T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA

DEĞİŞMESİZ UZAYDA FİZİKSEL SİMETRİLERİN TANIMLANMASI VE FİZİKSEL UYGULAMALARI

Erdinç Ulaş SAKA
Fizik
Genel Fizik

Danışman
Prof.Dr. Y.Gürkan ÇELEBİ
II. Danışman
Prof.Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Kasım,2013
İSTANBUL

Bu çalışma 04/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Genel Fizik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi:

Prof. Dr.Y.Gürkan ÇELEBİ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. K.İlhan İKEDA
Yeditepe Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Haşim MUTUŞ
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. S. Kayhan ÜLKER
Mimar Sinan Güzel Sanatlar
Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Prof. Dr. Teoman TURGUT
Boğaziçi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Bu tezde konu edilen çalışmaların bir kısmı TÜBİTAK 108T715 nolu projesi tarafından desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Her şeyden önce, danışmanlarım Prof. Dr. Y. Gürkan Çelebi ve Prof. Dr. Cemsinan Deliduman'a benden esirgemedikleri dostlukları için minnettarım. Ayrıca, akademik katkılarına, gösterdikleri sabra ve gerçekten danışılan doktora hocaları olmalarına teşekkür ederim. Danışmanım Prof.Dr.Cemsinan Deliduman'a, burada anlatmaya çalıştığım doktora problemini tanımlayıp beni buna ortak ettiği için sonsuz teşekkür ederim. Yrd.Doç.Dr. Aybike Çatal-Özer'e tezin bir kısmını oluşturan projesinde bana da yer verdiği için teşekkür ederim.

Arkadaşlıkları benim için vazgeçilmez olan Erdal Çatak ve Ferhat Özok'a teşekkür ederim. Prof.Dr. S.Kayhan Ülker ve Yrd.Doç Dr. Barış Yapışkan'a öğretici sohbetleri ve dostlukları için gönülden teşekkürler, varolsunlar.

Sevgili annem Necmiye Saka'ya ve aileme her daim hissettiğim destekleri için teşekkür ederim.

Eşim Çiğdem Saka'ya, hayatımda olduğu için, sevgisi için ve bana verdiği mutluluk için çok teşekkür ederim.

Eylül, 2013 **E.Ulaş SAKA**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DEĞİŞMESİZ UZAYDA FİZİKSEL SİMETRİLERİN TANIMLANMASI VE FİZİKSEL UYGULAMALARI

Değişimsiz ve asosiye olmayan uzay güncel fiziğin ilgi çekici konularından biridir. değişimsiz uzay sicim teoride açık sicimin bir d-zarı üzerine tutunması ve bir artalanda hareketi sonucu ortaya çıkar. Teorik modellerin değişimsiz uzay üzerinde yeniden oluşturulması üzerine çalışmalar sürmektedir. Süpersimetrik modellerin değişimsiz uzay üzerinde nasıl çalıştığı üzerine literatür son derece zengin fakat süpergravite için literatür var bile denemez. Tez kapsamında bu problemin çözümüne yönelik teorik bir yaklaşım oluşturmaya çalıştık. Bununla beraber kapalı sicim söz konusu olduğunda zara ait koordinatların asosiye özelliğini de yitirdiği gözlenmiştir. Bu bağlamda asosiye olmayan çarpım altında ayar değişmezliği irdelendi.

Dört boyutta $SO(32)$ heterotik ve Tip IIA sicim teorileri arasında kütleli S- düallik ilişkisi olduğunu gösterdik. Bir tarafta $K3$ üzerinde ki altı boyutlu teoriden T^2 üzerinde SS burulması varken boyutsal indirgeme ile elde edilen dört boyutlu tip IIA teori, diğer tarafta benzer bir burulma altında altı boyutlu teoriden T^2 üzerine boyutsal indirgeme ile elde edilen heterotik teori bulunmaktadır. Bu iki teori arasında S-düalite ilişkisinin kütleli alanlar söz konusu olduğunda da varlığını gösterdik. Ayrıca, dört boyuttaki lagranjiyenin [27]'de Schön ve Weidner tarafından verilen $SL(2)\times O(6,22)$ simetrisine sahip ayar süpergravite formuna belirli alan dönüşümleri altında getirilebildiğini gösterdik.

SUMMARY

DEFINITION OF PHYSICAL SYMMETRIES IN NONCOMMUTATIVE SPACE TIME AND ITS PHYSICAL APPLICATIONS

We have investigated space-time symmetric features of non-commutative space. We have also attempted to construct a supergravity model on non-commutative space. We realize that the theory should be superconformal due to the requirements imposed by the gauge theoretical limitations. We have also analysed some of the features of nonsssociative product which appear in the dynamics of closed and open string moving on a curved background. In this context, we discuss the effect of nonassociative Kontsevich product on the gauge invariance, as in [36]. We have applied the Kontsevich product to the gauge transformations of Ricci scalar and some other elements of gravity. We find that the gauge invariance must be restored because Kontsevich product or any other non-associative product is not loyal to the gauge invariance.

In the second part of the thesis, we demonstrate that when Scherk-Schwarz twist is imposed on the theory, S-duality still survives between heterotic and type IIA theory in four dimensions. We have type IIA theory obtained by dimensional reduction from 6-dimensional theory when T^2 space has an SS twist. We also have heterotic theory obtained from the same six dimensional theory when T^2 space had a similar but different SS twist. We showed that one can establish a massive S-Duality between these two theories. Also we demonstrated that the resulting theory can be put in a gauge supergravity formalism, the most general form of which is given by Schön and Weidner in [27].

1. GİRİŞ

Mutluluktan kendilerinden geçmiş olmalılar: Higgs ve Englert'in 1964 yılında önerdikleri kütle kazanma mekanizması, 2012'nin 4 Temmuzun'da CERN'de Higgs bozonunun keşfi ile doğrulandığında,ruh halleri daha farklı olamaz [1, 2]. Kendiliğinden simetri kırılması denen bu mekanizma parçacıkların kütle edinmelerinden sorumludur.Kuşkusuz Higgs bozonunun keşfi, teorik fizikçileri mutlu edip yeni buluşların olabileceği konusunda umutlandırdı. Beklenti Higgs bozonunun yanında başka parçacıkların da bulunması yönündeydi fakat bu olmadı. Keşif duyurulurken herhangi bir süpersimetrik parçacığın varlığını teyit edecek bir bulgu ortada yoktu. O günden bu güne süpersimetriye dair pozitif bir gelişme LHC tarafından bildirilmiş değil. Bu yıl Nobel fizik ödülü Englert ve Higgs'e Stockholm'de verilirken, yapacakları ödül konuşması SM için bir zafer ama diğer teoriler için aynı şey söylenemez. Peki bizi böyle düşündüren nedir? Süpersimetri, süpergravite ve sicim teoriler, SM ötesinde var olduğu düşünülen fiziği ifade ediyorlardı ama deneysel bulgular maalesef hiç umut verici değildir. Bu tez süpergravite, değişimsiz uzay, sicim teori ve düalite konularının bir kısmını işleyen bir içeriğe sahiptir. Dolayısıyla son deneysel bulguların ışığında tezde yapılanların ne anlama geldiği düşünülebilir. Kısaca açıklamaya çalışacağım.

Parçacık fiziğinin ortaya çıkışından bu yana Standart Model (SM) doğada gözlenenleri açıklamada son derece başarılı oldu. Parçacıkların nasıl etkileştikleri ve maddenin yapı taşları olarak nasıl davrandıkları bizim için artık bir muamma değil. Doğanın üç temel kuvveti olan elektromanyetik, zayıf ve güçlü kuvvetler, SM çatısı altında bir açıklamaya kavuşturulmuş durumdadır. Burada ana tema ayar simetrileridir. Yerel ayar simetrileri simetrinin korunması için bir ayar vektörünü gerektirir ki bu ayar vektör(ler) kuvvet taşıyıcı parçacıklar olarak çalışır. SM $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ayar simetrileri üzerine kuruludur. Bu yerel ayar simetrileri sırasıyla, elektromanyetik, zayıf ve güçlü kuvvetleri ifade eder. Fakat kuvvetlerin adlarının farklı olmasının bir hikmeti var, bu üç kuvvet ayar teori ile açıklansa da içerik olarak farklıdır. Elektromanyetik kuvvetin taşıyıcısı foton kütlesizdir fakat zayıf kuvvetin taşıyıcısı olan $W^{\pm}, Z$ bozonları kütlelidir ve bu yüzden zayıf kuvvet elektromanyetik kuvvete göre kısa erimlidir. SM, parçacıklara kütle verecek terimleri Higgs mekanizması olmadan içeremez. Higgs mekanizması parçacıklara kütle kazandırır ama mekanizma teoriye Higgs bozonu denen skaler parçacıkları ekleyerek bunu yapar. Yukarıda bahsettiğimiz mutluluk resminin kaynağını, tam da SM'in eksik son parçasını oluşturan Higgs bozonun bulunması oluşturuyor.

Bir zafer hikâyesinden bahsettik ama SM ve bu haliyle teorik fizik bizi tatmin ediyor mu? Aslında SM, modelin ötesine gitmeyi gerekli kılan yapısal bir takım sorunları barındırır ama bu sorunlardan burada hiç bahsetmeyeceğiz. Bahsettiğimiz üç temel kuvvetin yanında dördüncü bir kuvvet daha var: Gravitasyon. Dokunmak istediğimiz sorunda tam burada yatıyor: SM gravitasyon hakkında hiç bir şey söylemez, gravite SM'in bir parçası değildir. Basitçe dördüncü kuvvet, modelin dayandığı yerel ayar simetrisi ile açıklanamaz.

Einstein'ın genel göreliliği 1916 tarihli, gravitasyonu uzay ve zaman geometrisi olarak izah eder. Gravitasyon büyük mesafelerde kütleli objelerin dinamiğini izah etmekte ne kadar başarılıysa da küçük ölçeklerde gravitenin nasıl çalıştığını aydınlatmış değil. Önümüzde bir ölçek sorunu olduğu açıktır. Gravitasyonun çiftlenim sabiti boyutsuz değildir ve bu yüzden sıklıkla başvurduğumuz pertürbasyon teorisi kullanılabilir olmaktan çıkar. Ölçek problemini aşmanın yolu kuantum mertebesinde graviteyi açıklamak olabilir. Özetle, bu yönde geliştirilecek bir kuantum gravitenin tüm kuvvetleri kapsamasını beklemek gerekir.

Kuantum gravite yolunda süpergravitenin keşfi problemin çözümüne kısmen katkıda bulunmuş olsa da önemli bir aşamayı ifade etmektedir. Süpergravite, süpersimetrik ayar teorilerin genel bir çerçevesini tanımlar. Süpersimetri, parçacık fiziğinde fermiyon bozon simetrisi olarak özetleyebileceğimiz simetridir ve doğada karşılıklı olarak her bir fermiyona karşılık bir bozonun var olduğunu öngörür. Süpergravite teorilerin yanında kuantum gravite için başka bir aday ve belki daha muhtemel olanı süpersicim teoridir. Süpersicimin temel elemanlar parçacık değil bir boyutlu sicimlerdir. Parça cıklar bu sicimlerin farklı titreşim modları olarak tanımlanır. Yukarıda bahsettiğimiz iki teorinin birbirilerinden tamamen ayrık iki kümeyi ifade etmediklerini belirtelim. On boyuta süpergravite teorileri, yine on boyutlu süpersicim teorierilerin "düşük enerji limiti" olarak düşünülür, yani bu teorilerin kütlesiz ağaç-seviye halleri süpergravite teorileri doğurur.

Sicim teorisi için temel olan bir boyutlu objelerdir ve temel parçacıklar sicimlerin titreşim modların karşılık gelir. Sicimler açık ve kapalı formda olabilirler. Açık ve kapalı sicimlerden oluşan beş farklı sicim teori bilinmektedir ve bu beş farklı teori teknik gerekçelerden dolayı on boyutta tutarlıdır. Yüksek boyutta tanımlı modellerin fenomenolojik olarak ifade ettikleği içerik ise modelin dört boyutta tanımlanma sıyla anlaşılır. Boyutsal indirgeme denen bir mekanizma kullanılarak yüksek boyutlu bir model daha alt boyutlara indirilebilir. Boyutsal indirgeme gravite ve elektromanyetik kuvvetleri bir birleştirme yolu olarak Kaluza ve Klein tarafından ortaya konulmuş [3, 4]. Bu mekanizmanın genelleştirilmiş versiyonu Scherk ve Schwarz tarafından alt boyutlarda kütleli teorilerin elde edilmesi temelinde tartışılmış [5, 6]. Özetle, $D = d + n$ boyutlu bir teori, d boyutlu Minkowski ve n boyutlu kompakt uzayların $M_d \times K_n$ çarpımı olarak düşünülür. Dolayısıyla boyutsal indirme olarak adlandırılan bu işlem alt boyutta içerdikleri simetri ve spektrum bakımından zengin teorilerin elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır. Daha güncel bir yaklaşım akı varlığında kompaktifikasyon işlemidir. İndirgeme, modül uzay ile resmedilen bir skaler alanlar kümesi oluşturur. Skaler alanların varlığı bir sorun teşkil ettiğinden, akı terimi varlığında boyutsal olarak indirilmiş teorinin içinde vakum beklenen değer lerini hesaplayacak skaler bir potansiyeli üreterek, modül uzayın stabilizasyonu sağlanır.

Akı katkısı altında sicim teorilerin boyutsal indirmesi kütleli/ayar teorilerin elde edilmesi ve sicim düalite bakımından ilgi çeken bir konudur. Bu konuda ilk çalışmalardan biri T^d d boyutlu torus üzerine kompaktifiye edilmesini tartışan Kaloper ve Myers'in çalışmasıdır [7]. Bu çalışmada akı katkısı altında elde edilen kütleli ve ayar süpergravite teori hala $O(d, d{+}16)$ simetrik olduğu ve kütle parametresi düalite grup altında dönüştüğü gösterilmiştir. Tip II teorilerin Calabi-Yau çokkatlıları üzerine kompaktifikasyonu [8]'de çalışılmıştır. Tip IIA ve Tip IIB teoriler arasındaki ayna simetrisini akı varlığında da geçerli olduğu [8, 9] ve [10] makalelerinde gösterilmiştir. M-Teorinin U-düalliği, akı varlığı altında [11, 12]'de irdelenmiştir.

S-dülite ilişkileri üzerine yapılan çalışmalardan bir kısmı ise şöyle sıralanabilir. Tip IIA teorinin K3 üzerine kompaktifikasyonu, heterotik sicim teorinin T^4 üzerine kompaktifikasyonuna S-düal olduğu bilinmektedir [13, 14, 15, 16]. Benzer bir durumda $K3 \times T^2$ üzerine kompaktifiye heterotik teori uygun Calabi-Yau çokkatlısı üzerine kompaktifiye Tip IIA teori arasında geçerlidir [17, 18, 19, 20, 21].

Altı boyutta S-düalitesi için yapılan [22] makalesinde akı teoriye konulduğunda simetrinin eylem düzeyinde olmadığı ortaya konuyor. Diğer yandan altı boyutlu kütleli S-düalliği M-teorinin $K3^{\times}S^1$ kompaktifikasyonu ile heterotik teorinin T^4 kompaktifikasyonları arasında gösterilmiştir. Tip IIA teorinin $K3$ üzerine kompaktifikasyonu [23] makalesinde çalışılmıştır. Elde edilen altı boyutta $O(4,20)/(O(4)\times O(20))$ düalite simetrisine sahip ayar (kütleli) bir teori olmasına rağmen S-düallik ilişkisi kayıptır. Bir tarafta antisimetrik 2-form B alanı vektör alanları yiyerek kütle kazanırken heterotik teoride vektör alanlar skaler bazı skalerleri yiyerek kütle kazanır. Bu durumda S-düallik yitirilmiş olur. Fakat dört boyutta kütleli 2-form antisimetrik B alanının serbestlik derecesi kütleli vektör alan ile aynıdır. Tip IIA teori 2-form gerilim tensörü üzerinde tanımlı Ramond-Ramond artalan akısı ile T^2 kompaktifikasyonu [24]'de çalışılmıştır. Nihai teori $SL(2,R)\times SL(2,R)\times O(4,20)$ global simetrisine sahiptir. Bu simetri, $K3$ ve T^2 geometrilerine ayrı konuşlandırılmış akı varlığında gerçekleştirilen $K3\times T^2$ kompaktifikasyonundan elde edilen iki kütleli Tip IIA teori ilişkilendir. Bir bakıma Tip IIA ile heterotik teoriyi dört boyutta ilişkili olduğu anlamına gelir yani S-düallik tekrar sağlanmış olur. $SO(n-l,l)$ simetrili kütleli/ayar süpergravite teorilerin $11-n$ boyutta 11 boyutlu kütleli süpergraviteden sistematik bir yolla boyutsal indirgeme yapılarak elde edilmeleri ile ilgili genel bir çerçeve [25] makalesinde verilmiştir. Kütle kazanma yolu, p-form alanlar tek boyutlardaki kendine düallik durumuna alternatif olarak burada Stückelberg mekanizması ile sağlanmaktadır.

Kütlesiz durumda ise her iki teori dört boyutta $O(6,22)\times SL(2)$ simetrisine sahiptir. IIA teori $K3$ kompaktifikasyonundan altı boyutta sahip olduğu pertürbatif $O(4,20)$ simetrisine ek olarak T^2 kompaktifikasyonundan $SL(2)\times SL(2)$ simetrisi ile birleşir. S-düalite simetrisi, torus kompaktifikasyonla ilintili $SL(2)$ simetrisinin T^6 kompaktifiye heterotik teorinin kendine olan düalliğini ifade eder. Diğer yandan $O(6,22)$ simetrisi T^6 kompaktifikasyonla ilintili T-düalite simetrisidir. Akı teoriye konulduğunda ise $O(4,20)\times Sl(2)\times Sl(2)$ IIA teorisinin simterisi olarak kalmaya devam eder ve kütle parametresi bu simetri altında dönüşür [22, 23, 24, 26]. Heterotik teori açısından ise $SL(2)$ simetrisi tartışmalı olmakla beraber $O(6,22)$ simetrisi hala etkindir [7].Dört boyutlu heterotik sicimde, NS-NS 2-form alanın indirgemesinden gelen 2-form alan bir skaler alana düalize edilerek dilaton ile beraber $SL(2)$ dublet oluşturulur. Akı varlığında ise bu düalizasyon, akıların 2-form alanlar için abelyen olmayan ayar çiftlenimı getireceğinden geçerliliğini yitirir. Kütleli S-düalitesi dört boyutta halen geçerliyse, bu durumda kütleli IIA teoriyi ($SL(2)$ simetrisi halen yürürlükte) kendine düal olan kütleli heterotik teoriye indergemesi beklenebilir. Soruna şöyle yaklaşılabilir, $SL(2)$'ye ayar edilmiş bir teoriden sicim teori kökenine doğru bir yargıya varmak amacıyla heterotik ve IIA teoriler arasında kütleli-düalliği sorgulanabilir. Tezimizin bir bölümünü bu problemin çözümü oluşturmaktadır.

Dört boyutta $N = 4$ $O(6, 22) \times SL(2)$ simetrisi ayar süpergravite Schön ve Weidner tarafından [27]'de oluşturulmuştur, daha ayrıntılı formalizm ve çeşitli boyutlardaki süpergravite için [28] makalesine de bakılabilir. En genel $SL(2)$ ayarının Sicim/M-teori kökenlerinin ne olduğu ise yanıtını bulamamış bir sorudur. Fakat dört boyutta aksiyon(axion) ve dilatonun ölçeklenme ve kaymalarına karşılık gelen bazı ayarlar için yüksek boyuttaki kök teoriler [29] çalışmasında belirlenmiştir . Bu çalışmada on boyutlu heterotik teori Scherk-Schwarz (SS) çözüm altında elde edilen dört boyutlu teori, Schön ve Weidner'in belirlediği $SL(2)$ ayar Lagranjiyenin formuna getirilebilmektedir. Söz konusu çalışmada sadece NS-NS sektör üzerinde çalışıldığını Yang-Mills kısmın dışarıda bırakıldığını da belirtelim.

Bu çalışmada Scherk-Schwarz çözümünü altı boyutlu IIA teorinin dört boyuta indirgemesinde kullanıldı (Benzer çalışmalar [30, 31] makalelerinde sunulmuştur). Elde edilen IIA teori [29] çalışmasında kuulanılan SS burulma altında elde edilen dört boyutlu heterotik teoriye S-düaldir. Bu çalışmayı ayrıksı yapan kütleli 2-form alan ile kütleli 1-form alan arasındaki düaliteyi açıkça ortaya koymasıdır. Bununla birlikte Derendinger v.d. [29] çalışmasındaki duruma ek olarak Yang-Mills vektörlerinin bulunması söz konusu çalışmada elde edilen sonuçları değiştirmemektedir. Son olarak Schön ve Weidner'in [27] verdiği $N = 4$ dört boyutlu ayar süpergravite formunda olduğu gösterilmiştir.

Tezde, değişimsiz uzayda süpergravite teorilerin oluşturulması ikinci bir problem olarak ele alınmıştır. Bu bağlamda uzay-zaman simetrilerinin değişimsiz uzayda nasıl tanımlandığı önem kazanmaktadır. Nokta tanımının olmaması koordinat dönüşümlerini manasızlaştırır. Bundan dolayı ayar süpergravite teorileri baz alınarak konu çalışılmıştır. Süpergravite için [32, 33, 34] derlemelerine bakılabilir. Ayar süpergravite konusu üzerinden çalışılmasının ana gerekçesi, koordinat simetrilerinin tanımlamanın güçlüğü ve olağan ve değişimsiz uzayda tanımlı iki teori sınıfını ancak ayar simetriler üzerinden eşdeğer olduğunun bilinmesinden kaynaklanır [35]. Bir ayar teorinin değişimsiz serbestlik dereceleri teorinin olağan karşılığının serbestletlik dereceleri ile Seiberg-Witten göndemesi aracılığıyla ilişkilendirilebilir. Belirli ayar teorilerinde karşılıklı iki teori biribirine eşdeğerdir ve değişimsiz teorinin ayar alanları SW-göndermesi kullanılarak olağan ayar alanları türünden ifade edilir ve bu işlem teorinin ayar yapısını bozmaz.

Ayar süpergravite ve değişimsiz uzayı birlikte düşünmek, sorunun çekiciliği bir yana çözüme dair derin bir muammanın varlığı bir yana. Önce bahsettiğim simetrileri belirlemek olanaksız dolayısıyla elde kalan ayar simetrileri gibi fiziksel simetrileri düşünmek. değişimsizlik fonksiyonların çarpımında bir sıralama sorunu getirdiğinden Groenwold-Moyal denen iki fonksiyonun değişimsiz bir çarpımını kullanmak gerekir. Bu durumda ayar dönüşümleri düşünüldüğünde cebirsel yapının ne olduğu önem kazanıyor zira operatörlerin komütasyon ilişkileri yanında antikomütas yon ilişkilerini de bilmek zorunu. Bu koşulda sadece üniter gruplar anlamlı, yani ilerde açıklayacağım gerekçelerden ötürü konformal süpergravite üzerinde çalışmaktan başka seçenek olmadığını görüyoruz.

Son olarak, değişimsiz ve birleşimsiz çarpımların fiziksel teorilere uygulanması üzerine çalışmalarda bulunduk. Groenwold-Moyal çarpımda deformasyon parametresi θ sabittir, sicim teori perspektifinden sabit bir artalanda sicimin hareket ettiği anlamına gelir. Fakat artalan sabit değil ise, deformasyon parametresi de sabit değildir ve bu durumda Groenwold-Moyal yerine Kontsevich çarpım kullanılır. Eğer θ koordinat bağımlı ise ayar simetri kırılır [36]. Bu durum alanların, doğru tanımlanmadığı olarak görülebilir dolayısıyla ayar simetriye sadık kalacak halde yeniden tanımlanmalarını gerektirir.

Benzer bir motivasyonu gravite elemanlarının üzerinde ayar dönüşümleri için denedik. Spin bağlantı ve eğrilik tensörleri için düzeltme terimlerini hesapladık. [36] çalışmasından da görüldüğü gibi, SW göndermesi alanların yeni çözümleri altında çalışmaktadır ve sonuçlar Kontsevich çarpıma uygun görünmektedir. Burada ilgi çekici olan, kapalı sicimin bir artalanda hareketi koordinatların değişme özelliğinin kaybı yanında birleşim özelliğini de bozmaktadır. Diğer yandan θ deformasyon parametresi yerel iken Jacobi özdeşliğini sağlamıyorsa Kontsevich çarpım birleşimsizdir.

Tezde, Genel Kısımlar başlığı altında, siicim teoriler ve düalite ilişkilerinden, süper gravite ve ayar süpergraviteden ve son olarak değişimsiz ve birleşimsiz uzay kavramlarından bahsedilecektir. Değişimsiz uzayda gravitenin oluşturulma yolları ve bu konu hakkında yayınlanmış çalışmaların yaklaşımları özetlenecektir.

Malzeme ve yöntem başlığı altında, teorik fizikte sıklıkla kullanılan bir teknik olarak boyutsal indirme genel olarak anlatılacaktır. Ayar süpergravite elde etmde boyutsal indirmeden nasıl yararlanıldığı hakkında bilgilendirme yapılacaktır.

Bugular bölümünde, dört boyutta kütleli S-düalite ilişkisinin heterotik ve tip IIA teoriler arasıda nasıl kurulduğu gösterilecektir. Dört boyutta Scherk-Schwarz burulması varken yapılan kompaktifikasyon sonucunda elde edilen teorinin kısmen $N = 4, D = 4$ formalizminde olduğu gösterilecektir. İkinci olarak, değişimsiz uzayda süpergravite oluştrulması yönünde ki girişimler anlatılacaktır. Son olarak, Kontsevich çarpım işlerliğinde gravite elemanlarının simetrileri tartışılacatır.

Sonuç kısmında bulgular kısaca özetlenecektir.

sectionGENEL KISIMLAR

Bu bölümde tez kapsamında üzerinde çalışılan konular anlatılacaktır. Gerek sicim teoride gerekse süpergravitede teoriler yüksek boyutlarda tanımlı olabilirler. Boyutsal indirgeme hem daha geniş simetriye sahip teorilerin oluşturulmasında hem de yüksek boyutlu teorilerin fenomenolojik olarak anlamlı olan dört boyutta tanımlanmasında izlenen bir yoldur. Burada boyutsal indirgemenin nasıl işlendiğini, alt boyutta elde edilmek istenen teoriye göre nasıl tanımların yapılması gerektiğini anlatacağız. Düalite türlerini ve beş farklı sicim teoriden kısaca bahsedip aralarındaki bugüne kadar belirlenmiş düallik ilişkilerini özetleyeceğiz. Süpergravite ve ayar süpergravite anlatacağız ve buna bağlı olarak ayar süpergravite formalizmini [27, 28] çalışmalrında izlenen yöntemi takip ederek ortaya koyacağız.

Değişimsiz uzay ve birleşimsiz uzay konularını fiziksel kökenlerinden hareket ederek özetleyeceğiz. Değişimsiz uzay ve gravite ilişkisinin tartışıldığı çalışmalar hakkında bilgilendirme yapacağız.

1.1. SİCİM TEORİLERİ VE DÜALİTE İLİŞKİLERİ

Bu bölümde sicim teorileri arasındaki düalite ilişkiler tartışılacaktır. On boyutta beş farklı sicim teori olduğu belirlenmiştir. Birden fazla teorinin varlığı temel felsefik bir sorunu işaret ettiğinden açıklanmaya gerek duyulan bir sorunu göstermektedir. Bu teorilerin aralarında bazı düallik ilişkilerinin kurulabildiği gösterilmiştir. Sicim düalite genel olarak iki teorinin zayıf ve güçlü etkileşim bölgelerini ilişkilendiren eşdeğerlik ağına verilen adlandırmadır.

1.1.1. Sicim Teorileri ve Düaliteler

Sicim teori, temel parçacıkları sicimlerin farklı titreşim modları olarak açıklayan temel yaklaşıma dayanır. Sicim iki boyutlu bir çarşafı (worldsheet) tarar ve bu çarşaf yüksek boyutlu bir hedef uzay-zamanın içinde (Minkowski) hareket eder. Hedef uzaydaki parçacıklar titreşen sicimlerin modları olarak görülür. Uzunluk başına sicimde tutulan enerji $(2\pi\alpha)^{-1}$ ile verilir ve sicim gerilimi olarak adlandırılır. Sicim teori graviton içermesi bakımından önemlidir fakat etkileşim skalasının $10^{-33}cm$ mertebesinde olması bir ölçme sorununu da beraber getirmektedir.

1984-1985 yıllarında, pertürbatif olarak tutarlı beş farklı sicim teorinin var olduğu anlaşılmıştır. 10 boyutta tanımlı bu teorilerin üçü (Tip I, Heterotik $SO(32)$ ve $E_8 \times E_8$)N=1 süpersimetrik ve ikisi (TipIIA ve Tip IIB) N=2 süpersimetriktir. Tip IIA teoride süperyükler zıt kiraliteye, Tip IIB teoride ise aynı kiraliteye sahiptir. Sadece Tip I teori yönlenmemiş açık ve kapalı sicimlerden oluşurken, diğer teoriler yönlenmiş kapalı sicimlerden oluşur [37].

Teoriler kütlesiz bozonik durumları ise şöyledir,

- **Tip I** ; NS kapalı sicim sektöründen simetrik 2-rank tensör (metrik) ve dilaton, RR kapalı sicim sektöründen antisimetrik 2-rank tensör ve açık sicim sektöründen $SO(32)$ temsilinde 496 ayar vektörü,

- **Heterotik** $SO(32)$; Metrik, bir skaler alan dilaton, antisimetrik 2 rank tensör ve $SO(32)$ temsilinde 496 vektör alan,

- **Heterotik** $E_8 \times E_8$; Metrik, dilaton, antisimetrik 2-rank tensör ve $E_8 \times E_8$ temsilinde 496 vektör alan,

- **Tip IIA ve IIB** ; Tip IIA abelyen ayar simetrili fakat Tip IIB ayar simetrisine sahip değil. NS-NS alanlar : metrik, dilaton ve antisimetrik 2-rank tensör alanlar ortak. Bunlarla birlikte RR sektörden Tip IIA p tek sayı olmak üzere p form alanlar içerirken Tip IIB'de p-from alanlar için p tek sayı değerleri alır [37, 38].

