denir. Bir G grubunun esas karakteri, 1_G ile gösterilir.

Tanım 2.3.6 $f: G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $g,h \in G$ nin $f\left(h^{-1}gh\right) = f(g)$ ise, f, ye, G nin bir sınıf fonksiyonu denir.

Teorem 2.3.7 Karakterler, sınıf fonksiyonlarıdır.

İspat. G bir grup, χ, G nin, φ tarafından belirlenen, bir karakteri olsun. Bu durumda, her $g,h \in G$ için, benzer matrislerin izleri aynı olduğundan,

$$\chi\left(h^{-1}gh\right) = tr\varphi\left(h^{-1}gh\right) = tr\left(\varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h)\right) = tr\varphi(g) = \chi(g)$$

elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.3.8 G bir grup ve φ, G nin bir lineer gösterilişi olsun. Bu durumda, $G' \subseteq \ker\varphi$ dir.

İspat. Verilen hipotez altında φ, G den bir abelyen grup olan, $GL(1,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}-\{0\}$ ye giden bir grup homomorfisi olacağından, her $g,h \in G$ için,

$$\varphi\left(g^{-1}h^{-1}gh\right) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}\varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g)\varphi(h)^{-1}\varphi(h) = (1)$$

dir ve sonuç olarak, $g^{-1}h^{-1}gh \in \ker\varphi$ dir. Böylelikle, G' nün her doğurayının, $\ker\varphi$ ye ait olduğu elde edilmiş olur. O halde, $G' \subseteq \ker\varphi$ dir■

Teorem 2.3.9 G bir grup, $N \lhd G$, $\varphi: G \to GL(n,\mathbb{C})$, G nin bir gösterilişi ve $N \subseteq \ker\varphi$ olsun. Bu durumda, $\hat{\varphi}: G/N \to GL(n,\mathbb{C});\ \hat{\varphi}(Ng) = \varphi(g)$, G/N bölüm grubunun bir gösterilişidir ve $\ker\hat{\varphi} = \ker\varphi/N$ dir. Ayrıca, φ nin indirgenemez olması için gerekli ve yeterli koşul $\hat{\varphi}$ nın indirgenemez olmasıdır.

İspat. Öncelikle, $\hat{\varphi}$ nın, G/N nin bir gösteriliş olduğunu gösterelim. $N \subseteq \ker\varphi$ olduğundan, $\hat{\varphi}$ iyi tanımlıdır. Her $g,h \in G$ için,

$$\hat{\varphi}\big((Ng)(Nh)\big)=\hat{\varphi}\big(N(gh)\big)=\varphi(gh)=\varphi(g)\varphi(h)=\hat{\varphi}(Ng)\hat{\varphi}(Nh)$$

olduğundan, $\hat{\varphi}$ bir gösterilіştir. I_n, n. dereceden birim matris olmak üzere,

$\hat{\varphi}(Ng)=\varphi(g)=I_n$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g \in \ker\varphi$ olmasıdır. O halde, $\ker\hat{\varphi}=\ker\varphi/N$ dir.

Şimdi, φ nin indirgenemez olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $V=\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}G-$ modül olarak indirgenemezdir. Göstermemiz gereken, V nin $\mathbb{C}(G/N)-$ modül olarak da indirgenemez olduğudur. $W,$ V nin bir alt $\mathbb{C}(G/N)$ modülü olsun. Bu durumda, her $g \in G$, $w \in W$ için, $w.g=w\varphi(g)=w\hat{\varphi}(Ng)=w.(Ng)\in W$ olacağından, W aynı zamanda bir $\mathbb{C}G-$alt modüldür. Fakat, V , $\mathbb{C}G-$ modül olarak indirgenemez olduğundan, $W=V$ veya $W=\{0_V\}$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Şimdi bir anlamda bu teoremin tersini ispatlayalım ve dolayısıyla, G nin indirgenemez gösterilişleri ile G/N nin indirgenemez gösterişleri arasındaki ilişkiyi belirlemiş olalım.

Teorem 2.3.10 G bir grup, $N \triangleleft G$ ve $\alpha : G/N \rightarrow GL(n,\mathbb{C})$, G/N nin bir gösteriliş olsun. Bu durumda, her $g \in G$ için, $\alpha(Ng)=\varphi(g)$, $N \subseteq \ker\varphi$ olacak biçimde G nin bir gösterilişi vardır. Eğer, α indirgenemez ise, φ de indirgenemezdir.

İspat. Her $g \in G$ için, $\varphi(g)=\alpha(Ng)$ biçiminde tanımlanan $\varphi : G \rightarrow GL(n,\mathbb{C})$ fonksiyonunun, G nin bir gösterilişi olduğunu gösterelim. Bunun için, $g,h \in G$ olsun. Bu durumda, α bir gösteriliş olduğundan

$$\varphi(gh)=\alpha\big(N(gh)\big)=\alpha\big((Ng)(Nh)\big)=\alpha(Ng)\alpha(Nh)=\varphi(g)\varphi(h)$$

elde edilmiş olur. Dolayısıyla, φ, G nin bir gösterilişidir. Ayrıca, I_n, $n \times n$ lik birim matris olmak üzere, α bir grup homorfisi olduğundan, her $m \in N$ için, $\varphi(m)=\alpha(Nm)=\alpha(N)=I_n$ ve sonuç olarak $m \in \ker\varphi$ dir. Böylelikle $N \subseteq \ker\varphi$ kapsaması da elde edilmiş olur.

Son olarak, α nın indirgenemez olması durumunda φ nin de indirgenemez olduğunu gösterelim. Bu durumda, $V=\mathbb{C}^n$, bir indirgenemez $\mathbb{C}(G/N)-$ modüldür. W, V nin bir alt $\mathbb{C}G-$ modülü olsun. Bu durumda, her $g\in G$, her $v\in W$ için, $v.(Ng)=v\alpha(Ng)=v\varphi(g)=v.g\in W$ olacağından, W aynı zamanada bir $\mathbb{C}(G/N)-$ modüldür. O halde, V , bir indirgenemez $\mathbb{C}(G/N)-$ modül olduğundan, $W=V$ veya $W=\{0_V\}$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Tanım 2.3.11 G bir grup, χ ise G nin bir karakteri olsun. Bu durumda, $\{g\in G|\ \chi(g)=\chi(1)\}$ kümesine χ karakterinin çekirdeği denir ve küme $\ker\chi$ ile gösterilir. Çekirdeği birim grup olan bir karaktere ise bir sadık karakter denir.

Şimdi, tahmin edilebileceği gibi, bir karakterin çekirdeğinin, o karakteri belirleyen gösterilişin çekirdeğine eşit olduğunu gösterelim.

Teorem 2.3.12 G bir grup, φ, G nin bir gösterilişi ve χ, φ nin belirlediği karakter olsun. Bu durumda, $\ker\chi=\ker\varphi$ dir.

İspat. Öncelikle kolay olan, $\ker\varphi\subseteq\ker\chi$ kapsamasını gösterelim. $g\in\ker\varphi$ olsun. Bu durumda, $\chi(1)=n$ olmak üzere, $\varphi(g)=I_n$ olduğundan, $\chi(g)=tr\varphi(g)=trI_n=n=\chi(1)$ olduğundan, $g\in\ker\chi$ elde edilmiş ve dolayısıyla $\ker\varphi\subseteq\ker\chi$ kapsamasının geçerli olduğuanlaşılmış olur. Şimdi, ters kapsamayı göstermek için, bir $g\in\ker\chi$ alalım. Bu durumda, tanım gereği $\chi(g)=\chi(1)=n$ dir ve

$$|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=\cdots=|\varepsilon_n|=1\ ,\ \ \varphi(g)\sim diag(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$$

olacak biçimde, $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ komplek sayıları vardır. Benzer matrislerin izleri aynı olduğundan, $n=\chi(1)=\chi(g)=tr\varphi(g)=tr\big(diag(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)\big)=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n$ dir. O halde, $n=\chi(1)=|\chi(1)|=|\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n|\le|\varepsilon_1|+\cdots+|\varepsilon_n|=n$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Dolayısıyla, buradan $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=1$ ve sonuç olarak, $\varphi(g)\sim diag(1,...,1)=I_n$ elde edilmiş olur. Fakat birim matris ile benzer olan tek matris yine birim matris olduğundan,

$\varphi(g)=I_n$ ve sonuç olarak, $g\in\ker\varphi$ bulunmuş olur. Böylelikle ters kapsamanın ve dolayısıyla teoremin ispatı da tamamlanmış olur■

Notasyon 2.3.13 G bir grup, $N\lhd G$, $\varphi:G\to GL(n,\mathbb{C})$, G nin bir gösterilişi ve $N\subseteq\ker\varphi$ olsun. φ gösterilişinin belirlediği karakter χ olmak üzere, teorem 2.3.9 un notasyonuyla, G/N grubunun $\hat{\varphi}$ tarafından belirlenen karakterini $\hat{\chi}$ ile gösterelim. Bu durumda, her $g\in G$ için, $\hat{\chi}(Ng)=tr\hat{\varphi}(Ng)=tr\varphi(g)=\chi(g)$ dir.

Notasyon 2.3.14 Bir G grubunun tüm indirgenemez karakterlerinin oluşturduğu küme $Irr(G)$ ile gösterilir. $cd(G)$ kümesi ise, $cd(G):=\{\chi(1)|\chi\in Irr(G)\}$ biçiminde tanımlanır.

Sonuç 2.3.15 G bir grup, $N\lhd G$ olsun. Bu durumda,

$$Irr(G/N)=\{\hat{\chi}\mid\chi\in Irr(G),\ N\subseteq\ker\chi\}$$

İspat. Teorem 2.3.9 ve teorem 2.3.10 un bir direkt sonucudur.

Teorem 2.3.16 G bir grup ve $g,h\in G$ olsun. Eğer, $\chi\in Irr(G)$ için, $\chi(g)=\chi(h)$ ise, g ile h, G nin eşlenik elemanlarıdır.

İspat. Aksi durumda, ikinci ortogonallik bağıntısına göre, $0=\sum_{\psi\in Irr(G)}\psi(g)\overline{\psi(h)}$ olurdu. Fakat, $\chi\in Irr(G)$ için, $\chi(g)=\chi(h)$ olduğundan, 1_G, G nin esas karakteri olmak üzere,

$$\sum_{\psi\in Irr(G)}\psi(g)\overline{\psi(h)}=\sum_{\psi\in Irr(G)}\psi(g)\overline{\psi(g)}=\sum_{\psi\in Irr(G)}|\psi(g)|^2\geq|1_G(g)|^2=1$$

dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde teorem doğrudur■

Tanım 2.3.17 $\mathbb{C}$, Kompleks sayılar cismi üzerindeki tüm indirgenemez karakterleri rasyonel değerler alan bir gruba bir rasyonel grup denir.

