



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**F(R, G) KOZMOLOJİLERDE EVRİM VE BAĞ  
DENKLEMLERİ**

**Meral ERMAN**

**Fizik Anabilim Dalı**

**Matematiksel Fizik Programı**

**Danışman**

**Prof.Dr. Haşim MUTUŞ**

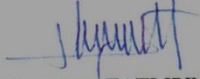
**Mayıs, 2013**

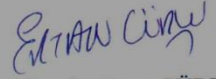
**İSTANBUL**


Bu çalışma 03/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.


Tez Jürisi

  
Prof. Dr. Haşim MUTUŞ  
Danışmanın Adı Soyadı (Danışman)  
İstanbul Üniversitesi  
Fizik Bölümü

  
Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Fizik Bölümü

  
Yard. Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ  
İstanbul Üniversitesi  
Fizik Bölümü

  
Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ  
İstanbul Üniversitesi  
Fizik Bölümü

  
Doç. Dr. Kubilay BALCI  
İstanbul Üniversitesi  
Fizik Bölümü

## **ÖNSÖZ**

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisinden yararlanmama fırsat veren, insani ve ahlaki değerleri ile örnek aldığım, birlikte çalışmaktan onur duyduğum, tez konumun seçiminden, tez teslim aşamasına kadar yardımını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Haşim MUTUŞ'a, tezin hazırlaması aşamasında göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırla yapmış olduğu yardımlar sonucu yolumu aydınlatarak daha kolay ilerlememi sağlayan Matematiksel Fizik Anabilim Dalı Öğretim Görevlisi Değer SOFUOĞLU'na, bütün bu süreç boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyerek bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

**Mayıs, 2013**

**Meral ERMAN**

# İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	i
İÇİNDEKİLER .....	ii
ŞEKİL LİSTESİ .....	iv
SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ .....	v
ÖZET .....	vii
SUMMARY.....	viii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. GENEL KISIMLAR.....</b>	<b>5</b>
2.1. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ.....	5
2.1.1. FRLW Modelleri.....	6
2.2. F(R,G)-GRAVİTE.....	11
<b>3. MALZEME VE YÖNTEM .....</b>	<b>14</b>
3.1. KOVARYANT 1+3 AYRIŞIM.....	14
3.1.1 İzdüşüm Tansörleri.....	14
3.1.1.a. Birinci ve İkinci Mertebeden Tansörlerin 1+3 Kovaryant Ayrışımı.....	17
3.1.1.b. 1+3 Kovaryant Ayrışım Formalizminde Uzay ve Zaman Türevleri.....	19
3.1.1.c. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri.....	21
<b>3.2. RIEMANN GEOMETRİSİNİN TEMEL BAĞINTILARI.....</b>	<b>24</b>
3.2.1. Ricci ve Bianchi Özdeşlikleri.....	24

3.2.2. Weyl Tansörü.....	26
<b>3.3. ENERJİ – MOMENTUM TANSÖRÜ.....</b>	<b>28</b>
<b>3.4. EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ.....</b>	<b>29</b>
<b>4. BULGULAR .....</b>	<b>34</b>
4.1. $F(R,G)$ -GRAVİTE TEORİSİNİN ALAN DENKLEMLERİNİN EFEKTİF ENERJİ-MOMENTUM YORUMU.....	34
4.2. EFEKTİF EĞRİLİK AKIŞKANININ DİNAMİK DEĞİŞKENLERİNİN HESABI.....	40
4.3. EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİNİN $F(R,G)$ -GRAVİTE TEORİSİNE GENELLEŞTİRİLMESİ.....	46
4.4. $F(R, G)$ -GRAVİTE'DE STATİK EINSTEIN EVRENİ'NİN VARLIĞI.....	52
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>60</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>62</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ ..</b>	<b>66</b>

## ŞEKİL LİSTESİ

**Şekil 3.1** : Keyfi bir  $V$  vektörünün paralel ve dik bileşenlerine ayrıştırılması ..... **15**

## SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ

$g_{ab}$	: Uzay-Zamanın Metriği
$R_{abcd}$	: Riemann Eğrilik Tansörü
$R_{ab}$	: Ricci Tansörü
$R$	: Ricci Skaler Eğriliği
$C_{abcd}$	: Weyl Tansörü
$E_{ab}$	: Weyl Tansörünün Elektriksel Kısmı
$H_{ab}$	: Weyl Tansörünün Magnetik Kısmı
$G_{ab}$	: Einstein Tansörü
$\Lambda$	: Kozmolojik Sabit
$T_{ab}$	: Enerji-Momentum Tansörü
$\kappa^2$	: Kuplaj Sabiti
$G$	: Newton Gravitasyon Sabiti
$c$	: Işık Hızı
$\mathbf{u}$	: 4-lü Hız Vektörü
$\mathbf{n}$	: Uzaysal Hiperyüzeylerin Normali
$\Sigma$	: Hiperyüzey
$U_{ab}$	: Paralel İzdüşürme Tansörü
$h_{ab}$	: Dik İzdüşürme Tansörü

$\dot{u}_a$	: İvme
$\mu$	: Madde-Enerji Yoğunluğu
$p$	: Eşyönlü Basınç
$q_a$	: Momentum Yoğunluğu veya Enerji Akısı
$\pi_{ab}$	: Eşyönsüz Basınç Tansörü
$\theta_{ab}$	: Genişleme Tansörü
$\theta$	: Genişleme Skalari
$\sigma_{ab}$	: Makaslama Tansörü
$\sigma$	: Makaslama Skalari
$\omega_{ab}$	: Girdap Tansörü
$\omega_a$	: Girdap (Dönme) Vektörü
$\omega$	: Dönme Skalari
G	: Gauss-Bonnet Terimi
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
KMAI	: Kozmik Mikrodalga Arkafon Işınımı
$\Lambda$ CDM	: Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ Soğuk Karanlık Madde)
EH	: Einstein-Hilbert
EAD	: Einstein Alan Denklemleri
FLRW	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
RW	: Robertson-Walker



## ÖZET

### F(R, G) KOZMOLOJİLERDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

$R_{ab}$  ve  $R_{abcd}$  sırasıyla Ricci ve Riemann eğrilik tansörleri ve  $R$  de Ricci eğrilik skaleri cinsinden  $G$ ,  $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$  biçiminde tanımlı Gauss-Bonnet terimi olmak üzere yüksek mertebeden gravitasyon teorileri sınıfına ait  $F(R, G)$ -gravite teorisini göz önüne alıyoruz. Efektif akışkan tasvirini kullanarak bu  $F(R, G)$ -kozmojisine konvansiyonel Rölativist Kozmolojinin (1+3)-kovaryant kozmolojik evrim ve bağ denklemlerini genelleştiriyoruz. Kullanımlarına bir örnek olmak üzere statik Einstein Evreninin varlığını tartışıyoruz ve böyle bir çözümün  $F(R)$ -gravitede var olmasına karşın,  $F(R, G)$ -gravitede olmadığını buluyoruz.

## SUMMARY

### EVOLUTION AND CONSTRAINT EQUATIONS $F(R,G)$ COSMOLOGIES

We consider within the class of higher-order gravity theories the so called  $F(R,G)$ -gravity where  $R$  is the Ricci curvature scalar, and  $G$  is the Gauss-Bonnet term defined as  $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$ ,  $R_{ab}$  and  $R_{abcd}$  being the Ricci and Riemann curvature tensors, respectively. Making use of the effective fluid description, we extend to the  $F(R,G)$ -cosmology the (1+3)-covariant cosmological evolution and constraint equations of the conventional Relativistic Cosmology. As an illustration of their use, we discuss the existence of the static Einstein Universe and we find that  $F(R,G)$ -gravity does not admit such a solution, although  $F(R)$ -gravity does.

## 1. GİRİŞ

Kozmoloji, Evrenin bir bütün olarak ele alınıp incelenmesini konu alır. Newton ve O'nu izleyenlerin geliştirdiği Gök Mekaniğinin ilgi alanı ise: Güneş, gezegenler ile uyduları, Galaksimiz (Samanyolu) ile yıldızları gibi “yakın” ölçekteki gök cisimlerinin incelenmesiyle sınırlı kalmıştır. Evrenin bütününe ilgilendiren ilk çalışmanın ise Einstein ile başlatılmış olduğunu söylemek pek yanlış olmaz. Einstein, 1916'da ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi (GRT) ile, Newton Gök Mekaniğinin dayandığı çekim kuvveti kavramını terk ederek, gravitasyonu 4-boyutlu bir uzay-zaman geometrisinin eğriliği diliyle tavsir etmiş ve teorisinin alan denklemlerinden hareketle evreni modelleyen bir çözüm oluşturmuştur. “Statik Einstein Evreni” denilen bu modelde, evren; etkileşimsiz madde (basınçsız madde ya da toz) ile dolu ve sabit yarıçaplı kapalı 3-boyutlu uzay geometrisine sahip, yani, statik bir yapı olarak tasarlanmaktadır. Einstein'ı böyle aşırı basitleştirilmiş varsayımlar kullandırmaya yönelten gerekçeler arasında: a) Alan denklemlerinin çözülmesindeki matematiksel güçlükleri bertaraf etmek, b) Eylemsizlik konusundaki Mach'ın düşünceleriyle uygunluk sağlamak, c) Evrenin statik ve sonlu olduğuna ilişkin o zamanlardaki genel inanış gibi etkenler sayılabilir. Ancak, Einstein'ın böyle bir model elde edebilmek için bir “bedel” ödediği de bilinmektedir; o da, orijinal alan denklemlerine, kozmolojik sabit adını verdiği bir  $\Lambda$  parametresi ithal etmiş olmasıdır. Kozmoloji alanındaki daha sonraki teorik ve gözlemsel gelişmeler karşısında, bu  $\Lambda$  terimine dayandırdığı gerekçeler ortadan kalktığından, Einstein  $\Lambda$  için: “hayatımın en büyük hatası” diyecektir. Ancak, günümüzde bir  $\Lambda$  sabitiyle ya da dahası pekçok mekanizma ile orijinal alan denklemlerini değişikliğe uğratmanın gerekliliği fikri gittikçe artan sayıda taraftar toplamışa benzemektedir. Her ne kadar statik Einstein modeli, evreni gerçekçi bir biçimde tasvir etmiyorsa da , ilk evren modeli olması bakımından sonraki kozmoloji çalışmalarına ilham kaynağı olmak gibi öncü bir rol oynamıştır.

GRT, neredeyse bir yüzyıla yakın süredir gravitasyonu en iyi tasvir eden bir teori olma özelliğini taşıyadurmaktadır. Bunda, teorinin özellikle Güneş sistemimiz ölçeğinde pekçok testi başarıyla geçmiş olmasının yanısıra, kozmolojik ölçekte de: evrenin genişlemesi, Kozmik Mikrodalga Arkafon Işınımı (KMAI), gravitasyonel mercekleme, karadeliklerin varlığı gibi olayları daha gözlemleri gerçekleştirilmeden öngörmek gibi bir başarı sergilemiş olmasının da payı vardır. Ancak, tüm bunlar, Rölativist Kozmolojinin herşeyi açıklamış ve sorunsuz olduğu anlamına gelmemektedir. Bu sorunlar arasında “Karanlık Enerji” denilen konu son 15 yıldan bu yana en ilgi çekici ve muammasını koruyan bir sorun olarak kozmolojistleri meşgul etmektedir. 1998’de tip Ia Süpernova gözlem sonuçları, evrenin günümüzde gittikçe hızlanan (ivmeli) bir genişleme sürecinde bulunduğunu ortaya çıkartmıştır [1,2,3]. Bu sonucu, günümüze kadar gerçekleştirilen: farklı grupların tip-Ia süpernova gözlemleri, zayıf mercekleme, geniş ölçek yapısı, Kozmik Mikrodalga Arkafon Eşyönsüzlüğü, baryon osilasyonu gibi bir dizi bağımsız gözlemler de desteklemektedir [4]. Gözlemler, Evrenin madde-enerji içeriğinin yaklaşık %4,4 ünün “normal (baryonik)” maddeden oluştuğunu söylemektedir (ki yıldızların içinde %0,6 ve yıldızların dışında da %3,8 dir). Geri kalan ise Karanlık Madde olarak adlandırılan %25 ve Karanlık enerji olarak nitelendirilen %71 içerikdir [4,5]. Burada, Karanlık Madde teriminden, ışık yayınlamayan ya da çok az yayınlayan, fakat varlığını gravitasyonel etkiyle (gravitasyonel mercekleme) gösteren gözlenmiş bir madde türü kastedilmektedir. Karanlık Enerji ise evrenin genişlemesini ivmeli kılan bir itici kuvvetin kaynağı olduğu sanılan bilinmeyen bir enerji şekli anlamına gelmektedir. Einstein alan denklemlerinin sağ yanındaki enerji-momentum tansörünü pek değişik şekillerde (skaler alan, egzotik madde vb...) olarak, söz konusu ivmeli genişlemeyi açıklamak mümkün görünse de, gözlemler böyle bir maddenin varlığını henüz ortaya koyamamıştır [4,6]. Öte yandan,  $\Lambda$ -lı alan denklemleri, evrenin ivmeli genişlemesini açıklayabilecek adaylar arasındadır. Standart baryonik madde ile “vakumun enerjisi” olarak yorumlanan  $\Lambda$ -lı modellere  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter =  $\Lambda$  Soğuk Karanlık Madde) denilmektedir. Ancak, bu tür modellerde, gözlenen ivmeli genişlemeyi elde edebilmek için,  $\Lambda$  nın alması gereken değer, Güneş Sistemimiz için olması gerekenle hiç uyuşmamaktadır. “ $\Lambda$  için ince ayar” sorunu denilen bu kusurun yanında, evrenin evrim sürecine ilişkin birtakım uyuşmazlıklar da ortaya çıkmıştır [5,6].

Öte yandan, söz konusu problemin çözümü için teklif edilen diğer bir alternatifi ise; Einstein alan denklemlerinin sağ yanındaki enerji-momentum tansörü hakkında bir takım varsayımlarda bulunmak yerine, denklemlerin sol yanındaki geometrik kısmı değişikliğe uğratmak oluşturmaktadır. 4-boyutlu uzay-zaman geometrisi çerçevesinde kalmak kaydıyla GRT'nin alan denklemlerine getirilebilecek değişiklik ya da düzeltmeler, Einstein-Hilbert (EH) aksiyonunda yapılacak çeşitli seçimlerle pek çok türlü yapılabilmektedir. Bilindiği üzere standart Einstein alan denklemlerini, yalnızca Ricci Skaler Eğriliği  $R$ 'yi barındıran EH aksiyonundan bir varyasyonla elde etmek mümkündür [7]. Aksiyomda,  $R$  yerine,  $R$ 'nin  $f(R)$  gibi bir skaler fonksiyonunu almak, Einstein'ın alan denklemlerinin geometrik kısmına ek olarak birtakım geometrik terimler getirmektedir. Böyle değişikliğe uğratılmış GRT'ye " $f(R)$ -gravite" adı verilmektedir [5,8,9,10,11]. Bir başka seçim ise  $R$  yerine;  $R_{abcd}$  Riemann Eğrilik Tansörü,  $R_{ab}$  Ricci Eğrilik Tansörü ve  $R$  den hareketle oluşturulan ve Gauss-Bonnet terimi denilen  $G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}$  gibi bir özel kombinezonunun  $f(G)$  biçiminde bir skaler fonksiyonunu almak oluşturmaktadır. Böyle değiştirilmiş teoriye ise " $f(G)$ -Gravite" denilmektedir [12-21]. Bu iki yaklaşımın bir adım ötesini ise  $R$  yerine,  $f(R,G)$  alınmasıyla  $F(R,G)$ -Gravite denilen genelleme oluşturmaktadır [22,23]. Her üç halde de, değiştirilmiş Einstein denklemleri, metrik tansöre göre artık ikinci mertebeden türevli denklemler olmak yerine, dördüncü mertebeden türevli denklemlere dönüşmüş olmaktadır. Böyle teorilere Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravite (ya da Gravitasyon) Teorileri denilmektedir; ve son 15 yıldan bu yana da yoğun bir ilgi alanı oluşturmaktadırlar.

