ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Demet PARLAK

SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST ELEMANLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Demet PARLAK

SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST ELEMANLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2005

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST ELEMANLARI

Demet PARLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../........./ 2005 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

İmza............................
Prof.Dr. Naime EKİCİ
DANIŞMAN

İmza...............................
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
ÜYE

İmza...
Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
ÜYE

İmza...
Yrd.Doç.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
ÜYE

İmza..
Yrd.Doç.Dr. Perihan ARTUT (DİNÇ)
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür

Bu Çalışma TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SERBEST LIE CEBİRLERİNİN TEST ELEMANLARI

Demet PARLAK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yıl: 2005, Sayfa: 44
Jüri: Prof.Dr. Naime EKİCİ
Yrd.Doç.Dr. Ela AYDIN
Yrd.Doç.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Yrd.Doç.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
Yrd.Doç.Dr. Perihan ARTUT (DİNÇ)

F sonlu bir X kümesi tarafından üretilen serbest cebir olsun. F nin bir u elemanı ve herhangi bir Φ endomorfizmi için $\Phi(u) = u$ olduğunda Φ bir otomorfizm oluyorsa u ya F nin test elemanı denir. Buradan hareketle F cebirinin monomorfizmleri ve endomorfizmleri için test elemanları karakterize edilerek test elemanları ile bu cebirlerin retraktları arasındaki ilişki gösterilmiştir. Serbest Lie cebirlerinin bir elemanının yörüngesini koruyan endomorfizmlerin monomorfizm olduğu ve cebirin rankının iki olması durumunda bu endomorfizmin otomorfizm olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca serbest Lie cebirlerinin $\triangle-$primitif, hemen hemen primitif ve jenerik elemanları tanımlanarak örnekler verilmiş ve bu elemanların test elemenlarıyla olan ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Test elemanları, serbest Lie cebirleri, hemen hemen primitif elemanlar, jenerik elemanlar, $\triangle-$primitif elemanlar.

ABSTRACT

MSc THESIS

TEST ELEMENTS OF LIE ALGEBRAS

Demet PARLAK

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof.Dr. Naime EKİCİ
Year: 2005, Pages: 44
Jury: Prof.Dr. Naime EKİCİ
Assist.Prof.Dr. Ela AYDIN
Assist.Prof.Dr. Zerrin ESMERLİGİL
Assist.Prof.Dr. Ahmet TEMİZYÜREK
Assist.Prof.Dr. Perihan ARTUT (DİNÇ)

Let X be a finite set and F be a free algebra generated by X. An element u is called a test element if for any endomorphism Φ it follows from $\Phi(u) = u$ that Φ is an autotomorphism. Taking into consideration this definition, the relation between the test elements and retracts of this algebra has been showed by being characterized test elements for endomorphism and monomorphism of this algebra. It has been proved that an endomorphism of a free Lie algebra preserving the automorphic orbit is a monomorphism and this endomorphism is an automorphism when the rank of the algebra equals two. Also we have defined $\triangle-$primitive elements, almost primitive elements and generik elements of a free Lie algebra and we have given some examples of these elements. Furthermore the relation between almost primitive elements and test elements have been investigated.

Key Words: Test elements, free Lie algebras, almost primitive elements, generic elements, $\triangle-$primitive elements.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle örnek aldığım saygı değer danışmanım Prof.Dr.Naime EKİCİ'ye sonsuz şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Saygı değer hocam Yrd.Doç.Dr.Zerrin ESMERLİGİL'e, Arş.Gör.Dilek KAHYALAR'a, Arş.Gör.Zeynep ÖZKURT (YAPTI)'a, yazım programını hazırlayan Arş.Gör.Orhan SÖNMEZ'e ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim. Ayrıca, TÜBİTAK kurumuna maddi desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda yer alan aileme, matematik öğretmenim Salim KARAKUŞ'a, biyoloji öğretmenim Serpil KARAKUŞ'a sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince manevi desteğini her zaman yanımda hissettiğim can dostum, sevgili arkadaşım Remziye Arzu ZABUN' a her konudaki yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Serbest bir cebirin bir u elemanı için $\Phi(u) = u$ olacak şekildeki Φ endomorfizmleri otomorfizm ise bu eleman test elemanı olarak adlandırılmaktadır. Bu tanım V.Shpilrain tarafından (Shpilrain, 1994) de açıkça verilmiştir. Test elemanları ilk defa J.Nielsen ve W.Dicks tarafından serbest gruplar için tanmlanmıştır. Nielsen (Nielsen, 1918) te; üreteçleri x ve y olan F_2 serbest grubunun

$$x \to f \ , \ y \to g$$

şeklinde tanımlanan endomorfizminin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşulun $[f,g]$ yi eşleniğine yada tersine dönüştürmesi gerektiğini ifade etmiştir. Burada

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

olup F_2 nin test elemanıdır. W.Dicks (Dicks, 1982; Dicks, 1983) te rankı 2 olan serbest birleşmeli $K < x,y >$ cebirleri için benzer sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca (Drensky, Yu, 1998; Essen, 1997; Feng, Yu, 1999) da polinom cebirlerinin test elemanları düşünülmüştür.

Serbest grupların test elemanları üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. (Comerford, 1995; Fine ve ark., 1998; Fine ve ark., 1999; Rosenberger, 1984; Shpilrain, 1994) de test elemanlarına örnekler verilmiştir. E.C. Turner (Turner, 1996) da sonlu ranklı serbest grupların monomorfizmleri için test elemanlarının maksimal ranklı ve herhangi bir öz retrakt tarafından içerilmeyen elemanlar olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuçları serbest birleşmeli olmayan cebirler için A. A. Mikhalev, U. U. Umurbaev ve J-T. Yu (Mikhalev ve ark., 2001) de ispatlamıştır.

Yukarıdaki çalışmalar serbest cebirlerin test elemanlarının maksimal ranklı elemanlar olduğunu göstermektedir. Ayrıca bir cebirin alt cebiri üzerinde birim olacak şekilde homomorfizm tanımlanarak bu cebirin bir retraktı elde edilir. Buradan yola çıkılarak test elemanlarının herhangi bir retrakt tarafından içerilmeyen elemanlar olduğu ispatlanmıştır. Biz bu çalışmamızda buna benzer sınıflandırmaları göz önüne alarak bir takım test elemanlarını inceledik.

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızda yeralan temel tanımlar ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde bir serbest cebirin test elemanlarının maksimal ranklı ve herhangi bir öz retrakt tarafından içerilmeyen elemanlar olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde sonlu üretilmiş Schreier özelliğine sahip bir F serbest cebirinin sıfırdan farklı bir elemanının otomorfik yörüngesini koruyan endomorfizmlerin monomorfizm olduğu ve $rank(F) = 2$ olması durumunda bu endomorfizmin otomorfizm olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde Nielsen-Schreier özelliğine sahip serbest cebirlerin hemen hemen primitif ve test elemanlarına yer verilmiştir. Hemen hemen primitif elemanların maksimal ranklı elemanlar olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca F, alt cebirlerinin serbest çarpımı iken çarpımdaki her bir alt cebirin hemen hemen primitif elmanlarının toplamının F cebirininde hemen hemen primitif elmanı olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçtan hareketle Teorem5.8 de hemen hemen primitif elemanlara örnekler verilip hemen hemen primitif elemanlar ve test elemanları arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Altıncı bölümde bir L serbest Lie cebirinin rankının tek ve çift sayı olması durumunda $\triangle-$primitif elemanları incelenmiştir. Ayrıca $\triangle-$primitif elemanlarla endomorfizmler arasında ilişki kurulmuştur.

Sekizinci bölümde serbest Lie cebirinin hemen hemen primitif elemanlarına ve jenerik elemanlara örnekler verilmiştir. Ayrıca, jenerik ancak hemen hemen primitif olmayan bir eleman örneği sunulmuştur.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

K bir cisim $X = \{x_1, ..., x_n\}$ bir küme ve $F = F(X)$ K cismi üzerinde serbest üreteç kümesi X olan bir serbest cebir olsun.

Tanım 2.1 $\mathbb{N}$ pozitif tamsayıların kümesi $\Gamma(X)$, X teki birleşmeli olmayan monomiallerin serbest grupoidi, $S(X)$, X teki birleşmeli kelimelerin serbest yarı grubu ve

$$\sim: \Gamma(X) \to S(X)$$

e homomorfizm olmayan braket olmak üzere derece fonksiyonu $\mu : X \to \mathbb{N}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i) \qquad x_1, ..., x_n \in X$$

Her $x \in X$ için $\mu(x) = 1$ ise μ normal uzunluktur yani; $\mu = \ell = \ell_X$ tir. $a \in F(X)$ için

$$a = \sum \alpha_i a_i, 0 \neq \alpha_i \in K$$

olsun. $\widetilde{a}$ ile a nın μ ye göre en yüksek dereceli terimini göstereceğiz. a_i baz monomialleri ve $j \neq s$ için $a_j \neq a_s$ ise $\mu(a) = \max\{\mu(\widetilde{a}_i)\}$ olarak tanımlanır.Bu durumda

$$\widetilde{a} = \sum_{j, \mu(a_j) = \mu(a)} \alpha_j a_j$$

dır.

Bir u monomiali için $\ell_X(u)$ ile u nun X kümesine göre, uzunluk fonksiyonunu kullandığımız durumları belirlemek için de a^0 ile a nın uzunluk fonksiyonuna göre en yüksek dereceli terimini göstereceğiz. X üzerindeki serbest Lie cebirini $L(X)$ ile, $F(X)$ deki çarpımı uv ve $L(X)$ deki çarpım için $[u, v]$ yazacağız. $A_1 * A_2 * ... * A_n$ ile F nin A_1, $A_2, ...,$ A_n alt cebirlerinin serbest çarpımını , $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i$ ile de A_i alt cebirlerinin direkt toplamını göstereceğiz.

Tanım 2.2 F bir serbest cebir olsun. F de her bir terimi aynı dereceden olan elemana homojen eleman denir.

Örnek 2.3 $X = \{x, y, z\}$ ve $F = F(X)$ serbest cebir olsun. Bu durumda

$$u = (xy) + (yz)$$

elemanı ikinci dereceden homojen elemandır.

Tanım 2.4 Y, F nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki dönüşümlere elemanter dönüşümler denir.

1. Y nin elemanlarına uygulanan tersinir lineer dönüşümler.

2. Bir $y \in Y$ için

$$y \to y + f(y_1, ..., y_n) \qquad y_1, ..., y_n \in Y / \{y\}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler.

Şimdi F nin sonlu ranklı olması durumunda herhangi bir otomorfizmin sonlu adımda elde edilebileceğini gösteren teoremi ifade edelim.

Teorem 2.5 F sonlu X kümesi üzerinde bir serbest cebir olsun. O zaman F nin her otomorfizmi X e elemanter dönüşümlerinin ard arda sonlu sayıda uygulanmasıyla elde edilir.

Teoremin ispatı (Cohn, 1964) de bulunabilir.

Tanım 2.6 Eğer bir $u \in F$ elemanı F nin bir serbest üreteç kümesine ait ise u ya primitif eleman denir.

Tanım 2.7 F serbest cebirinin bir serbest üreteç kümesinin kardinalitesine F nin rankı denir. Bir $u \in F$ için u elemanının rankı F nin otomorfizmleri altında u nun görüntüsünün bağlı olduğu serbest x_i üreteçlerinin minimum sayısı olup bu sayıyı $rank(u)$ ile göstererece-ğiz.

Tanım 2.8 F rankı n olan bir serbest cebir olsun. Eğer bir $u \in F$ için $rank(u) = n$ oluyorsa u elemanına maksimal ranklı eleman denir.

Tanım 2.9 B, F nin bir alt kümesi olsun. Eğer B kümesi F de B tarafından üretilen cebirin serbest üreteç kümesi ise B ye serbest küme denir.

Tanım 2.10 F sonlu üreteçli bir serbest cebir ve $B = \{b_1, ..., b_n\} \subset F$ olsun. Eğer

$$f(b_1, ..., b_n) = 0$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir bağıntı yoksa B kümesine bağımsız küme denir.

Tanım 2.11 $B = \{b_1, ..., b_n\}$, F serbest üreteç kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer her i için en yüksek dereceli b_i^0 parçaları $\left\{b_j^0 / j \neq i\right\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire ait değilse B ye indirgenmiş küme denir.

Aşagıdaki teoremin ispatı (Kukin, 1972) de yapılmıştır.

Teorem 2.12 $F = F(X)$ serbest cebirinin her indirgenmiş alt kümesi bağımsızdır.

A, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ tarafından üretilen serbest birleşmeli cebir olsun.

