



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYONDA
DÖNMESİZ MODELLER**

Derya YILMAZ
Fizik Anabilim Dalı
Matematiksel Fizik Programı

Danışman
Prof.Dr. Haşim MUTUŞ

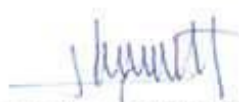
Mayıs, 2013

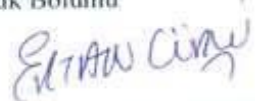
İSTANBUL

Bu çalışma 03/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi


Prof. Dr. Haşim MUTUŞ
Danışmanın Adı Soyadı (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fizik Bölümü


Prof. Dr. Hasan TATLIPINAR
Yıldız Teknik Üniversitesi
Fizik Bölümü


Yard. Doç. Dr. Ertan GÜDEKLİ
İstanbul Üniversitesi
Fizik Bölümü


Prof. Dr. K. Gediz AKDENİZ
İstanbul Üniversitesi
Fizik Bölümü


Doç. Dr. Kubilay BALCI
İstanbul Üniversitesi
Fizik Bölümü

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımlarının yanısıra, tez konumu belirleyen çok değerli danışmanım Prof. Dr. Haşim MUTUŞ'a, aynı zamanda benden sabrını, desteğini ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Araş. Gör. Değer SOFUOĞLU'na, ve de çalışmalarım boyunca her daim yanımda olduklarını hissettiğim sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs, 2013

Derya YILMAZ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR.....	4
2.1. EINSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİ DEĞİŞTİRME GİRİŞİMLERİ.....	4
2.1.1. Rölativist Kozmoloji ve Problemleri.....	7
2.1.1a Standard Model.....	7
2.1.1b Karanlık Madde Ve Karanlık Enerji.....	8
2.2. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM.....	9
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	12
3.1. RİEMANN GEOMETRİSİNİN ELEMANLARI.....	12
3.1.1. Notasyon Ve Kabuller.....	12
3.1.2. Metrik.....	14
3.1.3. Kovaryant Türev.....	14
3.1.4. Eğrilik.....	15

3.1.5. Weyl Tansörü.....	17
3.2. UZAY – ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI.....	18
3.2.1. Einstein Alan Denklemleri.....	18
3.2.2. İzdüşürme Tansörleri.....	19
3.2.3. 1+3 Kovaryant Ayrışım.....	20
3.2.4. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri.....	23
3.2.5. Efektif Hacim Elemanı.....	25
3.2.6. Weyl Tansörünün Ayrışımı.....	26
3.2.7. Enerji – Momentum Tansörü.....	27
3.2.8. Evrim Ve Bağ Denklemleri.....	29
3.3. F(R) – GRAVİTE TEORİSİNİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN ÇIKARTILMASI.....	32
4. BULGULAR.....	39
4.1. F(R) – GRAVİTE ALAN DENKLEMLERİNİN EFEKTİF ENERJİ YORUMU.....	39
4.2. F(R) – GRAVİTE KOZMOLOJİSİNDE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ.....	48
4.3. TUTARLILIK VE UYUMLULUK ANALİZİ.....	51
4.3.1. $\omega=0$ Kısıtlaması Altında Evrim Ve Bağ Denklemleri.....	53
4.3.1a Tutarlılık Analizi.....	55
4.3.1b Uyumluluk Analizi.....	57
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	59
KAYNAKLAR	61
EK A	65

ÖZGEÇMİŞ.....	68
----------------------	-----------

SEMBOL VE KISALTMA LİSTESİ

g_{ab}	: Uzay-Zamanın Metriği
R_{abcd}	: Riemann Eğrilik Tansörü
R_{ab}	: Ricci Tansörü
R	: Ricci Skaler Eğriliği
C_{abcd}	: Weyl Tansörü
E_{ab}	: Weyl Tansörünün Elektriksel Kısmı
H_{ab}	: Weyl Tansörünün Magnetik Kısmı
G_{ab}	: Einstein Tansörü
Λ	: Kozmolojik Sabit
T_{ab}	: Enerji-Momentum Tansörü
κ^2	: Kuplaj Sabiti
G	: Newton Gravitasyon Sabiti
c	: Işık Hızı
u^a	: 4-lü hız vektörü
Σ	: Hiperyüzey
U_{ab}	: Paralel İzdüşürme Tansörü
h_{ab}	: Dik İzdüşürme Tansörü
\dot{u}_a	: İvme
μ	: Madde-Enerji Yoğunluğu

p	: Eşyönlü Basınç
q_a	: Momentum Yoğunluğu veya Enerji Akısı
π_{ab}	: Eşyönsüz Basınç Tansörü
θ_{ab}	: Genişleme Tansörü
θ	: Genişleme Skalari
σ_{ab}	: Makaslama Tansörü
σ	: Makaslama Skalari
ω_{ab}	: Girdap Tansörü
ω_a	: Girdap (Dönme) Vektörü
ω	: Dönme Skalari
η_{abcd}	: 4-boyutlu Permütasyon Tansörü (Hacim Elemanı)
ε_{abcd}	: 4-boyutlu Levi-Civita Sembolü
η^{abc}	: 3-uzay efektif hacim elemanı (3-uzay Levi-Civita sembolü)
Γ^a_{bc}	: Christoffel Sembolleri
S_{EH}	: Einstein-Hilbert aksiyonu
S_Λ	: Kozmolojik sabite ilişkin aksiyon
S_M	: Madde-enerji aksiyonu
\mathcal{L}_M	: Maddenin Lagrange Yoğunluğu
GRT	: Genel Rölativite Teorisi
DUG	: Değişikliğe Uğratılmış Gravite
ÖRT	: Özel Rölativite Teorisi
Λ CDM	: Lambda Cold Dark Matter (Λ Soğuk Karanlık Madde)
EH	: Einstein-Hilbert

EAD : Einstein Alan Denklemleri
FLRW : Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
RW : Robertson-Walker
DEH : Değiştirilmiş Einstein-Hilbert

ÖZET

YÜKSEK MERTEBEDEN EĞRİLİKLİ GRAVİTASYONDA DÖNMESİZ MODELLER

Standart Rölativist Kozmolojinin (1+3)-kovaryant formalizmini yüksek mertebeden bir gravitasyon teorisi olan değiştirilmiş $f(R)$ -gravite çerçevesinde ele alıyoruz. Kozmolojik evrim ve bağ denklemlerinin tamamını yazıyor ve bunları dönmesiz ivmeli mükemmel olmayan akışkan haline kısıtlayarak tüm bağ denklemleri için tutarlılık ve uyumluluk analizlerini gerçekleştiriyoruz. Bağ denklemlerinin birbirleri ile tutarlı olduğunu ve tutarlı bir biçimde evrimleştiklerini buluyoruz.

SUMMARY

IRROTATIONAL MODELS IN HIGH ORDER CURVATURE GRAVITY

The (1+3)-covariant formalism of the Standard Relativistic Cosmology is considered in the framework of modified $f(R)$ -gravity which is a higher order gravity theory. We write the full cosmological evolution and constraint equations and then by restricted them to the case of an irrotational imperfect fluid with acceleration we carry out a full consistency and compatibility analysis for all constraints. We find that the constraint equations are consistent with each other, and they evolve consistently.

1.GİRİŞ

Einstein'ın 1916'da ileri sürmüş olduğu Genel Rölativite Teorisi (kısaca GRT), gravitasyonu, 4-boyutlu bir Riemansal uzay-zamanın eğriliği diliyle tasvir eder; yani, Newton Teorisi'ndeki etkiyen kuvvetler yerine madde-enerji alanları tarafından eğrileştirilmiş metrik bir uzay-zaman vardır ve Riemann tansörüyle tasvir edilen eğriliğin, madde-enerji kaynaklarına yerel olarak nasıl bağlı olduğu da Einstein Alan Denklemleri (kısaca EAD) aracılığıyla belirlenir.

GRT, Güneş Sistemi ölçeğinde, Merkür'ün perihel noktasının ilerlemesi, ışığın gravitasyonel saptırılması gibi testleri başarıyla geçmiş durumdadır. Dahası, ilk defa 1917'de Einstein tarafından gerçekleştirildiği üzere, evrenin bütününe uygulandığında evren için bir model sunabilme özelliği de göstermiştir. Ve günümüze kadar da evreni modellendirme ve gözlemsel verileri inceleyip yorumlama yolunda en çok rağbet gören bir teori olmaya devam etmektedir.

GRT'nin Einstein Alan Denklemlerine dayandırılarak yapılan çalışmaların çerçevesine Rölativist Kozmoloji veya Standard Kozmoloji veyahut da Konvansiyonel Kozmoloji denir.

Einstein'ın; 1905'te Özel Rölativite Teorisini ileri sürmesinden itibaren, bu teoriyi genelleştirmek üzere tam 11 yıl boyunca – birtakım yanılğı ve başarısızlıklar da yaşayarak – uğraşp da vardığı EAD'yi uygun bir Lagrange' yenden hareketle bir varyasyon ilkesiyle bir çırpıda elde etmek mümkündür. Bunu ilk yapan Hilbert olmuştur. Hilbert, Einstein'ın GRT'yi yayınlamadan önce vermiş olduğu bir seminerden esinlenerek, 4-boyutlu uzay-zamanın R Ricci Skaler Eğriliğini Lagrange' yen olarak aldığı aksiyondan hareketle, metriğe göre bir varyasyonla EAD'nin geometrik kısmını elde etmeyi başarmış ve hatta bu sonucu Einstein'ın EAD'yi

yayınlanmasından birkaç ay önce de yayınlamıştır. Einstein-Hilbert (EH) aksiyonu denilen bu aksiyon, Riemansal geometrinin eğrilik invaryantlarından yalnızca R Ricci Skaler Eğriliğini ve onu da lineer bir biçimde içermektedir.

EAD' nin geometrik kısmının bir varyasyon ilkesinden elde edilebilir olması, GRT' nin bir klasik alan teorisi yapısında olduğunu göstermektedir. Nasıl ki, madde-enerji Lagrange' yeni hakkında pek değişik seçimler (skaler alan, elektromagnetik alan, vb...) yaparak EAD' nin sağ yanı olan madde-enerji tansörünü amaca uygun almak mümkünse, benzer yaklaşımı "geometrik" Lagrange' yen için de gösterip EAD' nin sol yanındaki geometrik tansörü farklı şekillerde inşa etmek mümkündür. Bu ikinci yaklaşımın kullanılmasıyla elde edilen teoriler "Değişikliğe Uğratılmış Gravite (DUG)" olarak anılmaktadır. Bu tip teorilerin özel bir sınıfını ve de en basitini, EH- aksiyonunda R eğrilik skaleri yerine $f(R)$ gibi R nin analitik keyfi bir fonksiyonunu almak oluşturmaktadır. Böyle elde edilmiş teorilere " $f(R)$ – gravite " adı verilmektedir. Ve bizim bu çalışmamız da bu teori çerçevesinde olacaktır.

Aksiyonda, değişik eğrilik invaryantları alma girişimlerinin tarihçesi 1920' lerin başlarına kadar gider. Bu tür aksiyonlar, 1960' larda, gravitasyonun kuvantizasyonunu amaçlayan Kuantum Gravite Teorisi çerçevesinde tekrar ele alınmışlardır. Son 15 yıldır yoğun bir biçimde gündemde olmalarının nedeni ise 1998 yılında Kozmoloji' de yapılan önemli bir keşif oluşturmaktadır. O tarihte elde edilen ve o günden bugüne daha da çeşitlendirilen gözlem verileri, kuşkuyla yer bırakmayacak bir kesinlikle, evrenimizin günümüzde ivmeli bir genişleme sürecinde bulunduğuna işaret etmektedir. Bu ivmeli genişleme için pek çok açıklama teklif edilmiştir. Karanlık Enerji Meselesi olarak da bilinen bu konuda, $f(R)$ –gravite teorisine dayalı kozmoloji ($f(R)$ –kozoloji) alternatif bir açıklama olarak yoğun bir ilgi görmektedir.

EH–aksiyonunun $f(R)$ ile değişikliğe uğratılması, EAD' nin sol yanına düzeltme terimleri olarak da nitelendirilen yeni geometrik terimler getirmekte ve bunun sonucunda da, metriğe göre en fazla ikinci mertebeden uzay ve zaman türevleri içeren orijinal EAD, dördüncü mertebeden denklemlere dönüşmektedir. Bu özellikten dolayı $f(R)$ –gravite' ye yüksek mertebeden eğrilikli gravitasyon teorisi de denilmektedir. Bu

özelliikli teorilerde, her ne kadar yeni alan denklemlerinin matematiksel olarak ele alınıp işlenmesi son derece zorlaşsa da, serbestlik derecelerinin artması göz önünde bulundurulduğunda, Kozmoloji açısından çok daha zengin bir yapı ve yeni olanaklar ortaya çıkmaktadır. Bu görüş açısından bakıldığında, $f(R)$ -kozmooloji' sinin, Einstein'ın orijinal alan denklemlerine dayalı Rölativist Kozmoloji' ye nispetle ne tür farklılıklar getireceğini araştırmak anlamlı olmaktadır ve bu da bu Tez' in dayandığı noktalardan biri olacaktır.

Biz bu Tez'de, Rölativist Kozmoloji' deki 1+ 3 kovaryant evrim ve bağ denklemlerinin, $f(R)$ -kozmooloji' sine genelleştirilmesini ele alacağız ve bu kozmoloji çerçevesinde, dönmenin olmadığı kısıtlanmış durum için söz konusu denklemlerin tutarlılık ve uyumluluk analizini gerçekleştireceğiz. Bu, evrim ve bağ denklemlerinin, söz konusu kısıtlama altında $f(R)$ -kozmooloji' si çerçevesinde integre edilebilir olup olmadıklarını araştırmak demektir.

Çalışmamız, Roy Maartens' in Rölativist Kozmoloji çerçevesinde yapmış olduğu çalışmasındaki [1] metodolojiyi takip edecektir; şu farkla ki, Roy Maartens tutarlılık ve uyumluluk analizini ivmesiz durum ve maddenin de “ toz (basınçsız madde) ” olması durumu için ele almaktadır. Bizde ise hem ivme sıfırdan farklı kabul edilecek ve hem de madde-enerji tansörü en genel şekilde hesaba katılacaktır.

Çalışma planımız şöyle olacaktır: Genel Kısımlar Bölümünde, önce, EAD' yi değişikliğe uğratma girişimlerinin hareket noktaları hakkında bir özet bilgi veriyor ve sonra da Rölativist Kozmolojinin 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemini kısaca tanıtıyoruz. Malzeme ve Yöntem Bölümünün amacı, hem notasyon ve kavramları tanıtmak, hem de Bulgular Bölümü' nde kullanılacak evrim ve bağ denklemlerinin nasıl elde edilmiş olduklarını göstermek olacaktır. Bu Bölüm' de, aynı zamanda $f(R)$ -gravite' nin alan denklemlerinin çıkarımını da açıklamaktayız. Tez' imizin özgün kısmını oluşturan Bulgular Bölümü' nde ise, önce, evrim ve bağ denklemlerini $f(R)$ -gravite' ye genelleştiriyor ve dönmesiz durum kısıtlaması altında bunların tutarlılık ve uyumluluk analizini sunuyoruz. Tartışma ve Sonuç Bölümü' nde ise, izlenen yöntemin bir değerlendirilmesi yapılmaktadır.

2.GENEL KISIMLAR

2.1. EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİNİ DEĞİŞTİRME GİRİŞİMLERİ

Günümüzde “Değişikliğe Uğratılmış Gravite” ve de “Alternatif Gravitasyon Teorileri” terimlerinden, gravitasyon etkileşmelerini en iyi tasvir ettiği düşünülen ve dolayısıyla standard ya da konvansiyonel olduğu kabul edilen Einstein’ ın 1916’ da ileri sürmüş olduğu orijinal Genel Rölativite Teorisi (GRT)’ nden farklı teoriler kastedilmektedir. Bu tür girişimlerin tarihçesi 1920’ lerin başına kadar gitmekle birlikte, aslında, GRT’ nin orijinal alan denklemlerinin ilk değişikliğe uğratılması 1917’ de bizzat Einstein tarafından yapılmıştır. Einstein, eylemsizliğin maddeye göre olduğunu söyleyen Mach İlkesine uymak [2] ve diğer yandan da statik bir evren modeli inşa edebilmek arzusuyla başlangıçta

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.1)$$

biçiminde teklif etmiş olduğu alan denklemlerini, Kozmolojik sabit adını verdiği bir Λ parametresiyle

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (2.2)$$

biçiminde değişikliğe uğratma gereksinimi duymuştur.

Ama daha sonraları (1929’ da) evrenin genişlediğine işaret eden gözlemsel veriler ortaya çıkınca bu Λ parametresinden vazgeçmiş ve bunu da “ hayatımın en büyük hatasıydı ” biçiminde ifade etmiştir. Ancak, ilerleyen yıllarda, gerek Parçacık Fiziği açısından, gerekse birtakım kozmolojik problemlerin halli için böyle bir Λ parametresine gereksinim olduğu yönünde güçlü bir eğilim ortaya çıkmıştır. Bu konuya birazdan daha ayrıntılı olarak değinilecektir.

1916' da ileri sürülmesinden bu yana gravitasyonu, EAD' yi değişikliğe uğratarak tasvir etme yönünde pek çok girişim bulunmaktadır. Bu girişimlerin motivasyonunu: a) merak ve teorik tamamlayıcılık, b) birtakım özel gözlemleri açıklamaktaki güçlükler, c) çok iyi kurgulanmış diğer teorilerle uyumsuzluk d) ve de teklikten yoksunluk gibi etkenler oluşturmaktadır. Bu yöndeki tüm çalışmalara değinmek bu Tez kapsamında mümkün görünmediğinden aşağıda, yalnızca, $f(R)$ – gravite teorisinin ortaya çıkmasına yol açan bazı gelişmeleri özetlemeye çalışacağız.

GRT' nin temellerinde yapılabilecek değişikliklerle (burulmalı uzay- zaman, çift metrik vb...), EAD' den farklı alan denklemlerine varmanın mümkün olmasının yanı sıra GRT' nin Lagrange' yen formülasyonundan da yola çıkarak böyle bir amaç gerçekleştirilebilir. Giriş' de değinildiği gibi, EAD' yi ; S_{madde} , maddeyi temsil eden Lagrange' yenden (daha doğrusu Lagrange yoğunluğu) oluşturulmuş aksiyon ve S_{EH} de

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.3)$$

ile tanımlı Einstein- Hilbert (EH) aksiyonu olmak üzere

$$S_{toplam} = S_{EH} + S_{madde} \quad (2.4)$$

aksiyonundan , g_{ab} metriğine göre bir varyasyonla elde edebilmek mümkündür [3,4,5]. (2.3) deki integrantı, yalnızca R Ricci Skaler Eğriliğini içermekte ve ayrıca buna göre de lineerdir. Bu integrantı, yüksek mertebeden eğrilik invariantları ile karmaşık bir biçimde ele almak doğrultusundaki girişimler ilk defa, sırasıyla Weyl ve Eddington tarafından 1919 ve 1922' de incelenmiştir [6,7]. Hiçbir görünür gözlemsel nedene dayandırılmayan ve yalnızca teorik bir tamamlayıcılık amacıyla yapılan bu değişiklikler ikiden daha yüksek mertebeden denklemlere yol açtığından ve bu özelliğe de sahip hiçbir fizik teorisine rastlanılmadığından, bu mesele üzerinde fazla durulmamıştır.