Biz bu tezimizle  $f(R)$ -Gravite ile  $f(G)$ -Gravite'yi özel durumlar olarak kabul eden  $F(R,G)$ -Gravite ile ilgileneceğiz ve Standart Kozmolojinin 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemini bu Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyon Teorisi çerçevesinde ele alacağız. Başka bir deyişle, Standart Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerini  $F(R,G)$ -kozmozolojisine genelleştireceğiz. Literatürde, alan denklemlerini çözmek için genellikle metrik yaklaşım kullanılmaktadır. 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi ise, hem koordinat sisteminden (yani gözlemciden) bağımsız, hem de evrenin madde-enerji içeriğinin bir akışkan gibi tasvir edilmesi durumunda buna bağlanan kinematik ve dinamik büyüklükler arasındaki ilişkiyi daha berrak yansıması bakımından metrik yaklaşıma

göre üstünlükler göstermektedir. Biz de bu yöntemi kullanacağız. Yöntem, Standart Einstein denklemlerine, aksiyondaki  $F(R,G)$  fonksiyonundan gelen ekstra geometrik kökenli terimleri “eğrilik akışkanı” gözüyle bakabilecek bir efektif akışkanın enerji-momentum tansörü olarak yorumlanmasına dayanmaktadır. Böyle bir yaklaşım  $f(R)$  ve  $f(G)$ -Gravite teorileri için yapılmış olmakla birlikte, literatürde bilebildiğimiz kadarıyla  $F(R,G)$ -Gravite için yapılmamıştır [9,10,12,13,14,18,21-32]. Tezimizde, bu “eğrilik akışkanına” bağlanan efektif: madde-enerji, basınç, ısı akısı ve eşyönsüz basınç tansörünün ifadelerinin çıkarımlarını ayrıntılı olarak sunacağız. Bir diğer amacımız da, elde edilen bu kovaryant evrim ve bağ denklemlerinin kullanımına bir uygulama olmak üzere,  $F(R,G)$ -Gravitede statik Einstein evreninin var olması için  $F(R,G)$  nin fonksiyonel formunun ne olması gerektiğini araştıracağız. Bunun da literatürde ele alınmamış olduğunu kaydedelim.

Çalışma planımız şöyle olacaktır: Genel Kısımlar Bölümünde Standart Rölativist Kozmolojinin temellerine ve özellikle statik Einstein modeline kısaca değindikten sonra, yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyon teorilerini tanıtıyoruz. Malzeme ve Yöntem Bölümünde ise 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi hakkında bilgi verdikten sonra Standart Rölativist Kozmolojideki evrim ve bağ denklemlerinin nasıl elde edildiklerini açıklıyoruz. Bu kısımda, hem notasyon hem de kinematik ve dinamik büyüklüklerin tanıtımı amaçlanmaktadır. Çalışmamızın özgün kısmını oluşturan Bulgular Bölümü’nde ise Kovaryant evrim ve bağ denklemlerinin  $F(R,G)$ -Kozmolojisine genelleştirilmesi gerçekleştirilecek ve bu denklemlerin statik Einstein evrenini çözüm olarak kabul edip etmediği araştırılacaktır. Tartışma ve Sonuç Bölümü ise yapılanların kısa bir özetini konu alacaktır.

## 2. GENEL KISIMLAR

### 2.1. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ

Kozmoloji, evrenin bir bütün olarak geniş ölçekteki yapısını, başlangıç evrelerini ve de evrimini tasvir etmeyi amaçlamaktadır. 1916'dan günümüze kadar en çok rağbet gören evren tasvirleri, 1916'da Einstein'ın ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi'nin (GRT)

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (2.1)$$

ile verilen Einstein Alan Denklemlerine (EAD) dayanan Rölativist Kozmoloji çerçevesinde yer almaktadır. Burada:

$g_{ab}$  : 4-boyutlu uzay-zaman geometrisinin metrik bileşenleri ya da kısaca metriği;

$R_{ab}$  : 4-boyutlu uzay-zamanın Ricci Eğrilik tansörü;

$R$  : Ricci Eğrilik Skaleri;

$G_{ab}$  : Einstein Tansörü;

$\Lambda$  : Kozmolojik Sabit;

$T_{ab}$  : Madde-enerji içeriğini tasvir eden enerji-momentum tansörü;

$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$  :  $G$ , Newton Gravitasyon Sabiti ve de  $c$  ışık hızı olmak üzere Einstein Kuplaj

Sabiti

dir.

(2.1) denklemleri, genel olarak  $g_{ab}$  ile bunların  $x^a$  koordinatlarına göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerini yerel olarak madde-enerji dağılımına bağlayan ikinci mertebeden, kısmi türevli, birbirlerine kuple (bağlantılı) 10 adet diferansiyel denklemden oluşmuş nonlinear (linear olmayan) bir diferansiyel denklem sistemidir. Hem bu matematiksel yapının giriftliği, hem de madde-enerji içeriğini temsil eden  $T_{ab}$  tansöründeki belirsizlik, Einstein Alan Denklemleri'nin (EAD) çözümlerini bulmayı son derece güçleştirmektedir. Bununla beraber, eğer, bir yandan uzay-geometrisi için peşinen birtakım simetri özellikleri (küresellik, silindirsellik, eşyönlülük, homojenlik, izometri, vb...) varsayılır ve diğer yandan da  $T_{ab}$  hakkında nispeten basitleştirici varsayımlarda (boş uzay-zaman, mükemmel akışkan, vb...) bulunulursa, çözümler bulmak mümkün olabilmektedir. Küresel simetriye dayalı Schwarzschild çözümü ile homojen ve eşyönlü evren varsayımına dayalı Robertson-Walker çözümü, böyle elde edilmiş onlarca çözüm arasından en iyi bilinen ve en çok tanınanlardandır. Bilinmeyen 10 adet  $g_{ab}$  için koordinat seçimi, simetri kısıtlaması gibi birtakım basitleştirici varsayımlarda bulunup da hem bilinmeyen sayısını, hem denklem sayısını azaltmak suretiyle çözüm araştırmaya “metrik yaklaşım” adı verilmektedir. Her ne kadar, metrik için tasarlanan bir “önçözüm” den (ansatz) hareketle EAD'nin çözümlerini bulma yönteminin bazı olumsuzlukları ve yetersizlikleri yok değilse de literatürde en yaygın olarak kullanılan çözüm tekniği bu olmuştur. Diğer bir teknik de 3.Bölüm'de ayrıntılarıyla ele alacağımız “uzay-zamanın 1+3 ipliklenmesi” olarak anılan tekniktir. Bunlardan başka, uzay-zamanın 3+1 dilimlenmesi, ortonormal tetrad formalizmi vb... pekçok yöntem de bulunmaktadır. Şimdi, aşağıda, Evrenin şu anki durumunu tasvir için en çok rağbet edilen Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) Kozmolojisine kısaca değinelim.

### 2.1.1. FRLW Modelleri

Bilinen etkileşmeler arasında, evrenin evrimini yönlendiren yegane etki etkileşmenin gravitasyon olduğuna inanılmaktadır. Diğerlerinin ise bir ortalama sonucu birbirlerini dengeledikleri düşünülmektedir. Bu bağlamda mesela, evrenin bir yük fazlalığı barındırdığı sanılmamaktadır. Yukarıdaki testler, yerel gravitasyon olaylarını başarıyla açıklayan GRT'nin kozmolojik ölçeğe de uygulanabilmesine destek oluşturmaktadır.



Gökküreye ilk bakışta, güneş, yıldız, gezegen gibi farklı yapıların eşit bir şekilde dağılmadıkları göze çarpmaktadır. Ama, çok daha büyük ölçeklerdeki bölgeler incelendiğinde, bunların hemen hemen birbirlerinin kopyası gibi aynı oldukları görülmektedir. Başka bir deyişle, yerküre merkez olmak üzere yeteri kadar büyük bir hacim göz önüne alındığında, içerik bakımından kayda değer bir farklılığa rastlanmamaktadır. Burada kastedilen ölçek yaklaşık  $10^8$  ışık yılı mertebesinde bir ölçektir ve bu da hemen hemen tipik bir galaksi kümesinin boyutlarından biraz büyüktür. Evrenin büyük ölçeklerdeki bu görünümü, homojenlik ve eşyönsellik varsayımı olarak Kozmoloji alanındaki ilk çalışmalara uygun bir hareket noktası oluşturmuştur. Geometri bakımından homojenlik, herhangi bir  $t$  kozmik zamanında 3-boyutlu uzaysal hiperyüzeylerin Riemannsal eğriliğinin de her yerde sabit (aynı) olduğu gözönünde bulundurulursa homojenlik ve eşyönlülük varsayımı altında  $g_{ab}$  metrik katsayıları

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \phi^2) \right] \quad (2.2)$$

metrik ifadesiyle kısıtlandırılmış olmaktadır. Herhangi bir alan teorisine bağlı olmadan tamamen geometrik olarak elde edilmiş (2.2) ifadesine Robertson-Walker (RW) metriği denir. Burada  $a(t)$  ye ölçek çarpanı ve  $k$  ya da 3-boyutlu hiperyüzeylerin eğrilik parametresi denir.  $k$  nın  $k = -1, 0, +1$  olmasına göre evrenin sırasıyla: açık (hiperbolik), uzayca düz ve kapalı (hiperküresel) olduğu söylenir. Öte yandan, evrenin madde-enerji içeriğini tasvir için,  $\mu(t)$ : uniform madde-enerji yoğunluğu;  $p(t)$ : eşyönlü basınç ve  $u_a$  da maddeyle birlikte hareket eden gözlemcinin 4-lü hız vektörü olmak üzere, ifadesi

$$T_{ab} = \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) u_a u_b + p g_{ab} \quad (2.3)$$

ile verilen mükemmel akışkan varsayımı kullanılırsa (2.1) deki EAD'den bilinmeyen  $a(t)$  ölçek çarpanının nokta ile gösterilen zamana göre türevleri için

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \mu - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \mu + 3 \frac{p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.5)$$

denklemleri elde edilir. Bunlar ilk defa,  $\Lambda = 0$  hali için 1922'de Friedmann tarafından yazılmıştır. 20'li yılların sonlarına doğru yapmış olduğu çalışmalarla  $\Lambda$  parametresinin önemine dikkati çeken ve Büyük Patlama fikrinin de öncülerinden olan Lemaitre'in de katkılarını vurgulamak üzere (2.4) ve (2.5) denklemlerine dayanan evren tasvirlerine Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) modelleri denir. Bu denklemlerin evrenin evrimine nasıl bir tasvir getirdiğine değinmeden önce Bulgular Bölümünde  $f(R)$ -Gravite çerçevesinde ele alacağımız Einstein Evreni'ni kısaca tanıtalım.

1916'da Einstein,  $\Lambda$ -sız orjinal alan denklemlerinin statik bir evren için çözümünü aramıştır. (2.4) ve (2.5) denklemlerinde  $a(t) = \text{sabit} \equiv a_0$  alındığında  $\dot{a} = \ddot{a} = 0$  olacağından ( $\Lambda = 0$  için)

$$\mu = -3 \frac{p}{c^2} = \frac{3k}{8\pi G a_0^2} \quad (2.6)$$

bağıntısı elde edilmektedir. (2.5) in sağlanması için ya  $\mu = 0$ ,  $p = 0$ ,  $k = 0$  olmalıdır, ya da  $\mu$  veya  $p$  nin negatif olması gerekmektedir. Einstein, birinci alternatifi, maddeden yoksun bir evrenin gerçekçi olmadığını düşünerek elemiştir. İkincisini ise fiziksel bulmamıştır. (Bununla beraber, negatif basınç kavramı günümüzde fizikçilerce artık yadırganmamaktadır.)

Einstein, bu istenmeyen durumları bertaraf etmek için, orjinal alan denklemlerine  $\Lambda$  kozmolojik sabitini ithal etmek gereksinimini duymuştur. Bu taktirde (2.4) ve (2.5) denklemleri

$$0 = \frac{4\pi G}{3} \mu - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.7)$$

$$\mu + 3 \frac{p}{c^2} = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \quad (2.8)$$

biçiminde ifade edilir. Eğer, Einstein'ın yaptığı gibi basınç ihmal edilirse ('toz'un egemen olduğu bir evren) bu taktirde Statik Einstein Evreni

$$\mu = \mu_0 = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \quad , \quad \frac{k}{a_0^2} = \Lambda \quad (2.9)$$

bağıntılarına karşılık düşer.  $\mu_0 > 0$  varsayıldığından buradan  $\Lambda > 0$  ve  $k = +1$  olması gerektiği görülür. Dolayısıyla statik Einstein Evreni  $a_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$  yarıçaplı kapalı bir evren olmalıdır. Dikkat edileceği üzere, (2.9) bağıntısı evrenin madde-enerji yoğunluğunun  $\Lambda$  kozmolojik sabiti tarafından belirlendiğini söylemektedir. Giriş'te değinildiği gibi, 1929'da galaksilerin kızıla kayma ölçümlerinden evrenin genişlediği ortaya çıkınca, Einstein Komolojik Sabit konusundaki ısrarını sürdürmekten vazgeçmiştir. Ancak, 1990 sonlarında keşfedilen evrenin ivmeli genişlemesinin açıklanması için böyle bir terimin varlığına şiddetle gereksinim duyulduğunu şimdiden kaydedelim.

Alan denklemlerinin ikinci bir evren modeli çözümü ise 1917'de de Sitter tarafından teklif edilmiştir. Bu modelde evren madde-enerjiden yoksun ( $\mu = p = 0$ ) varsayılmakta, ama bu sefer  $\Lambda \neq 0$  alınmaktadır. Bu taktirde (2.4) ve (2.5) denklemleri

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.10)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.11)$$

denklemlerine indirgenmektedir ki bunlar da çözüm olarak  $k=0$ ,  $\Lambda > 0$  ve  $a(t) \approx e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}$  vermektedir. Einstein Evren’inde madde bulunmasına rağmen hareket olmamasına karşılık, de Sitter Evren’inde madde olmamasına rağmen hareket (genişleme) bulunmaktadır. Bu “garip” durum, bazen “hareketsiz madde, maddesiz hareket” biçiminde ifade edilmektedir.

Şimdi, (2.4) ve (2.5) denklemlerine geri dönelim ve Standart Rölativist Kozmoloji çerçevesinde evrenin evriminin nasıl tasvir edildiğini kısaca özetleyelim.

Büyük Patlama senaryosu uyarınca evren bir başlangıç hızıyla genişlemeye başlamıştır. (2.4) denklemi genişleme (ya da büzülme) hızını; (2.5) denklemi ise ivmesini vermektedir.  $\Lambda$ -teriminin katkısı şimdilik gözardı edilirse,  $k=0$  için, (2.4) denklemi, evrende madde bulunduğu sürece genişlemenin daima süreceğini;  $k=-1$  için, madde-enerji yoğunluğu sönümlense bile  $k$ -teriminin genişlemeyi beslemeyi sürdüreceğini söylemektedir.  $k=+1$  için ise,  $\mu$  nün  $\mu_c = \frac{3c^2}{8\pi G a_0^2}$  kritik değerini aldığı bir  $a_0(t)$  zamanına kadar genişlemenin süreceği ve bu değerde sıfır olan genişleme hızından sonra  $\mu < \mu_c$  değerleri için  $k$ -teriminin baskın çıkarak çökmeye neden olacağı anlaşılmaktadır. Öte yandan, (2.5) denklemi, ivmenin  $k$  ya, yani, uzaysal eğriliğin özelliklerine bağlı olmadığını söylemektedir. Denklemdeki eksi işareti

$$\mu + 3\frac{P}{c^2} > 0 \quad (2.12)$$

koşulu sağlandığı sürece gravitasyonun daima çekici olduğunu ve dolayısıyla da genişlemenin yavaşlayan olduğuna işaret etmektedir. (2.12) ile gösterilen koşul  $\mu + \frac{P}{c^2} \geq 0$  koşulu ile birlikte Kuvvetli Enerji Koşulu olarak bilinir ve maddenin olağan madde (bilinen, sıradışı değil, toz, radyasyon gibi) olduğunu ifade eder.

Öte yandan, şimdi, bir de  $\Lambda$ -teriminin rolüne değinelim. Bu terim, her iki denklemde de artı işareti ile yer almaktadır.  $\Lambda > 0$  için, (2.5) denkleminde  $\Lambda$  nın  $\mu$  ile aynı yönde bir rol oynadığı, yani genişlemeyi desteklediği anlaşılmaktadır. (2.6) denklemi ise, pozitif bir kozmolojik sabitin bir itme kuvveti gibi davranarak yavaşlamayı dengelemeye çalıştığını söylemektedir.