Tanım 2.13 $\varepsilon : A \to K$, $1 \leq i \leq n$ için $\varepsilon(x_i) = 0$ olarak tanımlanan dönüşüme genişletme homomorfizmi (augmentation homomorfizmi) denir. Bu durumda ε homomorfizminin çekirdeği, bazı X olan bir serbest $solA-$ modüldür. Bu modülü Δ ile gösterelim. Her $u \in \Delta$ elemanı

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_1}x_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}x_n$$

formunda tek türlü yazılabilir. Burada $X = \{x_1, ..., x_n\}$ bazına göre u nun koordinatları olan $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ elemanları fox türevleri olup bu türevler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.14 Aşağıdaki koşulları sağlayan $\frac{\partial}{\partial x_i} : A \to A$ $(1 \leq i \leq n)$ dönüşümleri sol Fox türevleri olarak adlandırılır.

1) $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

2) Her u, $v \in A$ ve α, $\beta \in K$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

3) Her u, $v \in A$ için

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varepsilon(v) + u\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Eğer yukarıdaki koşullar aşağıdaki gibi ise $\frac{\partial}{\partial x_i}$ fonksiyonlarına sağ Fox türevleri denir.

1) $\frac{x_i \partial}{\partial x_j} = \delta_{ij}$

2) $\frac{(\alpha u + \beta v)\partial}{\partial x_i} = \alpha \frac{u\partial}{\partial x_i} + \beta \frac{v\partial}{\partial x_i}$

3) $\frac{(uv)\partial}{\partial x_i} = \varepsilon(v)\frac{v\partial}{\partial x_i} + \frac{u\partial}{\partial x_i}v$

Fox türevleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Fox, 1953) te bulunmaktadır.

Tanım 2.15 F bir serbest cebir olsun. Eğer F nin her örten homomorfizmi bir izomorfizm ise F ye Hopfian cebir denir.

Tanım 2.16 Bir serbest cebirin her alt cebiri serbest ise bu cebire Schreier sınıfındandır denir.

Tanım 2.17 H serbest bir cebir olmak üzere $\Phi : F \to H$ bir homomorfizm olsun. Bu homomorfizmin çekirdeğini $\ker\Phi$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.18 F serbest cebirinde bir u elemanının F deki bütün otomorfizmler altındaki görüntüsüne u elemanının yörüngesi denir . Bu kümeyi $Orb(u)$ ile göstereceğiz. Buna göre

$$Orb(u) = \{\ v \in F\ /\ v = \Phi(u)\ ,\ \Phi \in AutF\ \}$$

dir.

Tanım 2.19 L_1, L_2 iki Lie cebiri olsun. $\Phi : L_1 \to L_2$ lineer dönüşümü için

$$\Phi([x,y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$$

ise Φ ye bir Lie cebiri morfizmi denir.

Tanım 2.20 L, X kümesi üzerinde bir Lie cebiri ve $i : X \to L$ bir dönüşüm olsun. Her P Lie cebiri ve her $\alpha : X \to P$ dönüşümü için $\alpha = \eta i$ olacak şekilde bir tek $\eta : X \to P$ Lie cebir morfizmi varsa (L,i) çiftine X üzerinde serbest Lie cebiri denir.

L, X kümesi üzerinde bir serbest Lie cebiri olsun. L deki çarpımı her a, $b \in L$ için $[a,b]$ ile gösterip bu çarpıma a ile b nin komütatörü diyeceğiz.

Tanım 2.21 $[L,L]$, a, $b \in L$ olmak üzere $[a,b]$ şeklindeki tüm elemanlar tarafından üretilen alt cebir olup bu alt cebire L nin komütatör alt cebiri veya türetilmiş alt cebiri denir.

3. TEST ELEMANLARI VE RETRAKTLAR

$X = \{x_1,...,x_n\}$ ve $F = F(X)$, X üzerindeki serbest cebir olsun.

Bu bölümde monomorfizmler ve sonlu ranklı serbest F cebirlerinin endomorfizmleri için test elemanlarını karakterize edeceğiz. Ayrıca bu cebirlerin retraktları ile test elemanları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem 3.1 (Mikhale ve Yu, 1998) $u \in F$, $rank(u) = n$ ve Φ, $\Phi(u) = u$ olacak şekildeki monomorfizm olsun. Bu durumda Φ, F nin bir otomorfizmidir.

İspat: u_x^0, u nun en yüksek dereceli elemanı ve u_x^* da u da u_x^0 dışında kalan terimler olmak üzere

$$u = u_X^0 + u_X^*$$

olsun. Ayrıca,

$$u_X^* = u_X^{*0} + u_X^{**}, u_X^{**} = u_X^{**0} + u_X^{***}...$$

olduğunu varsayalım.

F nin herhangi bir Y serbest üreteç kümesi için aşağıdaki sonsuz sırayı göz önüne alacağız.

$$Y = (\ \ell_Y(u), rank(u_Y^0), \ell_Y(u_Y^{*0}), ...)$$

Bu şekildeki sıralamaları soldan başlayarak alfabetik sıraya göre karşılaştıracağız. Farklı olarak, X serbest üreteç kümesi için gerektiğinde aşağıdaki minimum özellik kabul edilebilir.

$$X(u) = \min_{Y \in \Omega} Y(u) \ ; \Omega = \{\ Y \ / \ Y, F \text{ nin serbest üreteç kümesi } \}$$

$$\Phi(x_i) = h_i \quad 1 \leq i \leq n$$

ve $H = \{h_1,...,h_n\}$ olmak üzere B, F nin H tarafından üretilen alt cebiri olsun. Φ , F nin monomorfizmi olduğu için H , F nin bağımsız bir alt kümesidir. R ardışık elemanter dönüşümleri vardır öyleki;

$$R(H) = V = \{\ v_1,...,v_n \ / \ v_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq n\ \}$$

V indirgenmiş bir küme olup B alt cebirini gerer. $Y = \{y_1,...,y_n\} = R(X)$ olsun. Y nin serbest üreteç kümesi ve

$$\Phi(y_i) = v_i \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğu açık. $\widetilde{u}$, u nun Y ye göre yazılışı olsun. Varsayımımızdan,

$$u(x_1,...,x_n) = \widetilde{u}(y_1,...,y_n) = \widetilde{u}(v_1,...,v_n) \tag{3.1}$$

$\widetilde{u}(v_1,...,v_n)$, $\widetilde{u}(y_1,...,y_n)$ de her i için y_i yerine v_i yazılarak elde edilmiştir.

Aksine, φ nin otomorfizm olmadığını varsayalım. V, indirgenmiş küme olduğundan bazı j ler için $\ell_X\left(v_j\right) > 1$ dir.

Genelliği kaybetmeksizin

$$v_1 = x_1,...,v_r = x_r \qquad r < n$$

ve

$$\ell_X\left(v_j\right) > 1 \qquad r+1 \leq j \leq n$$

($r = 0$ iken her i için $\ell_X\left(v_j\right) > 1$ dir.) olduğunu kabul edebiliriz.

(3.1) den $u(x_1,...,x_n) \in B$ dir. Şimdi u elemanının şu şekildeki parçalarını düşünelim:

$$u(x_1,...,x_n) = u_x^0 + u_x^*$$

$$u_x^0 = u_x^{01}(x_1,...,x_r) + u_x^{02}$$

Burada u_x^{01}, u_x^0 ın $x_{r+1,...,}x_n$ ye bağlı olmayan elemanıdır.

$u_x^{01} = 0$ ise u elemanını V serbest üreteç kümesine göre B nin elemanı olarak yazacağız. V indirgenmiş olduğundan,

$$\ell_V\left(u(x_1,...,x_n)\right) < \ell_X\left(u(x_1,...,x_n)\right)$$

(3.1) eşitliğini ğöz önüne alırsak,

$$\ell_Y\left(\widetilde{u}(y_1,...,y_n)\right) < \ell_X\left(u(x_1,...,x_n)\right)$$

elde ederiz. Bu durum u nun X e göre rankının n olması ile çelişir.

$u_x^{01} \neq 0$ olması durumunda,

$$u(x_1,...,x_n) = \widetilde{u}(v_1,...,v_n) = \widetilde{u}_V^0 + \widetilde{u}_V^*$$

elde ederiz. Buradan

$$\widetilde{u}_V^0 = \widetilde{u}_V^{01}(v_1,...,v_r) + \widetilde{u}_V^{02}(v_1,...,v_n)$$

elde edilir. Burada $\widetilde{u}_V^{01}$, $\widetilde{u}_V^0$ ın $v_{r+1},...,v_n$ ye bağlı olmayan elemanıdır. (3.1)den

$$\widetilde{u}_V^{01}(v_1,...,v_r) = \widetilde{u}_X^{01}(x_1,...,x_r)$$

dir. $\widetilde{u}_V^{02} \neq 0$ ise V nin indirgenmiş bir küme olduğu dikkate alınarak

$$\ell_X\left(\widetilde{u}\left(v_1,...,vr\right)\right) > \ell_X\left(u\right)$$

elde edilir. Bu durum (3.1) ile çelişir. Bu nedenle,

$$\widetilde{u}_V^0 = u_X^{01}\left(x_1,...,x_r\right) = u_X^{01}\left(v_1,...,v_r\right) \tag{3.2}$$

Şimdi de u_X^{02} elemanını düşünelim. $u_X^{02} \neq 0$ ise (3.2) den

$$rank(\widetilde{u}_Y^0) = rank_B(\widetilde{u}_V^0) = rank(u_X^{01}) < rank(u\left(x_1,...,x_n\right))$$

elde edilir. Bu durum, X in minimal özelliği ile çelişir. Burada u_X^0, $x_{r+1},...,x_n$ ye bağlı değildir.

$$v_1 = x_1,...,v_r = x_r$$

(Yani; $u_X^0 = u_V^0$) olduğundan benzer şekilde u_X^{*0}, $u_X^{**0},...$ elemanları $x_{r+1},...,x_n$ ye bağlı değildir. Bu nedenle de u elemanı $x_{r+1},...,x_n$ ye bağlı değildir. Bu durum $rank(u) = n$ olması ile çelişir. Dolayısıyla Φ bir otomorfizmdir.

■

Teorem 3.2 (Mikhalev ve Yu; 1998) $u \in F$, $rank(u) = n$ ve Φ, F serbest cebirinin bir monomorfizmi olsun. Bu durumda, Φ nin otomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $\Phi(u)$ nun u nun yörüngesine ait olmasıdır. $(\Phi(u) \in Orb(u))$

İspat: Φ otomorfizm ise sonuç aşikardır. $\Phi(u) \in Orb(u)$ olsun. Bu durumda F nin Ψ şeklinde bir otomorfizmi vardır öyleki;

$$\Phi(u) = \Psi(u)$$

ve $\mu = \Phi\Psi^{-1}$monomorfizm olup $v = \Psi(u)$ elemanı için,

$$\mu(v) = \Phi\Psi^{-1}\left(\Psi(u)\right) = \Phi(u) = \Psi(u) = v$$

ve $rank(v) = n$ dir. Teorem3.1 den $\Phi\Psi^{-1}$ otomorfizmdir. Dolayısıyla Φ , F nin otomorfizmidir.

■

Teorem 3.3 K, $kar(K) \neq 2$ olan bir cisim, $|x| \geq 2$ ve u, F nin maksimal ranklı homojen elemanı olsun. Bu durumda u bir test elemanıdır.

İspat: Φ, $F(X)$ in bir endomorfizmi ve

$$h_i = \Phi(x_i) \qquad 1 \leq i \leq n$$

olsun. $|x| \geq 2$ ve u maksimal ranklı homojen eleman olduğu için $\ell(u) \geq 2$ dir. Buradan $\Phi(u) = u$ olur. Bu ise h_i $(1 \leq i \leq n)$ elemanlarının sıfırdan farklı ve minimal dereceli $\overline{h_i}$ elemanlarının uzunluğunun 1 olduğu anlamına gelir. u maksimal ranklı olduğu için h_i, $1 \leq i \leq n$, elemanları lineer bağımsızdır. Bu durumda Φ , $F(X)$ in monomorfizmidir. u maksimal ranklı olduğu için Teorem 3.1 den Φ, $F(X)$ in otomorfizmidir.

■

Teorem3.3 teki durumu serbest Lie cebirleri için V.Shpilrain (Shpilrain, 1994) te ispatlamıştır. Teorem.3.1 ve 3.2 yi A.A.Mikhalev ve A.A.Zolotykh serbest Color Super Lie cebirleri için (Mikhalev ve Zolotykh, 1995) te ispatlamıştır.

Teorem3.1, $rank(u) < n$ iken doğru değildir. Ayrıca u, x_1 bağlı değilse

$$\begin{aligned} \Phi(x_1) &= x_1 x_2 \\ \Phi(x_i) &= x_i \qquad i > 1 \end{aligned}$$

endomorfizmi düşünülebilir. Buradan Φ nin otomorfizm olduğu durumunu çıkarmak imkansızdır. Ayrıca, $X = \{x_1, x_2\}$, $u = x_1 + x_1 x_2$ elemanı için

$$\Phi(x_1) = u, \Phi(x_2) = 0$$

alalım. Bu durumda, $rank(u) = 2 = |X|$, $\Phi(u) = u$ fakat Φ, $F(X)$ in otomorfizmi değildir. Bunun sebebi; eğer U, u tarafından üretilen alt cebir ve J, $F(X)$ in x_2 tarafından üretilen ideali ise $F(X) = U \oplus J$ dir. Buradan u nun $F(X)$ in U özalt cebirine ait olduğunu söyleyebiliriz.