Teorem 2.3.18 Bir rasyonel grubun her bölüm grubu da rasyoneldir.

İspat. G bir rasyonel grup ve $N \lhd G$ olsun. G/N nin rasyonel olduğunu göstermek için bir $\alpha \in Irr(G/N)$ alalım. Bu durumda, $\alpha = \hat{\chi},\ N \subseteq \ker \chi$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır ve G rasyonel olduğundan, χ rasyonel değerler alır. Dolayısıyla, her $g \in G$ için, $\alpha(Ng) = \hat{\chi}(Ng) = \chi(g) \in \mathbb{Q}$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.3.19 G bir rasyonel grup ve $g \in G$ olsun. Bu durumda, g ile g^{-1} elemanları G de eşleniktir, yani $g^{-1} = h^{-1}gh$ olacak biçimde bir $h \in G$ vardır.

İspat. $\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda, G rasyonel olduğundan, $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ ve sonuç olarak , $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} = \chi(g)$ dir. Bu işlemi G nin her χ indirgenemez karakteri için yapabileceğimizden teorem 2.3.16 ya göre g^{-1} ile g elemanları eşleniktir■

Teorem 2.3.20 Abelyen olan rasyonel gruplar elemanter abelyen $2-$ gruplarıdır.

İspat. G bir abelyen rasyonel grup ve $g \in G$ olsun. Bu durumda, $<g>=<g^{-1}>$ dir ve G rasyonel olduğundan g ile g^{-1} elemanları G de eşleniktir. Fakat abelyen gruplarda bir eleman sadece kendisi ile eşlenik olabileceğinden, $g = g^{-1}$ ve sonuç olarak $1 = g^2$ dir. O halde, G bir elemanter abelyen $2-$ grubudur■

Notasyon 2.3.21 G bir grup, $N \lhd G$ olsun. Bu durumda, G nin, çekirdeğinde N yi içermeyen indirgenemez karakterlerinin kümesi $Irr(G|\mathrm{N})$ ile gösterilir, yani, $Irr(G|\mathrm{N}) = \{\chi \in Irr(G) \mid N \not\subset \ker \chi\}$ dir. Ayrıca, $cd(G|\mathrm{N}) := \{\chi(1) \mid \chi \in Irr(G|\mathrm{N})\}$ biçiminde tanımlanır.

Not 2.3.22 G bir grup, $N, M \lhd G$ olsun. Eğer, $M \subseteq N$ ise tanımından kolayca anlaşılacağı gibi $cd(G|\mathrm{M}) \subseteq cd(G|\mathrm{N})$ dir.

Teorem 2.3.23 $cd(G|G') = cd(G) - \{1\}$ dir.

İspat. Öncelikle $1 \notin cd(G|G')$ olduğunu gösterelim. Eğer, $1 \in cd(G|G')$ olsa, $G' \not\subset \ker \chi$, $\chi(1) = 1$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ bulunurdu. Fakat, teorem 2.3.8 e göre $\chi(1)=1$ olduğundan, $G' \subseteq \ker\chi$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde, $1 \notin cd(G|G')$ dir. $cd(G|G') \subseteq cd(G)$ kapsaması da göz önüne alındığında, $cd(G|G') \subseteq cd(G)-\{1\}$ kapsaması elde edilmiş olur. Şimdi ters kapsamayı gösterebilmek için bir $n \in cd(G)-\{1\}$ alalım. Bu durumda, $\psi(1)=n$ olacak biçimde bir $\psi \in Irr(G)$ vardır. $G' \subseteq \ker\psi$ olsa, teorem 2.3.9 a göre , $\hat{\psi} \in Irr(G/G')$ olurdu. Fakat, G/G' bir abelyen grup ve abelyen grupların tüm indirgenemez gösterilişleri lineer olduğundan, $\hat{\psi}$ bir lineer karakterdir ve dolayısıyla, $n=\psi(1)=\hat{\psi}(1)=1$ dir. Fakat bu $n \in cd(G)-\{1\}$ olması ile çelişmektedir. O halde, $G' \not\subset \ker\psi$ ve sonuç olarak, $\psi \in Irr(G/G')$ dür. O halde, $n=\psi(1)=\hat{\psi}(1) \in cd(G|G')$ dür. Böylelikle, ters kapsama da gösterilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Teorem 2.3.24 G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. Bu durumda, $cd(G|\mathrm{N})=\varnothing$ olması için gerekli ve yeterli koşul $N=\{1\}$ olmasıdır.

İspat. 1) $\Rightarrow$: $cd(G|\mathrm{N})=\varnothing$ olsun. Bu durumda,

$$Irr(G|\mathrm{N})=\left\{\chi \in Irr(G) \middle| N \not\subset \ker\chi\right\}=\varnothing$$

olacağından, her $\psi \in Irr(G)$ için, $N \subseteq \ker\psi$ ve dolayısıyla $N \subseteq \bigcap_{\psi \in Irr(G)} \ker\psi$ dir. $\{1\} = \bigcap_{\psi \in Irr(G)} \ker\psi$ olduğu göz önüne alındığında istenen elde edilmiş olur.

2) $\Leftarrow$: $N=\{1\}$ olması durumunda, aşikar olarak

$$Irr(G|\mathrm{N})=\left\{\chi \in Irr(G) \middle| N \not\subset \ker\chi\right\}=\varnothing$$

olacağından istenen elde edilmiş olur■

2.4 TAKETA'NIN İSPATI VE $M-$ GRUPLARI

Giriş kısmında belirtildiği gibi, çözülebilir gruplarda, $dl(G)$ ile $cd(G)$ kümesinin eleman sayıları arasındaki ilişkinin incelenmesi, Taketa'nın $M-$ gruplarının çözülebilir olduğunu ve bu gruplar için $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinininin sağlandığını göstermesinden sonra başlamıştır. Bu bölümde, Taketa'nın bu ispatı verilecektir. Fakat öncelikle bazı ön bilgilere ve teoremlere ihtiyaç duyulduğundan bir hazırlık aşaması olacaktır.

Tanım 2.4.1 G bir grup, φ, ψ **,** G nin iki sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, $[\varphi,\psi] := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}$ biçiminde tanımlanan, $[\varphi,\psi]$ ye, φ ile ψ nin iç çarpımı denir.

Teorem 2.4.2 G bir grup, φ, ψ **,** G nin birbirinden farklı iki indirgenemez karakteri olsun. Bu durumda, $[\chi,\chi]=1,$ $[\chi,\psi]=0$ dir.

İspat. İkinci ortoganallik bağıntısının bir direkt sonucudur ■

Rutin bir şekilde gösterilebileceği gibi, bir grubun bütün sınıf fonksiyonlarının kümesi, bir sonlu boyutlu $\mathbb{C}-$ vektör uzayı oluşturur ve G nin indirgenemez karakterlerinin kümesi, bu vektör uzayının bir tabanıdır.

Notasyon 2.4.3 G bir grup, H, G nin bir alt grubu ve θ, H nın bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, $\theta^{\circ}(y) = \begin{cases} \theta(y) & ;\ y \in H \\ 0 & ;\ y \in G-H \end{cases}$ biçiminde tanımlansın.

Tanım 2.4.4 G bir grup, H, G nin bir alt grubu, θ, H nın bir sınıf fonksiyonu olsun ve

$$\theta^G : G \to \mathbb{C}$$
$$g \to \theta^G(g) := \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, θ^G ye G nin θ dan yaptırılmış (veya yükseltilmiş) sınıf fonksiyonu denir.

Şimdi yaptırılmış sınıf fonksiyonlarının gerçekten birer sınıf fonksiyonu olduğunu görelim.

Teorem 2.4.5 G bir grup, H, G nin bir alt grubu ve θ, H nın bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, θ^G, G nin bir sınıf fonksiyonudur.

İspat. $g,k \in G$ olsun. Bu durumda, x, G nin elemanlarını dolaşırken, xk^{-1} de G nin elemanlarını dolaşacağından,

$$\theta^G\left(k^{-1}gk\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(x\left(k^{-1}gk\right)x^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(\left(xk^{-1}\right)g\left(xk^{-1}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)$$

elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Böylelikle, bir sınıf fonksiyonundan yaptırılmış olan sınıf fonksiyonlarının gerçekten birer sınıf fonksiyonu olduğunu göstermiş olduk. Benzer durum, karakterler için de geçerlidir. Yani bir karakterden yaptırılmış bir sınıf fonksiyonu da bir karakterdir. Bunu gösterebilmek için, öncelikle, gösteriliş teorisinin öncülerinden olan Frobenius'un adıyla anılan, aşağıdaki özelliğe ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 2.4.6 (Frobenius Karşıtlığı) G bir grup, H, G nin bir alt grubu, φ, H nın bir sınıf fonksiyonu, θ ise, G nin bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, $[\varphi,\theta_H]=[\varphi^G,\theta]$ dır.

İspat. Tanımlardan anlaşılabileceği gibi,

$$[\varphi^G,\theta]=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi^G(g)\overline{\theta(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\overline{\theta(g)}=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G}\varphi^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\overline{\theta(g)}$$

$$\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in G}\varphi^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\overline{\theta\left(xgx^{-1}\right)}=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{y\in G}\varphi^{\circ}(y)\overline{\theta(y)}\right)=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\left(\sum_{y\in H}\varphi^{\circ}(y)\overline{\theta(y)}\right)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\varphi(y)\overline{\theta(y)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}[\varphi,\theta_H]=[\varphi,\theta_H]$$

dır■

Not 2.4.7 G bir grup, H, G nin bir alt grubu olsun. G grubunun bir gösterilişini H ya kısıtladığımızda H grubunun bir gösterişini elde etmiş oluruz. Bu durumda, G nin başlangıçta verilen gösterilişinden elde edilen karakter, χ olmak üzere, H nın yukarıdaki gösterilişten elde edilen karakteri doğal olarak, χ nin H ya kısıtlanışı olan χ_H dır. Dolayısıyla, χ_H, H nın bir karakteridir.

Teorem 2.4.8 Bir grubun iki karakterinin ve dolayısıyla sonlu sayıdaki karakterlerinin toplamı yine o grubun bir karakteridir.

İspat. G bir grup, χ,ψ, G nin sırasıyla α,β gösterilişleri tarafından belirlenen iki karakteri olsun. Bu durumda, kolayca görülebileceği gibi, $\chi(1)=n,\ \psi(1)=m$ olmak üzere,

$$\varphi:G\to GL(n+m,\mathbb{C});\ g\mapsto\begin{pmatrix}\alpha(g) & 0_{m\times m}\\ 0_{n\times n} & \beta(g)\end{pmatrix}$$

G nin bir gösterilişidir. φ gösterilişinin belirlediği karakter, ζ olmak üzere, her $g\in G$ için,

$$\zeta(g)=tr\begin{pmatrix}\alpha(g) & 0_{m\times m}\\ 0_{n\times n} & \beta(g)\end{pmatrix}=tr\alpha(g)+tr\beta(g)=\chi(g)+\psi(g)$$

olduğundan, $\zeta=\chi+\psi$ elde edilmiş ve bir grubun iki karakterin toplamının da yine o grubun bir karakteri olduğu ispatlanmış olur. Dolayısıyla, tümevarımla kolayca görülebileceği gibi, bir grubun sonlu sayıda karakterinin toplamının da yine o grubun bir karakteri olduğu anlaşılmış olur■

Teorem 2.4.9 G bir grup, H, G nin bir alt grubu, φ, H nın bir karakteri olsun. Bu durumda, φ^G, G nin bir karakteridir.