Ancak , 1960' ların başından itibaren, bu yaklaşımın, yani, EH–aksiyonunu yüksek mertebeden eğrilik invaryantlarıyla daha karmaşık bir biçimde değişikliğe uğratmak girişiminin, Kuantum Gravite Teorisi bağlamında bir anlam taşıyacağına dair emareler ortaya çıkmıştır. Şöyle ki; 1950' lerde ortaya çıkan ve GRT ile Kuantum Alan Teorisini uyuşturmayı amaçlayan Kuantum Gravite Teorisi (KGT), gravitasyonu kuantize etmek için, başlangıçta Elektromagnetizmaya başarıyla uygulanıp da Kuantum Elektrodinamiğine götüren konvansiyonel kuantizasyon yöntemleri GRT' ye uyguladığında, ortaya istenmeyen ıraksamalar çıkarması nedeniyle GRT' nin bu yollarla rönormalize olamayacağını göstermiştir. Ancak, 1960 başlarında önce, birinci halka rönormalizasyon için EH – aksiyonuna yüksek mertebeden eğrilik terimleri eklenmesi gerekliliği gösterilmiş ve daha sonra da böyle aksiyonların gerçekten de integre edilebilir oldukları kanıtlanmıştır. Ama yine de bu, herşeyin çözülmüş olduğu anlamına gelmemiştir. O günden bugüne normalizasyona bakışta da köklü değişiklikler olmuş ve “ efektif alan teorileri ” kavramı gibi daha modern görüşler ortaya çıkmıştır. Yakın zamanlardaki sonuçlar, kuantum düzeltmeleri veya Sicim Teorisi göz önüne alındığında, efektif düşük enerji gravitasyon aksiyonunun, yüksek mertebeden eğrilik invaryantları içermesi gerektiğini göstermektedirler (Konuyla ilgili kapsamlı bilgi [8] nolu kaynakta bulunabilir).

Yüksek mertebeden aksiyonlar, R^2 , $R_{ab}R^{ab}$, $R_{abcd}R^{abcd}$ vb. çok çeşitli eğrilik invaryantları içerebilirler. Biz bu Tez' imizde yalnızca, R ' nin keyfi bir fonksiyonu olan $f(R)$ ile değişikliğe uğratılmış EH–aksiyonunu yani

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int (f(R) - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.5)$$

yi göz önüne alacağız. Bu aksiyon ilk defa 1970' de Buchdall [9] tarafından etraflıca incelenmiştir. (2.5)' den elde edilen alan denklemlerini 3. Bölümde konu edeceğiz.

2.1.1. RÖLATİVİST KOZMOLOJİ VE PROBLEMLERİ

2.1.1.a. Standard Model

GRT, Yüksek Enerji Fiziği ve Parçacık Fiziğinin birleşiminden oluşan ve Standard Kozmolojik Model olarak anılan model, evrenin evrimi hakkında oldukça kabul görmüş bir senaryo sunmaktadır. Bu modelin temelinde, evrenin büyük ölçekte homojen ve eşyönlü olduğu varsayımı yatar. Homojenlikten, yaklaşık 10^8 ışık yılı boyutlarındaki bölgelerin – ki bu ortalama bir galaksi kümesi demektir- içerik bakımından aynı yapıya sahip olması kastedilmektedir. Eşyönlülük ise evrenin görünümünün doğrultuya bağlı olmaması anlamına gelmektedir. Bu iki varsayım üzerine kurulu olan Robertson-Walker (RW) metriği için EAD' nin çözümlerine Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (kısaca FLRW) çözümleri denilmektedir. Standard Model, bu çözümler üzerine kurulmuştur. Kozmoloji' nin ilk yıllarında, matematiksel hesapları basitleştirmek üzere uygun bir çalışma varsayımı olarak düşünülen homojenlik ve eşyönlülük, günümüz gözlemleriyle güçlü bir biçimde doğrulanmaktadır. Büyük patlamadan kaynaklanıp da bir kalıntı ışınım olarak günümüze ulaşan 2,73 K' lik ışınım (Kozmik Mikrodalga Arkafon Işınımı) 10^{-5} mertebesinde bir eşyönlük ortaya koymaktadır.

Standard Model' in, Büyük Patlama' nın 10^{-43} üncü saniyesinden itibaren günümüze kadar geçen 13-14 milyar yıllık sürede evrenin kinematik ve dinamik evrimine çizmiş olduğu senaryo genel hatlarıyla şöyledir [8,10,11] : İlk üç dakika içinde proton ve nötronların birleşmesiyle hidrojen ve helyum çekirdekleri oluşmaktadır. Çekirdek oluşumu (nükleosentez) denilen bu evreyi izleyen 10^5 yıl boyunca radyasyon (ışınım) ile madde, Thompson Saçılmasıyla etkileşmekte ve evren, radyasyonun egemen olduğu bir evre yaşamaktadır. Bu sürenin bitiminde sıcaklık 3000 K' e düşerken, proton ve elektronlar bir araya gelerek hidrojen oluşumuna yol açmaktadır. Yeniden–birleşme (rökombinasyon) diye anılan bu süreçte evren, maddenin egemen olduğu bir duruma geçmektedir. Maddeden ayrılan fotonlar evrenin genişlemesi süresinde enerjilerini kaybede kaybede günümüze kadar ulaşmışlardır. Bugün 2,73 K' lik sıcaklıkla gözlenen ışınım, yeniden – birleşme evresinin bitiminde yola çıkmış olan bu fotonlardan başkası değildir. Standart Model, evrenin bugünkü görünümünü almasını ise, yeniden– birleşme evresinin hemen sonrasında oluşan madde–yoğunluğu dalgalanmalarının

(flüktuasyonlarının) ortaya çıkmasına bağlamakta ve bunların da gelişip büyüyerek galaksi gibi kozmolojik yapıları meydana getirdiğini söylemektedir.

Standart Modelin başarılı bulunmasının önemli nedeni; pek çok olay için öngörülerinin – mesela, helyumun diğer hafif elementlere nispetle bolluğu gibi – gözlemler tarafından doğrulanmış olması oluşturmaktadır. Bununla birlikte, Standard Model’ in bu başarılarının yanında bazı konularda eksiklik ve de yetersizlikleri vardır. Bunların başlıcaları: tekillik, ufuk, eşyönlüleşme, uzaysal düzlük ve geniş ölçek yapılarının oluşumu meseleleridir. Bunların neden bir mesele oluşturduklarına kısaca değinelim. Gözlemler evrenin bugünkü görünümünün homojen ve eşyönlü olduğunu söylemenin yanısıra bir de uzayca düz olduğunu söylemektedir. Evrenin başlangıç homojensizlik ve eşyönsüzlüklerinden hareketle böyle bir duruma gelebilmesini açıklayabilmek için çok özel başlangıç koşulları varsaymak gerekmektedir. Keza geniş ölçekteki yapıların gözlenen bugünkü durumunu alabilmesi için de madde–yoğunluk dalgalanmalarının çok özel başlangıç spektrumuna sahip olmaları gerekmektedir. Yukarıdaki meselelere bir çözümü enflasyon (şişme) modeli getirmektedir. Buna göre, evren, daha ilk evrelerinde çok hızlı bir genişlemeye uğramış ve bu hızlı genişleme homojensizlikleri yayararak ve de seyrekleştirerek evrenin homojen, eşyönlü ve uzayca düz olmasını sağlamıştır. Bu hızlı genişleme mekanizması, ayrıca, geniş ölçekteki yapı oluşumunun kaynağı olan başlangıç yoğunluk dalgalarını da açıklayabilmektedir. Ancak, enflasyon modelinin tüm bu başarılarına rağmen, enflasyona neden olduğu varsayılan ve inflaton olarak adlandırılan kütesiz skaler alan şimdiye kadar hiçbir şekilde gözlenmiş değildir.

2.1.3.b. Karanlık Madde Ve Karanlık Enerji

Yukarıda kısaca değinilen meselelere ek olarak, yakın zamanlarda yapılan oldukça duyarlı gözlemler iki konuda daha Standard Model’ i zor durumda bırakmaktadır. Bunlardan ilki “ kayıp kütle “ ya da genel olarak kabul görmüş adlandırmayla “ karanlık madde ” denilen muammadır. Bu konu ilk defa, 1930’ lu yıllarda Zwicky’ nin, Samanyolu’ nun kollarının yörüngesel hızlarına ilişkin gözlem sonuçlarının yorumlanması sonucunda ortaya çıkmıştır [12]. Bugün, Hidrojen atomunun 21-cm çizgisinin Doppler kayması kullanılarak spiral galaksilerinin kollarının dönme hızları ölçüldüğünde, bunların galaksi merkezine uzaklığa göre, önce keskin bir biçimde arttığı ama belirli bir uzaklıktan sonra da sabitleştiği gözlenmiştir. Dönme eğrilerinin

düzleşmesi denilen bu gözlem sonucunu, galaksinin görünen (ışıklı) kütlesi açıklayamamaktadır ve açıklamak için de söz konusu kütle için yaklaşık 50 katı bir kütle gereksinim bulunmaktadır.

Benzer bir sonucu galaksi kümelerine ilişkin gözlemler de vermektedir. Işığın yayılımı süresince maruz kaldığı gravitasyonel sapmaların değerlendirilmesi, bu kümelere bilinenden daha fazla kütle olması gerektiğine işaret etmektedir. Gözlemler, evrenin toplam enerji içeriğinin %30' unun Karanlık Madde' den oluştuğu sonucuna sevk etmektedir. “ Kayıp Kütle “ ya da “ Soğuk Karanlık Madde ” olarak da adlandırılan böyle bir madde için pek çok aday ileri sürülmüşse de şimdiye kadar hiçbiri gözlemsel olarak ortaya konulamamıştır (Bu konuda ayrıntılı bilgi için [12] no' lu kaynağa bakılabilir).

Standart Model' i zora sokan ikinci bir konu da, ilk defa 1998' de gerçekleştirilen Süpernova gözlemleridir. Gözlemler evrenin ivmeli bir biçimde genişlediği sonucunu vermişlerdir ki bu herkes için büyük bir sürpriz olmuştur. Bu sonucu günümüze kadar yapılan başka gözlemler de güçlü bir biçimde desteklemiştir [12]. Evrenin genişlemesinin ivmeli olmasına neden olan bir itici kuvvetin kaynağı olduğu düşünülen bu bilinmeyen enerji şekline Karanlık Enerji denilmektedir ve bu da evrenin enerji içeriğinin %70' ini oluşturmaktadır. GRT çerçevesinde bu ivmeyi açıklamak için adaylardan biri Λ kozmolojik sabittir. Λ CDM (Λ -cold dark matter ya da Λ -soğuk karanlık madde) denilen bu modelde, Λ parametresini, istenilen ivmeli genişlemeyi elde edecek biçimde seçmek mümkündür. Ancak böyle ayarlanmış Λ -lı GRT, Güneş Sistemi' ne ilişkin testleri geçememektedir. Hızlı genişlemeyi açıklamak üzere daha pek çok aday bulunmaktadır ve bu konu son 15 yıl içinde yoğun bir araştırma alanı olmuştur. Bunlarla ilgili geniş bilgi [12] nolu kaynaklarından edinilebilir. Biz sadece, $f(R)$ -gravite' nin karanlık madde ve karanlık enerji meselelerini açıklamak üzere GRT' ye bir alternatif olarak son 15 yıl içinde yoğun bir ilgi görmekte olduğunu kaydedelim [13-30].

2.2. 1+3 KOVARYANT AYRIŞIM

EAD, ikinci mertebeden kısmi türevli (zaman ve uzay koordinatlarına göre) birbirlerine kuple bir nonlinear denklem sistemi olduğundan çözüm bulmak genel olarak çok zor,

hatta olanaksızdır. Çözüm bulmak amacıyla geliştirilen teknikler arasında ilki ve en yaygın kullanılanı metrik yaklaşımdır. Bu, eldeki problemin doğasına uygun düşecek ve simetri özellikleriyle nispeten basitleştirilmiş bir metrik seçimine (önçözüm) dayanır. Bu metriğin EAD' ye vurulmasıyla sonuçta, bilinmeyen metrik fonksiyonlarının sağlaması gereken genel olarak ikinci mertebeden diferansiyel denklemlere düşülür. Ancak, bu formalizmin şu eksik ve yetersiz yanları bulunmaktadır; Birincisi, küresellik, eşyönlülük gibi simetrier dışında daha genel simetrier (eşölçüm, benzerlik vb.) söz konusu olduğunda bunların metrikle ifade edilmeleri daha karmaşık olmaktadır. İkincisi ise, formalizm, seçilen koordinatlara bağlı, yani, gözlemciden bağımsız değildir. Bu olumsuzlukları gidermek üzere, eldeki problemin doğasına uygun düşecek biçimde değişik yöntemler geliştirilmiştir. Biz, bu bölümde, bunlardan yalnızca Tezimizde kullanacağımız “ 1+3 Kovaryant Ayrışım “ yöntemi hakkında kısa bir bilgilendirme sunacağız. Yöntemin ayrıntıları III. Bölüm' de ele alınacaktır.

Uzay–zamanın 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemi' nin ilk ortaya çıkışı 1950' lerde Heckmann, Schüking [31] ve Raychaudhuri' nin [32] çalışmalarına dayanır. 1961' de Ehlers [33] tarafından geliştirilen yöntemin Kozmoloji' ye uygulanacak bir şekilde derli toplu bir sunumu Ellis [34-36] tarafından yapılmıştır ve o günden bugüne özellikle Kozmoloji çalışmalarında çok yoğun bir biçimde kullanılmaktadır.

Yöntem, g metriklı bir uzay–zamanda genel olarak u ile gösterilen bir ayrıcalıklı vektörün varlığı varsayımına dayanır. Bu ayrıcalıklı vektör, madde–enerji akışkanının ya da gözlemcinin 4-lü hız vektörü olabileceği gibi, aynı zamanda hiperyüzeylerin normalleri de olabilir. Böyle bir ayrıcalıklı vektörün varlığı, metrik uzay–zamana yeni bir yapı kazandırmaktadır. Buna göre skaler, vektör, tansör gibi tüm geometrik nesnelere u ya dik ve paralel bileşenlere ayrışmakta ve sonuçta evrim ve bağ denklemleri denilen bir dizi denklem elde edilmektedir. Evrim denklemleri zaman türevi içeren denklemler; ve bağ denklemleri ise yalnızca uzaysal türevler içeren denklemlerdir. Yöntemin temel amacı, Riemann Eğrilik Tansöründen elde edilebilecek tüm bilgiyi çıkarımlamaktır. Bu aşamada, Einstein denklemleri, R_{ab} Ricci Eğrilik Tansörünü, Enerji–Momentum tansörüne bağlamak için yalnızca cebirsel bir “ yerine koyma ” rolü oynamaktadır. Hem

notasyonu ve hem de Bulgular Bölümü' nde kullanacağımız kavram ve denklemleri tanıtmak için 1+3 Kovaryant Ayrışım Yöntemini 3. Bölümde daha ayrıntılı bir biçimde ele alacağız.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. RIEMANN GEOMETRİSİNİN ELEMANLARI

GRT, gravitasyonu 4-boyutlu bir eğrisel uzay-zaman manifoldunun geometrisi diliyle tasvir eder. İlerideki hesapların daha kolay anlaşılabilmesini sağlamak için önce, bu geometrinin kavram ve bağıntıları hakkında kullanacaklarımızla sınırlı kalmak üzere kısa bir bilgi vermek yararlı olacaktır. Bu vesileyle hem notasyon ve hem de kabuller tanıtılmış olacaktır. Bu Bölüm' deki bilgiler büyük ölçüde [34-40] nolu kaynaklardan derlenmiştir.

3.1.1. Notasyon Ve Kabuller

Uzay-zaman indisleri latin alfabesinin harfleriyle gösterilecek ve bunlar a, b, c, ...= 0, 1, 2, 3 değerlerini alacaktır. Tezin tamamında, aksi söylenmedikçe, Einstein Toplama Kuralı kullanılacaktır; Buna göre, tekrarlanan indisler o indisler üzerinden toplam alınacağı anlamına gelecektir. Bir tansörün simetrik kısmı için indisler yuvarlak parantez içine; antisimetrik kısım için ise köşeli parantez içine alınacak ve simetri işlemine dahil edilmeyen indisler de düşey çizgilerle ayrılacaktır. Buna göre,

$$S_{(ab)} = \frac{1}{2}(S_{ab} + S_{ba}) \quad (3.1)$$

$$S_{[ab]} = \frac{1}{2}(S_{ab} - S_{ba}) \quad (3.2)$$

$$S_{[abc]} = \frac{1}{3!}(S_{abc} + S_{bca} + S_{cab} - S_{bac} - S_{acb} - S_{cba}) \quad (3.3)$$

$$S_{(a|b|c)} = \frac{1}{2}(S_{abc} + S_{cba}) \quad (3.4)$$

demek olacaktır.

İlk iki tanımdan ikinci mertebeden bir tansörün, simetrik ve antisimetrik kısımlarının toplamı olarak

$$S_{ab} = S_{(ab)} + S_{[ab]} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabileceği görülmektedir. Buna göre ikinci mertebeden:

$$\text{simetrik bir tansör: } S_{ab} = S_{(ab)} \Leftrightarrow S_{[ab]} = 0 \Leftrightarrow S_{ab} = S_{ba} \quad (3.6)$$

$$\text{antisimetrik bir tansör: } S_{ab} = S_{[ab]} \Leftrightarrow S_{(ab)} = 0 \Leftrightarrow S_{ab} = -S_{ba} \quad (3.7)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. Eğer

$$S_{(ab\dots)} = 0 \Leftrightarrow S_{[ab\dots]} = S_{ab\dots} \quad (3.8)$$

ise $S_{ab\dots}$ ye tamamen (tüm indislerine göre) antisimetrik tansör denir.

Hesaplarda karşımıza çıkacak olan önemli bir tansör de 4-boyutlu uzay-zamanın permütasyon tansörü ya da hacim elemanı denilen η_{abcd} (ve η^{abcd}) tansörü olacaktır.

Bunun için işaret kabulümüz

$$\begin{aligned} \eta_{abcd} &= -\sqrt{-g} \varepsilon_{abcd} \quad , \quad \eta_{0123} = -\sqrt{-g} < 0 \\ \eta^{abcd} &= +\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{abcd} \quad , \quad \eta^{0123} = +\frac{1}{\sqrt{-g}} > 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

biçiminde olacaktır. Burada $-g = \det g_{ab}$ (g_{ab} metriğinin determinantı) ve ε_{abcd} ise

Kronecker deltaları cinsinden

$$\varepsilon_{abcd} = \frac{1}{4!} \delta^0_{[a} \delta^1_b \delta^2_c \delta^3_{d]} \quad , \quad \varepsilon^{abcd} = \frac{1}{4!} \delta^{[a}_0 \delta^b_1 \delta^c_2 \delta^d]_3 \quad (3.10)$$

bağıntısıyla tanımlanmış 4- boyutlu tamamen antisimetrik ($\varepsilon_{[abcd]} = \varepsilon_{abcd}$) Levi- Civita sembolüdür. Tanımında, aşağıdaki özdeşlikler kolayca gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
\eta^{abcd}\eta_{efgh} &= -4! \delta^a_{[e} \delta^b_f \delta^c_g \delta^d_{h]} \\
\eta^{abct}\eta_{efgt} &= -3! \delta^a_{[e} \delta^b_f \delta^c_g] \\
\eta^{abst}\eta_{efst} &= -4 \delta^a_{[e} \delta^b_{f]} \\
\eta^{arst}\eta_{erst} &= -6 \delta^a_e \\
\eta^{prst}\eta_{prst} &= -4!
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.1.2. Metrik

Sunumu kolaylaştırmak için geçici olarak yerel bir $\{x^a\}$ koordinat sistemi göz önüne almak iyi olacaktır. Burada, koordinatlardan birinin zaman; diğer üçünün de uzay koordinatı olduğu varsayılacaktır. 4-boyutlu uzay-zamanın noktaları söz konusu koordinatlarda oluşan bir fiziksel olay olarak düşünüldüğünde , iki olay arasındaki uzay-zaman aralığı (ya da metrik)

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \tag{3.12}$$

ifadesiyle verilir. Burada $g_{ab}(x)$ ler genel olarak koordinatların fonksiyonu olup metrik katsayıları olarak anılırlar. (3.12) ‘ ye aynı zamanda Birinci Temel Form da denir. Böyle denilmesinin nedeni, (3.12) verildiğinde geometrinin tamamen belirlenmiş olmasıdır. (3.12) ifadesi Özel Rölativite Teorisi’ nin (ÖRT) 4-boyutlu uzay-zamanı için Kartezyen koordinatlarda

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad , \quad \eta_{ab} \equiv \text{köşegen } (-1,1,1,1) \tag{3.13}$$

biçiminde yazılmış Minkowski metriğinin genelleştirilmesini oluşturur. GRT, yerel olarak ÖRT’ ye eşdeğer olduğundan, (3.12)’ nin de Lorentsel, yani, imzasının $(-,+,+,+)$ olması gerekmektedir. Bu koşul aynı zamanda $\det g_{ab} < 0$ ve $ds^2 < 0$ olması demektir. Matematikte, Riemann Geometrisi terimi, metriği pozitif tanımlı ($ds^2 > 0$) , eğrisel uzaylar için kullanılmaktadır. GRT’ de ds^2 negatif de alınabileceği için uzay-zamanın eğriselliğini imâ etmek üzere Riemansal demeyi sürdüreceğiz. Burada şimdiden kaydedelim ki eğriselliği (uzay-zamanın düz olmaması) metrik değil fakat birazdan tanımlanacak tansör belirlemektedir.