## 2.2. F(R,G)-GRAVİTE

Karanlık Enerji problemini çözmek için iki yaklaşım ortaya çıkmıştır. Bunlardan birincisi,  $G_{ab}$  Einstein tansörünü

$$G_{ab} = \kappa^2 \left( T_{ab}^{\text{sıradan madde}} + T_{ab}^{\text{karanlık enerji}} \right) \quad (2.13)$$

şeklinde yazmaktadır. Eşitliğin sağındaki ikinci terim, sıradan madde dışında her türlü madde ya da etkene bağlanan ( $\Lambda$  Kozmolojik Sabit, Skaler, Tansör alanları vb...) enerji momentum tansörünü göstermektedir. Bu yaklaşımın Karanlık Enerji problemine bir takım çözümler getirdiğini ama beraberinde de önemli sorunlar yarattığını kaydedelim. Bunlar arasında belki de en önemli sorun, amaca uygun olarak tasarlanan egzotik maddenin hiçbir şekilde gözlenememiş olmasıdır. Karanlık enerji problemine bir diğer yaklaşım ise, Einstein Alan denklemlerinin sol yanında, yani, geometrik kısmında değişikliğe gitmektir. Matematiksel olarak bu

$$G_{ab} + G_{ab}^{\text{karanlık enerji}} = \kappa^2 T_{ab}^{\text{sıradan madde}} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tür teorilere “Değişikliğe uğratılmış Gravitasyon Teorileri” adı verilmektedir. Böyle bir değişikliğe EAD'nin Lagrange'yen formülasyonu izin vermektedir. Gerçekten de (2.1)deki EAD'yi

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_m \quad (2.15)$$

gibi bir aksiyondan varyasyonla elde etmek mümkündür. (2.15) aksiyonuna Einstein-Hilbert Aksiyonu denir. Aksiyonda yer alan  $S_m$  ise madde aksiyonu olup madde Lagrange yoğunluğundan hareketle

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} L_m(g_{ab}, \psi) \quad (2.16)$$

aksiyonuyla tanımlanmıştır. Bu maddeye ise

$$T_{ab} = -2 \frac{\partial L_m}{\partial g^{ab}} + g_{ab} L_m \quad (2.17)$$

ile tanımlı bir enerji-momentum tansörü bağlanabilmektedir.

Şimdi,  $S_{EH}$  aksiyonundaki integrantı  $R$  almak yerine, Riemann geometrisinin herhangi bir invaryant ya da invaryantlar fonksiyonu olarak almak mümkündür. Eğer  $S_{EH}$  aksiyonunda,  $R$  ye göre lineer olan integrant  $f(R)$  alınırsa böyle elde edilmiş gravitasyon teorisine “değiştirilmiş  $f(R)$ -gravite” ya da kısaca  $f(R)$ -gravite denir. Eğer, Riemann geometrisinin:  $R_{abcd}$  Riemann eğrilik tansörü,  $R_{ab}$  Ricci eğrilik tansörü ve  $R$  Ricci eğrilik skalerinden hareketle

$$G = R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanan  $G$  invaryantının keyfi bir  $f(G)$  fonksiyonu integrant olarak alınırsa, buna “değiştirilmiş  $f(G)$ -gravite” denir. Eğer integrant hem  $R$  nin, hem de  $G$  nin keyfi bir  $F(R, G)$  fonksiyonu olarak düşünülürse buna da “değiştirilmiş  $F(R, G)$ -gravite” ya da kısaca  $F(R, G)$ -gravite denir.  $G$  eğrilik invaryantına Gauss-Bonnet terimi denir. Bunun aksiyonda tek başına alınması alan denklemlerinde herhangi bir değişikliğe yol açmaz, zira, katkısı yalnızca bir diverjans olarak gelir ve etkisiz bir sabit rolü görür. Bu durum,  $G$  nin 4-boyutta bir topolojik invaryant olduğu biçiminde ifade edilir. Ancak 5-boyut ya da daha yüksek boyutlarda böyle değildir;  $G$  nin önemli katkısı bulunmaktadır. Zaten gravitasyonu kuvantize etmek amaçlı teorilerde böyle bir terimin

gerekliliği ortaya çıkmıştır. Biz yalnızca 4-boyutlu uzay-zamanda çalışacağımız için,  $G$  terimi  $F(R, G)$  fonksiyonu içinde olacaktır.

O halde, ilgileneceğimiz değiştirilmiş yüksek mertebeden gravitasyon teorisi  $F(R, G)$  olup bunun alan denklemleri

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(R, G) - 2\Lambda] + S_m \quad (2.19)$$

aksiyonunun varyasyonu ile verilecektir. Bu aksiyondan, alan denklemlerinin elde edilmesi çok uzun olduğundan aşağıda yalnızca alan denklemlerini yazmakla yetiniyoruz. Dolayısıyla  $F(R, G)$ -gravitenin alan denklemleri:

$$F_R \equiv \frac{\partial F(R, G)}{\partial R} \quad , \quad F_G \equiv \frac{\partial F(R, G)}{\partial G} \quad (2.20)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} F - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R \\ & - \left( -2R R_{ab} + 4R_{ac} R^c_b - 2R_a^{cde} R_{bcde} - 4R_{acdb} R^{cd} \right) F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R + 2g_{ab} R \square F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\ & - 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_a^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ile verilecektir [23,32,33].

### 3. MALZEME VE YÖNTEM

#### 3.1. KOVARYANT 1+3 AYRIŞIM

Bu Bölüm'ün hazırlanması için [34-40] no'lu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Kozmolojik bir model, çok büyük boyutlardaki evren yapısını ortalama olarak ele alarak bu evrenin uzay-zaman geometrisi ve madde-enerji içeriği hakkında bilgi sahibi olmayı amaçlar. Kozmolojik bir model olarak göz önüne aldığımız evrende madde-enerji kaynaklarının büyük boyutlardaki dağılımı, sürekli akışkan olarak ele alınmaktadır. Buna göre,  $(M, g)$  uzay-zaman manifoldu üzerindeki her bir olayda, zaman cinsinden tek bir vektör alanı tanımlanabilmektedir. Bu vektör alanı genel olarak  $\mathbf{u}$  ile gösterilir ve zamansal olma

$$u^a u_a = -1 \quad (3.1)$$

şartını sağlar. Bu şarta uyan ayrıcalıklı bir vektör alanının var olduğu düşüncesi,  $(M, g)$  manifoldunun ek bir yapı kazanmasına olanak sağlar. Bu yapı  $(M, g, \mathbf{u})$  şeklinde gösterilir ve “uzay-zamanın 1+3 ipliklenmesi” olarak ifade edilir.

##### 3.1.1 İzdüşüm Tansörleri

$(M, g, \mathbf{u})$  manifoldu üzerinde tanımlı ve zamansal vektör alanı olan  $\mathbf{u}$  vektörü,  $U_{ab}$  ve  $h_{ab}$  olmak üzere iki tansör tanımlar. Bunlar  $\mathbf{u}$  ayrıcalıklı vektör alanına sırasıyla paralel ve dik izdüşümü temsil eden tansörlerdir:

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad (3.2)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.3)$$



İzdüşüm tansörleri olarak adlandırılan bu tansörlerden ;

$U_{ab}$ :  $u^a$  4'lü hız vektörüne paralel izdüşümü temsil ederken

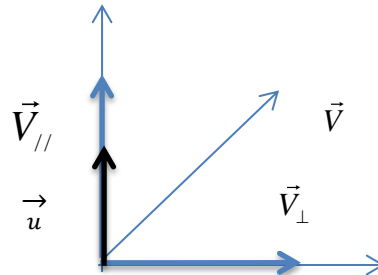
$h_{ab}$ :  $u^a$  4'lü hız vektörüne dik izdüşümü temsil etmektedir.

Bu tanımlardan hareketle, bu tansörlerin sağladıkları aşağıdaki bağıntıları kolaylıkla göstermek mümkündür.

$$\begin{aligned}
 U_{ab} &= U_{ba} \quad (\text{simetrik}) & h_{ab} &= h_{ba} \quad (\text{simetrik}) \\
 U^a_a &= +1 & h^a_a &= +3 \\
 U^a_b u^b &= u^a, U^a_b u_a = u_b & h^a_b u^b &= h^a_b u_a = 0 \\
 U^a_b U^b_c &= U^a_c & h^a_b h^b_c &= h^a_c \\
 U^a_c U^b_d &= U^a_d U^b_c & h^a_c h^b_d &= h^a_d h^b_c
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Zaman cinsinden ayrıcalıklı olarak kabul edilen  $\mathbf{u}$  vektörünün varlığı, uzay-zaman manifoldunun yapısına ek yapı kazandırmaktadır. Şöyle ki, bunlar aracılığıyla, fiziksel olarak önem taşıyan tüm geometrik büyüklüklerin kovaryant 1+3 tansör ayrışımı yapılabilir. Bu yaklaşım ilk olarak 1950'ler ve 1960'ların başlarında Raychaudhuri, Schüten, Ehlers, Sachs ve Trüper tarafından başlatılmış ve geliştirilmiştir. Daha sonra 1971 yılında Ellis, 1+3 kovaryant yaklaşımın rölativist kozmolojideki uygulamalarına odaklanıp bu yöntemi anlaşılabilir zarif bir şekilde getirmiştir.

İzdüşürme tansörleri olarak tanımladığımız  $U^a_b$  ve  $h^a_b$  tansörleri geometrik ve fiziksel büyüklüklerin  $\mathbf{u}$  vektörüne paralel ve dik bileşenlerine ayrıştırılmasını yani diğer bir deyişle bu büyüklüklerin “zaman” ve “uzay” kısımlarına ayrıştırılmasını sağlar. Buna göre keyfi bir  $V$  vektörü  $V \in (\mathbf{M}, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  olmak üzere, aşağıdaki şemaya göre



Şekil 3.1 Keyfi bir  $V$  vektörünün paralel ve dik bileşenlerine ayrıştırılması

$$V = V_{//} + V_{\perp} \quad , \quad V_{//} = \lambda u \quad \lambda \in R$$

$$\lambda u \cdot V = u \cdot V_{//} + u \cdot V_{\perp}$$

$$u \cdot V = u \cdot \lambda u$$

$$u \cdot V = u \cdot u \lambda$$

$$u \cdot V = -\lambda \Rightarrow \lambda = -u \cdot V$$

$$V_{//} = \lambda u$$

bağıntılarını sağlar. O halde

$$V_{//} = (-u \cdot V)u$$

$$V_{//}^a = -u^b V_b u_a$$

$$-u^a u_b \equiv U^a_b$$

denirse

$$V_{//}^a = U^a_b V^b$$

bulunur. Buradan hareketle

$$V_{\perp}^a = h^a_b V^b$$

$$V^a = V_{//}^a + V_{\perp}^a$$

olacağından

$$V^a = h^a_b V^b + U^a_b V^b \tag{3.5}$$

şeklinde yazılır. Bu aşamada şu noktayı belirtecek olursak; eğer  $\mathbf{u}$ , akışkanla birlikte hareket eden gözlemcinin zamansal 4'lü hız vektörü ise,  $\mathbf{u}$  ya dik izdüşüm, gözlemcinin anlık durgunluk sistemine izdüşüm olarak ele alınacaktır. Eğer ayrıcalıklı vektör 3

boyutlu  $\Sigma$  uzaysal hiperyüzeylerin normalini olarak ele alınacaksa, bu durumda  $\mathbf{u}$  ya dik izdüşümler sözü edilen hiperyüzeyler üzerine olacaktır. Kısaca ifade edecek olursak izdüşümler, sözü edilen uzaysal hiperyüzeylerin  $Tp(\Sigma)$  ile gösterilecek olan teğet uzaylarına olacaktır. Uzaysal hiperyüzeylerin normalini belirtirken artık  $\mathbf{u}$  kullanmak yerine  $\mathbf{n}$  kullanmak ve  $n^a n_a = +1$  şeklinde tanımlamak daha uygun olacaktır. Buradan yola çıkarak  $\mathbf{u}$  için kullanılan ifadelerin, aynı zamanda  $\mathbf{n}$  için de geçerli olduğu düşünülecektir.

### 3.1.1.a. Birinci ve İkinci Mertebeden Tansörlerin 1+3 Kovaryant Ayrışımı

$U^a_b$  ve  $h^a_b$  izdüşüm tansörlerinin çeşitli büyüklükleri “uzay” ve “zaman” kısımlarına ayırabildiğini söylemiştik. Bunlardan yola çıkarak

- Bir  $V_a$  uzay-zaman vektörü,  $B_a$  uzaysal bir vektör ( $B_a u^a = 0$ ) olmak üzere

$$V = Au + B \quad , \quad B.u = 0$$

$$V_a = Au_a + B_a$$

olarak indirgenemez halde yazılır. Eşitliğin her iki tarafını  $u^a$  ile çarparsak:

$$A = -u^a V_a$$

$$B_a = h^b_a V_b$$

bulunur. Dolayısıyla

$$V_a = U^b_a V_b + h^b_a V_b \quad \text{veya} \quad V^a = U^a_b V^b + h^a_b V^b \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu ifadede eşitliğin sağındaki ilk terim  $V^a$  nın “zaman kısmını” temsil ederken, ikinci terim  $V^a$  nın “uzay kısmını” temsil etmektedir.

- İkinci mertebeden bir  $V_{ab}$  uzay-zaman tansörü,  $B_a, C_a, D_{ab}$  uzaysal tansörler ( $B_a u^a = 0, C_a u^a = 0, D_{ab} u^a = D_{ab} u^b = 0$ ) olmak üzere:

$$V_{ab} = A u_a u_b + B_a u_b + u_a C_b + D_{ab}$$

şeklinde indirgenemez kısımlara ayrılmış olarak yazılır. Bu eşitlik  $u^a u^b$  ve  $h^a_e h^b_f$  gibi terimlerle çarpılıp (3.4) bağıntıları da kullanılırsa sonuçta  $V_{ab}$  nin ayrışımı için

$$V_{ab} = U^c U^d V_{cd} + U^c h^d_b V_{cd} + h^c_a U^d V_{cd} + h^c_a h^d_b V_{cd} \quad (3.7)$$

bağıntısı elde edilir. Eşitliğin sağındaki ilk terim aynı anda  $c$  ile  $d$  indislerinin  $u$ 'ya paralel izdüşümünü temsil etmekte iken, ikinci terim  $a$  indisine göre paralel izdüşümü  $b$  indisine göre dik izdüşümü, üçüncü terimde  $b$  indisine göre paralel,  $a$  indisine göre dik izdüşümü temsil etmektedir. Son terim ise  $V_{ab}$  tansörünün her iki indisinde  $u$  ya dik izdüşürmektedir. Bu da bize  $V_{ab}$ 'nin uzaysal kısmını işaret eder. Bunu  $D_{ab}$  ile gösterelim.

$$D_{ab} \equiv h^c_a h^d_b V_{cd} \Rightarrow D_{ab} u^a = D_{ab} u^b = 0 \quad (3.8)$$

$V_{ab}$ 'nin uzaysal kısmını ifade eden bu tansör, simetrik ve antisimetrik olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Bu kısımlar:

$$D_{ab} = D_{(ab)} + D_{[ab]} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir. Simetrik kısım ise kendi içerisinde; biri izsiz kısım diğeri izli kısım olmak üzere iki bölümden oluşur. Simetrik kısmın izsiz bölümünü ifade etmek için “açılı parantez” ( $\langle \rangle$ ) sembolünü kullanacağız. Buna göre:

$$D_{(ab)} = D_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{3} h^{cd} V_{cd} h_{ab} \quad (3.10)$$

yazılır. Burada  $h^{cd}V_{cd} \equiv \dot{I}zD_{(ab)}$  yi yani simetrik kısmın izli bölümünü temsil eder, dolayısıyla  $D_{ab}$  yi

$$D_{ab} = D_{\langle ab \rangle} + \frac{1}{3} \dot{I}zD_{(ab)} + D_{[ab]} \quad (3.11)$$

şeklinde ifade etmek mümkün olur.