İspat. $\varphi^G(1) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi^{\circ}\left(x1x^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\varphi(1) = |G:H|\varphi(1) \neq 0$ olduğundan, φ^G sıfırlayıcı fonksiyon değildir. $\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda, χ_H, H nın bir karakteri olacağından, $n_\chi := [\varphi^G, \chi] = [\varphi, \chi_H]$ negatif olmayan tam sayıdır ve dolayısıyla $\varphi^G = \sum_{\chi\in Irr(G)} n_\chi \chi$ elde edilmiş olur. Ayrıca, $\varphi^G \neq 0$ olduğundan, n_χ katsayılarının hepsi birden sıfır olamaz. O halde teorem 2.4.28 e göre, φ^G, G nin bir karakteridir■

Bir alt grubun bir karakterinin çekirdeği ile bu karakterden yaptırılmış olan karakterin çekirdeği arasında bir ilişki vardır. Aşağıdaki teorem bu ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 2.4.10 G bir grup, H, G nin bir alt grubu, ve θ, H nın bir karakteri olsun. Bu durumda, $\ker\left(\theta^G\right) = \bigcap_{x\in G}(\ker\theta)^x$ dir.

İspat. $\chi := \theta^G$ biçiminde tanımlansın ve $g \in G$ olsun. Bu durumda, $g \in \ker(\chi)$ olması için bir gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right) = \chi(g) = \chi(1) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(x1x^{-1}\right) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\theta(1)$$

olduğundan, bir başka gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right) = \sum_{x\in G}\theta(1)$$

olmasıdır. Her $x \in G$ için

$$\left|\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\right| \leq \theta(1)$$

olduğundan, $\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right) = \sum_{x\in G}\theta(1)$ olması durumunda

$$\sum_{x\in G}\theta(1) = \left|\sum_{x\in G}\theta(1)\right| = \left|\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\right| \leq \sum_{x\in G}\left|\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\right| \leq \sum_{x\in G}\theta(1)$$

ve sonuç olarak, $\sum_{x\in G}\theta(1)=\left|\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\right|=\sum_{x\in G}\left|\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)\right|$ dir. Böylelikle, her $x\in G$ için, $\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)=\theta(1)\neq 0$ elde edilmiş olur. O halde, her $x\in G$ için, $xgx^{-1}\in H$ ve sonuç olarak, $\theta(1)=\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)=\theta\left(xgx^{-1}\right)$ dır. Tersine, her $x\in G$ için, $0\neq\theta(1)=\theta\left(xgx^{-1}\right)$ olması durumunda, $\sum_{x\in G}\theta^{\circ}\left(xgx^{-1}\right)=\sum_{x\in G}\theta(1)$ gerçeklenir. O halde, $g\in\ker(\chi)$ olması için bir gerekli ve yeterli koşul, her $x\in G$ için, $xgx^{-1}\in H$ ve $0\neq\theta(1)=\theta\left(xgx^{-1}\right)$ olmasıdır. Bu ise, her $x\in G$ için, $xgx^{-1}\in\ker\theta$ olmasına denktir. O halde, $g\in\ker(\chi)$ olması için bir gerekli ve yeterli koşul $g\in\bigcap_{x\in G}(\ker\theta)^{x}$ olmasıdır. Böylelikle, ispat tamamlanmış olur■

Artık $M-$ grubunun tanımı yapıp, Taketa'nın $M-$ grupları ile ilgili teoreminin ispatını verelebiliriz.

Tanım 2.4.11 G bir grup ve $\chi\in Irr(G)$ olsun. Eğer, $\chi=\lambda^{G}$, $\lambda(1)=1$ olacak biçimde G nin bir H alt grubu ve bir $\lambda\in Irr(H)$ varsa, χ ye G nin bir monomial karakteri denir. Bütün indirgenemez karakterleri monomial olan bir gruba bir $M-$ grubu denir.

Teorem 2.4.12 (Taketa) G bir $M-$ grubu, $cd(G)=\{n_1,...,n_k\}$, $1=n_1<n_2<\cdots<n_k$ ve $\chi\in Irr(G)$ olsun. Eğer, $\chi(1)=n_i$ ise, $G^{(i)}\subseteq\ker\chi$ dır.

İspat. İspatı, i üzerinden tümevarımla yapalım. $i=1$ olması durumunda, $\chi(1)=n_1=1$ olacağından, teorem 2.3.8 göre $\ker\chi\subseteq G'$ dür. O halde, iddia $i=1$ için doğrudur. Şimdi, $1<i$ olsun ve iddianın i den küçük doğal sayılar için doğru olduğunu varsayalım. $\chi\in Irr(G)$ ve $\chi(1)=n_i$ olsun. Bu durumda, $\psi(1)<\chi(1)$ koşuluna uyan, G nin her indirgenemez karakteri için, $\psi(1)=n_j$ olacak biçimde bir $j<i$ vardır. Dolayısıyla, tümevarım varsayımına göre, $G^{(i)}\subseteq G^{(i-1)}\subseteq G^{(j)}\subseteq\ker\psi$ kapsaması elde edilmiş olur. G bir $M-$ grubu olduğundan $\lambda(1)=1$, $\lambda^{G}=\chi$ olacak biçimde G nin

bir H alt grubu ve bir $\lambda \in Irr(H)$ vardır. $\lambda \in Irr(H)$, H nın bir lineer karakteri olduğundan teorem 2.3.8 e göre $H' \subseteq \ker\lambda$ dır.

$H = G$ olması durumunda, her $g \in G$ için

$$\chi(g) = \lambda^G(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda^{\circ}\left(xgx^{-1}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda\left(xgx^{-1}\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda(g) = \lambda(g)$$

olacağından, $\chi = \lambda$ elde edilirdi. Fakat bu, $\chi(1) = n_i > 1$, $\lambda(1) = 1$ olması ile çelişmektedir. O halde, $H < G$ ve sonuç olarak $1 < |G:H|$ dır. Frobenius karşıtlığına göre,

$$\left[(1_H)^G, 1_G\right] = \left[1_H, (1_G)_H\right] = \left[1_H, 1_H\right] = 1$$

dir ve $1_G(1) = 1 < |G:H| = |G:H|1_H(1) = (1_H)^G(1)$ olduğundan $(1_H)^G \neq 1_G$ dir. O halde, $(1_H)^G$ bir indirgenemez karakter değildir. Dolayısıyla, $(1_H)^G$ nin her ψ indirgenemez öğesi için, $\psi(1) < (1_H)^G = |G:H| = |G:H|\lambda(1) = \lambda^G(1) = \chi(1)$ dir. O halde, $G^{(i-1)} \subseteq \ker\psi$ dir. Dolayısıyla, teorem 2.4.10 a göre,

$$G^{(i-1)} \subseteq \bigcap \ker\psi = \ker\left((1_H)^G\right) = \bigcap_{x\in G}\left(\ker 1_H\right)^x = \bigcap_{x\in G} H^x \subseteq H$$

dır; burada ilk kesişim kümesinde, ψ, $(1_H)^G$ nin indirgenemez öğelerini dolaşmaktadır.

Dolayısıyla, $G^{(i)} = \left(G^{(i-1)}\right)' \subseteq H' \subseteq \ker\lambda$ dır. Teorem 2.1.10 a göre, $G^{(i)} \lhd G$ olduğundan, her $x \in G$ için, $G^{(i)} = \left(G^{(i)}\right)^x \subseteq \left(\ker\lambda\right)^x$ ve sonuç olarak, teorem 2.4.10 a göre

$$G^{(i)} = \left(G^{(i)}\right)^x \subseteq \bigcap_{x\in G}\left(\ker\lambda\right)^x = \ker\left(\lambda^G\right) = \ker\chi$$

elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonuç 2.4.13 $M-$ grupları çözülebilirdir ve bu gruplar için Taketa eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Taketa teoreminin notasyonu geçerli olmak üzere, her $\chi \in Irr(G)$ için, $\chi(1) = n_i$ olacak biçimde bir $i \in \{1,\dots,k\}$ vardır. Dolayısıyla, Taketa teoremine göre, $G^{(k)} \subseteq G^{(i)} \subseteq \ker\chi$ dir. Bu işlemi, G nin her χ indirgenemez karakteri için yapabileceğimize göre, $G^{(k)} \subseteq \bigcap_{\chi \in Irr(G)} \ker \chi = 1$ kapsaması elde edilmiş olur. O halde, $G^{(k)} = 1$ dir ve teorem 2.1.13 e göre G çözülebilirdir. Ayrıca, $G^{(k)} = 1$ olduğundan, $dl(G) \leq k = |cd(G)|$ dir■

3. YÖNTEM

Matematik biliminde kullanılan ispat yöntemlerinden birisi, “olmayana ergi” yöntemi dir. Bu yöntemde, öncelikle teoremin yanlış olduğu varsayılıp, ardından bu varsayımdan yola çıkarak ve bazı matematiksel çıkarımlar yaparak bir çelişki elde edilmeye çalışılır. Eğer arzu edildiği gibi bir çelişkiye ulaşılabilirse, bu çelişkinin nedeni teoremin yanlış olduğunu varsaymak olacağından teoremin doğru olduğu anlaşılır.

Taketa eşitsizliğinin tüm çözülebilir gruplar için geçerli olup olmadığı hala açık bir problemdir. Bu tez çalışmasının bulgular bölümünde, bazı hipotezler altında bu probleme olumlu cevap verebilmektedir. Teorem 4.9 un dışındaki tüm teoremlerin (teoremlerden elde edilen sonuçlar hariç) ispatında olmayana ergi yöntemi kullanılmıştır. Dolayısıyla, öncelikle teoremin doğru olmadığı varsayılmıştır. Teoremin doğru olmadığını varsaymak, teoremin hipotezini sağlayan fakat Taketa eşitsizliğini sağlamayan bir çözülebilir grup olduğunu, yani bu teoreme bir karşıt örnek bulunduğunu kabul etmek anlamına gelir. Dolayısıyla, çalışılan tüm gruplar sonlu olduğundan, bu karşıt örnekler arasında mertebesi mümkün olduğunca küçük olan bir grup vardır. İşte bu grupla ilgili bazı özellikler belirlenerek her bir teoremde, o teoreme özgü çıkarsamalarla bir çelişki bularak sonuca gidilmiştir.