Schreier cebirlerin idealleri ve alt cebirleri konusunda (Bahturin, 1987; Bahturin ve ark., 1992; Bokut ve Kukin, 1994; Mikhalev ve Zolotykh, 1995; Reutenauer, 1993) kaynaklarından yararlanacağız.

Tanım 3.4 F serbest cebir ve H, F nin alt cebiri olsun. Eğer H üzerinde birim dönüşüm olacak şekilde $\rho : F \to H$ homomorfizmi varsa H ye F nin retraktı denir.

Teorem 3.5 (Bokut ve Kukin, 1994; Mikhalev ve Yu, 1998) K bir cisim, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ve H, $F = F(X)$ serbest cebirinin sıfırdan farklı alt cebiri olsun. Bu durumda, H nin

F de öz retrakt olabilmesi için gerek ve yeter koşul $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$, F cebirinin, $r \in Z$, $1 \leq r \leq n$ için $u = \{u_1,\dots,u_r\}$ kümesi H cebirinin serbest üreteç kümesidir öyle ki; u_i^* , F nin $y_{r+1},\dots,y_n$ tarafından üretilen idealine ait olmak üzere

$$u_i = y_i + u_i^* \qquad 1 \leq i \leq r \tag{3.3}$$

olmasıdır.

İspat: Eğer H alt cebiri (3.3) durumunu sağlayan serbest üreteç kümesine sahip ise, $\rho : F \to H$

$$\rho(y_i) = u_i,\ 1 \leq i \leq r$$

$$\rho(y_j) = 0\ ,\ r \leq j \leq n$$

homomorfizmini düşünelim. ρ nun retrakt homomorfizm olduğu açıktır. I , F nin $y_{r+1},\dots,y_n$ tarafından üretilen ideali olmak üzere $F = H \oplus I$ dir. O halde H, F nin aşikar olmayan öz retraktıdır.

Şimdi H, F nin aşikar olmayan öz retraktı ve $\rho : F \to H$ retrakt homomorfizmi ve

$$b_i = \rho(x_i)\ ,\ 1 \leq i \leq n$$

olsun. Elemanter dönüşümleri $\{b_1,\dots,b_n\}$ kümesine ardışık olarak uygularsak H alt cebirinin $\{u_1,\dots,u_r\}$ serbest üreteç kümesi elde edilir.

$r = n$ ise ρ retrakt homomorfizm olur ve H, F nin özalt cebiri değildir. Bu nedenle $r < n$ olmalıdır. X e aynı elemanter dönüşümleri uygularsak F nin aşağıdaki özelliklere sahip olan $Y = \{y_1,\dots,y_n\}$ serbest üreteç kümesini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \rho(y_i) &= u_i \quad ,1 \leq i \leq r \\ \rho(y_j) &= 0 \quad ,\ r+1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Genelliği kaybetmeksizin $\{u_1,\dots,u_r\}$, $Y = \{y_1,\dots,y_r\}$ alt kümesi ile bağlantılıdır. Buradan $\ker\rho$,

$$\{\ y_j\ /\ r+1 \leq j \leq n\ \}$$

alt kümesi tarafından üretilen idealdir. ρ , H üzerinde birim dönüşüm olduğu için

$$\rho(u_i) = u_i = \rho(y_i) \qquad 1 \leq i \leq r$$

dir. Burada $\rho(u_i - y_i) = 0$ olduğundan $u_i - y_i \in \ker\rho$ dır. Dolayısıyla $u_i^*, 1 \leq i \leq r$, F nin $\{ y_{r+1}, \ldots, y_n \}$ alt kümesi tarafından üretilen idealine ait olmak üzere

$$u_i = y_i + u_i^* \qquad 1 \leq i \leq r$$

dır.

■

Teorem3.5 te verilen Nielson-Schreier özelliği ile sonlu üreteçli cebirlerin retraktlarının tanımından $F(x,y)$ nin herhangi bir öz retraktı w elemanı tarafından gerilir. $F(x,y)$ nin $\{u,v\}$ şeklinde serbest üreteç kümesi vardır öyle ki; f, v ye bağlı monomial olmak üzere $w = u + f$ dir. $L = L(x,y)$ serbest Lie cebirinin test elemanlarının $[L,L]$ komütatör cebirinin sıfırdan farklı elemanları olduğu kolaylıkla görülebilir. (Bu durum (Drensky ve Yu, 1998) de açıklanmıştır.)

Teorem 3.6 (Mikhalev ve Yu, 1997; Mikhalev ve Yu, 1998) F serbest cebirinin test elemanları tam olarak F nin herhangi bir öz retraktı tarafından içerilmeyen elemanlardır.

İspat: Φ, F nin birim olmayan endomorfizmi olsun öyle ki; Φ otomorfizm değil ve

$$\Phi(u) = u \qquad 0 \neq u \in F$$

olsun.

Φ, F nin monomorfizmi ise Teorem3.1 den $rank(u) < n$ yani; u elemanı F nin bir serbest çarpanına aittir.

Şimdi, Φ nin monomorfizm olmadığını kabul edelim.

$$\Phi^{\infty}(F) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \Phi^i(F)$$

olsun. $u \neq 0$ ve $\Phi^{\infty}(F) \neq 0$ olduğundan F nin bir Y serbest üreteç kümesi vardır öyle ki; $1 \leq s \leq n$ olacak şekildeki s tamsayıları için

$$\begin{aligned} \Phi(y_i) &= u_i \neq 0 \quad , 1 \leq i \leq s \\ \Phi(y_j) &= 0 \qquad\quad , s < j \leq n \end{aligned}$$

ve J, F nin $y_{s+1}, \ldots, y_n$ tarafından üretilen ideali olmak üzere $\{u_1, \ldots, u_s\}$ alt kümesi $\mathrm{mod}\,ulo\ J$ ye göre indirgenmiştir.

$$u_i = \widetilde{u_i} + u_i^* \;\; 1 \leq i \leq s \;;\; \widetilde{u_i},\ u_i \text{ nin } y_1, \ldots, y_s \text{ ye bağlı olan parçası ve } u_i^* \in J \text{ dir.}$$

$\widetilde{u_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq s$, olduğu açıktır. ($\widetilde{u_i} = 0$ olsaydı $u_i = u_i^*$ olurdu. $u_i^* \in J$ olduğundan $u_i = u_i^* = 0$ dır. Bu ise $\{u_1, ..., u_s\}$ nin indirgenemezliği ile çelişir.) Benzer şekilde

$$u = \widetilde{u} + u^*$$

yazacağız.

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}(y_1, ..., y_s) \neq 0$$

olduğu açıktır.

$$u = \Phi(u) = \Phi(\widetilde{u}) + \Phi(u^*) = \Phi(\widetilde{u})$$

olduğundan

$$\widetilde{u}^{\circ} = \left(\widetilde{\Phi(\widetilde{u})}\right)^0$$

yani;

$$\widetilde{u}^0(y_1, ..., y_s) = \widetilde{u}^0\left(\widetilde{u_1, ..., u_s}\right)^0 = \widetilde{u}^0\left(\widetilde{u_1}^0, ..., \widetilde{u_s}^0\right)$$

dır. $\widetilde{u}^0$ elemanının $1 \leq t \leq s$ olmak üzere $y_1, ..., y_t$ ye bağlı olduğunu kabul edebiliriz. Buradan

$$\ell(u_i) = \ell(y_i) \qquad 1 \leq i \leq s$$

elde ederiz. $t = s$ ise $u_1, ..., u_s$ tarafından üretilen H alt cebiri F nin özalt cebiridir ve $u \in H$ dir. $t < s$ ise $\widetilde{u}$ elemanının homojen elemanlara ayrılmasını düşünelim. (uzunluk fonksiyonuyla bağlantılı) $\widetilde{u}^{00} = (u^*)^0$ olmak üzere

$$\widetilde{u} = \widetilde{u}^0 + \widetilde{u}^{00} + ...$$

ve bu şekilde devam eder. Benzer yötemler kullanılarak her j için $\widetilde{u}$, y_j ye bağlı olmak üzere $\ell(u_j) = \ell(y_j)$ elde edilir. $t \leq r \leq s$ olmak üzere $\widetilde{u}$ elemanlarının $y_1, ..., y_r$ ye bağlı olduğunu kabul edebiliriz. $\Phi(u^*) = 0$ olduğu için,

$$u = \widetilde{u}(y_1, ..., y_r) + u^* = \Phi(u) = \widetilde{u}(u_1, ..., u_r)$$

Bu nedenle u elemanı , $u_1, ..., u_r$ tarafından üretilen H' alt cebirine aittir. $(H' \subseteq H \subseteq F)$ Y serbest üreteç kümesi üzerinde tersinir lineer dönüşüm uygulayarak,

$$u_j = y_j + u_j^*$$

yazabiliriz. Burada $u_j^* \in J$ $(1 \leq j \leq r)$ dir. Nitekim, H' F nin özalt cebiridir ve $u \in H'$ dir.

Dolayısıyla F nin herhangi bir özalt cebiri tarafından içerilmeyen $u \in F$ elemanının F cebirinin otomorfizmleri için bir test elemanı olduğunu ispatladık. Diğer taraftan H , F nin özalt cebiri, $0 \neq u \in H$ ve Φ bir homomorfizmdir. Bu durumda Φ otomorfizm değildir. Fakat $\Phi(u) = u$ yani; u elemanı test elemanı değildir.

■

L. P. Comerford (Comerford, 1995) de serbest grupların test elemanlarını belirleyen bir algoritma inşaa etmiştir.

4. ENDOMORFİZMLER VE OTOMORFİK YÖRÜNGELER

K bir cisim, $L = L(x,y)$ serbest Lie cebiri olsun. Bu bölümde, $F = F(X)$ in sıfırdan farklı elemanının otomorfik yörüngesini koruyan endomorfizmlerin otomorfizm olduğunu ispatlayacağız.

Not 4.1 $w \in L$ olmak üzere Ψ, L nin

$$\Psi(Orb(w)) \subseteq Orb(w)$$

şeklindeki bir endomorfizmi ve Φ, L nin bir otomorfizmi olsun. Bu durumda

$$(\Psi \circ \Phi)(Orb(w)) = \Psi(Orb(w)) \subseteq Orb(w)$$

$$(\Phi \circ \Psi)(Orb(w)) \subseteq \Phi(Orb(w)) = Orb(w)$$

Görüldüğü gibi $\Psi \circ \Phi$, $\Phi \circ \Psi$ fonksiyonları w elemanının yörüngesini korumaktadır. Yani; $\Psi \circ \Phi$, $\Phi \circ \Psi$ otomorfizm ise Ψ ile aynı etkiye sahiptir.

Örneğin;

$$\Psi(w) = w_1 \in Orb(w)$$

ise bir $\Phi \in AutL$ vardır öyle ki;

$$\Phi(w_1) = w \in Orb(w)$$

olur. Φ otomorfizm olduğundan $\Phi \circ \Psi$ de yörüngeyi korur. Buradan

$$\Phi \circ \Psi(w) = \Phi(w_1) = w$$

elde edilir. $\Phi \circ \Psi$ yerine Ψ aldığımızda $\Psi(w) = w$ ya ulaşılır. Buradan Ψ nin $Orb(w)$ ve w elemanını sabitlediğini söyleyebiliriz.

Önerme 4.2 L nin bütün otomorfizmleri lineerdir. Yani; bu otomorfizmler $GL_2(K)$ genel liner grubuna ait olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \alpha x + \gamma y \\ \Phi(y) &= \beta x + \delta y \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in K \end{aligned}$$

Teorem 4.3 Ψ , $\Psi(Orb(w)) \subseteq Orb(w)$ olacak şekildeki endomorfizm olsun. Bu durumda Ψ nin lineer kısmı tersinirdir. Yani;

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \alpha x + \gamma y + f \\ \Psi(y) &= \beta x + \delta y + g \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K \text{ ve } f, g \in L' = [L, L]\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\Psi_0(x) &= \alpha x + \gamma y \\ \Psi_0(y) &= \beta x + \delta y\end{aligned}$$

$GL_2(K)$ ya aittir.

İspat:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \alpha x + \gamma y + f \\ \Psi(y) &= \beta x + \delta y + g\end{aligned}$$

olmak üzere $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ ve $f, g \in L' = [L, L]$ ve $w_0(x, y)$ ile w nun minimal dereceli homojen terimini gösterelim. $\deg w_0 > 1$ ise Not4.1 den $\Psi(w) = w$ olduğunu varsayabiliriz. Yani;

$$w_0(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y) = w_0(x, y)$$

dir. $(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y) \neq (0, 0)$ dır. $\deg w_0 > 1$ olduğu için $\deg w_0$ dereceli bütün Lie komütatörleri $[x, y]$ yi alt çarpan olarak içerir. x ve y elemanları yerine lineer bağımlı elemanlar aldığımızda ise sıfır olurlar. Bu nedenle $\alpha x + \gamma y$ ve $\beta x + \delta y$ lineer bağımsız olup Ψ nin lineer parçaları tersinirdir.