Uzaysal tansörün tüm bu tanımlarından hareket ederek birtakım özellikleri göstermek mümkündür. Buna göre;

$$D_{(ab)} = \frac{1}{2} (D_{ab} + D_{ba}) = h^c_{(a} h^d_{b)} V_{cd} = h^c_a h^d_b V_{(cd)} \quad (3.12)$$

dir. Buradan görülüyor ki; uzay-zaman tansörünün uzaysal izdüşümünün simetrik kısmı ile uzay-zaman tansörünün simetrik kısmının izdüşümü aynı şeyi ifade etmektedir. Benzer şekilde antisimetrik kısmı inceleyecek olursak

$$D_{[ab]} = \frac{1}{2} (D_{ab} - D_{ba}) = h^c_{[a} h^d_{b]} V_{cd} = h^c_a h^d_b V_{[ab]} \quad (3.13)$$

olduğu görülür. Burada da aynı şekilde uzay-zaman tansörünün uzaysal izdüşümünün antisimetrik kısmı ile uzay-zaman tansörünün antisimetrik kısmının izdüşümünün birbirine eşit olduğu görülmektedir. İz için ise

$$\dot{I}zD_{(ab)} = h^{ab}V_{ab} \quad (3.14)$$

yazılabilir. Bu bize, simetrik kısmın izinin, uzaysal kısmın izi ile aynı şey olduğunu ifade eder. Aynı durum uzaysal kısmın izsiz simetrik kısmı için de geçerlidir ve

$$D_{\langle ab \rangle} = h^c_a h^d_b \left[ V_{(cd)} - \frac{1}{3} h^{ef} V_{ef} h_{cd} \right] = \left[ h^c_{(a} h^d_{b)} - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab} \right] V_{cd} \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilir.

### 3.1.1.b. 1+3 Kovaryant Ayırışım Formalizminde Uzay ve Zaman Türevleri

Bir  $V_a$  vektörü ele alalım. Bu vektörün bir  $f$  skaler fonksiyonunun kovaryant türevi olduğu düşünülen özel bir durum göz önünde bulundurulursa, yani,

$$V_a \equiv \nabla_a f \quad (3.16)$$

olduğu kabul edilirse. Bu durumda (3.6) dan hareketle,

$$\nabla_a f = -u_a u^b \nabla_b f + h_b^a \nabla_b f \quad (3.17)$$

olacağı açıktır. Öte yandan, Genel Rölativite Teorisi'nde kütleçekimi ve eylemsizlik kuvvetlerinin etkisi altında bulunan bir test taneciğinin hareket denkleminin jeodezik denklem olarak ifadesi

$$u^e \nabla_e u^a = 0 \quad (3.18)$$

şeklindedir. Bu kuvvetlere ek olarak bu test taneciğinin üzerine gravitasyonel olmayan kuvvetler de etkiyor ise, hareket denklemi

$$u^e \nabla_e u^a = F^a \quad (3.19)$$

olacaktır. Bu durumu Newtonsal ifade ile karşılaştıracak olursak eşitliğin solundaki terimin ivmeyi gösterdiği açık olarak görülmüş olur.  $u^e \nabla_e$  operatörü, zamana göre türevi temsil eder ve  $\mathbf{u}$  doğrultusundaki kovaryant zaman türevi olarak adlandırılır. Bu türevi “.” (nokta) sembolü ile göstereceğiz. Buna göre, kovaryant türev:

- Skaler bir fonksiyon için:

$$\dot{f} = u^e \nabla_e f \quad (3.20)$$

- Bir  $V_a$  vektörü için:

$$\dot{V}_a = u^e \nabla_e V_a \quad (3.21)$$

- Herhangi bir tansör için:

$$\dot{V}^{a\dots}_{b\dots} = u^e \nabla_e V^{a\dots}_{b\dots} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılacaktır. (3.17) deki ikinci terim  $u^a$  ya dik olan hiperyüzeeye izdüşümü göstermektedir. Buna,  $u^a$  ya tamamen dik izdüşürülmüş kovaryant türev veya kovaryant uzaysal türev denir ve  $D_a$  sembolü ile gösterilir. Buna göre:

- Skaler bir fonksiyon için:

$$D_e f = h^d{}_e \nabla_d f \quad (3.23)$$

- Bir  $V_a$  vektörü için:

$$D_e V_a = h^b{}_a h^f{}_e \nabla_f V_b \quad (3.24)$$

- Herhangi bir tansör için:

$$D_e V^{a\dots}_{b\dots} = h^a{}_{c\dots} h^d{}_b h^f{}_e \nabla_f V^{c\dots}_{d\dots} \quad (3.25)$$

yazılacaktır.

Bu yazılışlara göre (3.17)

$$\nabla_a f = -u_a \dot{f} + D_a f \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilecektir.

Uzaysal tansörün izsiz simetrik kısmını sembolize ederken kullandığımız “açılı parantez” gösterimi, aynı zamanda, zaman türevlerinin izdüşümleri için de

$$V^{(a)} = h^a{}_b V^b \quad (3.27)$$

$$V^{(ab)} = \left[ h^{(a}{}_c h^{b)}{}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] V^{cd} \quad (3.28)$$

$$\dot{V}^{(a)} = h^a{}_b \dot{V}^b \quad (3.29)$$

$$\dot{V}^{(ab)} = \left[ h^{(a}{}_c h^{b)}{}_d - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] \dot{V}^{cd} \quad (3.30)$$

biçiminde kullanılacaktır.

### 3.1.1.c. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

Şimdi, özel olarak

$$V_{ab} \equiv \nabla_a u_b$$

alalım. (3.7) ye göre

$$\nabla_a u_b = U^c U^d {}_b \nabla_c u_d + U^c h^d {}_b \nabla_c u_d + h^c U^d {}_b \nabla_c u_d + h^c h^d {}_b \nabla_c u_d \quad (3.31)$$

olur. Bunun,

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_a u_b \quad (3.32)$$

ifadesine indirgeneceği kolaylıkla görülür. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim zamansal kısmı, ikinci terim ise uzaysal kısmı göstermektedir. Uzaysal kısım  $\mathbf{u}$  ya dik izdüşürülmüş kovaryant türevidir. Bu terim iki kısımdan oluşur. Bunlardan birincisi simetrik kısım, diğeri ise antisimetrik kısımdır. Bu iki kısmın toplamı bize uzaysal kısmı verir. Bu açıklama ışığında (3.32) bağıntısını

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_{(a} u_{b)} + D_{[a} u_{b]} \quad (3.33)$$

ya da

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_{(a} u_{b)} + \frac{1}{3} \dot{I} z D_{(a} u_{b)} h_{ab} + D_{[a} u_{b]} \quad (3.34)$$

biçiminde yazabiliriz. Uzaysal kısmı;  $\theta_{ab}$  ile simetrik kısım,  $\omega_{ab}$  ile de antisimetrik kısım gösterilmek üzere,

$$D_a u_b = \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.35)$$

biçiminde yazarsak kovaryant türev

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.36)$$

olur. Simetrik kısım da, izli ve izsiz kısım olmak üzere



$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} \quad (3.37)$$

şeklinde ifade edilirse, sonuçta

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.38)$$

olur.

$\theta_{ab}$ ,  $\omega_{ab}$ ,  $\sigma_{ab}$  tansörlerinin sağladığı bağıntılar şunlardır:

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \theta_{(ab)} \quad , \quad \theta_{ab} u^b = \theta_{ab} u^a = 0 \quad , \quad \theta^a_a \equiv \dot{I}z\theta_{ab} = \theta \\ \omega_{ab} &= \omega_{[ab]} \quad , \quad \omega_{ab} u^b = \omega_{ab} u^a = 0 \quad , \quad \omega^a_a \equiv \dot{I}z\omega_{ab} = 0 \\ \sigma_{ab} &= \sigma_{(ab)} \quad , \quad \sigma_{ab} u^b = \sigma_{ab} u^a = 0 \quad , \quad \sigma^a_a \equiv \dot{I}z\sigma_{ab} = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Burada:

- $\theta_{ab}$  Genişleme Tansörüdür. Bu tansörün izi olan  $\theta$  Genişleme Skalerini temsil eder. Bu da yalın bir biçimde Genişleme olarak ifade edilir.  $\theta_{ab}$  simetrik bir tansördür. Bu tansör uzayın hacimce genişlemesini ifade etmektedir.

- $\omega_{ab}$  Girdap Tansörüdür. Antisimetrik bir tansördür ve izi yoktur. Buna bağlı olarak

$$\omega_a = \frac{1}{2}\eta_{abcd} u^d \omega^{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (3.40)$$

ya da

$$\eta_{abcd} u^d = \eta_{abc} \quad (3.41)$$

yazılarak

$$\omega_a = \frac{1}{2} \eta_{abc} \omega^{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanan bir vektör ile de temsil edilebilir. Bu vektöre  $\omega_a$  Girdap Vektörü (ya da dönme vektörü) denir.

- $\sigma_{ab}$  Makaslama Tansörüdür. İzi yoktur. Bu tansör,  $u^a$  ya dik olan uzay elemanlarının biçimsel değişikliklerini temsil eder. Bu büyüklüklere ek olarak

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{ab} \sigma_{ab} \quad (3.43)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{ab} \omega_{ab} = \omega^a \omega_a \quad (3.44)$$

ifadeleriyle iki skaler büyüklük tanımlanır. Bunlara sırasıyla makaslama skaleri ve dönme skaleri denir ve

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ab} = 0 \quad (3.45)$$

$$\omega = 0 \Leftrightarrow \omega_{ab} = 0 \text{ ya da } \omega_a = 0 \quad (3.46)$$

özelliklerini taşırlar.

Yukarıda yapmış olduğumuz tanımlardan yola çıkarak en son durumda kovaryant türev

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c \quad (3.47)$$

şeklinde yazılır. Burada ileride kısaltma amacıyla kullanacağımızdan  $v_{ab}$  ile

$$v_{ab} \equiv D_a u_b = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c \quad (3.48)$$

ifadesini gösterelim.

## 3.2. RIEMANN GEOMETRİSİNİN TEMEL BAĞINTILARI

### 3.2.1. Ricci ve Bianchi Özdeşlikleri

1+3 uzay-zaman ayrışım yöntemi esas olarak Riemann Eğrilik Tansöründen olabildiğince bilgi üretilmesini amaçlar. Bu yöntemi Einstein alan denklemlerine doğrudan uygulamak yeni bir bilgiye ulaştırmaz. Einstein denklemleri dolaylı olarak kullanılır. Şöyle ki, Ricci Tansörü kaynakların dinamik büyüklüklerini ışın içine katmak amacıyla cebirsel bir rol oynar.

Keyfi bir  $u$  vektörünün kovaryant türevlerinin yer değiştirici olmamalarının bir sonucu olarak Riemann Eğrilik Tansörü ortaya çıkmaktadır.

$$2\nabla_{[a}u_{b]}u_c = R_{abcd}u^d \quad (3.49)$$

Bu ifade, Ricci Özdeşliği olarak da adlandırılmaktadır. Riemann Eğrilik Tansörü

$$R_{abcd} = R_{[ab][cd]} = R_{cdab} \quad (3.50)$$

$$R_{a[bcd]} = 0 \quad (3.51)$$

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0 \quad (3.52)$$

cebirsel özellikleri sağlar.

(3.52) ye “Birinci Bianchi Özdeşliği” denir. Cebirsel özdeşlikler dışında bir de Diferansiyel özdeşlik bulunmaktadır:

$$\nabla_{[a}R_{bc]de} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_e R^a{}_{bcd} + \nabla_c R^a{}_{bde} + \nabla_d R^a{}_{bec} = 0 \quad (3.53)$$

Buna “İkinci Bianchi Özdeşliği” denir.

Riemann Eğrilik Tansörünün iki izi bulunmaktadır. Bunlar:

$$R^f{}_{afb} = R_{ab} = R_{ba} \quad (3.54)$$

$$R^{ab}{}_{ab} = R^a{}_a = R \equiv {}^4R \quad (3.55)$$

dır. Bunlara sırasıyla  $R_{ab}$  Ricci Eğrilik Tansörü ve  $R$  Ricci Eğrilik Skaleri denir. Riemann Eğrilik Tansörü  $R_{abcd}$  ye büzme işlemleri uygulanarak  $R_{ab}$  (Ricci Eğrilik Tansörü) ve  $R$  Ricci Eğrilik Skaleri bulunabilmektedir. Yani  $R_{abcd}$  bilirse  $R_{ab}$  ve  $R$  bulunabilir. Fakat bunun tersi doğru değildir. (3.53) teki diferansiyel özdeşliğin bir kere büzülmesi ile

$$\nabla_a R^a{}_{bcd} = 2\nabla_{b[c} R_{d]} \quad (3.56)$$

ve ikinci kere büzülmesi ile de

$$\nabla_a R^a{}_b = \frac{1}{2} \nabla_b R \quad (3.57)$$

özdeşlikleri elde edilir. Bu bağıntılardan hareketle,

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlanan tansörün diverjansının sıfır olduğu yani

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (3.59)$$

olduğu gösterilebilir.  $G_{ab}$  ye Einstein Tansörü denir.

### 3.2.2. Weyl Tansörü

Riemann Eğrilik Tansörü  $R_{abcd}$  nin büzülmesi ile elde edilen  $R_{ab}$  ve  $R$  değerlerinin  $R_{abcd}$  nin izi olduğunu belirtmiştik.  $R_{abcd}$  nin bilinmesi ile  $R_{ab}$  ve  $R$  büyüklükleri büzme işlemiyle bulunabilir; fakat bunun tersi doğru değildir. Bunun nedeni  $R_{abcd}$  nin iz kısımları  $R_{ab}$  ve  $R$  nin yanı sıra, izsiz kısmı olan  $C_{abcd}$  tansöründen oluşuyor olmasıdır.

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad}) - \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (3.60)$$

Riemann Eğrilik Tansörünün izsiz kısmı olan  $C_{abcd}$  ye Weyl Tansörü veya Konformal Eğrilik Tansörü denir. Weyl Tansörü

$$C_{abcd} = C_{[ab][cd]} = C_{cdab} \quad (3.61)$$

$$C_{a[bcd]} = 0 \quad (3.62)$$

$$C^a{}_{bad} = 0 \text{ ve } C^{ab}{}_{ab} = 0 \quad (3.63)$$

simetri özelliklerini sağlar.

(3.60) bağıntısını  $C_{abcd}$  Weyl tansörünü yalnız bırakacak şekilde yeniden düzenlersek:

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2}(g_{ac}R_{bd} + g_{bd}R_{ac} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad}) + \frac{R}{6}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (3.64)$$

elde ederiz.

Elde ettiğimiz bu ifadenin her iki tarafının diverjansı alınıp (3.53) ve (3.56) kullanılırsa

$$\nabla_a C^a{}_{bcd} = \nabla_{[c} R_{d]b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \quad (3.65)$$

elde edilir. Einstein denklemleri sayesinde de, Weyl tansörü enerji momentum tansörü cinsinden

$$\nabla_a C^a{}_{bcd} = \nabla_{[c} T_{d]b} + \frac{1}{3} g_{b[c} \nabla_{d]} T \quad (3.66)$$

biçiminde ifade edilir. Bu ifadeye Weyl tansörünün hareket denklemi denir.

1+3 kovaryant formalizm çerçevesinde Weyl tansörü,

$$E_{ab} = C_{abf} u^e u^f \quad (3.67)$$

ve

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{ab}{}^{gh} C_{cgh} u^c u^d \quad (3.68)$$

bağıntıları uyarınca sırasıyla “elektrik kısım” ve “magnetik kısım” olmak üzere iki kısma ayrıştırılır. Bunlar aşağıdaki simetri özelliklerini sağlarlar:

$$E_{ab} = E_{(ab)} \quad , \quad H_{ab} = H_{(ab)} \quad (3.69)$$

$$E^a{}_a = 0 \quad , \quad H^a{}_a = 0 \quad (3.70)$$

$$E_{ab} u^b = E_{ab} u^a = 0 \quad , \quad H_{ab} u^b = H_{ab} u^a = 0 \quad (3.71)$$

Bu iki kısım

$$C_{cd}{}^{ab} = \left[ 4 \delta_e^{[a} \delta_f^{b]} \delta_{[c}^g \delta_{d]}^h - \eta_{ef}^{ab} \eta^{gh}{}_{cd} \right] u^e u_g E_h^f - 2 \left[ \eta_{ef}^{ab} \delta_{[c}^g \delta_{d]}^h + \delta_e^{[a} \delta_f^{b]} \eta^{gh}{}_{cd} \right] u^e u_g H_h^f \quad (3.72)$$

bağıntısı uyarınca Weyl Tansörü tamamen belirlir.

### 3.3. ENERJİ – MOMENTUM TANSÖRÜ

Alan denklemlerinin sağında bulunan  $T_{ab}$  enerji-momentum tansörü gravitasyona kaynaklık eden madde-enerjinin sahip olduğu çeşitli etkilerin toplamını ifade etmektedir.