Matematik biliminde, doğal sayılarla ilgili bir önerme verildiğinde, bu teoremi ispat etmenin bir yolu tümevarım yöntemidir. Bu yöntemde, önermenin öncelikle 1 doğal sayısı için doğru olduğu gösterilir. Daha sonra, her n doğal sayısı için, önermenin n için doğru olmasının $n+1$ için de doğru olmasını gerektirdiği gösterilir. Böylelikle, bu önermenin tüm doğal sayıları için doğru olduğu anlaşılmış olur. Bu tez çalışmasında ilgilenilen gruplar sonlu olduğundan, her bir teorem doğal sayılarla (burada grubun mertebesi) ilgili bir önermedir. Bulgular bölümünde, teorem 4.9 un ispatında grubun mertebesi üzerinden tümevarım yöntemi uygulanarak ispat yapılmıştır.

4.BULGULAR

G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. N nin nilpotent olması durumunda, Isaacs ve Knutson (1998) $dl(N) \leq cd(G|\mathrm{N})$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini göstermiştir. Bu eşitsizliğin bir sonucu olarak şu elde edilmiş olur:

Sonuç 4.1 G bir grup, $n = dl(G),\ k \in \{1,...,dl(G)\}$ olsun. Eğer, $G^{(k-1)}$ süperçözülebilir ise, $dl(G) \leq |cd(G)| + k - 1$ dir. Özel olarak, G' süperçözülebilir ise, $dl(G) \leq |cd(G)| + 1$ dir.

İspat. $k \in \{1,...,dl(G)\}$ ve $G^{(k-1)}$ süperçözülebilir olsun. Bu durumda, süperçözülebilir grupların komütatör grupları nilpotent olduğundan, $G^{(k)}$ nilpotenttir ve not 2.1.15 e göre,

$$dl(G) = dl\left(G^{(k)}\right) + k \leq \left|cd\left(G|G^{(k)}\right)\right| + k \leq \left|cd\left(G|G'\right)\right| + k = \left|cd(G)\right| + k - 1$$

dir. Özel olarak, $k = 2$ alınırsa, G' nün süperçözülebilir olması durumunda, $dl(G) \leq |cd(G)| + 1$ eşitsizliği elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur ■

Bir sonraki teoremi daha rahat ifade edebilmek için, aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.2 "*" sonlu gruplar ile ilgili bir koşul olsun. Eğer, aşağıdaki koşul gerçeklenirse, "*" koşuluna bölüm gruplarına taşınır denir.
"G, "*" koşulunu sağlayan bir grup ise G nin her M normal alt grubu için, G/M de "*" koşulunu sağlar."

Daha önce belirtildiği gibi Taketa eşitsizliğinin bütün çözülebilir gruplar için geçerli olduğu tahmin edilmektedir. Fakat uzun zamandır, bu konuyla bir çok araştırmacının ilgilenmesine ve bu konuda bir çok çalışma yapılmış olmasına rağmen hala bu sanının (eğer doğruysa) ispatlanamadığı veya (eğer yanlışsa) bu sanıya bir karşıt örnek verilemediği göz önüne alınırsa bu problemin gerçekten "zor" bir problem olduğu sonucuna varılabilir. Biz de maalesef genel olarak bu problemi çözebilmiş değiliz. Ancak çözülebilirliliği içinde barındıran bazı hipotezler altında probleme olumlu cevap verebilmekteyiz. Bu hipotezlerin birisi dışında hepsi bölüm gruplarına taşınır hipotezlerdir ve bu teoremleri ispat ederken "olmayana ergi" yöntemi kullanılmaktadır. Bunun için, öncelikle teoremin yanlış olduğunu varsayıp bir çelişki arama yoluna gidiyoruz. Teoremin yanlış olduğunu varsaymak, teoremin hipotezini sağlayıp Taketa eşitsizliğini sağlamayan mertebesi mümkün olduğunca küçük bir gruptan (minimal karşıt örnek) bahsetmemize olanak sağlamaktadır. Her seferinde bu minimal karşıt örnekte bazı benzer özellikler karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla, her bir teoremde minimal karşıt örnek için aynı sonuçları tekrar tekrar elde etmek yerine, bunları aşağıdaki teoremde bir araya getirmeyi böylece tekrarlardan kaçınmayı tercih ettik.

Teorem 4.3 "*", sonlu gruplarla ilgili bölüm gruplarına taşınır bir koşul olsun. Eğer G,

"S, * koşulunu sağlayan bir çözülebilir grup ise S için Taketa eşitsizliği geçerlidir, yani $dl(S) \leq |cd(S)|$ dir."

önermesine bir minimal karşıt örnek ise aşağıdakiler geçerlidir:

1. G nin tam bir tane minimal normal alt grubu vardır ve dolayısıyla G nin Fitting alt grubu, $F(G)$, bir p grubudur; burada p bir asal sayıdır,

2. $n = dl(G)$ olmak üzere, G nin yegane minimal normal alt grubu $G^{(n-1)}$ dir,

3. $cd\left(G/G^{(n-1)}\right) = cd(G)$ dir**,**

4. $dl(G) = |cd(G)| + 1$ dir.

Üstelik, G'' nilpotent ise,

5. $cd(G) = \{1 = k_1, k_2, ..., k_{n-1}\}$ biçimindedir, burada $1 = (k_2)_p < (k_3)_p < \cdots < (k_{n-1})_p$ dir . Dolayısıyla, $p^{(n-3)}$, G nin mertebesini böler. Ayrıca, $cd(G|G'') = cd(G|G')$ dür.

6. $p \| G : G' |$ dür.

İspat. G nin M ve L gibi bir birinden farklı iki minimal normal alt grubu olduğunu varsayıp bir çelişki arayalım. "*" bölüm gruplarına taşınır bir koşul olduğundan dolayı, G/M grubu da "*" koşulunu sağlar. Üstelik, tanımı gereği $\{1\} \neq M$ olduğundan, $|G/M| < |G|$ dir. O halde, G nin seçiminden dolayı $dl(G/M) \leq |cd(G/M)|$ dir. Tamamen benzer biçimde, $dl(G/L) \leq |cd(G/L)|$ eşitsizliği de elde edilir. Teorem 2.1.21 ye göre, $M \cap L = \{1\}$ ve dolayısıyla teorem 2.1.22 ye göre G, $(G/M)\times(G/L)$ direkt çarpım grubunun bir alt grubuna izomorftur. O halde, teorem 2.1.19 a göre,

$$dl(G) \leq dl\left[(G/M)\times(G/L)\right] = \max\{dl(G/M), dl(G/L)\} \leq \max\{|cd(G/M)|, |cd(G/L)|\}$$

dir. Gerek $cd(G/M)$ gerekse $cd(G/L)$ kümelerinin eleman sayısı $cd(G)$ nin eleman sayısını aşmadığından

$$dl(G) \leq \max\{|cd(G/M)|, |cd(G/L)|\} \leq |cd(G)|$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Fakat bu G nin seçimi ile çelişmektedir. O halde G nin tam bir tane minimal normal alt grubu vardır. Şimdi de, $F(G)$ nin asal bölenlerinin sayısının en fazla 1olduğunu gösterelim. $F(G)$ nin, q ve r gibi birbirinden farklı iki asal böleni olsa, $Q \in Syl_q(F(G))$, $R \in Syl_r(F(G))$ olmak üzere, $F(G)$ nilpotent olduğundan, Q ve R , $F(G)$ nin birer karakteristik alt grubu ve dolayısıyla teorem 2.1.1 e göre G nin birer normal alt grubu olurdu. Dolayısıyla, Q ve R , G nin birer uygun minimal normal alt grubunu kapsardı. Fakat, G nin tam bir tane minimal normal alt grubu olduğundan, bu minimal normal alt grup, hem Q nun hem de R nin ve sonuç olarak, $Q \cap R = 1$ in bir alt grubu ve zorunlu olarak birim grup olurdu. Fakat bu minimal normal alt grubun tanımı ile çelişmektedir. O halde, 1) de $F(G)$ ile ilgili istenen doğrudur. Böylelikle 1) in ispatı tamamlanmış olur.

G nin yukarıda tek türlü belirli olduğu ispat edilen minimal normal alt grubunu M ile gösterelim. G çözülebilir olduğundan, teorem 2.1.20 ye göre $\{1\} \neq M$ bir abelyen gruptur ve dolayısıyla, $dl(M) = 1$ dir. O halde, teorem 2.1.18 e göre

$$dl(G) \leq dl(M) + dl(G/M) \leq 1 + |cd(G/M)| \leq 1 + |cd(G)|$$

dir. Diğer yandan, hipotez gereği G için $dl(G) \le |cd(G)|$ eşitsizliği gerçekleşmeyeceğinden $|cd(G)| < dl(G)$ ve dolayısıyla, $|cd(G)| + 1 \le dl(G)$ dir. böylelikle, 4) te istenen $dl(G) = |cd(G)| + 1$ eşitliği elde edilmiş olur. Yukarıdaki eşitsizliğe geri dönecek olursak,

$$dl(G) \le dl(M) + dl(G/M) = 1 + dl(G/M) \le 1 + |cd(G/M)| \le 1 + |cd(G)| = dl(G)$$

olduğundan,

$$dl(G) = 1 + dl(G/M), \quad |cd(G)| = |cd(G/M)|$$

dir. $cd(G)$ nin sonlu elemanlı bir küme olduğu ve $cd(G/M) \subseteq cd(G)$ kapsaması da göz önüne alınırsa, $cd(G/M) = cd(G)$ eşitliği elde edilmiş olur. O halde, $M = G^{(n-1)}$ olduğunu gösterebilirsek, 2) ve 3) ün de ispatı tamamlanmış olur.