3.1.3. Kovaryant Türev

Bir skalerin veya bir vektörün ya da genel olarak bir tansörün, koordinatlara göre $\frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \partial_a$ kısmi türevleri genel koordinat dönüşümleri altında tansör olma özelliği taşımadığı için, bunlar, Bağlantı Katsayıları denilen Γ^a_{bc} büyüklükleriyle “düzeltilerek” tansör haline getirilirler. Kovaryant türev denilen bu yeni türevi aşağıdaki örnekler açıklamaktadır.

$$\begin{aligned}\nabla_a \phi &= \partial_a \phi \\ \nabla_a X_b &= \partial_a X_b - \Gamma^c_{ab} X_c \\ \nabla_a X^b &= \partial_a X^b + \Gamma^b_{ac} X^c \\ \nabla_a X^{b\dots c\dots} &= \partial_a X^{b\dots c\dots} + \Gamma^b_{af} X^{f\dots c\dots} - \Gamma^f_{ac} X^{b\dots f\dots}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Burada, Γ ‘ lar Bağlantı Katsayıları olup, özel bir koordinatsal tabanda Christoffel Sembollerini olarak anılırlar. Bu taktirde metrik katsayıları cinsinden

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{af} (\partial_b g_{cf} + \partial_c g_{bf} - \partial_f g_{bc})\tag{3.15}$$

biçiminde ifade edilirler. Γ ‘ lar koordinatsal tabanda burulma sıfır olduğunda alt iki indise göre simetriktir. Ancak, genel bir tabanda, burulma sıfır olsa bile, Γ ‘ ların böyle bir özelliği yoktur. Kovaryant türevle ilgili şu iki temel bağıntıyı da söyleyelim:

$$\nabla_f g_{ab} \equiv 0, \quad \nabla_f \eta_{abcd} \equiv 0\tag{3.16}$$

3.1.4. Eğrilik

Bir skalerin $\nabla_a \phi$ kovaryant türevi bir vektör olduğundan, ikinci türevlerinin farkı

$$\nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = T^c_{ab} \nabla_c \phi\tag{3.17}$$

olur. T^c_{ab} ‘ ye Burulma tansörü denir. Bizim bu tezimizde Burulmasız ($T^c_{ab} \equiv 0$) uzay-zamanlar göz önüne alınacaktır. O yüzden

$$\nabla_a \nabla_b \phi - \nabla_b \nabla_a \phi = 0\tag{3.18}$$

yazılacaktır. Bu, burulmasız uzay-zamanlar için bir skalerin ikinci türevlerinin komütatif olduğunu göstermektedir. Ancak, bir vektör için böyle bir şey yoktur ve komütatiflikten sapmanın ölçüsünü Riemann Eğrilik Tansörü verir.

$$\nabla_a \nabla_b X_c - \nabla_b \nabla_a X_c = R_{abcd} X^d \quad (\text{veya } R^d{}_{cba} X_d) \quad (3.19)$$

Buna Ricci Özdeşliği denir. Riemann Eğrilik Tansörünün 4-boyutta $4^4=256$ bileşeni bulunmakla birlikte, aşağıdaki simetri özelliklerinden dolayı, bunlardan yalnızca 20' si bağımsızdır. Tanımından hareketle gösterilebileceği üzere, Riemann Eğrilik Tansörü'nün dört önemli simetri özelliği bulunmaktadır:

$$1) \text{ Son iki indise göre antisimetriktir: } R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.20)$$

$$2) \text{ İlk iki indise göre antisimetriktir: } R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (3.21)$$

3) Aşağıdaki şu çevrimsel özdeşliği sağlar.

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0 \Leftrightarrow R_{a[bcd]} = 0 \quad (3.22)$$

veya

$$R^a{}_{[bcd]} = 0 \quad (3.23)$$

buna Birinci Bianchi Özdeşliği denir.

4) Antisimetrik indis çiftlerinin değiş-tokuşu altında simetriktir:

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (3.24)$$

(3.22)' deki cebirsel özdeşlikten başka bir de İkinci Bianchi Özdeşliği denilen

$$\nabla_a R_{bcde} + \nabla_b R_{cade} + \nabla_c R_{abde} = 0 \Leftrightarrow \nabla_{[a} R_{bc]de} = 0 \quad (3.25)$$

diferansiyel özdeşlik bulunmaktadır.

Riemann Eğrilik Tansörünün, Ricci Eğrilik Tansörü ve Ricci Eğrilik Skaleri denilen, sıfırdan farklı yalnızca iki büzülmesi bulunmaktadır. Bunlar

$$R_{ab} \equiv g^{ef} R_{eafb} \equiv R^f{}_{afb} \Rightarrow R_{ab} = R_{ba} \quad (3.26)$$

ve

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} \equiv R^b_b \quad (3.27)$$

dir. Simetri özelliklerinden, Ricci Eğrilik Tansörünün simetrik bir tansör olduğu görülmektedir. Öte yandan, (3.25) ' e iki kere büzülme işlemi uygulanırsa

$$\nabla_c R^c_a = \frac{1}{2} \nabla_a R \Leftrightarrow \nabla^a (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir ki, buna Büzölmüş Bianchi Özdeşliği adı verilir. Parantez içindeki

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (3.29)$$

tansörüne Einstein Tansörü denir. Bunun simetrik ve de diverjansının sıfır olduğu, yani korunduğu görülmektedir.

3.1.5. Weyl Tansörü

Riemann tansörü sıfır ise, bunun iz kısımları olan R_{ab} ve R de sıfırdır. Fakat bunun tersi doğru değildir; yani, R_{ab} ve R sıfır olduğunda R_{abcd} tansörü sıfır olmayabilir. Buna neden, R_{abcd} nin izsiz kısmının da bulunmasıdır ve bu Weyl Tansörü olarak bilinir, 4-boyut için

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} - g_{ad} R_{bc} + g_{bd} R_{ac} - g_{bc} R_{ad}) - \frac{R}{6} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (3.30)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Weyl Tansörü, Riemann Eğrilik Tansörünün tüm simetri özelliklerini taşımasının yanı sıra tüm indislerine göre de izsiz bir tansör, yani

$$C^a_{bac} = 0 \quad , \quad C^{ab}_{ab} = 0 \quad (3.31)$$

dır. Weyl Tansörü, ayrıca,

$$\nabla_a C^a_{bcd} = \nabla_{[c} R_{d]b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \quad (3.32)$$

diverjans özelliğini sağlar.

3.2. UZAY – ZAMANIN 1+3 KOVARYANT AYRIŞIMI

3.2.1. Einstein Alan Denklemleri

Genel Rölativite Teorisinde (GRT) gravitasyon geometrik olarak yorumlanır. Buna göre, madde, metriği

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b \quad (3.33)$$

ile gösterilen 4-boyutlu uzay-zamanın eğriliğini belirler ve bu eğrilik de maddenin hareketini yönlendirir. Madde ile Geometri arasındaki etkileşme ise

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (3.34)$$

Einstein Alan Denklemleri (EAD) ile verilir. Burada R_{ab} ve R , (3.26) ve (3.27) ile tanımlanmış sırasıyla Ricci Eğrilik Tansörü ve Ricci Eğrilik Skaleridir.

$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$; G , Newton Gravitasyon Sabiti ve c , ışık hızı olmak üzere Einstein Sabitidir. Λ ise kozmolojik sabittir ($\Lambda > 0$, $\Lambda = 0$, $\Lambda < 0$). T_{ab} , madde enerji içeriğini veren simetrik bir tansör olup enerji-momentum tansörü olarak adlandırılır.

(3.34) denklemi, g_{ab} nin en fazla ikinci mertebeden türevlerinden oluşmuş kuple ve nonlineer bir denklem sistemidir. Bu denklem

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab} \quad (3.35)$$

biçiminde de yazılabilir. Denklem bu şeklienden, Λ teriminin, boş (vakum, yani $T_{ab} \equiv 0$) uzay-zamanın enerji-momentumu olarak yorumlanabileceği görülmektedir. Bir başka yazılışı ise

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) \quad (3.36)$$

biçimindedir. Bu, (3.34) ile bunun izi olan

$$-R + 4\Lambda = \kappa^2 T \quad (3.37)$$

denkleminde R nin bulunmasıyla bulunur. Burada T ,

$$T = g^{ab} T_{ab} = T^b_b \quad (3.38)$$

ile tanımlıdır.

(3.38) denkleminde, R nin yalnızca madde tarafından değil, fakat aynı zamanda Λ tarafından da belirlendiğini söylemektedir.

3.2.2. İzdüşürme Tansörleri

GRT' de, gravitasyonun geometrik yorumu sonucunda, bir kozmolojik model 4-boyutlu metrik bir uzay-zaman olarak düşünülür. Bu, (V_4, g) ile gösterilsin. Öte yandan, evrendeki madde kaynaklarının dağılımı, geniş ölçekte sürekli bir akışkan görünümüne benzetilebilir. Bu akışkanın her bir noktasının ortalama hareketi uzay-zaman geometrisi yorumunda, evrim çizgileri topluluğuyla tasvir edilebilir. Bunlar,

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau},$$

4-lü vektörüne teğet eğrilerdir. Burada $d\tau$, evrim çizgileri boyunca maddeyle birlikte hareket eden temel gözlemciler tarafından ölçülmüş öz-zamandır. O halde, böyle bir ayrıcalıklı ortalama u^a 4-lü vektörünün varlığı varsayılırsa, uzay-zamanı, bu tür evrim çizgileri ailesi (kongrüans) ile doldurulmuş olarak tasavvur etmek mümkün olur. Bu yaklaşıma uzay-zamanın “ipliklenmesi” adı verilir.

Bu ayrıcalıklı u 4-lü vektörünün varlığı varsayımı (V_4, g, u) uzay-zamanına yeni bir geometrik yapı kazandırmaktadır. Buna göre, u dan hareketle

$$U_{ab} = -u_a u_b \quad (3.39)$$

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \quad (3.40)$$

olmak üzere iki tansör tanımlamak mümkün olur. Bunlara izdüşüm tansörleri denir. U_{ab} , geometrik ve dinamik büyüklükleri u ya paralel; h_{ab} ise u ya dik olarak

izdüşürür. \mathbf{u}' nun bir temel gözlemcinin 4-lü hız vektörü olarak düşünülmesi durumunda, \mathbf{u} zaman cinsinden olup

$$u^a u_a = -1 \quad (3.41)$$

biçiminde normalize edilmiştir. Bu taktirde, h_{ab} nin izdüşürmesi, gözlemcinin “ anlık durgunluk uzayına ” göre olur.

Yukarıdaki tanımlardan hareketle, (3.41)’i de kullanarak, U_{ab} ve h_{ab} izdüşüm tansörlerinin aşağıdaki şu bağıntıları sağladıkları kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_{ba} \text{ (simetrik)} & h_{ab} &= h_{ba} \text{ (simetrik)} \\ U^a_a &= +1 & h^a_a &= +3 \\ U^a_b u^b &= u^a, U^a_b u_a = u_b & h_{ab} u^a &= h_{ab} u^b = 0 \\ U^a_b U^b_c &= U^a_c & h^a_b h^b_c &= h^a_c \\ U^a_c U^b_d &= U^a_d U^b_c & h^a_c h^b_d &= h^a_d h^b_c \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2.3. 1+3 Kovaryant Ayrışım

İzdüşürme tansörlerini kullanarak (V_4, g, u) manifoldunda, herhangi bir geometrik ya da fiziksel bir büyüklüğü gösteren bir skaler, vektör ya da bir tansörün \mathbf{u} 4-lü vektörüne göre paralel, dik ve de karışık izdüşümleri yapılabilir. Bu formalizm [34-36] kaynaklarında ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Biz aşağıda, bu izdüşürme mekanizmasını (3.40) tan metriğin

$$g_{ab} = U_{ab} + h_{ab} \quad (3.43)$$

şeklinde yazılışını kullanarak formel olarak gösterelim.

Keyfi bir V vektörü,

$$\begin{aligned} V^a &= g^a_b V^b \\ V^a &= (U^a_b + h^a_b) V^b \\ V^a &= U^a_b V^b + h^a_b V^b = V^a_{\parallel} + V^a_{\perp} \end{aligned} \quad (3.44)$$

biçiminde iki izdüşümün toplamı olarak düşünülebilir. Burada

$$V_{\parallel}^a \equiv U^a_b V^b = -u^a u_b V^b$$

ve

$$V_{\perp}^a \equiv h^a_b V^b$$

sırasıyla, \mathbf{u}' ya paralel ve \mathbf{u}' ya dik izdüşümleri göstermektedir. $V_{\perp}^a \equiv h^a_b V^b$ ye, dik izdüşürülmüş uzaysal kısım denilmektedir.

Benzer şekilde, bir T_{ab} tansörü için izdüşümler

$$\begin{aligned} T_{ab} &= g^c_a g^d_b T_{cd} \\ &= (U^c_a + h^c_a)(U^d_b + h^d_b) T_{cd} \\ &= U^c_a U^d_b T_{cd} + U^c_a h^d_b T_{cd} + h^c_a U^d_b T_{cd} + h^c_a h^d_b T_{cd} \end{aligned} \quad (3.45)$$

olur. Burada

$$T_{ab} = h^c_a h^d_b T_{cd} \quad (3.46)$$

T_{cd} nin tamamen (tüm indislerine göre) dik izdüşürülmüş uzaysal kısmıdır.

Şimdi, çok özel olarak \mathbf{u}' nun $\nabla_a u_b$ kovaryant türevinin izdüşümlerini yazalım. Bu, ikinci mertebeden bir tansör olduğu için (3.45)'e göre

$$\begin{aligned} \nabla_a u_b &= U^c_a U^d_b \nabla_c u_d + U^c_a h^d_b \nabla_c u_d + h^c_a U^d_b \nabla_c u_d + h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \\ &= u_a u_b u^c u^d \nabla_c u_d - u_a h^d_b u^c \nabla_c u_d - h^c_a u_b u^d \nabla_c u_d + h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \end{aligned} \quad (3.47)$$

biçiminde yazılabilir. daha fazla ilerlemeden, 1+3 Ayrışım formalizmi kapsamında kullanılan iki türev kavramına değinelim. Birincisi “ nokta ” ile gösterilen ve herhangi bir tansör için

$$\dot{T}^{ab\dots}_{cd\dots} \equiv u^e \nabla_e T^{ab\dots}_{cd\dots} \quad (3.48)$$

biçiminde tanımlanan türevdir. Buna “ \mathbf{u} doğrultusunda kovaryant zaman türevi ” denir. İkincisi ise

$$D_e T^{ab\dots}_{cd\dots} \equiv h^a_p h^b_q \dots h^r_c h^s_d h^t_e \nabla_t T^{pq\dots}_{rs\dots} \quad (3.49)$$

biçiminde tanımlanmış olup buna “tamamen dik izdüşürülmüş uzaysal kovaryant türev” denir. Bu tanımlar, özel olarak \mathbf{u} 4-lü vektörüne uygulanırsa

$$\dot{u}_a = u^b \nabla_b u_a \quad (3.50)$$

ve

$$D_a u_b = h^c_a h^d_b \nabla_c u_d \quad (3.51)$$

yazılır.

\dot{u}_a ‘ya ivme denir. $u_a u^a = -1$ den hareketle

$$u^a \nabla_b u_a = 0 \quad (3.52)$$

$$\dot{u}_a u^a = 0 \Leftrightarrow \dot{u}_a \perp u^a \quad (3.53)$$

olacağı kolayca görülür. Ayrıca

$$u^a D_a u_b = 0 \Leftrightarrow D_a u_b \perp u^a \quad (3.54)$$

$$h^c_a D_c u_b = D_a u_b \quad (3.55)$$

dir.

Şimdi, (3.47) ye geri dönelim. (3.50), (3.52) bağıntılarından dolayı bunun

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + D_a u_b \quad (3.56)$$

biçiminde yazılabileceği kolayca görülür. Son terim, (3.54) den anlaşılacağı üzere \mathbf{u} ’ ya dik olması nedeniyle uzay-cinsinden bir tansördür. Bu terimin ayrıntılı ele alınmasından önce şu kavrama değinmek yararlı olacaktır.

Bir uzay tansörü, ($T_{ab}^\perp u^a = T_{ab}^\perp u^b = 0$) biri simetrik kısım, diğeri de antisimetrik kısım olmak üzere

$$T_{ab}^{\perp} = T_{(ab)}^{\perp} + T_{[ab]}^{\perp} \quad (3.57)$$

biçiminde yazılabilir. Öte yandan, T^{\perp} ile T_{ab}^{\perp} nin izi ($T^{\perp} = h^{ab}T_{ab}^{\perp}$), $T_{\langle ab \rangle}^{\perp}$ ile de T_{ab}^{\perp} nin izsiz simetrik kısmı, yani

$$T_{\langle ab \rangle}^{\perp} = T_{(ab)}^{\perp} - \frac{1}{3}h_{ab}T^{\perp} \quad (3.58)$$

gösterilirse, T_{ab}^{\perp}

$$T_{ab}^{\perp} = T_{\langle ab \rangle}^{\perp} + \frac{1}{3}h_{ab}T^{\perp} + T_{[ab]}^{\perp} \quad (3.59)$$

biçiminde indirgenemez kısımlara ayrılmış olarak yazılır. $T_{\langle ab \rangle}^{\perp}$ ye tamamen izdüşürülmüş izsiz simetrik kısım denir. Bunun, bir uzay-zaman T_{ab} tansöründen doğrudan doğruya

$$T_{\langle ab \rangle}^{\perp} = (h^c_{(a}h^d_{b)} - \frac{1}{3}h_{ab}h^{cd})T_{cd} \quad (3.60)$$

bağıntısıyla elde edilebileceğini görmek kolaydır. Açılı parantez dik izdüşüm göstermek üzere, vektörler için ve de aynı zamanda kovaryant zaman türevleri için de kullanılacaktır, yani

$$V^{\langle a \rangle} = h^a_b V^b$$

$$\dot{V}^{\langle a \rangle} = h^a_b \dot{V}^b$$

$$\dot{T}^{\langle ab \rangle} = (h^{(a}_c h^{b)}_d - \frac{1}{3}h^{ab}h_{cd})\dot{T}^{cd} \quad (3.61)$$

olacaktır.