Enerji-momentum tansörü  $T_{ab}$ , ayrıcalıklı bir  $u^a$  4'lü hız vektörü ile ilişkili olarak şu şekilde ayrıştırılır:

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2q_{(a} u_{b)} + \pi_{ab} = T_{(ab)} \quad (3.73)$$

Bu denklemdeki  $\mu$ ,  $p$ ,  $q_a$  ve  $\pi_{ab}$  akışkanın dinamik büyüklükleri olup

$\mu$  :  $u^a$  ya göre toplam rölativist enerji yoğunluğu

$q_a$  :  $u^a$  ya göre rölativist momentum yoğunluğu

$p$  : eşyönlü basınç

$\pi_{ab}$  : izsiz eşyönsüz basınç

biçiminde isimlendirilirler ve

$$q_a u^a = 0, \quad \pi^a_a = 0, \quad \pi_{ab} u^b = 0, \quad \pi_{ab} = \pi_{(ab)} \quad (3.74)$$

özelliklerini taşırlar. Tanımından bunların

$$\mu = u^a u^b T_{ab} \quad (3.75)$$

$$p = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \quad (3.76)$$

$$q_a = -h^b_a u^c T_{bc} \quad (3.77)$$

$$\pi_{ab} = (h^c_{(a} h^d_{b)} - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd} \quad (3.78)$$

bağıntılarıyla bulunacağı kolaylıkla anlaşılır.

### 3.4. EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

1+3 kovaryant ayrışım yönteminde, izdüşüm tansörleri kullanılarak çeşitli geometrik ve dinamik büyüklükler, zamansal ve uzaysal ve de hem zamansal hem de uzaysal kısımlarına ayrıştırılır. Amaç, Riemann tansöründen olabildiğince bilgi çıkarımlamaktır. Bu süreçte Einstein Alan Denklemleri, yalnızca,  $R_{ab}$  Ricci eğrilik tansörünü maddenin dinamik değişkenlerine bağlamak üzere cebirsel bir denklem olarak kullanılır. Temel denklem, madde akışkanının kinematik özelliklerini tanımlayan (3.38) bağıntısıdır. Her defasında ortaya çıkan  $\nabla_a u_b$  kovaryant türevi yerine (3.38) veya (3.47) deki ifadesi yerleştirilerek akışkanın kinematik değişkenleri için içine katılır. Hesaplar çok uzun olduğu için, biz bu Tez kapsamında yalnızca sonuçları vermekle yetineceğiz. Sonuçta iki takım denklem elde edilir. Birinci takım, kovaryant zaman türevleri içerdiği için bunlara “evrim denklemleri” ya da “yayılm denklemleri” denir. İkinci takım ise hiç bir zaman türevi içermeyip yalnızca uzaysal türevleri barındırır. Bunlara da “bağ denklemleri” denir. Sonuçları aşağıda topluca gösteriyoruz:

#### EVRİM (YAYILIM )DENKLEMLERİ

##### Raychaudhuri Denklemi:

$$\dot{\theta} - D_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.79)$$

##### Girdap Yayılım Denklemi:

$$\dot{\omega}^a - \frac{1}{2}\eta^{abc} D_b \dot{u}_c = -\frac{2}{3}\theta\omega^a + \sigma^a_b \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (3.80)$$

##### Makaslama Yayılım Denklemi:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} - (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2}(D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) + \sigma_{ac} \sigma^c_b + \frac{2}{3}\theta\sigma_{ab} - \dot{u}_a \dot{u}_b \\ + \omega_a \omega_b + \frac{1}{3}(D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} = -\left( E_{ab} - \frac{1}{2}\pi_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$



**Gravitasyonel-Elektrik Yayılım Denklemi:**

$$\begin{aligned}
& \left( \dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab} \right) - \left( E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae} \right) \dot{u}^e u_b - \left( E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be} \right) \dot{u}^e u_a \\
& - \frac{1}{2} \left( \eta_{aef} D^e H^f{}_b + \eta_{bef} D^e H^f{}_a \right) + \frac{1}{4} (D_a q_b + D_b q_a) - \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e \\
& = -\frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a \dot{u}_b + q_b \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q_e \dot{u}^e - \theta \left( E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab} \right) \\
& + \frac{3}{2} \sigma^e{}_a \left( E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e{}_b \left( E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left( E_{je} - \frac{1}{6} \pi_{je} \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[ \left( E^e{}_b + \frac{1}{2} \pi^e{}_b \right) \omega^f + 2H^e{}_b \dot{u}^f \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[ \left( E^e{}_a + \frac{1}{2} \pi^e{}_a \right) \omega^f + 2H^e{}_a \dot{u}^f \right]
\end{aligned} \tag{3.82}$$

**Gravite -Magnetik Yayılım Denklemi:**

$$\begin{aligned}
& \dot{H}_{ab} - (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c \\
& + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left( E^f{}_b - \frac{1}{2} \pi^f{}_b \right) \\
& + \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left( E^f{}_a - \frac{1}{2} \pi^f{}_a \right) = -\theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c{}_b + H_{bc} \sigma^c{}_a) \\
& - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b + \omega_b q_a) - \frac{1}{2} \omega^c q_c h_{ab} \\
& + (\eta_{aef} E^e{}_b + \eta_{bef} E^e{}_a) \dot{u}^f \\
& - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H^e{}_b + \eta_{bef} H^e{}_a) \omega^f \\
& + \frac{1}{4} (\eta_{ae}{}^f \sigma^e{}_b + \eta_{be}{}^f \sigma^e{}_a) q_f
\end{aligned} \tag{3.83}$$

**Madde Korunum Denklemi:**

$$\dot{\mu} + \nabla^a q_a = (\mu + p) \theta - 2q_a \dot{u}^a - \pi_{ab} \sigma^{ab} \tag{3.84}$$

**Momentum Korunum Denklemi:**

$$\begin{aligned} \dot{q}_a + D_a p + D^b \pi_{ab} = & -(\mu + p) \dot{u}_a - \sigma_a^b q_b \\ & - \frac{4}{3} \theta q_a + u_a \dot{u}^b q_b - \pi_{ab} \dot{u}^b + \eta^{abc} q_b \omega_c \end{aligned} \quad (3.85)$$

**BAĞ DENKLEMLERİ****Makaslama Bağ Denklemi:**

$$0 = (C_1)_a = D_b \sigma_a^b - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_a^{bc} D_b \omega_c + 2\eta_a^{bc} \dot{u}_b \omega_c + q_a \quad (3.86)$$

**Girdap Bağ Denklemi:**

$$0 = (C_2) = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a \quad (3.87)$$

**Gravito-Magnetik Bağ Denklemi:**

$$\begin{aligned} 0 = (C_3)_{ab} = & H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} \\ & - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma^f_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f_a) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) \end{aligned} \quad (3.88)$$

**Gravito-Elektrik Diverjans:**

$$\begin{aligned} 0 = (C_4)_a = & D_b \left( E^b_a + \frac{1}{2} \pi^b_a \right) - \frac{1}{3} D_a \mu \\ & - \frac{1}{2} \sigma^b_a q_b + \frac{1}{3} \theta q_a - \eta_{aef} \left( \sigma^{eb} H^f_b - \frac{3}{2} \omega^e q^f \right) - 3H^b_a \omega_b \end{aligned} \quad (3.89)$$

**Gravito-Magnetik Diverjans:**

$$\begin{aligned}
0 = (C_5)_a = D_b H^b{}_a + \frac{1}{2} \eta_{ae}{}^f D^e q_f \\
+ (\mu + p) \omega_a + 3 \left( E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab} \right) \omega^b + \eta_{ae}{}^f \sigma^{eb} \left( E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb} \right)
\end{aligned} \tag{3.90}$$

## 4.BULGULAR

Bu bölümde, önceki bölümde yazmış olduğumuz evrim ve bağ denklemlerinin  $F(R,G)$ -gravite teorisi çerçevesinde alacağı şekilleri bulmak amaçlanmaktadır. Bir diğer amacımız da  $F(R,G)$ -gravite’de, Statik Einstein Evreni çözümü olup olmadığını araştırmak olacaktır.

### 4.1. $F(R,G)$ -GRAVİTE TEORİSİNİN ALAN DENKLEMLERİNİN EFEKTİF ENERJİ-MOMENTUM YORUMU

3. Bölüm’de söylenildiği gibi

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{F(R,G) - 2\Lambda}{2\kappa^2} \right] + S_m \quad (4.1)$$

aksiyonundan, metriğe göre birinci varyasyon yapılarak elde edilen  $F(R,G)$ -gravite’nin alan denklemleri

$$F_R \equiv \frac{\partial F(R,G)}{\partial R} \quad , \quad F_G \equiv \frac{\partial F(R,G)}{\partial G} \quad (4.2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} F - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R \\ & - \left( -2R R_{ab} + 4R_{ac} R^c_b - 2R_a^{cde} R_{bcde} - 4R_{acdb} R^{cd} \right) F_G \\ & - 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R + 2g_{ab} R \square F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ & + 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\ & - 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_a^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.3)$$

dir. Bunun izi ise

$$RF_R - 2F + 3\Box F_R + 2GF_G + 2R\Box F_G + 4R^{ab}\nabla_a\nabla_b F_G = \kappa^2 T^m \quad (4.4)$$

denklemini verir. (4.1) ya da (4.3), genel keyfî bir  $F(R,G)$  fonksiyonu içindir ve şu özel durumları içerir.

- $f(R)$ -gravite:

$$F(R,G) \equiv f(R) - 2\Lambda \Rightarrow F_R = f_R, \quad F_G = 0 \quad (4.5)$$

Bu takdirde, aksiyon ve alan denklemleri

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m \quad (4.6)$$

$$f_R(R)R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) - \nabla_a\nabla_b f_R(R) + g_{ab}\Box f_R(R) = \kappa^2 T_{ab}^m \quad (4.7)$$

ifadelerine indirgenir.

- $f(G)$ -gravite:

$$F(R,G) \equiv R + f(G) - 2\Lambda \Rightarrow F_R = 1, \quad F_G = f_G \quad (4.8)$$

Bu takdirde,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(G)] + S_m \quad (4.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R - \frac{1}{2}g_{ab}f(G) \\ & - \left( -2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd} \right) f_G \\ & - 2(\nabla_a\nabla_b f_G)R + 2g_{ab}R\Box f_G - 4R_{ab}\Box f_G \\ & + 4(\nabla_c\nabla_a f_G)R_b^c + 4(\nabla_c\nabla_b f_G)R_a^c \\ & - 4g_{ab}(\nabla_c\nabla_d f_G)R^{cd} - 4(\nabla_c\nabla_d f_G)R_a^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.10)$$

olur. Bunun da özel hali olarak eğer

$$f(G) \equiv \alpha G \quad (\alpha \text{ bir kuplaj sâbiti})$$

alınırsa bu takdirde  $f_G(G) = 1$  olacağından, (4.10) denklemi

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - \frac{1}{2} g_{ab} G \\ - \left( -2RR_{ab} + 4R_{ac}R^c_b - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd} \right) + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.11)$$

denkleme indirgenir. Oysa, (4.9) aksiyonunda  $f(G) \equiv G$  alındığı takdirde bunun bir topolojik invaryant olduğu, yani diverjansının sıfır olduğu gösterilebilir; dolayısıyla orijinal alan denklemlerine bu terimden dolayı bir katkı gelmez. O halde (4.11) den orijinal Einstein Alan Denklemlerine düşülmesi için

$$-2RR_{ab} + 4R_{ac}R^c_b - 2R_a^{cde}R_{bcde} - 4R_{acdb}R^{cd} = -\frac{1}{2} g_{ab} R \quad (4.12)$$

eşitliği özdeş olarak gerçekleşmelidir. Bunun (4.3) e taşınmasıyla,  $F(R, G)$ -gravitenin alan denklemleri

$$\begin{aligned} F_R R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} F - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R + \frac{1}{2} g_{ab} R F_G \\ - 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R + 2g_{ab} R \square F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ + 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\ - 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_a^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.13)$$

olur. Şimdi, bu denklemi, (1+3)-Kovaryant Ayrışım Yöntemine uyarlamak için orijinal Einstein Alan Denklemlerine benzetmek istiyoruz. Bunun için sol tarafa  $-\frac{1}{2} g_{ab} R F_R$  terimini ekleyip çıkaralım. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} F_R \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) - \frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R) - \nabla_a \nabla_b F_R + g_{ab} \square F_R + \frac{1}{2} g_{ab} R F_G \\ - 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R + 2g_{ab} R \square F_G - 4R_{ab} \square F_G \\ + 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c + 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\ - 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} - 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_a^{cd} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.14)$$

ya da yalnızca birinci terimi solda tutarak

$$\begin{aligned}
F_R G_{ab} = & -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m + \frac{1}{2} g_{ab} (F - R F_R) + \nabla_a \nabla_b F_R - g_{ab} \square F_R - \frac{1}{2} g_{ab} R F_G \\
& + 2(\nabla_a \nabla_b F_G) R - 2g_{ab} R \square F_G + 4R_{ab} \square F_G \\
& - 4(\nabla_c \nabla_a F_G) R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b F_G) R_a^c \\
& + 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d F_G) R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d F_G) R_a^{cd}
\end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir.  $G_{ab}$  yi solda yalnız bırakmak için her iki tarafı  $F_R$  ye bölmektense,  $F(R, G)$  fonksiyonunu

$$F(R, G) \equiv R + \alpha \Psi(R, G) \quad (4.16)$$

biçiminde seçelim. Burada  $\alpha$  bir kuplaj sâbitidir. Bu takdirde

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + \alpha \Psi(R, G) - 2\Lambda] + S_m \quad (4.17)$$

aksiyonu,  $\Psi(R, G)$  nin orijinal EAD'de bir düzeltme terimi rolü oynadığını açıkça göstermektedir.

(4.16) seçimi altında

$$F_R = 1 + \alpha \Psi_R, \quad F_G = \alpha \Psi_G \quad (4.18)$$

olacağından (4.15) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
G_{ab} = & -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \\
& + \alpha \left\{ \frac{1}{2} g_{ab} \Psi - R_{ab} \Psi_R - g_{ab} \square \Psi_R + \nabla_a \nabla_b \Psi_R - \frac{1}{2} g_{ab} R \Psi_G \right. \\
& + 2(\nabla_a \nabla_b \Psi_G) R - 2g_{ab} R \square \Psi_G + 4R_{ab} \square \Psi_G \\
& - 4(\nabla_c \nabla_a \Psi_G) R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b \Psi_G) R_a^c \\
& \left. + 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R_a^{cd} \right\}
\end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklini alır.  $F(R, G)$ -gravitenin alan denklemlerinin bu şekli; sıradan (normal) madde alanlarını gösteren  $T_{ab}^m$  enerji-momentum tansörüne ek olarak, bir de

$$\begin{aligned}
T_{ab}^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} & \left\{ \frac{1}{2} g_{ab} \Psi - R_{ab} \Psi - g_{ab} \square \Psi + \nabla_a \nabla_b \Psi - \frac{1}{2} g_{ab} G \Psi \right. \\
& + 2(\nabla_a \nabla_b \Psi_G) R - 2g_{ab} R \square \Psi_G + 4R_{ab} \square \Psi_G \\
& - 4(\nabla_c \nabla_a \Psi_G) R_b^c - 4(\nabla_c \nabla_b \Psi_G) R_a^c \\
& \left. + 4g_{ab} (\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R^{cd} + 4(\nabla_c \nabla_d \Psi_G) R_a^{cd} \right\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde gösterebilecek bir efektif enerji-momentum tansörü tanımlamaya olanak sağlamaktadır. Tamamen eğrilik terimlerinden oluşan bu tansöre efektif eğrilik tansörü demek uygun olacaktır. Böyle bir tanımın anlamlı olduğunu görmek üzere, bunu kullanarak (4.19) u

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 (T_{ab}^m + T_{ab}^{RG}) \tag{4.21}$$

biçiminde ve

$$T_{ab}^{(et)} \equiv T_{ab}^m + T_{ab}^{RG} \tag{4.22}$$

ile de bir efektif toplam (kısaca (et) ile gösterilecek) enerji-momentum tansörü tanımlayarak

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{(et)} \tag{4.23}$$

biçiminde yazarız. Son denklem, şeklen Einstein Alan Denkleminde başka birşey değildir. Dolayısıyla, iki kere büzülmüş Bianchi Özdeşliklerinden

$$\nabla^a G_{ab} \equiv 0 \Rightarrow \nabla^a T_{ab}^{(et)} \equiv 0 \tag{4.24}$$

elde edilir. Bu, efektif toplam enerji-momentum tansörünün korunum kanunudur. Öte yandan, (4.20) tanımından hareketle, uzun bir hesap sonrası  $T_{ab}^{RG}$  nin de korunduğu, yani

$$\nabla^a T_{ab}^{RG} = 0 \Rightarrow \nabla^a T_{ab}^m = 0 \tag{4.25}$$

olduğu gösterilebilir [33].