Beş farklı teori olması istenilen ve beklenen bir durum değildir. Dolayısıyla bu teorilerin birbirleri ile bir şekilde ilintili oldukları ya da daha kapsayıcı bir teorinin farklı yansımaları oldukları düşünülebilir. Bu teorilerin fenomenolojik anlam kazanmaları, 6 boyuttan kurtularak dört boyutta tanımlanmlarını gerektirir. Bunun sonucunda, on boyutta beş olan teori sayısı boyutsal indirmeden dolayı artar. Teorilerin dört boyuttaki karşılıklarının ne olduğunu bilmemizde iyi bir yöntem olan boyutsal indirme, altı boyuttan kurtulmak için sicimin on boyutlu uzay yerine $M_4 \times K_6$ halinde dört boyutlu Minkowski uzay çarpı kompakt uzay üzerinde hareket ettiği düşünülerek gerçekleştirilir.

Boyutsal indirme terimini daha standart bir işlemi tarif edecek şekilde kullandığımız dan bu işleme kompaktifikasyon diyelim. Kompakt uzay dediğimizde genel bir uzay kümesini tarif etmekteyiz. Dolayısıyla dört boyutta elde edilebilecek teoriler kompakt uzaya bağlı olarak daha da çeşitlenir. Fakat kompakt uzayın seçimi bir takım koşullara ve ulaşmak istediğimiz teorinin içeriğine bağlıdır. Bu durumdan, kompakt uzayı belirleyici bir unsur olarak yararlanılabilir. Bir diğer durumda herhangi bir K kompakt uzayının kullanılması süpersimetriyi kırabilir. Dolayısıyla yapılacak seçimin süpersimetrinin kırılmasına neden olmaması gerekir.

Bahsettiğimiz riskten kaçınmak için olası kompakt uzayın belirli sayıda kovaryant olarak sabit spinorlar barındırması istenir. Bu bağlamda uzayın holonomisi belirleyici olur. Basit holonomi (torus), $SU(n)$ holonomi (Calabi Yau-n katlıları), $Sp(n)$ holonomi (4n boyutlu çokkatlılar), G_2 holonomili 7 katlılar ve $Spin(7)$ holonomili 8 katlılar üzerine kompaktifikasyonlar bilinen durumlardır [39].

Kompaktifikasyon sonucu oluşturulan teoriler, teorilerin modül denen parametreleri kullanarak sınıflandırılabilir [38]. Modül sicim teoride alanların vakum beklenen değeri olarak tanımlanır ve teorinin skaler sektörüne bakılarak anlaşılır. Teorinin zayıf kuple olduğu modül uzayının bir bölgesinde teori pertürbatif olarak irdelenebilir.

1990 yılların başları için ikinci süpersicim devriminin başladığı söylenir [**?**] . Bu zaman diliminden itibaren çeşitli boyutlardaki sicim teorilerde eşdeğerlik ilişkilerinin varlığını gösteren çalışmalar yayınlanmaya başlıyor. Söz konusu çalışmalar teoriler kümesinin üyeleri arasında eşdeğerlik ilişkilerinin özelliklerini ifade etmektedirler. Sicim düalite olarak adlandırılan bu tür çalışmlar 1995 yılında doruk noktasına ulaşmıştır .

Sicim teoride düalite denince öncelikle iki sicim teori arasında tanımlanmış, bir teorinin güçlü etkileşim bölgesinin diğer teorinin zayıf etkileşim bölgesinde olduğunu gösteren S-düalite ilişkisi anlaşılır. Fakat sicim teoride S tipi dülaite ile birlitkte T, ve U olarak adlandırılan iki düalite ilişkisi daha bulunur.Daha ayrıntılı bilgi için [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44] derlemelerine ve ders notlarına bakılabilir.

1.1.2. T-Düalite

İndirgeme sonucu oluşan eylemde skaler (dilaton veya kompakt uzayın hacmi) alanlar bulunur. Söz konusu eylemin skaler alanlardan dolayı tam anlamıyla bir gravite formunda olmadığı da açıktır. Dilaton alanı özümsemek için konformal yeniden ölçeklendirme işlemi gerekmektedir. Ayrıca vakum beklenen değeri hesaplanabileceği bir potansiyel terim mevcut değildir. Örnek olarak R yarıçaplı bir çember üzerine yapılan kompaktifikasyonda, R yarıçapı değeri dilatonun değerine bağımlı kalır. Bu sonuç daha sonra bahsedeceğimiz Kaluze-Klein (KK) mekanizması için kaçınılmazdır. Kompaktifkasyon sonucu oluşan skaler sektör modül uzay ile ifade edilir. Teorinin kaçınılmaz olarak içereceği skaler alanlar KK mekanizmasının iddiasıyla çelişkili bir durum yaratmaktadır. Skaler alanları temsil eden modül uzayı onaracak bir mekanizma ancak daha gerçekçi bir teorinin elde edilmesine olanak verir. Söz konusu mekanizma skaler alanlara kütle verecek dinamik olarak vakum beklenen değerini belirleyecek bir potansiyel üretmelidir.

Çember üzerine kompaktifikasyon sicimin dinamiğini iki şekilde etkiler. $X^{\hat{\mu}}$ üzerinde sınır koşulları

$$
\begin{aligned}
X^{\mu}(\sigma + 2\pi, \tau) &= X^{\mu}(\sigma, \tau) \\
X(\sigma = 2\pi, \tau) &= X(\sigma = 0, \tau) + 2m\pi R
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

olarak ortaya çıkar. Burada m sicimin halkaya kaç kez sarıldığını gösteren tamsayıdır. Halkanın periyodik olması momentumu kuantize olmaya zorlar. Öyle ki e^{iPX} X ve $X + 2\pi R$ değerleri için tek değerli olması gerekir ki bu da momentumun $P = n/R$ değerlerini alır. Sağa ve sola olan momentum modları ise;

$$
(P_L, P_R) = (\frac{n}{2R} + mR, \frac{n}{2R} - mR) \tag{1.2}
$$

ile verilir. Kolayca görülebildiği gibi $R \leftrightarrow 1/R$ ve $m \leftrightarrow n$ değişimleri altında momentum değerleri değişmeden kalır. Bununla beraber $M = P^{\mu}P_{\mu}$ kütle değerleri tüm spektrumda değişmez ve sicim n momentum değeriyle R yarıçaplı sicimin etrafına m kez sarılmak ile $1/R$ yarıçaplı halkanın etrafına m momentumu ile n kez sarılmayı ayırt edemez.

T düalliği denen bu durum geometrik olarak farklı artalanlar üzerindeki modelin dinamik olarak eşdeğerlik ilişkisinin kurulmasıdır. T düalite dönüşümleri altında modelin kurulu olduğu geometri değişirken, fiziksel özelliklerinin değişmeden kaldığı görülür. Fakat teorinin pertürbatif olarak incelenmesine bir yardımı olmaz. Sicim teoride, tip IIA ve IIB teorilerin kütlesiz sektörleri T-düaldir. Ayrıca, heterotik

$SO(32)$ ve $E_8 \times E_8$ arasında da T-düalite mevcuttur. T düallik hakkında [45, 46] derlemelerine bakılabilir.

1.1.3. S-Düalite

Diğer bir düalite ilişkisi sicim teoride ortaya çıkan S-düalite yada Zayıf-Güçlü çiftlenim düalitesidir. Adından anlaşıldığı gibi bir teorinin zayıf çiftlenim limitini diğer bir teorinin güçlü çiftlenim limitiyle ilişkilendirir. S-düalitesinin önemi, güçlü çiftlenimdeki bir sicim teorinin S-düal olduğu diğer bir teorinin incelenerek daha iyi anlaşılmasına olanak vermesidir.

Pertürbatif hesaplar g çiftlenim sabiti küçük olduğunda teorinin davranışını anlamaya yardımcı olabilir. Zayıf çiftlenim limitinde teori pertürbatbasyon teorisiyle başa çıkılabilecek elektrikçe yüklü temel durumlara, kütleli ve kuvvetle çiftlenim olmuş manyetik olarak yüklü solitonik durumlara sahiptir. g çiftlenim sabiti büyüdükçe perturbasyon teorisi çöker ve anlamlı sonuçlar elde etmek son derece zorlaşır.

S-düalite yukarıda bahsedildiği gibi bir durumda işi tersine çevirme mantığına dayanır. Montonen ve Olive tarafından varsayıldığı üzere,$g \to \infty$ olduğunda, zayıf çiftlenmiş durumlar magnetik olarak, güçlü çiftlenmiş kütleli solitonik durumlar elektrik olarak yüklenir [47].

Montonen-Olive'in öngördüğü şudur; güçlü çiftlenim limitindeki teori, düal olduğu yeni bir çiftlenim sabiti ve alanlar dilinden konuşan ve zayıf çiftlenim limitinde çalışan bir teori olarak yeniden formüle edilebilir. Elektrik ve manyetik yükün yer değiştirmesi zayıf ve güçlü çiftlenimların yer değiştirmesi ile doğrudan ilintilidir. Dirac kuantizasyonu elektrik ve manyetik yükleri birbirleri ile ters orantılı olarak belirlediğinden, manyetik ve elektrik yükleri durumların birbirleri ile ne kadar güçlü etkileştiğinin bir ölçüsüdür. Dolayısıyla elektrik/manyetik düallik zayıf/güçlü çiftlenim düalliğine eşdeğerdir.

Sicim teoride tespit edilebilen S düalliklerden biri on boyutta Tip I ve $SO(32)$ heterotik teoriler arasındaki düallik ilişkisidir [48, 49, 50, 51]. Diğer bir düallik ilişkisi altı boyutta tespit edilmiş bir durumdur. Calabi Yau uzayı olan $K3$ çokkatlısı üzerine kompaktifiye edilmiş Tip IIA teori, T^4 çokkatlısı üzerine kompaktifiye edilmiş

$SO(32)$ heterotik teoriye S-düaldir [12, 52, 53, 54, 15].

1.1.4. 10 Boyutta Tip I-$SO(32)$ Heterotik Düalliği

$SO(32)$ heterotik sicim teoride kütlesiz bozonik alanlar sektörü, kapalı heterotik sicimin NS sektöründen gelir. Teori $g_{\mu\nu}$ metriğini, Φ dilatonunu, $B_{\mu\nu}$ antisimetrik 2 rank tensör alanını ve $SO(32)$ adjoint temsilinde A^a_μ $1 \leqslant a \leqslant 496$ ayar alanını içerir. Teorinin düşük enerji dinamiği $SO(32)$ süper YM teoriye kuple olmuş $N = 1$ süpergravite ile verilir. Söz konusu alanlara dair eylem;

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{1}{(2\pi)^7(\alpha')^4\}^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}(R - \frac{1}{8}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \\ &\quad -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}e^{-\Phi/4}Tr(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) - \frac{1}{12}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\rho\rho'}e^{-\Phi/2}H_{\mu\nu\rho}H_{\mu'\nu'\rho'}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ile verilir. Burada R Ricci skaleri, F abelyen olmayan ayar alanı tensörüdür.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}[A_\mu, A_\nu], \tag{1.4}$$

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{1}{2}Tr(A_\mu F_{\nu\rho} - \frac{1}{3})\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}A_\mu[A_\nu, A_\rho]) + d.p. \tag{1.5}$$

sırasıyla ayar alanın ve B alanının gerilim tensörlerini tanımlamaktadırlar. Eylem aşağıda verilen alanlar üzerindeki ölçeklendirme dönüşümleri altında değişmezdir.

$$\begin{aligned} &g \to e^C g,\ \Phi \to \Phi - 2C,\ g_{\mu\nu} \to e^{C/2}g_{\mu\nu} \\ &B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu},\ A_\mu \to A_\mu \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} &\alpha' \to \lambda\alpha',\ \Phi \to \Phi,\ g_{\mu\nu} \to \lambda g_{\mu\nu}, \\ &B_{\mu\nu} \to \lambda B_{\mu\nu},\ A_\mu \to \lambda^{1/2}A_\mu. \end{aligned} \tag{1.7}$$

g ve $(2\pi\alpha')^{-1}$ sırasıyla çiftlenim sabiti ve sicim gerilimidir. Ölçeklendirme g ve α' değerlerini değiştirebileceğinden, bu parametrelerin bir önemi yoktur. Dolayısıyla teoride bu parametreler çeşitli alanlar tarafından bir takım ayarlamalarla absorbe edilebilirler. Bu bakımdan her iki paramtreyi de bire eşitlemenin bir sakıncası yoktur. Bu durumda heterotik sicim eylemi aşağıdaki forma gelir;

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7}\int d^{10}x\sqrt{-g}(R - \frac{1}{8}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$$
$$-\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}e^{-\Phi/4}Tr(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) - \frac{1}{12}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\rho\rho'}e^{-\Phi/2}H_{\mu\nu\rho}H_{\mu'\nu'\rho'}) \quad (1.8)$$

burada

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \sqrt{2}[A_\mu, A_\nu], \quad (1.9)$$

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{1}{2}Tr(A_\mu F_{\nu\rho} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_\mu[A_\nu, A_\rho]) + d.p.. \quad (1.10)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tip-I sicim teoride kütlesiz bozonik durumlar üç farklı sektörden gelir. Kapalı sicim NS sektörü $g_{\mu\nu}$ metriğini ve Φ dilaton alanını verir. Kapalı sicim RR sektörü ise $B_{\mu\nu}$ antisimetrik 2 rank tensör alanı verir. Bunlarla beraber açık sicim NS sektörü $SO(32)$ adjoint temsilinde A^a_μ $1 \leq a \leq 496$ ayar alanlarını bozonik sektöre dahil eder. Düşük enerji dinamiği ise yine $SO(32)$ süper Yang-Mills teoriyle etkileşen $N = 1$ süpergravitedir. Yine uygun seçilmiş sicim gerilim ve çiftlenim sabiti değerleri için eylem;

$$S_{(I)} = \frac{1}{(2\pi)^7}\int d^{10}x\sqrt{-\tilde{g}}(\tilde{R} - \frac{1}{8}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\Phi}\partial_\nu\tilde{\Phi}$$
$$-\frac{1}{4}\tilde{g}^{\mu\rho}\tilde{g}^{\nu\sigma}e^{\tilde{\Phi}/4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\rho\sigma} - \frac{1}{8}\tilde{g}^{\mu\mu'}\tilde{g}^{\nu\nu'}\tilde{g}^{\rho\rho'}e^{\tilde{\Phi}/2}\tilde{H}_{\mu\nu\rho}\tilde{H}_{\mu'\nu'\rho'} \quad (1.11)$$

olur. Burada $\tilde{R}$ Ricci skaler, $\tilde{F}$ abelyen olmayan ayar alanın gerilim tensörü ve $\tilde{H}$ antisimetrik tensör alanın gerilim tensörüdür. Her iki tensör sırasıyla şöyledir,

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{A}_\nu - \partial_\nu\tilde{A}_\mu + \sqrt{2}[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \quad (1.12)$$
$$\tilde{H}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu\tilde{B}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}Tr(\tilde{A}_\mu\tilde{F}_{\nu\rho} - \frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{A}_\mu[\tilde{A}_\nu, \tilde{A}_\rho]). \quad (1.13)$$

$SO(32)$ heterotik ve Tip-I eylemlerine bakıldığında eylemlerin aşağıda verilen tanımlamalar altında eşdeğer oldukları görülür.

$$\Phi = -\tilde{\Phi}, \; g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$$
$$B_{\mu\nu} = \tilde{B}_{\mu\nu}, \; A^a_\mu = \tilde{A}^a_\mu \quad (1.14)$$

Burada Φ ve $\tilde{\Phi}$ arasındaki ilişkiden çıkarılacak sonuç, $e^{\langle\Phi\rangle/2}$ sicim çiftlenim ise, bir teorinin zayıf çiftlenim limiti ile diğer teorinin güçlü limitinin ilintili olduğudur. Dolayısıyla iki teori arasında bir düallik ilişkisi olduğu söylenir.

1.1.5. U Düalite

U düalite, büyük (yada küçük) hacimli bir uzaya kompaktifiye edilmiş bir T_1 teorisinin bir T_2 teorisinin güçlü (zayıf) çiftlenim limitine eşdeğer olma durumudur. Bu durumda T_1 teorisinin T_2 teorsine göre daha yüksek boyutta olması gerektiği açıktır. Burada düallik, teori bir R yarıçaplı halka üzerine kompaktifiye edildiğinde elde edilen teori diğer teorinin hangi çiftlenim limiti ile ilintili olacağına halkanın R yarıçapının büyüklüğünün karar vermesinden kaynaklanır. U düalite M teori ve tip II teoriler arasında gözlenmiş ve S ve T düallik ilişkilerine beraber içermesine atıfla U olarak adlandırılmıştır. Yine de her iki teorinin birbirine hem S hem de T düal olduğu söylenemez.

1.2. SÜPERGRAVİTE VE AYAR SÜPERGRAVİTE

Bu bölüm süpergravite ve ayar süpergravite üzerine bir bahisle açılacak. Kuşkusuz bu başlık altında derin bir bilgi mevcut fakat burada her birini anmamız bile olanak dışı. Özetle, süpergravite ve ayar süpergravite tanımlarını verip, tez kapsamında işlenen içeriği anlatacağız. Tarihsel sürece paralel bir seyrin az ve öz bir şekilde konuya anlaşılır bir giriş sunacağını düşünüyoruz [55].

Ayar süperkütle çekim teorileri, maksimal süperyüke sahip süpergravite teorileri ile abelyen olmayan süper Yang-Mills teorilerin birleşik bir formda tanımlanması amacıyla 1980'li yılların başlarında çalışılmaya başlanmıştır [56]. Daha sonra konu, kompakt olmayan ayar gruplara da genişletilmiştir [57, 58] . Teoriyi ayar etmek özü itibariyle bir deformasyon işlemidir. Son yıllarda bir diğer gelişme sicim teoride akı kompaktifikasyon ayar süpergravite teorileriyle ilintili olduğu yönündeki çalışmalardır. Akı terimi konarak kompaktifikasyon işleminin gerçekleştirildiği geometride oluşturulan bir burulma(twist), etkin teoride bir deformasyon olarak yansır. Akı kompaktifikasyon, yüksek boyutlu modeldeki p-form alanların bir artalan akısıyla kompakt uzayın koordinatlarına özel bir formda bağlılığı olarak tanımlanır. Bu duruma geometrik akıda denir. Oluşturulan nihai teori ayar süpergravite formülasyonu kapsamında değerlendirilebilir.

Eğer bir süpergravite teori, Abelyen ayar grubu altında maddesel alanlar yüksüz ise teori ayar olmayan süpergravite teoriler kümesine yazılır. Dört boyutta ayar süpergravite elde etmenin ise iki olası yolu var: Boyutsal indirme dört boyutta ayar süpergravite modelleri oluşturmada kullanışlı bir matematiksel yoldur. Burada da aynı işlevi görüyor. Özetle yüksek boyutta süpergravite düz bir geometri üzerine (Torus) kompaktifiye edilir.Sonra 4 boyutlu teori ayar edilir. Diğer alternatif ise yukarıda bahsedildiği gibi akı varlığında kompaktifikasyon işlemini yolunu izlemektir. Bu işlemlerle abelyen olmayan ayar simetrilerine sahip 4 boyutta ayar süpergravite teoriler elde edilir. Ayar olmayan karşılığına göre bu teoriler daha karmaşık bir iç geometrinin sonucu olduklarından skaler potansiyellere sahiptirler. Bu tür skaler potansiyellerin varlığı kozmolojik sabit, modül stabilizasyonu ve kendiliğinden simetri kırılması gibi bir dizi fenomenin anlaşılmasında yardımcı olabilir.

İkinci yol ise ayar süpergraviteyi, torus kompaktifikasyon sonucu elde edilen ayar olmayan süpergravitenin deformasyonu olarak ele almaktan geçer. Ayar olmayan teorinin G_0 global simetri grubunu $G \subset G_0$ lokal grubuna kırarak ayar edilir. Söz konusu yöntem önce üç boyutlu süpergravite için yapılır. Ardından *yerleştirme tensörü* kullanılarak lokal grubun global grup içine nasıl yerleştirileceği belirlenir. Bu yolla daha olası akıların hakkında genel bir perspektif edinilmeye çalışılır.

1.2.1. Süpergravite

Gravite yerel uzay-zaman dönüşümlerinin ayar teorisi olarak ele alınabilir. Aynı çerçeveden süpergravite de global süpersimetrinin ayar teorisi olarak görülebilir. Bu yaklaşımın doğal olarak süpergravite ortaya çıkardığını göstereceğiz. Hesaplar için [59] bakılabilir. Yöntem ve yordam gayet şematiktir.

B ve F birer bozon ve fermiyon alanı temsil etmek üzere aralarındaki global süpersimetri dönüşümlerini,

$$\delta_1 B = \bar{\varepsilon}_1 F \tag{1.15}$$

$$\delta_2 F = \varepsilon_2 \partial B \tag{1.16}$$

ile verelim. Bozon ve fermiyon alanların boyutlarını $[B] = 1$ ve $[F] = 3/2$ olduklarını biliyoruz, buradan süpersimteri dönüşüm parametresinin boyutunun $[\varepsilon] = -1/2$ olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla boyutsal analizle (1.15) dönüşümlerindeki türevi açklar. Şimdi süpersimetri dönüşümünü iki kez uyguladığımızda,

$$\{\delta_1,\delta_2\} \sim a^\mu\partial_\mu B`; \; a^\mu = \bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 \tag{1.17}$$

uzay-zaman ötelemesini elde ediyoruz. Süpersimetrinin Poincare uzay-zaman simterisinin bir genişletmesi olduğu bariz olarak ortaya çıkıyor.

$$\{Q,\bar{Q}\} = 2\gamma^\mu P_\mu \tag{1.18}$$

Q süpersimetri jenaratörünün bir iç simetri ile ilişkili olmadığı ortadadır. Global süpersimetri parametrisini $\varepsilon \to \varepsilon(x)$ yaparak basit bir model üzerinde yarattığı değişikliklere bakalım. Artık koordinat bağlı olduğundan, $a^\mu\partial_\mu$ noktodan noktaya değişecek. Genel koordinat dönüşümleri gibi. Bunun yansıması olarak global dönüşüm altında değişmez olan bir teori değişmezliğini yitirecektir.

ϕ skalerinden ve $spin - 1/2$ bir süpereş ψ alanlarından oluşan jenerik bir modeli lokal süpersimetri dönüşümleri altında irdeleyelim. Modelin lagranjiyeni,

$$\mathcal{L} = -(\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{1.19}$$

Yukarıda verilen lagranjiyen,

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \epsilon\psi \\ \delta\psi &= -i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\partial_\mu\phi \end{aligned} \tag{1.20}$$

global dönüşümleri altında değişmezdir. Fakat $\varepsilon \to \varepsilon(x)$ durumunda değişmezlik kırılır,

$$\delta\mathbb{L} = \partial_\mu\varepsilon^\alpha K^\mu_\alpha + s.e. \tag{1.21}$$

terimi kalır. Burada $K^\mu_\alpha = -\partial_\mu\phi^*\psi^\alpha - \frac{i}{2}\psi^\beta(\sigma_\mu\bar{\sigma}^\nu)^\alpha_\beta\partial_\nu\phi^*$ tanımlanmıştır. Değişmezliği onarmak için lokal ayar dönüşümlerinde yapıldığı gibi teoriye aşağıdaki Noether akımını ekleyelim,

$$\mathcal{L}_N = kK^\mu_\alpha\bar{\Psi}^\mu_\alpha \tag{1.22}$$

Burada aşağıda verdiğimiz gibi dönüşen $spin - 3/2$ Majorana vektördür ve gravitino olarak adlandırılır.

$$\Psi^\mu_\alpha \to \Psi^\mu_\alpha + \frac{1}{k}\partial^\mu \varepsilon_\alpha \tag{1.23}$$

Teoriye bir vektör alan yerleştirdik fakat bu hamle tek başına değişmezliği kurtarmaya yetmez. Zira konu süpersimetri, yani bu alanın süpereşininde teoride olması gerekir. Peki bu nasıl bir alan? Bunun için toplam lagranjiyenin dönüşümünü, hesaplıyoruz, elimizde

$$\delta(\mathcal{L} + \mathcal{L}_N) = k\bar{\Psi}_\mu \gamma_\nu \varepsilon T^{\mu\nu} \tag{1.24}$$

terimi kalır. $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü olarak yorumlanır. Ekstra bir alan eklersek her şey tam olur, $\delta g_{\mu\nu} = k\bar{\Psi}_\mu \gamma_n u\varepsilon$ olarak dönüşen metrik alan için,

$$\mathcal{L}_g = -g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \tag{1.25}$$

terimi eklendiğinde tam bir sıradan süpergravite buluyoruz. $g_{\mu\nu}$ gravite ayar parçacığı gravitondur! Görüldüğü gibi doğal bir şekilde ve son derece iyi çalışan ayar simetrilerinin bir genişletmesi olarak süpergravite ortaya çıkmaktadır.

Bir miktar daha ayrıntıya girelim. Dört boyutta ve $N = 1$ iken süpergravite helisiteleri 1/2 faktör farklı iki durumdan oluşur. Yukarıda gösterilen $g_{\mu\nu}, \Psi^\alpha_\mu$ alan çifti, $2, 3/2$ ve $-3/2, -2$ temsilindedir.

Dört boyutta $N = 1$ süpergravitein alan içeriği, e^a_μ vierbeinı (dörtbacak) ve ψ^a_μ Majorana Rarita-Schwinger alanından oluşur. Vierbein metrik ile $g_{\mu\nu} = e^a_\mu \eta_{ab} e^b_\nu$ ilintili. Latin indisler düz uzayı grek indisler eğri uzayı etiketlemekte. η ise Minkowski metriktir.

Ψ, e^a_μ süpergravite multiplet başka bir süpermultiplet ile eşlenebilir. İki olası süpermultipletten biri bir ϕ skalerinden ve bir λ Majorana spinorundan oluşan kiral çoklu, diğeri ise bir A_μ vektörü ve bir κ Majorana spinorundan oluşan vektör çokludur. Lagranjiyen ve süperdönüşümlerin nasıl olduğuna Noether yöntemi, süperuzay formülasyonu ya da tensör cebiri kullanarak karar verilir. Bunun bir örneğini yukarıdaki örnekte yaptık.
Süpergravitein, gravitein kuantum teorisi olduğunu söylemekte bir sakınca yoktur. Fakat bu doğal sonuç bile, kauntum gravite için her sorunu çözmüş değil.11 boyuttan 4-boyuta kadar çeşitli boyutlarda ve farklı süpersimetri sayısına sahip

bir çok süpergravite mevcut. Herbirini burada anlatmayacağız, sadece konformal süpergravitei konu edineceğiz.

1.2.2. Konformal Süper Cebir

Konformal ve Anti-de Sitter cebirlerinin karşılaştırılmasıyla süperkonformal cebir tespit edilebilir [60]. D-boyutlu uzayın koordinatlarını $m = 0, 1, ..., D-1$ indisleriyle ifade edelim ve ardından bu uzay iki boyut daha ekleyelim $M = -1, 0, ..., D-1, D$. $SO(D, 2)$ grubunu oluşturacak bozonik jenaratörleri

$$\begin{aligned} M_{D,-1} &\to D, \\ M_{mn} &\to M_{mn}, \\ M_{D,m} &\to \frac{1}{2}(P_m - K_m), \\ M_{-1,m} &\to \frac{1}{2}(P_m + K_m). \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\tag{1.27}$$

olarak buluyoruz. Cebirin bozonik kısmı D dilatasyon (genleşme) jenaratörü, $\frac{1}{2}D(D-1)$ tane M_{mn} Lorantz dönüşümleri jenaratörü, D tane P_m ötelenme jenaratörü ve yine D tane K_m konformal dönüşüm jenaratöründen oluşmaktadır. Burada P_m ötelenmesinin ve K_m konformal dönüşümünün süpersimetrinin Q ve S gibi iki süpersimetri dönüşümü ile ilintili olduğu söylenir. Böylece süpersimetri konformal simetri ile baraber ikiye katlanmış oldu. Diğer yandan, $D \leq 6$'da, süpercebiri genişletmek için spinor temsilide genişletmek gerekir. D boyutlu uzay için ekstra iki gamma matrisi (γ_{-1}, γ_D) ekleyerek genişletme yapılır. Daha ayrıntılı açıklama için bakınız [60].

$SO(D, 2)$ cebiri komütasyon ilişkileri,

$$
\begin{aligned}
[P_m, D] &= P_m \ , \quad [K_m, D] = -K_m \ , \quad [K_m, P_n] = -2\left(g_{mn}D + M_{mn}\right) \ , \\
[P_m, M_{rs}] &= g_{mr}P_s - g_{ms}P_r \ , \quad [K_m, M_{rs}] = g_{mr}K_s - g_{ms}K_r \ , \\
[M_{mn}, M_{rs}] &= g_{ms}M_{nr} + g_{nr}M_{ms} - g_{mr}M_{ns} - g_{ns}M_{mr} \ , \\
\left\{Q^\alpha, Q^\beta\right\} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^m C^{-1}\right)^{\alpha\beta} P_m \ , \quad \left\{S^\alpha, S^\beta\right\} = -\frac{1}{2}\left(\gamma^m C^{-1}\right)^{\alpha\beta} K_m \ , \\
\left\{Q^\alpha, S^\beta\right\} &= \frac{1}{2}\left(C^{-1}\right)^{\alpha\beta} D - \left(\sigma^{mn}C^{-1}\right)^{\alpha\beta} M_{mn} - i\left(\gamma^5 C^{-1}\right)^{\alpha\beta} A \ , \\
[Q^\alpha, M_{mn}] &= \left(\sigma_{mn}Q\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, M_{mn}] = \left(\sigma_{mn}S\right)^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, D] &= \frac{1}{2}Q^\alpha \ , \quad [S^\alpha, D] = -\frac{1}{2}S^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, A] &= -\frac{3i}{4}\left(\gamma^5 Q\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, A] = \frac{3i}{4}\left(\gamma^5 S\right)^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, K_m] &= -\left(\gamma_m S\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, P_m] = \left(\gamma_m Q\right)^\alpha \ ,
\end{aligned}
$$

şeklindedir.
Burada bahsetmediğimiz bir jenaratör daha göze çarpıyor. Cebiri van Nieuwenhuizen'in [33] derlemesine bakılabilir. Fierz yeniden sıralandırmasından dolayı, cebirin kapanması için R-simetri zorunludur dolayısıyla Fierz sıralamasının içeriği itibariyle de uzay-zamanın boyutuna duyarlıdır. Örnek olarak dört boyutta R-simetri $SU(2) \times U(1)$ ve altı boyutta $USp(4)$'tür [60, 61, 62]. Fakat hesapları buradaki cebire göre yaptığımızdan dört boyutta R-simetrisi olarak sadece $U(1)$ kısmını kullanmış olduk.