3.2.4. Akışkanın Kinematik Büyüklükleri

Şimdi, (3.56) ifadesine geri dönelim. Son terim, biri simetrik, diğeri de antisimetrik iki tansörün toplamı olarak

$$D_a u_b = \theta_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.62)$$

biçiminde yazılabilir. θ_{ab} simetrik tansörü ise, σ_{ab} ile izsiz simetrik kısmı ve θ ile de izi gösterilmek üzere

$$\theta_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} \quad (3.63)$$

biçiminde ifade edilirse, (3.56)

$$\begin{aligned} \nabla_a u_b &= -u_a \dot{u}_b + \theta_{ab} + \omega_{ab} \\ &= -u_a \dot{u}_b + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab} \end{aligned} \quad (3.64)$$

olur. Burada:

$$\begin{aligned} \theta_{ab} &= \theta_{ba} , \quad \theta_{ab} u^a = 0 , \quad \theta = h^{ab} \theta_{ab} = \theta^a_a \\ \sigma_{ab} &= \sigma_{ba} , \quad \sigma_{ab} u^a = 0 , \quad \sigma^a_a = h^{ab} \sigma_{ab} = 0 \\ \omega_{ab} &= -\omega_{ba} , \quad \omega_{ab} u^a = 0 , \quad \omega^a_a = h^{ab} \omega_{ab} = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

dir. Newtonsal Hidrodinamik ile benzeşimden ötürü akışkanın yukarıdaki kinematik büyüklükleri şöyle adlandırılır.

θ_{ab} : Genişleme (hızı) tansörü

θ : Genişleme skaleri ya da kısaca genişleme

ω_{ab} : Girdap veya dönme tansörü

σ_{ab} : Makaslama tansörü

Antisimetri özelliğinden dolayı , ω_{ab} dönme tansörüne

$$\omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abcd} u_d \omega_{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abcd} \omega^c u^d \quad (3.66)$$

bir ω^a dönme vektörü bağlanabilir, Bunu,

$$\eta^{abc} = \eta^{abcd} u_d \quad (3.67)$$

tanımlayarak

$$\omega^a = \frac{1}{2} \eta^{abc} \omega_{bc} \Leftrightarrow \omega_{ab} = \eta_{abc} \omega^c \quad (3.68)$$

biçiminde de yazabiliriz. η^{abc} ye 3-uzay efektif hacim elemanı ya da 3-uzay Levi-Civita sembolü denir. Dönme vektörünün tanımından

$$\omega^a u_a = 0 \Leftrightarrow \omega^a \perp u_a \quad (3.69)$$

olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki tansörlere

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} \quad (3.70)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} = \omega_a \omega^a \quad (3.71)$$

biçiminde tanımlanan ve sırasıyla Makaslama ile Dönme skaleri denilen iki skaler bağlanabilir. Tanımlarından görüleceği üzere, bunlar

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ab} = 0 \quad (3.72)$$

$$\omega = 0 \Leftrightarrow \omega_{ab} = 0 \quad (3.73)$$

özelliklerini taşırlar.

3.2.5. Efektif Hacim Elemanı

Yukarıda (3.67) ile tanımlanan η^{abc} sembolü, hesaplarda sıklıkla kullanılacağından üzerinde durmakta yarar vardır. η^{abcd} uzay-zaman hacim elemanının zaman doğrultusunda büzülmesiyle verilen bu büyüklük, gözlemcinin anlık durgunluk uzayında efektif hacim elemanı rolünü oynar ve aşağıdaki şu bağıntıları sağlar:

$$\eta_{abc} = \eta_{abcd} u^d = \eta_{efgh} h^e{}_a h^f{}_b h^g{}_c u^h \quad (3.74)$$

$$\eta_{abc} = \eta_{[abc]} \quad (3.75)$$

$$\eta_{abc}u^c = 0 \quad (3.76)$$

$$\eta_{abcd} = 2u_{[a}\eta_{b]cd} - 2\eta_{ab[c}u_{d]} \quad (3.77)$$

$$\eta^{abc}\eta_{mnp} = 3!h^a_m h^b_n h^c_p \quad (3.78a)$$

$$\eta^{abc}\eta_{mnc} = 2!h^a_{[m}h^b_{n]} \quad (3.78b)$$

$$\eta^{abc}\eta_{mbc} = 2h^a_m \quad (3.78c)$$

$$\eta^{abc}\eta_{abc} = 6 \quad (3.78d)$$

$$D_a\eta_{abc} = 0 \quad (3.79)$$

$$\dot{\eta}_{abc} = 3u_{[a}\eta_{bc]d}\dot{u}^d \quad (3.80)$$

3.2.6. Weyl Tansörünün Ayrışımı

(3.30) bağıntısıyla tanımlı C_{abcd} Weyl tansörü, ayrıcalıklı bir u vektörüne göre iki kısma ayrıştırılabilir:

- Elektriksel kısım: $E_{ab} = C_{acbd}u^c u^d$ (3.81)

- Magnetik kısım: $H_{ab} = \frac{1}{2}\eta_{ae}{}^{fg}C_{fgbd}u^e u^d$ (3.82)

E_{ab} ve H_{ab} , serbest gravitasyon alanlarını tasvir etmekte olup aşağıdaki özellikleri taşırlar:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= E_{(ab)} & (\text{simetrik}) & & H_{ab} &= H_{(ab)} \\ E^a_a &= 0 & (\text{izsiz}) & & H^a_a &= 0 \\ E_{ab}u^b &= 0 & (\text{u' ya dik}) & & H_{ab}u^b &= 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

E_{ab} ve H_{ab} nin bilinmesiyle Weyl tansörü aşağıdaki bağıntı uyarınca tamamen belirlenmiş olur.

$$C^{ab}{}_{cd} = 4u^{[a}u_{[c}E^{b]}{}_{d]} + 4h^{[a}{}_{[c}E^{b]}{}_{d]} + 2\eta^{abe}u_{[c}H_{d]e} + 2\eta_{cde}u^{[a}H^{b]e} \quad (3.84)$$

3.2.7. Enerji-Momentum Tansörü

Bir akışkanın, \mathbf{u} 4-lü hızıyla hareket eden bir gözlemciye göre enerji-momentum tansörünün ifadesi

$$T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} + 2q_{(a} u_{b)} + \pi_{ab} \quad (3.85)$$

$$q_a u^a = 0, \quad \pi^a_a = 0, \quad \pi_{ab} u^a = 0, \quad \pi_{ab} = \pi_{(ab)} \quad (3.86)$$

biçiminde verilmektedir. Burada

μ : madde-enerji yoğunluğu

p : eşyönlü basınç

q_a : momentum yoğunluğu veya enerji akısı

π_{ab} : eşyönsüz basınç tansörü

olarak adlandırılmaktadır. Bu 4 dinamik büyüklük, T_{ab} den hareketle

$$\mu = T_{ab} u^a u^b \quad (3.87)$$

$$p = \frac{1}{3} T_{ab} h^{ab} \quad (3.88)$$

$$q_a = -T_{bc} h_a^b u^c \quad (3.89)$$

$$\pi_{ab} = h^c_{(a} h^d_{b)} T_{cd} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} T_{cd} \quad (3.90)$$

bağıntısıyla hesaplanmaktadır. (3.28 ve 3.35) den dolayı, T_{ab} enerji-momentum tansörü

$$\nabla_a G^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.91)$$

korunum kanununa uyar.

Akışkanın fiziğini, dinamik büyüklükler arasındaki bir takım bağıntılar tasvir eder. Bunlara “hal denklemleri” denilmektedir. Kozmoloji’de sıklıkla kullanılan hal denklemleri şunlardır:

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \Leftrightarrow T_{ab} = \mu u_a u_b + p h_{ab} \text{ (Mükemmel akışkan)} \quad (3.92)$$

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \text{ ve } p = 0 \Leftrightarrow T_{ab} = \mu u_a u_b \quad (3.93)$$

Böyle akışkana, basınçsız akışkan veya toz veya soğuk karanlık madde denir.

Eğer dinamik büyüklükler

$$q_a = \pi_{ab} = 0 \text{ ve } p = p(\mu) \quad (3.94)$$

özelliklerini sağlıyorsa böyle akışkana barotropik mükemmel akışkan denir.

eğer,

$$p = (\gamma - 1)\mu, \text{ (} 0 \leq \gamma \leq 2 \text{ ve } \gamma = \text{sabit)} \quad (3.95)$$

ise, buna lineer barotropik hal denklemi denilir.

Bu alt bölümü kapamadan önce, (3.36) nin (3.45) e göre ayrışımının (3.87-3.90) tanımlarıyla birlikte

$$R_{ab} u^a u^b = \frac{1}{2} \kappa^2 (\mu + 3p) - \Lambda \quad (3.96)$$

$$h^b_a R_{bc} u^c = -\kappa^2 q_a \quad (3.97)$$

$$h^c_a h^d_b R_{cd} = \frac{1}{2} \kappa^2 (\mu - p) h_{ab} + \Lambda h_{ab} + \kappa^2 \pi_{ab} \quad (3.98)$$

bağıntılarına yol açtığını da kaydedelim.

3.2.8. Evrim Ve Bağ Denklemleri

1+3 kovaryant ayrışım yöntemi, geometrik ve dinamik büyüklükleri, vektörler için (3.44) 'ü; tansörler için de (3.45) 'i kullanarak işdüşümlerine ayrıştırmaya dayanır. Amaç, Ricci özdeşlikleri, Bianchi özdeşlikleri vb... tüm geometrik bağıntılar göz önüne alınarak Riemann tansöründen mümkün olabilecek en genel bilgiyi çıkarımlamaktır.

Hesaplamalar sırasında karşılaşılan $\nabla_a u_b$ kovaryant türevi yerine (3.64) ile verilen ifadesi yerleştirilir ve böylece akışkanın $\dot{u}_a, \sigma_{ab}, \theta_{ab}$ ve ω_{ab} kinematik değişkenleri işin içine katılır. Öte yandan, hesaplar sırasında ortaya çıkan R_{ab} Ricci tansörü yerine, (3.36) kullanıldığında, (3.96–3.98) bağıntıları aracılığıyla akışkanın μ, p, q_a ve π_{ab} dinamik değişkenleri ortaya çıkmış olur. Ayrıca (3.81 ve 3.82) ile gösterilen E_{ab} ve H_{ab} serbest alanları da (3.30) ve (3.84) bağıntılarıyla hesaplara dahil edilirse sonuç olarak iki takım denklem elde edilir. Birinci takım; söz konusu kinematik ve dinamik değişkenlerinin kovaryant zaman türevlerini veren denklemler olur ki, bunlara Evrim Denklemleri denir. İkinci takım ise, yalnızca D_a uzaysal türevleri içerir ki, bunlar da Bağ Denklemleri olarak adlandırılır.

Şimdi aşağıda bu denklemlerin çıkarımlarını kısaca gösterelim.

(3.19) ile verilen Ricci özdeşliği, u_a 4-lü hız vektörüne uygulanırsa

$$\nabla_a \nabla_b u_c - \nabla_b \nabla_a u_c = R_{abcd} u^d \quad (3.99)$$

olur. Buna (3.64) ü yerleştirir ve (3.30) ile (3.84) bağıntılarını ve de (3.96–3.98) ile verilen yardımcı bağıntıları kullanırsak, elde edilecek ifadenin zamansal ve uzaysal kısımları üç evrim (ya da yayılım) denklemi ile üç bağ denkleminde yol açar.

Bunlardan birincisi θ genişlemesinin zaman evrimini veren Raychaudhuri formülüdür.

$$\dot{\theta} = D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2}(\mu + 3p) + \Lambda \quad (3.100)$$

Diğeri, kinematik eşyönsüzlüğü gösteren Makaslama Tansörünün evrim denklemdir.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} = & (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) - \sigma_{ac} \sigma^c_b - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b \\ & - \omega_a \omega_b - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab} \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

Öbürü ise Girdap evrim denklemdir.

$$\dot{\omega}^a = \frac{1}{2}\eta^{abc}D_b\dot{u}_c - \frac{2}{3}\theta\omega^a + \sigma^a{}_b\omega^b + u^a\dot{u}_b\omega^b \quad (3.102)$$

(3.99) ün uzaysal kısımları ise üç adet bağ denklemi, yani, zaman türevi içermeyen 3 denklem verir. Bunlar:

Kayma bağ denklemi:

$$D_b\sigma^{ab} - \frac{2}{3}D^a\theta + \eta^{abc}D_b\omega_c + 2\eta^{abc}\dot{u}_b\omega_c + q^a = 0 \quad (3.103)$$

Girdap-diverjans özdeşliği:

$$D_a\omega^a - \dot{u}_a\omega^a = 0 \quad (3.104)$$

ve Gravito-Magnetik Weyl denklemi:

$$H_{ab} + (\omega_a\dot{u}_b + \omega_b\dot{u}_a) - \omega^e\dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2}(\eta_{aef}D^e\sigma^f{}_b + \eta_{bef}D^e\sigma^f{}_a) + \frac{1}{2}(D_a\omega_b + D_b\omega_a) = 0 \quad (3.105)$$

Öte yandan, §(3.1.4) 'de söylenildiği gibi, iki kere büzülmüş Bianchi özdeşlikleri toplam enerji-momentum tansörünün (3.91) ile gösterilen

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \quad (3.105)$$

korunumunu vermektedir. Bunun zamansal ayrışımı

$$\dot{\mu} = -D_a q^a - (\mu + p)\theta - 2q^a\dot{u}_a - \pi^{ab}\sigma_{ab} \quad (3.106)$$

enerji korunumunu; uzaysal ayrışım ise

$$\dot{q}^a = -D^a p - D_b\pi^{ab} - (\mu + p)\dot{u}^a - \sigma^a{}_b q^b - \frac{4}{3}\theta q^a + u^a\dot{u}_b q^b - \pi^{ab}\dot{u}_b + \eta^{abc}q_b\omega_c \quad (3.107)$$

momentum korunumunu verir.

Şimdi, Birinci Bianchi özdeşliğinin büzülmesi olan ve (3.32) ile verilen

$$\nabla_a C^a{}_{bcd} = \nabla_{[c} R_{d]b} + \frac{1}{6} g_{b[c} \nabla_{d]} R \quad (3.108)$$

denklemini göz önüne alalım. Bunun zamansal ve uzaysal kısımları alındığında E_{ab} ve H_{ab} serbest gravitasyon alanları için iki evrim (yayıma) ve iki bağ denklemini elde edilir.

Bunlar sırasıyla:

Gravito-Elektrik evrim denklemini (Maxwell-Weyl E-nokta denklemini):

$$\begin{aligned} \left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab} \right) &= \left(E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae} \right) \dot{u}^e u_b + \left(E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be} \right) \dot{u}^e u_a \\ &+ \frac{1}{2} \left(\eta_{aef} D^e H^f{}_b + \eta_{bef} D^e H^f{}_a \right) - \frac{1}{4} (D_a q_b + D_b q_a) \\ &+ \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e - \frac{1}{2} (\mu + p) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a \dot{u}_b + q_b \dot{u}_a) \\ &+ \frac{1}{3} h_{ab} q^e \dot{u}_e - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e{}_a \left(E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be} \right) \\ &+ \frac{3}{2} \sigma^e{}_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe} \right) \\ &- \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[\left(E^e{}_b + \frac{1}{2} \pi^e{}_b \right) \omega^f + 2H^e{}_b \dot{u}^f \right] \\ &- \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[\left(E^e{}_a + \frac{1}{2} \pi^e{}_a \right) \omega^f + 2H^e{}_a \dot{u}^f \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

Gravito-Manyetik evrim denklemi (Maxwell-Weyl H-nokta denklemi) :

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{ab} = & (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left(E^f{}_b - \frac{1}{2} \pi^f{}_b \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left(E^f{}_a - \frac{1}{2} \pi^f{}_a \right) - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c{}_b + H_{bc} \sigma^c{}_a) \\
& - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b + \omega_b q_a) - \frac{1}{2} \omega_c q^c h_{ab} + (\eta_{aef} E^e{}_b + \eta_{bef} E^e{}_a) \dot{u}^f \\
& - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H^e{}_b + \eta_{bef} H^e{}_a) \omega^f + \frac{1}{4} (\eta_{aef} \sigma^e{}_b + \eta_{bef} \sigma^e{}_a) q^f
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Gravito-Elektrik diverjans (Maxwell-Weyl Div-E denklemi) :

$$\begin{aligned}
D_b \left(E^b{}_a + \frac{1}{2} \pi^b{}_a \right) - \frac{1}{3} D_a \mu - \frac{1}{2} \sigma^b{}_a q_b + \frac{1}{3} \theta q_a \\
- \eta_{aef} \left(\sigma^{eb} H^f{}_b - \frac{3}{2} \omega^e q^f \right) - 3 H^b{}_a \omega_b = 0
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Gravito-Magnetik diverjans (Maxwell-Weyl Div-H denklemi) :

$$\begin{aligned}
D_b H^b{}_a + \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e q^f + (\mu + p) \omega_a + 3 \left(E^b{}_a - \frac{1}{6} \pi^b{}_a \right) \omega_b \\
+ \eta_{aef} \sigma^e{}_b \left(E^{fb} + \frac{1}{2} \pi^{fb} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.112}$$

3.3. f(R)-GRAVİTE TEORİSİNİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİR VARYASYON İLKESİNDEN ÇIKARTILMASI

GRT' nin

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \tag{3.113}$$

şeklindeki Einstein Alan Denklemlerini

$$S = S_{EH} + S_{\Lambda} + S_M \tag{3.114}$$

aksiyonundan yola çıkarak metriğe göre bir

$$\delta S = 0 \quad (3.115)$$

varyasyon ilkesiyle elde etmek mümkündür [4].

Burada:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.116)$$

$$S_{\Lambda} = -\frac{1}{\kappa^2} \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \Lambda \quad (3.117)$$

$$S_M = \int_{\nu} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M [g_{ab}, \psi] \quad (3.118)$$

olup

S_{EH} : Geometriye bağlı Einstein-Hilbert aksiyonu

S_{Λ} : Muhtemel bir Kozmolojik sabite ilişkin aksiyon

S_M : ψ ile muhtemel madde alanları gösterilmek üzere skaler bir \mathcal{L}_M Lagrange yoğunluğu aracılığıyla tanımlanan madde-enerji aksiyonudur.

İntegrasyonlar, 4-boyutlu bir metrik uzayın 3-boyutlu bir sınır ∂_{ν} hiperyüzeyiyle kuşatılmış ν hiperhacmi üzerindedir. (3.116) ile gösterilen $\delta S = 0$ koşulunun hesabında g_{ab} lerin kendilerinin ve türevlerinin varyasyonlarının ν içinde keyfi, fakat ∂_{ν} sınırı yüzeyinde sıfır oldukları, yani,

$$\delta g^{ab} |_{\partial\nu} = \delta g_{ab} |_{\partial\nu} = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\partial_c g^{ab}) |_{\partial\nu} = \delta(\partial_c g_{ab}) |_{\partial\nu} = 0 \quad (3.119)$$

koşulları kabul edilmektedir.

Değişikliğe uğratılmış gravitasyon teorileri deyiminden, (3.117) ile gösterilen S_{EH} aksiyonundan yapılan değişikliklerin yol açtığı gravitasyon teorileri anlaşılmaktadır. Bunlar arasında en basitini, ama en yoğun ilgi görenini, R Ricci Eğrilik Skaler' ine

lineer olarak bağılı olan (3.117) deki invaryantı R nin keyfi bir $f(R)$ fonksiyonuyla değiştirmek suretiyle elde edilen ve Değiştirilmiş Einstein-Hilbert Aksiyonu denilen

$$S_{DEH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (3.120)$$

aksiyonunun yol açtığı $f(R)$ -gravite teorisi oluşturmaktadır. O halde bu yeni teorinin toplam aksiyonu

$$S = S_{DEH} + S_\Lambda + S_M \quad (3.121)$$

ve toplam varyasyonu da (3.120) koşulları altında

$$\delta S = \delta S_{DEH} + \delta S_\Lambda + \delta S_M = 0 \quad (3.122)$$

olacaktır.