$\deg w_0 = 1$ ise

$w(x, y) = \varepsilon x + \eta y + w_1 \;\; \varepsilon, \eta \in K, (\varepsilon, \eta) \neq (0, 0), w_1 \in L'$ ve $\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y$ lineer bağımlı

olsun. Gerekli olduğunda x ve y yerine bunların lineer toplamları olan x' ve y' alınabilir. Öyle ki; x' ve y' L nin serbest üreteçleridir. Ayrıca $\Phi \in AutL$ olmak üzere Ψ yerine $\Phi \circ \Psi$ alınabilir.

$\beta = \gamma = \delta = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= x + f \\ \Psi(y) &= g\end{aligned}$$

olur. $\Psi(w) = w$ olduğundan w nun yörüngesindeki bütün elemanlar sıfırdan farklı lineer terimlere sahiptir. $h \in L^{'}$ olmak üzere L de w elemanını $v = y + h(x,y)$ elemanına götüren bir otomorfizm vardır. Buradan

$$\Psi(v) = g + \Psi(h) \in L^{'}$$

olur. Bu ise imkansızdır. Çünkü;

$$\Psi \circ \Phi(w) = \Psi(v) = g + \Psi(h)$$

olup $\Psi \circ \Phi$ yerine Ψ aldığımızda

$$\Psi(w) = g + \Psi(h)$$

olur ve bu durumda $\Psi(w) = w$ olması imkansızdır. Dolayısıyla Ψ nin lineer kısmı tersinirdir.

■

Önerme 4.4 $f_1, ..., f_m$ bir serbest Lie cebirinin sıfırdan farklı elemanları olsun. Eğer bu elemanlar aşikar olmayan bir takım bağıntıları sağlıyorsa $f_1^0, ..., f_m^0$ en yüksek dereceli homojen terimlerin herbiri diğer en yüksek dereceli homojen terimler tarafından üretilen Lie cebirine aittir.

Sonuç 4.5 f ve g, L nin sıfırdan farklı elemanları olsun. $h(f,g) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $h(x_1,x_2)$ polinomu varsa $f^0 = \varepsilon g^0$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in K$ vardır.

İspat: Önerme4.4 ten f^0 , g^0tarafından üretilen Lie cebirine aittir. Bir üreteçli Lie cebirleri bir boyutlu olduğundan $f^0 = \varepsilon g^0$ olacak şekilde $\varepsilon \in K$ vardır.

■

Teorem 4.6 (Mikhalev ve Yu, 1998) L , *rankı* iki olan serbest Lie cebiri ve Ψ ,

$$\Psi(Orb(w)) \subseteq Orb(w)$$

olacak şekildeki bir endomorfizm olsun. Bu durumda Ψ, L nin otomorfizmidir.

İspat: İspat $\deg\Psi(x) + \deg\Psi(y)$ üzerinde tümevarımla yapılacaktır. Teorem3.6 dan $\Psi(x)$, $\Psi(y)$ aşikar olamazlar ve $\deg\Psi(x) + \deg\Psi(y) \geq 2$ dir.

$\deg\Psi(x)+\deg\Psi(y)=2$ ise Ψ lineer bir endomorfizm olup Teorem4.3 ten Ψ bir otomorfizmdir.

$\deg\Psi(x)+\deg\Psi(y)>2$ ve

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \alpha x+\gamma y+f\\ \Psi(y) &= \beta x+\delta y+g \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in K ve f,g\in L^{'}=[L,L]\end{aligned}$$

olsun. $f^{^0}\neq 0$ ise $AutL=GL_2(K)$ olduğu için $Orb(w)$ daki bütün elemanların dereceleri aynıdır.

$g\neq 0$ olsun. $\Psi(w)$ nun mümkün olan en yüksek dereceden homojen terimi için $\Psi(x)$ ve $\Psi(y)$ nin homojen terimlerinin etkisini düşünelim. Ayrıca f^0 ve g^0 $\Psi(w)$ nun en yüksek dereceli kısmında yeralır. Eşitlikteki dereceleri karşılaştırırsak

$$\Psi(w)=w(\alpha x+\gamma y+f\ ,\beta x+\delta y+g)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla f^0 ve $g^{^0}$ aşikar olmayan bağıntıları sağlar. Sonuç4.5 ten $\varepsilon\in K$ vardır öyle ki; $f^{^0}=\varepsilon g^{^0}$ dir. $g=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\Psi(y)^{^0}=\Psi(y)$ lineer olur. Benzer şekilde $f^0=\varepsilon\Psi(y)$ olur. Bu ise $0\neq f\in L^{'}$ olması ile çelişir.

Şimdi L nin

$$\begin{aligned}\theta(x) &= x-\varepsilon y\\ \theta(y) &= y\end{aligned}$$

şeklindeki otomorfizmini düşünelim. $\Psi_1=\Psi\circ\theta$ olsun. Not4.1 den Ψ_1 benzer şekilde $Orb(w)$ i korur.

$$\Psi_1(x)=\Psi(x-\varepsilon y)=(a-\varepsilon\beta)x+(\gamma-\varepsilon\delta)y+(\gamma-\varepsilon g)=\alpha_1 x+\gamma_1 y+f_1 \qquad f_1=f-\varepsilon y$$

$$\Psi_1(y)=\Psi(y)$$

$f^{^0}=\varepsilon g^{^0}$ olduğundan eğer $f_1\neq 0$ ise $\deg f_1<\deg f$ olur. $f_1=0$ ise $\deg\Psi_1=1<\deg\Psi(x)$ olur. Buradan

$$\deg\Psi_1(x)+\deg\Psi_1(y)<\deg\Psi(x)+\deg\Psi(y)$$

olur ve Ψ_1 bir otomorfizmdir. $\Psi=\Psi_1\circ\theta^{-1}$ otomorfizmdir.

■

Teorem 4.7 (Mikhalev ve Yu, 1998) K bir cisim, $X = \{x_1,...,x_n\}$, $0 \neq u \in F = F(X)$, Φ, F nin

$$\Phi(Orb(u)) \subseteq Orb(u)$$

şeklindeki endomorfizmi olsun. Bu durumda Φ, F nin bir monomorfizmidir.

İspat: F nin bazı μ otomorfizmleri için $\Phi(u) = \mu(u)$ olduğu açıktır. Bu durumda $\Psi = \mu^{-1}\Phi$ endomorfizmi için $\Psi(u) = u$ elde ederiz. Eğer u elemanı F nin herhangi bir öz alt cebiri ait değilse Teorem3.6 dan Ψ endomorfizmi F nin otomorfizmidir.

H, F nin öz alt cebiri ve $u \in H$ olsun. Teorem3.5 ten $Y = \{y_1,...,y_n\}$ kümesi $F = F(X)$ cebirinin serbest üreteç kümesidir öyle ki ; H alt cebiri aşağıdaki elemanlar tarafından üretilir.

$$v_i = y_i + h_i \quad ,1 \leq i \leq l \ , \ l < n \tag{4.1}$$

Her i için h_i elemanı $y_{l+1},...,y_n$ tarafından üretilen F nin idealine aittir. Y serbest üreteç kümesine bir lineer dönüşüm uygulanırsa h_i elemanlarının lineer toplamlara sahip olmadığı varsayılabilir. $h^{(1)}$ ile h elemanının minimal parçasını göstereceğiz. (Y deki uzunluğu ile) $Orb(u)$ nun h elemanı ve Y kümesinin değişimi ile (4.1) özelliğinin, $h^{(1)}$ elemanlarının mümkün olan en küçük sayıdaki Y nin elemanlarına bağlı olduğu kabul edilebilir. $h^{(1)}$ in y_1e bağlı olduğunu varsayabiliriz. Eğer Φ, F nin otomorfizmi değilse F nin Ψ otomorfizmi vardır öyle ki;

$$\Phi(\Psi(y_1)) = 0$$

ve sıfırdan farklı elemanlardan oluşan

$$\left\{\Phi\left(\Psi\left(y_j\right)\right) \ / \ j > 1\right\}$$

kümesi Y ye bağlı indirgenmiş alt küme formundadır. $v = \Phi(\Psi(u))$ elemanını ve onun minimal elemanı $v^{(1)}$ i düşünelim. $\Phi(\Psi(y_1)) = 0$ olduğu için ya

$$\ell_Y\left(v^{(1)}\right) > \ell_Y\left(u^{(1)}\right)$$

ve

$$v \notin Orb(u)$$

yada $v^{(1)}$ elemanı l den daha az sayıdaki serbest üreteçlere bağlıdır. l nin (4.1) deki en küçük sayı olduğunu göz önüne alırsak $v \notin Orb(u)$ olur. Çünkü ,

$$v = \Phi(\Psi(u(y_1,...,y_n))) = u(\Phi\Psi(y_1),...,\Phi\Psi(y_n)) = u(\Phi\Psi(y_2,...,y_n))$$

olup

$$v = u^{(1)}(y_2, \ldots, y_n) + u^*$$

dır.

$$v^{(1)} + v^* = u^{(1)} + u^*$$

ifadesinde $v_1^{(1)}$ $y_1, \ldots, y_n$ bağlı ancak $u^{(1)}$ $y_2, \ldots, y_n$ bağlıdır. Bu çelişki ispatı tamamlar. ■

5. HEMEN HEMEN PRİMİTİF ELEMANLAR VE TEST ELEMANLARI

$F = F(X)$ bir X kümesi üzerinde serbest cebir olsun.

Bu bölümde Schreier sınıfında belirli tipteki sonlu üreteçli serbest cebirlerin hemen hemen primitif elemanlarını düşüneceğiz.

Tanım 5.1 F bir serbest cebir olsun. F de primitif olmayan fakat F nin bu elemanı içeren herhangi bir alt cebirinde primitif olan bir elemana hemen hemen primitif eleman denir. Böyle bir elemanı APE ile göstereceğiz.

Önerme 5.2 (Mikhalev ve Yu, 2000) Serbest cebirlerin hemen hemen primitif elemanları maksimal ranklı elemanlardır. Aksi durumu doğru değildir.

İspat: α, F de APE ve B, F nin öz serbest çarpanı olmak üzere α, B nin bir primitif elemanı olsun.

Eğer $F = F(x,y)$ rankı iki olan serbest cebir ise $(xy)y$ elemanı maksimal ranklı fakat aynı zamanda xy ve y tarafından gerilen alt cebirde primitif değildir. Dolayısıyla $(xy)y$ elemanı F de APE değildir.

■

Teorem 5.3 K, $karK \neq 2$ olan bir cisim ve u , F de birinci dereceden elemanları sıfıra eşit olan APE olsun. Bu durumda u, F in bir test elemanıdır.

İspat: Teorem3.6 dan F cebirinin test elemanları F nin herhangi bir özalt cebiri tarafından içerilmeyen elemanlardır. H, F nin özalt cebiri ve $u \in H$ olsun. u , F de APE olduğu için u , H nin primitif elemanıdır. H nin otomorfizmleri grubu elemanter otomorfizmler tarafından üretildiği için Teorem3.5 ten u sıfırdan farklı lineer elemanlara sahiptir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

■

Önerme 5.4 (Mikhalev ve Yu, 2000) K, $karK \neq 2$ olan bir cisim olsun.

1) xy , $F(x,y)$ de APE ve $F(x,y)$ nin test elemanıdır.

2) $x+xy$, $F(x,y)$ de APE dir fakat test elemanı değildir. $(xy)z$, $F(x,y,z)$ de APE değildir fakat maksimal ranklı elemandır.

3) $x-[[x,y],y]$ $L(x,y)$ serbest Lie cebirinde APE değildir; ayrıca test elemanı da değildir, fakat maksimal ranklıdır. $[[x,y],y]$ elemanı APE değildir fakat $L(x,y)$ nin test elemanıdır.

4) $[x,y]+[[x,z],z]$ $L(x,y,z)$ serbest Lie cebirinde APE ve test elemanıdır.

İspat: (1) den (4) e kadar olan şıklarda verilen elemanların $F(X)$ in sonlu üreteçli bir H alt cebirine ait olduğunu varsayalım. Bu elemanı u ile göstereceğiz. $x>y>z$ ve $\{h_1,...,h_m\}$ kümesi H nin indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. Ayrıca u nun en yüksek dereceli kısmı u^0, $h_1^0,...,h_m^0$ üzerinde polinomdur.

1) $u=xy=u^0$. Eğer u^0, bazı h_i^0 $(1\leq i\leq m)$ lerin lineer toplamı ise u nun H de primitif olduğu açıktır. Aksi taktirde ,

$$u^0=h_1^0h_2^0\ ,\ h_1^0=x\ ,\ h_2^0=y$$

kabul edebiliriz. Bu durumda, $H=F(x,y)$ olduğundan H, $F(x,y)$ nin özalt cebiri olamaz. Teorem5.3 ten xy, $F(x,y)$ nin test elemanıdır.