Bu aşamadan sonra, konformal gruba ayar etme işlemi uygulayarak süpergravite eylemini oluşturmak kalıyor.

1.2.3. Ayar Süpergravite, Kompaktifikasyon ve Katıştırma Tensörü

Ayar süpergravitenin tanımı ve kapsamı yukarıda özetlenmişti. Ayar/Kütleli süpergravite oluşturma da yüksek boyutlu modelden kompaktifikasyon yoluyla elde edilebildiğinden bahsetmiştik. Ayar olmayan süpergravitelerden kompaktifikasyon yoluyla oluşturulan süpergravite teoriler için aşağıda verilen sınıflandırma yapılabilir [25]. Burada yapılan boyutsal indirme konusunda da yapıldığı gibi kompaktifikasyonun yapıldığı geometrilerin sınıflandırmasına dayanmaktadır.

- Trivial (adi) olmayan bir iç manifoldda yapılan kompaktifikasyon. Freund-Rubin [63] küre üzerine kendiliğinden kompaktifikasyon örnek verilebilir.

- Kompaktifkasyonun dayandırılacağı global grubun geometrik olduğu ya da geometrik olmadığı genelleştirilmiş Scherk-Schwarz boyutsal indirmesi [5, 6].
- Adi olmayan bir p-form akı ile yapılan kompaktifikasyon [8].

G_0 global simetrisine sahip ayar olmayan bir süpergraviteden başlayarak global simetriyi yerel hale getireceğiz. G_0 global grubunun simetri üreteçlerinin uyduğu cebir;

$$[t_\alpha, t_\beta] = f^{\gamma}_{\alpha\beta} t_\gamma \tag{1.28}$$

ile verilir. Ayar değişmezliğin korunması için ayar vektörlerin minimal çiftlenimini gerektirir. Kısaca adi türev kovaryant türeve taşınacak demek istiyoruz. Bu durumda V temsilindeki A^M_μ vektörleri hem L_α paramereli G_0 global simetrisi altında hem de Λ^M parametreleri G lokal simetrisi altında dönüşür.

$$\delta_L A^M_\mu = -L[t_\alpha]^M_N A^N_\mu ; \delta_\Lambda A = \partial\Lambda \tag{1.29}$$

V indislerini adjoint indislerle ilişkiilendirmek D_μ kovaryant türevini yazmamıza olanak sağlar. Bu ilişki vektör ayar alanlar için minimal bir çiftlenim yazmamıza olanak sağlar. Bu bağlamda yerel gruptan global gruba bir Θ lineer göndermesi tanımlamamız gerekiyor. Θ simetriyi teoriye koymamıza yardım ettiğinden yerleştirme tensörü olarak adlandırılır.

$$\Theta : V \to g_0 \tag{1.30}$$

Böylece kavaryant türevi aşağıdaki formda yazmamız olanaklı oluyor;

$$D_\mu = \partial_\mu - g A^M_\mu \Theta^\alpha_M t_\alpha \tag{1.31}$$

Katıştırma tensörü ayar grubun jenaratörlerinide $X_M = \Theta^\alpha_M t_\alpha$ olarak tanımlar. Katıştırma tensörü G_0 global grubu altında değişmez kalmaz. Bu durumda grubun kapanması ve ayar kovaryanslığın sağlanması Θ tensörünün,

$$\delta_M \Theta^\alpha_N = g\Theta^\beta_M (t^P_{\beta N} \Theta^\alpha_P - f^\alpha_{\beta\gamma} \Theta^\gamma_N) = 0 \tag{1.32}$$

olarak dönüşmesini gerektirir. Böylece katıştırma tensörü üzerine karesel kısıtlamalar koymuş oluyoruz. Bu koşul bizi V temsilindeki jenaratörlerin

$$[X_M, X_N] = X_{MN}^{P} X_P \tag{1.33}$$

cebirine uyduğunu söyler. Cebirin kapandığı anlamına geliyor. X_{MN}^{P} grup yapı sabitleir olarak adlandırmakta bir sakınca yok, öylede diyoruz. Açıkçası Θ tensörü $M \leftrightarrow N$ altında hem antisimetrik hemde simetrik özellikler taşır. Antisimetri komütasyon ilişkisini işaret eder diğer yandan Jacobi özdeşliğini sağlamasını garantiler .

1.2.4. N=4 B=4 Ayar Süpergravite

Dört boyutta yarı-maksimal $N = 4$ süpergravitein global simetri grubu $SL(2) \times SO(6, n)$'dir. n vektör multipletlerinin sayısıdır. Grupların etiketlerini $SL(2)$ için $\alpha = 1, 2$ ve $SO(6, n)$ için $M = 1, 2, ..., 6 + n$ ile veriyoruz. G_0 global grubun jenaratörlerini $t_{\alpha\beta} = t_{(\alpha\beta)}$ ve $t_{MN} = t_{[MN]}$ ile verelim. Jenaratörler kendi temsillerinde;

$$(t_{MN})_P^{Q} = \delta_{[M}^{Q} \eta_{N]P}; (t_{\alpha\beta})_\gamma^{\delta} = \delta_{(\alpha}^{\delta} \epsilon_{\beta)\gamma} \tag{1.34}$$

halindedir. Burada η $SO(6, n)$ metriği , ϵ $SL(2)$ invaryant Levi-Civita tensörüdür. Kovaryant türev yazarken $SL(2)$ ve $SO(6, n)$ altında vektörlerin dönüşümüne dikkat ediyoruz. Elektrik ve maagnetik vektörler $SL(2)$ altında duplet $SO(6, n)$ altında vektör olarak dönüşürler. Her iki temsilide taşıyan $A_\mu^{M\alpha}$ vektörü için kovaryant türevi aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

$$D_\mu = \partial_\mu - g A_\mu^{M\alpha} \Theta_{M\alpha}^{NP} t_{NP} - g A_\mu^{M\alpha} \Theta_{M\alpha}^{\beta\gamma} t_{\beta\gamma} \tag{1.35}$$

Kovaryant türev her iki grurun bilgisinide taşımak zorundadır. Fakat katıştırma tensörü üzrindeki lineer kısıtlanmadan ötürü sadece bu iki bileşen sıfırdan farklı olabilir. Katıştırma tensörünün sözkonusu iki bileşenini $\xi_{M\alpha}$ ve $f_{\alpha MNP}$ gibi iki tensörlede tanımlıyabiliyoruz. Belirtmek gerek, $SL(2)$ her ikisinide vektör olarak görürken , $SO(6, n)$ ξ tensörünü vektör, f'i ise üç kat antisimetrik tensör olarak görür. Son olarak katıştırma tensörününü;

$$\Theta_{M\alpha}^{NP} = f_{M\alpha}^{NP} + \frac{1}{2} \delta_M^{[N} \xi_\alpha^{P]} \tag{1.36}$$

$$\Theta_{M\alpha}^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \xi_{\delta M} \epsilon^{\delta(\beta} \delta_\alpha^{\gamma)} \tag{1.37}$$

Yukarıdaki tanımlar karesel kısıtlama altında aşağıdaki kısıtlamalar kümesini verir.

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha^M \xi_{\beta M} &= 0 \\
\xi^P_{(\alpha} f_{\beta)PMN} &= 0 \\
3 f_{\alpha R[MN} f^R_{\beta PQ]} + 2\xi_{\alpha[M} f_{\beta)NPQ]} &= 0 \\
\epsilon^{\alpha\beta}(\xi^P_{(\alpha} f_{\beta)PMN} + \xi \alpha M \xi_{\beta N}) &= 0 \\
\epsilon^{\alpha\beta}(f_{\alpha MNR} f^R_{\beta PQ} - \xi^R_\alpha f_{\beta R[M[P}\eta_{Q]N]} - \xi_{\alpha[M} f_{N][PQ]\beta} + \xi_{\alpha[P} f_{Q][MN]\beta}) &= 0
\end{aligned} \quad (1.38)$$

Yukarıdaki kısıtlamalar teorinin lagranjiyenin dilini oluşturacak. $A_\mu^{M\alpha} = A_\mu^{\mathcal{M}}$ vektör alanlarını kompozit bir temsilde ifade edilebilir. $\alpha = 1, 2$ $SL(2)$ etiketini, $M = 1, ..., 12$ $SO(6, 6)$ temsilini temsil etmek üzere 24 vektör alan G_0'ın $(2, 12)$ temsilindedir. Kompozit bir temsil için $SL(2) \times SO(6, 6)$ simetri grubunun ötesine geçiyoruz. Simplektik transformasyon aynı zamanda lagranjiyenide dönüştürecektir. Teoriler farklı simplektik çerçevede olsalarda hareket denklemi düzeyinde aynı fiziği ifade etmekteler.

1.2.5. Lagranjiyen

$N = 4$ süpergravitein bozonik sektörü metrik, altı kütlesiz vektör ve iki kütlesiz skalerden oluşur. Teorinin skaler sektörü

$$\frac{SL(2)}{SO(2)} \times \frac{SO(6,n)}{SO(6) \times SO(n)} \quad (1.39)$$

koset uzayına yerleşir. ilk faktörü M_{MN} ikinci faktörü parametrize eden iki matristir. $\frac{SL(2)}{SO(2)}$ koset uzayı $M_{\alpha\beta}$ pozitif tanımlı simetrik matrisle yada eşdeğer olarak τ kompleks sayısı ile açıklanabilir. $\tau = a + ie^{-phi}$ olduğunda ,

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{Im(\tau)} \begin{pmatrix} |\tau|^2 & Re(\tau) \\ Re(\tau) & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi koset uzayın ilk faktörünü ifade eder. $SL(2)$ simetrisi $M_{\alpha\beta}$ matrisine

$$M \to gMg^{-1}, g\epsilon SL(2) \quad (1.40)$$

olarak etkir. Vektör multipletler ise koset uzayın ikinci faktörünün içindendir ve V_M^A çokbacaklısı ile gösterilebilir. $V_M^A = (V_M^m, V_M^a)$ matrisi $SO(6.n)$ metriği

$$\eta_{MN} = -V_M^m V_N^m + V_M^a V_N^a \quad (1.41)$$

olarak tanımlar. $\eta_{MN} = diag(-1,-1,..,1,1,1,..,1)$ olur. $SO(6,n)$ global grubu V'ye sağdan etkirken, $SO(6,n)/SO(6)\times SO(n)$ lokal koset grun sağdan etkir. Aynı şekilde bu koset uzayda bir pozitif tanımlı matris ile parametrize edilebilir.

$$M_{MN} = V_M^m V_N^m + V_M^a V_N^a \tag{1.42}$$

Artık potansiyeli yazabiliyoruz,

$$M_{MNPQRS} = \epsilon_{mnpqrs} V_M^m V_N^n V_P^p V_Q^q V_R^r V_S^s \tag{1.43}$$

Potansiyel hesaplanırken aşağıdaki kombinasyonu tanımlamak yerinde olur.

$$\hat{f}_{\alpha MNP} = f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[M}\eta_{N]P} - \frac{3}{2}\xi_{\alpha N}\eta_{MP} \tag{1.44}$$

Tüm lagranjiyenin formunu verebiliyoruz;

$$L = L_{kin} + L_{pot} + L_{top} \tag{1.45}$$

Kinetik terim ,

$$\begin{aligned} e^{-1}L_{kin} &= \frac{1}{2}R + \frac{1}{16}(D_\mu M_{MN})(D^\mu M^{MN}) - \frac{1}{Im(\tau)^2}(D_\mu\tau)(D^\mu\tau^*) \\ &\quad \frac{1}{4}Im(\tau)M_{MN}H_{\mu\nu}^{M+}H^{\mu\nu N+} + \frac{1}{8}Re(\tau)\eta_{MN}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\mu\nu}^{M+}H_{\rho\sigma}^{N+} \end{aligned} \tag{1.46}$$

terimlerinden oluşur. Skaler alanların potansiyeli ise,

$$\begin{aligned} e^{-1}L_{pot} &= -\frac{g^2}{16}\Bigg(f_{\alpha MNP}f_{\beta QRS}M^{\alpha\beta}[\frac{1}{3}M^{MQ}M^{NR}M^{PS} + (\frac{2}{3}\eta^{MQ} - M^{MQ}\eta^{NR}\eta^{PS})] \\ &\quad \frac{4}{9}f_{\alpha MNP}f_{\beta QRS}\epsilon^{\alpha\beta}M^{MNPQRS} + 3\xi_\alpha^M\xi_\beta^N M^{\alpha\beta}M_{MN}\Bigg) \end{aligned} \tag{1.47}$$

terimlerini içerir. Geriye topolojik terimler kalıyor onların toplamıda şöyle,

$$\begin{aligned} e^{-1}L_{top} &= -\frac{g}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &\quad \Big(\xi_{+M}\eta_{NP}A_\mu^{M-}A_\nu^{N+}\partial_\rho A_\sigma^{P+} - \big(\hat{f}_{-MNP} + 2\xi_{-N}\eta_{MP}\big)A_\mu^{M-}A_\nu^{N+}\partial_\rho A_\sigma^{P+} \\ &\quad -\frac{g}{4}\hat{f}_{\alpha MNR}\hat{f}_{\beta PQ}{}^R A_\mu^{M\alpha}A_\nu^{N+}A_\rho^{P+}A_\sigma^{Q-} + \frac{g}{16}\Theta_{+MNP}\Theta_-{}^M{}_{QR}B_{\mu\nu}^{NP}B_{\rho\sigma}^{QR} \\ &\quad -\frac{1}{4}\big(\Theta_{-MNP}B_{\mu\nu}^{NP} + \xi_{-M}B_{\mu\nu}^{--} + \xi_{+M}B_{\mu\nu}^{++}\big)\big(2\partial_\rho A_\sigma^{M-} - g\hat{f}_{\alpha QR}{}^M A_\rho^{Q\alpha}A_\sigma^{R-}\big)\Big) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Kinetik ifadede ki kovaryant türevler ise şağıdaki gibi tanımlıdır,

$$\begin{aligned} D_\mu M_{\alpha\beta} &= \partial_\mu M_{\alpha\beta} + gA_\mu^{M\gamma}\xi_{(\alpha M}M_{\beta)\gamma} - gA_\nu^{M\delta}\xi_{\varepsilon M}\epsilon_{\delta(\alpha}\epsilon^{\varepsilon\gamma}M_{\beta)\gamma} \\ D_\mu M_{MN} &= \partial_\mu M_{MN} + 2gA_\mu^{P\alpha}\Theta_{\alpha P(M}{}^{Q}M_{N)Q} \end{aligned} \tag{1.49}$$

Kinetik terimde bulunan $D_\mu\tau)(D^\mu\tau^* \equiv D_\mu M_{\alpha\beta}D^\mu M^{\alpha\beta}$ olarak ifade edilebilir. Yerleştirme tensörünün $\xi_{\alpha M}$ ve $f_{\alpha MNP} = f_{\alpha[MNP]}$ bileşenlerinin aşağıdaki kombinasyonları formülasyon sırasında oldukça kullanışlıdır.

$$\Theta_{\alpha MNP} = f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[N}\eta_{P]M} \tag{1.50}$$

$$\hat{f}_{\alpha MNP} = f_{\alpha MNP} - \xi_{\alpha[M}\eta_{P]N} - \frac{3}{2}\xi_{\alpha N}\eta_{MP} \tag{1.51}$$

Ayar invaryant gerilim tensörlerini

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu\nu}^{M+} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^{M+} - g\hat{f}_{\alpha NP}{}^{M}A_{[\mu}{}^{N\alpha}A_{\mu]}{}^{P+} \\ &+\frac{g}{2}\Theta_{-}{}^{M}{}_{NP}B_{\mu\nu}^{NP} + \frac{g}{2}\xi_{+}{}^{M}B_{\mu\nu}^{++} + \frac{g}{2}\xi_{-}{}^{M}B_{\mu\nu}^{+-} \end{aligned} \tag{1.52}$$

olarak tanımlıyoruz. Dikkat edilirse sadece $\mathcal{H}_{\mu\nu}^{M+}$ lagranjiyende yer almaktadır. Diğer gerilim tensörleri hareket denklemlerinde ortaya çıkar. Aslında bu ifadeler g'ni yüksek mertebelerinden terimlerde içermekteler. Burada ise $g = 1$ alacağız.

1.3. DEĞİŞİMSİZ VE BİRLEŞİMSİZ UZAY

değişimsiz uzay kavramı fizikte birçok yaklaşımla kullanıldı incelendi. Temel olarak değişimsiz uzay, sicim teoride bir artalan varlığında D-Zarına tutunmuş açık sicimin kuantizasyonu sonucu türer. Bunun sonucu olarak açık sicimin uzay-zaman koordinatları ve D-Zarı çarşafı (worldvolume) koorinatları olmak üzere iki tür değişimsizlik ortaya çıkar. Eğer artalan sabit ise, değişimsizlik parametresi θ benzer özellikte olmalıdır. Bu durumda fonksiyoınların çarpımı için Grönewod-Moyal çarpım kullanılır. Olası diüer bir durum ise artalanın uzay-zamanın fonsiyonu olmasıdır. Bunun yansıması olarak θ değişimsizlik parametreside aynı karakterde olur. Deformasyon parametresi lokal bir fonksiyon olduğunda fonksiyonların çarpımı Kontsevih çarpımdır. GM çarpım Kontsevich çarpımla yerdeğiştirmiş oluyor. Burada iki olası durum ortaya çıkar. İlikinde $\theta(x)$ Jacobi özdeşliğine uyar. Kontsevich çarpım asosiye özelliğini korur. Deformasyon parametresinin Jacobi özdeşliğine uymadığı ikinci durumda

Kontsevich çarpım asosiye olma özelliğini yitirir. Sicim açısından sözkonusu durumlar şöyle açıklanabilir. Eğri D-Zarı düz bir artalana yerleştirilmiş ise gördüğümüz bahsi geçen ilk durumdur. Eğri bir artalana yerleştirilmiş eğri D-Zarı ise ikinci durumda ifadesini bulur. Burada asosiye olmama durumunu tanımlayan artalanın eğriliğidir.

1.3.1. Değişimsiz Uzay

Koordinat-Momentum değişimsizliği kuantum mekaniğinin temel gerçekliklilerinden bir olduğunu söyleyebiliyorsak, benzer bir şeyi koordinatlar için neden söyleyemiyoruz? gravite kuantum dünyasının içinde olacaksa uzay-zamanın kuantizasyonuda makul bir beklenti olmalı. Öylede olduğuna dair işaretler yok değil, magmatik alanın varlığında momentumun değişme özelliğini yitirdiği bilinen bir durum.

Koordinatlarında değişme özelliğini yitirebileceğini düşünmenin birden fazla motivasyonu olabilir. Bu durumu basitçe basit olarak koordinatların değişme ilişkisinin,

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij} \tag{1.53}$$

olduğunu varsayarak tanımlayabiliyoruz. Girişte ifade ettiğimiz olası durumlardan düz uzay için konuşmaya devam edelim. Burada θ değişimsizlik parametresi olarak adlandırılan antisimetrik şimdilik sabit antisimetrik bir tensördür.

Türev ilişkilerini,

$$\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu \; ; \; [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0 \tag{1.54}$$

Leibniz kuralına uygun olarak tanımlıyoruz. Bu ilişkiler değişimsiz R_θ^d uzayının elemanlarının türevlerini $\partial_m u(\hat{f}\hat{g}) = (\partial_\mu \hat{f})g + f(\partial_\mu \hat{g})$ olarak almamızı sağlar.

R_θ^d uzayını R^d uzayının bir deformasyonu olarak düşünelim. Dolayısıyla iki uzay arasında bir bağlantı kurmak için R_θ^d'den R^d'ye bir aşağıdaki göndermeyi tanımlarız.

$$S : \; \hat{f} \rightarrow f(x) \tag{1.55}$$

S göndermesi,

$$S[\hat{f}\hat{g}] = S[\hat{f}] * S[\hat{g}] \tag{1.56}$$

olsun. Böylece $*$ çarpım, R^d üzerindeki fonksiyonlar için noktasal çarpımın yerini alan deforme bir çarpım kuralını tanımlamış olur. Weyl sıralamasından yararlanarak,

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k e^{ikx} f(x) \tag{1.57}$$

$$f(f) = S[\hat{f}](x) = \int d^d x e^{-ikx}\hat{f}(\hat{x}) \tag{1.58}$$

eşitlikleri yazılabilir. Yukarıdaki ifadelerden *-yıldız çarpımı hesaplayabiliriz. Baz elemanlarından,

$$e^{ikx} * e^{ipx} = e^{\frac{-i}{2}\theta^{ij}k_i p_j} e^{(k+p)x} \tag{1.59}$$

sonucuna varılır. Koordinat uzayında iki fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d x f(k) e^{ikx} \tag{1.60}$$

$$g(y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d y g(p) e^{ipy} \tag{1.61}$$

olarak ifade edersek,

$$(f * g)(x) = exp\Big(\frac{i}{2}\partial_x\partial_y\Big) f(x) g(y)|_{x=y} \tag{1.62}$$

olur.

Yukarıdaki çarpıma Moyal-Gronewold çarpım denir. değişimsiz uzay kavramına, $\hat{x}^i$ operatörlerinin değişimsiz cebri ya da $*$ çarpım kullanılarak yazılan x değişkenin fonksiyonlarının cebri olarak yaklaşılabilir. Normal koşullarda $x_\mu \to x_\mu + a_\mu$ ötelenme simetrisi bir fonksiyonu üzerine $\delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi$ olarak etkir. x^μ koordinatları değişme özelliğine sahip değilse durum bu kadar açık değildir. Dolayısıyla bu uzay için öteleme bir iç türev işlemi olarak tanımlanır.

$$\partial_\mu f = [-i(\theta)^{-1}_{\mu\nu} x^\nu, f] \tag{1.63}$$

1.3.2. Değişimsiz Uzay ve Gravite

Değişimsiz uzayda gravite bir kaç farklı bakış açısıyla irdelenmiş bir konu. Temel olarak, Einstein gravitenin deformasyonuna dayanır. Genel olarak bu konuda yapılan çalışmalar için [64, 65] çalışmalarına bakılabilir. Alan teorisi ve değişimsiz uzay üzerine ise [66, 67] derlemeleri okunabilir. Genelde değişimsiz uzayda gravitasyonun deformasyonu için [66]'de özetlenen, normal çarpımın Grönwold-Moyal değişimsiz çarpımı ile yer değiştirmesine dayalı bir yöntem izlenmektedir. Değişimsiz uzayda gravite oluşturmada temel sorun, genel koordinat dönüşümlerinin tanımlanmasından kaynaklanır. Değişimsiz gravitede, koordinat dönüşümlerinin tanımları hakkında halen tatmin edici sonuçlara ulaşılmış değildir [67]. Girişte de belirtildiği gibi, konuya dair yaklaşımların farklılıkları genel göreliliğin difeomorfizmi üzerinden değerlendirilebilir. Einstein gravitenin deformasyonu kompleks metrik üzerinden [68]'de çalışılmıştır. [69]'de, değişimsiz $SO(1,4)$ de Sitter grubuna ayar edilerek çalışılmış, grup $ISO(3,1)$ grubuna İnönü-Wigner kontraksiyonu ve SW-göndermesi kullanılarak büzülmüştür. Başka bir yaklaşım ise difeomorfizmi burarak gravitasyonel teoriyi deforme etme yönündedir [70]. Bu yaklaşımda teorinin difeomorfizm değişmezliği burulmuş versiyonu ile yerdeğiştirilir. Bu yolla elde edilen simetrilerin fiziksel olmadığında dair eleştiriler [71]'de sunulmuştur. Burulu değişimsiz eylem doğru sayıda simetrilere sahip olsa da, bu simetrilerin fiziksel simetrileri ifade etmediği gösterilmiştir. Özetle sabit bir B-alanı varlığında, sicim teoriden elde edilen gravitasyonel teori burulu difeomorfizmden elde edilenden teori ile izah edilemez [80]. Değişimsiz uzayda difeomorfizme farklı bir yaklaşımla [72]'de, difeomorfizm kovaryant $*-$çarpım kullanılarak değişimsiz simplektik manifoldda difeomorfizm değişmez gravite oluşturulmuştur. Burada simetriler burulmamıştır.

Yukarıda anılan çalışmalar sabit değişimsizlik parametresi üzerine kuruludur. Sabit θ dışında, kovaryant olarak sabit parametre [73]'de konu edinilmiştir. Lie cebirsel değişimsiz uzayda gravite teori, SW-göndermesi kullanılarak [80]'de çalışılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarınr bir kısmı, θ'nın sabit olduğu (1.53) değişimsizlik ilkesine dayanır. Einstein teori, Grönwold-Moyal çarpımla, gravitasyonun ayar formalizmi [81] kullanılarak, deformasyonu sağlanır. SW-göndermesi yardımıyla teori sabit θ değerinin pertürbatif ifadelerini içerecek halde formalize edilir.

Kovaryant olarak sabit deformasyon parametresi odaklı çalışmada ise [73], θ Lorentz dönüşümleri altında tensör olarak dönüşecek şekilde ele alınır ve sonsuz küçük ξ^μ koordinat dönüşümü parametresi ile dönüştürülür. Sabit θ, düz uzay-zaman olarak düşünülebileceğinden, ulaşılan bulguların eksik olduğu söylenebilir. Dolayısıyla eğri uzayda değişmesizliği tanımlayıp, bu tür bir uzay üzerinde gravitasyon oluşturmak daha mantıklı olabilir. Aslında deformasyon parametresi sabit olduğundan tüm eylemsizlik sistemlerinde aynı değeri alır ve buna bağlı olarak Lorentz değişmezliğini kırmış olur[73]. Bu bakışla değişmesizlik ilişkisi

$$\delta\theta^{\mu\nu} = \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\theta^{\mu\nu} - \partial_{\lambda}\xi^{\mu}\theta^{\lambda\nu} + \partial_{\lambda}\xi^{\nu}\theta^{\lambda\mu} \tag{1.64}$$

olarak ele alınabilir. Burada ξ^{μ} sabit alınır ve $\partial_{\mu}\theta^{\mu\nu} = 0$ elde edilir. Çarpım Grönwold-Moyal yerinde Kontsevich çarpım olarak değiştirilir. İkinci bir çözüm ise ξ bir skaler fonksiyon olmak üzere,

$$\xi^{\mu} = \theta^{\mu\nu}\partial_{\nu}\xi \tag{1.65}$$

olarak almaktır. Bu çözüm kümesi $\partial_{\mu}\xi^{\mu} = 0$ eşitliğini sağladığından, hacmi koruyan dönüşüm anlamına gelir. Kontsevich çarpımın eğri uzaya taşınması çarpımın birleşim özelliğini yitirmesine sebep olmaktadır [73].

Değişmesizliğin Lie cebirsel olarak tanımlayarak gravite teori oluşturulabilir.

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{v}^{\nu}] = \theta^{\mu\nu}(\hat{x}) = i\theta f^{\mu\nu}{}_{\rho}\hat{x}^{\rho} \tag{1.66}$$

koordinat ilişkisinde $f^{\mu\nu\rho}$ yapı sabitleridir. [73]'de $f^{\mu\nu\rho}$ Lie cebirsel yapı sabitleri olarak düşünülerek teori deforme edilmiştir.

2. MALZEME VE YÖNTEM

2.1. BOYUTSAL İNDİRME

Bu bölümde kütleli kuramların elde edilmesi yolları açıklanmaya çalışılacaktır. Çalışmanın genel içeriği açısından, süpergravite kuramlarda kütle edinme mekanizmalarından olarak boyutsal indirme üzerine durulacak yöntemdir. Diğer yandan yüksek boyuttaki modeller doğal olarak ölçülebilir fiziksel büyüklükler tanımlamadığından yüksek boyutlu kuramların dört boyutta ki karşılıklarını bilmek gerekmektedir. Dolayısıyla boyutsal indirme alt boyutta daha zengin simetrik yapıya sahip kuramlara ulaşmada ve bu kuramların fenomenolojik olarak anlamlanmasında izlenen yoldur. Bu bağlamda önce standart Kaluza-Klein indirme konusuna değininilecektir. Ardından daha genel bir indirgeme perspektifi sunan Scherk-Schwarz mekanizmasından bahsedilecektir. Son olarak modül stabilizasyon denen bir soruna bir çözüm olarak akı kompaktifikasyon konusunun ana hatları hatırlatılacaktır. Boyutsal indirgeme konusuyla ilgili genel bir tekrar ve farklı yaklaşımlar için [74, 75, 76, 77, 78, 79] bakılabilir.

2.1.1. Kaluza-Klein İndirgeme

1919'da, fiziğin gündeminde iki temel kuvvet bulunmaktadır: Maxwell'in fomüle ettiği elektromanyetizma ve Einstein'ın formüle ettiği gravite kuvveti. Zayıf ve güçlü kuvvetler ise henüz bilinmemektedir. Elektromanyetizma ve gravite birleşik bir kuram altında izah edilebilir mi? Fizik tarihi bu konuda ilginç bir gelişmeyi not etmektedir. Kaluza [3] uzay-zamanı beş boyutlu varsaymanın bir birleştirme mekanizması olabileceğini düşüncesi üzerine bir model ortaya koyar. Sonrada yüksek boyut fikrini ilk dile getirenin aslında 1914 yılında Nordström olduğu anlaşıldı [82]. Nordström özetle dört boyutlu uzayı 5 boyutlu uzayın içinde bir yüzey olarak düşünülebileceğini söylemektedir.