Her bir aksiyonun varyasyonunu hesaplamadan önce metriğin fonksiyonel türevleri ile ilgili

$$\delta g_{ab} = -g_{ac} g_{bd} \delta g^{cd} \quad (3.123a)$$

$$\delta g^{ab} = -g^{ac} g^{bd} \delta g_{cd} \quad (3.124b)$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} \quad (3.124c)$$

bağıntılarını yazmak uygun olacaktır.

Öte yandan, Riemann Eğrilik tansörünün

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \quad (3.124)$$

ile tanımlı Christoffel Sembolleri cinsinden ifadesi de

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^e_{db} \Gamma^a_{ce} - \Gamma^e_{cb} \Gamma^a_{ed} \quad (3.125)$$

dir. Ön hazırlık olmak üzere bunun varyasyonunu yazalım.

$$\begin{aligned}\delta R^a{}_{bcd} = & \partial_c(\delta \Gamma^a{}_{db}) - \partial_d(\delta \Gamma^a{}_{cb}) + \Gamma^a{}_{ce} \delta \Gamma^e{}_{db} \\ & + \Gamma^e{}_{db} \delta \Gamma^a{}_{ce} - \Gamma^a{}_{ed} \delta \Gamma^e{}_{cb} - \Gamma^e{}_{cb} \delta \Gamma^a{}_{ed}\end{aligned}\quad (3.126)$$

Bu ifadeye ortaya çıkan $\delta \Gamma^a{}_{bc}$ büyüklüklerine yakından bakalım. Bir koordinat dönüşümü altında, Γ lar tansör gibi dönüşmemelerine karşılık, Γ ların $\Gamma + \delta \Gamma$ şeklindeki $\delta \Gamma$ değişimleri

$$\delta \bar{\Gamma}^a{}_{bc} = \delta \Gamma^d{}_{ef} \frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial x^f}{\partial \bar{x}^c} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^d}\quad (3.127)$$

uyarınca 3. mertebeden bir tansör gibi dönüşmektedirler. Dolayısıyla bunların kovaryant türevinden bahsetmek anlamlı olacağından

$$\nabla_d(\delta \Gamma^a{}_{bc}) = \partial_d(\delta \Gamma^a{}_{bc}) + \Gamma^a{}_{ed} \delta \Gamma^e{}_{bc} - \Gamma^e{}_{bd} \delta \Gamma^a{}_{ec} - \Gamma^e{}_{dc} \delta \Gamma^a{}_{eb}\quad (3.128)$$

yazılabilir. Bu ifadeden $\partial(\delta \Gamma)$ kısmi türevleri çekilir de uygun indis düzenlemeleriyle (3.127) ye yerleştirilip sadeleştirmeler yapılırsa

$$\delta R^a{}_{bcd} = \nabla_c(\delta \Gamma^a{}_{db}) - \nabla_d(\delta \Gamma^a{}_{cb})\quad (3.129)$$

bulunur. Bunun a ve c üzerinden büzülmesi ise, yeniden indis adlandırılmasıyla

$$\delta R_{ab} = \nabla_c(\delta \Gamma^c{}_{ba}) - \nabla_b(\delta \Gamma^c{}_{ca})\quad (3.130)$$

verir. Buna Palatini Denklemi denir.

Öte yandan, R nin varyasyonu ise (3.131) de kullanılarak

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta(g^{ab} R_{ab}) \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} \delta R_{ab} \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g^{ab} [\nabla_c(\delta \Gamma^c{}_{ba}) - \nabla_b(\delta \Gamma^c{}_{ca})] \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + \nabla_c [g^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ba} - g^{ac} \delta \Gamma^d{}_{da}] \\ &= \delta g^{ab} R_{ab} + g_{ab} \nabla_c \nabla^c (\delta g^{ab}) - \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab})\end{aligned}\quad (3.131)$$

olur. Son satıra geçiş çok uzun hesaplar gerektirdiğinden sadece sonucu söylemekle yetindik. Ayrıntılar için Bkz. [4,5].

Şimdi, (3.121) in varyasyonunu alalım.

$$\delta S_{DEH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int_g d^4x (f(R) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta f(R))$$

ifadesinde (3.124c) ifadesi yazılır ve $f(R)$ in fonksiyonel türevi için de

$$\delta f(R) = f'(R) \delta R, \quad f'(R) \equiv \frac{df(R)}{dR} \quad (3.132)$$

yerleştirilirse, (3.132) ile birlikte, düzenlendikten sonra

$$\begin{aligned} \delta S_{DEH} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_g d^4x \sqrt{-g} [f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R)] \delta g^{ab} \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2} \int_g d^4x \sqrt{-g} [f'(R) g_{ab} \nabla_c \nabla^c (\delta g^{ab}) - \nabla_a \nabla_b (\delta g^{ab})] \end{aligned}$$

elde edilir. Yine çok uzun bir hesap sonucunda ikinci integralin, $\partial\nu$ sınırında (3.120) koşulundan dolayı sıfır olan bir yüzey integrali vermesinin yanında bir de birinci integrale katkıda bulunduğu gösterilirse sonuçta da

$$\begin{aligned} \delta S_{DEH} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_g d^4x \sqrt{-g} [f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) + g_{ab} \nabla_c \nabla^c (f'(R)) \\ &- \nabla_a \nabla_b (f'(R))] \delta g^{ab} \end{aligned} \quad (3.133)$$

bulunur.

Öte yandan, (3.118) ile gösterilen aksiyonun varyasyonundan, (3.124c) yi de kullanarak

$$\begin{aligned} \delta S_\Lambda &= -\frac{1}{\kappa^2} \int_g d^4x \delta(\sqrt{-g} \Lambda) \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \int_g d^4x (\delta \sqrt{-g}) \Lambda \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_g d^4x \sqrt{-g} \Lambda g_{ab} \delta g^{ab} \end{aligned} \quad (3.134)$$

elde edilir.

Son olarak, (3.119) un varyasyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int_g d^4 x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) \\
&= \int_g d^4 x \{ \mathcal{L}_M \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_M \} \\
&= \int_g d^4 x \{ \mathcal{L}_M (-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}) + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} \delta g^{ab} \} \\
&= \int_g d^4 x \sqrt{-g} (\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_M g_{ab}) \delta g^{ab}
\end{aligned}$$

şimdi eğer

$$T_{ab} \equiv -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}} + \mathcal{L}_M g_{ab}$$

ile bir enerji-momentum tansörü tanımlanırsa

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_v d^4 x \sqrt{-g} T_{ab} \delta g^{ab} \quad (3.135)$$

elde edilir.

(3.134), (3.135) ve (3.136) 'yı (3.123) 'e taşırsak toplam varyasyon için

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_v d^4 x \sqrt{-g} (f'(R) R_{ab} + g_{ab} \square f'(R) - \nabla_a \nabla_b f'(R) - \frac{1}{2} f(R) g_{ab}) \delta g^{ab} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_v d^4 x \sqrt{-g} \Lambda g_{ab} \delta g^{ab} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_v d^4 x \sqrt{-g} T_{ab} \delta g^{ab}
\end{aligned}$$

ya da, $\nabla_c \nabla^c$ yerine $\square \equiv \nabla_c \nabla^c$ D' Alambert operatörünü de yazarsak

$$f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) + g_{ab} \square f'(R) - \nabla_a \nabla_b f'(R) + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}$$

bulunur. Ve sonuçta

$$\delta S = 0$$

varyasyon ilkesi geređi, $f(R)$ -gravite teorisinin

$$f'(R)R_{ab} - \frac{1}{2}f(R)g_{ab} + g_{ab}\square f'(R) - \nabla_a\nabla_b f'(R) + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \quad (3.136)$$

alan denklemlerine ulaşılır. Eğer özel olarak

$$f(R)=R$$

alınırsa, (3.137) denklemlerinin GRT' nin

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab}$$

alan denklemlerine indirgeneceđi kolayca görülür.

4.BULGULAR

Bu bölümde, önce konvansiyonel Rölativist Kozmoloji' nin evrim ve bağ denklemlerini $f(R)$ gravite teorisine genelleştiriyoruz ve sonra da bunların, dönmenin sıfır olması ($\omega = 0$) kısıtlaması altında tutarlılık ve uyumluluk analizlerini gerçekleştiriyoruz.

4.1. F(R) GRAVİTE ALAN DENKLEMLERİ' NİN EFEKTİF ENERJİ YORUMU

(3.137)' de yazılmış olan $f(R)$ -gravitenin alan deklemlerini tekrar aşağıya alalım.

$$f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) - \nabla_a \nabla_b f'(R) + g_{ab} \square f' = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \quad (4.1)$$

Şimdi, [41,47] no'lu kaynaklardaki yaklaşımı benimseyerek, sol tarafta G_{ab} Einstein Tansörü ortaya çıkacak şekilde (4.1)'i düzenleyelim. Bunun için sol tarafa bir $\frac{1}{2} g_{ab} R f'(R)$ terimi ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned} f'(R) \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \frac{1}{2} g_{ab} [R f'(R) - f(R)] \\ - \nabla_a \nabla_b f'(R) + g_{ab} \square f'(R) = -\Lambda g_{ab} + \kappa^2 T_{ab}^m \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur ve buradan da

$$\begin{aligned} G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \kappa^2 \left\{ -\frac{\Lambda g_{ab}}{\kappa^2 f'} + \frac{T_{ab}^m}{f'} \right. \\ \left. + \frac{1}{\kappa^2 f'} \left[\frac{1}{2} [f(R) - R f'(R)] g_{ab} \right. \right. \\ \left. \left. + \nabla_a \nabla_b f'(R) - g_{ab} \square f'(R) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu denklemin

$$G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^{toplamlam} \quad (4.4)$$

biçimindeki EAD ile karşılaştırılması, sağ tarafın bir efektif toplam enerji-momentum tansörü gibi yorumlanabileceğini düşündürmektedir. Bu takdirde,

$$T_{ab}^{\Lambda} = \frac{-\Lambda g_{ab}}{\kappa^2 f'(R)}$$

$$T_{ab}^M = \frac{T_{ab}^m}{f'(R)} \quad (4.5)$$

$$T_{ab}^R = \frac{1}{\kappa^2 f'} \left\{ \frac{1}{2} g_{ab} [f(R) - Rf'(R)] + \nabla_a \nabla_b f'(R) - g_{ab} \square f'(R) \right\}$$

tanımlanırsa (4.3) denklemini EAD' ye benzer tarzda

$$G_{ab} = \kappa^2 (T_{ab}^{\Lambda} + T_{ab}^M + T_{ab}^R) = \kappa^2 T_{ab}^{efektif toplamlam} \quad (4.6)$$

biçiminde ifade etmek mümkün olur. Burada:

T_{ab}^{Λ} ile, Kozmolojik Sabite bağlanan efektif enerji-momentum tansörü; T_{ab}^M ile maddeye bağlanan efektif enerji-momentum tansörü ve T_{ab}^R ile de eğrilik terimlerine bağlanan efektif enerji-momentum tansörü gösterilmektedir. Bu sonuncuya bazen “eğrilik akışkanı” yakıştırması da yapılır [47].

Bianchi özdeşliklerinin iki kere büzülmesinin G_{ab} Einstein tansörünün korunumuna, yani,

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (4.7)$$

diverjans bağıntısına yol açtığını söylemiştik, Dolayısıyla, (4.6) yorumu da

$$\nabla^a T_{ab}^{efektif toplamlam} = 0 \quad (4.8)$$

yani, efektif toplam enerjinin korunacağını söylemektedir.

Öte yandan, bu bağıntının , madde akışkanını tasvir eden T_{ab}^m madde-enerji momentum tansörünün de korunduğuna, yani,

$$\nabla^a T_{ab}^m = 0 \quad (4. 9)$$

bağıntısına yol açtığı gösterilebilir[48].

Şimdi, yukarıdaki herbir efektif enerji momentum tansörü için efektif yoğunluk, efektif eşyönlü basınç, efektif enerji-momentum akısı ve efektif eşyönsüzlük basınç tansörü tanımlayalım.

$$T_{ab}^{\Lambda} = \mu^{\Lambda} u_a u_b + p^{\Lambda} h_{ab} + 2q_{(a}^{\Lambda} u_{b)} + \pi_{ab}^{\Lambda}$$

$$T_{ab}^M = \mu^M u_a u_b + p^M h_{ab} + 2q_{(a}^M u_{b)} + \pi_{ab}^M \quad (4. 10)$$

$$T_{ab}^R = \mu^R u_a u_b + p^R h_{ab} + 2q_{(a}^R u_{b)} + \pi_{ab}^R$$

Öte yandan, efektif toplam enerji-momentum tansörünü oluşturan dinamik değişkenler de, “ efektif toplam \equiv ef.top. ” kısaltmasını kullanarak

$$T_{ab}^{ef.top} = \mu^{ef.top} u_a u_b + p^{ef.top} h_{ab} + 2q_{(a}^{ef.top} u_{b)} + \pi_{ab}^{ef.top} \quad (4. 11)$$

ile tanımlanır. Bu son bağıntı, (4.6) tanımından dolayı efektif toplam değişkenlerin

$$\mu^{ef.top} = \mu^M + \mu^R + \mu^{\Lambda}$$

$$p^{ef.top} = p^M + p^R + p^{\Lambda}$$

$$q_a^{ef.top} = q_a^M + q_a^R + q_a^{\Lambda}$$

$$\pi_{ab}^{ef.top} = \pi_{ab}^M + \pi_{ab}^R + \pi_{ab}^{\Lambda}$$

(4. 12)

olacağını söylemektedir. Yukarıdaki ifadelerdeki dinamik değişkenler (3.62 - 3.65) deki tanım bağıntıları uyarınca hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\mu^\Lambda &= u^a u^b T_{ab}^\Lambda = \frac{\Lambda}{\kappa^2 f'} \\
p^\Lambda &= \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^\Lambda = -\frac{\Lambda}{\kappa^2 f'} \\
q_a^\Lambda &= -h^b{}_a u^c T_{bc}^\Lambda = 0 \\
\pi_{ab}^\Lambda &= (h^c{}_{(a} h^d{}_{b)}) - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd}^\Lambda = 0
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu^M &= u^a u^b T_{ab}^M = \frac{\mu^m}{f'} \\
p^M &= \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^M = \frac{p^m}{f'} \\
q_a^M &= -h^b{}_a u^c T_{bc}^M = \frac{q_a^m}{f'} \\
\pi_{ab}^M &= (h^c{}_{(a} h^d{}_{b)}) - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd}^M = \frac{\pi_{ab}^m}{f'}
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

bulunur.

Eğrilik akışkanına bağlanan dinamik değişkenler ise, T_{ab}^R den hareketle yukarıdakilere benzer tarzda

$$\begin{aligned}
\mu^R &= u^a u^b T_{ab}^R \\
p^R &= \frac{1}{3} h^{ab} T_{ab}^R \\
q_a^R &= -h^b{}_a u^c T_{bc}^R \\
\pi_{ab}^R &= (h^c{}_{(a} h^d{}_{b)}) - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T_{cd}^R
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

bağıntısıyla tanımlanır. Bunların hesabının sunumunu kolaylaştırmak için

$$f'(R) \equiv \phi(R) \equiv \phi$$

$$\nabla_a \nabla_b f'(R) \equiv \nabla_a \nabla_b \phi \equiv S_{ab}$$

$$\nabla^a \nabla_a f'(R) \equiv \square f'(R) \equiv \square \phi \equiv S$$

kısaltmalarımı kullanalım. Bu taktirde

$$T_{ab}{}^R = \frac{1}{\kappa^2 f'} [S_{ab} - S g_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} (f - R f')] \quad (4.16)$$

olur.

(3.19)' u kullanarak ϕ skalerinin $\nabla_a \phi$ kovaryant türevinin ayrışımı

$$\begin{aligned} \nabla_a \phi &= U^c \nabla_c \phi + h^c_a \nabla_c \phi \\ &= -u_a u^c \nabla_c \phi + h^c_a \nabla_c \phi \\ &= -u_a \dot{\phi} + D_a \phi \end{aligned} \quad (4.17)$$

olur. $S_{ab} = \nabla_a \nabla_b \phi$ nin ayrışımı ise (3.20)' yi kullanarak

$$\begin{aligned} S_{ab} &= U^c U^d \nabla_c \nabla_d \phi + U^c h^d_b \nabla_c \nabla_d \phi + h^c_a U^d \nabla_c \nabla_d \phi + h^c_a h^d_b \nabla_c \nabla_d \phi \\ &= u_a u_b u^c u^d \nabla_c \nabla_d \phi - u_a h^d_b u^c \nabla_c \nabla_d \phi \\ &\quad - u_b h^c_a u^d \nabla_c \nabla_d \phi + h^c_a h^d_b \nabla_c \nabla_d \phi \end{aligned} \quad (4.18)$$

olur. Bu ifade de, (4.17) ile birlikte

$$\nabla_a u_b = -u_a \dot{u}_b + \mathcal{G}_{ab} \quad (4.19a)$$

$$\mathcal{G}_{ab} \equiv D_a u_b = \sigma_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} + \eta_{abc} \omega^c \quad (4.19b)$$

ve de §(3.2.2 - 3.2.5) alt bölümlerinde gösterilen temel özellikleri kullanarak, her bir terimi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
u^c u^d \nabla_c \nabla_d \phi &= u^c \nabla_c (u^d \nabla_d \phi) - u^c (\nabla_c u^d) \nabla_d \phi \\
&= \ddot{\phi} - \dot{u}^d \nabla_d \phi \\
&= \ddot{\phi} - \dot{u}^d \delta^e_d \nabla_e \phi \\
&= \ddot{\phi} - \dot{u}^d (-u^e u_d + h^e_d) \nabla_e \phi \\
&= \ddot{\phi} - \dot{u}^d D_d \phi
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
h^d_b u^c \nabla_c \nabla_d \phi &= h^d_b (\nabla_d \phi)' \\
&= h^d_b (-u_d \dot{\phi} + D_d \phi)' \\
&= h^d_b [-\dot{u}_d \dot{\phi} - u_d \ddot{\phi} + (D_d \phi)'] \\
&= -\dot{u}_b \dot{\phi} + h^d_b (D_d \phi)' \\
&= -\dot{u}_b \dot{\phi} + (D_b \phi)' - u_b \dot{u}^d D_d \phi
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
h^c_a u^d \nabla_c \nabla_d \phi &= h^c_a \nabla_c (u^d \nabla_d \phi) - h^c_a (\nabla_c u^d) \nabla_d \phi \\
&= h^c_a \nabla_c \dot{\phi} - h^c_a (-u_c \dot{u}^d + \mathcal{G}_c^d) \nabla_d \phi \\
&= D_a \dot{\phi} - \mathcal{G}_a^d \nabla_d \phi \\
&= D_a \dot{\phi} - \mathcal{G}_a^d (-u_d \dot{\phi} + D_d \phi) \\
&= D_a \dot{\phi} - \mathcal{G}_a^d D_d \phi
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
h^c_a h^d_b \nabla_c \nabla_d \phi &= h^c_a h^d_b \nabla_c (\delta^e_d \nabla_e \phi) \\
&= h^c_a h^d_b \nabla_c [(h^e_d - u^e u_d) \nabla_e \phi] \\
&= h^c_a h^d_b \nabla_c (h^e_d \nabla_e \phi) - h^c_a h^d_b \nabla_c (u^e u_d \nabla_e \phi) \\
&= D_a (h^e_b \nabla_e \phi) - h^c_a h^d_b (\nabla_c u^e) u_d \nabla_e \phi \\
&\quad - h^c_a h^d_b (\nabla_c u_d) u^e \nabla_e \phi \\
&\quad - h^c_a h^d_b u^e u_d \nabla_c \nabla_e \phi \\
&= D_a D_b \phi - (D_a u_b) \dot{\phi} \\
&= D_a D_b \phi - \mathcal{G}_{ab} \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. Bunlar (4.18) e taşınırsa

$$\begin{aligned}
S_{ab} &= u_a u_b (\ddot{\phi} - \dot{u}^d D_d \phi) - u_a [-\dot{u}_b \dot{\phi} + (D_b \phi)' - u_b \dot{u}^d D_d \phi] \\
&\quad - u_b (D_a \dot{\phi} - \mathcal{G}_a^d D_d \phi) + D_a D_b \phi - \mathcal{G}_{ab} \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir.