Sıradan madde akışına bağlanan  $T_{ab}^m$  madde-enerji tansörünün, 4-lü bir  $u^a$  hız vektörüyle hareket eden gözlemciye göre akışkanın dinamik büyüklükleri cinsinden ifâdesi

$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} + 2q_{(a}^m u_{b)} + \pi_{ab}^m \quad (4.26)$$

idi. Burada söz konusu büyüklükler

$$\mu^m = T_{ab}^m u_a u_b \quad (4.27)$$

$$p^m = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^m \quad (4.28)$$

$$q_a^m = -h_a^b u^c T_{bc}^m \quad (4.29)$$

$$\pi_{ab}^m = h_{(a}^c h_{b)}^d T_{cd}^m - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^m h_{ab} \quad (4.30)$$

bağıntılarıyla tanımlanmıştır. Benzer şekilde efektif eğrilik akışkanına bağlanan enerji-momentum tansörü de

$$T_{ab}^{RG} = \mu^{RG} u_a u_b + p^{RG} h_{ab} + 2q_{(a}^{RG} u_{b)} + \pi_{ab}^{RG} \quad (4.31)$$

olacak ve söz konusu efektif dinamik değişkenler de

$$\mu^{RG} = T_{ab}^{RG} u_a u_b \quad (4.32)$$

$$p^{RG} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{RG} \quad (4.33)$$

$$q_a^{RG} = -h_a^b u^c T_{bc}^{RG} \quad (4.34)$$

$$\pi_{ab}^{RG} = h_{(a}^c h_{b)}^d T_{cd}^{RG} - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^{RG} h_{ab} \quad (4.35)$$

şeklinde tanımlanacaktır. Öte yandan, benzer bağıntıları bir de efektif  $T_{ab}^{(et)}$  enerji-momentum tansörü için de yazarsak

$$T_{ab}^{(et)} = \mu^{(et)} u_a u_b + p^{(et)} h_{ab} + 2q_{(a}^{(et)} u_{b)} + \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.36)$$

ve

$$\mu^{(et)} = T_{ab}^{(et)} u_a u_b \quad (4.37)$$

$$p^{(et)} = \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^{(et)} \quad (4.38)$$

$$q_a^{(et)} = -h_a^b u^c T_{bc}^{(et)} \quad (4.39)$$

$$\pi_{ab}^{(et)} = h_{(a}^c h_{b)}^d T_{cd}^{(et)} - \frac{1}{3} h^{cd} T_{cd}^{(et)} h_{ab} \quad (4.40)$$

olur. (4.22) bağıntısından dolayı, bu 3 tip dinamik değişkenlerin birbirlerine

$$\mu^{(et)} = \mu^m + \mu^{RG} \quad (4.41)$$

$$p^{(et)} = p^m + p^{RG} \quad (4.42)$$

$$q_a^{(et)} = q_a^m + q_a^{RG} \quad (4.43)$$

$$\pi_{ab}^{(et)} = \pi_{ab}^m + \pi_{ab}^{RG} \quad (4.44)$$

bağıntılarıyla bağlı olduğu kolayca görülür.

## 4.2. EFEKTİF EĞRİLİK AKIŞKANININ DİNAMİK DEĞİŞKENLERİNİN HESABI

Şimdi, (4.20) yi kullanarak (4.32 – 4.35) bağıntılarıyla tanımlı efektif dinamik değişkenleri hesaplamak istiyoruz. Bu iş için önce (4.20) yi daha tıkHz bir biçimde yazalım.

$$S_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \Psi_R \quad , \quad M_{ab} \equiv \nabla_a \nabla_b \Psi_G \quad (4.45)$$

$$S \equiv \square \Psi_R \equiv \nabla^a \nabla_a \Psi_R, \quad M \equiv \square \Psi_G \equiv \nabla^a \nabla_a \Psi_G \quad (4.46)$$

olmak üzere

$$\Delta_{ab} \equiv S_{ab} - g_{ab} S \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} \Omega_{ab} \Psi_G &\equiv 2R \nabla_a \nabla_b \Psi_G - 2R g_{ab} \square \Psi_G + 4R_{ab} \square \Psi_G - 4R_b^c \nabla_c \nabla_a \Psi_G \\ &\quad - 4R_a^c \nabla_c \nabla_b \Psi_G + 4g_{ab} R^{cd} \nabla_c \nabla_d \Psi_G + 4R_a^{cd} \nabla_b \nabla_c \Psi_G \\ &= 2RM_{ab} - 2RM g_{ab} + 4MR_{ab} - 4R_b^c M_{ca} - 4R_a^c M_{cb} \\ &\quad + 4g_{ab} R^{cd} M_{cd} + 4R_a^{cd} M_{cd} \end{aligned} \quad (4.48)$$

gibi iki kısaltma tanımlayalım. Bunlar aracılığıyla (4.20) bağıntısı

$$T_{ab}^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2} g_{ab} \Psi(R, G) - R_{ab} \Psi_R(R, G) + \Delta_{ab} \Psi_R(R, G) - \frac{1}{2} g_{ab} G \Psi_G + \Omega_{ab} \Psi_G \right\} \quad (4.49)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi, (4.23) denklemini ele alalım ve bunu

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{(et)} \quad (4.50)$$

şeklinde yazalım.

$$T^{(et)} = g^{ab} T_{ab}^{(et)} \quad (4.51)$$

olmak üzere iz denklemi

$$-R = -4\Lambda + \kappa^2 T^{(et)} \quad (4.52)$$

olacağından, bu (4.49) a yerleştirilirse

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left( T_{ab}^{(et)} - \frac{1}{2} g_{ab} T^{(et)} \right) \quad (4.53)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı için,  $g_{ab} = h_{ab} - u_a u_b$  izdüşüm bağıntısı ve (4.36) ile (4.51) kullanılırsa

$$R_{ab} = \left[ \frac{\kappa^2}{2} (\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) - \Lambda \right] u_a u_b + \left[ \frac{\kappa^2}{2} (\mu^{(et)} - p^{(et)}) + \Lambda \right] h_{ab} + 2\kappa^2 q_{(a}^{(et)} u_{b)} + \kappa^2 \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.54)$$

bulunur. Bu bağıntı,  $R_{ab}$  nin açılımının

$$\Delta = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) - \Lambda \quad (4.55)$$

$$\Xi = \frac{\kappa^2}{2} (\mu^{(et)} - p^{(et)}) + \Lambda \quad (4.56)$$

$$\Upsilon_a = \kappa^2 q_a^{(et)} \quad (4.57)$$

$$\Sigma_{ab} = \kappa^2 \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.58)$$

bağıntılarıyla tanımlı dört parametre cinsinden

$$R_{ab} = \Delta u_a u_b + \Xi h_{ab} + 2\Upsilon_{(a} u_{b)} + \Sigma_{ab} \quad (4.59)$$

biçiminde olacağını söylemektedir [32]. Bunun izi ise

$$R = -\Delta + 3\Xi = \kappa^2 (\mu^{(et)} - 3p^{(et)}) + 4\Lambda \quad (4.60)$$

olur.

Şimdi (4.32 – 4.35) bağıntılarıyla tanımlanan efektif dinamik değişkenlerin hesabına dönebiliriz. Hesapların çok uzun olması nedeniyle ayrıntılarını göstermek yerine hesaplarda kullanılan bazı önemli bağıntıları aşağıda listelemekle yetineceğiz.

(4.59) dan elde edilebilecek bağıntılar şunlardır:

$$R_{ab}u^a u^b = \Delta = \frac{1}{2} \kappa^2 (\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) \quad (4.61)$$

$$R_{ab}h^a{}_c h^b{}_d = \Xi h_{cd} + \Sigma_{cd} \Delta = \frac{1}{2} \kappa^2 (\mu^{(et)} - p^{(et)}) h_{cd} + \kappa^2 \pi_{cd}^{(et)} \quad (4.62)$$

$$R_{ab}h^a{}_c u^b = -\Upsilon_c = \kappa^2 q_c^{(et)} \quad (4.63)$$

$$R_{ab}h^{ab} = 3\Xi = \frac{3}{2} \kappa^2 (\mu^{(et)} - p^{(et)}) \quad (4.64)$$

$$R_{ab}u^a = -\Delta u_b - \Upsilon_b \quad (4.65)$$

$$R_{ac}u^a R_b{}^c u^b = -\Delta^2 + \Upsilon_c \Upsilon^c \quad (4.66)$$

Öte yandan, Weyl Tansörünün

$$R_{acdb} = C_{acdb} + \frac{1}{2} (R_{ad} g_{cb} - R_{ab} g_{cd}) - \frac{1}{2} (R_{cd} g_{ab} - R_{cb} g_{ad}) - \frac{R}{6} (R_{ad} g_{cb} - R_{ab} g_{cd}) \quad (4.67)$$

tanım bağıntısı ise şu bağıntılara yol açar.

$$R_{acdb}u^a u^b = -E_{cd} - \frac{1}{3} \Delta h_{cd} + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \quad (4.68)$$

$$R_{acdb}u^a u^b R^{cd} = -E_{cd} \Sigma^{cd} - \Delta \Xi + \frac{1}{2} \Sigma_{cd} \Sigma^{cd} \quad (4.69)$$

Gauss-Bonnet teriminin ifadesi için ise, uzun hesaplardan sonra

$$\begin{aligned}
G &= R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd} \\
&= -\frac{4}{3}\Delta^2 - 4\Delta\Xi + 4\Upsilon_a\Upsilon^a - 2\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} + C^2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

bulunur. Burada  $C^2$ , Weyl tansörünün karesi olup yine uzun bir hesaptan sonra

$$C^2 = C_{abcd}C^{abcd} = 8(E_{ab}E^{ab} + H_{ab}H^{ab}) \tag{4.71}$$

ile verildiği gösterilebilir.

Sonuç olarak, efektif eğrilik akışkanına bağlanan efektif dinamik değişkenlerin ifadeleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
\mu^{RG} &= T_{ab}^{RG} u_a u_b \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ -\frac{1}{2} \Psi(R, G) + \frac{1}{2} G \Psi_G \right. \\
&\quad + \Psi_{GG} \left[ \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (D^c D_c G - \theta \dot{G}) - 4 \left( E^{cd} + \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_d G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right] \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[ \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D^c G D_c G - 4 \left( E^{cd} + \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right] \\
&\quad \left. + \Psi_R [-\Delta] + \Psi_{RR} [-\theta \dot{R} + D^b D_b R] + \Psi_{RRR} [D^b R D_b R] \right\}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
p^{RG} &= \frac{1}{3} T_{ab}^{RG} h^{ab} \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2} \Psi(R, G) - \frac{1}{2} G \Psi_G \right. \\
&\quad + \Psi_{GG} \left[ \frac{8}{9} \Delta (D^a D_a G - \theta \dot{G}) + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) (\ddot{G} - \dot{u}^a D_a G) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{8}{3} \Upsilon^c (D_c \dot{G} - \nu_c^f D_f G) - \frac{4}{3} \left( E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_a G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right] \right. \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[ \frac{8}{9} \Delta D^a G D_a G + \frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{G}^2 + \frac{8}{3} \dot{G} \Upsilon^c D_c G \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4}{3} \left( E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D^c G \right] \right. \\
&\quad + \Psi_R [-\Xi] \\
&\quad + \Psi_{RR} \left[ \frac{2}{3} \theta \dot{R} - \dot{u}^b D_b R + \ddot{R} - \frac{2}{3} D^b D_b R \right] \\
&\quad \left. + \Psi_{RRR} \left[ \dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^b R D_b R \right] \right\} \tag{4.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_a^{RG} &= -T_{bc}^{RG} h^b_a u^c \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ \Psi_{GG} \left[ -\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) D_a \dot{G} + 2(\Delta - \Xi) \nu_a^f D_f G \right. \right. \\
&\quad + 2\Upsilon_a (D^c D_c G - \theta \dot{G}) - 2\Upsilon^f (D_f D_a G - \nu_{fa} \dot{G}) \\
&\quad \left. \left. + 4 \left( E_a^f + \frac{1}{2} \Sigma_a^f \right) (D_f \dot{G} - \nu_f^d D_d G) - 4\eta_a^{eg} H_g^f (D_e D_f G - \nu_{ef} \dot{G}) \right] \right. \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[ -\frac{2}{3} (\Delta + 3\Xi) \dot{G} D_a G + 2\Upsilon_a D^c G D_c G - 2\Upsilon^f D_f G D_a G \right. \\
&\quad \left. \left. + 4 \left( E_a^f + \frac{1}{2} \Sigma_a^f \right) \dot{G} D_f G - 4\eta_a^{eg} H_g^f D_e G D_f G \right] \right. \\
&\quad + \Psi_R [-\Upsilon_a] \\
&\quad + \Psi_{RR} [-D_a \dot{R} + \nu_a^d D_d R] \\
&\quad \left. + \Psi_{RRR} [-\dot{R} D_a R] \right\} \tag{4.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{ab}^{RG} &= T_{(ab)} - \frac{1}{3} h_{cd} T^{cd} h_{ab} \\
&= \frac{\alpha}{\kappa^2} \left\{ \Psi_{GG} \left[ -\frac{4}{3} \Delta (D_a D_b G - \nu_{ab} \dot{G}) - 2 (\Upsilon_a D_b \dot{G} + \Upsilon_b D_a \dot{G}) + 2 (\Upsilon_a \nu^c{}_b + \Upsilon_b \nu^c{}_a) D_c G \right. \right. \\
&\quad + 4 (\dot{u}^c D_c G - \ddot{G}) \left( E_{ab} + \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) - 4 (D^c D_c G - \theta \dot{G}) \left( E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) \\
&\quad + 4 \left( E_a{}^c - \frac{1}{2} \Sigma_a{}^c \right) (D_b D_c G - \nu_{bc} \dot{G}) + 4 \left( E_b{}^c - \frac{1}{2} \Sigma_b{}^c \right) (D_c D_a G - \nu_{ca} \dot{G}) \\
&\quad + 4 (\eta_a{}^{cd} H_{db} + \eta_b{}^{cd} H_{ad}) (D_c \dot{G} - \nu_c{}^f D_d G) \\
&\quad \left. + \left( \frac{4}{9} \Delta (D^c D_c G - \theta \dot{G}) + \frac{4}{3} \Upsilon^c (D_c \dot{G} + \nu_c{}^d D_d \dot{G}) - \frac{8}{3} \left( E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) (D_c D_d G - \sigma_{cd} \dot{G}) \right) h_{ab} \right] \\
&\quad + \Psi_{GGG} \left[ -\frac{4}{3} \Delta D_a G D_b G - 2 \dot{G} (\Upsilon_a D_b G + \Upsilon_b D_a G) \right. \\
&\quad - 4 \left( E_{ab} - \frac{1}{2} \Sigma_{ab} \right) (D^c G D_c G - \dot{G}^2) + 4 \left( E_a{}^c - \frac{1}{2} \Sigma_a{}^c \right) D_b G D_c G \\
&\quad + 4 \left( E_b{}^c - \frac{1}{2} \Sigma_b{}^c \right) D_a G D_c G + 4 \dot{G} (\eta_a{}^{cd} H_{db} + \eta_b{}^{cd} H_{ad}) D_c G \\
&\quad \left. + \left( \frac{4}{9} \Delta D^c G D_c G + \frac{4}{3} \dot{G} \Upsilon^c D_c G - \frac{8}{3} \left( E^{cd} - \frac{1}{2} \Sigma^{cd} \right) D_c G D_d G \right) h_{ab} \right] \\
&\quad + \Psi_R [-\Sigma_{ab}] \\
&\quad + \Psi_{RR} [-\sigma_{ab} \dot{R} + D_{<a} D_{b>} R] \\
&\quad + \Psi_{RRR} [D_{<a} R D_{b>} R] \}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Yukarıdaki ifadelerde

$$\Psi_R = \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad , \quad \Psi_{RR} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} \quad , \quad \Psi_{RRR} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial R^3} \tag{4.76}$$

$$\Psi_G = \frac{\partial \Psi}{\partial G} \quad , \quad \Psi_{GG} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial G^2} \quad , \quad \Psi_{GGG} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial G^3} \tag{4.77}$$

ile  $R$  ve  $G$  değişkenlerine göre kısmî türevler gösterilmektedir. “Nokta”lar ise  $u^a$  doğrultusundaki kovaryant türevi göstermekte olup

$$\dot{R} = u^a \nabla_a R \quad , \quad \ddot{R} = (\dot{R})' \tag{4.78}$$



$$\dot{G} = u^a \nabla_a G \quad , \quad \ddot{G} = (\dot{G})' \quad (4.79)$$

dir.