Kaluza'nın yaklaşımı ise bir tür boyutsal ayrıştırma işlemi gibi ele alınır ve uzay-zaman $4+1$ olarak ayrılır. Çizgi elemanı beş boyutta,

$$d\hat{s}^2 = G_{MN} d\hat{x}^M \hat{x}^N \tag{2.1}$$

olarak tanmlanır. Metrik "ansatz" (çözüm)

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi} A_\mu A_\mu & e^{2\beta\phi} A_\mu \\ e^{2\beta\phi} A_\nu & e^{2\beta\phi} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

olarak bulunur. Dört boyutlu genel koordinat dönüşümlerince $g_{\mu\nu}$, A_μ ve ϕ alanları tensör, vektör ve skaler olarak dönüşür. Kuantum alan teorisi adlandırması yaparsak; sırasıyla graviton, foton ve dilaton olarak adlandırırız. Özetle dört boyutlu uzaydaki gözlemci ekstra boyutları, dört boyutlu teorinin iç simetrileri olarak görür. Böylece tüm simetriler bir araya getirilmiş olur [83]. Burada modern notasyon kullanılmıştır.

Kaluza'nın yaklaşımında iki sorun göze çarpmaktadır. İlk sorun, teori ekstra boyutların neden gözlenemediğini (gözlenemyeceğini) açıklamaz. İkincisi ise ekstra boyutlara bağlı olmama durumuna bir açıklama yoktur. Bu iki soruna dair çözüm Klein'dan gelir [4]. Klein ekstra boyutu çember geometrisine sahip olması gerektiğini ilkeri sürer. Böylece z koordinatı periyodik bir özellik kazanır, $0 \leq mz \leq 2\pi$. Burada $m \sim R^{-1}$ boyutundadır. Ekstra boyutu yarıçapı R olan çember, beş boyutlu uzay $M_4 \times S^1$ formundadır.

$d + 1$ boyutta alanlar sınır ekstra boyutta,

$$\hat{\phi}(x, z) = \hat{\phi}(x, z + 2\pi R) \tag{2.3}$$

sınır koşulunu sağlamalıdır. Ayrıca fonksiyon tek değerli olmak zorunda olduğundan $p = m/R$ olur. Skaler alanı çemberin özdeğerleri türünden Fourier serisine açma olanağı verir,

$$\hat{\phi}(x, z) = \sum_n \hat{\phi}^n(x) e^{inz/R_z} \tag{2.4}$$

Klein-Gordon denklemine (2.4) çözümünü koyduğumuzda;

$$\hat{\Box}\hat{\phi} = 0 \rightarrow (\Box + \partial_z \partial^z)\phi = (\Box + (\frac{n}{R_z})^2)\phi_n = 0 \tag{2.5}$$

sonucu bulunmaktadır. Buradan ϕ_n, $m_n = n/R_z$ sonsuz elemanlı bir kütle özdeğerler kümesinin olduğunu görmekteyiz. Her bir değer Kaluza-Klein (KK) modu olarak adlandırılır. Sıfır modu hariç diğer modları atarak yapılan boyutsal indirgeme işlemine Kaluza-Klein (KK) indirgeme denir.

Metrik açısından bakıldığında mekanizma skaler alanlar için olduğundan biraz daha karmaşıktır. Beş boyuttaki skaler alan 4 boyuttada skaler alandır ve skaler alanın Fourier modları dört boyutta birer skaler alan olarak tanımlanır. Fakat metrik (vektör ve spinor alanlar içinde aynı durum geçerli) alan söz konusu olduğunda Fourier modları sadece 4 boyutlu metrik tarif edemez. Dolayısıyla 4 boyutlu Poincaré gruba göre bir ayrıştırma yapılmalıdır.

5 boyutlu metriğin (graviton) bileşenleri, 4 boyutlu metrik, bir vektör ve bir skaler olmak üzere tanımlanır. Burada vektör alan KK ayar alanı ve skaler alan ise KK skaleri olarak adlandırılır. Sıfır mod (kütlesiz mod) alanları kümesi ;

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad \hat{g}_{\mu 4} = A_\mu, \quad \hat{g}_{44} = g. \tag{2.6}$$

olarak tanımlarız. Simetriler bakımından teori genel koordinat değişmezliğine ilave olarak ayar alanı KK vektörü olan $U(1)$ simetrisine sahiptir.

Aynı yaklaşım boyutsal anlamda genelleştirilerek, herhangi bir boyutta tanımlı bir teori KK mekanizması kullanılarak daha düşük boyutta ifade edilebilir. D boyutlu bir teori $M_d \times K_n$ gibi iki ayrı uzayın ürünü olarak düşünülür. Burada $D = d + n$ olamak üzere M_d ve K_n sırasıyla d boyutta Minkowski uzayı ve n boyutlu kompakt bir uzaydır.

Bu bölümde $d + 1$ boyutlu gravite eylemi çember üzerinde d boyuta indirgeme anlatılacaktır. Boyutsal İndirgeme özünde kompakt geometrinin yani teorinin üzerinde yaşayacağı uzayın simetrik özelliklerini d boyuttaki teoriye bildiren bir tür bileşen hesaplamadır . d boyuta $d + 1$ boyuttaki manzaranın bir imajını çıkarır ve istendiğinde boyutsal olarak yukarı doğru bir bakış olanaklıdır.

Lorentz değişmezliğinden faydalanarak "vielbein" için aşağıda verilen "ansatz" yazılabilir.

$$\hat{e}_M{}^A = \begin{pmatrix} e^{\alpha\phi} e_\mu^a & e^{\beta\phi} A_\mu \\ 0 & e^{\beta\phi} \end{pmatrix}$$

Ters vielbein ise,

$$\hat{e}_A{}^M = \begin{pmatrix} e^{-\alpha\phi} e_a^\mu & -e^{-\alpha\phi} A_a \\ 0 & e^{-\beta\phi} \end{pmatrix}$$

Olarak bulunur. Metrik vielbein türünden $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} \hat{\eta}_{\hat{a}\hat{b}} \hat{e}_{\hat{\nu}}^{\hat{b}}$ yazılabilir. Vielbein çözümünden $d + 1$ boyutlu metriği,

$$\hat{g}_{MN} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha\phi} g_{\mu\nu} + e^{2\beta\phi} A_\mu A_\nu & e^{2\beta\phi} A_\mu \\ e^{2\beta\phi} A_\mu & e^{2\beta\phi} \end{pmatrix}$$

buluruz. Einstein-Hilbert eylemin indirmesi,

- Anholonomi sabitleri hesaplanır,
- Bu sabitlerden spin bağlantıların bileşenleri hesaplanır,
- Platini özdeşliği kullanılarak türevsel terimlerden arındırılmış Einstein-Hilber (EH) teriminde spin bağlantıların bileşenlerinden d boyuttaki eylem hesaplanır. Detaylar için EK-B'ye bakınız.

aşamaları izlenerek yapılır. Nihai olarak bulunan;

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{4} e^{-2(d-1)\alpha\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \tag{2.7}$$

eylemidir. Burada α ve β sayıları boyuta bağlıdır ve eylemi Einstein çerçevesinde ifade etmek için uygun değerler verilerek aşağıdaki gibi atanır.

$$\alpha^2 = \frac{1}{2(d-1)(d-2)}, \quad \beta = -(d-2)\alpha \tag{2.8}$$

Burada ifade ettiğimiz gibi KK mekanizması beş boyuttan dört boyuta bir indirme mekanizması sağlayarak bir birleşme şeması sunmakta. Fakat sorunsuz bir mekanizma olduğunu söylenemez. Nihai eylemin içerdiği skaler alan bir sorun oluşturur. Çünkü pratikte bu tür skaler alanın olmadığını biliyoruz.

Eğer teoride p-form alanlar varsa, doğal olarak eylem bu alanlara ait (p+1)-form gerilim tensörlerinin oluşturduğu Kinetik terimleri barındırır. p+1-form alanların indirgenmesinde yine KK çözüm kullanılarak tanjant indisleri türünden karşılıkları hesaplanır.

$$\begin{aligned} F_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{p+1}} &= \hat{e}_{\mu_1}{}^{A_1} \ldots \hat{e}_{\mu_p}{}^{A_p} \hat{e}_{A_{p+1}}{}^{M_{p+1}} F_{M_1\ldots M_{p+1}}, && (2.9) \\ F_{\mu_1\ldots\mu_p z} &= \hat{e}_{\mu_1}{}^{A_1} \ldots \hat{e}_{\mu_p}{}^{A_p} \hat{e}_{A_p}{}^{M_p} F_{M_1\ldots M_p, z}, && (2.10) \\ F_{(p+1)} &= \partial_\mu A_p && (2.11) \end{aligned}$$

Dolayısıyla p-form alanlardan boyuta bağlı olarak sayıları değişen , skaler, vektör ve yüksek mertebeden tensör alanlar teoriye dahil olur.

2.1.2. Scherk-Schwarz İndirgeme

KK İndirgeme, kütleli modları harici bıraktığından genel bir indirgeme şeması olduğu söylenemez. Scherk ve Schwarz 1979'da daha kapsayıcı olan ve sonra genelleştirilmiş boyutsal indirgeme ya da Scherk-Schwarz (SS) indirgeme olarak adlandırılan alternatif bir indirgeme mekanizması önerdiler[5, 6].

SS indirgeme esas olarak teorinin sahip olduğu simetrileri (global ya da lokal), indirgeme mekanizmasının düşük boyutta ki teoride kütle terimi kazanmasına yardım edecek şekilde kullanılmasına dayanır. Mekanizma, yüksek boyutlu alanları eylemin sahip olduğu simetrilerin belirlediği bir formda kompakt koordinatlara bağlı tanımlar. Dolayısıyla simetri teoriye kütle terimi kazandırırken hareket denklemlerini kompakt koordinatlardan bağımsız bırakır.

G simetrisine sahip bir teori düşünürsek, ϕ_i teoriye ait alanlar kümesine $g\phi_i$ olarak etkir. Kompakt koordinatlara bağlılık simetri dönüşümleri üzerinden

$$\phi(x,z) = g_z\phi(x) \tag{2.12}$$

olarak tanımlanır. $\Phi(x,z)$ alanı üzerinde $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ global faz dönüşümünün iç koordinatlara bağlılığı tanımlamada nasıl yardımcı olduğuna bakalım. Denklem (1.3)'teki peryodiklik koşulunu Φ alanı üzerinde bir "burulma (twist)" olarak tanımlanır.

$$\Phi(x, z + 2\phi R) = e^{2i\pi mR}\Phi(x,z) \tag{2.13}$$

Mod açılımı,

$$\Phi(x,z) = e^{imz}\Sigma_n\phi_n(x)e^{inz/R}. \tag{2.14}$$

yapılırsa sadece 0. modu için çözümü

$$\Phi = \phi_0 e^{imz} \tag{2.15}$$

olarak buluyoruz. Çözüm $\alpha = mz$ parametre değişikliği ile de anlatılabilir. Özetle, G global simetri grubu bir Φ alanını $\Phi \to g\Phi$ olarak dönüştürüyorsa, indirme çözümünü bir simetriden yararlanarak iç koordinatlara bağlılığı denklem (1.11)'de olduğu gibi tanımlayabiliyoruz. Simetrilerden yola çıkarak bulunan çözümler indirme sonucunda elde edilen kuramın iç koordinatlardan bağımsız olmasının güvencesidir. Şu noktayı da belirtelim, her g seçiminin alt boyutta tutarlı bir model vereceği düşünülmemelidir. Ayrıca alanların yeniden tanımlaması kuramı bir miktar değiştirebilir. Skaler sektörü ifade eden matrise ve kütle matrisine göre bu yolla elde edilen kuramların bir sınıflandırması yapılabilir [?, 85, 86].

Yukarıda bahsedilen indirme mekanizmasını nasıl çalıştığını görmek için komplex skaler alanı içeren bir model ele alalım. Eylemi aşağıdaki gibi verelim.

$$S = \int d^{d+1}\hat{x}\sqrt{\hat{g}}(\hat{R} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\partial_{\hat{\mu}}\hat{\varphi}\partial_{\hat{\nu}}\hat{\varphi}^*) \tag{2.16}$$

Bu eylemi $\hat{\varphi} \to e^{i\alpha}\hat{\varphi}$ faz simetrisi ve $\hat{\varphi} \to \hat{\varphi} + \lambda$ kayma simterisi altında değişmez kalır.

Faz simetrisi üzerinden SS çözümünü,

$$\hat{\varphi}(\hat{x}) = e^{imz}\varphi(x),\ m\epsilon\mathcal{R} \tag{2.17}$$

olarak alalım. Bu çözüm altında

$$S_s = g^{\mu\nu}(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* + im\partial_\mu\varphi A_\nu + imA_\mu\partial_\nu\varphi^* + m^2e^{\alpha-\beta}\varphi\varphi^*) \tag{2.18}$$

olur. Kovaryant türevi $D = \partial\mu - imA\mu$ formunda tanımlarsak, skaler terim

$$S_s = \int d^dx\sqrt{-g}\big(D\varphi D\varphi^* + m^2e^{\alpha-\beta}\varphi\varphi^*\big) \tag{2.19}$$

olur. Kovaryant türevin formuna bakarak birkaç çıkarımda bulunabiliyoruz: ilk olaraka $U(1)$ Abelyen ayar teoriye ayar olmuş bir teori olarak ele alınabilir. Bu durumda m ϕ alanının yüküdür. İkinci bir bakışla m kütle parametresi olarak yorumlanabilir.

Boyutsal indirgemeye genelde çeşitli boyutlardaki kompakt uzaylar üzerinde gerçekleştirilebilir. KK indirgemeyi genişletme yönünde ilk çalışma, Pauli tarafından altı boyutlu uzaydan S^2 iki-küre uzayı üzerine indirgeme yaparak çalışılmıştır. Kompakt uzayın $SO(3) \simeq (SU(2)/U(1))$ iç simetri grubu üzerinden uygun bir çözümlerle alt baoyutta elde edilen teorinin $SU(2)$ abelyen olamayan simetriye sahip olması sağlanmış [?]. Olası kompakt uzayların bir sınıflandırması şöyle verilebilir.

- $K_n = T^n$,n boyutlu torus: $d + n$ boyuttan d boyuta yapılan indirme, metrik tensörden KK vektörleri ve skaler alanlar üretir. Teori p-form alan içeriyorsa her bir boyut için, p-formdan başlayarak $p-1$-form ve n değerine göre alanlar üretir. Sonuçta KK-vektörlerinden bir dizi 0-form (aksiyon) potansiyelleri elde edilir. Nihai olarak oluşan ayar olmayan, vektörlerle ve skaler alanlar içeren $U(1)$ ayar grubu temsilinde bir teoridir.

- G, Grup çakkatlısı: G burada, kompakt uzayın genel koordinat dönüşümleri ile ilintili Lie gruptur. İndirgemeden sonra teorinin ayar grubu olarak ortaya çıkar.

- G/H koset uzay: H, G'nin maksimal alt grubudur. Grup çokkatlısı üzerine indirgeme ile aynı teoriyi elde edilir fakat daha az boyutlu kompakt uzay bu kez yeterli olur.

- Homojen olmaya uzaylar (izometrisiz uzaylar) [62]

2.1.3. Akılı Kompaktifikasyon

Sicim/M-teoride kompaktifikasyon işlemi sonucu bir dolu skaler alan oluştuğunu görmüştük. Fenomenolojik olarak bu skaler alanların varlığı bir sorun teşkil eder. Kompaktifikasyon işlemi için K_6 çokkatlısının türünden tutun artalanların seçimine kadar bir çok belirleyici unsur bulunmakta. Her bir seçim 4 boyutta farklı fizik oluşturur. Fakat bahsettiğimiz gibi ortaya çıkan modül denen skaler parametreler düz bir potansiyele sahip olduklarından kütlesizdirler. Doğada bu tür skaler alanların olmadığını bilindiğine göre skaler alanların değerlerini sabitleyecek bir mekanizma gerekmektedir. Yani skaler alanların vakum beklenen değerlerini sabitleyeceğiz ve skalerler kütleli olacak. Modül stabilizasyonu denen bu sorunu çözmenin bir yolu teoriye bir akı katkısı koymaktan geçer.
Akılı geometrik olabilir (p-form ya da metrik akı)[87] yada geometrik olmayabilir[88]. Akı kompaktifikasyon sonucu teori hem bir ayar teoridir hem skaler potansiyeli belirlediğinden kütlelidir.

3. BULGULAR

Bu bölümde anlatılacak konuların bir ksımı [89] çalışmasında yayınlanan bulgulara diğer kısmı değişimsiz uzayda süpergravite oluşturmaya yönelik hesaplamalara dayanmaktadır. Ayrıca, kontsevich çarpım ve gravite ilişkisi ayar teori perpektifinde irdelenmiş ve bulgular ortaya konmuştur.

3.1. DÖRT BOYUTTA HETEROTİK TEORİ

Altı boyutlu heterotik sicim teorinin üzerinde Sherk-Schwarz burulması varken boyutsal olarak indirilmesi anlatılacaktır. Aynı hesaplama yöntemi Tip IIA indirilmesinde de izlenecektir.

On boyuttan altı boyuta T^4 üzerinde indirilerek elde edilen heterotik teorinin içeriği şöyle şekillenir: Dilaton, Φ, skaler alanının yanı sıra kompaktifikasyon sonucunda metriğin ve antisimetrik tensör alanın iç bileşenlerinden bir dizi kütlesiz skaler alan oluşur. Skaler alanlar kümesi, teorinin indirilmiş halinin sahip olacağı simetrilerin tanınması bakımından 24×24 bir M matris olarak ifade edilir. Ayrıca sekiz tane ayar alanı metriğin $G_{\mu m}$, antisimetrik tensörün $B_{\mu m}$ bileşenlerinden ve 16 ayar alanıda heterotik sicim teorinin $E_8\times E_8$ yada $Spin(32)/Z_2$ Cartan alt cebrinden olmak üzere toplam 24 ayar alanı $U(1)^{24}$ ayar grubunu oluşturur. Daha ayrıntılı hesaplar için [17, 18, 19, 20, 90] çalışmalarına bakılabilir. Ayar alanlarını $A_\mu^{(I)}$, $I=1,...,24$ ile ifade edelim. $G_{\mu\nu}$ ve $B_{\mu\nu}$ altı boyutta metrik ve antisimetrik tensör alanlar olmak üzere altı boyuttaki heterotik teori eylemi aşağıdaki gibi oluşur. Burada tekrar indirme işlemi yapacağımızdan $\mu\to M$ olarak değiştirileceğini belirtelim.

Altı boyutta heterotik eylem aşağıda veilmiştir.

$$\begin{aligned} S &= \int d^6x\sqrt{-G^h}e^{-\Phi}\Bigg(R^{(h)}-\frac{1}{4}M^{(h)}_{IJ}F^{(h)I}_{MN}F^{hJMN}-\frac{1}{8}D_MG^{(h)}_{MN}D^MG^{(h)MN} \\ & -D_M\Phi^{(h)}D^M\Phi^{(h)}-\frac{1}{12}G^{MM^{(h)'}}G^{NN^{(h)'}}G^{KK^{(h)'}}H^{(h)}_{MNK}H^{(h)}_{M'N'K'}\Bigg) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada, F, ayar alanlarının gerilim tensörü, R Ricci skaler ve

$$H^{(h)}_{MNK}=\partial_MB^{(h)}_{NK}-\frac{1}{2}L_{IJ}A^{(h)I}_MF^{(h)J}_{NK}+d.p. \tag{3.2}$$

antisimetrik alanın gerilim tensörüdür.

(3.1) eylemi, $O(4,20)$ dönüşümleri altında değişmezdir:

$$
\begin{aligned}
M^{(h)} &\rightarrow \Omega M^{(h)}\Omega^{T}, \quad A_{N}^{(h)I} \rightarrow \Omega_{IJ}A_{N}^{(h)I}, \quad G \rightarrow G \\
B^{(h)} &\rightarrow B^{(h)}, \quad \Phi^{(h)} \rightarrow \Phi^{(h)}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

, burada Ω, $\Omega L \Omega^{T} = L$'yi sağlar. L $O(4,20)$ metriğidir. M skaler martisi ise,

$$
MLM^{T} = L, \; M^{T} = M \tag{3.4}
$$

sağlar ve $O(4,20)/O(4) \times O(20)$ koset değerlidir.

Buradan itibaren artık elimizde yapısı ve içeriği bilinen altı boyutlu heterotik eylem, tanımlanacak bir Scherck-Schwarz çözümü T^2 uzayının $SL(2,\Re)$ simetrisine dayanarak aşağıdaki gibi önerilebilir. Eğer aşağıda verilen $SL(2,\Re)$ simetrisi kullanılarak kompakt uzay üzerinde bir burulma tanımlanabilir.

$$
\Phi \rightarrow \Phi + 2\lambda_m y^m, \quad G \rightarrow e^{\lambda_m y^m} G, \quad B \rightarrow e^{\lambda_m y^m} B \tag{3.5}
$$

,

Teorinin simetrisinden Scherk-Schwarz burulma çözümü,

$$
\begin{aligned}
\Phi^{h}(x,y) &= \Phi(x) + 2\lambda_m y^m, \; G(x,y) = e^{\lambda_m y^m} G(x), \; B(x,y) = e^{\lambda_m y^m} B(x) \\
A^{I}(x,y) &= e^{\frac{1}{2}\lambda_m y^m} A(x)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

olarak alanlar üzerinde tanımlanabilir.

İndirme işleminde Einstein-Hilbert terimi dilaton terimle birlikte indirilir. Ricci skaler indirmek için öncelikle Palatini özdeşliğinden yararlanarak, EH terimini sadece tanjant indisler türünden ifade etmek gerekmektedir.

$$
\begin{aligned}
S_{eh} &= \int \sqrt{-\hat{G}} e^{-\hat{\Phi}} \Big(- \hat{\omega}_{A}{}^{BC} \hat{\omega}_{BC}{}^{A} - \hat{\omega}_{A}{}^{AC} \hat{\omega}_{B}{}^{B}{}_{C} - 2\hat{\omega}_{A}{}^{AC} \partial_{C} \Phi \\
&\quad + \hat{G}^{MN} \partial_{M} \hat{\Phi} \partial_{N} \hat{\Phi} \Big)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Düz uzay dilinde ifade edilmiş spin bağlantıların bileşenleri aşağıda verilen anholonomi sabitleri üzeriden hesaplanır.

$$\hat{\Omega}_{ABC} = \frac{1}{2}(\hat{e}_A{}^M \hat{e}_B{}^N - \hat{e}_A{}^N \hat{e}_B{}^M)\partial_M \hat{e}_{NC} \tag{3.8}$$

Anholonomi sabitlerinin bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_{abc} &= \Omega_{abc} - \frac{1}{4}(A_a{}^m \eta_{bc} - A_a{}^m \eta_{bc} - A_b{}^m \eta_{ac}) && (3.9)\\
\hat{\Omega}_{ab\alpha} &= \frac{1}{2} F^m_{ab} E_{m\alpha} && (3.10)\\
\hat{\Omega}_{\alpha ab} &= \frac{1}{4} E^m_\alpha \lambda_m \eta_{ab};\ \hat{\Omega}_{\alpha ab} = -\hat{\Omega}_{a\alpha b} && (3.11)\\
\hat{\Omega}_{a\alpha\beta} &= \frac{1}{2} E^n_\alpha \partial_a E_{\alpha n} - + \frac{1}{4}(A^m_a \lambda_m)\delta_{\alpha\beta};\ \hat{\Omega}_{\alpha\beta a} = 0 && (3.12)\\
\hat{\Omega}_{\alpha a\beta} &= 1\frac{1}{2} E^n_\alpha \partial_a E_{\alpha n} + \frac{1}{4} A^m_a \lambda_m \delta_{\alpha\beta} && (3.13)\\
\hat{\Omega}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{4}(E^n_\beta \lambda_n \delta_{\alpha\gamma} - E^n_\alpha \lambda_n \delta_{\beta\gamma} && (3.14)
\end{aligned}$$

Anholonomi sabitlerinden yararlanarak spin bağlantı bileşenlerini,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_{abc} &= \omega_{abc} - \frac{1}{2}(A^m_b \eta_{ac} - A^m_c \eta_{ab})\lambda_m && (3.15)\\
\hat{\omega}_{ab\alpha} &= -\frac{1}{2} F^m_{ab} E_{m\alpha} - \frac{1}{2} E^m_\alpha \lambda_m \eta_{ab} && (3.16)\\
\hat{\omega}_{a\alpha b} &= \frac{1}{2} F^m_{ab} E_{m\alpha} + \frac{1}{2} E^m_\alpha \lambda_m \eta_{ab} && (3.17)\\
\hat{\omega}_{\alpha ab} &= \frac{1}{2} F^m_{ab} E_{m\alpha} && (3.18)\\
\hat{\omega}_{a\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}(E^m_\alpha \partial_a E_{m\beta} - E^m_\beta \partial_a E_{m\alpha} && (3.19)\\
\hat{\omega}_{\alpha a\beta} &= \frac{1}{2} E^m_\alpha E^n_\beta \partial_a G_{mn} - \frac{1}{2} A^m_a \lambda_m \delta_{\alpha\beta} && (3.20)\\
\hat{\omega}_{\alpha a\beta} &= -\frac{1}{2} E^m_\alpha E^n_\beta \partial_a G_{mn} + \frac{1}{2} A^m_a \lambda_m \delta_{\alpha\beta} && (3.21)\\
\hat{\omega}_{\alpha\beta\gamma} &= -\frac{1}{2}(E^n_\beta \delta_{\alpha\gamma} - E^n_\gamma \delta_{\alpha\beta})\lambda_n && (3.22)
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Einstein-Hilbert eyleminde yerine koyduğumuzda indirilmiş 4 boyuttaki eylem;

$$\begin{aligned}
S_{eh} &= \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \Big(R - \frac{1}{4} G_{mn} F_\mu{}^m F^{n\mu\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} D_\mu G_{mn} D_\nu G^{mn} \\
&\quad + g^{\mu\nu} D_\mu \phi D_\nu \phi - \frac{1}{2} \lambda_m G^{mn} \lambda_n \Big) && (3.23)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.
Burada $\sqrt{-\hat{G}} = \sqrt{-g}\sqrt{detG}$ parametrizasyonunu kullanılmıştır. Ayrıca dilaton alan $\phi = \Phi - \frac{1}{2}\ln\det G$ olarak tanımlanmıştır.
Dilaton ve metrikten gelen skaler terim üzerinde kovaryant türevleri aşağıda ki gibidir.

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= \partial_\mu\phi - \lambda_m A_\mu^m\phi && (3.24)\\ D_\mu G_{mn} &= \partial_\mu G_{mn} - \lambda_p A_\mu^p G_{mn} && (3.25)\end{aligned}$$

Ayar potansiyel kinetik terim ise

$$L_A = -\frac{1}{4}M_{IJ}\hat{F}^I_{MN}\hat{F}^{JMN} \qquad (3.26)$$

olduğu hatırlanmalıdır. Yüksek boyutlu alanların etiketilemede şapkalı notasyon kullanılılarak ayar terimden elde edilen bileşenler

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= e_\mu{}^a e_\nu{}^b \hat{e}_a{}^M \hat{e}_b{}^N \hat{F}^I_{MN}\\ &= \hat{F}_{\mu\nu} - A_\mu^{(1)\,m}\hat{F}_{m\nu} - A_\nu^{(1)\,n}\hat{F}_{\mu n}\\ &= F_{\mu\nu}^{(3)I} - F_{\mu\nu}^{(1)m}A_m^I + \frac{1}{2}\lambda_m(A_\mu^{(3)I}A_\nu^{(1)m} - A_\nu^{(3)I}A_\mu^{(1)m}) && (3.27)\\ F_{\mu n} &= e_\mu{}^a \hat{e}_a{}^M \hat{F}_{Mn}\\ &= D_\mu A_n^I - \frac{1}{2}\lambda_n A_\mu^{(3)I} && (3.28)\\ F_{mn} &= \frac{1}{2}(\lambda_m A_n^I - \lambda_n A_m^I) && (3.29)\end{aligned}$$

olarak bulunur.
Burada $A_\mu^{(3)I} = \hat{A}_\mu^I - A_\mu^{(1)m}A_m^I$ ve $D_\mu A_n^I = \partial_\mu A_n^I - \frac{1}{2}\lambda_n A_\mu^{(1)n}A_n^I$ olarak tanımlanmıştır.