Bu ifadeyi $\phi = \phi(R)$ hali için, ϕ' ile $\phi' \equiv \frac{d\phi}{dR}$ gösterilmek üzere, R cinsinden yazmak istiyoruz. Bunun için önce aşağıdaki türev ifadelerini hesaplayalım.

Zincir kuralından

$$\nabla_a \phi(R) = \frac{\partial \phi(R)}{\partial x^a} = \frac{d\phi(R)}{d(R)} \frac{\partial R}{\partial x^a} = \phi'(R) \partial_a R = \phi' \nabla_a R \quad (4.25)$$

olduğunu göz önüne alarak ϕ nin zaman ve uzay türevleri için

$$\dot{\phi} = u^a \nabla_a \phi = u^a \phi' \nabla_a R = \phi' \dot{R} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= (\dot{\phi})' = (\phi' \dot{R})' = (\phi') \dot{R} + \phi' \ddot{R} = (\phi'' \dot{R}) \dot{R} + \phi' \ddot{R} \\ &= \phi'' \dot{R}^2 + \phi' \ddot{R} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$D_a \phi = h^c_a \nabla_c \phi = \phi' h^c_a \nabla_c R = \phi' D_a R \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} D_a \dot{\phi} &= D_a (\phi' \dot{R}) = (D_a \phi') \dot{R} + \phi' (D_a \dot{R}) = (\phi'' D_a R) \dot{R} + \phi' (D_a \dot{R}) \\ &= \phi'' \dot{R} D_a R + \phi' D_a \dot{R} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$D_a D_b \phi = D_a (\phi' D_b R) = (D_a \phi') D_b R + \phi' D_a D_b R = \phi'' D_a R D_b R + \phi' D_a D_b R \quad (4.30)$$

bulunur. Bunlar (4.25) e yerleştirilip düzenlenirse

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \phi' [u_a u_b \ddot{R} + u_a \dot{u}_b \dot{R} - u_a (D_b R)' - u_b D_a \dot{R} \\ &\quad + u_b \mathcal{G}^d_a D_d R + D_a D_b R - \mathcal{G}_{ab} \dot{R}] \\ &\quad + \phi'' [u_a u_b \dot{R}^2 - u_a \dot{R} D_b R - u_b \dot{R} D_a R + D_a R D_b R] \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir.

Şimdi (4.15) ile gösterilen büyüklüklerin hesabına geçebiliriz

$$\begin{aligned}
\mu^R &= T_{ab}^R u^a u^b \\
&= \frac{1}{f'} [S_{ab} u^a u^b - g_{ab} u^a u^b S + \frac{1}{2} g_{ab} u^a u^b (f - Rf')] \\
&= \frac{1}{f'} \{ f'' (\ddot{R} - \dot{u}^b D_b R) + f''' \dot{R}^2 + f'' (-\ddot{R} + \dot{u}^a D_a R + D^a D_a R - \theta \dot{R}) \\
&\quad + f''' (-\dot{R}^2 + D^a R D_a R) - \frac{1}{2} (f - Rf') \} \\
\mu^R &= \frac{1}{\kappa^2 f'} [f'' (D^a D_a R - \theta \dot{R}) + f''' D^a R D_a R - \frac{1}{2} (f - Rf')]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
p^R &= \frac{1}{3} T_{ab}^R h^{ab} \\
&= \frac{1}{3\kappa^2 f'} [S_{ab} h^{ab} - g_{ab} h^{ab} S + \frac{1}{2} g_{ab} h^{ab} (f - Rf')] \\
&= \frac{1}{3\kappa^2 f'} [f'' (D^a D_a R - \theta \dot{R}) + f''' D^a R D_a R \\
&\quad - 3f'' (-\ddot{R} + \dot{u}^a D_a R + D^a D_a R - \theta \dot{R}) \\
&\quad - 3f''' (-\dot{R}^2 + D^a R D_a R) + \frac{3}{2} (f - Rf')] \\
&= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ f'' [-\frac{2}{3} D^a D_a R + \frac{2}{3} \theta \dot{R} + \ddot{R} - \dot{u}^a D_a R] \\
&\quad + f''' [-\frac{2}{3} D^a R D_a R + \dot{R}^2] + \frac{1}{2} (f - Rf') \}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
q_a^R &= -h^c_a u^b T^R_{bc} \\
&= -\frac{1}{f'} (S_{bc} h^c_a u^b - g_{bc} h^c_a u^b S \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{bc} h^c_a u^b (f - Rf')] \\
&= -\frac{1}{f'} [f'' (D_a \dot{R} - \mathcal{G}_a^e D_e R) + f''' (\dot{R} D_a R)] \\
&= \frac{1}{f'} [f'' (-D_a \dot{R} + \mathcal{G}_a^e D_e R) + f''' (\dot{R} D_a R)]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ve nihayet

$$\begin{aligned}
\pi_{ab}{}^R &= (h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} - \frac{1}{3} h^{cd} h_{ab}) T^R{}_{cd} \\
&= h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} T^R{}_{cd} - \frac{1}{3} h^{cd} T^R{}_{cd} h_{ab} \\
&= h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} \frac{1}{f'} [S_{cd} - g_{cd} (S - \frac{1}{2} (f - Rf'))] \\
&\quad - \frac{1}{3} h^{cd} \frac{1}{f'} [S_{(cd)} - g_{cd} (S - \frac{1}{2} (f - Rf'))] h_{ab} \\
&= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} S_{(cd)} - h_{ab} (S - \frac{1}{2} (f - Rf')) \} \\
&\quad - \frac{1}{3} h^{cd} S_{(cd)} h_{ab} + \frac{1}{3} 3 (S - \frac{1}{2} (f - Rf')) h_{ab} \} \\
&= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ h^c{}_{(a} h^d{}_{b)} S_{(cd)} - \frac{1}{3} h^{cd} S_{(cd)} h_{ab} \} \\
&= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ f'' (D_{(a} D_{b)} R - \mathcal{G}_{(ab)} \dot{R}) + f''' D_{(a} R D_{b)} R \\
&\quad - \frac{1}{3} h_{ab} [f'' (D^d D_d R - \theta \dot{R}) + f''' D^d R D_d R] \} \\
&= \frac{1}{f'} \{ f'' [D_{(a} D_{b)} R - \frac{1}{3} D^d D_d R - \theta_{ab} \dot{R} + \frac{1}{3} h_{ab} \theta \dot{R}] \\
&\quad + f''' [D_{(a} R D_{b)} R - \frac{1}{3} h_{ab} D^d R D_d R] \} \\
&= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ f'' (D_{<a} D_{b>} R - \dot{R} \sigma_{ab}) + f''' (D_{<a} R D_{b>} R) \}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

bulunur.

O halde, bu bulunanların hepsi (4.12) ye taşınırsa efektif akışkana bağlanan efektif toplam dinamik değişkenler ifadeleri için

$$\begin{aligned}
\mu^{ef.top} &= \frac{1}{\kappa^2 f'} \{ \Lambda + \kappa^2 \mu^m + [-\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f' R + f'' (D^b D_b R - \theta \dot{R}) \\
&\quad + f''' D^b R D_b R] \}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
p^{ef.top} = & \frac{1}{\kappa^2 f'} \left\{ -\Lambda + \kappa^2 p^m \left[\frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f' R \right. \right. \\
& + f'' \left(\ddot{R} - \frac{2}{3} \theta \dot{R} - \dot{u}^b D_b R - \frac{2}{3} D^b D_b R \right) \\
& \left. \left. + f''' \left(\dot{R}^2 - \frac{2}{3} D^b R D_b R \right) \right\} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$q_a^{ef.top} = \frac{1}{\kappa^2 f'} \left\{ \kappa^2 q_a^m + f'' (-D_a R + \mathcal{G}_a^f D_f R) + f''' (-\dot{R} D_a R) \right\} \quad (4.38)$$

$$\pi_{ab}^{ef.top} = \frac{1}{\kappa^2 f'} \left\{ \kappa^2 \pi_{ab}^m + f'' (D_{<a} D_{>b} R - \dot{R} \sigma_{ab}) + f''' D_{<a} R D_{>b} R \right\} \quad (4.39)$$

elde edilir.

4.2. f(R) GRAVİTE'DE EVRİM VE BAĞ DENKLEMLERİ

Daha önce, standart kozmolojinin 1+3 kovaryant ayrışım formalizminde, EAD' nin, R_{ab} Ricci tansörünü akışkanın dinamik özelliklerine bağlamak için “ cebirsel yerine yerleştirme ” olarak kullanıldığını söylemiştik (Bkz. §3.2.7). Aynı yöntemin, $f(R)$ -gravite söz konusu olduğunda, alan denklemlerinin (4.4)' deki gibi yorumlanması nedeniyle geçerli olmaya devam edeceği kolayca anlaşılmaktadır. Gerçekten de (4.6) dan

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab}^{ef.top} - \frac{1}{2} T_{ab}^{ef.top} \right) \quad (4.40)$$

biçiminde çekilen Ricci tansörü, (4.36-4.39) ile gösterilen efektif toplam dinamik değişkenler cinsinden ifade edilebilmektedir. Şu halde Konvansiyonel Rölativist Kozmoloji' nin 1+3 kovaryant evrim ve bağ denklemlerinde yapılacak yegâne değişiklik, (3.2.8) deki denklemlerde madde akışkanının dinamik değişkenlerini gösteren μ, p, q_a ve π_{ab} yerine, bunların $f(R)$ -gravitede karşılıkları olan (4.36-4.39) ile verilen $\mu^{ef.top}, p^{ef.top}, q_a^{ef.toplam}$ ve $\pi_{ab}^{ef.top}$ efektif değişkenleri koymak olacaktır. Ancak,

$f(R)$ -gravite, fazladan iki denklem daha getirmektedir. O da normal madde-enerji korunumunu gösteren (4.9) denkleminin yol açtığı $\dot{\mu}^m$ ve \dot{q}_a^m evrim denklemlerinin yanısıra, efektif toplam enerji-momentum korunumunu gösteren (4.8) denkleminin yol açtığı $\dot{\mu}^{ef,top}$ ve $\dot{q}_a^{ef,top}$ evrim denklemleridir. Tüm bu denklemleri uygun sıralama ve adlandırmalarla aşağıda listeliyoruz. Yazılıştta fazla karışıklığa yol açmamak için “ efektif toplam ” ve “ madde ” ibarelerini parantez içine alarak, sırasıyla, ” (et) ” ve “ (m) ” ile gösteriyoruz, ve ayrıca da: μ, p, q_a ve π_{ab} dinamik değişkenlerin önünde yazılması gereken κ^2 sabitini $\kappa^2 = 1$ alıyoruz.

EVRİM (YAYILMA) DENKLEMLERİ

$$\dot{\theta} = D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 + 2\omega^2 - \frac{1}{2} \left(\mu^{(et)} + 3p^{(et)} \right) + \Lambda \quad (E_1)$$

$$\dot{\omega}^a = \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c - \frac{2}{3} \theta \omega^a + \sigma^a{}_b \omega^b + u^a \dot{u}_b \omega^b \quad (E_2)^a$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} = & (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) - \sigma_{ac} \sigma^c{}_b - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b \\ & - \omega_a \omega_b - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2 - \omega^2) h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)} \right) \end{aligned} \quad (E_3)_{ab}$$

$$\begin{aligned} \left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^{(et)} \right) = & \left(E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_b + \left(E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_a \\ & + \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H^f{}_b + \eta_{bef} D^e H^f{}_a) - \frac{1}{4} (D_a q_b^{(et)} + D_b q_a^{(et)}) \\ & + \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^{(et)} - \frac{1}{2} (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a^{(et)} \dot{u}_b + q_b^{(et)} \dot{u}_a) \\ & + \frac{1}{3} h_{ab} q^e{}^{(et)} \dot{u}_e - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e{}_a \left(E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be}^{(et)} \right) \\ & + \frac{3}{2} \sigma^e{}_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^{(et)} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^{(et)} \right) \\ & - \frac{1}{2} \eta_{aef} \left[\left(E^e{}_b + \frac{1}{2} \pi^e{}_b{}^{(et)} \right) \omega^f + 2H^e{}_b \dot{u}^f \right] \\ & - \frac{1}{2} \eta_{bef} \left[\left(E^e{}_a + \frac{1}{2} \pi^e{}_a{}^{(et)} \right) \omega^f + 2H^e{}_a \dot{u}^f \right] \end{aligned} \quad (E_4)_{ab}$$

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{ab} = & (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left(E^f{}_b - \frac{1}{2} \pi^f{}_b{}^{(et)} \right) \\
& - \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left(E^f{}_a - \frac{1}{2} \pi^f{}_a{}^{(et)} \right) - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c{}_b + H_{bc} \sigma^c{}_a) \\
& - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + \frac{3}{4} (\omega_a q_b{}^{(et)} + \omega_b q_a{}^{(et)}) \\
& - \frac{1}{2} \omega_c q^c{}^{(et)} h_{ab} + (\eta_{aef} E^e{}_b + \eta_{bef} E^e{}_a) \dot{u}^f \\
& - \frac{1}{2} (\eta_{aef} H^e{}_b + \eta_{bef} H^e{}_a) \omega^f + \frac{1}{4} (\eta_{aef} \sigma^e{}_b + \eta_{bef} \sigma^e{}_a) q^f{}^{(et)}
\end{aligned} \tag{E_5}_{ab}$$

$$\dot{\mu}^{(m)} = -D_a q^a{}^{(m)} - (\mu^{(m)} + p^{(m)}) \theta - 2q^a{}^{(m)} \dot{u}_a - \pi^{ab(m)} \sigma_{ab} \tag{E_6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_a{}^{(m)} = & -D_a p^{(m)} - D^b \pi_{ab}{}^{(m)} - (\mu^{(m)} + p^{(m)}) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b{}^{(m)} - \frac{4}{3} \theta q_a{}^{(m)} \\
& + u_a \dot{u}^b q_b{}^{(m)} - \pi_{ab}{}^{(m)} \dot{u}^b + \eta_a{}^{bc} q_b{}^{(m)} \omega_c
\end{aligned} \tag{E_7}_a$$

$$\dot{\mu}^{(et)} = -D_a q^a{}^{(et)} - (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \theta - 2q^a{}^{(et)} \dot{u}_a - \pi^{ab(et)} \sigma_{ab} \tag{EE_6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_a{}^{(et)} = & -D_a p^{(et)} - D^b \pi_{ab}{}^{(et)} - (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b{}^{(et)} - \frac{4}{3} \theta q_a{}^{(et)} \\
& + u_a \dot{u}^b q_b{}^{(et)} - \pi_{ab}{}^{(et)} \dot{u}^b + \eta_a{}^{bc} q_b{}^{(et)} \omega_c
\end{aligned} \tag{EE_7}_a$$

BAĞ DENKLEMLERİ

$$(C_1)_a \equiv D^b \sigma_{ab} - \frac{2}{3} D_a \theta + \eta_{abc} D^b \omega^c + 2\eta_{abc} \dot{u}^b \omega^c + q_a{}^{(et)} = 0$$

$$(C_2) \equiv D_a \omega^a - \dot{u}_a \omega^a = 0$$

$$\begin{aligned}
(C_3)_{ab} \equiv & H_{ab} + (\omega_a \dot{u}_b + \omega_b \dot{u}_a) - \omega^e \dot{u}_e h_{ab} - \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e \sigma^f{}_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f{}_a) \\
& + \frac{1}{2} (D_a \omega_b + D_b \omega_a) = 0
\end{aligned}$$

$$(C_4)_a \equiv D^b \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)} \right) - \frac{1}{3} D_a \mu^{(et)} - \frac{1}{2} \sigma^b{}_a q_b^{(et)} + \frac{1}{3} \theta q_a^{(et)} \\ - \eta_{aef} \left(\sigma^{eb} H^f{}_b - \frac{3}{2} \omega^e q^{f(et)} \right) - 3 H^b{}_a \omega_b = 0$$

$$(C_5)_a \equiv D^b H_{ab} + \frac{1}{2} \eta_a{}^{ef} D_e q_f^{(et)} + (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \omega_a + 3 \left(E_{ab} - \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)} \right) \omega^b \\ + \eta_a{}^{ef} \sigma^b{}_e \left(E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}^{(et)} \right) = 0$$

4.3. TUTARLILIK VE UYUMLULUK ANALİZİ

$(E_1) - (EE_7)_a$ evrim denklemleri, t eşhareketli öz-zaman olmak üzere $t = t_0$ anında bir $\Sigma(t_0)$ yüzeyi üzerinde başlangıç verileri verildiği takdirde kinematik ve dinamik kovaryant değişkenleri tek türlü belirler. Bununla beraber, $(C_1)_a - (C_5)_a$ bağ denklemleri başlangıç verilerine kısıtlamalar getirir, yani, verilmiş bir $t = t_0$ için sağlanıyorlarsa her t için $\Sigma(t)$ yüzeyleri üzerinde sağlanmaları gerekir. Bunun böyle olup olmadığını anlamak için bağ denklemleri u^a doğrultusunda türetilir ya da başka bir deyişle bunların evrimi alınır. Şimdi, $C_A \equiv 0$ ($A=1,2,..$) ile bağ denklemleri gösterilsin. Eğer C_A nın evrimi, diğer bağ denklemlerinin

$$\dot{C}_A = \lambda_A{}^B C_B \quad , (A=1,2,...) \quad (4.41)$$

şeklinde bir çeşit kombinasyonu olarak ifade edilebiliyorsa, bu takdirde söz konusu bağ denkleminin her t için korunduğu sonucu çıkar.

\dot{C}_A nın hesabında ortaya çıkan dinamik ve kinematik değişkenlerin türevlerini elemek için evrim denklemleriyle birlikte pek çok özdeşlikler kullanılır ve tansör hesapları genellikle çok uzun ve karmaşıktır. EK A'da aşağıda hesapladığımız bağların evrimi için kullanılan kovaryant uzaysal türev ile zamansal türev ifadelerini ve aralarındaki ilişkileri topluca veriyoruz.

Eğer tüm bağ denklemleri, (4.41) tipinde bağıntılara uyuyorsa, bu taktirde bağ koşullarının tutarlı olduğu ve yayılım denklemleriyle tutarlı bir biçimde evrimleştiği sonucuna varılır. Aksi taktirde tutarsızlık ortaya çıkar. Böyle bir şeye şu durumlarda rastlanır. Varsayalım ki, bir bağ denkleminin evrimi, diğerlerinin bir kombinasyonuyla birlikte bir $\xi_A(\mu, p, \theta, \dots)$ “fonksiyonu” vermiş olsun; yani

$$\dot{C}_A = \lambda_A^B C_B + \xi_A(\mu, p, \theta, \dots) \quad (4.42)$$

olsun. Aşikâr olarak ξ_A nın korunması için

$$\xi_A(\mu, p, \theta, \dots) = 0 \quad (4.43)$$

olmalıdır. Buna, integre edilebilirlik koşulu ya da birincil bağ koşulu denir.

Tutarlılığı sürdürmek için bunun da zamana göre evrimini almak gerekir ve bir tutarlılığa rastlayıncaya kadar bu böyle sürer gider. Ancak, bazen integre edilebilirlik koşulları, türetildikçe tutarsızlığa götüren sonu gelmeyen zincirler oluşturabilir.