$n = dl(G)$ olduğundan, $\{1\} \ne G^{(n-1)} \lhd G$ dir. Dolayısıyla $G^{(n-1)}$, G nin uygun bir minimal normal alt grubunu kapsar. Fakat G nin tek minimal normal alt grubu M olduğundan, $M \subseteq G^{(n-1)}$ dir. Diğer taraftan, $dl(G/M) = dl(G) - 1 = n - 1$ olduğundan, teorem 2.1.9 a göre

$$M/M = (G/M)^{(n-1)} = \left(G^{(n-1)}M\right)/M = G^{(n-1)}/M$$

ve dolayısıyla, $M = G^{(n-1)}$ elde edilmiş, 2) ve 3) iddialarının ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de 5) i ispatlamak için, G'' nün nilpotent olduğunu kabul edelim. Bu durumda, G'', bir p grubu olan $F(G)$ nin bir alt grubudur ve dolayısıyla G'' nün kendisi de bir p grubudur. Her $2 \le k$ doğal sayısı için $G^{(k)} \subseteq G''$ ve G'' bir p grubu olduğundan , $G^{(k)}$ lar da birer p grubudur. . Dolayısıyla, bu gruplar birer abelyen normal p komplemente sahiptir (Aşikar olarak bir p grubunda birim grup p komplementdir ve daima birim grup bir normal abelyen alt gruptur). O halde, Isaacs ve Knutson (1998) a göre $2 \le k$ olmak üzere $\{1\} \ne G^{(k)}$ ise

$$cd\left(G \middle| G^{(k+1)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(k)}\right)$$

dir. Böylelikle, $G^{(n)} = \{1\}$, $G^{(n-1)} \ne \{1\}, \ldots, G'' = G^{(2)} \ne \{1\}$ olduğundan,

$$\varnothing = cd\left(G \middle| \{1\}\right) = cd\left(G \middle| G^{(n)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-1)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-2)}\right) < \cdots < cd\left(G \middle| G''\right)$$

kesin azalan kümeler zinciri elde edilmiş olur. Dolayısıyla,

$$1 \le \left| cd\left(G \middle| G^{(n-1)}\right) \right|, \quad 2 \le \left| cd\left(G \middle| G^{(n-2)}\right) \right|, \ldots, n-2 \le \left| cd\left(G \middle| G''\right) \right|$$

ve genel olarak $t \in \{1, \ldots, n-2\}$ bir doğal sayı olmak üzere, $t \le cd\left(G \middle| G^{(n-t)}\right)$ dir. Diğer yandan, 4) ve teorem 2.3.23 e göre

$$\left| cd\left(G \middle| G''\right) \right| \le \left| cd\left(G \middle| G'\right) \right| = \left| cd\left(G\right) \right| - 1 = dl\left(G\right) - 2 = n-2$$

olduğundan, $\left| cd\left(G \middle| G''\right) \right| \le n-2$ ve dolayısıyla, $\left| cd\left(G \middle| G'''\right) \right| \le \left| cd\left(G \middle| G''\right) \right| = n-3,$ ve tümevarımla, $\left| cd\left(G \middle| G^{(n-t)}\right) \right| \le t \quad \left(\forall t \in \{1, \ldots, n-2\}\right)$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Böylelikle,

$$\left| cd\left(G \middle| G^{(n-t)}\right) \right| = t \quad \left(\forall t \in \{1, \ldots, n-2\}\right)$$

eşitliği elde edilmiş olur. O halde,

$$\varnothing = cd\left(G \middle| \{1\}\right) = cd\left(G \middle| G^{(n)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-1)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-2)}\right) < \cdots < cd\left(G \middle| G''\right)$$

kesin azalan kapsamalar zincirinde her bir kümenin eleman sayısı bir önceki kümenin eleman sayısından tam 1 fazladır.

Özel olarak, $\left| cd\left(G \middle| G''\right) \right| = n-2 = \left| cd\left(G\right) \right| - 1 = \left| cd\left(G \middle| G'\right) \right|$ dir. Bununla birlikte, $cd\left(G \middle| G''\right) \subseteq cd\left(G \middle| G'\right)$ kapsaması ve bu kümelerin sonlu elemanlı olmaları dikkate alındığında $cd\left(G \middle| G''\right) = cd\left(G \middle| G'\right)$ eşitliği elde edilmiş olur. Isaacs (2009) a göre her bir adımda p kısmı en küçük olan derece alt kümede yer alamamaktadır. Her bir adımda tam bir tane karakter derecesinin eksildiği de göz önüne alındığında, $cd\left(G \middle| G''\right) = cd\left(G \middle| G'\right) = cd\left(G\right) - \{1\}$ kümesinin elemanlarının p kısımlarının ikişer ikişer farklı olduğu anlaşılır. O halde,

$$cd\left(G\right) = \{1 = k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}\}, \quad \left(k_2\right)_p < (k_2)_p < \ldots < (k_{n-1})_p$$

biçiminde yazılabilir. Eğer, p asalı k_2 doğal sayısını bölse, $\left(k_2\right)_p < (k_3)_p < \ldots < (k_{n-1})_p$ olduğundan, p asal sayısının, $cd\left(G\right)$ nin 1 dışındaki tüm elemanlarını bölmesi gerekirdi. Dolayısıyla Thompson teoremine göre , G nin Q gibi bir normal p komplementi var olurdu. Eğer, Q birim grup olsa, G bir p grubu olurdu ve dolayısıyla G grubu için, Taketa eşitsizliği sağlanmış olurdu. O halde $\{1\} < Q \lhd G$ dir ve dolayısıyla, G nin Q tarafından kapsanan bir minimal normal alt grubu vardır. Fakat, 2) ye göre G nin yegane minimal normal alt grubu $G^{(n-1)}$ olduğundan, $G^{(n-1)} \subseteq Q$ olmak zorundadır. Fakat bu $G^{(n-1)}$ in bir p grubu, Q nun ise p komplement olması ile çelişir. O halde, p, k_2 doğal sayısını bölmez yani, k_2 nin p kısmı 1 dir.

Son olarak, $1 = (k_2)_p < (k_3)_p < ... < (k_{n-1})_p$ olduğundan, $p^{(n-3)} \mid k_{n-3}$ dir. k_{n-3}, G grubunun bir indirgenemez kompleks derecesi olduğundan, k_{n-3}, ve dolayısıyla onun bir böleni olan, $p^{(n-3)}$, $|G|$ yi böler. Böylelikle, 5) in de ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de , yardımcı teorem 12.16 Isaacs(2006) nın ispatındaki tekniği kullanarak, 6) nın ispatını yapalım. G'', G' nün bir $p-$ alt grubu olduğundan, teorem 2.1.7 ye göre, $G'' \subseteq P$ olacak biçimde, $P \in Syl_p(G')$ vardır. $G'' \subseteq P \subseteq G'$ olduğundan, teorem 2.1.6 ya göre $P \lhd G'$ dür. O halde teorem 2.1.8 ve teorem 2.1.3 e göre, $P \lhd G$ dir. Dolayısıyla, teorem 2.1.11 e göre $P' \lhd G$ dir. Eğer, 6) doğru olmasa, $P \in Syl_p(G)$ ve sonuç olarak P, G nin bir normal Hall alt grubu olur ve dolayısıyla, yardımcı teorem 12.16 Isaacs(2006) nın ispatından anlaşılacağı gibi, $|cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 \leq |cd(G)|$ eşitsizliği gerçeklenir. Eğer P abelyen olsa, $G''' \subseteq P' = 1$ ve dolayısıyla $|cd(G)| < dl(G) \leq 3$ olurdu. Fakat bu durumda Isaacs (1975) göre G grubu için Taketa eşitsizliği gerçekleneceğinden, bu G nin seçimi ile çelişirdi. O halde, P abelyen değildir ve dolayısıyla $P' > \{1\}$ dir. Dolayısıyla, $|G/P'| < |G|$ dir. O halde, "*" ın bölüm gruplarına taşınır olduğu da göz önüne alındığında, $dl(G/P') \leq |cd(G/P')|$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Böylelikle, teorem 2.1.18 e göre,

$$dl(G) \leq dl(P') + dl(G/P') = dl(P) - 1 + dl(G/P') \leq |cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 \leq |cd(G)|$$

çelişkisi elde edilmiş ve 6) nın da ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4 Eğer, G, Taketa eşitsizliğine bir minimal karşıt örnek ise $dl(G)=|cd(G)|+1$ dir. Ayrıca, $n=dl(G)$ olmak üzere, $G^{(n-1)}$, G nin yegane minimal normal alt grubudur ve $F(G)$ bir $p-$ grubudur.

İspat. Gruplarda, çözülebilir olmak bölüm gruplarına taşınır olduğundan istenen teorem 4.3 ün bir direkt sonucudur■

Teorem 4.5 G bir grup olsun. Eğer, G' süperçözülebilir ve G/G' bir $2-$ grubu ise $dl(G)\leq|cd(G)|$ dir.

İspat. $G^{(1)}=G'$ süperçözülebilir olduğundan sonuç 2.1.16 ya göre G de çözülebilirdir ve dolayısıyla $dl(G)$ den bahsedebiliriz. Öncelikle, hipotezdeki koşulların bölüm gruplarına taşınır koşullar olduğunu gösterelim. G bir grup, $N\lhd G$ olsun ve G/G' nün bir $2-$ grubu olduğunu kabul edelim. Bu durumda, teorem 2.1.9 a göre, $|G/N:(G/N)'|=|G/N:G'N/N|=|G:G'N|$ dir. Öte yandan, $G'\subseteq G'N\subseteq G$ olduğundan, $|G:G'N|$, G/G' indeksini böler. O halde, $\dfrac{G/N}{(G/N)'}$ bir $2-$ grubudur.

Şimdi ise, $N\lhd G$ ve G' süperçözülebilir olsun. Teorem 2.1.24 e göre, süperçözülebilir grupların bölüm grupları da süperçözülebilir olduğundan $G'/(G'\cap N)$ de süperçözülebilirdir. Öte yandan, izomorfi teoremleri ve teorem 2.1.9 a göre, $(G/N)'=G'N/N\cong G'/G'\cap N$ dir. O halde, $(G/N)'$ de süperçözülebilirdir. Böylelikle hipotezde verilen koşulun bölüm gruplarına taşınır olduğu anlaşılmış olur.

Artık teoremin yanlış olduğunu varsayıp bir çelişki arayalım. G, bu teorem için bir minimal karşıt örnek olsun. Bu durumda, teorem 3.3 e göre $F(G)$ bir $p-$ grubudur ve p asal sayısı, $|G:G'|=|G/G'|$ indeksini böler. G/G' ise bir $2-$ grubu olduğundan $p=2$ dir.

$G'=\{1\}$ olması ancak ve yalnız G nin abelyen olması ile mümkün olacağından ve abelyen gruplar için, doğal olarak, Taketa eşitsizliği gerçekleneceğinden, $1<G'$ ve dolayısıyla, $\pi(G')\neq\varnothing$ dir. q, G' nün mertebesini bölen en büyük asal sayı ve

$Q \in Syl_q(G')$ olsun. Bu durumda, G' süperçözülebilir olduğundan, teorem 2.1.28 e göre, $\{1\} < Q$, G' nün bir karakteristik alt grubudur dolayısıyla ve teorem 2.1.1 e göre $Q \lhd G$ dir. Ayrıca, Q nun nilpotent olduğu da göz önüne alındığında, Q nun bir $2-$ grubu olan $F(G)$ nin bir alt grubu olduğu anlaşılır. O halde, $2 = q = \max \pi(G')$ dür. Sonuç olarak, G' bir $2-$ grubudur ve teorem 2.2.8 e göre nilpotenttir. Böylelikle, Isaacs ve Knutson (1998) a göre $dl(G) \leq |cd(G)|$ çelişkisi elde edilmiş olur. O halde teorem doğrudur■

Sonuç 4.6 G bir grup olsun. Eğer, G rasyonel ve G' süperçözülebilir ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir.