Altı boyutta heterotik eylemi oluştururken, antisimetrik rank-2 B tensörünün gerilim tensörü , KK indirgemede p-form alanlar için verilen ayrıştırma üzerinden,

$$\begin{aligned} H_{mnr} &= 0; \quad m = 1,2 && (3.30)\\ H_{\mu nl} &= \partial_\mu\hat{B}_{nl} + \frac{1}{2}(A'_n i\partial_\mu A_l^i - A'_l i\partial_\mu A_n^i + \lambda_l\hat{B}_{\mu n} - \lambda_n\hat{B}_{\mu l},\\ H_{\mu\nu l} &= F^{(2)}_{\mu\nu l} - F^{(n)}_{\mu\nu}B_{ln} + \lambda_l B_{\mu\nu} + \lambda_n B_{\mu l}A_\nu^{(1)n} - \lambda_n B_{\mu l}A_\nu^{(1)n},\\ H_{\mu\nu\rho} &= \partial_\mu B_{\nu\rho} - \frac{1}{2}L_{ij}A_\mu^i F^j_{\nu\rho} && (3.31)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. İlk bileşen, $m = 1,2$ olduğundan sıfırdır. Heterotik teori için toplam eylemi parça parça vermeyi tercih ediyoruz. Einstein-Hilbert ve dilaton alanların için dört boyutta eylem şöyledir.

$$\begin{aligned} S_g &= \int \sqrt{-g}e^{-\phi}\Big(R - g^{\mu\nu}D_\mu\phi D_\nu\phi + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}D_\mu G_{mn}D_\nu G^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}G_{mn}F^{(1)m}_{\mu\nu}F^{(1)n}_{\rho\sigma}\Big) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ayar kinetik terimi ise

$$S_A = \int \sqrt{-g}e^{-\phi}\Big(-\frac{1}{4}M_{ij}(F^{(3)i}_{\mu\nu}F^{(3)j}_{\rho\sigma} + 2g^{\mu\nu}G^{mn}F^i_{\mu m}F^j_{\nu n} + F^i_{mn}F^j_{pr})\Big) \tag{3.33}$$

şeklindedir.
Burada tanımlarımız ise,

$$F^{(h)i}_{\mu\nu} = F^{(h)(3)i}_{\mu\nu} - F^{(1)m}_{\mu\nu}A^i_m - \frac{1}{2}A^{(1)m}_\mu A^{(3)i}_\nu + \frac{1}{2}A^{(1)m}_\nu A^{(3)i}_\mu \tag{3.34}$$

$$F^{(h)i}_{\mu n} = \partial_\mu A^i_n \frac{1}{2}A^{(1)m}_\mu(\lambda_m A^i_n - \lambda_n A^i_m) - \frac{1}{2}\lambda_n A^{(3)i}_\mu = D_\mu A^i_n \tag{3.35}$$

$$F^{(h)i}_{mn} = \frac{1}{2}(\lambda_m A^i_n - \lambda_n A^i_m) \tag{3.36}$$

olarak yapılmıştır. Rank-2 antisimetrik tensör alanın gerilim tensörü için çözümleri yukarıda vermiştik. Bu çözümlerin ışığında,

$$S_h = \int -\frac{1}{12}\Big(H^{(h)}_{\mu\nu\lambda}H^{(h)\mu\nu\lambda} + 3G^{mn}H^{(h)}_{\mu\nu m}H^{(h)\mu\nu}_n + 3G^{mp}G^{nr}H^{(h)}_{\mu mn}H^{(h)\mu}_{pr}\Big) \tag{3.37}$$

olur.Yukarıda hesaplanan terimleri bir araya getirerek toplam eylemi aşağıdaki gibi verebiliriz. Burada eyleme öncelikle Eiinstein çerçevesinden sicim çerçevesine $g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{e^\phi}{2}g_{\mu\nu}$ Weyl öiçeklendirmesi yapılarak ardından $\phi \rightarrow 2\phi$ olarak değiştirilerek ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned} S_{het} &= \int \sqrt{-g}\Big(\frac{1}{2}R + \frac{1}{8}g^{\mu\nu}D_\mu G_{mn}D_\nu G^{mn} - g^{\mu\nu}D_\mu\phi D_\nu\phi \\ &\quad -\frac{1}{4}e^{-2\phi}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}G_{mn}F^{(1)m}_{\mu\nu}F^{(1)n}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}e^{2\phi}\lambda_m G^{mn}\lambda_n \\ &\quad -\frac{1}{12}e^{\phi}\big[H_{\mu\nu\lambda}H_{\rho\sigma\kappa} + 3G^{mn}H_{\mu\nu m}H_{\rho\sigma n} + 3G^{mp}G^{nr}H_{\mu mn}H_{\nu pr}\big] \\ &\quad -\frac{1}{4}M_{ij}\big[F^i_{\mu\nu}F^j_{\rho\sigma} + 2g^{\mu\nu}G^{mn}F^i_{\mu m}F^j_{\nu n} + G^{mp}G^{nr}F_{mn}F_{pr}\big]\Big). \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.2. DÖRT BOYUTTA TİP IIA TEORİSİ

Bu kısımda altı boyutlu Tip IIA teoriyi dört boyuta iki torus üzerinde burulma varlığında dört boyuta indirilmesi anlatılacaktır [5, 6]. Altı boyutlu Tip IIA teori on boyutlu teorinin $K3$ çokkatlısı üzerine Kaluza-Klein indirgemesi sonucu elde edilir [42, 48, 54, 15]. Tip IIA teori, bir dilaton, bir antisimetrik rank-2 tensör alan (Kalb-Ramond) ve 1-form ve 3-form Ramond-Ramond alanlarından oluşur. Altı boyutta Tip IIA eyleminin bozonik sektörü

$$\begin{aligned} S_A &= \int d^6x\sqrt{-\hat{G}^{(a)}}e^{\hat{\Phi}^{(a)}}\Big(\hat{R}^{(a)} - \hat{G}^{(a)MN}\partial_M\Phi^{\hat{(a)}}\partial_N\Phi^{\hat{(a)}} \\ &\quad -\frac{1}{4}M^{(a)}_{IJ}\hat{F}^{(a)I}_{MN}\hat{F}^{(a)JMN} - \frac{1}{12}\hat{H}^{(a)}_{MNK}H^{(a)MNK} \\ &\quad -\frac{1}{16}L_{IJ}\epsilon^{KLMNPR}\hat{B}^{(a)}_{KL}\hat{F}^{(a)I}_{MN}\hat{F}^{(a)J}_{PR} \end{aligned} \tag{3.39}$$

olarak verilir [38]. (3.39) eylemi $O(4,20)$ değişmezdir ve altı boyyutta $\mathcal{N} = 2$ süpersimetriye sahiptir. $M^{(a)}_{IJ}$ skaler matrisi $I = 1, ..., 24$ olmak üzere, $O(4,20)/O(4)\times O(20)$ koset uzay değeri alırken L_{IJ} ise $O(4,20)$ uzayının metriğidir. Ayrıca $H_{MNK} = \partial_M B_{NK} + d.p.$ ve A^I_m, $O(4,20)$ vektör ve $A^I_M = (A^a_M, B_{Ma}, A^A_M)$, $a = 1,..,4$ ve $A = 1, ..., 16$ olmak üzere $F^I_{MN} = \partial_M A^I_N - \partial_M A^I_N$ vektör ve antisimetrik rank-2 alan için gerilim tensörleridir.

(3.39) eylemini T^2 üzerinde aşağıda verilen burulma çözümleri ile dört boyuta indirilir.

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \Phi(x) - 2\lambda_m y^m \\ \hat{G}_{MN}(x,y) &= e^{-\lambda_m y^m}\hat{G}_{MN}(x) \\ \hat{B}_{MN}(x,y) &= e^{-\lambda_m y^m}\hat{B}_{MN}(x) \\ \hat{A}^i_M(x,y) &= e^{\frac{1}{2}\lambda_m y^m}\hat{A}^i_M(x) \end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) çözümleri alanların bileşenleri için,

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\nu}(x,y) &= e^{-\lambda_m y^m}\hat{G}_{\mu\nu}(x),\ \hat{G}_{\mu n}(x,y) = e^{-\lambda_m y^m}\hat{G}_{\mu n}(x),\ \hat{G}_{mn}(x,y) = e^{-\lambda_m y^m}\hat{G}_{mn}(x) \\ \hat{B}_{\mu\nu}(x,y) &= e^{-\lambda_m y^m}\hat{B}_{\mu\nu}(x),\ \hat{B}_{\mu\nu}(x,y) = e^{-\lambda_m y^m}\hat{B}_{\mu\nu}(x),\ \hat{B}_{\mu\nu}(x,y) = e^{-\lambda_m y^m}\hat{B}_{\mu\nu}(x) \\ \hat{A}^I_\mu(x,y) &= e^{\frac{1}{2}\lambda_m y^m}\hat{A}^I_\mu(x),\ \hat{A}^I_m(x,y) = e^{\frac{1}{2}\lambda_m y^m}\hat{A}^I_m(x) \end{aligned} \tag{3.41}$$

olur. Burada, y^m, $m = 1, 2$ olmak üzere T^2 uzayının koordinatlarıdır ve λ_m rastgele reel bir parametredir. Dört boyutta indirgeme yoluyla elde edilen teori, iç (kompakt) koordinatlardan bağımsız olması gerektiğini hatırlatalım. Bu bağlamda Scherk-Schwarz mekanizmasının beklenen sonucu üretmesi çözümün teorinin belirli simetrilerine dayanmasını gerektirir[85, 91, 92, 93, 94, 95, 96]. İndirme çözümü aşağıda verilen, torusun $SL(2, \Re)$ ölçeklendirme simetrisine dayandırılabilir.

$$\phi \to \phi - 2\lambda, \quad G_{\mu\nu} \to e^{-\lambda} G|\mu\nu, \quad B_{\mu\nu} \to e^{-\lambda} B_{\mu\nu} \tag{3.42}$$

Yukarıda verilen simetrinin ışığında, (3.40) çözümünün tutarlı ve geçerli bir sonuca ulaşmaasını mümkün kılar. Ricci skaler Palatini forma getirildikten sonra, burulma çözümü altında indirgenir. Heterotik teori için burulma çözümü yazıldığında λ çarpanı olan terimlerde işaret fark eder. Heterotik teori için yapılan işlemler tekrar edilerek, $g^{(a)}_{\mu\nu} \to \frac{e^{\phi^{(a)}}}{2}$ Weyl ölçeklendirmesi (konformal ölçeklendirme) ve $\phi^{(a)} \to 2\phi^{(a)}$ nihai ölçeklendirmeleri sonucunda dört boyutta EH lagranjiyeni;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(a)}_g &= e^{-\phi}\bigg(\frac{1}{2}R - D_\mu\phi^{(a)}D^\mu\phi^{(a)} + \frac{1}{8}D_\mu G^{(a)}_{mn} D^\mu G^{(a)mn} \\ &\quad -\frac{1}{4}G^{(h)}_{mn}F^{(a)m}_{\mu\nu}F^{(a)n\mu\nu} - \frac{1}{2}\lambda_m G^{(a)mn}\lambda_n\bigg), \end{aligned} \tag{3.43}$$

olarak bulunur. Burada $F^{(a)m}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{(a)m}_\nu$ gravifotona ait gerilim tensörü olarak tanımlanır. Ayrıca $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\lambda_m A^{(a)m}_\mu\phi$ ve $D_\mu G^{(a)}_{mn} = \partial_\mu G^{(a)}_{mn} - \lambda_m A^{(a)m}_\mu G^{(a)}_{mn}$ kovaryant türevlerdir.

NS-NS kısmının (3.40) çözümleri altında indirilmesi sonucunda aşağıdaki lagranjiyeni elde edilmektedir. Tüm presedürün daha önce heterotik alanlar için anlatılan ayrıntılardan bir farkı yoktur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= e^{\phi}\bigg(-\frac{1}{12}H^{(a)}_{\mu\nu\lambda}H^{(a)\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}G^{(h)mn}H^{(a)}_{\mu\nu m}H^{(a)\mu\nu}_{n} - \frac{1}{4}G^{(a)mp}G^{(a)nr}g^{(a)\mu\nu}H_{\mu mn}H_{\nu pr} \\ &\quad -\frac{1}{4}M^{(a)}_{IJ}F^{(a)I}_{\mu\nu}F^{(a)J\mu\nu} - \frac{1}{2}M^{(a)}_{IJ}g^{(a)\mu\nu}G^{(a)mn}F^{(a)I}_{\mu m}F^{(a)J}_{\nu n}\frac{1}{4}M^{(a)}_{IJ}G^{(a)mp}G^{(a)nr}F^{(a)I}_{mn}F^{(a)J}_{pr}\bigg) \\ &\quad +\mathcal{L}_{cs} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Burada $\mathcal{L}_{cs}$ Chern-Simons (CS) terimi ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rfloor\int} &= -\frac{1}{6}L_{IJ}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{mn}B^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)I}_{\rho m}F^{(a)J}_{\sigma n} - \frac{1}{12}L_{IJ}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{mn}B^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)I}_{\rho\sigma}F^{(a)J}_{mn} \\ &\quad -\frac{1}{6}L_{IJ}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{mn}B^{(a)}_{\mu[m}F^{(a)I}_{\nu n]}F^{(a)J}_{\rho\sigma} - \frac{1}{12}L_{IJ}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{mn}B^{(a)}_{mn}F^{(a)I}_{\mu\nu}F^{(a)J}_{\rho\sigma}\bigg) \end{aligned} \tag{3.45}$$

olarak bulunur. Dört boyuttaki alanları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır,

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^{(a)I} &= F_{\mu\nu}^{(3)(a)I} - F_{\mu\nu}^{(1)(a)m} A_m^I \\
F_{\mu\nu}^{(3)(a)I} &= \partial_\mu A_\nu^{(3)(a)I} - \lambda_m A_\mu^{(1)(a)m} A_\nu^{(3)(a)I} - \mu \leftrightarrow \nu \\
F_{\mu n}^{(a)I} &= \partial_\mu A_n^{(a)I} - \frac{1}{2}\lambda_m A_\mu^{(1)(a)m} A_n^{(a)I} - \lambda_n A_\mu^{(3)(a)I} = D_\mu A_n^{(a)I} \\
F_{mn}^{(a)I} &= \frac{1}{2}(\lambda_m A_n^{(a)I} - \lambda_n A_m^{(a)I}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

ve

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu\lambda}^{(a)} &= D_\mu B_{\nu\lambda}^{(a)} - B_{\mu n}^{(a)} F_{\nu\lambda}^{(1)(a)n} + (\mu \to \nu \to \lambda) \\
D_\mu B_{\nu\lambda}^{(a)} &= \partial_\mu B_{\nu\lambda}^{(a)} + \lambda_m A_\mu^{(1)(a)m} B_{\nu\lambda}^{(a)} \\
H_{\mu\nu m}^{(a)} &= F_{\mu\nu m}^{(2)} - \lambda_n B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^n B_{mn} \\
H_{\mu mn}^{(a)} &= \partial_\mu B_{mn}^{(a)} + \lambda_l A_\mu^{(1)(a)l} B_{nl}^{(a)} + 2\lambda_{[n} A_{\mu l]} = D_\mu B_{mn}^{(a)}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Burada

$$\begin{aligned}
B_{\mu\nu}^{(a)} &= \hat{B}_{\mu\nu}^{(a)} + A_\mu^{(1)(a)m} A_{\nu m}^{(2)(a)} - A_\nu^{(1)(a)m} A_{\mu m}^{(2)(a)} - A_\mu^{(1)(a)m} A_\nu^{(1)(a)n} B_{mn}^{(a)} \\
A_{\mu m}^{(a)(2)} &= \hat{B}_{\mu m} + A_\mu^{(1)(a)n} B_{mn}^{(a)} \\
F_{\mu\nu m}^{(2)(a)} &= \partial_\mu A_{\nu m}^{(a)(2)} + \lambda_n A_\mu^{(1)(a)n} A_{\nu n}^{(2)(a)} - \mu \leftrightarrow \nu
\end{aligned} \tag{3.48}$$

olarak tanımlanmıştır. $M_{IJ}^{(a)}$ skaler matrisi $O(4,20)/O(4) \times O(20)$ değerlidir. Burada görünen, burulmuş çözümün metrik ve NS modülün kayma simetrilerine ayar etme işlemine denk bir sonuç verdiğidir. Zira her ikiside gravifoton altında yük kazanmıştır. Bununla beraber dilaton ve NS-NS alanlar gravifotona Stückelberg tipinde bağlanmıştır.

3.3. DÖRT BOYUTTA HETEROTİK TİP IIA S-DÜALLİĞİ

Bu bölümde elde ettiğimiz kütleli/ayar 4 boyutlu Tip IIA kuramın heterotik teoriden burulma altında elde edilen formuna düal olduğunu göstereceğiz. Düalizasyon işlemi iki aşamadan oluşuyor. Birinci olarak (3.45)'de verilen CS terimine toplam türev terimler ekleyeceğiz. Teori bu haliyle $B_{\mu\nu}$, $A_{\mu n}^{(2)}$ ve B_{mn} alanlarının gerilim tensörleri yanında yalın potansiyel terimlerini de barındırmaktadır. Söz konusu terimlerin eklenmesi hareket denklemlerini değiştirmeyecek ve sonuçta CS kısmı ilgili alanların

gerilim tensörlerinde oluşacaktır. İkinci olarak teoriye lagranj çarpanları ekliyoruz. Böylece düalize edeceğimiz alanların gerilim tensörlerine eşleyeceğiz.
Lagranj çarpanı olan terimleri;

$$\begin{aligned}
&\big(\partial\mu B^{(h)}_{\nu\lambda} - \lambda_p B^{(h)}_{\mu\nu} A^{(a)p}_{\lambda} - A^{(2)}_{\mu m} F^{(1)m}_{\mu\nu} + d.p\big) H^{(a)\mu}_{mn},\\
+&\big(\partial_\mu A^{(2)(h)}_{\nu m} + \lambda_p A^{(2)(h)}_{\mu m} A^{(1)(h)p}_{\nu} + \lambda_m B^{(h)}_{\mu\nu} - B_{mn} F^{(1)(h)n}_{\mu\nu}\big) H^{(a)\mu\nu}_{n} \epsilon^{mn},\\
+&\big(\partial_\mu B^{(h)}_{mn} - \lambda_p A^{(1)(h)p}_{\mu} B^{(h)}_{mn} - 2\lambda_{[m} A^{(2)(h)}_{\mu n]}\big) H^{(a)\mu\nu\lambda} \epsilon^{mn}, \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

olarak veriyoruz. Yukarıdaki lagranjiyen çarpanları varken, lagranjiyenin $B^{(h)}_{\nu\lambda}$, $A^{(2)(h)}_{\mu m}$ ve $B^{(h)}_{mn}$ alanlarına göre varyasyonunu alındığında $H^{(a)}_{\mu\nu\lambda}$, $H^{(a)}_{\mu\nu m}$ ve $H^{(a)}_{\mu mn}$ gerilim tensörlere dair özdeşlikler elde edilir. Bu özdeşlikler sırasıyla

$$\begin{aligned}
-D^{(a)}_{\mu} H^{(a)}_{\nu mn} - 2\lambda_{[m} H^{(a)}_{\mu\nu n]} &= 0\\
D^{(a)}_{\mu} H^{(a)}_{\nu\lambda n} + \lambda_n H^{(a)}_{\mu\nu\lambda} - F^{(1)(a)m}_{\mu\nu} H^{(a)}_{\lambda mn} &= 0\\
D^{(a)}_{\mu} H^{(a)}_{\nu\lambda\sigma} + F^{(1)(a)m}_{\mu\nu} H^{(a)}_{\lambda\sigma m} &= 0 \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada tanımlı alanlar (3.47) verilen gerilim tensörü ifadeleri ile tutarlıdır ve bu ifadelerde yerine konduğunda özdeşlikleri sağladığı görülür. Tip IIA Teorinin Chern-Simons kısmını $H^{(a)}_{\mu\nu\lambda}$, $H^{(a)}_{\mu\nu m}$ ve $H^{(a)}_{\mu mn}$ gerilim tensörleri türünden yazarsak, bu alanlara göre dört boyutlu Tip IIA eylemin varyasyonunu alabiliriz. Bir miktar işlemden sonra $\mathcal{L}_{cs}$ aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cs} = \; & L_{ij}\epsilon^{mn} H^{(a)}_{\mu\nu\rho} A^{(3)(a)i}_{\sigma} F^{(a)j}_{mn} - L_{ij}\epsilon^{mn} H^{(a)}_{\mu\nu\rho} A^{(a)i}_{[m} F^{(a)j}_{\sigma n]}\\
&+ L_{ij}\epsilon^{mn} H^{(a)}_{\mu\nu[m} A^{(a)(3)i}_{\rho} F^{(a)j}_{\sigma n]} + L_{ij}\epsilon^{mn} H^{(a)}_{\mu\nu[m} A^{(a)i}_{n]} F^{(a)(3)j}_{\rho\sigma}\\
&+ L_{ij}\epsilon^{mn} H^{(a)}_{\mu mn} A^{(3)(a)i}_{\nu} F^{(a)j}_{\rho\sigma} \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Bu terimler ile birlikte bazı toplam türev altında terimler de gelir. Fakat bu terimler eylemin varyasyonu sonucu elde edilebilecek hiç bir denkleme katkı sunmaz. Dolayısıyla güvenle $\mathcal{L}_{cs}$ terimi bu formda yazabiliyoruz.

Artık tüm lagranjiyenin $H^{(a)}_{\mu\nu\lambda}$, $H^{(a)}_{\mu\nu m}$ ve $H^{(a)}_{\mu mn}$ gerilim tensörlerine göre varyasyonu almak mümkün. Bu işlemi yaptığımızda sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
e^{-\phi^{(a)}}\epsilon^{mn}\star H^{(a)}_{\mu mn} &= D^{(h)}_{\mu}B^{(h)}_{\nu\rho} - A^{(2)(h)}_{\mu m}F^{(1)(h)m}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}L_{ij}A^{(3)(h)i}_{\mu}F^{(3)(h)j}_{\nu\rho} + d.p. \equiv H^{(3)(h)}_{\mu\nu\rho} \\
e^{-\phi^{(a)}}\star H_{\mu\nu m} &= D^{(h)}_{\mu}A^{(2)(h)}_{num} + \lambda_m B_{\mu\nu} - B^{(h)}_{mn}F^{(1)(h)n}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}L_{ij}A^{(h)i}_{m}F^{(3)(h)j}_{\mu\nu} \\
-\frac{1}{2}L_{ij}A^{(h)i}_{\mu}F^{(3)(h)j}_{\nu m} &\equiv H^{(h)}_{\mu\nu m} \\
e^{-\phi^{(a)}}\epsilon_{mn}\star H^{(a)}_{\mu\nu\lambda} &= D^{(h)}_{\mu}B^{(h)}_{mn} - \frac{1}{2}L_{ij}A^{(3)(h)i}_{\mu}F^{(h)j}_{mn} + \frac{1}{2}L_{ij}A^{(h)i}_{m}F^{(3)(h)j}_{\nu m} \equiv H^{(h)}_{\mu mn} \quad (3.52)
\end{aligned}
$$

ilişkilerini buluruz. Burada tanımladığımız kovaryant türevler şöyledir:

$$
\begin{aligned}
D^{(h)}_{\mu}B^{(h)}_{\nu\rho} &= \partial_{\mu}B^{(h)}_{\nu\rho} - \lambda_m A^{(1)(h)m}_{\mu}B^{(h)}_{\nu\rho} \\
D^{(h)}_{\mu}A^{(2)(h)}_{num} &= \partial_{\mu}A^{(2)(h)}_{num} + \lambda_n A^{(1)(h)n}_{\mu}A^{(2)(h)}_{num} \\
D^{(h)}_{\mu}B^{(h)}_{mn} &= \partial_{\mu}B^{(h)}_{mn} - \lambda_p A^{(1)(h)p}_{\mu}B^{(h)}_{mn} - 2\lambda_{[m}A^{(2)(h)}_{\nu n]} \quad (3.53)
\end{aligned}
$$

Artık iki teori arasında bir ilişki kurulabilir. İki özdeşleştirme ile başlıyoruz:

$$
M^{(a)}_{ij} \to M^{(h)}_{ij}; \quad A^{(a)i}_{\mu} \to A^{(h)i}_{\mu} \quad (3.54)
$$

T^4 üzerine kompaktifikasyonu sonucunda heterotik teorinin skaler sektörü 24×24 matris değerli M_{ij} alanı tarafından ifade edilir:

$$
M^{(h)IJ} = \begin{pmatrix} G + C^T G^{-1} C & -C^T G^{-1} & C^T G^{-1} L A + A^T \\ -G^{-1}C & G^{-1} & -G^{-1}LA \\ A^T G^{-1} C + A & -A^T L G^{-1} & 1 + A^T G^{-1} L A \end{pmatrix} \quad (3.55)
$$

Burada $G_{mn}\,, m = 1,..,4$ simetrik 4×4 kompakt uzayın metriği ve $C = B + \frac{1}{2}A^I L_{IJ} A^J$'dir. L, $O(4,20)$ grubun değişmez metriğidir. Ayrıca tip IIA teorideki gerilim tensörleri olan $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu n}$ ve F_{mn} hiçbir değişiklik olmaksızın heteroik teorinin gerilim tensörleri olan $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu n}$ ve F_{mn} ile sırasıyla özdeşleştirilir.

(3.52) eşitliklerini toplam $\mathcal{L}_a$ eyleminde yerine koyup, (3.54)'daki özdeşleştirmeleri yaptıktan sonra dilaton alanlar arasında $\phi \to -\phi$ değişimi yapıldığında tam olarak bir önceki bölümde bulduğumuz heterotik eylemi buluyoruz.

Dilaton alan, işaret değiştirdiğinden düallik ilişkisi S-tip düalliktir ve sicim çiftlenim sabiti $g = e^{\phi}$ olarak dilaton alanla ilişkilidir. Dolayısıyla kuvvetli rejimden zayıf etkileşim rejimine (yada tersi) bir gönderme tanımlamış oluyoruz.

3.4. KÜTLELİ S-DÜALLİĞİ

(3.52) denklem grubunda verilen düalite ilişkilerini detaylandırmamız mümkündür. Süpergravite teorilerinde akı varlığında boyutsal indirgeme sırasında Stückelberg tipi çiftlenmelerin ortaya çıktığı bilinen bir durumdur. On boyutta süpersimetrik ayar alanlara çiftlenmiş $N = 1$ süpergravite akı varlığında boyutsal olarak indirgendiğinde Stückelberg çiftlenmeleri gözlenmektedir.

Burada ise Tip IIA tarafından bakıldığında 1-form alanları (1-form alanların lineer kombinasyonunu) yiyerek kütle kazanmış 2-form alan, heterotik tarafta skaler alanın serbestlik derecelerini yiyerek kütle kazanmış 1-form alana düaldir. Aynı şekilde, skaler alanı yiyerek kütle kazanan Tip IIA taraftaki kalan 1-form alan, kalan 1-forma Stückelberg tip çiftlenerek kütle kazanan heterotik teorideki 2-form alana düaldir.

Herhangi bir d boyutta kütlesiz bir p-from alanın serbestlik derecesi ,

$$C(d-2,p) = \binom{d-2}{p} = \frac{(d-2)!}{p!(d-2-p)!} \tag{3.56}$$

ile verilirken, p-form bir kütleli alanın serbestlik derecesi,

$$C(d-1,p) = \binom{d-1}{p} = \frac{(d-1)!}{p!(d-1-p)!} \tag{3.57}$$

ile verilir. Altı boyutta 2-form bir alanın 6 serbestlik derecesi olduğunu görüyoruz. Burulma olmaksızın altı boyuttan dört boyuta gidildiğinde 2-from alan yine 2-form bir alanla birlikte iki adet 1-form alana ve bir skaler alana ayrışır. Bu durumda toplam serbestlik derecesi yukarıda belirttiğimiz sırayla $1 + 2 \times 2 + 1 = 6$ olur.

Kütleli durumda serbestlik derecelerine baktığımızda 2-form ve 1-form alanlar için serbestlik derecelerinin 3 olduğunu görüyoruz. Bu farklılık, 2-form alanın 1-form alanlardan birini Stückelberg tipi tutunarak, kalan 1-form alanın da skaler alana tutunarak yemelerinden kaynaklanır. Toplam serbestlik derecesi yine $3+3 = 6$ olur. Buna dayanarak bir ayar seçmemiz olanaklı olur. Burada kullanmayacak olsak da bahsetmekte yarar görüyoruz. A vektör alanı dört boyuta inerken teoriye bir vektör ve bir skaler bırakır. Vektor alan skaler alana çiftlenmesi uzerinden bir ayar vermemizde olasıdır. Ama bu yolu takip etmeyecegiz.

Kütle kazanma mekanizması sadece 2-form alan üzerinden açıklanabilir. Bunun için dört boyutta ilgili alanların ayar dönüşümleri,

$$\begin{aligned}
\delta B_{\mu\nu} &= D_\mu \Lambda_\mu + \Lambda_1 \mathcal{F}^1_{\mu\nu} + \Lambda_2 \mathcal{F}^2_{\mu\nu} \\
\delta B_{\mu 1} &= D_\mu \Lambda_1 - \lambda_1 \Lambda_\mu \\
\delta B_{\mu 2} &= D_\mu \Lambda_2 - \lambda_2 \Lambda_\mu \\
\delta B_{12} &= -\lambda_1 \Lambda_2 + \lambda_2 \Lambda_1
\end{aligned} \tag{3.58}$$

olur. Burada

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

olamak üzere,

$$\bar{B}_{\mu m} = \Omega^n{}_m B_{\mu n}, \; \bar{\Lambda}_m = \Omega^n{}_m \Lambda_n \tag{3.60}$$

tanımlarını yapmak yerinde olur. Bu tanımlardan dönüşümleri,

$$\begin{aligned}
\delta \bar{B}_{\mu 1} &= D_\mu \bar{\Lambda}_1 \\
\delta \bar{B}_{\mu 2} &= D_\mu \bar{\Lambda}_2 - \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \Lambda_\mu \\
\delta B_{12} &= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \bar{\Lambda}_1
\end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak ifade ederiz. Son ifadeyi kullanarak $B_{12} = 0$ ayarına gidiyoruz. Bu koşullar altında gerilim tensörleri aşağıdaki forma gelirler.

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{\mu\nu 1} &= D_\mu \bar{B}_{\nu 1} - \partial_\nu \bar{B}_{\mu 1} \\
\bar{H}_{\mu\nu 2} &= D_\mu \bar{B}_{\nu 2} - \partial_n u \bar{B}_{\mu 2} + \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} B_{\mu\nu} \\
H_\mu &= \bar{B_{\mu 1}}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Burada $\bar{B}_{\mu m} = \Omega^n{}_m B_{\mu n}$ ve $\bar{H}_{\mu\nu m} = \Omega^n{}_m H_{\mu\nu n}$. Ayrıca aşağıdaki ayar değişmezliklerinden,

$$\delta \bar{B}_{\mu 2} = -\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \Lambda_\mu, \quad \delta B_{\mu\nu} = D_\mu \Lambda_\nu \tag{3.63}$$

$$B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} D_\mu \bar{B}_{\nu 2} \tag{3.64}$$

ayar dönüşümünü gerçekleştirebiliriz. Yukarıda yapılanların sonucu olarak $\bar{B}_{\nu 2}$ yok olur ve $H_{\mu\nu\lambda}$ gerilim tensör

$$H_{\mu\nu\lambda} = D_\mu B_{\nu\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}(\lambda_1 \bar{B}_{\mu 1}\mathcal{F}^1_{\nu\lambda} - \lambda_2 \bar{B}_{\mu 1}\mathcal{F}^1_{\nu\lambda}) + d.p. \tag{3.65}$$

haline gelir. Özetle,

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu\lambda} &= D_{\mu\nu} B_{\nu\lambda} - \bar{B}_{\mu 1}\bar{\mathcal{F}}^1_{\nu\lambda} + d.p. \\
\bar{H}_{\mu\nu 1} &= D_\mu \bar{B}_{\nu 1} - \partial_\nu \bar{B}_{\mu 1} \\
\bar{H}_{\mu\nu 1} &= \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} B_{\mu\nu} \\
H_\mu &= \bar{B}_{\mu 1}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

olur. Burada $\bar{\mathcal{F}}^m = \Omega^m{}_n \mathcal{F}^n$ olarak tanımlanmıştır ve böylece

$$\begin{aligned}
\big(D_\mu B_{\nu\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\bar{B}_{\mu 1}\bar{\mathcal{F}}^1_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}L_{IJ}A^I_\mu F^J_{\nu\lambda} + d.p.)^{Het} &= \big(e^{-\phi} * \bar{B}_{\mu 1}\big)^{IIA} \\
\big(\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} B_{\mu\nu} - L_{IJ}A^I_2 F^J_{\mu\nu})\big)^{Het} &= \big(e^{-\phi} * D_\mu \bar{B}_{\nu 1}\big)^{IIA} \\
\big(D_\mu \bar{B}_{\nu 1} - L_{IJ}A^I_1 F^J_{\mu\nu}\big)^{Het} &= \big(e^{-\phi} * \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2} B_{\mu\nu}\big)^{IIA} \\
\big(\bar{B}_{\mu 1} + L_{IJ}A^I_1 D_\mu A^J_2 + \frac{1}{2}A^I_1 A^J_\mu\big)^{Het} &= \\
\big(e^{-\phi} * (D_\mu B_{\nu\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\bar{B}_{\mu 1}\bar{\mathcal{F}}_{\nu\lambda} + d.p.)\big)^{IIA} &
\end{aligned} \tag{3.67}$$

düalite ilişkilerine ulaşırız. Burada B_{12} skaleri ve $B_{\mu 2}$ vektörü sırasıyla $B_{\mu 1}$ vektörü ve $B_{\mu\nu}$ tensörü tarafından yenir. Burada $\bar{A}^I_m = \Omega^n{}_m A^I_n$ tanımlıdır. (3.67) denklemlerinden kütleli 1-form ile kütleli 2-form arasında kütleli bir düalite ilişkisi olduğu görülmektedir. Dört boyutta her iki alanında 3 serbestlik derecesinin olması bu durumun bir onayı olarak görülebilir.