### 4.3. EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİNİN $F(R,G)$ -GRAVİTE TEORİSİNE GENELLEŞTİRİLMESİ

1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi, esas olarak, bir akışkanın  $u^a$  4-lü hız vektörüne göre kinematik ve dinamik değişkenleri arasındaki ilişkiyi geometrik olarak ifade etmeye dayanır. Akışkanın kinematik büyüklükleri yalnızca geometri aracılığıyla tasvir edilebilirken, dinamik değişkenlerin formalizme dahil edilmesi bir gravitasyon teorisi aracılığıyla olur. GRT’de bu;  $T_{ab}^m$ , sıradan (normal) maddenin enerji-momentum tansörü olmak üzere

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \quad \Leftrightarrow \quad R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left( T_{ab}^m - \frac{1}{2} g_{ab} T^m \right) \quad (4.80)$$

biçimindeki EAD ile oluyordu. Bu,  $R_{ab}$  yi, madde akışkanının dinamik büyüklüklerine bağlamak için bir cebirsel yerine yerleştirme rolü görüyordu.

$F(R,G)$ -gravite’de ise, (4.23) de yazıldığı gibi

$$G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^{(et)} \quad \Leftrightarrow \quad R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left( T_{ab}^{(et)} - \frac{1}{2} g_{ab} T^{(et)} \right) \quad (4.81)$$

için aynı benzer durum söz konusudur. Ancak, bu sefer sıradan madde değişkenleri yerine

$$T_{ab}^{(et)} = T_{ab}^m + T_{ab}^{RG} \quad (4.82)$$

olmak üzere efektif toplam dinamik değişkenler bulunmaktadır. O halde, evrim ve bağ denklemlerini  $F(R,G)$ -graviteye genelleştirmek için Rölativist Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerinde  $\mu$ ,  $p$ ,  $q_a$  ve  $\pi_{ab}$  yerine (4.41 – 4.44) ve (4.72 – 4.73) ile tanımlı  $\mu^{(et)}$ ,  $p^{(et)}$ ,  $q_a^{(et)}$  ve  $\pi_{ab}^{(et)}$  ifadelerini yazmak yeterli olacaktır. Ancak,  $F(R,G)$ -gravite için

$$\nabla^a T_{ab}^{\text{efektif toplam}} = 0 \quad (4.83)$$

den kaynaklanan iki denkleme ek olarak

$$\nabla^a T_{ab}^m = 0 \quad (\text{veya } \nabla^a T_{ab}^{RG} = 0) \quad (4.84)$$

dan kaynaklanan iki denklem daha yazmak gerekecektir.

Bu söylenenler ışığında  $F(R,G)$ -graviteye uyarlanmış evrim ve bağ denklemleri, uygun sıralama ve adlandırmayla şunlar olacaktır.

## EVRİM DENKLEMLERİ

### Raychaudhuri Denklemi:

$$\dot{\theta} - D_a \dot{u}^a = -\frac{1}{3}\theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu^{(et)} + 3p^{(et)}) + \Lambda \quad (E_1)$$

### Girdap Yayılım Denklemi:

$$\dot{\omega}^a - \frac{1}{2}\eta^{abc} D_b \dot{u}_c = -\frac{2}{3}\theta\omega^a + \sigma^a_b \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (E_2)^a$$

**Makaslama Yayılım Denklemi:**

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} - (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) + \sigma_{ac} \sigma^c_b + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} - \dot{u}_a \dot{u}_b \\ + \omega_a \omega_b + \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} = - \left( E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)} \right) \end{aligned} \quad (\mathbf{E}_3)_{ab}$$

**Gravitasyonel-Elektrik Yayılım Denklemi:**

$$\begin{aligned} \left( \dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^{(et)} \right) - \left( E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_b - \left( E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_a \\ - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H^f_b + \eta_{bef} D^e H^f_a) + \frac{1}{4} (D_a q_b^{(et)} + D_b q_a^{(et)}) - \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^{(et)} \\ = - \frac{1}{2} (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a^{(et)} \dot{u}_b + q_b^{(et)} \dot{u}_a) + \frac{1}{3} h_{ab} q_e^{(et)} \dot{u}^e - \theta \left( E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)} \right) \\ + \frac{3}{2} \sigma^e_a \left( E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be}^{(et)} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e_b \left( E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^{(et)} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left( E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^{(et)} \right) \\ - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[ \left( E^e_b + \frac{1}{2} \pi^e_b{}^{(et)} \right) \omega^f + 2H^e_b \dot{u}^f \right] \\ - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[ \left( E^e_a + \frac{1}{2} \pi^e_a{}^{(et)} \right) \omega^f + 2H^e_a \dot{u}^f \right] \end{aligned} \quad (\mathbf{E}_4)_{ab}$$

**Gravite -Magnetik Yayılım Denklemi:**

$$\begin{aligned} \dot{H}_{ab} - (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left( E^f_b - \frac{1}{2} \pi^f_b{}^{(et)} \right) + \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left( E^f_a - \frac{1}{2} \pi^f_a{}^{(et)} \right) \\ = -\theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c_b + H_{bc} \sigma^c_a) \\ - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b^{(et)} + \omega_b q_a^{(et)}) - \frac{1}{2} \omega^c q_c^{(et)} h_{ab} \\ + (\eta_{aef} E^e_b + \eta_{bef} E^e_a) \dot{u}^f \\ - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H^e_b + \eta_{bef} H^e_a) \omega^f \\ + \frac{1}{4} (\eta_{ae}{}^f \sigma^e_b + \eta_{be}{}^f \sigma^e_a) q_f^{(et)} \end{aligned} \quad (\mathbf{E}_5)_{ab}$$

**Efektif Toplam Madde Korunum Denklemi:**

$$\dot{\mu}^{(et)} + \nabla^a q_a^{(et)} = (\mu^{(et)} + p^{(et)})\theta - 2q_a^{(et)}\dot{u}^a - \pi_{ab}^{(et)}\sigma^{ab} \quad (EE_6)$$

**Efektif Toplam Momentum Korunum Denklemi:**

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{(et)} + D_a p^{(et)} + D^b \pi_{ab}^{(et)} = & -(\mu^{(et)} + p^{(et)})\dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^{(et)} \\ & - \frac{4}{3}\theta q_a^{(et)} + u_a \dot{u}^b q_b^{(et)} - \pi_{ab}^{(et)}\dot{u}^b + \eta^{abc} q_b^{(et)}\omega_c \end{aligned} \quad (EE_7)_a$$

**BAĞ DENKLEMLERİ****Makaslama Bağ Denklemi:**

$$0 = (C_1)_a = D_b \sigma_a^b - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_a^{bc} D_b \omega_c + 2\eta_a^{bc} \dot{u}_b \omega_c + q_a^{(et)}$$

**Girdap Bağ Denklemi:**

$$0 = (C_2) = D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a$$

**Gravito-Magnetik Bağ Denklemi:**

$$\begin{aligned} 0 = (C_3)_{ab} = & H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} \\ & - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma^f_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f_a) + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) \end{aligned}$$

**Gravito-Elektrik Diverjans:**

$$0 = (C_4)_a = D_b \left( E^b{}_a + \frac{1}{2} \pi^b{}_a{}^{(et)} \right) - \frac{1}{3} D_a \mu^{(et)} \\ - \frac{1}{2} \sigma^b{}_a q_b{}^{(et)} + \frac{1}{3} \theta q_a{}^{(et)} - \eta_{ae}{}^f \left( \sigma^{eb} H_{fb} - \frac{3}{2} \omega^e q_f{}^{(et)} \right) - 3 H^b{}_a \omega_b$$

**Gravito-Magnetik Diverjans:**

$$0 = (C_5)_a = D_b H^b{}_a + \frac{1}{2} \eta_{ae}{}^f D^e q_f{}^{(et)} \\ + (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \omega_a + 3 \left( E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}{}^{(et)} \right) \omega^b + \eta_{ae}{}^f \sigma^{eb} \left( E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}{}^{(et)} \right)$$

Yukarıda yazılan evrim ve bağ denklemleri standart rölativist kozmolojideki denklemlerle aynı formda olmasına karşın;  $F(R, G)$ -Gravite teorisi,  $T_{ab}{}^m$  ve  $T_{ab}{}^{RG}$  nin korunum denklemlerinden, iki takım denklem daha vermektedir. Bunlar:

$\nabla^a T_{ab}{}^m = 0$  den elde edilen:

**Sıradan (normal) Madde Korunum Denklemi:**

$$\dot{\mu}^m = -D_a q^{am} - (\mu^m + p^m) \theta - 2q^{am} \dot{u}_a - \pi^{abm} \sigma_{ab} \quad (\text{E}_6)$$

ve

**Sıradan (normal) Madde Momentum Korunum Denklemi:**

$$\dot{q}_a{}^m = -D_a p^m - D^b \pi_{ab}{}^m - (\mu^m + p^m) \dot{u}_a - \sigma_a{}^b q_b{}^m \\ - \frac{4}{3} \theta q_a{}^m + u_a \dot{u}^b q_b{}^m - \pi_{ab}{}^m \dot{u}^b + \eta_a{}^{bc} q_b{}^m \omega_c \quad (\text{E}_7)_a$$

dir.

$\nabla^a T_{ab}^{RG} = 0$  den elde edilenler ise:

**Efektif Eğrilik Madde Korunum Denklemi:**

$$\dot{\mu}^{RG} = -D_a q^{aRG} - (\mu^{RG} + p^{RG})\theta - 2q^{aRG}\dot{u}_a - \pi^{abRG}\sigma_{ab} \quad (\text{EEE}_6)$$

ve

**Efektif Eğrilik Momentum Korunum Denklemi:**

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{RG} = & -D_a p^{RG} - D^b \pi_{ab}^{RG} - (\mu^{RG} + p^{RG})\dot{u}_a - \sigma_a^b q_b^{RG} \\ & - \frac{4}{3}\theta q_a^{RG} + u_a \dot{u}^b q_b^{RG} - \pi_{ab}^{RG} \dot{u}^b + \eta_a^{bc} q_b^{RG} \omega_c \end{aligned} \quad (\text{EEE}_7)_a$$

dir.

Burada, bu son iki denklemin (4.82)den dolayı diğer dört korunum denkleminin bağımsız olmadığına dikkat çekelim.

#### 4.4. $F(R, G)$ -GRAVİTE'DE STATİK EINSTEIN EVRENİ'NİN VARLIĞI

2. Bölüm'de söz edildiği üzere GRT'de static Einstein evreni  $k = +1$  olmak ve  $a(t) = \text{sabit}$  için (2.1.2) metriğiyle, yani,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a_0^2(t) \left[ dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta) d\phi^2 \right] \quad (4.85)$$

ile temsil edilir ve uzay-zamanın  $R$  Ricci Skaler Eğriliği,  $a_0$ 'a

$$R = \frac{6}{a_0^2} = \text{sabit} \quad (4.86)$$

bağıntısıyla bağlıdır. Model statik olduğu için

$$\theta = 0 \quad , \quad \sigma_{ab} = 0 \quad , \quad \omega_{ab} \text{ (veya } \omega_a) = 0 \quad \text{ve} \quad \dot{u}_a = 0 \quad (4.87)$$

dır. Ayrıca, metrik konform olarak düz olduğundan

$$C_{abcd} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{ab} = H_{ab} = 0 \quad (4.88)$$

dır. Özetle, tüm dinamik ve kinematik büyüklükler sabit ve homojendir, yani, ne zaman ne de uzaya bağlı değildir.

Şimdi, bu kinematik kısıtlamalar altında  $F(R,G)$ -gravite'nin evrim ve bağ denklemlerinin ne vereceğini inceleyelim. Modelin basitliğinden beklenildiği üzere, denklemler aşırı bir biçimde sadeleşirler ve geriye kalanlar

$$(E_1) \quad : \quad 0 = -\frac{1}{2}\kappa^2 \left( \mu^{(et)} + 3p^{(et)} \right) + \Lambda \quad (4.89)$$

$$(E_3)_{ab} \quad : \quad 0 = \frac{1}{2}\kappa^2 \pi_{ab}^{(et)} \quad (4.90)$$

$$(E_6) \quad : \quad \dot{\mu}^m = 0 \quad (4.91)$$

$$(EE_6) \quad : \quad \dot{\mu}^{(et)} = 0 \quad (4.92)$$

$$(E_7)_a \quad : \quad \dot{q}_a^m = 0 \quad (4.93)$$

$$(EE_7)_a \quad : \quad \dot{q}_a^{(et)} = 0 \quad (4.94)$$

$$(C_1)_a \quad : \quad q_a^{(et)} = 0 \quad (4.95)$$

olurken diğerleri de özdeş olarak sıfır olur.

Öte yandan (4.72 – 4.75) bağıntıları ise

$$\mu^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( -\frac{1}{2} \Psi - \Delta \Psi_R + \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.96)$$

$$p^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( \frac{1}{2} \Psi - \Xi \Psi_R - \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.97)$$

$$q_a^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} (-\Upsilon_a \Psi_R) \quad (4.98)$$

$$\pi_{ab}^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} (-\Sigma_{ab} \Psi_R) \quad (4.99)$$

ifadelerine indirgenir.

(4.41 – 4.44) ve (4.55 – 4.58) bağıntıları kullanılarak (4.90 – 4.95) ten

$$q_a^{(et)} = 0 \quad , \quad \pi_{ab}^{(et)} = 0 \quad (4.100)$$

$$\Upsilon_a = q_a^{RG} = q_a^m = 0 \quad (4.101)$$

$$\Sigma_{ab} = \pi_{ab}^{RG} = \pi_{ab}^m = 0 \quad (4.102)$$

$$\mu^{(et)} = \text{sabit} \quad , \quad \mu^m = \text{sabit} \quad , \quad \mu^{RG} = \text{sabit} \quad (4.103)$$

$$p^{(et)} = \text{sabit} \quad , \quad p^m = \text{sabit} \quad , \quad p^{RG} = \text{sabit} \quad (4.104)$$

oldukları kolaylıkla bulunur.

(4.101) ve (4.102) bağıntıları, sıradan maddenin enerji-momentum tansörünün, Einstein evreninde mükemmel akışkanınki gibi, yani,



$$T_{ab}^m = \mu^m u_a u_b + p^m h_{ab} \quad (4.105)$$

biçiminde olması gerektiği sonucunu vermektedirler.

Şimdi (4.96) yı

$$\mu^{(et)} + 3p^{(et)} = \frac{2}{\kappa^2} \Lambda \quad (4.106)$$

şeklinde yazalım. Öte yandan (4.60) tan

$$\mu^{(et)} - 3p^{(et)} = \frac{1}{\kappa^2} (R - 4\Lambda) \quad (4.107)$$

olur. Bu son iki denklemden

$$\mu^{(et)} = \frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) \quad (4.108)$$

ve

$$p^{(et)} = -\frac{1}{6\kappa^2} (R - 6\Lambda) \quad (4.109)$$

çekilir. Eğer bunlar (4.55) ve (4.56) ya taşınırsa

$$\Delta = 0 \quad \text{ve} \quad \Xi = \frac{1}{3} R \quad (4.110)$$

bulunur. Bu takdirde (4.96) ve (4.97)

$$\mu^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( -\frac{1}{2} \Psi + \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.111)$$

$$p^{RG} = \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( \frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{3} R \Psi_R - \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.112)$$

ve bunlar da (4.41) ve (4.42) ye taşınırsa

$$\mu^{(et)} = \mu^m + \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( -\frac{1}{2} \Psi + \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.113)$$

$$p^{(et)} = p^m + \frac{\alpha}{\kappa^2} \left( \frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{3} R \Psi_R - \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.114)$$

elde edilir. Bu bağıntılara (4.108) ve (4.109) yerleştirilir ve  $\mu^m$  ile  $p^m$  çekilirse

$$\kappa^2 \mu^m = \frac{R}{2} - \Lambda - \alpha \left( -\frac{1}{2} \Psi + \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.115)$$

$$\kappa^2 p^m = -\frac{R}{6} + \Lambda - \alpha \left( \frac{1}{2} \Psi - \frac{1}{3} R \Psi_R - \frac{1}{2} G \Psi_G \right) \quad (4.116)$$

elde edilir.

$$p^m = w \mu^m \quad (4.117)$$

şeklinde bir hâl denklemi kabul edilirse son iki bağıntıdan, sonuçta

$$\alpha \left[ 2R \Psi_R + 3(1+w) G \Psi_G - 3(1+w) \Psi \right] - (1+3w)R + 6(1+w)\Lambda = 0 \quad (4.118)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu Dunsby ve diğ [ ] nin  $f(R)$ -gravite için bulmuş olduğu denklemin  $F(R,G)$ -graviteye genelleştirilmesini oluşturmaktadır. (4.103) ve (4.104) ten ötürü  $w$  parametresinin sabit olduğu görülmektedir.