Konvansiyonel Kozmoloji çerçevesinde genel durumda (yani değişkenler üzerine hiçbir kısıtlama getirmeksizin) bağ denklemlerinin evriminin tutarlılığı olduğu Henk Van Elst [38] tarafından gösterilmiştir. Dönmesiz ($\omega=0$) ve ivmesiz toz için tutarlılık Roy Maartens tarafından gösterilmiştir [1]. Biz ise tutarlılığı, aşağıda, toz yerine mükemmel olmayan bir akışkan olarak $\omega=0$ için $f(R)$ -Gravite Kozmoloji’ sinde araştıracağız. Bundan önce bir de uyumluluktan ne kastedildiğini kısaca açıklayalım. Bu, başlangıç bağ koşullarının, yani, $C_A(t_0)=0$ koşullarının birbirleriyle uyumlu, yani, hepsinin aynı anda sağlanması demektir. Başka bir biçimde söylemek gerekirse, değişkenler için verilmiş başlangıç değerleri dışında herhangi bir başka başlangıç koşulunun ortaya çıkmamasıdır.

4.3.1. $\omega = 0$ Kısıtlaması Altında Evrim Ve Bağ Denklemleri

Şimdi, evrim ve bağ denklemlerini $\omega = 0$ koşuluyla kısıtlayalım, ve bu durum için denklemlerin tutarlılık ve uyumluluk analizini ele alalım. $(E_1) - (EE_7)_a$ ve $(C_1)_a - (C_5)_a$ denklemleri $\omega = 0$ kısıtlaması altında şu denklemlere indirgenir:

EVRİM DENKLEMLERİ

$$\dot{\theta} = D_a \dot{u}^a - \frac{1}{3} \theta^2 + \dot{u}_a \dot{u}^a - 2\sigma^2 - \frac{1}{2} \left(\mu^{(et)} + 3p^{(et)} \right) + \Lambda \quad (E_1)$$

$$0 = \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c \quad (E_2)^a \rightarrow (K_2)^a$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ab} = & (u_a \sigma_{bc} + u_b \sigma_{ac}) \dot{u}^c + \frac{1}{2} (D_a \dot{u}_b + D_b \dot{u}_a) - \sigma_{ac} \sigma^c_b - \frac{2}{3} \theta \sigma_{ab} + \dot{u}_a \dot{u}_b \\ & - \frac{1}{3} (D_c \dot{u}^c + \dot{u}_c \dot{u}^c - 2\sigma^2) h_{ab} - \left(E_{ab} - \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)} \right) \end{aligned} \quad (E_3)_{ab}$$

$$\begin{aligned} \left(\dot{E}_{ab} + \frac{1}{2} \dot{\pi}_{ab}^{(et)} \right) = & \left(E_{ae} + \frac{1}{2} \pi_{ae}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_b + \left(E_{be} + \frac{1}{2} \pi_{be}^{(et)} \right) \dot{u}^e u_a \\ & + \frac{1}{2} (\eta_{aef} D^e H^f_b + \eta_{bef} D^e H^f_a) - \frac{1}{4} (D_a q_b^{(et)} + D_b q_a^{(et)}) \\ & + \frac{1}{6} h_{ab} D^e q_e^{(et)} - \frac{1}{2} (\mu^{(et)} + p^{(et)}) \sigma_{ab} - \frac{1}{2} (q_a^{(et)} \dot{u}_b + q_b^{(et)} \dot{u}_a) \\ & + \frac{1}{3} h_{ab} q^e^{(et)} \dot{u}_e - \theta \left(E_{ab} + \frac{1}{6} \pi_{ab}^{(et)} \right) + \frac{3}{2} \sigma^e_a \left(E_{be} - \frac{1}{6} \pi_{be}^{(et)} \right) \\ & + \frac{3}{2} \sigma^e_b \left(E_{ae} - \frac{1}{6} \pi_{ae}^{(et)} \right) - h_{ab} \sigma^{ef} \left(E_{fe} - \frac{1}{6} \pi_{fe}^{(et)} \right) \\ & - \frac{1}{2} \eta_{aef} [2H^e_b \dot{u}^f] - \frac{1}{2} \eta_{bef} [2H^e_a \dot{u}^f] \end{aligned} \quad (E_4)_{ab}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{ab} = & (u_a H_{bc} + u_b H_{ac}) \dot{u}^c - \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e \left(E^f_b - \frac{1}{2} \pi^f_b{}^{(et)} \right) \\ & - \frac{1}{2} \eta_{bef} D^e \left(E^f_a - \frac{1}{2} \pi^f_a{}^{(et)} \right) - \theta H_{ab} + \frac{3}{2} (H_{ac} \sigma^c_b + H_{bc} \sigma^c_a) \\ & - H_{ef} \sigma^{ef} h_{ab} + (\eta_{aef} E^e_b + \eta_{bef} E^e_a) \dot{u}^f + \frac{1}{4} (\eta_{aef} \sigma^e_b + \eta_{bef} \sigma^e_a) q^f{}^{(et)} \end{aligned} \quad (E_5)_{ab}$$

$$\dot{\mu}^{(m)} = -D_a q^{a(m)} - \left(\mu^{(m)} + p^{(m)} \right) \theta - 2q^{a(m)} \dot{u}_a - \pi^{ab(m)} \sigma_{ab} \quad (E_6)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{(m)} = & -D_a p^{(m)} - D^b \pi_{ab}^{(m)} - \left(\mu^{(m)} + p^{(m)} \right) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b^{(m)} - \frac{4}{3} \theta q_a^{(m)} \\ & + u_a \dot{u}^b q_b^{(m)} - \pi_{ab}^{(m)} \dot{u}^b \end{aligned} \quad (E_7)_a$$

$$\dot{\mu}^{(et)} = -D_a q^{a(et)} - \left(\mu^{(et)} + p^{(et)} \right) \theta - 2q^{a(et)} \dot{u}_a - \pi^{ab(et)} \sigma_{ab} \quad (EE_6)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_a^{(et)} = & -D_a p^{(et)} - D^b \pi_{ab}^{(et)} - \left(\mu^{(et)} + p^{(et)} \right) \dot{u}_a - \sigma^b{}_a q_b^{(et)} - \frac{4}{3} \theta q_a^{(et)} \\ & + u_a \dot{u}^b q_b^{(et)} - \pi_{ab}^{(et)} \dot{u}^b \end{aligned} \quad (EE_7)_a$$

BAĞ DENKLEMLERİ

$$(C_1)_a \equiv D^b \sigma_{ab} - \frac{2}{3} D_a \theta + q_a^{(et)} = 0$$

$$(C_2) \equiv 0 \equiv 0$$

$$(C_3)_{ab} \equiv H_{ab} - \frac{1}{2} \left(\eta_{aef} D^e \sigma^f{}_b + \eta_{bef} D^e \sigma^f{}_a \right) = 0$$

$$\begin{aligned} (C_4)_a \equiv & D^b \left(E_{ab} + \frac{1}{2} \pi_{ab}^{(et)} \right) - \frac{1}{3} D_a \mu^{(et)} - \frac{1}{2} \sigma^b{}_a q_b^{(et)} + \frac{1}{3} \theta q_a^{(et)} \\ & - \eta_{aef} \sigma^{eb} H^f{}_b = 0 \end{aligned}$$

$$(C_5)_a \equiv D^b H_{ab} + \frac{1}{2} \eta_a{}^{ef} D_e q_f^{(et)} + \eta_a{}^{ef} \sigma^b{}_e \left(E_{fb} + \frac{1}{2} \pi_{fb}^{(et)} \right) = 0$$

4.3.1.a. Tutarlılık Analizi

Yukarıdaki listeden kolayca anlaşılacağı üzere 5 bağ koşulundan biri olan (C_2) , özdeş olarak sağlanmakta; $(E_2)^a$ evrim denklemi ise $(K_2)^a$ ile gösterdiğimiz yeni bir bağ denklemine dönüşmektedir. $\omega \neq 0$ durumuna karşılık gelen önceki bağların tutarlılığı bilinmesine karşın, $\omega = 0$ koşulunun empoze edilmesiyle oluşan yeni bağ denkleminin tutarsızlıklara yol açmayacağına peşinen bir garantisi yoktur. O bakımdan

$\{(K_2)^a, (C_1)_a, (C_3)_{ab}, (C_4)_a, (C_5)_a\}$ bağ sisteminin evrimleşmesini incelemek gerekmektedir. İzlenecek yöntem ana hatlarıyla şöyledir:

Önce her bir bağ denkleminin zamana göre türetilir. Bu aşamada, zamansal ve uzaysal türevlerin komütasyon bağıntısı olan ve (A.1) – (A.3) ile gösterilen bağıntılar kilit bir rol oynar. Türetme sonrasında ortaya çıkan değişkenlerin türevlerini elemek için ise evrim denklemleri kullanılır. İkinci mertebeden uzaysal türevleri birinci mertebeden uzaysal türevlere indirgemek için de (A.4) – (A.10) ile gösterilen uzaysal türevlerin komütasyon bağıntılarından yararlanır. Ve en sonunda da, kalan terimleri toparlamak için (A.19) – (A.22) ile gösterilen özdeşliklerden yararlanır.

- $(C_1)^a$ nın evrimleşmesi

(A.1) ve (A.3) kullanılarak uzaysal türevlerin zamana göre türevleri alınır. (E_1) den $\dot{\theta}$; $(E_3)_{ab}$ den $\dot{\sigma}_{ab}$ ve $(EE_7)_a$ dan da $\dot{q}_a^{(et)}$ ifadeleri kullanılır. (E_1) ve $(E_3)_{ab}$ nin uzaysal türevleri kullanılır. (A.8) ile (A.15) kullanılarak düzenlenir.

- $(C_3)_{ab}$ nin evrimleşmesi

Uzaysal bir tansörün zamana göre türevinin ifadesi olan (A.3) kullanılır.

$(E_3)_{ab}$ den $\dot{\sigma}_{ab}$ ve $(E_5)_{ab}$ den de \dot{H}_{ab} çekilir.

$(E_3)_{ab}$ den $\dot{\sigma}_{ab}$ nin diverjansı alınır. (A.13) , (A.17) , (A.18) bağıntıları kullanılır ve (A.20) özdeşliğinden yararlanarak düzenlenir.

- $(C_4)_a$ nın evrimleşmesi

(A.1) , (A.2) , (A.3) kullanılır. Değişkenlerin türevleri için (E_1) , $(E_3)_{ab}$, $(E_5)_{ab}$, (EE_6) ve $(EE_7)_a$ evrim denklemleri kullanılır. (A.18) den yararlanır. (A.21) ve (A.22) özdeşlikleri , (A.18) ile (A.15) ve (A.9) ile (A.13) kullanılır. (A.21) ve (A.22) özdeşlikleriyle kalan terimler toplanır.

- $(C_5)_a$ nın evrimleşmesi

$(C_1)^a$ ninkine benzer şekilde yapılır.

- $(K_2)_a$ nın evrimleşmesi

$$(K_2)^a = \frac{1}{2} \eta^{abc} D_b \dot{u}_c = 0$$

bağıntısı , (A.16) dan dolayı, ψ keyfi bir skaler fonksiyon olmak üzere ,

$$\dot{u}_c = D_c \psi$$

yazılmasına olanak sağlar. Bu taktirde,

$$\ddot{u}_c = (D_c \psi)'$$

olur. (A.1) , (A.2) , (A.18) kullanılırsa gerekli düzenlemelerden sonra $(K_2)_a$ nın türevi elde edilir.

Sonuçta, bulunanları topluca gösterirsek

$$(\dot{K}_2)_a = \frac{1}{2} \eta_{abc} \dot{u}^c (C_1)^b - \frac{2}{3} \theta (K_2)_a + \dot{u}^b (C_3)_{ab}$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_1)_{\langle a \rangle} &= -\theta (C_1)_a - 2\eta_{aef} \sigma^{eg} (C_3)_g^f - (C_4)_a - \eta_a^{ef} D_e (K_2)_f \\ &\quad - 3\eta_a^{ef} \dot{u}_e (K_2)_f \end{aligned}$$

$$(\dot{C}_3)_{\langle ab \rangle} = -\theta(C_3)_{\langle ab \rangle} + \eta_{ef\langle a} \sigma^e{}_{b \rangle} (C_1)^f - \frac{3}{2} \dot{u}_{\langle a} (K_2)_{b \rangle}$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_4)_{\langle a \rangle} &= \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_5)^f - \frac{4}{3} \theta(C_4)_a + \frac{1}{2} \sigma_{af} (C_4)^f - \frac{1}{2} \eta_{aef} \omega^e (C_4)^f \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mu^{et} + p^{et})(C_1)_a + \frac{3}{2} (E_{af} + \frac{1}{6} \pi_{af}^{et})(C_1)^f \\ &\quad + \eta_{aef} (E^e{}_d - \frac{1}{2} \pi^e{}_d{}^{et})(C_3)^{fd} + \frac{3}{2} \eta_{aef} \dot{u}^e (C_5)^f \\ &\quad + \frac{3}{2} \eta_a{}^{ef} q_e{}^{et} (K_2)_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\dot{C}_5)_{\langle a \rangle} &= -\frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_4)^f - \frac{4}{3} \theta(C_5)_a + \frac{1}{2} \sigma_{af} (C_5)^f - \frac{3}{4} \eta_{aef} q^e{}^{et} (C_1)^f \\ &\quad + \frac{3}{2} H_{af} (C_1)^f + \frac{1}{2} q_f{}^{et} (C_3)_a{}^f + \eta_{aef} H^{ed} (C_3)^f{}_d \\ &\quad - \frac{3}{2} \eta_{aef} \dot{u}^e (C_4)^f + 3(E_a{}^e - \frac{1}{6} \pi_a{}^e{}^{et})(K_2)_e \\ &\quad - (\mu^{et} + p^{et})(K_2)_a \end{aligned}$$

Bu sonuçtan kolayca anlaşılmaktadır ki, bağların evrimleşmeleri herhangi bir integrale edilebilirlik koşuluna yol açmamaktadır. Dolayısıyla bağlar tutarlı olup yayılım denklemleriyle tutarlı bir biçimde evrimleşmektedirler.

Ayrıca, birazdan referans vereceğimiz için bu bağ koşulları arasında

$$(C_5)_{\cdot a} = \frac{1}{2} \eta_{aef} D^e (C_1)^f + D_f (C_3)_a{}^f$$

gibi bir bağıntı da gösterdiğimizizi kaydedelim.

4.3.1.b. Uyumluluk Analizi

Şimdi, $\{(K_2)^a, (C_1)_a, (C_3)_{ab}, (C_4)_a, (C_5)_a\}$ bağ sisteminde başlangıç bağlarının uyumlu olup olmadığını, yani, değişkenler için verilmiş başlangıç değerleri dışında herhangi bir başka başlangıç koşulunun ortaya çıkıp çıkmadığını inceleyelim.

Mesela, $\sigma_{ab}(t_0)$ ile $\theta(t_0)$ büyüklüklerini serbestçe seçelim. Bu taktirde $(C_1)^a$ bağ koşulu $q_a^{(et)}$ yi; ve $(C_3)_{ab}$ de $H_{ab}(t_0)$ 'ı belirler. Kezâ, $(K_2)_a$ da $\dot{u}_a(t_0)$ 'ı belirler. $H_{ab}(t_0)$ ile $q_a(t_0)$ nın bilinmesi $(C_5)_a$ daki $E_{ab}(t_0) + \frac{1}{2}\pi_{ab}(t_0)$ terimleri belirlenir. Tüm bu bilinen terimlerden dolayı $(C_4)_a$ denkleminde $\mu(t_0)$ bulunur. Dolayısıyla $\sigma_{ab}(t_0)$ ile $\theta(t_0)$ değişkenlerinin keyfi seçimi altında diğerlerinin başlangıç değerlerinin belirlenmesi için bağ denklemleri yeterli olup fazladan bir koşula gereksinim bulunmamaktadır.

Bir başka örnek olarak; $\mu(t_0)$, $\sigma_{ab}(t_0)$ ve $E_{ab}(t_0) + \frac{1}{2}\pi_{ab}(t_0)$ büyüklüklerini serbestçe seçelim. $(C_3)_{ab}$ den $H_{ab}(t_0)$ 'ı bulabiliriz. Bu taktirde $(C_5)_a$ 'dan $q_a(t_0)$ elde edilmektedir. Tüm bu bilinenler $(C_4)_a$ ya yerleştirilirse $\theta(t_0)$ bulunmuş olur. Öte yandan $\dot{u}_a(t_0)$ da $(K_2)_a$ dan bulunmuş olacağından sonuçta $\mu(t_0)$, $\sigma_{ab}(t_0)$, $E_{ab}(t_0) + \frac{1}{2}\pi_{ab}(t_0)$, $H_{ab}(t_0)$, $q_a(t_0)$, $\theta(t_0)$ ve $\dot{u}_a(t_0)$ olmak üzere tüm bilinmeyenler belirlenmiş olur. Ancak $\sigma_{ab}(t_0)$ 'ın verilmesinden dolayı, $(C_1)^a = 0$ denklemi sanki q_a ve θ arasında yeni bir bağ koşulu dayatıyormuş gibi bir izlenim oluşturabilir. Ancak bu doğru değildir. Zira bağ denklemleri arasındaki

$$(C_5)_a = \frac{1}{2}\eta_{aef} D^e (C_1)^f + D_f (C_3)_a^f$$

bağıntısı, eğer $(C_5)_a(t_0) = 0$ ve $(C_3)_{ab}(t_0) = 0$ sağlandığında $(C_1)_a(t_0)$ 'ın da özdeş olarak sıfıra eşit olacağı söylenmektedir. O halde Bağ koşulları arasında bir uyumsuzluk bulunmamaktadır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tez' imizin dayanağını oluşturan 1+3 Kovaryant ayrışım yöntemi, madde dağılımının kozmolojik kapsamda bir akışkan gibi tasavvur edilmesi durumunda, gerek akışkanın kinematik ve dinamik değişkenlerine fiziksel olarak berrak bir anlam yüklemesi bakımından, gerek bir kovaryant seçiminden, yani gözlemciden bağımsız olması bakımından, ve gerekse de söz konusu değişkenler arasındaki ilişkiyi bir bütün olarak ortaya koyması bakımından son derece güçlü bir yöntemdir. Diğer bir önemli üstünlüğü de, herhangi bir gravitasyon teorisine kolayca uyarlanabilir olmasıdır. Rölativist Kozmoloji' de, geometriden akışkanın dinamik özelliklerine geçiş, EAD aracılığıyla, yani R_{ab} Ricci Eğrilik tansörünün Enerji-Momentum tansörü cinsinden cebirsel ifadesi aracılığıyla olmaktadır. Bu geçiş, $f(R)$ -gravite için, Tez' de gördüğümüz gibi, formel olarak yine aynı şekilde olmuştur. Şu farkla ki, $f(R)$ -gravite' de bir efektif akışkan tasavvur etmek zorunda kalınmıştır. Einstein teorisinde R_{ab} doğrudan doğruya akışkanın fiziksel dinamik değişkenlerine bağılıyken, $f(R)$ -gravite' de dinamik değişkenler efektif olarak yorumlandığından yalnızca madde değişkenlerine değil, fakat aynı zamanda akışkanın kinematik değişkenlerine de bağılı olmaktadır.

Efektif akışkan yaklaşımının formel olarak pratik bir gereklilik payı olmakla birlikte, gerçek katkının maddenin dinamik değişkenlerinden mi, yoksa dinamik değişken gibi davranan kinematik katkılardan mı kaynaklandığını ayırt etmek mümkün görünmemektedir. Her ne kadar efektif akışkan yorumu tartışmasız değilse de, Tezimizde gösterdiğimiz gibi, Rölativist Kozmoloji' nin evrim ve bağ denklemlerinin $f(R)$ -gravite teorisine genelleştirilmesini çok büyük ölçüde kolaylaştırmıştır. $f(R)$ -gravite' de evrim ve bağ denklemlerinin tutarlılık ve uyumluluk analizini yalnızca $\omega = 0$ yani dönmesiz akışkan için yaptık. Bu kısıtlama, evrim denklemlerinden $(E_2)^a$ yı bir bağ koşuluna dönüştürmüştü. Yukarıdaki analizimiz, bu yeni bağ koşuluyla eskilerin tutarlı olduğunu yani, bir (t_0) başlangıç zamanında sağlanan bağların, herhangi bir t zamanında da sağlanacağını, başka bir deyişle tutarlı bir biçimde evrimleşeceğini gösterdi. Öte yandan, yine bu yeni bağ koşuluyla eskilerin uyumluluk içinde olduğu, yani verilmiş bir t_0 anındaki bağların, değişkenleri belirleme bakımından yeterli olduğu, ya da başka bir deyişle, fazladan koşula gereksinim olmadığı gösterildi.