İspat Teorem 2.3.18 e göre, bir rasyonel grubun her bölüm grubu da rasyonel olcağından, G/G' bir rasyonel gruptur. Öte yandan, teorem 2.1.12 ye göre, G/G' abelyendir. Teorem 2.3.20 ye göre abelyen olan rasyonel gruplar $2-$ gruplarıdır. O halde, G/G' nün bir $2-$ grubu olduğu anlaşılmış ve teorem 4.5 e göre istenen elde edilmiş olur■

Teorem 4.7 G bir grup, p bir asal sayı olsun. Eğer, G' nün bir abelyen normal p komplementi varsa $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir.

İspat. Öncelikle verilen hipotez altında G nin çözülebilir olduğunu gösterelim: $N = G'$ olsun ve G' nün abelyen normal p komplementini K ile gösterelim. Bu durumda N/K bir p grubudur ve p, $|K|$ yı bölmez. K abelyen olduğundan, N/K ise bir p grubu olduğundan çözülebilirdir. O halde, $N = G'$ de çözülebilirdir. Dolayısıyla, sonuç 2.1.16 ya göre G nin kendisi de çözülebilirdir.

Şimdi N nin her alt grubunun bir abelyen normal p komplemente sahip olduğunu göstermek için, N nin S gibi bir alt grubunu göz önüne alalım. K, N nin bir abelyen normal p komplementi olduğundan, $S \cap K$, S nin bir abelyen normal alt grubudur ve $|S \cap K|$, $|K|$ yı böldüğünden p ile bölünmez. $|S : S \cap K| = |KS : K|$ ise $|N : K|$ nın bir böleni olduğundan p nin bir kuvvetidir. O halde, $S \cap K$, S nin bir abelyen normal p komplementidir. Dolayısıyla $N = G'$ nün her alt grubunun , özel olarak $G^{(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ alt gruplarının , abelyen normal p komplementleri vardır.

Şimdi ise G nin her bölüm grubunun, komütatör grubunun da bir abelyen normal p komplemente sahip olduğunu gösterelim. $M \lhd G$ olsun. $\overline{K} = MK/M \subseteq G'M/M = (G/M)'$ yi göz önüne alalım. K abelyen olduğundan, $\overline{K}$ de abelyendir ve $KM \lhd G'M$ olduğundan $KM/M \lhd G'M/M$ dir, yani $\overline{K}$, $(G/M)'$ nün bir abelyen normal alt grubudur. Ayrıca, $|\overline{K}|$, $|K|$ nın bir böleni olduğundan p ile bölünmez, $|G'M/M : KM/M| = |G'M : KM|$, ise $|G' : K|$ yı böldüğünden p nin bir kuvvetidir. Sonuç olarak, KM/M, $G'M/M = (G/M)'$ nün bir abelyen normal p komplementidir.

Şimdi teoremin doğru olmadığını varsayalım ve bir çelişki arayalım. G bu teorem için bir minimal karşıt örnek olsun. Bu durumda, teorem 4.3 e göre $dl(G) = |cd(G)| + 1$ dir.

$n = dl(G)$ olsun. Her k doğal sayısı için $G^{(k)} \subseteq G'$ olduğundan , $G^{(k)}$ nın bir abelyen normal p komplementi vardır. Dolayısıyla, Isaacs ve Knutson (1998) a göre $\{1\} \neq G^{(k)}$ ise $cd\left(G \middle| G^{(k+1)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(k)}\right)$ dir. Böylelikle,

$$G^{(n)} = \{1\},\ G^{(n-1)} \neq \{1\}, \dots, G'' = G^{(2)} \neq \{1\},\ G' = G^{(1)} \neq 1$$

olduğundan,

$$\varnothing = cd\left(G \middle| \{1\}\right) = cd\left(G \middle| G^{(n)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-1)}\right) < cd\left(G \middle| G^{(n-2)}\right) < \cdots < cd\left(G \middle| G''\right) < cd\left(G \middle| G'\right)$$

kapsamaları elde edilmiş olur. Dolayısıyla,

$$1 \leq \left|cd\left(G \middle| G^{(n-1)}\right)\right|,\ 2 \leq \left|cd\left(G \middle| G^{(n-2)}\right)\right|, \dots, n-1 \leq \left|cd\left(G \middle| G^{(n-(n-1))}\right)\right| = \left|cd\left(G \middle| G'\right)\right|$$

dir. $cd\left(G \middle| G'\right) = cd(G) - \{1\}$ olduğu da göz önüne alındığında $n \leq |cd(G)|$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Fakat bu son eşitsizlik, $|cd(G)| = dl(G) - 1 = n - 1$ eşitliği ile çelişmektedir. Böylelikle teoremin doğru olduğu anlaşılmış olur ■

G bir sonlu grup olsun ve aşağıdaki, (4.1) koşulunun gerçeklendiğini varsayalım:

(4.1) “Her $\chi,\psi \in Irr(G)$ için, $\chi(1)=\psi(1)>1$ ise, $\chi=\psi$ dir.”

Dikkat edilirse bu koşul G nin farklı nonlineer indirgenemez karakterlerinin derecelerinin farklı olmasına anlamına gelmektedir. Berkovich ve diğ. (2006) ya göre, G, (4.1) koşulunu sağlayan bir grup ise aşağıdakilerden bir tanesi gerçeklenir.

1. G bir ekstra-özel $2-$ grubudur.
2. G mertebesi $p^n(p^n-1)$ olan bir Frobenius grubudur. G nin çekirdeği p^n elamanlı bir abelyen gruptur, tümleyeni ise devreseldir; burada p bir asal sayı, n ise bir doğal sayıdır.
3. G 72 elemanlı bir Frobenius grubudur ve çekirdeği 8 elemanlı Kuaternionlar grubuna izomorftur.

Yine yukarıda adı geçen makalede belirtildiği gibi (4.1) koşulunu sağlayan bir G grubu için, $|cd(G)|\leq 3$ tür. Dolayısıyla Isaacs (1975) e göre bu gruplar çözülebilirdir ve Taketa eşitsizliğini sağlarlar.

Şimdi yukarıdaki (4.1) koşulundan daha hafif olan aşağıdaki (4.2) koşulunu göz önüne alalım.

(4.2) “Her $\chi,\psi \in Irr(G)$ için, $\chi(1)=\psi(1)>1$ ise, $\ker\chi=\ker\psi$ ”

Gerçekten, (4.2) koşulu (4.1) koşulundan daha hafiftir. Çünkü, aşikar olarak, (4.1) koşulunu sağlayan her grup, (4.2) koşulunu da sağlar. $G=SL(2,3)$ grubunu göz önüne alalım. Bu durumda, $cd(G)=\{1,2,3\}$ tür ve bu grupta derecesi 2 olan 3 tane, derecesi 3 olan ise 1 tane indirgenemez karakter vardır. Dolayısıyla, bu grup, (4.1) koşulunu sağlamaz. Fakat, derecesi 2 olan tüm indirgenemez karakterlerin çekirdekleri aynı (aslında bu karakterlerin hepsi sadıktır) olduğundan, $G=SL(2,3)$ grubu, (4.2) koşulunu sağlar. O halde, (4.2) koşulu, (4.1) koşulundan daha hafif bir koşuldur.

Dikkat edilirse (4.1) koşulunu sağlayan gruplarda linear olmayan farklı indirgenemez karakterler farklı derecelere sahiptir. Fakat yukarıda verilen (4.2) koşulunu sağlayan gruplarda ise çekirdekleri aynı olmak koşuluyla birbirinden farklı lineer olmayan indirgenemez karakterlere aynı dereceye sahip olmak izni verilmektedir. Bu koşullar arasındaki bir diğer fark da şudur: Yukarıda belirtildiği gibi, (4.1) koşulunu sağlayan gruplar daima çözülebilirdir. Fakat abelyen olmayan basit gruplarda lineer olmayan tüm indirgenemez karakterlerin çekirdekleri birim gruptan ibarettir. Dolayısıyla abelyen olmayan basit gruplar (4.2) koşulunu sağlar fakat bu tarz gruplar çözülebilir değildir. Dolayısıyla, (4.2) koşulunu sağlayan bir grup çözülebilir olmak zorunda değildir. Aşağıdaki teoremde, (4.2) koşulunu sağlayan çözülebilir gruplar için Taketa eşitsizliğinin sağlandığı ispatlanacaktır.

Teorem 4.8 G bir çözülebilir grup olsun. Eğer

“Her $\chi,\psi \in Irr(G)$ için, $\chi(1)=\psi(1)>1$ ise, $\ker\chi=\ker\psi$”

koşulu gerçeklenirse $dl(G)\leq |cd(G)|$ dir.

İspat Teorem 2.1.18 e göre, çözülebilir bir grubun tüm bölüm grupları da çözülebilirdir. Öncelikle bir grubun (4.2) koşulunu sağlaması durumunda, bu grubun tüm bölüm gruplarının da bu koşulu sağladığını gösterelim: Bunun için G, söz konusu koşulu sağlayan bir grup ve $N \lhd G$ olsun. G/N nin α,β gibi dereceleri aynı olan iki lineer olmayan indirgenemez karakterini alalım. Bu durumda, sonuç 2.3.15 e göre $\alpha=\hat{\chi},\ \beta=\hat{\psi},\ N\subseteq \ker\chi, \ker\beta$ olacak biçimde $\chi,\psi\in Irr(G)$ vardır ve $\ker\alpha=\ker\chi/N,\ \ker\beta=\ker\psi/N$ dir.

$$\chi(1)=\hat{\chi}(1)=\alpha(1)=\beta(1)=\hat{\psi}(1)=\psi(1)$$

olduğundan ve G grubu (4.2) koşulunu sağladığından dolayı $\ker\chi=\ker\psi$ dir. O halde

$$\ker\alpha=\ker\chi/N=\ker\psi/N=\ker\beta$$

dır. Böylelikle, (4.2) koşulunun, bölüm gruplarına taşınır olduğu gözlemlenmiş oldu.