2) $u=x+xy$ nin $F(x,y)$ de APE olduğunu göstermek için 1. in ispatındaki benzer argümanlar kullanılabilir. Φ, $F(x,y)$ nin

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=u\\ \Phi(y)&=0\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olan homomorfizmi olsun. Bu durumda Φ otomorfizm değildir ve $\Phi(u)=u$ dur. Dolayısıyla u, $F(x,y)$ nin test elemanı değildir.

$u=(xy)z$ elemanı için

$$\begin{aligned}h_1&=xy\\ h_2&=z\end{aligned}$$

ve H, $F(x,y,z)$ nin h_1 ve h_2 tarafından üretilen alt cebiri olsun. $\{h_1,h_2\}$ nin indirgenmiş küme ve H nin $F(x,y,z)$ nin özalt cebiri olduğu açıktır. Aynı zamanda, $v=h_1h_2$ elemanı H nin primitif elemanı değildir. v nin maksimal ranklı olduğu açıktır.

3) $u=x-[[x,y],y]$ elemanı için,

$$\begin{aligned}h_1&=[x,y]-x\\ h_2&=y\end{aligned}$$

ve H , $L(x,y)$ nin $\{h_1,h_2\}$ tarafından üretilen alt cebiri olsun. Bu durumda

$$u = -(h_1 + [h_1,h_2])$$

olur. $\{h_1,h_2\}$ nin indirgenmiş küme olduğu ve u nun H nin primitif elemanı olmadığı açıktır. Bu nedenle u , $L(x,y)$ de APE değildir.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= u \\ \Phi(y) &= 0 \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Φ retraktı için $\Phi(u) = u$ elde ederiz. Fakat u, $L(x,y)$ nin test elemanı değildir. Aynı zamanda u, $L(x,y)$ de maksimal ranklı bir elemandır.

$v = [[x,y],y]$ elemanı $L(x,y)$ nin $h_1 = [x,y]$, $h_2 = y$ tarafından üretilen özalt cebirine ait olduğundan $L(x,y)$ de APE değildir fakat v, $L(x,y)$ nin test elemanıdır.

4) $u = [x,y] + [[x,z],z]$ için $u^0 = [[x,z],z]$ dir. u^0 , bazı h_i^0 ların lineer toplamı ise u , H nin primitif elemanıdır. Aksi taktirde aşağıdaki durumları düşünmek zorundayız.

Birinci durumda,

$$\begin{aligned} h_1^0 &= [x,z] \\ h_2^0 &= z = h_2 \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda ,

$$h_1 = [x,z] + \alpha x + \beta y + \gamma z \qquad \alpha,\beta,\gamma \in K$$

ve

$$u - [h_1,h_2] = [x,y] - \alpha[x,z] - \beta[y,z]$$

Eğer h_3^0, $[x,y]$ toplamını içerirse u, H nin primitif elemanı olur ve eğer

$$h_3^0 = x,\ h_4^0 = y$$

ise $\{h_1,h_2,h_3,h_4\}$ indirgenmiş bir küme değildir.

İkinci durumda,

$$\begin{aligned} h_1^0 &= x = h_1 \\ h_2^0 &= z = h_2 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda,

$$u - [[h_1,h_2],h_2] = [x,y]$$

olur. Eğer h_3^0, $[x,y]$ toplamını içerirse u, H nin primitif elemanı olur. Eğer $h_4 = y$ ise $H = L(x,y,z)$ olup H özalt cebir olamaz. Teorem5.3 ten u , $L(x,y,z)$ nin test elemanıdır.

■

Teorem 5.5 (Mikhalev ve Yu, 2000) A ve B F nin iki alt cebiri ve $F = A * B$ olsun. a , A da APE ve b, B de APE ise $a+b$, F nin primitif elemanı değildir.

İspat: $Y = \{y_1,...,y_s\}$, $Z = \{z_1,...,z_t\}$, $s+t = n = |X|$, $A = F(Y)$, $B = F(Z)$, $X = Y \cup Z$ olsun. $a+b$ nin primitif olduğunu varsayalım. a ve b sırasıyla A ve B de APE olduğundn $\ell_Y(a) > 1$, $\ell_Z(b) > 1$ dir.

$G = \{g_1,...,g_n\}$, $F(X)$ in serbest üreteç kümesi ve $g_1 = a+b$ olsun. $1 \le i \le n$ için g_i' ile g_i nin Z ye bağlı olmayan parçasını gösterelim. $g_1' = a$ olduğu açık. Elemanter otomorfizmler kullanarak sıfırdan farklı elemanlardan oluşan $\left\{g_2',...,g_n'\right\}$ kümesinin indirgenmiş olduğu kabul edilebilir. $\ell_Y\left(g_i'\right) < \ell_Y(g_1) = \ell_Y(a)$ $(2 \le i \le n)$. G , sonlu sayıdaki elemanter otomorfizmlerle $F(X)$ in serbest üreteç kümesi olduğundan A nın Y serbest üreteç kümesi için $G' = \left\{g_1',...,g_n'\right\}$ (sıfır olan elemanlar dahil) kümesini oluşturabiliriz. Φ , bu elemanter otomorfizmlerin birleşimi olsun. $\Phi\left(g_1'\right) \neq 0$ ise a , A nın primitif elemanıdır. Bu durum a nın A da APE olması ile çelişir. $\Phi\left(g_1'\right) = 0$ ise $\Phi(g_1)$ deki herbir monomial Z nin elemanlarına bağlıdır.

$$\Phi(g_2)' = y_1, ..., \Phi(g_{s+1})' = y_s$$

olduğunu varsayalım. Burada elemanter dönüşümleri tekrar uygulayarak

$$\Phi(g_{s+2})' = \ ... = \Phi(g_n)' = 0$$

olduğunu söyleyebiliriz. $\Phi(g_1)$,$\Phi(g_{s+2}),...,\Phi(g_n)$ elemanlarının modulo F nin Y tarafından üretilen idealine göre B cebirini ürettiği açık. $\Phi(g_i)'$ ile Y ye bağlı olmayan $\Phi(g_i)$ elemanını göstereceğiz. Bu durumda,

$$H = \left\{\Phi(g_1)', \Phi(g_{s+2})', ..., \Phi(g_n)'\right\}$$

B cebirini üretir. Fakat bu küme t tane eleman içerir. B cebirinin rankının t olması ve B cebirinin Hopfian olması nedeniyle H, B nin serbest üreteç kümesidir. O halde $\Phi(g_1)'$ elemanı B nin primitif elemanıdır. Tersinir Φ^{-1} otomorfizmini ekleyerek

$$b = \Phi^{-1}\left(\Phi(g_1)'\right)$$

elde ederiz. Dolayısıyla b , B nin primitif elemanıdır. b nin B de APE olması nedeniyle bu bir çelişkidir. Bu nedenle $a+b$, $F(X)$ in primitif elemanı değildir.

■

Teorem 5.6 (Mikhalev ve Yu, 2000) A ve B F nin iki alt cebiri ve $F = A * B$ olsun. a , A da APE ve b, B de APE olmak üzere H, F nin $a, b \in H$ olacak şekildeki özalt cebiri olsun. Bu durumda $a+b$, H nin primitif elemanıdır.

İspat: $Y = \{y_1, \ldots, y_s\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$, $s+t = n = |X|$, $A = F(Y)$, $B = F(Z)$, $X = Y \cup Z$ olsun. H nin sonlu üretilmiş cebir olduğunu kabul edebiliriz. H nin

$$H = H_1 * H_2 * H_3$$

şeklinde H_1, H_2 ve H_3 alt cebirlerinin serbest çarpımı olduğunu düşünebiliriz. Burada H_1 , H nin Z ye bağlı olmayan elemanlarının oluşturduğu alt cebir, H_2 , H nin Y ye bağlı olmayan elemanlarının oluşturduğu alt cebir, H_3 sonlu üretilmiş alt cebir. ($H = H_1 * H_2$ olması mümkün) Burada $a \in H_1$, $b \in H_2$ ve H_1, H_2 sırasıyla A ve B nin alt cebiridir. H, F nin özalt cebiri olduğu için $H_1 \neq A$, $H_2 \neq B$. Genelliği kaybetmeksizin H_1 in A nın özalt cebiri olduğunu kabul edebiliriz. a, F de APE olduğundan a, H_1 in primitif elemanıdır. Dolayısıyla $a+b$ primitiftir.

■

Önerme 5.7 (Mikhalev ve Yu, 2000) F, A ve B gibi iki özalt cebirinin serbest çarpımı ve a ile b sırasıyla, genelleştirilmiş derece fonksiyonları olan μ_1 ve μ_2 ile bağlantılı olmak üzere A ve B cebirlerinde APE olsun. (μ_1 ve μ_2 farklı olabilir) Bu durumda $a+b$, $F(X)$ de APE dir.

İspat: Teorem5.5 ten $a+b$, F nin primitif elemanı değildir. H, F nin sonlu üretilmiş özalt cebiri ve $a+b \in H$ olsun. Eğer $a \in H$ ise $b \in H$ olup Teorem5.6 dan $a+b$, F de APE dir. $a \notin H$ ise A ve B üzerindeki kısıtlamaları sırasıyla μ_1 ve μ_2 ye eşit olan genelleştirilmiş derece fonksiyonu μ yü düşüneceğiz. G, H nin indirgenmiş serbest üreteçlerinin kümesi olsun. Genelliği kaybetmeksizin $a+b$ nin en yüksek dereceli μ elemanının a ya eşit olduğunu varsayalım. H' ile F nin H ve a tarafından üretilen alt cebirini göstereceğiz. Bu durumda $H' \neq F$ dir. Teorem5.6 dan $a+b$, H' nün primitif elemanıdır. $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ F de primitif bir sistem, N, F nin sonlu üretilmiş alt cebiri öyle ki; $M \subset N$. Bu durumda M, N de primitif bir sistemdir. Buna dayanarak $a+b$, H nin primitif elemanıdır. Dolayısıyla $a+b$, F de APE dir.

■

Yukarıdaki önermenin benzeri olan sonuç serbest gruplar için de geçerlidir. Bu konu ile ilgili daha ayrıntılı bilgi (Brunner ve ark., 1993; Fine ve ark., 1998; Fine ve ark.,1998 ; Rosenberger, 1984) de bulunabilir.

Teorem 5.8 (Mikhalev ve Yu, 2000) $K, karK \neq 2$ olan bir cisim olsun.

1. $n = 2m$ ise

$$x_1x_2 + ... + x_{2m-1}x_{2m}$$

$F(X)$ de APE dir.

2. $n = 2m+1$ ise

$$x_1x_2 + ... + x_{2m-1}x_{2m} + x_{2m+1}x_{2m+1}$$

birleşmeli olmayan serbest $F(X)$ cebirinde APE dir.

3. $n = 2m+1$ ve $X = \{x_1, ..., x_{2m+1}\}$ olmak üzere

$$[[x_2, x_1], x_1] + [x_2, x_3] + ... + [x_{2m}, x_{2m+1}]$$

$L(X)$ de APE dir.

İspat: Teoremin ispatına geçmeden önce Teorem5.5 in ve Teorem5.6 nın genel durumda da sağlandığı gösterilmelidir. $H_1, ..., H_n$ F nin özalt cebirleri olmak üzere

$$F = H_1 * ... * H_n$$

olsun. Öncelikle $1 \leq i \leq n$ için h_i, H_i de APE ise $h_1 + ... + h_n$ nin F de primitif eleman olmadığı gösterilecektir.

İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n = 2$ için Teorem5.5 elde edilir. Bu ifadenin $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $h_1 + ... + h_{n-1}$ elemanı $H_1 * ... * H_{n-1}$ de primitif değildir. Her i için h_i, H_i de APE olduğundan H_i içinde h_i nin primitif olduğu A_i özalt cebiri vardır.

$$A = A_1 * ... * A_n$$

ise $h_1, ..., h_{n-1}$ elemanları A da primitiftir. Dolayısıyla $h_1 + ... + h_{n-1}$ de A da primitiftir. A, $H_1 * ... * H_{n-1}$ in özalt cebiri olduğundan $h_1 + ... + h_{n-1}$, $H_1 * ... * H_{n-1}$ de APE dir. h_n, H_n de APE olup Teorem5.5 ten $h_1 + ... + h_{n-1} + h_n$, F nin primitif elemanı değildir.

$H_1,\ldots,H_n$, F nin özalt cebirleri olmak üzere

$$F = H_1 * \ldots * H_n$$

olsun. İkinci olarak $1 \le i \le n$ için h_i, H_i de APE ve H , F nin $h_1,\ldots,h_n \in H$ olacak şekildeki özalt cebiri olması durumunda $h_1+\ldots+h_n$ nin H de primitif eleman olduğu gösterilecektir.

İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n = 2$ için Teorem5.6 elde edilir. Bu ifadenin $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $h_1+\ldots+h_{n-1}$, H nin primitif elemanıdır. Dolayısıyla $h_1+\ldots+h_{n-1}$, $H_1 * \ldots * H_{n-1}$ de APE dir. h_n , H_n de APE olup H', $h_1+\ldots+h_{n-1}, h_n \in H'$ olacak şekildeki cebir iken $n = 2$ durumu elde edilir. O halde $h_1+\ldots+h_{n-1}+h_n$, H' nin primitif elemanıdır.

1.

$$H_1 = H_1 < x_1, x_2 >, \ldots, H_{2m-1} = H_{2m-1} < x_{2m-1}, x_{2m} >$$

F nin özalt cebirleridir. Önerme5.4 dan x_1x_2 elemanı H_1 de , x_3x_4 elemanı H_3 te ve böyle devam edilirse $x_{2m-1}x_{2m}$ elemanı H_{2m-1} de APE dir. Bu durumda H_1, $H_3,\ldots$, H_{2m-1} de sırasıyla x_1x_2, $x_3x_4,\ldots$, $x_{2m-1}x_{2m}$ i primitif eleman olarak içeren A_1, $A_3,\ldots$, A_{2m-1} özalt cebirleri vardır.

$$H = H_1 * H_3 * \ldots * H_{2m-1} = F$$

dir. Ayrıca

$$A = A_1 * A_3 * \ldots * A_{2m-1}$$

F nin özalt cebiridir ve x_1x_2, $x_3x_4,\ldots$, $x_{2m-1}x_{2m} \in A$ dır. Yukarıdaki ispattan dolayı

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2m-1}x_{2m}$$

A nın primitif elemanıdır. Bu nedenle bu elemen F de APE dir. Teorem5.3 ten dolayı bu eleman test elemanıdır.

2.

$$H_1 = H_1 < x_1, x_2 >, \ldots, H_{2m-1} = H_{2m-1} < x_{2m-1}, x_{2m} >, H_{2m+1} = H_{2m+1} < x_{2m+1} >$$

özalt cebirlerini alıp 1.dekiyle benzer işlemler yapılarak

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2m-1}x_{2m} + x_{2m+1}x_{2m+1}$$

in APE ve test elemanı olduğu gösterilebilir.

3. Önerme5.4 te $[[x_2,x_1],x_1]+[x_2,x_3]$ in serbest Lie cebiri $H_1 = H_1 < x_1,x_2,x_3 >$ te APE olduğu gösterilmişti. $H_4 = H_4 < x_4,x_5 >$ özalt cebirini düşünelim.x_4x_5, H_4 te APE dir. Bu nedenle H_4 ün $H_4^{'}$ özalt cebiri için x_4x_5 primitif elemandır. Kurosh yönteminden $H_4^{'}$ için $x_4x_5 - x_5x_4$ elemanını içeren serbest üreteç kümesi oluşturulabilir. Bu nedenle $[x_4,x_5]$, H_4 de APE dir. Benzer şekilde $[x_6,x_7],...,$ $[x_{2m},x_{2m+1}]$ elemanlarının sırasıyla

$$H_6 = H_6 < x_6,x_7 >,...,H_{2m} = H_{2m} < x_{2m},x_{2m+1} >$$

de APE olduğu gösterilebilir.

$$H = H_1 * H_4 * ... * H_{2m}$$

alınıp ispat 1. deki gibi yapılır.

■

6. SERBEST LIE CEBİRLERİNİN △-PRİMİTİF ELEMANLARI

Bu bölümde serbest Lie cebirlerinin △-primitif elemanlarını karakterize edilerek rankı tek sayı olan serbest Lie cebirlerinde bu tür elemanların olmadığı ve rankı çift sayı olan serbest Lie cebirlerinde bu elemanların özel bir elemanın görüntüsü olduğu ispatlanmıştır. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ olsun. X üzerindeki serbest birleşmeli cebir A olsun. X üzerindeki serbest Lie cebirini $L(X)$ ile gösterelim. △ ile serbet birleşmeli A cebirinin X tarafından üretilen sol idealini göstereceğiz

Tanım 6.1 (Shpilrain, 1998) u, $L(X)$ serbest Lie cebirinin bir elemanı olmak üzere eğer

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

elemanları △ yı $K\langle X\rangle$ in bir sol ideali olarak üretiyorsa u ya △-primitif eleman denir.

Teorem 6.2 (Mikhalev ve Yu, 2000) $K, karK \neq 2$ olan bir cisim, $X = \{x_1, ..., x_n\}$ ve $L(X)$ serbest Lie cebiri olsun.Bu durumda

1. $n = 2m$ ise, her △-primitif eleman

$$[x_1, x_2] + [x_3, x_4] + ... + [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

elemanının otomorfik görüntüsüdür.

2. n tek sayı ise $L(X)$ de △-primitif elemanı yoktur.

3. $L(X)$ cebirinin otomorfizm grubu bütün △-primitif elemanlar üzerine geçişmeli olarak etki yapar.

İspat: $X = \{x_1, ..., x_n\}$, $\mathbb{Z}_+$ pozitif tamsayılar, $\mathbb{Q}_+$ pozitif rasyonel sayılar kümesi olmak üzere her $r \neq 0$ için $\varpi(r) \neq 0$ ise $\varpi : \mathbb{Z}_+^n \to \mathbb{Q}_+$ dönüşümü bir fonksiyoneldir. △-primitif elemanının otomorfik görüntüsünün yine bir △-primitif eleman olduğu açık.

$$\varpi_i = \varpi(x_i) \quad 1 \leq i \leq n, \;\; \Omega = (\varpi_1, ..., \varpi_n)$$

üzerinde kısmi sıralama düşüneceğiz; $\varpi_i' > \varpi_i$,$1 \leq i \leq n$, ve bazı j ler için $\varpi_j' > \varpi_j$ olduğunda $\Omega' > \Omega$ diyeceğiz. ϖ maksimal Ω satırına sahip bir foksiyon olsun öyle ki; u nun bazı otomorfik v görüntülerinin ϖ ya bağlı en yüksek dereceli kısmının derecesi 1 olsun.

x_i serbest üreteçlerinin ϖ_i derecelerini kullanarak derece fonksiyonu oluşturacağız. $u = v$ olduğunu kabul edelim. u nun bir uzunluklu elemanların toplamına sahip olmadığı açık.

u, $\triangle-$primitif olduğundan maksimal ranklı ve $x_1,\ldots,x_n$ e bağlıdır ve $m_{ij}\in K(X)$ vardır öyle ki ;

$$m_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+m_{in}\frac{\partial u}{\partial x_n}=x_i \qquad ,i=1,\ldots,n \tag{6.1}$$

u elemanının uzunluğunun 2 den büyük olduğunu kabul edelim. ϖ derecesi 1 olan u elemanın leading parçası $\widehat{u}$ için (6.1) den şu şekilde bir eşitlik yazılabilir;

$$m_1\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_1}+\ldots+m_n\frac{\partial\widehat{u}}{\partial x_n}=0 \quad ,0\neq m_i\in K\langle X\rangle\,,1\leq i\leq n$$

Bu durumda $L(X)$ in ϖ-homojen Φ otomorfizmi vardır (yani; $\varpi\Phi(x_i)=\varpi(x_i)$ her i için) öyle ki; $v=\Phi(x_i)$ nin en yüksek dereceli parçası v^0, n den daha az sayıdaki x_i üreteçlerine bağlıdır. $\widehat{v}$ nin x_1 e bağlı olmadığını varsayalım. v, x_1 e bağlı olduğundan sıradaki ϖ' fonksiyonelini düşünebiliriz.

$\varpi_1=\varpi(x_1)$ rasyonel sayılarını yeni fonksiyonelle bağlantılı v nin en yüksek dereceli parçası x_1 e bağlı oluncaya kadar uygulayacağız. ϖ_1' için bu değeri sabitleyip

$$\varpi_i'=\varpi_i \quad 1\leq i\leq n$$

diyeceğiz. Bu durumda ϖ' ile bağlantılı v elemanının en yüksek dereceli parçası 1 e eşit olan $\varpi'-weight$ e sahiptir. Aynı zamanda birinci parçadan $\Omega'>\Omega$ dır. Bu durum ϖ fonksiyonelinin maksimal özelliği ile çelişir. Nitekim u nun uzunluğu 2 dir ve

$$u=\sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_{ij}[x_i,x_j],\ \ 0\neq\alpha_{ij}\in K$$

dır. u maksimal ranka sahip olduğundan yeni $Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$ serbest üreteç kümesine lineer otomorfizmler uygulayarak

$$u=[y_1,y_2]+\sum_{3\leq i<j\leq n}\beta_{ij}[y_i,y_j] \qquad \beta_{ij}\in K$$

elde edilir. u nun maksimal ranklı olduğu dikkate alınıp devam edilirse $n=2m$ için ilk kısımdan u nun,

$$[x_1,x_2]+\ldots+[x_{2m-1},x_{2m}]$$

in görüntüsü olduğu görülür. Bu nedenle n tek sayı iken L nin △-primitif elemana sahip olmadığı açıktır. 1. ve 2. den L nin otomorfizmleri grubu △-primitif elemanları kümesine geçiş yapar.

■

Sonuç 6.3 K, $karK \neq 2$ olan bir cisim olsun. $\Phi, L(X)$ in herhangi bir u $\triangle$-primitif elemanı için $\Phi(u)$ da $\triangle$-primitif olacak şekildeki bir endomorfizmi ise Φ, L nin otomorfizmidir.

İspat: $w = [x_1, x_2] + ... + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ ve $v = \Phi(w)$ olsun. w ve v $\triangle$-primitif elemanlardır. Teorem6.2 den $L(X)$ in Ψ otomorfizmi vardır öyle ki; $\Psi(v) = w$. Bu nedenle $\Psi(\Phi(w)) = w$. w, $L(X)$ in test elemanı olduğu için $\Psi\Phi$ otomorfizmdir. Dolayısıyla Φ, $L(X)$ in otomorfizmidir.

■

7. SERBEST LIE CEBİRLERİNİN JENERİK ELEMANLARI

Bu bölümde serbest Lie cebirlerinin jenerik elemanlarının bir serisini sunacağız ve jenerik olmayan fakat hemen hemen primitif olan bir eleman örneği vereceğiz. X boş olmayan sonlu bir küme ve $L = L(X)$, X üzerindeki serbest Lie cebiri olsun.olsun.

Tanım 7.1 L_1 ve L_2 iki serbest Lie cebiri ve $M \subseteq L_1$ olsun. L_1 den L_2 ye olan homomorfizm altında M nin görüntüsü tarafından oluşturulan ideale L_2 nin verbal ideali denir ve $M(L_2)$ ile gösterilir.

Tanım 7.2 D_1, Lie cebirlerinin K cismi üzerinde bir B özdeşlikler kümesi tarafından tanımlanan bir sınıfı ve $B(L)$ de L nin B tarafından tanımlanan verbal ideali olsun. L nin f elemanı için eğer $f \in B(L)$ fakat L nin her H özalt cebiri için $f \notin B(H)$ ise f ye L nin D_1 - jenerik elemanı denir. D_2 ile değişmeli Lie cebir türlerini gösterelim. L serbet Lie cebirinin bir u elemanı için eğer $u \in [L,L]$ ise L, D_2- jeneriktir ve eğer L nin bazı H alt cebirleri için $u \in [H,H]$ iken $H = L$ ise u ya D_2- jenerik denir.

$\mu : X \to \mathbb{N}$ genelleştirilmiş derece fonksiyonunu düşünelim.

Serbest gruplardaki gibi sonlu ranklı serbest Lie cebirleri Hopfian olduğu için jenerik elemanlar test elemanlarıdır. (Comerford, 1995)

$\alpha \in L$ için $ad\alpha$ ve $Ad\alpha$ ile sırasıyla sol ve sağ çarpım operatörlerini göstereceğiz. Yani; $(ad\alpha)(b) = [\alpha, b]$, $(b)(Ad\alpha) = [b, \alpha]$ dır.

Önerme 7.3 (Mikhalev ve ark., 2002) $X = \{x, y, z\}$ olsun. Bu durumda

$$u = [x,y] + (x)(Adz)^k \qquad (k \geq 2)$$

elemanı L de APE ve test elemanıdır.