3.5. D=4 N=4 AYAR SÜPERKÜTLEÇEKİM VE HETEROTİK SİCİM

Vektör multipletlere çiftlenmiş $N = 4$ süpergravitein "on-shell" simetrisinin $SL(2, R)\times O(6, 6 + d)$ olduğundan bahsedilmiş ve tüm formulasyon verilmişti. Buradan devamla bu kısımda altı boyuttan burulma altında boyutsal indirgeme yoluyla elde eilen teorinin bir $N = 4, D = 4$ süpergravite olduğunu göstereceğiz.

Dört boyutlu heterotik lagranjiyen ile ayar süpergravite formülasyonu karşılaştırarak bir eşdeğerlik olup olmadığını irdeleyeceğiz. Bu amaçla heterotik teorideki alan tanımlarımızda bir dizi değişiklik yapıyoruz.

Antisimetrik tensörün gerilim tensörünün bileşenlerinin hesaplanması sırasında aşağıdaki alan tanımlarını yapıyoruz.

$$\begin{aligned}
C^{(h)}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + A^{(1)m}_{[\mu} A^{(2)}_{\nu]m} + \frac{1}{4} L_{IJ} A^{(3)I}_{\mu} A^{m}_{\nu} A^{J}_{m} \\
C_{\mu m} &= B_{\mu m} + \frac{1}{2} L_{IJ} A^{(I}_{\mu} A^{J}_{m} \\
C_{mn} &= B_{mn} + \frac{1}{2} A^{I}_{m} A^{J}_{n}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Bu alan tanımlarına bağlı olarak ilgili gerilim tensörleri,

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu\lambda} &= D_{\mu} C_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} L_{IJ} A^{I}_{\mu} F^{J}_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \lambda_m A^{m}_{\mu} C_{\nu n} A^{n}_{\lambda} + d.p. \\
H_{\mu\nu l} &= D_{\mu} C_{nul} + \lambda_m C_{\mu\nu} - C_{mn} F^{n}_{\mu\nu} - L_{IJ} A^{I}_{m} D_{\mu} A\nu^{J} \\
H_{\mu mn} &= D_{\mu} C_{mn} - L_{IJ} A^{I}_{m} D_{\mu} A^{J}_{n}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

halini alır. Bazı kovaryant türev ifadelerini daha önce tanımlamıştık. Yeni tanımladığımız kovaryant türev ifadeleri ise,

$$D_{\mu} C_{mn} = \partial_{\mu} C_{mn} - \lambda_l A^{l}_{\mu} C_{mn} - 2\lambda_{[m} C_{\mu n]} \tag{3.70}$$

şeklindedir. Bununla birlikte vektör multipleti

$$A^{M}_{\mu} = \begin{pmatrix} A^{m}_{\mu} \\ C_{\mu m} \\ A^{I}_{\mu} \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

olarak tanımlıyoruz. Bu alanlara dair gerilim tensörleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
F^{m}_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} A^{m}_{\nu} - \partial_{\mu} A^{m}_{\nu} \\
C_{\mu\nu m} &= \partial_{\mu} A_{\nu m} + \lambda_n A^{n}_{\mu} C_{\nu m} - \frac{1}{2} \lambda_m A^{n}_{\mu} C_{\mu n} + \lambda_m C_{\mu\nu} - \mu \leftrightarrow \nu \\
F^{I}_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} A^{I}_{\nu} + \lambda_m A^{I}_{\mu} A^{m}_{\nu} - \mu \leftrightarrow \nu
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Buraya kadar edindiğimiz bulgular ışığında $O(6,22)/O(6) \times O(22)$ değerli skaler matris oluşturalabilir.

$$N_{MN} = \begin{pmatrix} G + CGC + AA & -CG & CGA + A \\ -CG & G & GA \\ AGC + A & GA + L + AGA & \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

Bu andan itibaren geriye 4 boyutlu heterotik eyleminin,

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\sqrt{]-g}\Big(\frac{R}{2} - D_\mu\phi D^\mu\phi - e^{-2\phi}\lambda_m N^{mn}\lambda_n \\ &+e^{\phi}[\frac{1}{4}g^{\mu\nu}D_\mu N_{IJ}D_\nu N^{IJ} - \frac{1}{12}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}g^{\lambda\lambda'}H_{\mu\nu\lambda}H_{\mu'\nu'\lambda'} \\ &-\frac{1}{4}g^{\mu\mu'}g^{\nu\nu'}N_{MN}F^M_{\mu\nu}F^N_{\mu'\nu'}]\Big) \end{aligned} \tag{3.74}$$

bir ayar süpergravite olduğunu göstermek kalır. Bir önceki bölümde verilen $D = 4N = 4$ süpergravite formalizminde $\xi_{\alpha M}$ ve $\hat{f}_{\alpha MNP}$ tensörlerini çözmemiz gerekmekte. Bunu yaparken izlediğimiz yöntem sözkonusu iki tensör üzerindenki kısıtlamaları kullanarak bir çözüme ulaşmak yerine her iki durumun alanlara dair verdiği gerilim tensörlerini karşılaştırmak oldu. İzlenen yol olası bir çk çözüm kümesinden hangisinin istenen çözüm olduğunu bulmakta daha kolaydır. Açıkçası bu tensörlere dair çözümler bulmak bir yerden sonra oldukça zor. Dolayısıyla çözümleri bulduktan sonra kısıtlamları sağlayıp sağlamadığına bakacağız. İzleyeceğimiz yöntem bu olacak.

Bu bağlamda ayar süpergravite eylem yalnızca elektrik alanın gerilim tensörü içerdiğinden ξ_{-M} ve $\hat{f}_{-MNP}$ magnetik bileşenlerini sıfıra ayarlamak yerinde olur.

(3.72) ifadelerindeki gerilim tensörlerini (1.52) ifadesinin bileşenleri olarak düşünüyoruz. $F^m_{\mu\nu}$ ve $\mathcal{H}^{m+}_{\mu\nu}$ karşılaştırıldığında $B_{\mu\nu}$ terimini $F^m_{\mu\nu}$ tensörünün içermediği görülüyor. Buradan $\xi^{+m} = 0$ olduğu sonucu çıkıyor. Tüm bileşenlere dair çözüm

$$\xi{+}M = (\xi_{+m}, \xi_{+m'}, \xi_{+I}) = (\lambda_m, 0, 0) \tag{3.75}$$

olur. $\hat{f}_{+MNP}$ tensörü ile bulguları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{NPm} - \hat{f}_{PNm} &= 0 \\ \hat{f}_{ImJ} - \hat{f}_{mIJ} &= -\lambda_m\eta_{IJ} \\ \hat{f}_{n'pm} - \hat{f}_{pn'm} &= \lambda_m\eta_{pn'} - 2\lambda_p\eta_{mn'} \end{aligned} \tag{3.76}$$

Yukarıdaki gözlemleri $\hat{f}_{+MNP}$ tanımı içinde değerlendirdiğmizde bir bileşeni daha

$$f_{+mnp'} = -\lambda_{[m}\eta_{n]p'} \tag{3.77}$$

olarak belirliyoruz.

Ayar süpergravite eylemde (3.76) ve (3.77) çözümlerini kullanarak nihai formu elde edeceğiz. Kinetik ve topolojik terimlerin kombinasyonundan, kinetik terimi aşağıdaki gibi buluyoruz.

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \int d^4x\sqrt{-g}\bigg(\frac{R}{2} - \frac{1}{16}g^{\mu\nu}D_\mu M_{MN}D_\nu M^{MN} - g^{\mu\nu}D_\mu\phi D_\nu\phi \\ &\quad -\frac{1}{4}e^{-2\phi}M_{MN}\big(F_{\mu\nu}^{M+} + \frac{1}{2}\xi_+^M B_{\mu\nu}^{++}\big)\big(F^{\mu\nu M+} + \frac{1}{2}\xi_+^M B^{\mu\nu ++}\big) \\ &\quad -\frac{1}{8}e^{-4\phi}\big(\partial_\mu B_{\nu\rho}^{++} - \xi_+^M A_\mu^{M+}B_{\nu\rho}^{++} - \omega_{\mu\nu\rho}\big)^2\bigg) \end{aligned} \tag{3.78}$$

Skaler potansiyel ise,

$$\begin{aligned} S_{pot} &= \int \sqrt{-g} - \frac{1}{16}e^{2\phi}\bigg(3\xi_{+M}\xi_{+N}M^{MN} + \frac{1}{3}f_{+MNP}f_{+QRS}M^{MQ}M^{NR}M^{PS} \\ &\quad +f_{+MNP}f_{+QRS}(\frac{2}{3}\eta^{NQ} - M^{MQ})\eta^{NR}\eta^{PS}\bigg) \end{aligned} \tag{3.79}$$

olarak bulunur. Burada $\omega_{\mu\nu\rho} = \eta_{MN}F_{\mu\nu}^{M+}A_\rho^{N+} - \lambda_m A_\mu^{m+}A_\nu^{n+}A_{\rho n}^{+}$. Tanıma uygun olarak $H_{\mu\nu\rho} = D_\mu C_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho}$.

Bazı özdeşleştirmeleri yapmak gerektiğini belirtmemiz gerekiyor. A_μ^{m+} alanını Kaluza-Klein alanı, $A_\mu^{m'+}$ alanını antisimetrik tensörden tanımladığımız $C_{\mu m}$ alanı ve A_μ^{I+} alanını altı boyutlu vektör alanları olarak özdeşleştiriyoruz. Ayrıca $B_{\mu\nu}^{++} = 2C_{\mu\nu}$ olarak tanımladığımızda kinetik terimin tam olarak heterotik eylemin karşılığı olduğunu görebiliyoruz. Potansiyel terimlere baktığımızda $M \equiv 2N$ durumunda skaler potansiyel terimlerin özdeş olduğu anlaşılıyor. Nihai olarak burulma altında T^2 üzerine indirdiğimiz heterotik teorinin Schön-Weidner'in formalizminde olduğu gösterilmiş oldu.

3.6. DEĞİŞİMSİZ UZAYDA KONFORMAL-SÜPERGRAVİTENİN AYAR TEORİSİ

Değişimsiz uzayda süpergravite oluşturmak için konformal süpergravite üzerinde çalışmanın grup yapısı bakımından uygun tek aday olduğunu izah edilmişti. Söz konusu işlem bir deformasyon çarpımı kullanarak, simetrilerin değişimsiz uzayda karşılığını bulmak olarak özetlenebilir. Herhangi bir ayar teori açısından bakıldığında, θ deformasyon parametresinin ilk mertebesinden itibaren üreteçlerin antikomütasyon ilişkilerine gereksinim duyulur. Dolayısıyla, burada da aynı formülasyon kullanıldığından, antikomütasyon ilişkilerinin belirlenmesi gerekir. Bahsedildiği gibi, üniter gruplar dışında kalan gruplarla bu işi yapmak için farklı yollar izlenmektedir [97, 98] . Burada ise süperkonformal grubun izomorfizmine güvenerek, ürteçlerin antikomütasyon ilişkilerini belirleyip genişletilmiş değişimsiz bisüperkonformal cebir oluşturulacaktır. Bu cebir üzerinden ayar formalizmi aracılığıyla simetrileri dönüşümleri ve Ricci skalerler hesaplanacaktır.

Değişimsiz uzayda konformal süpergravite üreteçleri ve ayar parametreleri,

$$\begin{aligned}
\hat{V}_\mu(a,b,e,f,\omega,\bar{\psi},\bar{\phi}) &= \hat{a}_\mu A + \hat{b}_\mu D + \hat{e}^m_\mu P_m + \hat{f}^m_\mu K_m - \frac{1}{2}\hat{\omega}^{mn}_\mu M_{mn} + \kappa_1 \hat{\bar{\psi}}_{\mu,\alpha} Q^\alpha \\
&\quad + \kappa_2 \hat{\bar{\varphi}}_{\mu,\alpha} S^\alpha \\
\hat{\Lambda}(a,b,e,f,\omega,\bar{\psi},\bar{\phi}) &= \hat{\alpha} A + \hat{\beta} D + \hat{\xi}^m P_m + \hat{\zeta}^m K_m + \frac{1}{2}\hat{\lambda}^{mn} M_{mn} + \bar{\epsilon}_\alpha Q^\alpha + \bar{\varepsilon}_\alpha S^\alpha
\end{aligned}$$

olarak verilir. Burada R-simetrisi sadece $U(1)$ olarak alınmıştır.

Ayar dönüşümleri, Grönwold-Moyal çarpım ile:

$$\delta \hat{V}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda} - \left[\hat{V}_\mu, \hat{\Lambda}\right]_*$$

olarak tanımlanır. Burada, 1. mertebeye kadar deforme çarpımdan gelen terim

$$\begin{aligned}
\left[\hat{V}_\mu, \hat{\Lambda}\right]_* &= \hat{V}_\mu * \hat{\Lambda} - \hat{\Lambda} * \hat{V}_\mu \\
&= \left[\hat{V}_\mu, \hat{\Lambda}\right] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\left\{\partial_\rho \hat{V}_\mu, \partial_\sigma \hat{\Lambda}\right\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şapkalı gösterim, değişimsiz uzay elemanlarını göstermektedir. Riemann tensörleri ise aynı yaklaşımla,

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{V}_\nu - \partial_\nu \hat{V}_\mu - \left[\hat{V}_\mu, \hat{V}_\nu\right]_*$$

olur. Yukarıdaki ifade de olduğu gibi Grönwold-Moyal çarpımından dolayı, Riemann tensörleri, θ mertebesinden

$$[\hat{V}_\mu, \hat{V}_\nu]_*] = [\hat{V}_\mu, \hat{V}_\nu] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\{\partial_\rho V_\mu, \partial_\sigma V_\nu\} \tag{3.80}$$

gibi üreteçlerin antikomütasyonlarını içeren terimler içerir.

Süperkonformal cebrin aşağıdaki gibi olduğunu belirtmiştik.

$$
\begin{aligned}
[P_m, D] &= P_m \ , \quad [K_m, D] = -K_m \ , \quad [K_m, P_n] = -2\left(g_{mn}D + M_{mn}\right) \ , \\
[P_m, M_{rs}] &= g_{mr}P_s - g_{ms}P_r \ , \quad [K_m, M_{rs}] = g_{mr}K_s - g_{ms}K_r \ , \\
[M_{mn}, M_{rs}] &= g_{ms}M_{nr} + g_{nr}M_{ms} - g_{mr}M_{ns} - g_{ns}M_{mr} \ , \\
\left\{Q^\alpha, Q^\beta\right\} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^m C^{-1}\right)^{\alpha\beta} P_m \ , \quad \left\{S^\alpha, S^\beta\right\} = -\frac{1}{2}\left(\gamma^m C^{-1}\right)^{\alpha\beta} K_m \ , \\
\left\{Q^\alpha, S^\beta\right\} &= \frac{1}{2}\left(C^{-1}\right)^{\alpha\beta} D - \left(\sigma^{mn}C^{-1}\right)^{\alpha\beta} M_{mn} - i\left(\gamma^5 C^{-1}\right)^{\alpha\beta} A \ , \\
[Q^\alpha, M_{mn}] &= \left(\sigma_{mn}Q\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, M_{mn}] = \left(\sigma_{mn}S\right)^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, D] &= \frac{1}{2}Q^\alpha \ , \quad [S^\alpha, D] = -\frac{1}{2}S^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, A] &= -\frac{3i}{4}\left(\gamma^5 Q\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, A] = \frac{3i}{4}\left(\gamma^5 S\right)^\alpha \ , \\
[Q^\alpha, K_m] &= -\left(\gamma_m S\right)^\alpha \ , \quad [S^\alpha, P_m] = \left(\gamma_m Q\right)^\alpha \ ,
\end{aligned}
$$

Yukarıda bahsedildiği üzere cebiri, üreteçlerin antikomütasyon ilişkilerini içerecek şekilde genişletmek gerekmektedir. [33] derlemesinde bulunan süperkonformal cebrin üreteçlerinin matris temsilinden kısmen yararlanılsa da tüm cebri oluşturmak için söz konusu temsil yeterli olmamıştır. Bu durumda cebirin kapanması yönünde, antikomütasyon ilişkilerinin nasıl olabileceği düşünülerek kalan ilişkiler belirlenmiştir. Konformal süpercebrin üreteçlerinin antikomütasyon ilişkileri aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
\{D, D\} &= 2iA \ , \quad \{D, M_{mn}\} = -i\epsilon_{mn}{}^{rs}M_{rs} \ , \quad \{P_m, M_{rs}\} = -i\epsilon_{mrsn}P^n \ , \\
\{K_m, P_n\} &= -4ig_{mn}A + 2i\epsilon_{mn}{}^{rs}M_{rs} \ , \quad \{K_m, M_{rs}\} = i\epsilon_{mrsn}K^n \ , \\
\{M_{mn}, M_{rs}\} &= -4i\epsilon_{mnrs}D + 8i\left(g_{ms}g_{nr} - g_{mr}g_{ns}\right) A \ , \\
\{A, A\} &= -\frac{i}{2}A \ , \quad \{A, D\} = -\frac{i}{2}D \ , \\
\{A, P_m\} &= -\frac{i}{2}P_m \ , \quad \{A, K_m\} = -\frac{i}{2}K_m \ , \quad \{A, M_{mn}\} = -\frac{i}{2}M_{mn} \ , \\
\left[Q^\alpha, Q^\beta\right] &= -\frac{1}{2}\left(\gamma^m\gamma^5 C^{-1}\right)^{\alpha\beta} P_m \ , \quad \left[S^\alpha, S^\beta\right] = \frac{1}{2}\left(\gamma^m\gamma^5 C^{-1}\right)^{\alpha\beta} K_m \ , \\
\left[Q^\alpha, S^\beta\right] &= \frac{1}{2}\left(\gamma^5 C^{-1}\right)^{\alpha\beta} D - \left(\gamma^5\sigma^{mn}C^{-1}\right)^{\alpha\beta} M_{mn} - i\left(C^{-1}\right)^{\alpha\beta} A \ , \\
\{Q^\alpha, M_{mn}\} &= \left(\sigma_{mn}Q\right)^\alpha \ , \quad \{S^\alpha, M_{mn}\} = \left(\sigma_{mn}S\right)^\alpha \ , \\
\{Q^\alpha, D\} &= \frac{1}{2}Q^\alpha - \left(\gamma^5 Q\right)^\alpha \ , \quad \{S^\alpha, D\} = -\frac{1}{2}S^\alpha - \left(\gamma^5 S\right)^\alpha \ , \\
\{Q^\alpha, A\} &= -\frac{3i}{4}\left(\gamma^5 Q\right)^\alpha - \frac{i}{2}Q^\alpha \ , \quad \{S^\alpha, A\} = \frac{3i}{4}\left(\gamma^5 S\right)^\alpha - \frac{i}{2}S^\alpha \ , \\
\{Q^\alpha, K_m\} &= \left(\gamma_m S\right)^\alpha \ , \quad \{S^\alpha, P_m\} = -\left(\gamma_m Q\right)^\alpha \ ,
\end{aligned}
$$

Minkowski alanları dilinden, değişimsiz alanlar ve onlara karşılık gelen ayar parametreleri ise,

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_\mu &= a_\mu + h\mathring{a}_\mu \quad , \quad \hat{\alpha} = \alpha + h\mathring{\alpha} \\
\hat{b}_\mu &= b_\mu + h\mathring{b}_\mu \quad , \quad \hat{\beta} = \beta + h\mathring{\beta} \\
\hat{e}^m_\mu &= e^m_\mu + h\mathring{e}^m_\mu \quad , \quad \hat{\xi}^m = \xi^m + h\mathring{\xi}^m \\
\hat{f}^m_\mu &= f^m_\mu + h\mathring{f}^m_\mu \quad , \quad \hat{\zeta}^m = \zeta^m + h\mathring{\zeta}^m \\
\hat{\omega}^{mn}_\mu &= \omega^{mn}_\mu + h\mathring{\omega}^{mn}_\mu \quad , \quad \hat{\lambda}^{mn} = \lambda^{mn} + h\mathring{\lambda}^{mn} \\
\hat{\bar{\psi}}_{\mu,\alpha} &= \bar{\psi}_{\mu,\alpha} + h\mathring{\bar{\psi}}_{\mu,\alpha} \quad , \quad \hat{\bar{\epsilon}}_\alpha = \bar{\epsilon}_\alpha + h\mathring{\bar{\epsilon}}_\alpha \\
\hat{\bar{\varphi}}_{\mu,\alpha} &= \bar{\varphi}_{\mu,\alpha} + h\mathring{\bar{\varphi}}_{\mu,\alpha} \quad , \quad \hat{\bar{\varepsilon}}_\alpha = \bar{\varepsilon}_\alpha + h\mathring{\bar{\varepsilon}}_\alpha
\end{aligned}
$$

olur. Halkalı notasyon, θ deformasyon parametresi türünden yüksek mertebeli terimleri ifade etmektedir. Yukarıda verilen cebirsel ilişkilerden her bir simetriye dair ayar alanların dönüşümleri aşağıdaki gibi bulunur.

R-simetrisi olan $U(1)$ simetrisini gösteren A simetrisinin ayar alanı olan $\hat{a}_\mu$ alanının dönüşümleri:

$$
\begin{aligned}
\delta a_\mu &= \partial_\mu \alpha - i\kappa_1 \bar{\psi}_\mu \gamma^5 \varepsilon + i\kappa_2 \bar{\varphi}_\mu \gamma^5 \epsilon \\
\delta \mathring{a}_\mu &= \partial_\mu \mathring{\alpha} - i\kappa_1 \left[\mathring{\bar{\psi}}_\mu \gamma^5 \varepsilon + \bar{\psi}_\mu \gamma^5 \mathring{\varepsilon}\right] + i\kappa_2 \left[\mathring{\bar{\varphi}}_\mu \gamma^5 \epsilon + \bar{\varphi}_\mu \gamma^5 \mathring{\epsilon}\right] \\
&\quad -\theta^{\rho\sigma} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} \left(\partial_\rho a_\mu\right)\left(\partial_\sigma \alpha\right) - \left(\partial_\rho b_\mu\right)\left(\partial_\sigma \beta\right) + 2\left(\partial_\rho e^m_\mu\right)\left(\partial_\sigma \zeta^n\right) g_{mn} \\ +2\left(\partial_\rho f^m_\mu\right)\left(\partial_\sigma \xi^n\right) g_{mn} - \frac{1}{2}\partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \partial_\sigma \varepsilon \\ +\frac{1}{2}\partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \gamma^5 \partial_\sigma \epsilon + \left(\partial_\rho \omega^{mn}_\mu\right)\left(\partial_\sigma \lambda^{rs}\right)\left(g_{ms} g_{nr} - g_{mr} g_{ns}\right) \end{array} \right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. İlk terim sıfırıncı mertebeden terimin dönüşümünü, ikinci terim birinci mertebeden terimin dönüşümünü göstermektedir.

Dilatasyon simetrisinin ayar alanı olan $\hat{b}_\mu$ alanının dönüşümleri:

$$
\begin{aligned}
\delta b_\mu &= \partial_\mu \beta - 2e^m_\mu \zeta^n g_{mn} + 2f^m_\mu \xi^n g_{mn} + \frac{1}{2}\kappa_1 \bar{\psi}_\mu \varepsilon - \frac{1}{2}\kappa_2 \bar{\varphi}_\mu \epsilon \\
\delta \mathring{b}_\mu &= \partial_\mu \mathring{\beta} - 2\mathring{e}^m_\mu \zeta^n g_{mn} - 2e^m_\mu \mathring{\zeta}^n g_{mn} + 2\mathring{f}^m_\mu \xi^n g_{mn} + 2f^m_\mu \mathring{\xi}^n g_{mn} \\
&\quad +\frac{1}{2}\kappa_1 \left[\mathring{\bar{\psi}}_\mu \varepsilon + \bar{\psi}_\mu \mathring{\varepsilon}\right] - \frac{1}{2}\kappa_2 \left[\mathring{\bar{\varphi}}_\mu \epsilon + \bar{\varphi}_\mu \mathring{\epsilon}\right] + \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\psi}_\mu \partial_\sigma \varepsilon - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \partial_\sigma \epsilon \\
&\quad -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma} \left[\left(\partial_\rho a_\mu\right)\left(\partial_\sigma \beta\right) + \left(\partial_\rho b_\mu\right)\left(\partial_\sigma \alpha\right)\right] + \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho \omega^{mn}_\mu\right)\left(\partial_\sigma \lambda^{rs}\right) \epsilon_{mnrs}
\end{aligned}
$$