Şimdi teoremin yanlış olduğunu varsayalım ve bir çelişki arayalım. G bu teoreme bir minimal karşıt örnek olsun. Bu durumda, G abelyen olamayacağından $(1)\neq G'$ dür. Ayrıca, teorem 4.3 e göre şunlar geçerlidir: $|cd(G)|+1=dl(G)$ dir, $M=G^{(n-1)}$, G nin yegane minimal normal alt grubudur ve $cd(G/M)=cd(G)$ dir

$M \subseteq G'$ olduğundan, not 2.3.22 ve teorem 2.3.23 e göre $cd\left(G|M\right) \subseteq cd\left(G|G'\right) = cd\left(G\right) - \{1\}$ ve sonuç olarak, $1 \notin cd\left(G|M\right)$ dir. $\{1\} \neq M$, olduğundan, not 2.3.24 e göre $cd\left(G|M\right) \neq \varnothing$. Şimdi, $k \in cd\left(G|M\right)$ olsun. Bu durumda, $1 < k$ dır ve $M \not\subset \ker\psi$, $\psi(1) = k$ olacak biçimde bir $\psi \in Irr(G)$ vardır. $k \in cd\left(G|M\right) \subseteq cd(G) = cd(G/M)$ olduğundan $\nu(1) = k$ olacak biçimde bir $\nu \in Irr(G/M)$ vardır. Dolayısıyla, sonuç 2.3.15 e göre, $\nu = \hat{\chi}$, $M \subseteq \ker\chi$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır. Ayrıca, $\chi(1) = \hat{\chi}(1) = \nu(1) = k$ dır. O halde, $\chi(1) = \psi(1) = k > 1$ ve $\chi, \psi \in Irr(G)$ olduğundan hipotez gereği $\chi = \psi$ dir. Fakat bu $M \not\subset \ker\psi$, $M \subseteq \ker\chi$ olması ile çelişmektedir. Böylelikle aranan çelişki elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonlu bir G grubunun mertebesini bölen asal sayıların kümesinin $\pi(G)$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

G bir çözülebilir grup olsun ve G nin aşağıdaki (4.3) koşulunu sağlandığını varsayalım:

(4.3) "G nin birim grup dışındaki her H Hall altgrubu için $\pi(H') < \pi(H)$ dır"

Bu koşul altında, G nin mertebesini bölen her p asal sayısı için, $P \in Syl_p(G)$ olmak üzere, $1 \neq P$, G nin bir $\{p\}$ Hall alt grubu olduğundan yukarıdaki (4.3) koşulu gereği, $\pi(P') < \pi(P) = \{p\}$ olacağından, $\pi(P') = \varnothing$ ve dolayısıyla $|P'| = 1$ yani P abelyendir. Bu işlemi, G nin mertebesini bölen her p asalı için yapabileceğimize göre, G nin tüm Sylow alt grupları abelyendir. Her grubun kendisine göre bir göreceli $M-$ grubu olduğu gerçeği de göz önüne alındığında, teorem 6.23 Isaacs(2006) ya göre (adı geçen teoremde $N = G$ alındığında) G nin bir $M-$ grubu olduğu ve dolasıyla Taketa teoreminin sonucu olarak, $dl(G) \leq |cd(G)|$ eşitsizliğinin gerçeklendiği anlaşılır. Şimdi, bu koşuldan daha hafif olan aşağıdaki (4.4) koşulunu göz önüne alalım:

(4.4) " G nin her H Hall alt grubu için $2 \le |\pi(H)|$ ise $\pi(H') < \pi(H)$ dır"

(4.3) koşulundan daha hafif olan (4.4) koşulunu sağlayan grupların Sylow alt gruplarının abelyen olması ve hatta bu grupların $M-$ grubu olması gerekmemektedir. Örneğin $G := SL(2,3)$ grubunu göz önüne alalım. Bu grubun eleman sayısı 24 olduğundan, Hall alt gruplarının eleman sayılarının kümesi $\{1,3,8,24\}$ tür. Dolayısıyla, bu grubun $2 \le |\pi(H)|$ koşuluna uyan tek H Hall alt grubu kendisidir, yani $H = SL(2,3)$ tür. Fakat, $SL(2,3)$ ün komütatör grubu Sylow $2-$alt grubuna eşittir. Dolayısıyla, $\pi(H') = \{2\} < \{2,3\} = \pi(H)$ dir. Dolayısıyla, $SL(2,3)$, (4.4) koşulunu sağlar. Fakat, $SL(2,3)$ ün Sylow $2-$alt grubu, 8 elemanlı abelyen olmayan bir gruptur. Ayrıca, $SL(2,3)$ grubunun, derecesi 2 olan bir indirgenemez karakteri vardır. Fakat bu grubun indeksi 2 olan hiç alt grubu olmadığından derecesi 2 olan bu indirgenemez karakter hiç bir alt grubun hiç bir indirgenemez karakterinden yükseltilemez (yaptırılamaz). Dolayısıyla $SL(2,3)$ bir $M-$ grubu değildir.

Böylelikle, (4.4) koşulunu sağlayan bir grubun $M-$ grubu olması gerekmediğini görmüş olduk. Fakat yine de, bir sonraki teoremde ispatlanacağı gibi, bu koşulu sağlayan bir çözülebilir G grubu için $dl(G) \le |cd(G)|$ dir.

Teorem 4.9 G bir çözülebilir grup olsun. Eğer,

" G nin her H Hall alt grubu için $2 \le |\pi(H)|$ ise $\pi(H') < \pi(H)$ dır"

koşulu gerçeklenirse, $dl(G) \le |cd(G)|$ dir.

İspat. G, hipotezde verilen koşulu sağlayan bir grup, S de G nin bir Hall alt grubu olsun. Bu durumda, S nin her Hall alt grubu G nin de yine bir Hall alt grubu olacağından S nin kendisi de bu koşulu sağlar. Yani, hipotezdeki koşulu sağlayan bir grubun her Hall alt grubu da yine bu koşulu sağlar.

İspatı G grubunun mertebesi üzerinden tümevarımla yapalım. Aşikar olarak, $|G|=1$ için iddia doğrudur. Şimdi $G,$ teoremin hipotezini sağlayan bir grup, $1<|G|$ ve teorem mertebesi G nin mertebesinden küçük olan gruplar için doğru olsun.
$|\pi(G)|=1$ olması durumunda, G uygun bir p asalı için bir p grubu olacağından $dl(G)\le|cd(G)|$ dir. Dolayısıyla, $2\le|\pi(G)|$ olduğunu yani, G nin mertebesini bölen en az iki farklı asal sayının bulunduğunu varsayabiliriz. $\pi=\pi(G)$ olmak üzere, G kendisinin bir π Hall alt grubudur. O halde, hipotez gereği, $\pi(G')<\pi(G)$ dir. Dolayısıyla, G nin mertebesini bölen fakat G' nün mertebesini bölmeyen bir q asal sayısı vardır. Bu durumda, $\pi_1:=\{q\}'$ (q dan farklı asal sayıların kümesi) olmak üzere, G', G nin bir $\pi_1:=\{q\}'$ alt grubudur. O halde, G nin G' yü içeren bir H Hall π_1 alt grubu vardır. Bu H grubu G' grubunu içerdiğinden, teorem 2.1.6 ya göre, zorunlu olarak G nin bir normal alt grubudur. Ayrıca q, H nın mertebesini bölmediğinden fakat G nin mertebesini böldüğünden H nın mertebesi G nin mertebesinden kesin küçüktür ve 1. parağrafa göre H da hipotezdeki koşulu sağlar. O halde tümevarım varsayımına göre, $dl(H)\le|cd(H)|$ dır. Bunların dışında, G/H bir q grubu olduğundan süperçözülebilirdir. O halde, yardımcı teorem 12.16 Isaacs (2006) ya göre $dl(G)\le|cd(G)|$ elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Notasyon 4.10 l bir doğal sayı ve $l=(p_1)^{\alpha_1}...(p_r)^{\alpha_r}$, l nin asal çarpanlara ayrılışı olsun; burada, $p_1,...,p_r$ ikişer ikişer farklı asal sayı, $\alpha_1,...,\alpha_r$ negatif olmayan tam sayılardır. Bu durumda, $\alpha_1,...,\alpha_r$ sayılarının maksimali $\partial(l)$ ile gösterilsin. Eğer, G bir grup ise, $\partial(G):=\partial(|G|)$ biçiminde tanımlansın.

Not 4.11 $\partial(G)\le 2$ olması durumundan, G nin bütün Sylow alt gruplarının mertebesi, bir asal sayının karesinin böleni olduğundan, tüm Sylow alt grupları abelyendir. Dolayısıyla, teorem 6.23 Isaacs(2006) ya göre G bir M grubudur ve sonuç olarak

$dl(G) \leq |cd(G)|$ dir. Bir sonraki teoremde, G ile ilgili bazı hipotezler eklenerek bu sınır yükseltilecektir.

Teorem 4.12 G bir grup, $k \in \{1,2,3,4,5\}$ olsun. Eğer, $G^{(k)}$ nilpotent ve $\partial(G) \leq 13-2k$ ise $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir.

İspat. $k \in \{1,2,3,4,5\}$ olsun. $G^{(k)}$ nilpotent olduğundan dolayı çözülebilirdir ve dolayısıyla, sonuç 2.1.16 e göre G de çözülebilirdir ve dolayısıyla $dl(G)$ den bahsedebiliriz.

$G^{(k)}$ nın nilpotent olması koşulunun bölüm gruplarında da geçerli olduğunu gösterelim: Bunun için, $N \lhd G$ olsun. Bu durumda, teorem 2.2.18 e göre, nilpotent grupların bölüm grupları da nilpotent olduğundan $G^{(k)}/(G^{(k)} \cap N)$ de nilpotentdir. Teorem 2.1.9 ve izomorfi teoremlerine göre, $(G/N)^{(k)} = G^{(k)}N/N \cong G^{(k)}/(G^{(k)} \cap N)$ olduğundan, $(G/N)^{(k)}$ da nilpotentdir. O halde, $G^{(k)}$ nın nilpotent olması koşulu bölüm gruplarına taşınır.

Bir grubun, her bölüm grubunun mertebesi o grubun mertebesini böleceğinden, $\partial(G) \leq 13-2k$ olması koşulu da bölüm gruplarına taşınır.