İspat: u elemanının L nin sonlu üretilmiş H alt cebirine ait olduğunu varsayalım. $x > y > z$ ve $\{h_1, \ldots, h_m\}$ H nin indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. Bu durumda u nun en yüksek dereceli terimi u^0 ın, $h_1^0, \ldots, h_m^0$ üzerinde polinomdur. $u^0 = (x)(Adz)^k$ dır. Eğer u^0 nın yazılışında bazı $0 \neq h_i^0$ ların lineer toplamı var ise;

$$u^0 = \alpha h_i^0 + f\left(\left\{h_j^0 / j \neq i\right\}\right) \qquad 0 \neq \alpha \in K$$

dır. Bu nedenle

$$u = \alpha h_i + f'\left(\left\{h_j \;/\; j \neq i\right\}\right)$$

olur ve u, H nin primitif elemanıdır. Aksi durumda

$$\begin{aligned} h_1^0 &= (x)(Adz)^l \qquad l<k \\ h_2^0 &= z = h_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$h_1 = (x)(Adz)^l + \alpha x + \beta y + \gamma z \qquad \alpha, \beta, \gamma \in K$$

elde edilir.

$$u - (h_1)(Adh_2)^{k-l} = [x,y] - \alpha(x)(Adh_2)^{k-l} - \beta(y)(Adh_2)^{k-l}$$

dir. Eğer h_3^0, $[x,y]$ toplamını içerirse u, H nin primitif elemanıdır. Ancak

$$\begin{aligned} h_3^0 &= x = h_3 \\ h_4^0 &= y = h_4 \end{aligned}$$

olması durumunda $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ indirgenmiş değildir.

$$\begin{aligned} h_1^0 &= x = h_1 \\ h_2^0 &= z = h_2 \end{aligned}$$

olması durumunda $H = L$ çelişkisi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 \\ \mu(y) &= N > k \\ \mu(z) &= 1 \end{aligned}$$

olarak verilen genelleştirilmiş derece fonksiyonunu düşünelim. $\left\{h_1', \ldots, h_m'\right\}$ H alt cebirinin μ ile bağlantılı indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. $\widehat{u} = [x,y]$ ve $\widehat{u}$, $\widehat{h_1'}, \ldots, \widehat{h_m'}$ de bir polinomdur. Eğer $\widehat{u}$, $0 \neq \widehat{h_j'}$ lerin lineer toplamı ise;

$$\widehat{u} = \beta \widehat{h_j} + g\left(\left\{\widehat{h_i}/i \neq j\right\}\right) \qquad 0 \neq \beta \in K$$

Bu nedenle

$$u = \beta h_j' + g'\left(\left\{h_i'/i \neq j\right\}\right)$$

olur ve u, H nin primitif elemanıdır. Aksi durumda $z \in H$ olur.

Eğer $x, z \in H$ ise

$$u^{'} = u - (x)(Adz)^{k} = [x,y] \in H$$

dir. Eğer $\left(u^{'}\right)^{0}$, $h_1^0, \ldots, h_m^0$ ların lineer toplamı ise u primitif elemandır. Aksi taktirde $y \in H$ olur. Dolayısıyla u, $L(X)$ de APE dir. u da birinci dereceden elemanlar olmadığı için test elemanıdır.

■

Önerme 7.4 (Mikhalev ve ark., 2002)

$$u = (x)(Ady)^{k} + (x)(Adz)^{l} \qquad k, l \in \mathbb{Z}^{+}$$

elemanın $L(x,y,z)$ de APE olması için gerek ve yeter koşul $\min\{k,l\} = 1$, $\max\{k,l\} \geq 2$ olmasıdır.

İspat: $k = l = 1$ ise $u = [x, y+z]$ olup u, $L(x,y,z)$ nin x ve $y+z$ tarafından üretilen özalt cebirinin primitif elemanı değildir.

k, $l > 1$ olsun.

$$\begin{aligned} u_1 &= (x)(Ady)^{k-1} \\ u_2 &= y \\ u_3 &= (x)(Adz)^{l-1} \\ u_4 &= z \end{aligned}$$

olsun. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ indirgenmiş küme olup

$$\begin{aligned} u &= [u_1, u_2] + [u_3, u_4] \\ H &= L(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq L(x,y,z) \end{aligned}$$

ve u, H nin primitif elemanı değildir. Bu nedenle u, $L(x,y,z)$ de APE değildir.

$\min\{k,l\} = 1$, $\max\{k,l\} \geq 2$ olsun. Önerme7.3 ten u elemenı $L(x,y,z)$ de APE dir.

■

Şimdi L(x,y) serbest Lie cebirinin

$$u_{k,l}(x,y) = (adx)^{k}(y) + (x)(Ady)^{l}$$

elemanlarını düşüneceğiz. Eğer $k = l = 2$ ise

$$u_{2,2}(x,y) = [[x,y], x - y]$$

olup bu eleman $L(x,y)$ de APE değildir. $karK > 2$ ise

$$u_{p,p}(x,y) = \left[x+y, \left(ad^{p-1}(x+y)\right)(y-x)\right]$$

olup $u_{p,p}(x,y)$, $L(x,y)$ de APE değildir.

Önerme 7.5 (Mikhalev ve ark., 2002) $k,l \geq 2$ ve $k \neq l$ ise

$$u_{k,l}(x,y) = (adx)^k(y) + (x)(Ady)^l$$

$L(x,y)$ de APE dir.

İspat: $k > l$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$u^0_{k,l}(x,y) = (adx)^k(y)$$

dir. $u_{k,l}$ nin $L(x,y)$ nin sonlu üreteçli H alt cebirine ait olduğunu varsayalım. $\{h_1,...,h_m\}$ H nin indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. Bu durumda $u^0_{k,l}$, $h^0_1,...,h^0_m$ üzerinde polinomdur. Önerme7.3 ün ispatındaki gibi eğer $u_{k,l}$ primitif eleman olmasaydı $x \in H$ çelişkisi elde edilirdi.Bu durumda

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 1\\ \mu(y) &= N > k\end{aligned}$$

olarak verilen genelleştirilmiş derece fonksiyonu μ yü düşüneceğiz. $\left\{h'_1,...,h'_m\right\}$, H nin μ ile bağlantılı indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. $\widehat{u}_{k,l} = (x)(Ady)^l$ dır. Bu durumda $u_{k,l}$, H nin primitif elemanıdır. Aksi taktirde $y \in H$ çelişkisi elde edilir.

■

Önerme 7.6 u, L de APE ve $u \in [L,L]$ olsun. Bu durumda u, L nin D_2 jenerik elemanıdır.

İspat: L nin H özalt cebiri için $u \in [H,H]$ olduğunu varsayalım. u, APE olduğundan u, H nin primitif elemanıdır. Fakat H nin herhangi bir serbest üreteç kümesi mod$[H,H]$ ye göre H nin lineer bazı formundadır. Bu çelişki ispatı tamamlar.

■

Teorem 7.7 $X = \{x_1,...,x_n\}$, L sebest Lie cebiri olsun

1) $n = 2m$ ise

$$[x_1,x_2] + ... + [x_{2m-1},x_{2m}]$$

$L(X)$ in D_2 jenerik elemanıdır.

2) $n = 2m$, $1 \le i \le m$, $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \neq l_i$

$$u_{k_1,l_1}(x_1,x_2) + \ldots + u_{k_m,l_m}(x_{2m-1},x_{2m})$$

$L(X)$ in D_2 jenerik elemanıdır.

3) $n = 2m+1$, $l \ge 2$

$$[x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1} + [x_4,x_5] \ldots + [x_{2m},x_{2m+1}]$$

$L(X)$ in D_2 jenerik elemanıdır.

4) $n = 3m$, $l_1, \ldots, l_m \ge 2$

$$[x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1} + \ldots + [x_{3m-2},x_{3m-1}] + (x_{3m-2})(Adx_{3m})^{l_m}$$

$L(X)$ in D_2 jenerik elemanıdır.

İspat: $k_i, l_i \ge 2$ için $u_{k_i,l_i}(x_{2i-1},x_{2i})$ elemanları

$$\begin{aligned} \mu(x_{2i-1}) &= l_i - 1 \\ \mu(x_{2i}) &= k_i - 1 \end{aligned}$$

olarak verilen genelleştirilmiş derece fonksiyonu ile $\mu-$homojendir. Önerme5.7 ,7.3,7.5,7.6 den yararlanarak ispat yapılacaktır.

1) $u = [x_1,x_2] + \ldots + [x_{2m-1},x_{2m}] \in [L,L]$ dir.L nin

$$H_1 = H_1 < x_1,x_2 >, \ldots, H_{2m-1} = H_{2m-1} < x_{2m-1},x_{2m} >$$

şeklindeki özalt cebirlerini düşünelim. $[x_1,x_2], \ldots, [x_{2m-1},x_{2m}]$ sırasıyla $H_1, \ldots, H_{2m-1}$ de APE dir. $L = H_1 * \ldots * H_{2m-1}$ olup Önerme5.7 den u, L de APE dir. Dolayısıyla u , L nin D_2 jenerik elemanıdır.

2)

$$\begin{aligned} u &= u_{k_1,l_1}(x_1,x_2) + \ldots + u_{k_m,l_m}(x_{2m-1},x_{2m}) \\ &= (ad(x_1))^{k_1}(x_2) + (x_1)(Ad(x_2))^{l_1} + \ldots + (ad(x_{2m-1}))^{k_m}(x_{2m}) + (x_{2m-1})(Ad(x_{2m}))^{l_m} \end{aligned}$$

$u \in [L,L]$ olduğu açık.u nun L de APE olduğunu gösterelim.

$$v = (ad(x_1))^{k_1}(x_2) + (x_1)(Ad(x_2))^{l_1}$$

olsun. $k_1 \neq l_1$ olup Önerme7.5 ten v, H_1 de APE dir.

Benzer şekilde $u_{k_2,l_2}(x_3,x_4),\ldots,u_{k_m,l_m}(x_{2m-1},x_{2m})$ sırasıyla $H_3,\ldots,H_{2m-1}$ de APE dir. Dolayısıyla u,

$$H_1 * H_3 * \ldots * H_{2m-1} = L(X)$$

de APE dir. Dolayısıyla u, L nin D_2 jenerik elemanıdır.

3) $n = 2m+1$,

$$u = [x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1} + [x_4,x_5] + \ldots + [x_{2m},x_{2m+1}]$$

ve

$$v = [x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1}$$

olsun. Önerme7.3 ten v, $H_1 = H_1 < x_1,x_2,x_3 >$ özalt cebirinde APE dir.

$$[x_4,x_5],\ldots,[x_{2m},x_{2m+1}]$$

elemanları sırasıyla

$$H_4 = H_4 < x_4,x_5 >,\ldots,\ H_{2m} = H_{2m} < x_{2m},x_{2m+1} >$$

de APE dir. Dolayısıyla u,

$$H_1 * H_4 * \ldots * H_{2m} = L(X)$$

de APE dir. Ayrıca $u \in [L,L]$ olup u, L nin D_2 jenerik elemanıdır.

4). $n = 3m$,

$$u = [x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1} + \ldots + [x_{3m-2},x_{3m-1}] + (x_{3m-2})(Adx_{3m})^{l_m}$$

olsun.

$$v_1 = [x_1,x_2] + (x_1)(Adx_3)^{l_1},\ldots,\ v_{3m-2} = [x_{3m-2},x_{3m-1}] + (x_{3m-2})(Adx_{3m})^{l_m}$$

elemanları sırasıyla

$$H_1 = H_1 < x_1,x_2,x_3 >,\ldots,\ H_{3m-2} = H_{3m-2} < x_{3m-2},x_{3m-1},x_{3m} >$$

de APE dir.

$$H_1 * \ldots * H_{3m-2} = L(X)$$

olup u, L de APE ve $u \in [L,L]$ dir. Önerme7.6 dan u, L nin D_2 jenerik elemanıdır.

$\blacksquare$

$X = \{x_1, ..., x_n\}$ ve n çift sayı ise $[x_1, x_2][x_3, x_4] ... [x_{n-1}, x_n]$, $F(X)$ serbest grubunun D_2 jenerik elemanıdır. Ayrıca

$$\left((x) Ad^i (y)\right) Ad^j (x) \qquad i \geq 1,\ j \geq 0 \tag{7.1}$$

monomiali $L^{(1)}$ serbest Lie cebirinin serbest üreteçlerinin bir kümesidir.

Teorem 7.8 l, x ve y nin sıfırdan farklı bir toplamı ve $L = L(x, y)$ olsun. Bu durumda,

1) g, L nin dördüncü dereceden elemanı olmak üzere $[g, l] \in L^{(2)}$ ise $g = 0$ dır.

2) f, L nin üçüncü dereceden elemanı ve l_1, L nin lineer elemanı olmak üzere

$$[[[x, y], x], l] = [f, l_1]$$

ise ya $[l, l_1] = 0$ yada $[l_1, x] = 0$ dır.

İspat: 1) $l = x$ kabul edelim. g elemanı sol formda şu şekilde yazılır;

$$g = \alpha_1 [x, y, y, y] + \alpha_2 [x, y, y, x] + \alpha_3 [x, y, x, x]$$

Buradan,

$$\begin{aligned} [g, l] &= \alpha_1 [x, y, y, y, x] + \alpha_2 [x, y, y, x, x] + \alpha_3 [x, y, x, x, x] \\ &= \alpha_1 [[[[x, y], y], y], x] + \alpha_2 [[[[x, y], y], x], x] + \alpha_3 [[[[x, y], x], x], x] \end{aligned}$$

elde edilir. (7.1) deki eleman modulo$L^{(2)}$ lineer bağımsız olduğundan α_1, α_2, α_3 sıfır olur ve $g = 0$ dır.