Ötelenme simetrisi ayar alnını$\hat{e}_\mu^m$ alanının dönüşümleri:

$$
\begin{aligned}
\delta e_\mu^m &= \partial_\mu \xi^m + b_\mu \xi^m - e_\mu^m \beta - e_\mu^n \lambda^{rm} g_{nr} + \omega_\mu^{mn} \xi^r g_{nr} + \frac{1}{2}\kappa_1 \bar{\psi}_\mu \gamma^m \epsilon \\
\delta \mathring{e}_\mu^m &= \partial_\mu \mathring{\xi}^m + \mathring{b}_\mu \xi^m + b_\mu \mathring{\xi}^m - \mathring{e}_\mu^m \beta - e_\mu^m \mathring{\beta} - \mathring{e}_\mu^n \lambda^{rm} g_{nr} - e_\mu^n \mathring{\lambda}^{rm} g_{nr} + \mathring{\omega}_\mu^{mn} \xi^r g_{nr} + \omega_\mu^{mn} \mathring{\xi}^r g_{nr} \\
&\quad + \frac{1}{2}\kappa_1 \left[\bar{\mathring{\psi}}_\mu \gamma^m \epsilon + \bar{\psi}_\mu \gamma^m \mathring{\epsilon}\right] - \frac{i}{4}\kappa_1 \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^m \partial_\sigma \epsilon \\
&\quad - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[(\partial_\rho a_\mu)(\partial_\sigma \xi^m) + \left(\partial_\rho e_\mu^m\right)(\partial_\sigma \alpha)\right] + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\left(\partial_\rho e_\mu^n\right)(\partial_\sigma \lambda^{rs}) - \left(\partial_\rho \omega_\mu^{nr}\right)(\partial_\sigma \xi^s)\right]\epsilon^m{}_{nrs}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Konformal simetrinin ayar alanı $\hat{f}_\mu^m$ alanının dönüşümleri:

$$
\begin{aligned}
\delta f_\mu^m &= \partial_\mu \zeta^m - b_\mu \zeta^m + f_\mu^m \beta - f_\mu^n \lambda^{rm} g_{nr} + \omega_\mu^{mn} \zeta^r g_{nr} - \frac{1}{2}\kappa_2 \bar{\varphi}_\mu \gamma^m \varepsilon \\
\delta \mathring{f}_\mu^m &= \partial_\mu \mathring{\zeta}^m - \mathring{b}_\mu \zeta^m - b_\mu \mathring{\zeta}^m - \mathring{f}_\mu^m \beta - f_\mu^m \mathring{\beta} - \mathring{f}_\mu^n \lambda^{rm} g_{nr} - f_\mu^n \mathring{\lambda}^{rm} g_{nr} + \mathring{\omega}_\mu^{mn} \zeta^r g_{nr} + \omega_\mu^{mn} \mathring{\zeta}^r g_{nr} \\
&\quad - \frac{1}{2}\kappa_2 \left[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu \gamma^m \varepsilon + \bar{\varphi}_\mu \gamma^m \mathring{\varepsilon}\right] + \frac{i}{4}\kappa_2 \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \gamma^m \partial_\sigma \varepsilon \\
&\quad - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[(\partial_\rho a_\mu)(\partial_\sigma \zeta^m) + \left(\partial_\rho f_\mu^m\right)(\partial_\sigma \alpha)\right] - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\left(\partial_\rho f_\mu^n\right)(\partial_\sigma \lambda^{rs}) - \left(\partial_\rho \omega_\mu^{nr}\right)(\partial_\sigma \zeta^s)\right]\epsilon^m{}_{nrs}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Dönme simetrilerinin ayar alanı $\hat{\omega}_\mu^{mn}$ alanının dönüşümleri:

$$
\begin{aligned}
\delta \omega_\mu^{mn} &= -\partial_\mu \lambda^{mn} - 4 e_\mu^m \zeta^n - 4 f_\mu^m \xi^n - 2\omega_\mu^{mr} \lambda_r{}^n + \kappa_1 \bar{\psi}_\mu \sigma^{mn} \varepsilon - \kappa_2 \bar{\varphi}_\mu \sigma^{mn} \epsilon \\
\delta \mathring{\omega}_\mu^{mn} &= -\partial_\mu \mathring{\lambda}^{mn} - 4\mathring{e}_\mu^m \zeta^n - 4 e_\mu^m \mathring{\zeta}^n - 4\mathring{f}_\mu^m \xi^n - 4 f_\mu^m \mathring{\xi}^n - 2\mathring{\omega}_\mu^{mr} \lambda_r{}^n - 2\omega_\mu^{mr} \mathring{\lambda}_r{}^n \\
&\quad + \kappa_1 \left[\bar{\mathring{\psi}}_\mu \sigma^{mn} \varepsilon + \bar{\psi}_\mu \sigma^{mn} \mathring{\varepsilon}\right] - \kappa_2 \left[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu \sigma^{mn} \epsilon + \bar{\varphi}_\mu \sigma^{mn} \mathring{\epsilon}\right] \\
&\quad + \frac{i}{2}\kappa_1 \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\psi}_\mu \sigma^{mn} \partial_\sigma \epsilon - \frac{i}{2}\kappa_2 \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \sigma^{mn} \partial_\sigma \varepsilon + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[(\partial_\rho a_\mu)(\partial_\sigma \lambda^{mn}) - \left(\partial_\rho \omega_\mu^{mn}\right)(\partial_\sigma \alpha)\right] \\
&\quad + \theta^{\rho\sigma}\left[\frac{1}{2}(\partial_\rho b_\mu)(\partial_\sigma \lambda^{rs}) - \frac{1}{2}\left(\partial_\rho \omega_\mu^{rs}\right)(\partial_\sigma \beta) + 2\left(\partial_\rho e_\mu^r\right)(\partial_\sigma \zeta^s) - 2\left(\partial_\rho f_\mu^r\right)(\partial_\sigma \xi^s)\right]\epsilon^{mn}{}_{rs}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Q süpersimetrisinin ayar alanı $\bar{\mathring{\psi}}_{\mu,\beta}$ alanının dönüşümleri:

$$\begin{aligned}
\kappa_1\delta\bar{\psi}_\mu &= \partial_\mu\bar{\epsilon} + \frac{3i}{4}\kappa_1\bar{\psi}_\mu\gamma^5\alpha - \frac{1}{2}\kappa_1\bar{\psi}_\mu\,\beta - \kappa_2\bar{\varphi}_\mu\gamma_m\xi^m - \frac{1}{2}\kappa_1\bar{\psi}_\mu\sigma_{mn}\lambda^{mn} \\
&\quad -\frac{3i}{4}a_\mu\bar{\epsilon}\gamma^5 + \frac{1}{2}b_\mu\bar{\epsilon} + e_\mu^m\bar{\varepsilon}\gamma_m - \frac{1}{2}\omega_\mu^{mn}\bar{\epsilon}\sigma_{mn} \\
\kappa_1\delta\bar{\mathring{\psi}}_\mu &= \partial_\mu\bar{\mathring{\epsilon}} + \frac{3i}{4}\kappa_1\left[\bar{\mathring{\psi}}_\mu\gamma^5\alpha + \bar{\psi}_\mu\gamma^5\mathring{\alpha}\right] - \frac{1}{2}\kappa_1[\bar{\mathring{\psi}}_\mu\,\beta + \bar{\psi}_\mu\,\mathring{\beta}] - \kappa_2[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu\gamma_m\xi^m + \bar{\varphi}_\mu\gamma_m\mathring{\xi}^m] \\
&\quad -\frac{1}{2}\kappa_1[\bar{\mathring{\psi}}_\mu\sigma_{mn}\,\lambda^{mn} + \bar{\psi}_\mu\sigma_{mn}\,\mathring{\lambda}^{mn}] - \frac{3i}{4}\left[a_\mu\bar{\mathring{\epsilon}}\gamma^5 + \mathring{a}_\mu\bar{\epsilon}\gamma^5\right] + \frac{1}{2}[b_\mu\bar{\mathring{\epsilon}} + \mathring{b}_\mu\bar{\epsilon}] \\
&\quad +e_\mu^m\bar{\mathring{\varepsilon}}\gamma_m + \mathring{e}_\mu^m\bar{\varepsilon}\gamma_m - \frac{1}{2}\left[\omega_\mu^{mn}\bar{\mathring{\epsilon}}\sigma_{mn} + \mathring{\omega}_\mu^{mn}\bar{\epsilon}\sigma_{mn}\right] \\
&\quad -\theta^{\rho\sigma}\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{8}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\alpha + \frac{1}{4}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\,\partial_\sigma\alpha + \frac{i}{4}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\,\partial_\sigma\beta - \frac{i}{2}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\beta \\
-\frac{i}{2}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma_m\,\partial_\sigma\xi^m + \frac{i}{4}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\sigma_{mn}\partial_\sigma\lambda^{mn} + \frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu\,\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma^5 + \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu\,\partial_\sigma\bar{\epsilon} \\
+\frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\epsilon} - \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu\,\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma^5 - \frac{i}{2}\partial_\rho e_\mu^m\,\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\gamma_m - \frac{i}{4}\partial_\rho\omega_\mu^{mn}\,\partial_\sigma\bar{\epsilon}\sigma_{mn}
\end{array}\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

S süpersimetrisinin ayar alanı $\bar{\mathring{\varphi}}_{\mu,\beta}$ alanının dönüşümleri:

$$\begin{aligned}
\kappa_2\delta\bar{\varphi}_\mu &= \partial_\mu\bar{\varepsilon} - \frac{3i}{4}\kappa_2\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\alpha + \frac{1}{2}\kappa_2\bar{\varphi}_\mu\beta + \kappa_1\bar{\psi}_\mu\gamma_m\zeta^m - \frac{1}{2}\kappa_2\bar{\varphi}_\mu\sigma_{mn}\lambda^{mn} \\
&\quad +\frac{3i}{4}a_\mu\,\bar{\varepsilon}\gamma^5 - \frac{1}{2}b_\mu\,\bar{\varepsilon} - f_\mu^m\,\bar{\epsilon}\gamma_m - \frac{1}{2}\omega_\mu^{mn}\,\bar{\varepsilon}\sigma_{mn} \\
\kappa_2\delta\bar{\mathring{\varphi}}_\mu &= \partial_\mu\bar{\mathring{\varepsilon}}_\beta - \frac{3i}{4}\kappa_2[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu\gamma^5\alpha + \bar{\varphi}_\mu\gamma^5\mathring{\alpha}] + \frac{1}{2}\kappa_2[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu\,\beta + \bar{\varphi}_\mu\,\mathring{\beta}] \\
&\quad +\kappa_1[\bar{\mathring{\psi}}_\mu\gamma_m\zeta^m + \bar{\psi}_\mu\gamma_m\mathring{\zeta}^m] - \frac{1}{2}\kappa_2[\bar{\mathring{\varphi}}_\mu\sigma_{mn}\lambda^{mn} + \bar{\varphi}_\mu\sigma_{mn}\mathring{\lambda}^{mn}] \\
&\quad +\frac{3i}{4}\left[\mathring{a}_\mu\,\bar{\varepsilon}\gamma^5 + a_\mu\,\bar{\mathring{\varepsilon}}\gamma^5\right] - \frac{1}{2}[\mathring{b}_\mu\,\bar{\varepsilon} + b_\mu\,\bar{\mathring{\varepsilon}}] \\
&\quad -\mathring{f}_\mu^m\,(\bar{\epsilon}\gamma_m)_\beta - f_\mu^m\,\left(\bar{\mathring{\epsilon}}\gamma_m\right)_\beta - \frac{1}{2}\left[\mathring{\omega}_\mu^{mn}\,\bar{\varepsilon}\sigma_{mn} + \omega_\mu^{mn}\,\bar{\mathring{\varepsilon}}\sigma_{mn}\right] \\
&\quad +\theta^{\rho\sigma}\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{8}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\alpha - \frac{1}{4}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\,\partial_\sigma\alpha + \frac{i}{4}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\partial_\sigma\beta + \frac{i}{2}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\beta \\
-\frac{i}{2}\kappa_1\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma_m\partial_\sigma\zeta^m - \frac{i}{4}\kappa_2\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\sigma_{mn}\partial_\sigma\lambda^{mn} + \frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu\,\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\gamma^5 - \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu\,\partial_\sigma\bar{\varepsilon} \\
+\frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon} + \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\gamma^5 - \frac{i}{2}\partial_\rho f_\mu^m\,\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma_m + \frac{i}{4}\partial_\rho\omega_\mu^{mn}\,\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\sigma_{mn}
\end{array}\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıda verilen dönüşümler, simetriler açısından değerlendirilebilir. Bu bağlamda, ayar alanların her bir simetri altında ki dönüşümleri baz alınarak simetrilere göre dönüşümler aşağıdaki gibi gruplandılabilir.

R simetrisini ifade eden, $\alpha-$ simetrisi altında alanlar:

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{a}_\mu &= \partial_\mu\hat{\alpha} - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{b}_\mu &= -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{e}_\mu^m &= -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho e_\mu^m\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{f}_\mu^m &= -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f_\mu^m\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_\mu^{mn} &= -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\omega_\mu^{mn}\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{\bar{\psi}}_\mu &= \frac{3i}{4}\hat{\bar{\psi}}_\mu\gamma^5\hat{\alpha} - \frac{3}{8}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\alpha - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\partial_\sigma\alpha \\
\delta_{\hat{\alpha}}\hat{\bar{\varphi}}_\mu &= -\frac{3i}{4}\hat{\bar{\varphi}}_\mu\gamma^5\hat{\alpha} + \frac{3}{8}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\alpha - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\partial_\sigma\alpha
\end{aligned}$$

olarak dönüşür.

Dilatasyonun $\beta-$ simetrisi altında alanlar:

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\beta}}\hat{a}_\mu &= \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\beta \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{b}_\mu &= \partial_\mu\hat{\beta} - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\beta \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{e}_\mu^m &= -\hat{e}_\mu^m\hat{\beta} \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{f}_\mu^m &= \hat{f}_\mu^m\hat{\beta} \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{\omega}_\mu^{mn} &= -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\omega_\mu^{rs}\partial_\sigma\beta\epsilon^{mn}{}_{rs} \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{\bar{\psi}}_\mu &= -\frac{1}{2}\hat{\bar{\psi}}_\mu\hat{\beta} - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\partial_\sigma\beta + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\psi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\beta \\
\delta_{\hat{\beta}}\hat{\bar{\varphi}}_\mu &= \frac{1}{2}\hat{\bar{\varphi}}_\mu\hat{\beta} + \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\partial_\sigma\beta + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\beta
\end{aligned}$$

gibi dönüşür.

Öteleme $\xi-$ simetrisi altında ayar alanları:

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\xi}}\hat{a}_\mu &= -2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f_\mu^m\partial_\sigma\xi^n g_{mn} \\
\delta_{\hat{\xi}}\hat{b}_\mu &= 2\hat{f}_\mu^m\hat{\xi}^n g_{mn} \\
\delta_{\hat{\xi}}\hat{e}_\mu^m &= \partial_\mu\hat{\xi}^m + \hat{b}_\mu\hat{\xi}^m + \hat{\omega}_\mu^{mn}\hat{\xi}^r g_{nr} - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\xi^m - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\omega_\mu^{nr}\partial_\sigma\xi^s\epsilon^m{}_{nrs} \\
\delta_{\hat{\xi}}\hat{f}_\mu^m &= 0 \\
\delta_{\hat{\xi}}\hat{\omega}_\mu^{mn} &= -4\hat{f}_\mu^m\hat{\xi}^n - 2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f_\mu^r\partial_\sigma\xi^s\epsilon^{mn}{}_{rs} \\
\kappa_1\delta_{\hat{\xi}}\hat{\bar{\psi}}_\mu &= -\kappa_2\hat{\bar{\varphi}}_\mu\gamma_m\xi^m - \frac{i}{2}\kappa_2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma_m\partial_\sigma\xi^m \\
\delta_{\hat{\xi}}\hat{\bar{\varphi}}_\mu &= 0
\end{aligned}$$

olarak dönüşür.

Konformal simetri olan $\zeta-$ simetrisi altında alanların:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{a}_{\mu} &= -2\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}e_{\mu}^{m}\partial_{\sigma}\zeta^{n}g_{mn} \\
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{b}_{\mu} &= -2\hat{e}_{\mu}^{m}\hat{\zeta}^{n}g_{mn} \\
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{e}_{\mu}^{m} &= 0 \\
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{f}_{\mu}^{m} &= \partial_{\mu}\hat{\zeta}^{m} - \hat{b}_{\mu}\hat{\zeta}^{m} + \hat{\omega}_{\mu}^{mn}\hat{\zeta}^{r}g_{nr} - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}a_{\mu}\partial_{\sigma}\zeta^{m} + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\omega_{\mu}^{nr}\partial_{\sigma}\zeta^{s}\epsilon^{m}{}_{nrs} \\
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{\omega}_{\mu}^{mn} &= -4\hat{e}_{\mu}^{m}\hat{\zeta}^{n} + 2\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}e_{\mu}^{r}\partial_{\sigma}\zeta^{s}\epsilon^{mn}{}_{rs} \\
\delta_{\hat{\zeta}}\hat{\bar{\psi}}_{\mu} &= 0 \\
\kappa_{2}\delta_{\hat{\zeta}}\hat{\bar{\varphi}}_{\mu} &= \kappa_{1}\hat{\bar{\psi}}_{\mu}\gamma_{m}\hat{\zeta}^{m} + \frac{i}{2}\kappa_{1}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\bar{\psi}_{\mu}\gamma_{m}\partial_{\sigma}\zeta^{m}
\end{aligned}
$$

olaran dönüştüğü görülür.

Dönme simetrisi olan $\lambda-$ simetrisi alanları:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{a}_{\mu} &= -\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\omega_{\mu}^{mn}\partial_{\sigma}\lambda^{rs}\left(g_{ms}g_{nr} - g_{mr}g_{ns}\right) \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{b}_{\mu} &= \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\omega_{\mu}^{mn}\partial_{\sigma}\lambda^{rs}\epsilon_{mnrs} \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{e}_{\mu}^{m} &= -\hat{e}_{\mu}^{n}\hat{\lambda}^{rm}g_{nr} + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}e_{\mu}^{n}\partial_{\sigma}\lambda^{rs}\epsilon^{m}{}_{nrs} \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{f}_{\mu}^{m} &= -\hat{f}_{\mu}^{n}\hat{\lambda}^{rm}g_{nr} - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}f_{\mu}^{n}\partial_{\sigma}\lambda^{rs}\epsilon^{m}{}_{nrs} \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{\omega}_{\mu}^{mn} &= -\partial_{\mu}\hat{\lambda}^{mn} - 2\hat{\omega}_{\mu}^{mr}\hat{\lambda}_{r}{}^{n} + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}a_{\mu}\partial_{\sigma}\lambda^{mn} + \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}b_{\mu}\partial_{\sigma}\lambda^{rs}\epsilon^{mn}{}_{rs} \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{\bar{\psi}}_{\mu} &= -\frac{1}{2}\hat{\bar{\psi}}_{\mu}\sigma_{mn}\hat{\lambda}^{mn} - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\bar{\psi}_{\mu}\sigma_{mn}\partial_{\sigma}\lambda^{mn} \\
\delta_{\hat{\lambda}}\hat{\bar{\varphi}}_{\mu} &= -\frac{1}{2}\hat{\bar{\varphi}}_{\mu}\sigma_{mn}\hat{\lambda}^{mn} - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_{\rho}\bar{\varphi}_{\mu}\sigma_{mn}\partial_{\sigma}\lambda^{mn}
\end{aligned}
$$

olarak dönüştürür.

Q süpersimetrisi olan $\epsilon-$simetrisi altında alanlar:

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{a}_\mu &= i\kappa_2\bar{\hat{\varphi}}_\mu\gamma^5\hat{\epsilon} - \frac{1}{2}\kappa_2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^5\partial_\sigma\epsilon \\
\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{b}_\mu &= -\frac{1}{2}\kappa_2\bar{\hat{\varphi}}_\mu\hat{\epsilon} - \frac{i}{4}\kappa_2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\partial_\sigma\epsilon \\
\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{e}_\mu^m &= \frac{1}{2}\kappa_1\bar{\hat{\psi}}_\mu\gamma^m\hat{\epsilon} + \frac{i}{4}\kappa_1\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\hat{\psi}}_\mu\gamma^m\partial_\sigma\epsilon \\
\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{f}_\mu^m &= 0 \\
\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{\omega}_\mu^{mn} &= \kappa_2\bar{\hat{\varphi}}_\mu\sigma^{mn}\hat{\epsilon} + \frac{i}{2}\kappa_2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\sigma^{mn}\partial_\sigma\epsilon \\
\kappa_1\delta_{\hat{\epsilon}}\bar{\hat{\psi}}_\mu &= \partial_\mu\bar{\hat{\epsilon}} - \frac{3i}{4}\hat{a}_\mu\bar{\hat{\epsilon}}\gamma^5 + \frac{1}{2}\hat{b}_\mu\bar{\hat{\epsilon}} - \frac{1}{2}\hat{\omega}_\mu^{mn}\bar{\hat{\epsilon}}\sigma_{mn} \\
&\quad +\theta^{\rho\sigma}\left[\frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma^5 + \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\bar{\epsilon} + \frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\epsilon} - \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma^5 - \frac{i}{4}\partial_\rho\omega_\mu^{mn}\partial_\sigma\bar{\epsilon}\sigma_{mn}\right] \\
\kappa_2\delta_{\hat{\epsilon}}\bar{\hat{\varphi}}_\mu &= -\hat{f}_\mu^m\bar{\hat{\epsilon}}\gamma_m - \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho f_\mu^m\partial_\sigma\bar{\epsilon}\gamma_m
\end{aligned}$$

olarak dönüşür.

S süpersimetrisi olan $\varepsilon-$simetrisi alanları:

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\varepsilon}}\hat{a}_\mu &= -i\kappa_1\bar{\hat{\psi}}_\mu\gamma_5\hat{\varepsilon} + \frac{1}{2}\kappa_1\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\hat{\psi}}_\mu\gamma_5\partial_\sigma\varepsilon \\
\delta_{\hat{\varepsilon}}\hat{b}_\mu &= \frac{1}{2}\kappa_1\bar{\hat{\psi}}_\mu\hat{\varepsilon} + \frac{i}{4}\kappa_1\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\hat{\psi}}_\mu\partial_\sigma\varepsilon \\
\delta_{\hat{\varepsilon}}\hat{e}_\mu^m &= 0 \\
\delta_{\hat{\varepsilon}}\hat{f}_\mu^m &= -\frac{1}{2}\kappa_2\bar{\hat{\varphi}}_\mu\gamma^m\hat{\varepsilon} - \frac{i}{4}\kappa_2\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\varphi}_\mu\gamma^m\partial_\sigma\varepsilon \\
\delta_{\hat{\varepsilon}}\hat{\omega}_\mu^{mn} &= \kappa_1\bar{\hat{\psi}}_\mu\sigma^{mn}\hat{\varepsilon} + \frac{i}{2}\kappa_1\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\bar{\hat{\psi}}_\mu\sigma^{mn}\partial_\sigma\varepsilon \\
\kappa_1\delta_{\hat{\varepsilon}}\bar{\hat{\psi}}_\mu &= \hat{e}_\mu^m\bar{\hat{\varepsilon}}\,\gamma_m + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho e_\mu^m\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\,\gamma_m \\
\kappa_2\delta_{\hat{\varepsilon}}\bar{\hat{\varphi}}_\mu &= \partial_\mu\bar{\hat{\varepsilon}} + \frac{3i}{4}\hat{a}_\mu\bar{\hat{\varepsilon}}\,\gamma^5 - \frac{1}{2}\hat{b}_\mu\bar{\hat{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\hat{\omega}_\mu^{mn}\bar{\hat{\varepsilon}}\,\sigma_{mn} \\
&\quad -\theta^{\rho\sigma}\left[\frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\,\gamma^5 - \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon} + \frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon} + \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\gamma^5 + \frac{i}{4}\partial_\rho\omega_\mu^{mn}\partial_\sigma\bar{\varepsilon}\,\sigma_{mn}\right]
\end{aligned}$$

olarak dönüştürür.

Aynı yöntemle, her bir simetriye denk gelen Riemann tensörleri,

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_{\mu\nu}(a) &= \partial_\mu \hat{a}_\nu - \partial_\nu \hat{a}_\mu - i\bar{\hat{\psi}}_\mu \gamma_5 \hat{\varphi}_\nu + i\bar{\hat{\varphi}}_\mu \gamma_5 \hat{\psi}_\nu - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma a_\nu + \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma b_\nu \\
&\quad -2\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho e^m_\mu \partial_\sigma f^n_\nu + \partial_\rho f^m_\mu \partial_\sigma e^n_\nu\right] g_{mn} + \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \omega^{mn}_\mu \partial_\sigma \omega^{rs}_\nu \left(g_{ms}g_{nr} - g_{mr}g_{ns}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\psi}_\mu \partial_\sigma \varphi_\nu - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \partial_\sigma \psi_\nu \\
\hat{R}_{\mu\nu}(b) &= \partial_\mu \hat{b}_\nu - \partial_\nu \hat{b}_\mu - 2e^m_\mu f^n_\nu g_{mn} + 2f^m_\mu e^n_\nu g_{mn} + \frac{1}{2}\bar{\hat{\psi}}_\mu \hat{\varphi}_\nu - \frac{1}{2}\bar{\hat{\varphi}}_\mu \hat{\psi}_\nu + \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^5 \partial_\sigma \varphi_\nu \\
&\quad -\frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \gamma^5 \partial_\sigma \psi_\nu - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma b_\nu + \partial_\rho b_\mu \partial_\sigma a_\nu\right] + \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \omega^{mn}_\mu \partial_\sigma \omega^{rs}_\nu \epsilon_{mnrs} \\
\hat{R}^m_{\mu\nu}(e) &= \partial_\mu \hat{e}^m_\nu - \partial_\nu \hat{e}^m_\mu + \hat{b}_\mu \hat{e}^m_\nu - \hat{e}^m_\mu \hat{b}_\nu - \hat{e}^r_\mu \hat{\omega}^{mn}_\nu g_{nr} + \hat{\omega}^{mn}_\mu \hat{e}^r_\nu g_{nr} + \frac{1}{2}\bar{\hat{\psi}}_\mu \gamma^m \hat{\psi}_\nu + \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\psi}_\mu \gamma^m \gamma^5 \partial \\
&\quad -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma e^m_\nu + \partial_\rho e^m_\mu \partial_\sigma a_\nu\right] - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho e^n_\mu \partial_\sigma \omega^{rs}_\nu + \partial_\rho \omega^{rs}_\mu \partial_\sigma e^n_\nu\right] \epsilon^m{}_{nrs} \\
&\quad +\{\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma e^m_\nu - \partial_\rho e^m_\mu \partial_\sigma b_\nu\right]\gamma^5\} \\
\hat{R}^m_{\mu\nu}(f) &= \partial_\mu \hat{f}^m_\nu - \partial_\nu \hat{f}^m_\mu - \hat{b}_\mu \hat{f}^m_\nu + \hat{f}^m_\mu \hat{b}_\nu - \hat{f}^r_\mu \hat{\omega}^{mn}_\nu g_{nr} + \hat{\omega}^{mn}_\mu \hat{f}^r_\nu g_{nr} - \frac{1}{2}\bar{\hat{\varphi}}_\mu \gamma^m \hat{\varphi}_\nu - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \gamma^m \gamma \\
&\quad -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma f^m_\nu + \partial_\rho f^m_\mu \partial_\sigma a_\nu\right] + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho f^n_\mu \partial_\sigma \omega^{rs}_\nu + \partial_\rho \omega^{rs}_\mu \partial_\sigma f^n_\nu\right] \epsilon^m{}_{nrs} \\
&\quad -\{\frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma f^m_\nu - \partial_\rho f^m_\mu \partial_\sigma b_\nu\right]\gamma^5\} \\
\hat{R}^{mn}_{\mu\nu}(\omega) &= \partial_\mu \hat{\omega}^{mn}_\nu - \partial_\nu \hat{\omega}^{mn}_\mu - 4\hat{e}^m_\mu \hat{f}^n_\nu - 4\hat{f}^m_\mu \hat{e}^n_\nu + 2\hat{\omega}_\mu{}^{mr}\hat{\omega}_{\nu,r}{}^n + \bar{\hat{\psi}}_\mu \sigma^{mn}\hat{\varphi}_\nu + \bar{\hat{\varphi}}_\mu \sigma^{mn}\hat{\psi}_\nu \\
&\quad -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\left[\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma \omega^{mn}_\nu + \partial_\rho \omega^{mn}_\mu \partial_\sigma a_\nu\right] + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\psi}_\mu \sigma^{mn}\partial_\sigma \varphi_\nu + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho \bar{\varphi}_\mu \sigma^{mn}\partial_\sigma \psi_\nu \\
&\quad -\theta^{\rho\sigma}\left[\frac{1}{2}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma \omega^{rs}_\nu + \frac{1}{2}\partial_\rho \omega^{rs}_\mu \partial_\sigma b_\nu - 2\partial_\rho e^r_\mu \partial_\sigma f^s_\nu + 2\partial_\rho f^r_\mu \partial_\sigma e^s_\nu\right]\epsilon^{mn}{}_{rs} \\
\hat{R}_{\mu\nu,\alpha}(\psi) &= \partial_\mu \bar{\hat{\psi}}_{\nu,\alpha} - \partial_\nu \bar{\hat{\psi}}_{\mu,\alpha} - \frac{3i}{4}\hat{a}_\mu(\bar{\hat{\psi}}_\nu \gamma^5)_\alpha + \frac{3i}{4}(\bar{\hat{\psi}}_\mu \gamma^5)_\alpha \hat{a}_\nu + \frac{1}{2}\hat{b}_\mu \bar{\hat{\psi}}_{\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\bar{\hat{\psi}}_{\mu,\alpha}\hat{b}_\nu \\
&\quad +\hat{e}^m_\mu(\bar{\hat{\varphi}}_\nu \gamma_m)_\alpha - (\bar{\hat{\varphi}}_\mu \gamma_m)_\alpha \hat{e}^m_\nu - \frac{1}{2}\omega^{mn}_\mu(\bar{\hat{\psi}}_\nu \sigma_{mn})_\alpha + \frac{1}{2}(\bar{\hat{\psi}}_\mu \sigma_{mn})_\alpha \hat{\omega}^{mn}_\nu \\
&\quad -\theta^{\rho\sigma}\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{8}\partial_\rho(\bar{\psi}_\mu \gamma^5)_\alpha \partial_\sigma a_\nu + \frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma(\bar{\psi}_\nu \gamma^5)_\alpha + \frac{1}{4}\partial_\rho \bar{\psi}_{\mu,\alpha}\partial_\sigma a_\nu + \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma \bar{\psi}_{\nu,\alpha} \\
+\frac{i}{4}\partial_\rho \bar{\psi}_{\mu,\alpha}\partial_\sigma b_\nu - \frac{i}{2}\partial_\rho(\bar{\psi}_\mu \gamma^5)_\alpha \partial_\sigma b_\nu + \frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma \bar{\psi}_{\nu,\alpha} - \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma(\bar{\psi}_\nu \gamma^5)_\alpha \\
-\frac{i}{2}\partial_\rho(\bar{\varphi}_\mu \gamma_m)_\alpha \partial_\sigma e^m_\nu - \frac{i}{2}\partial_\rho e^m_\mu\, \partial_\sigma(\bar{\varphi}_\nu \gamma_m)_\alpha \\
-\frac{i}{4}\partial_\rho(\bar{\psi}_\mu \sigma_{mn})_\alpha \partial_\sigma \omega^{mn}_\nu - \frac{i}{4}\partial_\rho \omega^{mn}_\mu\, \partial_\sigma(\bar{\psi}_\nu \sigma_{mn})_\alpha
\end{array}\right] \\
\hat{R}_{\mu\nu,\alpha}(\varphi) &= \partial_\mu \bar{\hat{\varphi}}_{\nu,\alpha} - \partial_\nu \bar{\hat{\varphi}}_{\mu,\alpha} + \frac{3i}{4}\hat{a}_\mu(\bar{\hat{\varphi}}_\nu \gamma^5)_\alpha - \frac{3i}{4}(\bar{\hat{\varphi}}_\mu \gamma^5)_\alpha \hat{a}_\nu - \frac{1}{2}\hat{b}_\mu \bar{\hat{\varphi}}_{\nu,\alpha} + \frac{1}{2}\bar{\hat{\varphi}}_{\mu,\alpha}\hat{b}_\nu \\
&\quad -\hat{f}^m_\mu(\bar{\hat{\psi}}_\nu \gamma_m)_\alpha + (\bar{\hat{\psi}}_\mu \gamma_m)_\alpha \hat{f}^m_\nu - \frac{1}{2}\omega^{mn}_\mu(\bar{\hat{\varphi}}_\nu \sigma_{mn})_\alpha + \frac{1}{2}(\bar{\hat{\varphi}}_\mu \sigma_{mn})_\alpha \hat{\omega}^{mn}_\nu \\
&\quad +\theta^{\rho\sigma}\left[\begin{array}{l}
+\frac{3}{8}\partial_\rho(\bar{\varphi}_\mu \gamma^5)_\alpha \partial_\sigma a_\nu + \frac{3}{8}\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma(\bar{\varphi}_\nu \gamma^5)_\alpha - \frac{1}{4}\partial_\rho \bar{\varphi}_{\mu,\alpha}\partial_\sigma a_\nu - \frac{1}{4}\partial_\rho a_\mu \partial_\sigma \bar{\varphi}_{\nu,\alpha} \\
-\frac{i}{4}\partial_\rho \bar{\varphi}_{\mu,\alpha}\partial_\sigma b_\nu + \frac{i}{2}\partial_\rho(\bar{\varphi}_\mu \gamma^5)_\alpha \partial_\sigma b_\nu - \frac{i}{4}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma \bar{\varphi}_{\nu,\alpha} + \frac{i}{2}\partial_\rho b_\mu \partial_\sigma(\bar{\varphi}_\nu \gamma^5)_\alpha \\
-\frac{i}{2}\partial_\rho(\bar{\psi}_\mu \gamma_m)_\alpha \partial_\sigma f^m_\nu - \frac{i}{2}\partial_\rho f^m_\mu \partial_\sigma(\bar{\psi}_\nu \gamma_m)_\alpha \\
+\frac{i}{4}\partial_\rho(\bar{\varphi}_\mu \sigma_{mn})_\alpha \partial_\sigma \omega^{mn}_\nu + \frac{i}{4}\partial_\rho \omega^{mn}_\mu\, \partial_\sigma(\bar{\varphi}_\nu \sigma_{mn})_\alpha
\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Ayar dönüşümleri altında, Riemann tensörlerinin,

$$\delta\hat{R} = [\hat{\Lambda}, \hat{R}]_* \tag{3.81}$$

olarak dönüşmesi gerekir. Dolayısıyla cebrin, dönüşümlerin ve bunlara bağlı olarak Riemann tensörlerinin doğruluğunun bu tanım üzerinden sınanması zorunludur. Fakat tensörlerin dönüşümlerinin ayar dönüşüm tanımına uyduğu gösterilememiştir. Sorunun kaynağı olarak bir çok gerekçe akla gelebilir. En basitinden süpergravitenin değişimsiz uzayda tanımsız olduğu söylenebilir ya da teknik bazı hatalardan çözüm bulunamamış olabilir. Fiziksel olarak konuya bakılırsa cebirsel açıdan muhtemel iki durum göze çarpmaktadır. Öncelikle cebirde R-simetrisinin bir kısmı alınmıştır, tam simetri $SU(2) \times U(1)$'dır. Dolayısıyla cebir bu yönden eksik kalmış olabilir. Diğer olasılık, antikomütasyon ilişkiler, üreteçlerin değişmesiz uzay anlamında güvenilir bir temsilinden yoksun olarak hesaplanmak zorunda kalınmıştır. Bu durum cebirde bir takım hataların oluşmasına sebebiyet vermiş olabilir. Fakat ikinci durumdan kaynaklanacak muhtemel hatalar, olası tüm durumlar değerlendirilerek minimuma indirilmiye çalışılmıştır. Özetle problem, burada belirtilemeyen gerekçeler dahil olmak üzere, yanıtsız kalmıştır.