Bu şu anlama gelmektedir. $f(R)$ -gravite çerçevesinde dönmesiz modeller için evrim ve bağ denklemleri tutarlıdır yani böyle modeller vardır. Bu yöntem, böyle modellerin var olduğunu ortaya koymaktadır, ama neler olduğunu söylememektedir. Bunun için metrik

realizasyon, yani metriğin inşası gerekir ki bu, çok daha basit $\dot{u}_a = 0$, $\omega = 0$, $\sigma_{ab} = 0$ durumunda ve de Rölativist Kozmoloji çerçevesinde yeteri kadar uzun ve karmaşık bir problemdir [49]. O yüzden bu Tez kapsamı içinde dönmesiz modellerin yalnızca varlığını göstermekle yetiniyor, neler olduğunu ise sonraki çalışmalarımıza bırakıyoruz.

KAYNAKLAR

- [1]. MAARTENS, R., 1997, Phys.Rev. D55,463.
- [2]. MUTUŞ, H., 1979, *Mach İlkesi ve Teorik Gelişmeleri*, Teorik Fizik Yüksek Lisans Tezi
- [3]. WALD, R.M., 1984, *General Relativity*, The University of Chicago Press.
- [4]. ÖZEMRE, A.Y., 1982, *Gravitasyonun Rölativist Teorileri*, Teorik Fizik Dersleri, İst. Üniv. Yay. 2952, Fen Fak., Cild 7, Sayı 168, s. 159 – 164.
- [5]. GUARNIZO, A., CASTANEDA, L., TEJEIRO, J.M., 2010, *Variational Principles in Modified Gravity: Field Equations in $f(R)$ Gravity*, e-print: <http://xxx.lanl.gov> , e-print:1002.0617v2 [gr-qc], [ziyaret tarihi: 27 aralık 2012, saat: 22:00].
- [6]. WEYL, H., 1950, *Space-Time-Matter*, Dover, New York, First American printing of the 1922 ,4th ed.
- [7]. EDDINGTON, A.S., 1952, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press.
- [8]. SOTİRİOU, T. P., October 2007, *Modified Achous For Gravity: Theory and Phenomenology*, PhD. Thesis, Chapter 1, S. 27-29.
- [9]. BUCHDAHL, H. A., 1970, Non-Linear Lagrangians and Cosmological Theory, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 150, 1_8.
- [10]. ÖZEMRE, A.Y., 1981, *Kozmolojiye Giriş*, Teorik Fizik Dersleri, İst. Üniv. Yay. 2890, Fen Fak., Cild 8, Sayı 161.
- [11]. GOMEZ, D. S., 2011, *On Friedmann_Lemaitre_Robertson_Walker Cosmologies in Non-Standard Gravity*, PhD thesis, Barcelona, Chapter 1.
- [12]. NICOLSON, I., 2007, *Dark Side of the Universe*, Canopus Publishing Limited, UK, Printed in China , ISBN 0954984633.
- [13]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., 2004, Modified Gravity with In R Terms and Cosmic Acceleration, *Gen. Rel. Grav.*, 36:1765-1780, (<http://xxx.lanl.gov> , e-print:hep-th/0308176), [ziyaret tarihi: 29 aralık 2012, saat: 21:05].

- [14]. NOJIRI,S., ODINTSOV, S.D., 2006, *Introduction to Modified Gravity and Gravitational Alternative for Dark Energy*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:hep-th/0601213, [ziyaret tarihi: 2 ocak 2013, saat: 14:18].
- [15]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., 2007, Modified gravity as an alternative for Λ CDM cosmology, *J. Phys. A.*, 40:6725-6732, (<http://xxx.lanl.gov> , e-print:hep-th/0610164), [ziyaret tarihi: 2 ocak 2013, saat: 16:20].
- [16]. NOJIRI,S., ODINTSOV, S.D., 2007, Unifying inflation with Λ CDM epoch in modified $f(R)$ gravity consistent with Solar System tests., *Phys.Letter.B*, 657:238-245, (<http://xxx.lanl.gov> , e-print:0707.1941), [ziyaret tarihi: 21 aralık 2012, saat: 20:13].
- [17]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S.D., 2008, *Can $F(R)$ -gravity be a viable model: the universal unification scenario for inflation, dark energy and dark matter*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:0801.4843, [ziyaret tarihi: 4 mart 2013, saat: 14:18].
- [18]. DERUELLE, N., SASAKI, M., SENDOUDA, Y., 2008, “Detuned” $f(R)$ Gravity and Dark Energy, *Phys. Rev. D* 77, 124024.
- [19]. EVANS, J. D., HALL, L. M. H., CAILLOL, P., 2008, Standard Cosmological Evolution in a Wide Range of $f(R)$ Models, *Phys. Rev. D* 77, 083514.
- [20]. KLUSON, J., 2010, New Models of $f(R)$ Theories of Gravity, *Phys. Rev. D* 81, 064028.
- [21]. ABDELWAHAB, M., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, Cosmological Dynamics of “Exponential Gravity”, *Class. Quantum Grav.* 25, 135002 (20 pp).
- [22]. GOHEER, N., GOSWAMI, R., DUNSBY, P. K. S., ANANDA, K., 2009, Coexistence of Matter Dominated and Accelerating Solutions in $f(G)$ Gravity, *Phys. Rev. D* 79, 121301.
- [23]. GOHEER, N., LARENA, J., DUNSBY, P. K. S., 2009, Power-law Cosmic Expansion in $f(R)$ Gravity Models, *Phys. Rev. D* 80, 061301.
- [24]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S. D., 2003, Modified Gravity with Negative and Positive Powers of Curvature: Unification of Inflation and Cosmic Acceleration, *Phys. Rev. D* 68, 123512.
- [25]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S., D., 2003, Modified Gravity with Negative and Positive Powers of Curvature: Unification of Inflation and Cosmic Acceleration, *Phys. Rev. D*.68, 123512.
- [26]. NOJIRI, S., ODINTSOV, S., D., 2003, *Modified Gravity with $\ln R$ Terms and Cosmic Acceleration*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: hep-th/0308176v2, [ziyaret tarihi: 4 mart 2013, saat:21:00].

- [27]. PADMANABHAN, T., 2007, *Dark Energy and Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: 0705.2533v1 [gr-qc], [ziyaret tarihi: 5 mart 2013, saat: 17:30].
- [28]. PADMANABHAN, T., 2008, *Dark Energy and Its Implications for Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: 0807.2356v1 [gr-qc], [ziyaret tarihi: 5 mart 2013, saat: 18:10].
- [29]. SONG, Y.-S., HU, W., SAWICKI, I., 2007, Large Scale Structure of f(R) Gravity, *Phys. Rev. D* 75, 044004.
- [30]. BAGHRAM, S., FARHANG, M., RAHVAR, S., 2007, Modified Gravity with $f(R) = \sqrt{R^2 - R_0^2}$, *Phys. Rev. D* 75, 044024.
- [31]. HECKMANN, O., SCHUKING, E., 1955, *Zeits. f. Astroph.*, 38, 95.
- [32]. RAYCHAUDHURI, 1957, *Zeits. f. Astroph.* 43, 161.
- [33]. EHLERS, J., 1961, Beitrage zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien, *Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abhandl. Math. Nat.*, Kl., 11.
Translation: EHLERS, J. 1993, Contributions to the Relativistic Mechanics of Continuous Media, *Gen. Rel. Grav.*, 25, 1225.
- [34]. ELLIS, G., 1971, Relativistic Cosmology, *General Relativity and Cosmology, Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi"*, Course XLVII, Academic Press, 104_180.
- [35]. ELLIS, G., 1973, *Relativistic Cosmology, Cargese Lectures in Physics*, Gordon and Breach, Vol. 6, Ed: E. Schatzman, New York, 1_60.
- [36]. ELLIS, G., ELST, H. VAN ., 1998, *Cosmological Models, Cargese Lectures in Physics*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:gr-qc/9812046, [ziyaret tarihi: 6 mart 2013, saat: 17.30].
- [37]. GÜDEKLİ, E., 2004, *Bianchi Tip Çözümlerde Ufuk-Eşyönlüleşme Meseleleri*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [38]. VAN ELST, H., 1996, *Extensions and Applications of 1+3 Decomposition Methods in General Relativistic Cosmological Modelling*, Doktora Tezi, Queen Mary, Westfield College, London, United Kingdom.
- [39]. SOFUOĞLU, D., 2008, *Konvansiyonel Kozmolojinin Tetrad Teoremleri ve Zevren Kozmolojisindeki Benzerleri*, Yüksek Lisans Tezi, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [40]. RIPPL, S., VAN ELST, H., TAVAKOL, R., TAYLOR, D., 1996, Kinematics and Dynamics of f(R) Theories of Gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 28, 193.
- [41]. BUCHDAHL, H. A., 1970, Non-linear Lagrangians and Cosmological Theory, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 150, 1-8.

- [42]. QUERELLA, L., 1998, *Variational Principles and Cosmological Models in Higher-Order Gravity*, Doktora Tezi, Universite De Liege, Institut d'astrophysique et de gCophysique.
- [43]. CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., CAPOZZIELLO, S., TROISI, A., 2005, Cosmological Dynamics of R^n Gravity, *Class. Quantum Grav.* 22 4839.
- [44]. ANANDA, K. N., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, Evolution of Cosmological Gravitational Waves in $f(R)$ Gravity, *Phys. Rev. D* 77, 024033.
- [45]. ANANDA, K. N., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, *A Detailed Analysis of Structure Growth in $f(R)$ Theories of Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print: [0809.3673v1](http://arxiv.org/abs/0809.3673v1) [astro-ph], [ziyaret tarihi: 6 mart 2013, saat: 23:15].
- [46]. ANANDA, K. N., CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., 2008, *A Characteristic Signature of Fourth Order Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:[0812.2028v1](http://arxiv.org/abs/0812.2028v1) [astro-ph], [ziyaret tarihi: 6 mart 2013, saat: 23:45].
- [47]. CARLONI, S., DUNSBY, P. K. S., TROISI, A., 2009, *Cosmological Dynamics of fourth Order Gravity*, <http://xxx.lanl.gov> , e-print:[0906.1998v1](http://arxiv.org/abs/0906.1998v1) [gr-qc], [ziyaret tarihi: 7 mart 2013, saat: 08.30].
- [48]. SOFUOĞLU, D., Hazırlanmakta, *Yüksek Mertebeden Eğrilikli Gravitasyonda Makaslamaşız Kozmik Akışkan İddiası*, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [49]. ERMAN, M., SOFUOĞLU, D., GÜDEKLİ, E., 2012, Covariant Cosmological Evolution and Constraint Equations in Higher-order Gravity Theories, *Turkish Physical Society 29th International Physics Congress Books of Abstract*, 5-8 September 2012, Bodrum, Turkey, 335.

EK A

Bu bölümde bağ denklemlerinin evrimini hesaplamak için skaler, vektör ve tansörlerin uzaysal türevleri ile zamansal türevleri arasındaki ilişkileri $\omega=0$ hali için topluca veriyoruz. Bunlar, kendi notasyonumuza ve işaret kabullerimize uyarlanmış olarak Henk Van Elst [38] ve D. Sofuoğlu'nun [48] çalışmalarından derlenmiştir.

Uzaysal Türevlerin Kovaryant Zaman Türevleri

Bir skaler için:

$$(D_a \phi)' = D_a \dot{\phi} + \dot{u}_a \phi + u_a \dot{u}^e D_e \phi - \mathcal{G}^e{}_a D_e \phi \quad (\text{A.1})$$

Bir uzaysal 3-vektör için:

$$\begin{aligned} (D_a X_b)' &= D_a \dot{X}_b + \dot{u}_a h^f{}_b \dot{X}_f - \mathcal{G}^e{}_a D_e X_b - \dot{u}_b \mathcal{G}^f{}_a X_f + u_a \dot{u}^f D_f X_b \\ &+ u_b \dot{u}^f D_a X_f - \eta_{bef} H^f{}_a X^e - \frac{1}{2} (X_a q_b - h_{ab} q_f X^f) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Bir uzaysal 2. mertebeden 3-tansör için:

$$\begin{aligned} (D_a X_{bc})' &= D_a \dot{X}_{bc} + \dot{u}_a h^e{}_b h^f{}_c \dot{X}_{ef} - \mathcal{G}^e{}_a D_e X_{bc} - \dot{u}_b \mathcal{G}^f{}_a X_{fc} \\ &- \dot{u}_c \mathcal{G}^f{}_a X_{bf} + u_a \dot{u}^f D_f X_{bc} + u_b \dot{u}^f D_a X_{fc} + u_c \dot{u}^f D_a X_{bf} \\ &- \eta_{bef} H^f{}_a X^e{}_c - \frac{1}{2} (X_{ac} q_b - h_{ab} q_f X^f{}_c) \\ &- \eta_{cef} H^f{}_a X^e{}_b - \frac{1}{2} (X_{ab} q_c - h_{ac} q_f X^f{}_b) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Uzaysal Türevlerin Kovaryant Komütasyon Bağlıları

Bir skaler için:

$$(D_a D_b - D_b D_a) \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$(D^2 D_a - D_a D^2) \phi = {}^3 R_{ad} (D^d \phi) \quad (\text{A.5})$$

$$(D^a D_b D_a - D_b D^2) \phi = {}^3 R_{bd} (D^d \phi) \quad (\text{A.6})$$

Bir Vektör için ($X_a u^a = 0$, X_a vektörü u^a ya dik)

$$(D_a D_b - D_b D_a) X_c = {}^3 R_{abcd} X^d \quad (\text{A.7})$$

$$(D^a D_b - D_b D^a) X_a = {}^3 R_{bd} X^d \quad (\text{A.8})$$

Bir 2-Tansör için ($T_{ab} u^a = T_{ab} u^b = 0$, T_{ab} tansörü u^a ya dik)

$$D_{[a} D_{b]} T_{cd} = \frac{1}{2} ({}^3 R_{abcm} T^m{}_d + {}^3 R_{abdm} T^m{}_c) \quad (\text{A.9})$$

ve benzer şekilde

$$D_{[a} D_{b]} T_{cd\dots ef} = \frac{1}{2} ({}^3 R_{abcm} T^m{}_{d\dots ef} + {}^3 R_{abdm} T^m{}_{c\dots ef} + \dots + {}^3 R_{abem} T^m{}_{cd\dots f} + {}^3 R_{abfm} T^m{}_{cd\dots e}) \quad (\text{A.10})$$

Burada ${}^3 R_{abcd}$, gözlemcinin anlık durgunluk uzayının Riemann tansörüdür ve Gauss Denklemi ile tanımlanır:

$${}^3 R_{abcd} = h^m{}_a h^n{}_b h^p{}_c h^q{}_d R_{mnpq} - (\mathcal{G}_{ac} \mathcal{G}_{bd} - \mathcal{G}_{bc} \mathcal{G}_{ad}) \quad (\text{A.11})$$

Riemann eğrilik tansörünün, Weyl tansörünü içeren

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{1}{2} (g_{ac} R_{bd} - g_{ad} R_{bc} + g_{bd} R_{ac} - g_{bc} R_{ad}) - \frac{R}{6} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad (\text{A.12})$$

ifadesi kullanılır ise

$$\begin{aligned} {}^3 R_{abcd} = & -\eta_{abr} \eta_{c ds} E^{rs} + \frac{1}{3} (\mu + \Lambda - \frac{1}{3} \theta^2) (h_{ac} h_{bd} - h_{ad} h_{bc}) \\ & + \frac{1}{2} (h_{ac} \pi_{bd} + h_{bd} \pi_{ac} - h_{ad} \pi_{bc} - h_{bc} \pi_{ad}) - \sigma_{ac} \sigma_{bd} \\ & - \frac{1}{3} \theta \sigma_{ac} h_{bd} - \frac{1}{3} \theta \sigma_{bd} h_{ac} + \frac{1}{3} \theta \sigma_{ad} h_{bc} + \sigma_{ad} \sigma_{bc} + \frac{1}{3} \theta \sigma_{bc} h_{ad} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

elde edilir. Öte yandan,

3-Ricci tansörü de, Gauss Denklemine büzülmesi ile

$$\begin{aligned}
{}^3R_{bd} &= h^{ac} R_{abcd} \\
&= h^{ac} [(R_{abcd})_{\perp} - (\mathcal{G}_{ac} \mathcal{G}_{bd} - \mathcal{G}_{bc} \mathcal{G}_{ad})] \\
&= h^n_b h^q_d R_{nq} + u^m u^p h^n_b h^q_d R_{mpq} - (\mathcal{G}^a_a \mathcal{G}_{bd} - \mathcal{G}_b^a \mathcal{G}_{ad})
\end{aligned} \tag{A.14}$$

ifade edilip 2. terimin hesabı yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}^3R_{bd} &= E_{bd} + \frac{1}{2} h^n_b h^q_d R_{nq} + \frac{1}{2} h_{bd} u^m u^p R_{mp} + \frac{1}{6} R h_{bd} \\
&\quad - \left(\frac{1}{3} \theta \sigma_{bd} + \frac{2}{9} \theta^2 h_{bd} - \sigma^e_b \sigma_{ed} \right)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

bulunur.

Öte yandan, η_{abc} psödo tansörü içeren ve işlemler sırasında kullanılan bağıntılar

$$\eta^{abc} D_a D_b \phi = 0 \tag{A.16}$$

$$\eta_{aef} D^e D^f X_b = \frac{1}{2} \eta_{aef} {}^3R^{ef}_{bd} X^d \tag{A.17}$$

$$\dot{\eta}_{abc} = 3u_{[a} \eta_{bc]} \dot{u}^d = (u_a \eta_{bcd} + u_b \eta_{cad} + u_c \eta_{abd}) \dot{u}^d \tag{A.18}$$

dır.

Bunlara ek olarak, Henk Van Elst' ten alınan özdeşlikler [38] aşağıda listelenmiştir:

V_a, W_b birer uzaysal vektör ve A_{ab} de uzaysal tansör olmak üzere,

$$0 = \eta^{abc} A_{bd} V_c W^d - \eta^{abc} A_{bd} W_c V^d - A^a_b \eta^{bcd} V_c W_d \tag{A.19}$$

$$0 = V^{<a} \eta^{b>cd} (D_c V_d) + \eta^{cd<a} V_c (D_d V^{b>}) - \eta^{cd<a} V_c (D^{b>} V_d) \tag{A.20}$$

$$0 = \eta^{abc} A_b^d (D_c V_d) - \eta^{abc} A_b^d (D_d V_c) - A^a_b \eta^{bcd} (D_c V_d) \tag{A.21}$$

$$0 = \eta^{abc} V_b (D_d A_c^d) - 2V_b \eta^{cd[a} (D_c A^{b]}_d) \tag{A.22}$$

dir.

ÖZGEÇMİŞ

27 Aralık 1987 tarihi, İstanbul Kadıköy doğumluyum. İlk ve Orta okulu Fatih'te, liseyi ise Bahçelievler'de tamamladım. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü'nü kazandım. İlk yılda gösterdiğim başarı ve aldığım bölüm birinciliği onur belgesiyle, 2007'de İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü'ne yatay geçiş yaparak lisans ve yüksek lisans eğitimimi burada tamamladım.

Mayıs, 2013

Derya YILMAZ