2)

$$\begin{aligned} l &= \alpha_1 x + \alpha_2 y, (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0) \\ l_1 &= \beta_1 x + \beta_2 y, (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0) \\ f &= \gamma_1 [[x, y], x] + \gamma_2 [[x, y], y], (\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

$[x, y, x, l] = [f, l_1]$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 \beta_1 \\ \alpha_2 &= \gamma_2 \beta_1 + \gamma_1 \beta_2 \\ \gamma_2 \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\beta_2 = 0$ ise $l_1 = \beta_1 x$ olup $[l_1, x] = 0$ dır.

$\gamma_2 = 0$ ise $\alpha_1 = \gamma_1\beta_1, \alpha_2 = \gamma_1\beta_2$ olup $l = \gamma_1 l_1$ dir.Buradan $[l, l_1] = 0$ elde edilir.

$\blacksquare$

Teorem 7.9 (Mikhalev ve ark., 2002)

$$u = [x,y] + [[x,y], x] + [[[x,y], x], [x,y]]$$

elemanı $L = L(x,y)$ serbest Lie cebirinin D_2 jenerik elemanıdır fakat APE değildir.

İspat: u elemanı L nin $[x,y]$ ve $[[x,y], x]$ tarafından üretilen özalt cebirine aittir. Fakat u elemanı bu alt cebirin primitif elemanı değildir. Bu nedenle u APE değildir.

u nun D_2 jenerik eleman olmadığını varsayalım. Bu durumda $u \in [H,H]$ olacak şekilde L nin H özalt cebiri vardır. H^0 ile H deki elemanların en yüksek dereceli terimlerinin alt cebirini gösterelim. H indirgenmiş bir küme tarafından üretildiği için eğer $f \in [H,H]$ ise $f^0 \in \left[H^0, H^0\right]$ dır ve

$$u^0 = [[[x,y], x], [x,y]] \in \left[H^0, H^0\right]$$

dır. $f,\ g \in H^0$ olmak üzere u^0, $[f,g]$ formundaki beşinci dereceden homojen elemanların lineer kombinasyonudur. μ normal derece fonksiyonu olmak üzere $\mu(f) > \mu(g)$ kabul edilebilir. $\mu(g) = 1$ ise g, L nin lineer elemanıdır. Eğer H^0 lineer bağımsız iki tane lineer eleman içeriyorsa $H = L$ dir. Bu nedenle l lineer eleman olmak üzere

$$u^0 = [f, [x,y]] + [g, l]$$

dir. Bu durumda $[g,l] \in L^{(2)}$ dir. Teorem7.8 den $[g,l] = 0$ dır. Buradan $f = [[x,y], x]$ ve $[[x,y], x], [x,y] \in H^0$ olur. Dolayısıyla H de şu şekilde elemanlar vardır;

$$\begin{aligned} a &= [[x,y], x] + l_1 \\ b &= [x,y] + l_2 \qquad , l_1,\ l_2 \text{ lineer elemanlar.} \end{aligned}$$

$$w = u - [a,b] = [x,y] + [[x,y], x + l_1] - [x,y,x,l_2]$$

elemanını düşünelim.

$l_2 = 0$ olsun. Eğer $x + l_1 \neq 0$ ise

$$w^0 = [[x,y], x + l_1] \in \left[H^0, H^0\right]$$

dır. Buradan $x+l_1 \in H$ elde edilir. Bu nedenle

$$w-w^0 = [x,y] \in [H,H]$$

dir. Bu durumda $H=L$ çelişkisine ulaşılır. Eğer $x+l_1=0$ ise $[x,y] \in [H,H]$ olur ve buradan $H=L$ sonucuna ulaşılır.

$l_2 \neq 0$ ise

$$w^0 = -[x,y,x,l_2] \in \left[H^0,H^0\right]$$

dır. Bu ancak

$$[x,y,x,l_2] = [g,l]$$

iken mümkündür. (Burada l,H nin sıfırdan farklı lineer elemanı , g, H^0 ın üçüncü dereceden homojen elemanı) Teorem7.8 den ya $l=al_2$ ya da $l=ax$ tir.

$l_2 \in H$ ise

$$[x,y] = b-l_2 \in H$$

dir.$l_2=0$ olması durumunda $H=L$ elde ederiz.

$l=x \in H$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} a &= [[x,y],x]+\beta y \\ b &= [x,y]+\gamma y \qquad 0 \neq \gamma \in K \end{aligned}$$

yazabiliriz. (Yani; $l_1=\beta y$, $l_2=\gamma y$) Buradan tekrar

$$a-[b,x]-\gamma b = \left(\beta-\gamma^2\right) y \in H$$

elde edilir. $H \neq L$ olduğundan $\beta=\gamma^2$ ve

$$w = u-[a,b] = [x,y]+\left[[x,y],x+\gamma^2 y\right]-\gamma[x,y,x,y] \in [H,H]$$

Buradan

$$w^0 = -\gamma[x,y,x,y] \in \left[H^0,H^0\right]$$

dır. $[x,y,x,y]$ elemanı $[x,y,x,y]=[x,y,y,x]$ şeklinde tek yazılışa sahiptir. Dolayısıyla

$$[[x,y],y] \in H^0$$

ve

$$c = [[x,y],y]+\delta y \in H$$

dir.

$$w_1 = w + \gamma[c,x] = (1-\gamma\delta)[x,y] + \left[[x,y], x+\gamma^2 y\right] \in [H,H]$$

elemanını göz önüne alalım.

$$w_1^0 = \left[[x,y], x+\gamma^2 y\right] \in \left[H^0, H^0\right]$$

olduğundan $x+\gamma^2 y \in H$ dir.$\gamma \neq 0$ olduğundan $H = L$ dir. Böylece bütün durumlarda $H = L$ olduğunu gösterdik. Dolayısıyla u, L nin D_2 jenerik elemanıdır.

■

η_m ile derecesi m den küçük olmayan Nilpotent Lie cebir sınıfını gösterelim.

$$[x_1,x_2,x_3] = [[x_1,x_2],x_3], \ldots, [x_1,\ldots,x_m] = [[x_1,\ldots,x_{m-1}],x_m]$$

olmak üzere bu durum $[x_1,x_2,\ldots,x_m] = 0$ tanımıyla verilir.

Teorem 7.10 (Mikhalev ve ark., 2002) $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ olsun. $u = [x_1,\ldots,x_n]$ elemanı $L(X)$ in η_n jenerik elemanıdır.

İspat: H, $L(X)$ in alt cebiri ve $\{h_1,\ldots,h_m\}$ H nin indirgenmiş serbest üreteç kümesi olsun. H nin alt merkezi serisini düşünelim.

$$\gamma_2(H) = [H,H], \ldots, \gamma_{i+1}(H) = [\gamma_i(H), H]$$

$u \in \gamma_n(H)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$u = \sum_{i=1}^{k} \left[g_1^{(i)},\ldots,g_n^{(i)}\right], g_1^{(i)},\ldots,g_n^{(i)} \in H \quad 1 \le i \le k$$

dır. $u^0 = u$ olup u^0, $h_1^0,\ldots,h_m^0$ üzerinde n. dereceden Lie polinomudur. Bu ancak ,

$$\mu(h_{i_1}) = \ldots = \mu(h_{i_n}) = 1$$

olmak üzere $u, h_{i_1},\ldots,h_{i_n}$ e bağlı iken mümkündür. Bu durumda $H = L$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla u, η_n jenerik elemandır.

■

Serbest gruplar için Teorem6.8 V.Shpilrain tarafından (Shpilrain, 1994) de ispat edilmiştir. $[x_1,x_2,x_3]$ elemanı $L(x_1,x_2,x_3)$ in η_3 jenerik elemanıdır ancak APE si değildir.

KAYNAKLAR

BAHTURIN, Y. A., (1987). Identical Relation in Lie Algebras. VNU Science Press, Utrecht.

BAHTURIN Y. A., MIKHALEV A. A., PETROGRADSKY V. M., ZAICEV M. V., (1992). Infinite -Dimensional Lie Superalgebras. Walter De Gruyter, Berlin-New York.

BOKUT L. A. , KUKIN G. P. (1994). Algorithmic and Combinatorial Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BRUNNER A. M., BURNS R.G., OATES-WILLIAMS S. (1993). On Almost Primitive Elements of Free Groups With an Application to Fuchsian Groups. Can. J. Math. 45 , 225-254

COHN P. M. , (1964). Subagebras of Free Associative Algebras. Proc. London, Math. Soc. , 3, 14, 618-632

COMERFORD L. P. (1995). Generic Elements Of Free Groups. Arch. Math. (Basel) 65 , 185-195.

DICS W., (1982). A Comutator Test for Two Elements to Generate the Free Algebra of Rank Two. Bull London Math. Soc. 14, 48-51.

DICS W., (1983). Automorphism of the Polynomial Ring in Two Variables. Publ. Sec. Mat. Univ. Autonoma Barcelona 27, 155-162.

DRENSKY V., YU. J-T (1998a). Orbits in Free Algebras of Rank Two. Commun. Algebra 26 , 1895-1906.

DRENSKY V., YU. J-T (1998b). Test Polinomials for Automorphism of Polynomial and Free Associative Algebras. J. Algebra 207, 491-510.

Essen Van Den A. , Shpilrain V. (1997). Some Combinatorial Questions about Polynomial Mappings. J. Pure Appll. Algebra 119, 47-52.

FENG K. Q. , YU. J-T, (1999). New Classes of Test Polynomials of Polynomial Algebras. Sci. China Ser. A 42, 712-719.

FINE B., ROSENBERGER G., SPELLMAN D., STILLE M. (1998). Test, Generic And Almost Primitive Elements in Free Groups. Contemp.14, 45-59.

FINE B., ROSENBERGER G., SPELLMAN D., STILLE M. (1999). Test Words, Generic Elements and Almost Primitivity. Pasific J.Math.190, 277-297.

FOX R.H., (1953). Free Diferensial Calculus I. Derivations in Free Group Rings. Ann. of Math. 57, No.2, 547-560.

KUKIN G.P. On Subalgebras of Free Lie p-Algebras. Algebra Logika, 11, No 5., 535-550.

MIKHALEV A. A. , UMIRBAEV U. U., YU J-T. (2001). Automorphic Orbits of Elements of Free Non-Associative Algebras. J. Algebra 243 , 198-223.

MIKHALEV A. A. ,UMIRBAEV U. U., YU J-T (2002). Generic, Almost Primitive and Test Elements of Free Lie Algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 130 , 1303-1310

MIKHALEV A. A., YU J-T (1997). Test Elements and Retracts of Free Lie Algebras. Commun. Algebra 25 , 3283-3289

MIKHALEV A. A., YU J-T (1998). Test Elements, Retracts And Automorphic Orbits of Free Algebras. Intern. J. Algebra Comput. 8 , 295-310

MIKHALEV A. A., YU J-T (2000). Primitive, Almost Primitive , Test, $\triangle-$Primitive Elements of Free Algebras With The Nielsen-Schreier Proporty. J. Algebra 228, 603-623.

MIKHALEV A. A., ZOLOTYKH A.A. (1995). Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. CRC Press, Boca Raton , New York.

MIKHALEV A. A., ZOLOTYKH A.A. (1995). Test Elements for Monomorphisms of Free Lie Superalgebras. Algebra 23 , 4995-5001.

Nielsen J. (1918). Die Isomorphismen der Allgemeinen, Unendlichen Gruppe Mit Zwei Erzeugenden. Math. Ann. 78, 385-397.

REUTENAUER C. (1992). Applications of A Noncommutative Jacobian Matrix, J. Pure Appl. Algebra 77 , 169-181

REUTENAUER C. (1993). Free Lie Algebras. Clarendon Press. Oxford.

ROSENBERGER G, Über Darstellungen Von Elementen Und Untergruppen In Freien Produkten. In: A.C. Kim And B.H. Neumann(eds), Groups-Korea 1983 (Kyoungju, 1983), Lecture Notes In Mathematic 1098.Springer, Berlin, 1984, 142-160

SHPILRAIN V. (1994). Recognizing Automorphisms of the Free Groups. Arc. Math. (Basel) 62 , 385-392

SHPILRAIN V. (1995). On The Rank of an Element of A Free Lie Algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 123 , 1303-1307

SHPILRAIN V. (1998). Generalized Primitive Elements of A Free Group. Arch. Math. (Basel) 71 , 270-278.

TURNER E. C. (1996). Test Words for Automorphisms of Free Groups. Bull. London Math. Soc. 28, 255-263.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kahramanmaraş' ın Göksun ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Göksun' da tamamladım. 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm' ne girdim. 1998-1999 yılları arasında İngilizce hazırlık sınıfını bitirdikten sonra bölümde öğrenimime devam ettim. 2003 yılında lisans öğrenimimi tamamlayıp aynı yıl bölümde yüksek lisansa başladım ve halen öğrenimime devam etmekteyim.