Çözüm önerisi olarak, problemi dört boyutta tüm R-simetrisi göz önüne alınarak çözmek denenebilir. Bu durumda $SU(2)$ simetrisini dahil etmek gerekeceğinden, hesapların biraz daha karmaşıklaşacağı açıktır. Cebirsel ilişkilerin olasılık sayısı doğal olarak artacak olması bu yaklaşımın bir handikapı olarak görülebilir. Diğer bir olasılık, altı boyutta konformal süpercebri kullanmak olabilir. Altı boyutta R-simetri $USp(4)$ fakat süperkonformal cebir $OSp(8,4)$'tür.

3.7. BİRLEŞİMSİZ UZAY VE GRAVİTE

Birleşimsiz uzay kısmında anlatıldığı üzere, θ deformasyon parametresi yerel ve aynı zamanda Jacobi özdeşliğine uymadığında Kontsevich çarpım birleşimsizdir. Bu durumun ayar dönüşümleri üzerine etkisi skaler bir teori göz önüne alınarak değerlendirilmiştir [36]. Benzer yaklaşım, gravite elemanları üzerinde de denenebilir.

Kontsevich çarpımı,

$$f \bullet g = fg + \frac{i}{2}\theta^{mn}\partial_m f \partial_n g - \frac{1}{8}\theta^{mp}\theta^{nr}\partial_m\partial_n f \partial_p\partial_r g - \frac{1}{12}\theta^{mr}\partial_r\theta^{np}(\partial_m\partial_n f \partial_p g - \partial_m f \partial_n \partial_p g) + ... \tag{3.82}$$

olarak verilir. Riemann tensörü spin bağlantıları türünden

$$R^{ab}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} + 2\omega_{[\mu}{}^{ac} \bullet \omega_{\nu]c}{}^{b} \tag{3.83}$$

olarak verilir. Burada, $X_{[a} \bullet Y_{b]} = X_a \bullet Y_b - X_b \bullet Y_a$ olarak tanımlanmıştır. Spin bağlantıları,Λ ayar parametresi olmak üzere,

$$\delta\omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \Lambda^{ab} + 2\omega_\mu{}^{[ac} \bullet \Lambda_c{}^{b]} \tag{3.84}$$

halinde dönüşsün. [36] çalışmasında verilen sonucun, burada da Riemann tensörü için geçerli olduğu, $\delta R^{ab}_{\mu\nu}$ dönüşümü hesaplandığında görülür. Tensör, dönüşümler altında ayar teori tanımına uygun olarak dönüşmez. Dolayısıyla, Kontsevich çarpım var iken söz konusu dönüşümlerin bir simetri ifade etmediği söylenebilir. Diğer taraftan, bu durum Kontsevich çarpımı kullandığımız bir fonksiyon cebri için, alan tanımlarının doğru yapılmadığı yönünde yorumlanabilir. Bu bağlamda spin bağlantının dönüşümünde ve Riemann tensöründe, ayar dönüşümlere sadık kalınmasını sağlayacak düzeltmeler yapılması gerekir. Bu düzeltmeleri hesaplamak için, spin bağlantının dönüşümü ve Riemann tensör,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{ab} &= \Lambda^{ab} + Y^{ab} \\ \delta\tilde{\omega}_{\mu]}{}^{ab} &= \partial_\mu \Lambda^{ab} + 2\omega_\mu{}^{[ac} \bullet \Lambda_c{}^{b]} + P_\mu{}^{ab} \\ \tilde{R}^{ab}_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} + 2\omega_{[\mu}{}^{ac} \bullet \omega_{\nu]c}{}^{b} + Z^{ab}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.85}$$

olarak yeniden tanımlanır. $P_\mu{}^{ab}$ ve $Z^{ab}_{\mu\nu}$ en az θ mertesinden terimler içerir. Yukarıda verilen dönüşüm altında Riemann tensörü,

$$\delta\tilde{R}^{ab}_{\mu\nu} = \tilde{R}^{ac}_{\mu\nu} \bullet \tilde{\Lambda}_c{}^{b} - \tilde{R}^{bc}_{\mu\nu} \bullet \tilde{\Lambda}_c{}^{a} \tag{3.86}$$

tanımına uygun olarak dönüşmelidir. θ yerel bir fonksiyon olduğundan dönüşümlere duyarlı olmasına izin verilir ve yerel olması vesilesiyle,

$$\delta(A \bullet B) \neq \delta A \bullet B + A \bullet \delta B \tag{3.87}$$

olur. Bu koşullar altında, aşağıda sıralanan

$$
\begin{aligned}
P_\mu^{ab} &= \frac{i}{4}\partial\mu\theta^{\rho\sigma}\{\omega_\rho, \partial_\sigma\Lambda\}^{ab} + ... \\
Z_{\mu\nu}^{ab} &= \frac{i}{4}\partial_\mu\theta^{\rho\sigma}\{\omega_\rho, \partial_\sigma\omega_\nu + R_{\sigma\nu}\}^{ab} - \mu \leftrightarrow \nu \\
\delta\theta^{\mu\nu} &= 0 \\
Y^{ab} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

sonuçlar elde edilir. Bu bulgular ışığında spin bağlantının dönüşümü ve eğrilik tensörü,

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{\omega}_{\mu]}{}^{ab} &= \omega_{\mu]}{}^{ab} - \frac{i}{4}\partial\mu\theta^{\rho\sigma}\{\omega_\rho, \partial_\sigma\Lambda\}^{ab} + ... \\
\tilde{R}_{\mu\nu}^{ab} &= R_{\mu\nu}^{ab} + \frac{i}{4}\partial_\mu\theta^{\rho\sigma}\{\omega_\rho, \partial_\sigma\omega_\nu + R_{\sigma\nu}\}^{ab}
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

olur.

Yukarıda verilen yeni tanımlar altında eğrilik tensörü, dönüşüm kuralına uygun olarak dönüşür. Görüldüğü üzere, yerel bir fonksiyon olmasına rağmen θ dönüşümlere kayıtsızdır ve değişmezlik için $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$ koşulunun sağlanması gerekir.

3.7.1. Seiberg-Witten Göndermesi

θ deformasyon parametresi sabit olduğu durumda, değişmesiz uzaydaki bir ayar teoriyi değişmeli uzaydaki bir teori arasında SW-göndermesi olarak adlandırılan bir eşdeğerlik ilişkisi olduğu bilinmekedir [35]. Aynı göndermenin, θ parametresinin yerel ve Kontsevich çarpımın geçerli olduğu bir durumda geçerliliğinin olduğu ayar dönüşümleri için [36]'de gösterilmiştir. Chemseddine [69] çalışmasında da spin bağlantı için, sabit deformasyon parametresi ve Moyal çarpım altında SW-göndermesinin çözümlerini göstermiştir. Bu koşullar altında, yukarıda verilen bulgular ışığında SW-göndermesinin sağlanıp sağlanmadığı sorgulanabilir.

SW-göndermesi,

$$
\hat{\tilde{\omega}}_\mu{}^{ab}(\omega) + \delta\hat{\tilde{\omega}}_\mu{}^{ab}(\omega) = \hat{\tilde{\omega}}_\mu{}^{ab}(\omega_\mu{}^{ab} + \delta\omega_\mu{}^{ab}) \tag{3.90}
$$

olarak verilir. (3.89)'de verilen Kontsevich çarpımlı ayar dönüşümlere sadık spin bağlantı, SW-göndermesinde değerlendirildiğinde,

$$\hat{\hat{\omega}}_\mu{}^{ab}(\omega) = \omega_\mu{}^{ab} - \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\{\omega_\rho, \partial_\sigma\omega_\mu + R_{\sigma\mu}\}^{ab} + ... \tag{3.91}$$

sonucu bulunur. Spin bağlantının yukarıda verilen çözümü kullanılarak eğrilik tensörü hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \hat{\hat{R}}^{ab}_{\mu\nu} &= R^{ab}_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}\{R_{\mu\rho}, R_{\nu\sigma}\}^{ab} \\ &\quad - \frac{i}{4}\{\omega_\rho, (\partial_\sigma + D_\sigma)R_{\mu\nu}\}^{ab} + .. \end{aligned} \tag{3.92}$$

sonucu bulunur.

Yukarıda verilen spin bağlantı çözümü, [69, 99]'de Grönwold-Moyal çarpım (sabit θ için) işlerliğinden SW-göndermesi için bulunan spin bağlantı çözümü ile tamamen aynıdır. Buradan, SW-göndermesinin θ'nın mahiyetinden bağımsız olarak çalıştığı yargısına varılır. SW-göndermesinin, hangi çarpım olursa olsun, ayar dönüşüme göre değişmez elemanlar söz konusu olduğunda aynı çözümleri vereceği anlamına gelir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Heterotik ve Tip IIA teoriler arasında dört boyutta S tip kütleli düalite ilişkisi kuruldu. Her iki teori altı boyuttan, dilaton ve metrik alanlarını içeren alanlar kümesinin ölçeklendirme simetrilerinden yararlanarak tanımlanan burulmalar altında SS indirgeme yapılarak elde edildi. Bu tür indirgeme işlem [29] tarafından heterotik teorinin sadece NS-NS sektörü için uygulanmıştır. Burada verdiğimiz çözümde, heterotik teoride NS-NS alanlara olan ayar çiftlenim Tip IIA teoriye göre zıt işaretli ve 1-form alanlara olan çiftlenim ise aynı işaretlidir.

Kütleli S-düalite ilişkisi, her iki teori arasında şu şekilde kurulmuştur. Teorilerin birinde, skaler, vektör ve 2-form alanlar çeşitli Stückelberg tip kuple olmuş durumdadır. Stückelberg tip çiftlenim, p-form (p=0,1,2) bir alanın belirli ayar dönüşümlerinden sonra $p-1$-form alanın serbestlik derecesini yiyerek kütle kazanmasını sağlar. Kütlesiz durmda, dört boyutta p-form alan $q=2-p$-form alana düaldir. Benzer olarak, $p-1$-form alan $3-p=q+1$-form bir alana düaldir. Bahsi geçen alanlar aralarında birbirlerine Stückelberg tip kupledirler. Bunun sonucu olarak, $p+1$-form alan orjinal teorideki p-form kütleli alanın serbestlik derecelerini yiyerek kütle kazanır. Kütleli $q+1=3-p$ -form alan orjinal teorideki kütleli p-form alana düaldir. Her iki teori arasında ki düalite ilişkisi dilatonun işaretini değiştirdiğinden söz konusu ilişki S tip düalite olarak tanımlanır. Nihai olarak, normal koşullarda her iki teori arasında dört boyutta olan S düalite ilişkisinin akıların varlığında da sürdüğü gösterilmiş olur.

Bu çalışma da karşılaşılan diğer durum ayar süpergravite ile ilgilidir. Burulma çözüm altında elde edilen lagranjiyen, [27]'de verilen dört boyutta $N=4$ ayar süpergravite lagranjiyeni, alanların belirli tanımlamaları altında vermektedir. Burada teorinin $SL(2)\times O(6,22)$ ayarının, $SL(2)$ simetrisine kısmen ayar olduğu belirlenmiştir. Derendinger v.d. [29] tarafından NS-NS sektör için on boyutlu teori üzerinden yapılanlar burada Yang-Mills sektörü dahil ederek tekrarlanmış ve sonuçların aynı özellikte olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada $Sl(2)$ ayarına kısmen sahip bir teori elde edilmiştir, tüm $SL(2)$ simetrisini kapsayacak genişletilmiş bir versiyon üzerinde çalışılabilir.

Çalışmanın diğer içeriği değişimsiz uzay üzerinde süpergravite oluşturmakla ilgiliydi. değişimsiz uzay üzerinde konformal süpergravite oluşturulmaya çalışıldı. Groenwold-Moyal çarpımdan dolayı ayar dönüşümlerini ve gerilim tensörlerinin hesaplanması için operatörlerin anti-komütasyon ilişkilerine gerek duyulduğundan süper konformal cebir van Nieuwenhuizen'in [33] derlemesinde verdiği anti-komütasyon ilişkileri eklenerek deforme süperkonformal cebir oluşturularak, dönüşümler ve gerilim tensörleri hesaplandı. Uzun hesaplamalardan sonra, olası tüm cebirsel ilişkilerin denediği bir süreçten sonra, süpergravitein değişimsiz uzayda ayar simetrisini kırdığı gözlemlendi. Üniter grupların dışında antikomütasyon iliişkilerinin anlamlı olmaması, çalışılabilecek süpergravite teorisini kısıtlar. Üniter bir gruba izomorf tek grup süper konformal $SO(4,2)$ grubudur. Dolayısıyla konformal süpergravite değişimsiz uzay için düşünülebilecek tek teoridir.

Koordinatların değişimsizliği sicim teoride gözlenebilir bir durumdur. D-zarına kuple olmuş membranların ve açık sicimlerin bir artalanın varlığında kuantizasyonundan ortaya çıkar. değişimsizlik parametresi koordinat bağlı ise Kontsevich çarpım etkin olduğunu ve bu durumda ayar değişimsizliğin kaybolduğundan bahsetmiştik [36]. Kuşkusuz ayar gravite elemanları düşünüldüğünde de aynı durum geçerlidir. Burada ayar teori değişmezliği tekrar sağlayacak şekilde gravite elemanları modifiye edildi. Yeniden tanımlanmış alanların, SW göndermesini sağladığı gösterildi.

KAYNAKÇA

[1] CMS Kolaborasyonu, 2013, Observation of a new boson with mass near 125 GeV in pp collisions at sqrt(s) = 7 and 8 TeV, *JHEP*, 1306, 081, [1303.4571 [hep-ex]].

[2] Atlas Kolaborasyonu, 2012, Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, *Phys. Lett.*, B 716, 1-29, [1207.7214 [hep-ex]].

[3] Kaluza, T., On the Problem of Unity in Physics, 1921 *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin (Math.Phys.), 1921, 966-972.

[4] Klein, O., 1928, Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English), *Z. Phys.*, 37, 895-906.

[5] Scherk, J. ve Schwarz, J.H., 1979, Spontaneous Breaking of Supersymmetry Through Dimensional Reduction, *Phys.Lett.*, B82, 60.

[6] Scherk, J. ve Schwarz, J.H., 1979, How to Get Masses from Extra Dimensions, *Nucl.Phys.*, B153, 61-88.

[7] Kaloper, N. ve Myers, R.C., 1999, The Odd Story of Massive Supergravity, *JHEP*, 05, 010, [hep-th/9901045].

[8] Louis, J. ve Micu, A., 2002, Type 2 Theories Compactified on Calabi-Yau Threefolds in the Presence of Background Fluxes, *Nucl.Phys.*, B 635, 395, [hep-th/0202168].

[9] Gurrieri, S., Louis, J., Micu,A. ve Waldram D., 2003 Mirror Symmetry in Generalized Calabi-Yau Compactification, *Nucl.Phys.*, B 654, 61, [hep-th/0211102].

[10] Grana, M., Louis, J. ve Waldram, D., 2007 $SU(3) \times SU(3)$ Compactification and Mirror Duals of Magnetic Fluxes, *JHEP*, 04, 101, [hep-th/0612237].

[11] Hull, C. ve Reid-Edwards, R, 2006 Flux Compactifications of M-Theory on Twisted Tori, *JHEP*, 10, 086, [hep-th/0603094].

[12] Hull, C. ve Townsend P., 1995 Unity of Superstring Dualities, *Nucl.Phys.*, B 438, 109, [hep-th/9410167].

[13] Witten, E., 1995 String Theory Dynamics in Various Dimensions, *Nucl.Phys.*, B 443, 85, [hep-th/9503124].

[14] Sen, A., 1995 String String Duality Conjecture in Six-Dimensions and Charged Solitonic Strings, *Nucl. Phys.*, B 450, 103, [hep-th/9504027].

[15] Harvey, J.A. ve Strominger, A., 1996 The Heterotic String is a Soliton, *Nucl. Phys.*, B 449, 535, [hep-th/9504047]

[16] Behrndt, K., Bergshoeff, E. ve Janssen, B., 1996 Type II Duality Symmetries in Six Dimensions, *Nucl. Phys.*, B 467, 100, [hep-th/9512152].

[17] Schwarz, J.H., 1992 Dilaton-Axion Symmetry, [hep-th/9209125].

[18] Schwarz, J.H. ve Sen, A., 1993 Duality Symmetric Actions, *Nucl.Phys.*, B 411, 35, [hep-th/9304154].

[19] Schwarz, J.H. ve Sen, A., 1993 Duality Symmetries of 4-D Heterotric Strings, *Phys.Lett.*, B 312, 105, [hep-th/9305185].

[20] Sen, A., 1994 Strong-Weak Coupling Duality in Four Dimensional String Theory, *Int. J. Mod. Phys.* A 9,3707, [hep-th/9402002].

[21] Duff, M., 1995 Strong/Weak Coupling Duality from Dual String, *Nucl. Phys.*, B 442, 47, [hep-th/9501030].

[22] Behrndt, K., Bergshoeff, E., Roest, D. ve Sundell, P., 2008 Massive Dualities in Six Dİmensions, *Class. Quant. Grav.*, 19, 2171, [hep-th/0112071].

[23] Haack, M,, Louis, J. ve Singh, H., 2001 Massive Type IIA Theory in K3, *JHEP*, 04, 040, [hep-th/0102110].

[24] Singh, H., 2002 Romans Type IIA Theory and Heterotic Strings, *Phys.Lett.*, B 545, 403, [hep-th/0201206].

[25] Alonso-Alberca, N. ve Ortin, T., 2003 Gauged/Massive Supergravities in Diverse Dimensions, *Nucl.Phys.*, B 651, 263-290, [hep-th/0210011].

[26] Janssen, B., 2001 Massive T-Duality in Six Dimensions, *Nucl. Phys.*, B 610, 280, [hep-th/0105016].

[27] Schön, J, ve Weidner, M., 2006 Gauged N=4 Supergravities, *JHEP*,05, 034, [hep-th/ 0602024].

[28] Weidner, M., 2007 Gauged Supergravities in Various Spacetime Dimensions, *Fortsch.Phys.* 55, 843-945, DESY-THESIS-2006-033 [hep-th/0702084].

[29] Derendinger, J.P., Petropoulos, P. ve Prezas, N., 2007 Axionic symmetry gaugings in N = 4 supergravities and their higher-dimensional origin, *Nucl. Phys.*, B 785, 115, [arXiv:0705.0008].

[30] Villadoro, G. ve Zwirner, F., 2004 The minimal N = 4 no-scale model from generalized dimensional reduction, *JHEP*, 07, 055, [hep-th/0406185].

[31] G. Dall'Agata, G. Villadoro and F. Zwirner, (2009) Type- IIA flux compactifications and N = 4 gauged supergravities, *JHEP*, 08, 018, [arXiv:0906.0370].

[32] de Wit, B. 2002, Supergravity, [hep-th/0212245].

[33] van Nieuwenhuizen, P., 1981, Supergravity, *Phys.Rep.*, 68, 189.

[34] Tanii, Y., 1998, Introduction to Supergravity in Diverse Dimensions, [hep-th/9801138].

[35] Seiberg, N. Witten, E., 1999, String Theory and Noncommutative Geometry, *JHEP*, 9909, 032, [hep-th/9908142].

[36] Das, A. ve Frenkel, J., Kontsevich Product and Gauge Invariance, 2004, *Phys.Rev.* D69, 065017 [hep-th/0311243].

[37] Förste, S. ve Loius, J., 1996, Duality in STring Theory, *Nucl.Phys. Proc.Suppl.*, 61A, 3, [hep-th/9612192].

[38] Sen, A.,1998, An Introduction to nonperturbative string theory, [hep-th/9802051].

[39] Vafa, C., 1997, Lectures on Strings and Duality, [hep-th/970220].

[40] Bernan, D.S., ve Thompson, D.C., 2013 Duality Symmetries and M-Theory, [1306.2643; hep-th].

[41] Morrison, D.R., 2004, TASI lectures on compactification and duality, [hep-th/0411120].

[42] Hull,C.M. ve Townsend,P.K., 1995 Unity of superstring dualities, *Nucl. Phys.*, B438, 109-137, [hep-th/9410167].

[43] Scwarz, J.H., 1997, Lectures on superstring and M theory dualities, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 55B, 1-32, [hep-th/9607201].

[44] Quevedo, F., 1998, Duality and Global Symmetries, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 61A, 23-41, [hep-th/9706210].

[45] Alvarez, E., Alvarez-Gaume, L. ve Lozano, Y., 1995, An Introduction to T-Duality in String Theory, *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 41, 1, [hep-th/9410237].

[46] Giveon, A., Porrati, M. ve Rabinovici, 1994, Target Space Duality in String Theory, *Phys.Rept.*, 244, 77, [hep-th/9401139].

[47] Montonen,C. ve Olive, D.I., 1997, Magnetic Monopoles as Gauge Particles?, *Phys. Lett.*,B72, 117.

[48] Witten, E.,1995 String theory dynamics in various dimensions, *Nucl.Phys.*, B443, 85-126 [hep-th/9503124].

[49] Dabholkar, A., 1995, Ten-dimensional heterotic string as a soliton, *Phys. Lett.*, B357, 307-312, [hep-th/9506160].

[50] Hull,C.,M.,1995, String-string duality in ten-dimensions, *Phys. Lett.*, B357, 545-551, [hep-th/9506194].

[51] Polchinski, J. ve Witten, E., 1996, Evidence for heterotic - type I string duality, *Nucl. Phys.*, B460, 525-540, [hep-th/9510169].

[52] Duff,M.J., 1995 Strong / weak coupling duality from the dual string, *Nucl.Phys.*, B442, 47-63 [hep-th/9501030].

[53] Duff,M.J. ve Khuri,R.R. 1994, Four-dimensional string / string duality, Nucl. Phys. **B411**, 473-486, [hep-th/9305142].

[54] Sen, A., 1995, String string duality conjecture in six-dimensions and charged solitonic strings, *Nucl.Phys.*, B450, 103-114 [hep-th/9504027].

[55] Samtleben, H., 2008, Lectures on Gauged Supergravitiy and Flux Compactifications, [0808.4076,hep-th].

[56] de Wit, B. ve Nicolai, H., 1982, N=8 Supergravity, *Nucl.Phys.*, B208, 323.

[57] Hull, C.M., 1984, Noncompact Gaugings of N=8 Supergravity, *Phys.Lett.*, B142, 39. More Gaugings of N=8 Supergravity, *Phys.Lett.*, B148, 297.

[58] Günaydın, M., Romans, L.J. ve Warner, P., 1986, Compact and Noncomapct Gauged Supergravities in Five Dimensions, *Nucl.Phys.*, B272, 598.

[59] Cardeno,D.G. ve Munoz,C., 1998, An Introduction to Supergravity, *POS Corfu*,011,

[60] de Wit,B.,2002, Supergravity, [arxiv:hep-th/0212245].

[61] Van Hooft, K., 2000, Superconformal Methods in 4 and 6 Dimensions, Ph.D.Tezi, *itf.fys.kuleuven.be/hep/phd/kor.ps.gz*

[62] de Wit, T.C., 2003, Domain-walls and gauged supergravities, Ph.D. Tezi, *dissertations.ub.rug.nl/FILES/faculties/science/2003/t.c.de.wit/thesis.pdf.*

[63] Freund, P.G. ve Rubin, M.A., 1980, Dynamics of Dimensional Reduction *Phys.Lett.*, B97,233-235.

[64] Chemseddine, A.H., Felder, G. ve Fröhlich, J., 1993, Gravity in Noncommutative Geometry, *Commun. Math.Phys.*, 155, 205, [hep-th/9209044].

[65] Madore, J. ve Mouradi, J., 1994, A Noncommutative Extension of Gravity, *Int.J.Mod.Phys.*,D3, 221, [gr-qc/9307030].

[66] Douglas,M. ve Nekrosov, N.A., 2001, Noncommutative Field Theory, *Rev.Mod.Phys.*, 73,977, [arxiv:hep-th/0106048].

[67] Szabo,R., 2003, Quantum Field Theory on Noncommutative Space, *Phys.Rept.*, 378, 207, [arxiv:hep-th/0109162].

[68] Chemseddine, A.H., 2001, Complexified Gravity in Noncommutative Space, *Commun.Math.Phys.*,218,283, [arxiv:hep-th/0005222].

[69] Chemseddine, A.H.,2001, Deforming Einstein's Gravity, *Phys.Lett.*,B504, 33, [arxiv:hep-th/0009153].

[70] Aschieri, P., Blohman, C.,Dimitrijevic,F., Meyer, F. ve Wess,J., 2005, A Gravity Theory on Noncomutative Space, *Class.Quant.Grav.* 22,3511, [arxiv:hep-th/0504183].

[71] Alvarez-Gaume, L, Meyer,F. ve Vazquez-Mozo, M.,2006 Comments on Noncommutative Gravity, [arxiv:hep-th/0605113].

[72] Vassilevich, D.V.,2009, Diffeomorphism covariant star products and noncommutative gravity, *Class.Quant.Grav.*,26,145010, [arxiv:0904.3079].

[73] Harikumar, E. ve Rivelles, V.O., 2006, Noncommutative Gravity, [arxiv:hep-th/0607115].

[74] Salam, A. ve Starthdee, J., 1982 On Kaluza-Klein Theory, Annals. Phys. **141**, 316-352,

[75] Lee, H., ed., 1983, An Introduction to Kaluza-Klein Theories, *Proceedins,workshop, Chalk River, Kanada, 11-16 Ağustos.*

[76] Duff, M.J., 1994, Kaluza-Klein in Perspecitve, [hep-th/9410046].

[77] Bailin, D., ve Love, A., 1987, Kaluza-Klein Theories, *Rep. Prog. Phys.*, 50, 1087-1170.

[78] Pope,C., Kaluza-Klein Theory, Ders Notları; http://people.physics.tamu.edu/pope/ihplec.pdf

[79] Duff, M. J., Nilsson, B. E. W. ve Pope, C. N., 1986, Kaluza-Klein Supergravity, *Phys. Rept.*,bf 130, 1-142.

[80] Banerjee, R., Mukherjee, P. ve Samanta, S, 2007, Lie Algebraic Noncommutative Gravity, [arxiv:hep-th/0703128]

[81] Utiyama,R.,1956 Invariant theoretical interpretation of interaction *Phys. Rev.* 101, 1597

[82] Nordström, G., 1914, On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields, *Phys. Z.*, 15, 504-506, [physics/0702221].

[83] Ortin.,T.,2004 Gravity and Strings *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, 290.

[84] Dabholkar, A., Hull, C. Duality,Twists,Orbifolds and Fluxes, [hep-th/0110209].

[85] Hull, C.M., 1998, Massive string theories from M theory and F theory, *JHEP*, 9811, 027, [hep-th/9811021].

[86] de Wit,B., Samtleben, H. ve Trigiante, M., 2003, On Lagrangians and gaugings of maximal supergravities, *Nucl.Phys.*, B655, 93-126, [hep-th/0212239].

[87] Grana, M., 2006 Flux compactifications in string theory: A Comprehensive review,2006, *Phys. Rept.* , 423, 91-158 [hep-th/0509003].

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	ERDİNÇ ULAŞ SAKA
Uyruğu	TÜRKİYE
Doğum tarihi, Yeri	17.02.1978,ORDU
Telefon	5068992730
E-mail	ulassaka@istanbul.edu.tr
Web adres	

Eğitim

Derece	Kurum/Anabilim Dalı/Programı	Yılı
Doktora	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/ Fizik /Genel Fizik	2013
Yüksek Lisans	İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü/ Fizik /Yüksek Enerji ve Plazma	2007
Lisans	İ.Ü. Fen Fakültesi Fizik Bölümü	2000
Lise	Çaka-Çaytepe Lisesi	1994

1-E.Ulaş SAKA,S.Kayhan ÜLKER, “Dimensional Reduciton, Seiberg-Witten Map and supersymmetry”, Phys.Rev D75 (2007) 085009

2- A.Çatal-Özer,C.Deliduman, E.Ulaş Saka, A Massive S-duality in 4 dimensions, JHEP 1112 (2011) 102

3- E.Ulaş SAKA, Kütleli S-Düalite ve Ayar Süpergravite, YEFİST Çalıştayı , 2014