Şimdi artık teoremin yanlış olduğunu varsayalım ve bir çelişki arayalım. G, bu teorem için bir minimal karşıt örnek olsun. Bu durumda, $|cd(G)| \leq 5$ olması durumunda, Taketa eşitsizliğinin gerçeklendiği bilindiğine göre, $6 \leq |cd(G)|$ ve dolayısıyla,

$$n = dl(G) = |cd(G)| + 1 \geq 7$$

dir. Ayrıca, teorem 4.3 e göre, $F(G)$ bir p grubudur ve $G^{(k)}$, G nin bir normal nilpotent alt grubu olduğundan, $G^{(k)} \subseteq F(G)$ ve sonuç olarak, $G^{(k)}$ de bir p grubudur. O halde, teorem 2.1.7 ye göre $G^{(k)} \subseteq P$ olacak biçimde, bir $P \in Syl_p(G^{(k-1)})$ vardır. Teorem 2.1.6 ya göre, $G^{(k)} \subseteq P \subseteq G^{(k-1)}$ olduğundan, $P \lhd G^{(k-1)}$ ve dolayısıyla, $P \in Syl_p(G^{(k-1)})$ olduğundan, $P \lhd G$ dir. O halde,

$n = dl(G)$ olmak üzere, not 2.1.15 e göre $n-k = dl\left(G^{(k)}\right) \le dl(P) \le |cd(P)|$ dir Eğer, $P' = \{1\}$ olsa, $G^{(k+1)} = \left(G^{(k)}\right)' \subseteq P' = 1$ ve sonuç olarak, $k+1 \ge dl(G) \ge 7$ ve sonuç olarak, $k \ge 6$ çelişkisi elde edilirdi. O halde, $\{1\} < P'$ ve sonuç olarak, $|G/P'| < |G|$ dir. Şimdi, yardımcı teorem 12.16 Isaacs(2006) nın ispatındaki tekniği kullanarak, p, asal sayısının $\left|G : G^{(k-1)}\right|$ indeksini böldüğünü gösterelim. Eğer, p asal sayısı , $\left|G : G^{(k-1)}\right|$ indeksini bölmeyecek olsa, $P \in Syl_p(G)$ ve dolayısıyla, P, G nin bir normal Hall alt grubu olurdu. $|G/P'| < |G|$ olduğundan, hipotezdeki koşulunun bölüm gruplarına taşınır olması ile birlikte G nin seçimi de göz önüne alındığında, $dl(G/P') \le |cd(G/P')|$ eşitsizliği elde edilmiş olur. Ayrıca, yardımcı teorem 12.16 Isaacs (2006) nın ispatından anlaşılacağı gibi, P, G nin bir normal Hall alt grubu olduğundan $|cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 \le |cd(G)|$ dir. O halde, bu elde edilen eşitsizliklerle beraber, teorem 2.1.18 e göre,

$$dl(G) \le dl(P') + dl(G/P') = dl(P) - 1 + dl(G/P') \le |cd(P)| + |cd(G/P')| - 1 \le |cd(G)|$$

elde edilirdi. Fakat bu G nin seçimi ile çelişmektedir. O halde, p, $\left|G : G^{(k-1)}\right|$ indeksini böler.

Hipotez gereği, $|G|_p$, p^{13-2k} doğal sayısını böler. Ayrıca, yukarıda gösterildiği gibi, p, $\left|G : G^{(k-1)}\right|$ doğal sayısını böldüğünden, $|P| = \left|G^{(k-1)}\right|_p$, p^{12-k} yı böler. Şimdi, $a \in cd(P)$ olsun. Bu durumda, $P \ne \{1\}$ olduğundan, $a^2 \,\big|\, |P|$, $a^2 < |P|$ ve dolayısıyla, $a^2 \,\big|\, p^{12-k}$, $a^2 < p^{12-k}$ dir. O halde, $a \in \left\{1, p, \ldots, p^{5-k}\right\}$ dür. Böylelikle, $cd(P) \subseteq \left\{1, p, \ldots, p^{5-k}\right\}$ kapsaması elde edilmiş olur. Buradan ise, $|cd(P)| \le 6-k$ eşitsizliği bulunmuş olur. P bir p grubu olduğundan, $dl(P) \le |cd(P)| \le 6-k$ dır. Diğer yandan, $7 \le dl(G)$, $G^{(k)} \subseteq P$ olduğundan,

$$7-k \le dl(G) - k = dl\left(G^{(n-k)}\right) \le dl(P)$$

dir. Böylelikle,

$$7-k \le dl(P) \le |cd(P)| \le 6-k$$

çelişkisi elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

Sonuç 4.13 G bir grup, $k \in \{1,2,3,4,5\}$ olsun. Bu durumda,

1. Eğer, $G^{(k-1)}$ süperçözülebilir ve $\partial(G) \leq 13-2k$ ise, $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir.

2. Özel olarak, G' süperçözülebilir ve $\partial(G) \leq 9$ ise, $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir.

İspat. $k \in \{1,2,3,4,5\}$ ve $G^{(k-1)}$ süperçözülebilir olsun. Süperçözülebilir grupların komütatör grupları nilpotent olduğundan, $G^{(k)} = \left(G^{(k-1)}\right)'$ nilpotentdir. Dolayısıyla, teorem 4.12 ye göre $dl(G) \leq |cd(G)|$ dir. Böylelikle, 1) in ispatı tamamlanmış olur. Özel olarak 1) de $k = 2$ alınırsa tam olarak 2) elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, teorem 4.3 ile, bölüm gruplarına taşınabilen bir koşul verildiğinde bu koşulu sağlayan fakat Taketa eşitsizliğini sağlamayan çözülebilir gruplar arasında (eğer böyle gruplar varsa) mertebesi, mümkün olabilen en küçük doğal sayı olan grubun yapısı hakkında bazı bilgiler elde edilmiştir. Bu teoremin bir sonucu olarak, sonuç 4.4. ile Taketa eşitsizliğine (eğer varsa) bir minimal karşıt örnek olacak olan grubun yapısı hakkında bazı bulgular elde edilmiştir. Daha sonra, Taketa eşitsizliği için bazı yeterli koşullar araştırılmıştır. Teorem 4.5 ile komütatör grubu süperçözülebilir, komütatör grubuna göre bölüm grubu ise bir $2-$ grubu olan bir grubun Taketa eşitsizliğini sağladığı ispatlanmıştır. Bu toremin bir sonucu olarak ise, komütatör grubu süperçözülebilir olan rasyonel gruplar için de Teketa eşitsizliğinin gerçeklendiğini söyleyen, sonuç 4.6 ispatlanmıştır. Teorem 4.7 ise, bir grubun komütatör grubunun bir abelyen normal p komplemente sahip olmasının, o grupta Taketa eşitsizliğinin sağlanması için bir yeterli koşul olduğunu söylemektedir. Taketa eşitsizliği için bir başka yeterli koşul veren, teorem 4.8 in hipotezi ise indirgenemez karaterlerin dereceleri ile çekirdekleri arasındaki bir ilişkiye dayanmaktadır ve bu teorem, bir grupta, lineer olmayan iki indirgenemez karakter aynı dereceye sahip olduğunda bu karakterlerin çekirdekleri aynı normal alt grup oluyorsa, bu grupta Taketa eşitsizliğinin geçerli olduğunu söylemektedir. Teorem 4.9 la verilen bir başka yeterli koşul ise, grubun Hall alt grupları ile ilgilidir ve şunu söylemektedir: Eğer bir grubun, mertebesi en az iki farklı asal sayı ile bölünebilen Hall alt gruplarının mertebesinin asal bölenlerinin kümesi, bu Hall alt grubunun komütatör grubunun mertebesini bölen asal sayıların kümesini bir has alt küme olarak içeriyorsa bu gruplar için Taketa eşitsizliği geçerlidir. Teorem 4.12 de verilen yeterli koşul ise grubun mertebesinin asal çarpanlara ayrılışındaki asal sayıların üslerinin maksimali olan $\partial(G)$ ile, bu grubun kaçıncı komütatör grubunun nilpotent olduğu ile ilgilidir. Bu teoremin bir sonucu olarak da sonuç 4. 13 elde edilmiştir. Sonuç 4.13 ün ikinci kısmı bir grubun komütatör grubunun süperçözülebilir ve $\partial(G)$ nin 9 ile üstten sınırlı olmasının Taketa eşitsizliği için bir yeterli koşul olduğunu söylemektedir.

Yukarıda bu çalışmada neler yapıldığından bahsedildi. Biraz da bundan sonra neler yapılabileceğinden bahsetmeye çalışalım. "Zor" görünmekle beraber, Taketa eşitsizliğinin tüm çözülebilir gruplarda geçerli olup olmadığı hala cevap arayan bir sorudur. Bunun dışında, Teorem 4.3 ün hipotezi ve notasyonu geçerli olmak üzere, G grubu için elde verilen verileri genişletmek üzerine çalışılabilir. Eğer böyle bir şey yapılabilirse, bu Taketa eştsizliği için yeni yeterli koşullar elde etmek için kullanılabilir. Çünkü minimal karşıt örnek ne kadar iyi bilinirse, karşıt örnek oluşturabilecek gruplar için daha çok bilgiye sahip olunacaktır. Bu da başka yeterli koşullar sağlamaya yarayabilir. Teorem 4.5 in bir sonucu olarak ispatlanan sonuç 4.6 da, rasyonel grupların özellikleri daha yoğun bir şekilde kullanılarak, teorem 4.5 den bağımsız olarak ve komütatör grubunun süperçözülebilir olduğu hipotezini kaldırarak aynı sonucun hala geçerli olup olmadığı araştırılabilir. Teorem 4.8 in hipotezini sağlayan grupların karakterizasyonu ise indirgenemez karakterlerle grubun yapısı arasındaki ilişki üzerine araştırılacak bir başka problem olarak akılda tutulabilir. Yine teorem 4.9 un hipotezini sağlayan gruplar da karakterize edilmeye çalışılabilir. Teorem 4.12 ve dolayısıyla sonuç 4.13 deki $\partial(G)$ ile ilgili sınırın genişletilmesi de konuyla ilgili araştırılabilecek bir başka problem olarak düşünülebilir.

KAYNAKLAR

BERGER, T.R., 1976, Characters and derived length in groups of odd order, *J. Algebra*, **39** No:1, 199-207

BERKOVICH, Y., CHILLAG, D., HERZOG, M., 2006, Finite groups in which the degrees of the nonlinear irreducible characters are distinct, *Proc. Amer. Math. Soc.* 115 (1992), no. 4, 955-959.

GARRISON, S.C., 1973, *On groups with small number of character degrees*, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison.

GLUCK, D., 1985, Bounding the number of character degrees of a solvable groups, *J. London Math. Soc. (2)* 31 no:3, 457–462.

ISAACS, I. M., 1969, Groups having at most three irreducible character degrees, *Proc. Amer. Math. Soc.* **21**, 185-188

ISAACS, I. M., 1975, Character degrees and derived length of a solvable group, *Canad. J. Math.* **27**, 146-151

ISAACS, I. M., KNUTSON, G., 1998, Irreducible character degrees and normal subgroups, *J. Algebra* 199, no.1, 302-326.

ISAACS, I. M., 2006, *Character theory of finite groups*, Ams Chelsea Publishing, Providence, RI, 978-0-8218-4294; 0-8218-4229-3

ISAACS, I. M., 2008, *Finite group theory*, Graduate Studies in Math. Providence, RI: AMS, vol:92, 978-0-8218-4344-4

ISAACS, I. M., 2009, *Algebra*, American Mathematical Society, Providence, RI, 978-0-8218-4799-2

LEWIS, Mark, L., 1998, Derived lengths and character degrees, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, no.7, 1915-1921.

LEWIS, Mark, L., 2001, Derived lengths of solvable groups having five irreducible character degrees.I., *Algebr. Represent. Theory* 4, no. 5, 469-489.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Adana’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra, 1997 yılında İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladı. 2002 yılında lisans eğitimini tamamladı ve aynı üniversitenin Fen Bilimleri enstitüsünde yüksek lisans öğrenimine başladı. 2006 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı enstitüde doktora öğrenimine başladı.

2002 yılından beri İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olan Utku Yılmaztürk, Temha ERKOÇ YILMAZTÜRK ile evlidir.