(4.13) denklemi, bilinmeyen  $\Psi(R,G)$  fonksiyonunun kısmî türevli diferansiyel denklemidir. Amacımız, bu denklemin statik Einstein evrenini çözüm kabul etmesi için  $\Psi(R,G)$  fonksiyonunu belirlemektir.

Denklemi biraz daha basitleştirmek için

$$F(R,G) = R + \alpha \Psi(R,G) \quad (4.119)$$

dönüşümü uygulayalım. Bu takdirde (4.118)

$$2RF_R + 3(1+w)GF_G - 3(1+w)F + 6(1+w)\Lambda = 0 \quad (4.120)$$

denkleme dönüşür.

Öte yandan, (4.119) dönüşümü altında, (4.115) ve (4.116) sırasıyla

$$\kappa^2 \mu^m = -\Lambda + \frac{1}{2}(F - GF_G) \quad (4.121)$$

$$\kappa^2 p^m = +\Lambda + \frac{1}{3}RF_R - \frac{1}{2}(F - G\Psi_G) \quad (4.122)$$

olur. Taraf tarafa toplayarak

$$\kappa^2 (\mu^m + p^m) = \frac{1}{3}RF_R$$

bulunur. Bu denklemin sol tarafı sıfır olamaz, zira statik Einstein Evreni için (4.86) bağıntısından dolayı

$$\text{ya} \quad R = \frac{6}{a_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \infty$$

$$\text{ya da} \quad F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F(R,G) = \text{Sabit}$$

sonuçlarını verirdi. Dolayısıyla, bir  $F(R, G)$ -gravite'de maddesiz, ya da  $w = -1$  için, Einstein Evreni var olamaz.

Şimdi,  $w \neq -1$  için (4.120) denklemini ele alalım.

Bu takdirde Lagrange yardımcı denklemi

$$\frac{dR}{2R} = \frac{dG}{3(1+w)G} = \frac{dF}{3(1+w)(F-2\Lambda)} \quad (4.123)$$

yazılırsa, ilk eşitlik integre edildiğinde,  $C$  bir integrasyon sabiti olmak üzere

$$G = CR^{\frac{3}{2}(1+w)} \quad (4.124)$$

bulunur. Bunun bir statik Einstein Evreni çözümü olması için

$$R = \frac{6}{a_0^2} \quad \text{ve} \quad G = 0 \quad (4.125)$$

olmalıdır ( $G = 0$  denklemi (4.70) ifadesine Einstein Evreninin  $0 = \Delta = \Upsilon_a = \Sigma_{ab} = C$  parametreleri koyularak elde edilmiştir). (4.124) denklemi, (4.125) ile değerlendirilirse  $C = 0$  bulunur ki bu, (4.123) denkleminin çözümünün olmadığı anlamına gelir. Bu:  $F(R, G)$ -gravite teorisinin, statik Einstein Evrenini çözüm olarak kabul etmediği anlamına gelmektedir.

Buna karşılık, acaba  $F(R, G)$ -gravite'nin özel hali olan  $F(R)$ -gravite'de statik Einstein Evreni çözümü var mıdır? Bunu görmek için (4.120) de  $G = 0$  alalım. Denklem

$$2RF_R - 3(1+w)F + 6(1+w)\Lambda = 0$$

olur. Bu Goswami ve diğ. [31] nin makalesindeki (14) nolu denklemdir. Yazarlar, Einstein Evreninin çözüm olması için

$$K = \frac{4\Lambda}{1+3w} \left[ \frac{1+3w}{6\Lambda(1+w)} \right]^{\frac{3}{2}(1+w)}$$

olmak üzere  $F(R)$  nin  $R$  ye bağılılığını

$$F(R) = 2\Lambda + KR^{\frac{3}{2}(1+w)}$$

biçiminde bulmuşlardır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Standart kozmolojinin 1+3 Kovaryant Ayrışım Formalizmi çerçevesinde elde edilmiş evrim ve bağ denklemleri, bir akışkan olarak düşünülebilecek madde-enerjinin kinematik ve dinamik davranışını hem gözlemciden bağımsız, hem de birbirleriyle tutarlı ve uyumlu genel denklemlerle tasvir etmektedir. Yöntem esas olarak Riemann Tansöründen bilgi çıkarılamayı amaçladığından, bir alan denklemine yalnızca,  $R_{ab}$  Ricci tansörünü maddeye bağlama aşamasında gereksinim göstermektedir. EAD'de bu bağlanma, doğrudan doğruya sıradan maddeye olmaktadır. Buna karşılık,  $F(R,G)$ -gravite teorisinde böyle bir bağlanma ancak efektif bir akışkan tasavvur edildiğinde mümkün olabilmektedir. Bunun sonucunda, efektif akışkanın doğal olarak efektif dinamik büyüklükleri yalnızca sıradan maddenin dinamik büyüklüklerine değil, fakat aynı zamanda kinematik büyüklükler ile geometriye de bağlı olmaktadır. Bu durumun fiziksel bir yorumu tartışmalı olmakla birlikte kullanılan yaklaşım amaca uygun sonuç vermektedir. Biz de bu formellik olanağını kullanarak, Rölativist Kozmolojinin evrim ve bağ denklemlerini (4.72) – (4.75) de tanımlı efektif dinamik değişkenler aracılığıyla  $F(R,G)$ -gravite teorisi çerçevesine genelleştiremedik. Bu evrim ve bağ denklemlerinin uygulamasına bir örnek olmak üzere en basit kozmolojik model olarak kabul edilebilecek Einstein Statik Modelini göz önüne aldık ve bu modelin kinematik ve geometrik özellikleri ışığında evrim ve bağ denklemlerini sonuçta  $F(R,G)$  fonksiyonel formunu verecek şekilde tek bir kısmî diferansiyel denkleme indirgedik. Bu denklem Goswami ve diğerlerinin  $F(R)$ -gravite için bulmuş olduğu denklemin  $F(R,G)$ -graviteye genelleştirilmesini oluşturmaktadır.

Adı geçen yazarlardan tamamen farklı bir biçimde ulaştığımız bu denklem bildiğimiz kadarıyla kimse tarafından ele alınmamıştır. Bu denklem, çok açık bir şekilde  $F(R,G)$ -gravite teorisi çerçevesinde statik Einstein Evreni çözümünün bulunmadığını göstermektedir.  $F(R)$ -gravite teorisinde, statik Einstein Evreni çözümünün var, fakat

$F(R,G)$  de var olmamasının bir nedeninin  $G$  Gauss-Bonnet teriminin sıfır olmasından kaynaklandığını düşünmekteyiz. Nedeni ise,  $G=0$  durumu (4.123)de gösterilen Lagrange yardımcı denkleminde tekilliğe yol açmasıdır. Bunun geçerli bir açıklama olup olmayacağı ise ancak  $G$  nin sıfırdan farklı olduğu başka modeller göz önüne almakla mümkün olacaktır. O halde  $G$  nin sıfırdan farklı olduğu, mesela de Sitter modeli gibi modeller göz önüne alındığında bu konu daha da açıklığa kavuşmuş olacaktır ki, bu da, bundan sonraki çalışmalarımızın bir konusunu oluşturacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1]. S. PERLMUTTER et al., 1999, *Astrophysics Journal*, “Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  From 42 High-Redshift Supernovae”, 517,565.
- [2]. A. G. RIESS et al., 1998, *Astrophysics J.*, “Observational Evidence From Supernovae for an Accelerating Universe and A Cosmological Constant”, 116, 1009.
- [3]. A. G. RIESS et al., 1999, *Astrophysics J.*, “BV RI Light Curves for 22 Type Ia Supernovae”, 117, 707.
- [4]. NICOLSON, I., N., 2007, *Dark Side of The Universe* Canopus Publishing Limited.
- [5]. SOTIRION, T. P., 2007, *Modified Actions For Gravity: Theory and Phenomenology*, PhD Thesis, International School for Advanced Studies, Trieste, Italy.
- [6]. E. J. COPELAND, SAMI, M., TSUJIKAWA, S., 2006, “Dynamics of dark energy”, <http://xxx.lanl.gov> , arxiv:hep-th/0603057 v2, [tarih: 14 Şubat 2013, saat:12:25].
- [7]. ÖZEMRE, A.Y., 1982, *Gravitasyonun Rölativist Teorileri*, Teorik Fizik Dersleri, İst. Üniv. Yay. 2952, Fen Fak., Cild 7, Sayı 168, s. 159 – 164.
- [8]. BUCHDAHL, H. A., 1970, Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 150, 1.
- [9]. RIPPL, S., VAN ELST, H., TAVAKOL, R., TAYLOR, D., 1996, Kinematics and Dynamics of  $f(R)$  Theories of Gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 193.
- [10]. MAARTENS,R., TAYLOR, D., 1994, Fluid Dynamics in Higher Order Gravity, *Gen. Rel. Grav.*,26, 599.
- [11]. QUERELLA, L., 1998, *Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity*, Doktora Tezi, Universite De Liege, Institut d’astrophysique et de gCophysique.
- [12]. NOJIRI,S., ODINTSOV, S.D., 2005, Modified Gauss Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy, *Phys. Letter. B*, 631:1-6, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:hep- th/0508049, [tarih:8 Haziran 2012, saat:17:30].



- [13]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., 2006, *Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0601213, [tarih: 22 Aralık 2011, saat: 16:15].
- [14]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., 2007, Modified gravity as an alternative for  $\Lambda$  CDM cosmology, *J. Phys. A.*, 40:6725-6732, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0610164, [tarih: 9 Kasım 2013, saat: 15:30].
- [15]. LI, B., BARROW, J.D., MOTA, D.F., 2007, The Cosmology of Modified Gauss-Bonnet Gravity, *Phys. Rev D.* 76, 044027 , <http://xxx.lanl.gov> , e-print: gr-qc/0705.3795, [tarih: 3 Şubat 2013, saat: 23:10].
- [16]. NEUPANE, I. P., 2007, *Constraints on Gauss-Bonnet Cosmologies*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0711.3234v2, [tarih: 19 Nisan 2012, saat: 10:50].
- [17]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S., D., GORBUNOVA, O., G., 2005, *Dark Energy Problem: from Phantom Theory to Modified Gauss-Bonnet Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0510183v2, [tarih: 15 Eylül 2011, saat: 18:20].
- [18]. KOIVISTO, T., MOTA, D., F., 2006, *Cosmology and Astrophysical Constraints of Gauss-Bonnet Dark Energy*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: astro-ph/0606078v2, [tarih: 12 Kasım 2012, saat: 19:30].
- [19]. DAVIS, S. C., 2008, *Solar System Constraints on  $f(G)$  Dark Energy*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0709.4453v3, [tarih: 5 Ocak 2013, saat: 11:20].
- [20]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S., D., SASAKI, M., 2005, Gauss-Bonnet Dark Energy, *Phys. Rev. D.* 71, 123509.
- [21]. IVANOV, M. M., TOPORENSKY, A. V., 2011, “Cosmological Dynamics of Fourth Order Gravity with Gauss-Bonnet Term”, <http://xxx.lanl.gov>, arxiv:11.065179v2[gr-qc] , [tarih: 7 Mart 2012, saat: 18:45].
- [22]. BAMBA, K., ODINTSOV, S., SEBASTIANI, L., ZERBINI, S., 2010, “Finite-Time Future Singularities in Modified Gauss-Bonnet and F(R,G) Gravity and Singularity Avoidance”, <http://xxx.lanl.gov>, arxiv:0911.4390 v2[hep/th] , [tarih: 3 Mayıs 2012, saat: 22:50].
- [23]. SEBASTIANI, L., 2012, “General Aspects of Modified Theories of Gravity”, PhD Thesis Università Degli Studi di Trento.
- [24]. CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., CAPOZZIELLO, S., TROISI, A., 2005, Cosmological Dynamics of  $R^n$  Gravity, *Class. Quantum Grav.* **22** 4839.
- [25]. ANANDA, K. N., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, Evolution of Cosmological Gravitational Waves in  $f(R)$  Gravity, *Phys. Rev. D* **77**, 024033.

- [26]. ANANDA, K. N., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, *A Detailed Analysis of Structure Growth in  $f(R)$  Theories of Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: [0809.3673v1](http://arxiv.org/abs/0809.3673v1) [astro-ph] , [tarih:17 Mayıs 2012, saat:22:50].
- [27]. CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., TROISI, A., 2008, Evolution of Density Perturbations in  $f(R)$  Gravity, *Phys. Rev. D* 77, 024024.
- [28]. CARLONI, S., ANANDA, K. N., DUNSBY, P. K. S., ABDELWAHAB, M. E. S. 2008, *Unifying the Study of Background Dynamics and Perturbations in  $f(R)$ -gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:[0812.2211v1](http://arxiv.org/abs/0812.2211v1) [astro-ph], [tarih:7 ocak 2012, saat:13:45].
- [29]. GOHEER, N., GOSWAMI, R., DUNSBY, P. K. S., ANANDA, K., 2009, Coexistence of Matter Dominated and Accelerating Solutions in  $f(G)$  Gravity, *Phys. Rev. D* 79, 121301.
- [30]. CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., TROISI, A., 2009, *Cosmological Dynamics of fourth Order Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:[0906.1998v1](http://arxiv.org/abs/0906.1998v1) [gr-qc], [tarih:24 Temmuz 2011, saat:21:55].
- [31]. GOSWAMI, R., GOHEER, N., DUNSBY, P. K. S., 2008, The Existence of Einstein Static Universes and Their Stability in Fourth Order Theories of Gravity, *Phys. Rev. D* 78, 044011.
- [32]. SOFUOĞLU, D., Hazırlanmakta, *Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyonda Makaslamaşız Kozmik Akışkan İddiası*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [33]. ELLIS, G., 1971, Relativistic Cosmology, General Relativity and Cosmology, *Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi"*, Course XLVII, Academic Press, 104.
- [34]. ELLIS, G., 1973, *Relativistic Cosmology, Cargese Lectures in Physics*, Gordon and Breach, Vol. 6, Ed: E. Schatzman, New York, 6.
- [35]. VAN ELST, H., 1996, *Extensions and Applications of 1+3 Decomposition Methods in General Relativistic Cosmological Modelling*, Doktora Tezi, Queen Mary, Westfield College, London, United Kingdom.
- [36]. GÜDEKLİ, E., 2004, *Bianchi Tip Çözümlerde Ufuk-Eşyönlüleşme Meseleleri*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [37]. SOFUOĞLU, D., 2008, *Konvansiyonel Kozmolojinin Tetrad Teoremleri ve Zarevren Kozmolojisindeki Benzerleri*, Yüksek Lisans Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [38]. SOFUOĞLU, D., 2012, Effect of the Bulk on Shear-free Dynamics in Brane-world Cosmologies, *Turkish Physical Society 29<sup>th</sup> International Physics Congress Books of Abstract*, 5-8 September 2012, Bodrum, Turkey, 345.

[39]. YILMAZ, D., SOFUOĞLU, D., 2012, Generalization of the Consistency Analysis in Irrotational Cosmological Models, *Turkish Physical Society 29<sup>th</sup> International Physics Congress Books of Abstract*, 5-8 September 2012, Bodrum, Turkey, 351.

## **ÖZGEÇMİŞ**

12.11.1984 tarihinde Erzincan'da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi 1998 yılında Osmaniye İlköğretim Okulu'nda (Bakırköy,İstanbul), lise öğrenimimi 2002 yılında Bahçelievler Süper (Y.D.A) Lisesi'nde (Bahçelievler, İstanbul) tamamladım. 2004-2006 yılları arasında, İstanbul Aydın Üniversitesi Anadolu Bil Meslek Yüksek Okulu'nda Bilgisayar Teknolojisi ve Programlama Bölümü'nü (Bahçelievler,İstanbul) tamamladıktan sonra, 2006-2010 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nde (Vezneciler, İstanbul) üniversite öğrenimimi tamamladım ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programı'nda yüksek lisans öğrenimime başladım.

**MERAL ERMAN**